書　評

偶然の輝き
—ブラウン運動を巡る 2000 年—
池田信行 著，岩波書店，2018 年

明治大学客員教授
楠岡　成雄

この本は，確率論，ブラウン運動，確率解析を，その発展の歴史と共に解説することを目的として書かれているが，数学書としてはかなり異色の本である．偶然性に関連した物理学，生物学などの話題と歴史が同時に述べられており，更に確率論と数学の他分野との関連についても様々な事柄が書かれている．また，偶然性に関する数学者, 科学者, 文学者らの著作からの多くの引用がなされると共に, その人達の生き様, エピソードなどが書かれている．一言で言えば，確率論の発展の歴史を縦糸とし，確率論の様々な数学分野に対する応用を横糸として編まれ，そこに多くの数学者・科学者のエピソードが詰め込まれた作品である．章立ては，確率論の歴史に沿った形でなされているが，応用については，時代にとらわれず，その章の主題に関連した話題が述べられている．余りにも多くの話題が詰め込まれているので，まず本の内容を章に沿って紹介していきたい．

第 1 章は本の導入部である．数式が全く出て来ず，確率論の成立する前史とも言うべきものが書かれており, ローマの詩人ルクレティウスをはじめとする多くの人たちの偶然性に関わる観察や考えが述べられている．

第 2 章はパスカルとフェルマーの確率論に関する歴史的な話から始まり，大数の（弱）法則や中心極限定理について述べられている．特に大数の法則についてはチェビシェフの不等式の証明などを含め詳しく解説されている. その応用としてベルンシュタインによるワイエルシュトラスの多項式近似定理の証明が丁寧に述べられている．ペジェ曲線との関係についても触れられている．この章は高校生にも理解できるような形で書かれている．

第 3 章ではブラウン運動についての自然科学における歴史が述べられている. まずブラウン運動の発見者ブラウンの業績について詳しく述べられている. さらにアインシュタインのブラウン運動の理論, 及びペランによるアインシュタイン理論の実験による検証について，その「原子の存在」の立証に果たす役割を込めて詳しく解説され

ている．この章の最後では，第５章とのつながりで，すべての点で微分できない連続間数の存在を示したワイエルシュトラスの証明について, フーリエ級数による関数の記述の有用性と共に述べられている．

第４章ではまず現代の確率論につながるルベーグの測度論・積分論について解説されているが，測度論の知識のない一般の人には読むことが難しいように思う．この章以後は数学者を対象にしているようで, 組合せの数の記号も第２章では高校数学の記号を用いているが，この章以後は数学者が使う記号が用いられている．また，第２章で述べられた大数の法則を再度一般の場合に, 測度論的確率論の立場で記述している．関連する話題として「交換可能な確率変数列とハウスドルフのモーメント問題」について触れられているが，結果のみが述べられており，証明のアイデアの詳細は参照文献にゆだねられている．

第５章はブラウン運動の標本過程を連続曲線数の空間上の確率測度として表現したウィナーの業績について詳しく述べられている. 特にウィナーがフーリエ級数を用いてブラウン運動を記述した方法について詳しく解説されている. レヴィによる別のブラウン運動の構成法にも触れられおり, ブラウン運動の軌道の微分不可能性に関連したチュン・エルドシュ・白尾の結果についても述べられている．また今日，ブラウン運動の理論の創始者とされるバシェリエの業績について１節を割いて述べられている．関連する話題としてカッツの太鼓の問題について結果のみが述べられている．

第６章では，ブラウン運動の一般化となる，連続に変化していくマルコフ過程（拡散過程）について述べられている．まず第１節で 1930 年代のコルモゴロフの先駆的な業績について述べられている. 第２節では第２次大戦中におけるデブリン, チュン, 角谷ら３人の数学者のエピソードが数ページにわたり述べられている. ここには著者の様々な思いが込められているように感じた. 第３節で拡散過程の標本過程の構成を確率積分, 確率微分方程式という全く新しいアイデアを導入して実現した伊藤の業績について，それがどのようなものかをエピソードを交えて解説されている．多様体上の拡散過程についても触れられている. 第４節では一次元の拡散過程について詳しく解説されている．関連する話題として，ポアンカレの上半平面上のブラウン運動，出生死亡過程についても述べられている．

第７章はブラウン運動の２次汎関数の特性関数について述べられている．まず，代表的な例であるレヴィの確率面積について詳しく解説されている．その後，ヴァン・ヴレックの公式について，ファインマン−カッツの公式と共にそのエピソードも込めて詳しく述べられている．また，オイラー数，ベルヌーイ数との関係についても触れられている．

第８章では確率論と非線型方程式の関係について述べられている．第１節では，分枝過程と非線形拡散方程式の関係について詳しく解説されている．著者自身のエピソードとして，アメリカで講演した時，分枝過程はマルコフ過程であり付随する方程式は線形方程式のはずなのに，何故非線形方程式が出てくるのかをまず説明せよと，カッツに言われて困ったという話が出てくるが，ここでの解説はそれを意識した丁寧なものになっている．第２節は KdV 方程式とガウス過程の２次形式との関係が論じられている．KdV 方程式の説明は簡潔によくまとめられている．ガウス過程との関係は計算のみが書かれており，なぜガウス過程が現れるのかの説明があまりなされていないが，これは将来解明されるべき課題のようである．

以上，内容について述べたが，ここでは書ききれない，多くの確率論に関連する話題や様々な科学者のエピソードが述べられている．本文は 187 ページであるが，参考文献は 307 もの文献があげられているので，特に第４章以後は，関連する数学の話題は，結果のみが書かれているものや，文献を挙げるのみで結果も書かれていないものが多数ある．そのため確率論との関係が，証明のアイデアが書かれていないため，よくわからないと感じる読者も多いかもしれない．少し内容を詰め込みすぎたようにも思うが，どの話題も参考文献が明示されているので，興味があれば参考文献を見てほしいということかと思う．

後書きに書かれているように，この本は池田信行先生の遺作となった．本書を読んでいると，生前，折りにふれ先生からお聞きした色々な話が詰め込まれており，読んでいて色々なことが思い出された．確率論は数学の他分野や諸科学と深い関係を持つと先生は日頃からおっしゃっていたが，その思いが伝わってくる本である．

なお，この本に解説されている確率論の歴史を読むと，確率論が自然科学に先導されて成立したように読者は感じると思うが，19 世紀までの確率論の歴史においては統計学が重要な役割を果たした．池田先生は若いころに統計学の論文も書いておられるので，それを当然ご存じのはずであるが，何故，統計学についてほとんど触れられなかったのか，お聞きできないのが残念である．