書　　評

新装版　線型代数と固有値問題
—スペクトル分解を中心に

笠原晧司　著，現代数学社，2014 年

埼玉大学大学院理工学研究科
海老原　円

1．教科書という制服を脱ぎ捨てて

線形代数学の教科書は数多い．大手の書店に行けば，同じような本が所狭しと並んでいる．一口に線形代数の教科書といっても，理工系向けのもの，文系向けのものなど，想定する読者層に応じて，いろいろなタイプのものがある．さらに，たとえば理工系の学生向けの教科書の中にも，理論の構成順序や重点の置き方などによって多少の違いがある．しかし，それにもかかわらず，似たような本が多いことも事実である．

考えてみれば，それはある程度いたしかたない面がある．教科書という概念を狭義にとらえて，「授業の際に教材として用いる書物」と考えると，必然的にいろいろな制約を伴う．大学の初年次の数学教育は，高等学校からの接続を無視しては成り立たないので，教科書で取り扱われる内容には一定のスタンダードが存在する．また，体裁の面においても，学生の購買力を考慮すれば，あまり高価なものにはできないので，過度に分厚い本は作りにくいという制約もある．

教科書とは，いわば制服のようなものである．

たとえば著者が，じっくりと語りこむような口調で書きたいと思っても，あるいは，いろいろな概念の由来やその意味について，もっと突っ込んで説明したいと思っても，ページ数には限りがある．饒舌な贅肉に満ちた文章を，窮屈なお仕着せの中に無理やり押し込もうとすれば，どこかにしわ寄せがくる．その結果，たとえば大事な定理の証明が驚くほど簡潔になってしまい，かえって難解な本が出来上がる可能性もある．

よい教科書を書こうとすれば，一定の内容を，限られた紙面の中に過不足なく盛り込む必要があり，大きな冒険はできない．制服を着たまま大手を振って街の中を遊びまわるわけにはいかないのである．

もちろん，教科書にも個性がある．教科書の個性は，きびしい制約の下にある様式美と，その型崩れとの間の微妙な距離感とともに存在する．それは，制服を洒脱に着こなそうとする少女の涙ぐましい抵抗とも似る．ボタンを少しはずしてみたり，裾からはみ出すシャツの生地にこだわってみたりするような，少年のささやかな反抗にも類する．さらに，著者がそんな反抗期の少年少女ではなく，ごく普通の大人が，ごくまっとうな本を書いているつもりであったとしても，はからずもにじみ出てしまう個性というものが存在する．そういう，そこはかとなく漂うキャラクターの屈折した佇まいを味わうことにこそ，線形代数の教科書を読む面白さがある — と長年思ってきた．

しかし，本書はそのような制服を潔く脱ぎ捨ててしまっている．私服の気楽さと，著者の理想への頑固なまでのこだわりとが共存している．

２．取り上げられたものと切り捨てられたもの

本書はその初版が1972年に出ており，改訂増補版を経て，2014年6月に新装版として新たに登場した．基本的な構想は40年以上前のものであることになる．330頁余りという頁数は，多少厚めではあるものの，まずまず普通の分量である．

読み始めて最初に目につくのは，そのゆったりとした語り口である．基本的な概念には懇切丁寧な導入がなされている．天下りによる議論は極力避け，「なぜそのようなことを考えるのか」,「それはどういうことなのか」という点をも，時には独創的な図解を用いて，可能な限り，分かりやすく説明しようとしている．— そのような書き方で，なぜ普通のページ数に収まるのか？　本書の目次を見てみよう．

第1章 線型空間
第2章 ユークリッド線型空間
第3章 線型変換と行列
第4章 固有値問題
第5章 対称変換の固有値問題とその応用
第6章 二次形式
第7章 複素化
第8章 複素固有値問題
第9章 一般固有値問題

とある．行列や行列式を取り扱った章がないことに気づく．はしがきによれば，本書は「行列・行列式などの話の次にくるものに重点を置くこと」を一つの柱としている．さらに，はしがきには,「本書ではまず，行列や行列式の簡単な演算についての知識を既知として話を進めることにした．また線型空間に関しても既知の知識を整理する形でなるべく簡潔にまとめた．そして目標を線型変換のスペクトル分解に置いて，それに関連する話題を軸として全体を構成した」とある．

行列や行列式に関する基本事項はもとより，線形空間についても，読者がある程度の知識を持っていることを前提とし，そのあたりの詳細な説明は潔くばっさりと切り捨ててしまい，そのことによってできた紙面の余裕を用いて，副題にもあるとおり，スペクトル分解を中心に据えて固有値問題をゆったりと取り扱っている，というわけである．

本書は，一定の予備知識を持った読者を対象として線形代数を俯瞰した教科書であると同時に，特に固有値問題に深く切り込んだモノグラフ的な面を併せ持った本である．

３．関数解析学との関連

同じものを見ても，見る人の立場によって見え方が異なる．数学の研究者が線形代数をどうとらえるかということに関しても，専門分野によって，若干の違いがあると思われる．はしがきによれば，本書のもう一つの柱は「関数解析学との関連を意識すること」である．この点こそが本書の最大の特徴であるといってよい．

関数解析学，あるいは解析学一般への接続は，随所に意識されている．たとえば第2章において，内積を導入する前に，かなりの紙数を割いて，ノルムについて論じている．

このあたりでは，明らかに関数解析における Banach 空間と Hilbert 空間が意識されている．また，正規直交性を論ずる際に，「Bessel の不等式」や「Perseval の等式」といった言葉が使われていることや，固有値や固有空間を取り扱うときに，スペクトル分解を中心に据えていることなどにも，やはり解析学への接続の意図が見え隠れする．2 次形式の取り扱いも，かなり詳しい．第 6 章「二次形式」は，Riesz の表現定理にあたるものから説き起こされ，さらに対称変換の固有値の数値計算への応用にも言及がある．さらにまた，定理や命題の証明の手法としても，時折，微積分や複素関数論が用いられる．このような書き方は，線形代数を一つの完結した体系とみて，その中だけで理論を展開するという立場のものとは大きく異なっており，本書はさながら「解析学から見た線形代数学の解説書」といった様相を呈している．

このような書き方の是非については，賛否両論があると思われるが，そのことは著者自身も意識している．実際，はしがきには次のように書かれている．

「もちろん，線型代数にはそれ自身の理論体系がある．それを関数解析学の予備段階として位置づけてしまうのは偏向のそしりをまぬがれないだろう．本書でも線型代数を関数解析学に “従属” させることは極力避けたつもりである．むしろ『線型代数学の積極的な再検討が関数解析学との直接の関連性をより明確にする』ことを明らかにしたかったのである．」

４．2 冊目の参考書として

本書は，行列や行列式の理論をもう少し初等的な教科書で身につけた者が，2 冊目の参考書として読むべき本である．2015 年度から，高等学校で行列を習ったことのない者たちが大学に入学するので，多くの線形代数の教科書は，修正を余儀なくされるかもしれない．しかし，本書はそもそも行列や行列式についての基礎的な解説を省略しているので，2 冊目の参考書としての存在意義は変わらないであろう．

最後に，本書においておそらくは意図的に消し去られた線形代数学の重要な一面について述べておこう．線形代数学を 1 次式の代数学としてとらえた場合，それは，連立 1 次方程式の理論であると考えることができるが，そういう視点からの解説を，本書では可能な限り避けて通っている．これは無限次元線形空間においても通用する議論を目指していることと無縁ではないと思われるが，座標系に依存する計算が極力排除されており，次元や基底に関しても，連立 1 次方程式の理論をなるべく用いずに議論が進行している．

1 次式の代数学としての線形代数学は，たとえば体の拡大理論において威力を発揮する．いわゆる倍積作図問題の否定的解決には，体の拡大次数 — 拡大体を線形空間としてみたときの次元 — が非常に強力な役割を果たす．このとき，$\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ 以外の基礎体に対して理論を展開する必要があるが，本書はそういう方向を目指していない．

もちろん，それは本書の責任ではない．このあたりのことについては，本書とは別の，「代数学からみた線形代数」に関する「2 冊目の参考書」に期待したい．制服を脱ぎ去った，自由で個性的な，しかし軽薄短小ではない骨太の線形代数の参考書は，たくさんあってよい．