書　評

逆数学
—定理から公理を「証明」する—

ジョン・スティルウェル 著，田中一之 監訳，川辺治之 訳
森北出版，2019 年

群馬県立女子大学文学部
黒田　覚

解析学においてよく知られている議論により，実数は自然数の集合として与えることができる．自然数を 1 階の対象とするとき，それらの集合は 2 階の対象となるので，実数を扱う理論は 2 階の算術体系 [1] によって形式化される．この 2 階の体系において中心となる公理は，集合の存在を保証する公理，すなわち以下の内包公理である．

$$\exists Y \forall x (x \in Y \leftrightarrow \varphi(x))$$

ここで，内包公理をどのような論理式に適用して良いかという問題が生ずるが，その適用を 2 階算術の言語における任意の論理式に対して許す体系は Z_2 と呼ばれている．この体系では多くの数学が展開できるが，その一方で集合の定義の中にそれ自身の存在が仮定されているという意味での循環的定義，いわゆる非可術性が含まれてしまう．

そこで，この非可術性を含まないような算術の理論で「安全な」数学を展開するときどのような公理を使うことができるか，またその体系でどの程度の数学が展開できるか，という問題が生じる．これに対する一つの回答は H.Weyl によって与えられた．Weyl は自己言及性を避けるため，集合の存在を集合への言及を含まない述語に制限することを提唱した．そしてこの Weyl による数学の現代版が算術的内包公理（ACA_0）と呼ばれるものである．

H. Friedman は算術的内包公理から解析学を中心とする様々な数学の定理が得られ，したがって多くの数学が ACA_0 において展開できることを示している．さらにそのような多くの定理は逆に算術的内包公理を導くこともわかる．つまり多くの数学の定理がこの公理と同値であることが示されたわけである．「逆数学現象」と呼ばれるこの同値性は，ACA_0 を強めた体系や弱めた体系においても同じように見られるものである．そのような体系は弱い方から RCA_0，WKL_0, ACA_0, ATR_0, Π^1_1-CA と呼ばれており，これらの体系は Big Five と呼ばれて逆数学の研究において中心的な役割を担っている．

これが（必ずしも逆数学を専門としない）logician にとっての，逆数学に対する典型的な見方ではないかと思われる．その一方で，Stillwell による「逆数学」は，このような逆

[1] ここで 2 階というのは 2 階論理ではなく，対象が 2 種類であるという程度の意味である

数学の紹介とは幾分異なる点がそこかしこに見受けられる．その一つの理由は本文にも述べられているように，それが非専門家向けに書かれたものであることがあげられるだろう．以下ではこのような点に注意しながら，本書の構成について詳細に見ていくことにする．

第 1 章 「逆数学に至る歴史」と題されたこの章では，ユークリッドの第 5 公準と選択公理というふたつの「独立命題」を取り上げ，公理系とそこから独立な，つまりそれ自身もその否定も証明できない命題，および基礎となる公理系における命題の同値性について論じられている．平行線の公理や選択公理は non-logician にとっても親しみがあるもので，informal な導入としてはわかりやすいかもしれない．蛇足であるが，ユークリッド幾何学とそれに関わる幾何学の基礎づけの問題は Hilbert や Tarski なども取り組んでおり，最近では Avigad [2] らにより「原論」の形式化が行われている．

第 2 章 古典的算術化のタイトルによるこの章では，自然数からはじめて数の概念を再構築する方法が概観される．のちの議論においてとくに重要なのは自然数を規定する公理，すなわち今日ペアノの公理と呼ばれるものと，実数の構成法であろう．このうち前者については 1 階算術の形式的な定義とともに，逆数学では重要な役割を果たす算術階層も導入されている．通常の数理論理学のテキストなどではこれに先立って，形式的体系およびその言語やモデルなどについての解説があり，そのような背景がない読者にとっては幾分わかりづらい面もあるかもしれない．この章における PA の導入にいまひとつピンとこない読者は，ロジックの入門書を参照するのが良いだろう．そのような入門書は数多あるので，ここでは日本語のテキストとして新井 [1] および，Peano Arithmetic やその部分体系の理論への入門書として Hájek and Pudlák [3] をあげるにとどめる．

第 3 章 第 2 章でコーシー列によって導入された実数を元にして解析学が展開されるが，この章では逆数学にとって重要な解析学の定理が紹介される．特にカントール集合やケーニヒの補題は，必ずしも解析学の入門においては触れることが多くないと思われるが，逆数学においてはいずれも重要な役割を果たすものである．

第 4 章 ここでは逆数学にとってのもう一つの重要な概念である計算可能性が導入される．後の章で明らかになるように，逆数学の各体系は計算可能性理論と密接に関係しており，そのため技術的な理解のみならず，そこで得られる結果の意味や意義を理解するためにも，計算可能性理論についての最低限の知識が必要である．一般的な計算可能性の解説の後に解析学における計算可能性の概念，特に弱ケーニヒの補題との関連が論じられている．また章末のヒルベルトプログラムや構成的数学との関連についても，極めて簡潔ではあるが逆数学の背景としては無視できないものであろう

第 5 章 形式的体系に関する議論においては，数学的な対象や命題の形式化あるいは算術化は避けて通れないものである．特に上にも述べたように，逆数学は計算可能性と深い関

わりを持っており，そのため，計算を体系内でコード化できるということを確認しておくことが重要な作業になる．この章ではその算術化を，必ずしも一般的ではない Smullyan による EFS という体系により行なっている．本書でも述べられているように EFS は PA のような自然数論の体系とは異なり，文字列をそのまま扱う体系であるので，チューリング機械の計算などを直接コード化できるという利点がある．

しかしながら，それによって逆数学との関連が見えづらくなってしまうというデメリットもあるように思われる．標準的な議論においては，PA における帰納法の適用を Σ_1 論理式に制限した $I\Sigma_1$ やその部分体系である原始帰納算術（PRA）などが計算可能性を適切に捉える算術体系であることを示すのが一般的であり，この後の章に現れる RCA_0 や WKL_0 がこれらの自然数論の体系の保存的拡大であるという流れにするという方法で，逆数学と計算可能性のより強い結びつきを示すという議論の進め方もあったかもしれない．

第６章・第７章 この３章では冒頭で述べた Big Five が導入され，それらと同値な定理が紹介される．この５つの体系のうち，特に解析学の展開においては ACA_0 つまり 算術的な（＝数についての量化子のみを含む）論理式で定理される集合の存在公理を認めた体系が重要な役割を果たしている．

ACA_0 は冒頭でも述べたように Weyl によって提示された非可述語的な定義を含まない体系の形式化になっている．そして ACA_0 は実質的にこの Weyl の理論が解析学の基本的な定理を証明し，さらにそのような定理の多くが逆に算術的内包公理を導くという意味で，解析学を展開するのに必要かつ十分な体系であることを示唆している．それと同時に計算可能性に対応する WKL_0 においても重要な解析学の定理の多くが証明されることも示される．

なお，p.167 で述べられているブラウワーの普遍性定理に関する証明可能性については，領域不変性が WKL と同値であることなどの結果が，最近木原 [4] によって得られている．

第８章

最後に「逆数学は数学の結果の深さを示す指標を与えている」という著者の考え方が示される．「数学の深さ」という捉えどころのない概念をいかにして論じるかという問題があるが，たとえば Tao は [5] において The many aspect of mathematical quality の基準の一つとして Deep mathematics をあげ，それを以下のように説明している．

> a result which is manifestly non-trivial, for instance by capturing a subtle phenomenon beyond the reach of more elementary tools

この基準を逆数学に照らし合わせてみると，elementary tool とは計算論的に低い次数のものであると解釈すれば，逆数学は数学の深さを測る一つの手段と言えるかもしれない．しかしながら，計算可能性や逆数学の体系の強さが数学の深さであると言って良いかど

うかという疑問は残るだろう．その答えについては，本書をきっかけにしてより専門的に逆数学やロジック全般を学ぶであろう本書の読者に委ねたいと思う．

参考文献

[1] 新井敏康，『数学基礎論』，岩波書店 (2011)

[2] J. Avigad, E. Dean and J. Mumma, A formal system for Euclid's Elements , Review of Symbolic Logic, 2, pp.700-768, (2009)

[3] P. Hájek and P. Pudlák, Metamathematics of First-Order Arithmetic. Perspectives in Mahathematical Logic, Springer-Verlag (1993)

[4] T. Kihara, The Brouwer invariant theorem in reverse mathematics. preprint http://www.math.mi.i.nagoya-u.ac.jp/ kihara/pdf/paper/invariance.pdf (2019)

[5] T. Tao, What is good mathematics? Bulletin of the American Mathematical Society, 44(4), pp.623–634,(2007).