書　評

代数方程式のはなし

— A Dogmatic Introduction to Algebraic Equations —

今野一宏 著，内田老鶴圃，2014 年

上智大学理工学部
角皆　宏

冒頭から本書の世界に惹き込まれる．本を開き，まず降り立ったのは古代エジプト,「縄張師」たちの活躍である．12 等分の間隔に結び目を作った紐の輪を道具に土地を測ったのではないか，と言われる．4 : 4 : 4 にすれば正三角形，3 : 4 : 5 にすれば直角三角形，などなど[1]．そして，古代バビロニアでは六十進法なので 60 等分の紐を使っていたであろう，と推測する[2]．さらに「周囲の長さが一定な長方形は，どんなものでも同じ面積である」という迷信もしくは詐欺的言及があったのではないか，と想像を逞しくして，正方形とそれから周長を変えずに縦横を少し増減させた長方形との面積の比較をしてみせた所で，いきなり「実は，これが 2 次方程式の解法そのものである.」と，本題たる代数方程式の解法に既に導かれていたことを告げられる．名人噺家の枕を聴くうちに知らぬ間に噺に入っているがごとしである．

引続き第 2 章では古代ギリシャの数学に進み，三大作図問題を述べた上で，そのうちの一つの角の三等分について，目盛り付き定規や折り紙，あるいはリマソンと呼ばれる曲線を用いた方法について紹介している．

第 3 章では 3 次方程式の古典的な解法について，よく「カルダノの公式」として紹介されるデルフェッロやタルターリャ（フォンタナ）による方法を述べる．これは 2 次の項を含まない 3 次方程式の解法だが，これを知ったカルダノが，2 次の項を含む一般の場合にも，立方完成を行なえば上記の場合に帰着して解けることを示したという[3]．この立方完成はカルダノ変換と呼ばれる．

さらに第 4 章で 4 次方程式の解法を紹介．本書は部立はないが，ここまでが方程式の古典的（手探り的）な解法探求を紹介する第 1 部というべきところだろう．既に本書の特徴が強く感じられるが，それは後で述べるとして，内容の概観を進めよう．

---

[1]亀井喜久男氏の考案によって「エジプト紐」と名付けられたもので，亀井氏のウェブサイト http://www.ctk.ne.jp/~kamei-ki/index.htm では中学・高校などの数学の授業での活用が提唱されている．

[2]5 重巻きにすればエジプト紐，2 重巻きなら 5 : 12 : 13 の直角三角形も作れる，と考えると，中々魅力的な説であり，上記でもウェブサイトでも示唆されている．

[3]この経緯を，評者は不勉強にして知らなかった．2 次方程式を解く際に平方完成をするのは遥か 3000 年以上前の古代バビロニア時代に既に知られていたので，3 次の場合にも，「まず立方完成をして，さてそれからどうしよう」という状態で長いこと進めずにいたのだろうと思い込んでいた．

第 5 章では「複素数の威力」と題して，正 17 角形の作図や，代数方程式が複素数の範囲内で必ず解を持つという，いわゆる「代数学の基本定理」に触れる．そして第 6 章で根の置換や対称式の考察を準備した上で，代数方程式の代数解法に関するラグランジュやルフィニの成果について紹介している第 7 章が本書のメインとでもいうべきところで，ここまでが第 2 部と言えようか．

「代数解法」とは根を係数の四則と冪根とで表わすことだが，係数は根の対称式であって，根の入替えによる対称性を壊さないと個々の根には辿り着かない．四則演算では対称性は壊せないので，対称性を壊せるのは冪根の多価性（曖昧さ）のどれを選ぶかしかない．それによって対称性を徹底的に壊して個々の根に辿り着けるか．このようなラグランジュの省察を基にしたルフィニの成果，そしてその議論の僅かな欠陥を補って得られた「5 次以上の方程式の根の公式の非存在」がアーベル・ルフィニの定理として紹介される．

ここで大団円かと思いきや，さらに話は続いて，言わば第 3 部に入る．第 8 章では時代を遡って，一般の 5 次方程式を変数変換して解ける形に持ち込もうという，チルンハウスの試みや 5 次方程式のブリング・ジェラードの標準形が詳述される．そして，報われない努力であったかに見えたこれらの結果が，楕円関数の 5 倍公式を用いたエルミートの 5 次方程式の解法に繋がることが，最終第 9 章で語られて本当の大団円を迎えるのである．

本書の概要を述べたところで，特徴を振り返ってみよう．

まず，歴史の紹介が丁寧であること，特に，画期的な成果として常に取り上げられる結果や話題に留まらず，その前史や余り取り上げられない成果も紹介しており，それがまた巧みに後の章の伏線となっている．数学の発展は決して単線的でなく，著しく重層的である．はしがきに当たる「口上」に，

> 私はいわゆるスターが好きではないのだ．同じヒーローならばドン・キホーテのほうがよい．執筆しながら常に意識していたヒーローは，5 次方程式を解くべく膨大な計算を実行して結局解けなかった 17 世紀の数学者チルンハウスと，5 次方程式に根の公式がないことをおそらく人類史上最初に宣言したルフィニである．

とあるように，方程式の解法理論といっても「ガロア理論」というよりは，「ラグランジュ理論」「ルフィニ理論」というべき味わい．そう，この主題にしてガロアが殆ど登場しないのだ．そして，実を結ばなかったとされがちなチルンハウス変換についても，カルダノ変換の自然な発展として，実際の計算も含めて詳しく触れられ，最後に花開く場を与えている．この辺りが副題に “dogmatic”（独断的）とある所以かと思うが，手触りのある数学が好きな評者の好みにも合う．

手触りというと，特に 3 次・4 次方程式の解法に関して，何通りもの解法を紹介しているところにも，本書の独特の手触り，特徴が現れていると言えよう．3 次方程式について

折り紙を用いた解法を紹介している他，「カルダノの公式」に関しても，平方根を含む数の立方根を用いた複雑な表示から簡明な表示を得るためのボンベリの方法を詳しく紹介しており，実際に手で触って解いてみる助けになる．3 実根を持つ，いわゆる「不還元の場合」の，ヴィエトによる三倍角公式（三等分角の正弦）を用いた解法の紹介は，最終章のエルミートによる 5 次方程式の解法への遠い伏線とも言えよう．また，4 次方程式では，フェラーリの解法はもとより，デカルトやオイラーによる解法も紹介されており，どの解法でも本質的に同じ 3 次分解式が出てくる様子を見ることで，4 次方程式を解く際に 3 次分解式が本質的に重要なことが体感できるように書かれている．

また，代数解法が主題である一方で，それに “dogmatic”（教条的）に限定はしない．バビロニアでの 2 次方程式の解法の紹介に伴って，当時の平方根の近似計算法（実質的にニュートン法と一致）や，筆算による開平法も紹介されている．バランスの取れた内容である．歴史に鑑みつつ近似解法を紹介するのであれば，中国の数学やその流れをくむ和算の天元術，ヨーロッパでのホーナー法に相当する方法の紹介もあれば，空間的にも拡がったのにとも思うが，それは欲張りな感想であろうか．

さらに，以上のことと通底するのだろうが，専門書では余り言及されないような文献も各所で引用されている．便宜のためにまとめておこう：

[1] 河野芳文，「5 次以上の代数方程式は一般に巾根では解けないことの証明」について—高校生を対象としたアーベルの定理の講義—，広島大学附属中・高等学校研究紀要，第 49 号，2002.（口上 iii）

[2] 亀井喜久男，エジプト紐で古代文明に挑戦しよう　古代文明, 幾何学の源流に学ぶ，銀林浩編「実験数学のすすめ」，国土社，1993. (p.1)

[3] 阿部恒，すごいぞ折り紙—折り紙の発想で幾何を楽しむ，日本評論社，2003.（初出：「数学セミナー」1980 年 7 月号表紙）(p.16)

[4] 森継修一，折り紙による 3 次方程式の解法について，日本応用数理学会論文誌 **16**(1) (2006), 79–92. (p.38)

[5] 笠原乾吉，モジュラー方程式とエルミートの 5 次方程式の解法（上）（下），現代数学史のひとこま，数学セミナー 1987 年 7・8 月号. (p.120)

これらも，後述のように卒業研究で読む場合に研究テーマのヒントになるだろう．

本書は大学初年の理系学生向けの一般教養科目の講義を基に，大学初年や意欲ある高校生を念頭に著したということである．数学に限らず科学一般において，最も根源的なのは「未知なるものを我が手にしたい」という欲求であり，数学では典型的には「方程式を解きたい」ということであろう．ところが，大学の，特に数学を専門とする学科での数学のカリキュラムは，現代の過度に抽象化された理論体系の解説と習得に終始しがちで，対象を触っているという実感が乏しい．本書はその欠けがちな手触りを充分に補ってくれる．正に想定されたような読者に相応しい内容・構成である．また，専門的・体系的な授業に先立って読むのみならず，それと並行して，或いは履修後に読んで，現代

的な体系に至る経緯やそれが活き活きと躍動する場面に触れる，というのもよいだろう．その意味で，卒業研究でセミナーのテキストとして用いるのも良いかもしれない．読み物的な部分をセミナーでどう扱っていくかは指導教員に依るだろうが，ゼミ生の予備知識に多少のばらつきがあってもそれぞれ興味深く取り組めそうだし，卒業論文・卒業研究発表のネタは充分潤沢にある．今度の卒研ゼミで使ってみようかな．楕円関数・テータ関数などを勉強しながら最終章まで読み進めれば，修士論文へのアイデアにもなろう．多くの学生に触れてもらいたい本である．

尚，著者自身により，`http://mybooks-support.blog.jp/archives/283707.html` に正誤情報が提供されている．訂正は僅かであるが，3 次・4 次の方程式の演習問題の解答に関する補足として，実際に計算するとどうなるか，計算例が掲載されているので，参照されたい．