書　　評

トポロジカル・インデックス

—フィボナッチ数からピタゴラスの三角形までをつなぐ新しい数学—

細矢治夫　著，日本評論社，2012 年

近畿大学理工学部
山下　登茂紀

本の紹介をする前に，この本と評者の関わりについてお話しする．評者はグラフ理論の研究者である．自己紹介のときは「専門はグラフ理論です.」と言う．以前勤めていた大学で，新しく来られた化学の先生に自己紹介したら，「私，学生時代にグラフ理論の研究もしていたんですよ.」と言われた．そこで，この先生の指導教官であった「細矢治夫」という方の名前をネットで調べ，1984 年の数理解析研究所講究録「グラフ理論とその応用」にその名前を見つけた．そのとき初めて「トポロジカル・インデックス」という言葉を知った．

それから数年後，「ピタゴラスの三角形とその数理」が出版され，その 1 年後にこの本が出版された．細矢先生は 10 年前に退官されたと聞いていたし，さらに，化学の本でなく数学の本ということで，とても驚いた．

2014 年 5 月，日本大学で行われた国際研究集会で，信州大学の沼田先生が，卒研生との共同研究で，この本に書かれている予想の 1 つを解いたことを報告していた．興味を持った私は，その論文（http://arxiv.org/abs/1402.1337）を送ってもらった．

2015 年 2 月，細矢先生が同志社大学でトポロジカル・インデックスに関する講演会をすることを同僚から聞いて出向いた．78 歳とはとても思えないほどエネルギッシュな講演であった．75 歳を過ぎてから，この本を含む 3 冊の本を立て続けに執筆されたことにも納得がいった．

その数ヶ月後，この書評を頼まれることになり，僭越ながら引き受けることにした．

まず，この本の数学的な立ち位置について述べる．

トポロジカル・インデックスとは，著者が 1971 年に化学の論文で初めて使った和製英語である．海外では，Hosoya index や Z index と呼ばれていて，Wikipedia でも Hosoya index として紹介されている．著者はこのトポロジカル・インデックスを使って化学の問題の研究に取り組んできたらしいが，その詳細についてはこの本では書かれていない．化学的な意義などについて知りたい人は，雑誌「固体物理」32(1997)No.7–33(1998)No.11 に連載された「グラフ理論の化学物理への応用」を参考にするとよいとのことである．この本は，トポロジカル・インデックスの数学的な側面にスポットを当てて書かれている．トポロジカル・インデックスとはグラフ理論の範疇にある概念であり，マッチングに関連したグラフの不変量

の１つである．こう書くとグラフ理論の本のように思うかもしれないが，この本はグラフ理論の本ではない．フィボナッチ数，ルカ数，黄金比，ペル数，ペル方程式，ディオファントスの不定方程式，連分数，オイラーの連分多項式，平方根の有理数近似，ピタゴラス数，ヘロンの三角形，ヤング図形とそれらの関係について，トポロジカル・インデックスを通して見ることを目的として書かれた本である．

内容の詳細に触れる前に，この本の注意事項について書いておこう．

あとがきと中盤部分に書かれている次の２つの文章が，著者の，そしてこの本自体の数学に対するスタンスを示していると思われる．

『「証明などは二流の数学者のやることだ」などと自分の退官記念講義でうそぶくような，数学の素人なんてものではなく，まったくの無頼派を自認している「数学ゲリラ」なのである．』

『これは数学的にはかなり野蛮な方法ではあるが，本書に扱われている諸問題への切り込みにはかなり役立ったストラテジーなのであえてここに紹介する．著者の考えの根底にあるのは，細かなところには目をつぶって，まず何とかなるだろうという楽観論である．厳密な証明や理論のほころびの繕いは，後に回すか専門家に任せて，とにかく前に進むことである．』

これからこの本を読まれる方は，著者のこのスタンスを十分に理解した上で読んだ方がよいであろう．実際，『まだ，きちんとした証明は得られていないが，（中略）と強く予想できる．』，『おそらく仲間が見つかるのではないかというのが著者の予測である．』，『証明はまだできていないが，多くの例について検証した結果，（中略）予想をたてることができた．』，『これまでに著者が扱ったすべての（中略）これ以外のものは見つかっていないので，証明はできていないが，自信をもって（中略）と推測できる．』など，数多くの未解決問題が載せられているし，著者自身が証明した定理も証明が書かれていないことが多く，読者に委ねる，もしくは，お茶の水女子大學自然科學報告（Natural Science Report, Ochanomizu University）に掲載されている論文を参照させる形を取っている．

ただ，このように証明を載せないことで，著者が行ってきた研究の大きな流れや方向性が明確になっていることも確かである．

では，具体的な内容について触れよう．

１章では，フィボナッチ数，ペル数，ルカ数などの基本的な数列と連分数，連分多項式，チェビシェフ多項式がトポロジカル・インデックス抜きで紹介されている．

２章では，冒頭で６つの系列のグラフのトポロジカル・インデックスと１章で紹介された数列たちが一致することが，８頂点以下のグラフとの対応表によって示されている．数列たちの持つ規則性が系列のグラフの規則性となって現れていて，これらの数列とトポロジカル・インデックスの相性のよさを感じ取ることができる．そして，経路グラフと櫛グラフの

トポロジカル・インデックスがそれぞれ，フィボナッチ数とペル数であることが示され，さらに，毛虫グラフのトポロジカル・インデックスと連分数の関係が示されている．

3章では，単環グラフのトポロジカル・インデックスがルカ数であることが示されている．それに加えて，ルカ数・ルカ三角形と物理学との関係，グラフの特性多項式・マッチング多項式と化学との関係について述べられている．最後に，完全グラフのトポロジカル・インデックスとヤング図形との関係についての予想が書かれているが，この予想は Fulton の「Young Tableaux」に載っている Exercise と同値である，と沼田先生に教わった．

4章では，毛虫グラフのトポロジカル・インデックスが連分数，特に連分多項式と関係することが示されている．この関係を使えば，ペル方程式の従来の解法よりかなり速いアルゴリズムが得られる，と報告されている．最後に，ペル方程式の一般解を与える毛虫グラフの存在について予想がなされている．

5章では，トポロジカル・インデックスを使ったディオファントスの不定方程式の新しい解法が解説されている．

6章では，既約ピタゴラス数の3つのグループに対応する毛虫グラフについて書かれている．まとめとして，既約ピタゴラス数に対応する毛虫グラフの芯構造に関する予想が書かれている．これは，信州大学の沼田先生とその学生によって解決されている．また，この章の内容は，「ピタゴラスの三角形とその数理」（共立出版）にも詳しく書かれている．

7章では，平方根の有理数近似を与える既約ピタゴラス数の設計についてと，それに関連して，三辺と面積が整数である「ヘロンの三角形」とトポロジカル・インデックスの関係について述べられている．

数学外の出身者による著作の一部には，数学者から見ると証明として不十分なものが多少混在する傾向があると思う．この本では，あえて証明を書かない，もしくは，証明の代わりに具体例で説明しているため，そのような混在は避けられている．こういったことを許容できる数学者にとっては，グラフ理論の概念であるトポロジカル・インデックスを通して代数と幾何の世界を見るという興味深い切り口の一冊であると言えるだろう．

あとがきに，

『実は，つい最近，ひょんなことから，このトポロジカル・インデックスのまったく新しい化学的な局面への展開が広がりそうなので，あえて「ひと区切り」と呼ばせてもらった．このことに関しては，まだ私自身ドキドキの状態なので，残念ながら，現状ではきちんとした形で読者にそれを伝えることはできない．』

と書かれており，今後の報告が楽しみである．