書　評

ε-δ 論法からトポロジーへ

永田雅嗣　著，現代数学社，2014 年

関西大学システム理工学部数学科
和久井道久

本のタイトルを見たとき，はては「$\varepsilon\delta$ 論法の指南書」であろうかと連想してしまったのだが，開いてみたら全く違った．実際，まえがきに書かれているように，本書は多くの理系の学部 1 年で学ぶ $\varepsilon\delta$ 論法がその後どのように使われていくのか，特にトポロジーの分野においてそれがどんな風に息づいているのかを，$\varepsilon\delta$ 論法の実地の応用を見せることで伝えたい，という動機のもとで書かれたものである．

本書は雑誌「理系への数学」で 1 年間（2006 年 4 月号～2007 年 3 月号）に連載された記事がベースになっている．連載時の雰囲気を引きついでいるため，記号が不統一な箇所や用語の説明が前後する箇所があるが，あまり気にならない．全部で 12 の Chapter からなり，最後に各 Chapter で出題された問題の解答例やヒントが与えられている．各 Chapter のタイトルは次のようになっている．「つながっているか, つながっていないか（Chapter 1）」「穴のどちら側を通るか（Chapter 2）」「連続写像（Chapter 3）」「らせん階段を登る（Chapter 4）」「無限に延びる柱（Chapter 5）」「コンパクト性（Chapter 6）」「曲線を分類する（Chapter 7）」「曲面の分類を試みる（Chapter 8）」「無限に拡がる曲面—世界の果て（Chapter 9）」「局所から大域へ（Chapter 10）」「バンドル空間（Chapter 11）」「バンドル空間とホモトピー（Chapter 12）」．このうち，Chapter 9，11，12 ではやや高度な内容が扱われている．各 Chapter は有機的に関連しているので，Chapter 1 から順番に読むことをお勧めしたい．

通常の数学書では，定理や定義の説明は全くないか，あったとしてもごくわずかなことが多い．しかし，本書では定理や定義自体は数学の形式に則り正確に記述される一方，それらの意味する内容も表現を変えて繰り返し詳しく語られる．このように，数式による厳密な表現とそれが意味する本質的内容の説明とが対等の強さで書かれている．これは他に類を見ない際立った特徴の 1 つである．更に以下の 4 つの特徴をもっており，それらが本書の魅力を高めている．1 つ目は随所に著者の視点や主張が格言のように盛り込まれていることである．それらは丁寧な言葉で語られているので，押し付けがましくない．2 つ目は 1 つの事象に複数の等価な見方が与えられていることである．見方を変えることで問題が解決できることがあるが，その大切さが豊富な例を通じて実感できるように書かれている．3 つ目は多くの場面で「暴れた挙動」と「穏やかな挙動」のように，対比する言葉を用いた 2 通りの表現が与えられていることである．これは抽象概念のイメージをふくらませたり，明確にさせるための助けになる．4 つ目は「自分で」「自由に」

というフレーズが何度も現れることである．著者の数学に向き合う姿勢が垣間見える部分である．

本書には「$\varepsilon\delta$ 論法」「連続性」「図形」「道筋」「局所」「大域」「同相」といったキーワードが繰り返し登場する．このうち，「図形」「道筋」「局所」「大域」についてはあらかじめ知っておくとよいと思われるので，ここで少し説明しよう．

一般に，「図形」とはユークリッド空間 R^n の部分集合のことを意味する（本書では実数全体を普通のイタリック体の R であらわし，R^n を座標空間と呼んでいる）．本書における「図形」もその意味で使われていると思って差し支えないと思われる．

図形 M の「道筋」とは，M 上に描かれた図形としての曲線ではなく，点の動きも考慮に入れた，閉区間 $[0,1]$ から M への連続写像のことである．Chapter 2 では平面 R^2 から原点を除いた図形の道筋が扱われる．トポロジーでは，端点を固定したままわずかに連続的に動かして得られる道筋はもとの道筋と本質的に同じと考える．Chapter 12 においてこの立場が表明されるが，Chapter 2，4，8 などの背後でも働いている．

数学では「局所」は図形において各点のまわりのごく近い範囲（すなわち，近傍）を指す言葉であり，ローカル（local）とも表現される．一方，「大域」はその図形全体のことを意味し，グローバル（global）とも表現される．$\varepsilon\delta$ 論法は局所的な情報を記述するための技術的な道具であるが，それを用いる大きなメリットは図形の局所的性質が計算可能な数値として表現できるようになる点にある．それらを積算することにより，図形の大域的性質を調べることができるようになるからである．このことは Chapter 2，3，4 および 10 において説明されており，この見方が本書の 1 つの柱になっている．

各 Chapter の内容を簡単に紹介しよう．ただし，すべての Chapter を紹介すると量がやや多くなるため，Chapter 7，8，11，12 については省略させていただく．

Chapter 1 では，関数のグラフがつながっているか，つながっていないかを調べる際に，局所的にみること，すなわち，$\varepsilon\delta$ 論法を用いることの必要性が詳しく論じられる．微視的に見ている状況を厳密に表現するために不等式が用いられるが，そこでの用法は単なる大小関係ではなく，ある性質をもつ数の範囲をあらわすことが目的である．著者は，$\varepsilon\delta$ 論法の理解にはこの認識が重要であることを強調している．

Chapter 2 と 3 では，局所的情報を $\varepsilon\delta$ 論法の形で計算可能な数値としてあらわし，それらを通算することによって図形の大域的性質を引き出す方法が例示される．穴の開いた平面において，穴の左側を通る道筋と右側を通る道筋との違いが $\varepsilon\delta$ 論法を用いることで数値としてあらわされることを観察する．これを動機に連続写像が導入され，道筋を連続なものに限る理由が述べられる．著者は常に連続写像を，図形の性質を調べたいという気持ちで見ていることが分かる．Chapter 3 までで 1 つの区切りとなっており，ここまで読むことを第 1 の目標とするのもよい．

Chapter 4 は Chapter 2 の発展的内容が扱われる．穴の開いた平面において穴の左側を通っている道筋を右側を通る状況に変化させていくと，途中で穴を通らざるを得ず，不連続な状況が生じてしまうが，無限に続く「らせん階段面（被覆空間）」を考えれば，そ

の困難は乗り越えられるというアイデアが示される．

Chapter 5 と 6 では，らせん階段面に穴を無限個開けて作られる図形の分類問題を例にとり，無限を考えることの困難さの問題が取り上げられる．「「無限のかなたまで無制限に自由な変形」を許してしまうと, いくらでも（無限に）複雑な現象が発生」し，「人間の能力ではとてもコントロールしきれない」状況が生じてしまう．このようなことが起こらない状況を考えるために「コンパクト」や「一様連続」が用いられるのだという．単なる連続と一様連続との違いを無限に遠いところでの挙動を使って説明している．思わず「見事！」という言葉が口をついて出たくらい，感動した瞬間であった．

Chapter 9 では，コンパクトでない曲面を分類することの難しさが説明される．この Chapter の内容は通常の教科書では見かけない，大変なユニークものである．本書全体の中で最も著者が書きたかったことではないだろうか．コンパクトでないと，各点の近傍における性質を組み合わせることによって全体の性質を調べるというこれまで使ってきた方法が通用しない．そのため，無限に遠いところにおいては「ある程度良い挙動」をするものたちだけに対象を絞る必要がある．良い無限挙動を分析するテクニックとして Eilenberg のいかさま（Swindle）が紹介され，コンパクトなときでは起こり得なかった現象が「誤差を無限のかなたへ押しやること」によって起こり得ることが説明される．さらに，「長さを測ることのできる基準となる空間」を備えた多様体に対しては「ε-変形」を考えることができ，これによって「良い」無限挙動を分類できることが述べられる．無限挙動の制御にも $\varepsilon\delta$ 論法が使われるというわけである．

Chapter 10 では Chapter 2 と 3 の結果が Green の定理を使った形に書き換えられる．領域が単連結でない場合には線積分から大域的な量を導くことができなくなるが，その困難を乗り越える手がかりとして，Green の定理や Stokes の定理といった積分定理があるという見方が示される．関連する話題として，オイラー数および Poincaré–Hopf の定理が取り上げられ，積分定理と合わせることで，局所的性質と大域的性質が互いに制限を与え合う現象が説明される．

駆け足になったが内容を概観してきた．読めば読むほど著者のトポロジーへの思いがこの一冊にぎゅっと詰まっていることを感じさせる．だから，一遍に理解しようとしてはいけないし，できない．折に触れて読み返せば，そのたびにきっと新たな知が見つかるであろう．そのようなかけらがたくさん散りばめられている本である．

本書は群，位相，全単射などの概念を前提に書かれているので，読みこなすにはある程度の数学的素養が必要だが，トポロジーの考え方や発想を知りたいと願う人にとっては大きな助けになるであろう．トポロジーに興味を持っている学生，院生，社会人をはじめ，すでにトポロジーを勉強し始めている方，もう一度勉強しなおしたいと思っている方や研究者，そして，トポロジーの講義を魅力あるものにしたいと思案されている先生に広く薦めたい．