会員ニュース

荒川知幸氏の平成31年度文部科学大臣表彰科学技術賞受賞に寄せて

東京大学カブリ数物連携宇宙研究機構
中島　啓

2018年8月，リオデジャネイロの ICM で，柏原さんのチャーン賞受賞式が夕食会の際に行われた．賞金の半額は，柏原さんが指定した京大数理研に寄付されることになり，数理研を代表して荒川さんがよばれ，国際数学連合総裁（当時）の森さんと合わせて3人の数理研関係者が壇上に登った．荒川さんは現役教授で，森さんと柏原さんは特任教授，僭越ながら私も特任教授の末席をけがしている．壇上を見ながらたいへんうれしく感じた．荒川さんは，受賞のことは知らされてはおらず，夕食会の日の予定を空けておくようにだけ言われていたそうである．そのために，1人ネクタイはしていなかったが，「表現論の貴公子」（© 妻）の面目躍如，壇上でもバッチリ決まっていた．

あまり関係のない枕から始めてしまったが，荒川さんがICMに行かれたのは，受賞式に出るためではなく，招待講演者として講演するためである．これまで2013年度代数学賞，2017年度日本数学会賞秋季賞などを受賞されて，国内での評価ははっきりしていたが，招待講演者に選ばれて，分野を牽引する一流の研究者であると，世界的に認識されたのである．そして今回の文部科学大臣表彰科学技術賞を「W代数の表現論の研究」で受賞，数学界の外でも研究の素晴らしさが評価されて，うれしい限りである．荒川さんおめでとうございます．

ちなみに ICM の講演タイトルは，Representation theory of W-algebras and Higgs branch conjecture で，これまで荒川さんがされてきた W 代数の表現論の研究成果を振り返りつつ，出来たてホヤホヤのヒッグス枝に対応する頂点代数に関する結果も紹介するもので，多くの聴衆をワクワクさせたと思う．

荒川さんの研究の内容のくわしい紹介は，これまでの数々の賞の受賞理由や，ご本人による雑誌「数学」の論説を見ていただくこととして，今回は，研究の動機，経緯などを紹介したい．この原稿を書くためにした私の質問に対するご本人の回答に基づくが，あくまで私の目を通しての紹介であることは，ご了解いただきたい．

荒川さんの研究は，なんといっても W 代数の表現論であるが，その前に土屋さん，鈴木さんとアファイン・ヘッケ環，ダブル・アファイン・ヘッケ環に関する共同研究

があって，数年間のブランクのあとに2003年ごろから W 代数の論文を発表し始めたので，脇から見ていて研究テーマを変えたという印象がある．W 代数の研究を始めた動機は誰しも気になるところである．ご本人によれば，W 代数が平滑かつ有理的である[1]という Frenkel-Kac-脇本による予想を目標として，そのためにまずはコホモロジー関手，特に消滅定理について，いろいろとできる可能性があるのではないかと思って始めた，とのことである．実際に，有理性の証明を発表されたのは2012年のことで，10年かかる研究プランを立てる志の高さには感銘を受ける．それとともに，コホモロジーの取り扱いなど，表現論の基礎体力を身に着けていたからこそ，この可能性を見出せた，と先見の明の鋭さには広い知識に基づくしっかりとした裏付けが必要ということを，改めて納得させられる．また，だからこそ，W 代数に対して，他の研究者には真似のできない，荒川さん独自の研究ができたのだと思う．

Zhu らにより，頂点代数が平滑と，有理性を満たせば，その表現の指標がベクトル値モジュラー関数をなすことが知られており，たとえば正レベルのアファイン・リー環（の頂点代数）はそのような例になっていることは，よく知られていた．W 代数が，レベルに関するある条件（許容レベル）を満たすときに，同様の例になっているだろう，というのが予想が主張することである．

W 代数は，アファイン・リー環から hamiltonian 簡約とよばれる操作で得られるもので，初めは理論物理学の2次元共型場理論の枠組みの中で Zamolodchikov により発見されたが，その後 Feigin-Frenkel が頂点代数として数学的に定式化した．hamiltonian 簡約は，もともとはポアソン多様体の群作用に関する商空間として現れたものであるが，W 代数の定義ではその代数的な定式化を無限次元ポアソン多様体に対応しているような状況で用いる．そのため，この状況では Drinfeld-Sokolov 簡約とよばれる．詳しいことは述べないが，結論としてW代数はある非常に大きな複体の，コホモロジー群として定義されることになる．これは，よくある代数の作り方である，生成元と関係式による表示とは趣が異なるもので，W 代数を取っつきにくく感じさせる理由の一つである．一方で，この定義は，その作り方からW代数の表現も同様に，アファイン・リー環の表現からコホモロジーとして構成できることも意味しており，荒川さんはコホモロジーを積極的に調べよう，と最初から考えられていて，それを実際に2003年の論文でやって見せたわけである．

---

[1]有理性の中に平滑（もしくは C2有限）であるという条件が入るべきなのか，いなかは，この当時はあまりはっきりしていなかったとのことであるが，両方が予想されていたとしてよいと思う．

次の荒川さんの大きな結果は，平滑性と随伴多様体が0次元であることが同値であることを示し，その応用としてW代数が許容レベルのときに平滑であることを示したものであり，2010年の二本の論文で発表されている．頂点代数が有理的であるのは，表現が完全可約であることをいうが，そのためには平滑性を仮定して，まず既約表現が有限個しかないことを示すのが自然であり，実際平滑ではないが有理性が成り立つ例は知られていないそうである．いずれにせよ，目標の予想の証明に向けて，半分が示されたことになる．随伴多様体は，Lie 環の表現を調べるときに出てくる随伴多様体の頂点代数における類似である．この結果は言われてみればなるほど，と思えるものであるが，下に紹介するようにこのあとの研究でも随伴多様体の重要性が増しており，目の付け所のよさ，そしてそれがやはり広い知識に基づいていることを改めて感じさせてくれる．

ここまでくれば，有理性の証明はすでに射程圏内であり，許容レベルにおけるアファイン・リー環の表現に関する完全可約性をまず確立してから，証明を2012年に完成させた．

その後は，多くの共同研究者と共に，W 代数や関係する頂点代数の研究を，ときには他の分野とつなげながら大きく広げている．そのような研究の一つが，川節さんとの共同研究の，擬平滑な頂点代数の定義の導入である．上に述べたように，頂点代数の有理性の条件の一つに随伴多様体が0次元であるという条件があった．一般に，随伴多様体はその座標環がポアソン代数になっているような（代数幾何の意味の）アファイン多様体である．たとえば，アファイン・リー環に対応する随伴多様体は，レベルが generic であれば対応する Lie 環であり，ポアソン構造は Kirillov-Kostant による標準的なものである．頂点代数が**擬平滑**であるとは，随伴多様体が有限個のシンプレクティック葉しか持たないときをいう．Lie 環全体の場合には，シンプレクティック葉は随伴軌道であるから，レベルが generic なアファイン・リー環の頂点代数は，擬平滑ではない．一方で，随伴多様体が0次元であるというのは，一点であることであり，もちろん有限個のシンプレクティック葉しかない．したがって，擬平滑は平滑を含む条件である．随伴多様体が Lie 環の中にポアソンに埋め込まれている場合には，擬平滑であることは，べき零軌道の閉包になっていることと同値である．荒川さん，川節さんは，その少し前の許容レベルとは限らないW代数の平滑性の研究の中でこの条件の重要性に気がついたのであろう．彼らが示したのは，擬平滑な頂点代数の指標が，モジュラー線形微分方程式を満たすことである．これは，平滑かつ有理的なときに指標がモジュラー関数である，という主張に近いが，擬平滑は平滑よりも弱い条件であるのに，同様の保型性が成り立つ，というのは驚くべき主張である．これまで活

発に研究されてきた頂点代数の多くは，genericでなければ，平滑であり，この研究は今まで見過ごされてきた頂点代数が，興味深いものであることを示唆している．

また，最近，頂点代数は理論物理でも新たな観点から注目をあびている．もともと頂点代数は2次元の共型場理論から生まれているので，2次元の場の理論と関連しているのは当然なのであるが，最近より高い次元の場の理論とも関係していることが，発見されたのである．その中でも，荒川さんの研究と関連が深いのは，Beem，Rastelliらの発見であり，4次元の超対称性共型場理論は，2次元の部分多様体に沿って頂点代数で理解できる部分を含んでいる，という主張である．対応する随伴多様体は，理論のヒッグス枝と物理でよばれて研究されている対象で，有限個のシンプレクティック葉しかない，と期待されている．すなわち，ここに現れる頂点代数は上の荒川・川節の定義による擬平滑である，と予想できる．4次元の超対称性共型場理論は多くの例があり，中には普通の場の理論のように，場を導入してラグランジアンを与え，経路積分を考える，といった定式化を持たないものもある．そのような多くの例に対応して，擬平滑な頂点代数がある，というのは驚きである．Beem らの発見は，立川さんが数学者向けに紹介されたことがあったが，擬平滑性から荒川さんの研究と関連する可能性があると認識されたのは，西中さんが数理研のセミナーで講演されたのを聞いたときではないかと思う．その後，荒川さんは，Rastelli や他の物理学者とも交流を深めている．

ICM の講演の中で紹介された結果の一つは，class S 理論とよばれる4次元超対称性共型場理論に対して，頂点代数を構成したものである．class S 理論は，上のような通常の定式化をもたない理論の例であり，そこから物理的に作られる頂点代数を決めるというのは，怪しげに思われるかもしれないが，物理的な考察から，この頂点代数が持つと期待される数学的に厳密に定式化できる性質があるので，それをチェックしたのである．さらに，荒川さんはそのような性質を持つ頂点代数は unique であることも証明されているので，正しいものであることは非常に確からしい．ちなみに，この頂点代数の随伴多様体は，私が Braverman-Finkelberg との共同研究で構成した，class S 理論のヒッグス枝である．この構成は，アファイン・グラスマン多様体を用いるものであるが，より代数的な構成が Ginzburg-Kazhdan によって行われており（論文は未公開），荒川さんの構成はそちらの方に近いようである．

このように頂点代数の理論は，2次元の共型場理論の数学的な定式化というはじめの目論見を大きく超えて，広がりを見せている．荒川さんには，今後もその発展の中心的な役割を果たす研究を進められるよう期待したい．