書　評

Winding Around : The Winding Number in Topology, Geometry, and Analysis

Student Mathematical Library, volume 76

John Roe 著，AMS，2015 年

立命館大学理工学部
夏目　利一

楽しい本である. 何せ章題に LOVE とか HATE という言葉が並び,「Jules Verne の小説『８０日間世界一周』を読んで, 主人公が到達した結論の間違いを見つけよ.」というのが演習問題になってたりする. どんなことが書かれているかおいおい説明するが, 本書はトポロジー, 幾何学そして解析学に現れる**回転数** (winding number) という概念を訪ね歩く旅に読者を誘う.

旅に出るきっかけから話そう. それは２組４人の物語である.（本書では引用の引用として英国ウェールズ地方の伝説に現れる人名が使われているが, ここでは読者により馴染みのある名前を使うことにする.）１組目は愛し合ってるロミオとジュリエット, ２組目は憎みあってるホームズとモリアティである. A 地点から B 地点へ「上の道」と「下の道」の二つの道が通じている. A 地点にいるロミオとジュリエットが, ロミオは下の道を, ジュリエットは上の道を通って B 地点まで旅をする. 一方ホームズは A 地点から上の道を通って B 地点まで, モリアティは B 地点から下の道を通って A 地点まで旅をする. ロミオとジュリエットは 10 キロ以上離れると愛の強さのため二人とも死んでしまう. ホームズとモリアティは 10 キロ以内に近づくと憎しみの強さのため二人とも死んでしまう. この４人は無事に目的地に着けるであろうか? 少なくともどちらかの二人は死んでしまうというのが運命なのである. 何故この結論にいたるのか? 本書では（当然だが）これを数学の問題として定式化する. その結果「正方形 ABCD 内で A と C を結ぶ連続曲線と B と D を結ぶ連続曲線は必ず交わる (定理 1.1.2)」ということを示すことに帰着する. 直感的には当たり前のように思われるが, 連続曲線という条件だけでは, ペアノ曲線のように直感に反するようなものも存在するから, 直感に頼った証明では不十分である. 数学的にきっちり証明するにはどうするか. A と C を平面内で正方形の外で連続曲線で結び,「平面上の連続閉曲線 C_1 の内部の点と外部の点を結ぶ連続曲線は必ず C_1 と交わる」ということを示すことに帰着する. ではそもそも内部の点とは何なのか, 外部の点はどうやって区別するのか, ということが問題となる. その為に必要なのが回転数の概念なのである.

John Roe 氏は 1959 年生まれ, オックスフォード大学で M.F. Atiyah の指導の下で学位を取得した後, 1984-1986 をバークレーの MSRI(Mathematical Sciences Research

Institute) で過ごし, その後一旦イギリスに戻り 1987 年から 1998 年までジーザス・カレッジで数学教師（pure math tutor）を務めた. その後ペンシルヴェニア州立大学に移り現在教授である. 彼の講演を何度か聞いたことがあるが, 非常に話のうまい人である. 時に絶妙なジョークが入る. ある研究集会で, ちょうどそのころグルタミン酸ソーダ (MSG) の害が問題になっていたが, 彼の数学, Medium Scale Geometry, に引っ掛けたジョークが飛び出した. これまでに共著を含めて [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7] の 7 冊, 本を執筆している. [4] は非常に分かりやすく書かれており, 特に指数定理に興味のある人にとっては "must have" な 1 冊であり結構売れたのでは. [4] が出版されてしばらくして, 何処の研究集会でのことか覚えていないが, 雑談の中でこの本の印税で Atiyah の全集が買えたと言ってたのを思い出す.

前書きによると本書は著者自身が行った講義に基づいている. ペンシルヴェニア州立大学数学教室が夏季に行う学部生向けの発展的コースである REU(Research Experience for Undergraduates) とアメリカ数学会による 1 シメスターに渡る MASS(Mathematics Advanced Study Semesters) での講義に基づいたものが, Student Mathematical Library シリーズとして出版されている. 本書もその一冊である. 全米から学生が集まりいくつかの科目を受講するだけでなく, 自身で「数学の研究」を経験するというもので, アメリカでも特異なもののようである. MASS と REU に関する情報はウェッブ・サイト www.math.psu.edu/ mass で得られる.

本書の構成を見てみよう. 第 1 章では上記動機付けと, きっちりとした証明をするために回転数の概念が必要となることが宣言される. 回転数を定義するために重要な関数として複素数 z に対する指数関数 $\exp(z)$ が導入され, オイラーの公式,「博士の愛した数式」が有名な公式として紹介される. 第 2 章では先ず距離空間に対して弧状連結性, 弧状連結成分が定義される. コンパクト距離空間 X から距離空間 Y への連続写像の空間 $\mathrm{Map}(X,Y)$ の弧状連結成分として写像のホモトピー類が導入される. 第 3 章で回転数が定義される. 複素平面から 1 点を除いたものを穴の空いた平面という. 特に原点を除いたものを $\mathbb{C}^\times$ としよう. $[0,1]$ から $\mathbb{C}^\times$ への連続写像 f で $f(0) = f(1)$ となるものをループと呼ぶ. もちろんこれは通常, 閉曲線と呼ばれるものである. f に対して連続写像 $g : [0,1] \to \mathbb{C}^\times$ で $f(t) = \exp(g(t))$ となるものが存在するが, この g は一般にはループにならない. $g(1)$ と $g(0)$ のズレとして f の回転数が定まる. 即ち $g(1) - g(0) = 2\pi i m$ となる整数 m が回転数である. 回転数に関する最も基本的な事実, i.e. 2 つのループがホモトピックである必要十分条件は回転数が等しいことである, が示される. 帰結として上記の定理 1.1.2 の証明の鍵となる命題 3.3.1 が示される. 旅のきっかけとなった 4 人の運命にのみ興味のある読者にはここまでで十分である. 回転数の応用として代数学の基本定理が証明される. 第 4 章では回転数のさらなる応用として平面上の曲線のトポロジーが議論され, Brouwer 不動点定理, Borsuk-Ulam の定理が示される. Jordan 曲線定理「自己交叉のない閉曲線は

内部と外部を持つ」に数ページが割かれ, 最後にリーマン写像定理が示される. 第５章では回転数を積分で表すため微分１形式のループに沿った線積分が導入される. おまけとして（１次元）ホモロジーの話が出てくる. 第６章では幾何学に登場する回転数の役割が紹介される. 平面上の滑らかな閉曲線に対して曲線の曲率と回転数を関係付ける命題 6.2.5, さらにここまでに展開したアイデアを用い, 向き付け可能なコンパクト曲面上のベクトル場に対する Hopf 指数定理の証明の概略が示される. 第７章では関数解析における回転数の役割が紹介される. 読者が想像されるように, Fredholm 作用素が導入され, 円周上での Toeplitz 作用素に関する指数定理が示される. 第８章では第１章で現れた写像の持ち上げ, ホモトピーという概念が空間の基本群, 被覆空間の導入につながって行く. 第９章は Coda, 音楽用語の本来の意味で, 行列群のホモトピー群の話, 特に Bott の周期性定理が紹介される. 各章ごとに演習問題が付いている, 易しいのもあれば結構難しいものも含まれている.

以上が本編の内容である. MASS/REU は数学専攻の学部生が最終年までに学習する内容を前提としている. 日本の大学でなら数学科の３年生までに学ぶ内容は最低限必要となるであろう. それにしてもなかなかタフな内容である. いきなり本編を読もうとしても先ず挫折するのがオチであろう. 本書の３分の１程のスペースを割いて本編を読むのに必要となる基礎的な事項が復習される. Appendix A は線形代数. １年次の線形代数の内容の一部を復習する. １年次に学習しないトピックスとして双対空間の概念が導入される. Appendix B は距離空間の復習. 写像の空間に距離を入れる話が出てくる. Appendix C では２つの定理が復習される. １つは Tietze の拡張定理. もう１つは Stone-Weierstrass の近似定理. 後者は学部３年次までには必ずしも学習しないかも知れない. Appendix D では数直線, および円周上の測度０の部分集合が議論される. これは第３章で１次元の場合の Sard の定理の定式化で測度０という言葉が出てくるために必要となる. 必ずしも Lebesgue 積分論を知っている必要はない. Appendix E では (有限次元) ノルム空間の間の写像の微分が議論され, Appendix F はヒルベルト空間の定義, 例, 作用素の復習. 第７章の為に必要な事項である. Appendix G では群論の初歩の復習の後, それとはほぼ独立にツリーの話が出てくる.

最近数学の本に最初から最後まで目を通すということがなかったが, 今回は久しぶりに学生時代に戻って数学の本を読み通した. 冒頭で述べたように楽しい本であった. 好きな小説の文庫本のように手元に置いてあちこちパラパラ眺めてみるのもいいかも知れないが, この本の真骨頂はこれを基に講義ができることにあるのではないか. もちろんこれはこの本の生まれた経歴による. 最近数学科の４年次と修士課程の両方に向けて開講される科目が多くの大学で見受けられる. そのような科目のネタ本として最適ではないであろうか. 力のある学生なら４年次のセミナーのテキストとして使うこともいいのではないか. 評者も機会があればこの本をベースに講義をしたいと考えている. お薦めの本である.

References

[1] J. Roe, Elementary geometry, Oxford Science Publications Physics 85, Oxford Science Publications 1993.

[2] J. Roe, Coarse cohomology and index theory on complete Riemannian manifolds, Memoirs of AMS, 497, 1993.

[3] J. Roe, Index theory, Coarse geometry, and topology of manifolds, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 90, AMS, 1996.

[4] J. Roe, Elliptic operators, topology and asymptotic methods. Second Edition, Pitman Research Notes in Mathematics Series 395, Longman, Harlow, 1998.

[5] J. Roe, Lectures on coarse geometry, University Lecture Series 31, AMS, 2002.

[6] N. Higson, J. Roe, Analytic K-homology, Oxford Mathematical Monographs, Oxford Science Publications, Oxford University Press, Oxford, 2000.

[7] N. Higson, J. Roe, Surveys in noncommutative geometry, Clay Mathematics Proceedings 6, AMS, 2006.