群馬県藤岡市 第１７回　おもしろ数学教室

方眼紙で考える分数のはなし

日本大学理工学部数学科　平田　典子

第 17 回藤岡市おもしろ数学教室は，藤岡市および藤岡市教育委員会の主催にて，日本数学会・関孝和先生顕彰会の後援のもとに，2012 年 10 月 24 日（水）に藤岡市立鬼石（おにし）中学校の体育館にて開催されました．筆者はこの第 17 回の講演をさせて頂きましたので，ご報告をさせて頂きます．*[1]

講演の主な対象は同中学校の生徒さん 146 人と先生方でした．日本数学会からは，当時の理事長の宮岡洋一先生および理事の戸瀬信之先生にご一緒頂きました．講演に際しましては，当時の藤岡市教育委員会の針谷章教育長および藤岡市立鬼石中学校長の瀧川英雄先生をはじめとして，藤岡市の関係の方々に格別のお世話になりました．まずはこの場を借りまして皆様に謹んで深くお礼申し上げます．また地元の上毛新聞が取材し,「数学って面白い」と題した記事を 2012 年 10 月 27 日付にて掲載くださいました.

藤岡市は江戸時代の数学者である関孝和のゆかりの地とされており，おもしろ数学教室のみならず，全日本珠算競技大会などの数学に関わるイベントも開催されています．おもしろ数学教室に参加しておられた藤岡市の生涯学習課の方々が，和算家から「算聖」と仰がれた関孝和について誇りに思っている様子が，打ち合わせの際に感じられました.

講演を準備するにあたっては，関孝和になるべく関連するような話題を選んで，正多角形の話をすることにしました．以下の内容は三角関数の値の数論的性質の話題にも関係しています.

講演の前に，関孝和先生は手を動かして計算をおこない，偉大な業績を上げられたようですとお話しましたら，聴衆の方々に嬉しそうな表情が広まりました．また講演が終わりましたあとに，生徒会長によるお礼の挨拶があり，その後に生徒さんたちが姿勢を正して，全員で 2 曲の歌を合唱して下さいましたことが印象に残っています.

*[1] その当時には筆者は数学通信の編集委員でありましたため，編集委員会の規定にのっとりまして委員を外れた後の号での記事掲載とさせて頂きました.

1　方眼紙クイズ

今日は方眼紙とシールを使って，身近な数である「分数」について少し考えてみることにします．皆さんにいま配った方眼紙の，縦横の直線の間隔は全て 1 とします．ここでまず 格子点 という点の言葉の意味を決めておきましょう．格子点とは，この方眼紙の縦横の直線の交点たちのことを指すと約束します．グラフについて習った人は，横の直線 1 本を x 軸，縦の直線 1 本を y 軸としたときに，x 座標と y 座標が共に整数となる点という言葉でも説明できますね．また正多角形の言葉の意味についておさらいします（略）．正 4 角形のことは正方形とも言います．n を 3 以上の自然数とするとき， 正 n 角形 という言葉を用いて正多角形のことを表すことにします．n が 4 以上のときは，n 本の辺の長さが全て等しくても，n 個の内角の大きさが全て等しいとは限らない図形があり得ますが，そのような図形のことは正 n 角形とは呼ばないことにします．

クイズ 1

では，ここで問題です．
4 個の頂点が全て必ず格子点に位置するような「正 4 角形（正方形）」を書けますか? 方眼紙にシールを貼って確かめてみましょう．

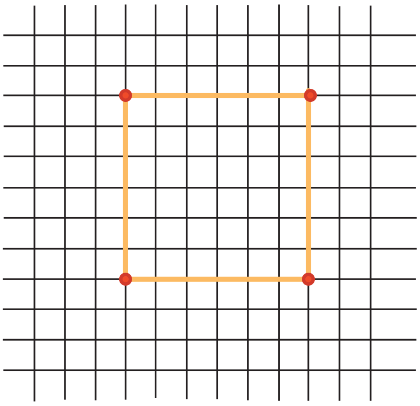

図 1　：4 頂点が格子点にある正 4 角形（正方形）の一つ

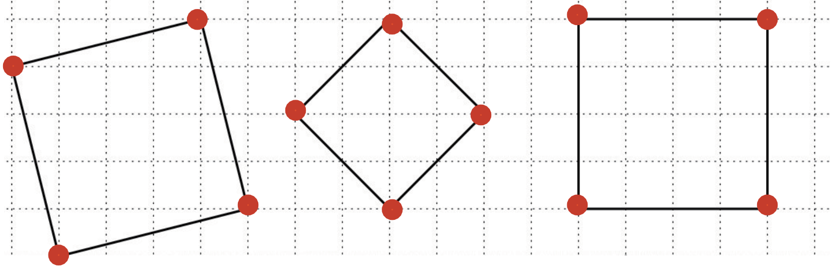

図 2　：4 頂点が格子点にある正 4 角形のいろいろ

図 3　：関 孝和の肖像

こたえ

こたえは「書ける」ですね．全ての頂点が格子点に位置する正 4 角形（正方形）としては，図 2 のように方眼紙の直線と辺が平行ではないものも書けます．

クイズ 2

それではもう 1 つクイズです．
正 4 角形以外の場合はどうなるでしょうか．
つまり正 4 角形以外に，全ての頂点が必ず格子点にある正 n 角形（正 3 角形，正 5 角形，正 6 角形 $\cdots$）が書けますか? 方眼紙に鉛筆で書き込んだり，シールを貼ったりしてしばらく考えてみましょう．

まず正 3 角形ではどうでしょうか? 次に正 6 角形や正 8 角形ではどうでしょうか?

2　関 孝和について

ではここで藤岡市ゆかりの数学者である関 孝和（せき　たかかず/こうわ）についておさらいします．関 孝和は 1642 年ごろの生まれとされる，約 300 年前の江戸時代の日本の数学者です．その頃の日本で発展した数学のことを和算と呼んでいますので，関は代表的な和算家というわけです．関は独自の手法で円周率の計算や方程式の解法などを導いたとされています．後に関の弟子たちがまとめた「括要算法（かつようさんぽう）」（1712 年刊行，[4]）にも業績の詳細が載っています．
関は正 n 角形についての研究を行い，円周率を非常に「数学的」な方法で計算しています．例えば次ページの「環矩図」という図*2を描いて，円に内接する正 n 角形について考察しています．「括要算法」には正 n 角形に関する記述が「角術」という章にまとめられています．

3　クイズ 2 の答え

さっきのクイズ 2 の答えは
「正 n 角形の全ての頂点が格子点にある $\Longleftrightarrow$ $n = 4$」です．

*2 図 3，図 4 および図 5 の転載については，[4] の出版元である大阪教育図書に転載許可を頂きました．

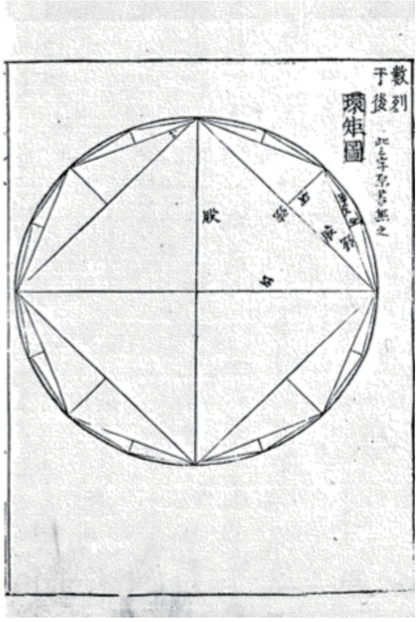

図 4 ：環矩図

これは次の手順で説明できます．例えば全ての頂点が格子点にある正 3 角形は，決して存在しないことが証明されます.

1. 正 n 角形の面積を一般的に計算しておきます.
2. これを用いて 「全ての頂点が格子点にある正 n 角形が存在したとすると，$n = 4$ になること」を証明します.
3. 逆に $n = 4$ ならば，全ての頂点が格子点にある正 4 角形を実際に描けることが図 1 や図 2 から分かります.
4. 従って $n = 4$ に限ることがわかります.

結局は

● 正 3 角形 ⇒　あり得ない
● 正 5 角形 ⇒　あり得ない
● 正 6 角形 ⇒　あり得ない
● 正 7 角形 ⇒　あり得ない
…………
● 一方，全ての頂点が格子点にある正 4 角形（正方形）は，実際にあった.
だから「全ての頂点が格子点にある正 n 角形は，$n = 4$ のときつまり正方形だけ」というわけです.
「括要算法」には図 5 のような正 19 角形の図も載っています.

図 5　：「括要算法」にある正 19 角形の図

4　正 3 角形の場合

残りの時間で「全ての頂点が格子点に乗っかる正 3 角形 $\Rightarrow$ あり得ない」を証明しましょう．

4.1　三平方の定理

まず三平方の定理を勉強します．

> 三平方の定理（ピタゴラスの定理）とは
> 直角三角形の斜辺の長さを c とし，その他の辺の長さを a, b とおいたときに
> $$a^2 + b^2 = c^2$$
> が成り立つという定理です．

例えば 1 辺の長さが 2 の正 3 角形の高さを x とおくと，それは $x^2 = 4 - 1$ を満たす正の数であることが三平方の定理から得られます．平方根を習っている人は $x = \sqrt{3}$ つまりだいたい $x = 1.732\cdots$ くらいであることが分かると思います．$\sqrt{3}$ は 無理数 というものであり「分数では決して表せない」ことが知られています．

同様に，1 辺の長さが A の正 3 角形の面積$= A^2 \times \dfrac{\sqrt{3}}{4}$ となり，およそ $A^2 \times \dfrac{1.732\cdots}{4} = A^2 \times 0.4330\cdots$ であることが確かめられます．この $\sqrt{3}$ は，決して分数では表せない 無理数 でした．

全ての頂点が格子点にある，1 辺の長さ A の正 3 角形を考えます．正 3 角形を含む図 6 の真ん中の長方形の辺の長さは全て整数です．そして図 6 の一番右の図にある 3 箇所の三角形は全て直角三角形であり，

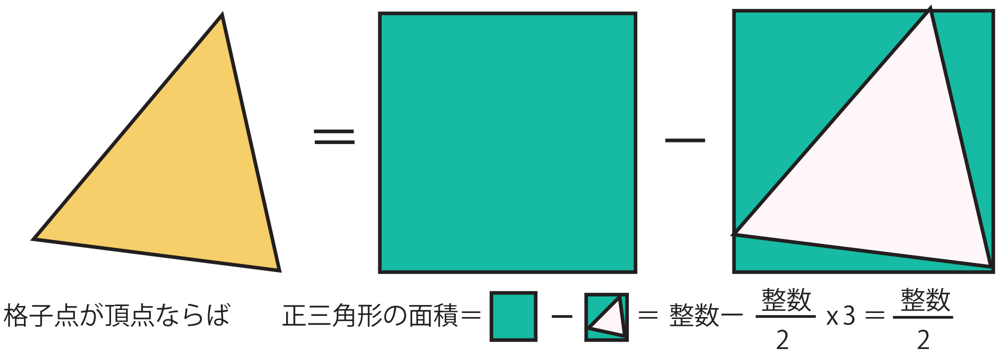

図 6 ：正 3 角形の面積

また斜辺の長さが A，斜辺以外の辺の長さは整数です．そうすると図 6 の中の一番右の図にある直角三角形における三平方の定理から

$$A^2 = \text{整数の 2 乗} + \text{整数の 2 乗} = \text{整数}$$

となっています．さらに図 6 を見ると，格子点に頂点が乗っている正 3 角形の面積は，真ん中の長方形の面積から 3 箇所の直角三角形の面積をひいた数になるので，格子点に全ての頂点が乗っている正 3 角形の面積 = 整数/2 つまり分数となります．A^2 = 整数であることを思い出してまとめると

$$\text{整数}/2 = A^2 \times \frac{\sqrt{3}}{4} = \text{整数} \times \frac{\sqrt{3}}{4}$$

が成立します．変形すると $\sqrt{3}$ = 分数となりますが，これは $\sqrt{3}$ は，決して分数では表せない 無理数 であることに矛盾しますので，あり得ません．従って全ての頂点が格子点にある正 3 角形は決して存在しないことが証明できました．

正 5 角形，正 6 角形，正 7 角形，... の場合も，実は同じような証明をいっぺんに行うことができます．というわけで，本日のまとめをします．

「全ての頂点が格子点にある正多角形は，正方形だけ」

5 正 n 角形の場合

以下，中学生には難しいですが，高校生にはぎりぎり理解可能である証明を，一般の正 n 角形の場合に与えてみます．もちろん，この数学通信の読者の方々は円分体の拡大次数を考察すれば良いと直ぐにお分かりと思われますが，高校生用の証明を書き足しておくことにします．

n が 4 以下の整数であるときの議論は 4 章で済んでいますので，n が 5 以上の整数のときに考えます．まず正 n 角形の重心を中心と呼びます．頂点が全て格子点であると仮定すると，適当に整数倍の相似拡大をして中心も格子点とすることができます．整数分の平行移動を考えて，初めから原点 O を中心としても一般性は失いませんので，そのように仮定します．

このような正 n 角形において，隣り合う頂点と中心 O を頂点とする二等辺三角形 OPQ および，PQ の中点 H と O と Q を頂点とする直角三角形 OHQ を図 7 のように考えます．適当な整数倍の相似拡大によって O, P, Q のみならず H も格子点であると仮定することが出来ます．

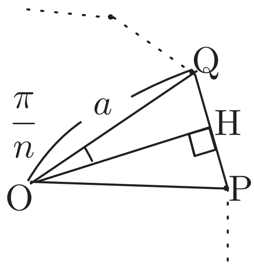

図 7　：二等辺三角形 OPQ および直角三角形 OHQ

さて △OHQ の頂点は全て格子点としているので，図 6 と同様の考察により △OHQ の面積は整数 N を用いて $\dfrac{N}{2}$ と表せます．特に全ての頂点と中心が格子点に位置すると仮定した正 n 角形の面積は，必ず有理数（さっきまで分数と呼んでいた数）です．
さて OQ の長さを a とおくと $\mathrm{OH} = a\cos\dfrac{\pi}{n}$，$\mathrm{QH} = a\sin\dfrac{\pi}{n}$ であることから

$$\triangle\mathrm{OHQ} = \mathrm{OH}\times\mathrm{QH}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{2}a^2\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n} = \frac{a^2}{4}\sin\frac{2\pi}{n}$$

が得られるので，正 n 角形の面積は

$$\frac{na^2}{2}\sin\frac{2\pi}{n}$$

となります．

後述の 6 章の三角関数の値の考察を用いると，n が 5 以上の整数であるときは $n = 12$ のときに「限り」$\sin\dfrac{2\pi}{n}$ は有理数となります．つまり $n \neq 12$ のときは $\sin\dfrac{2\pi}{n}$ が無理数になり，正 n 角形の面積も無理数となって，上記の考察に矛盾します．
$n = 12$ のときに，頂点が全て格子点となるような正 12 角形がもしも存在したと仮定すると，正 12 角形のうちの 3 個の頂点を選べば頂点が全て格子点となるような正 3 角形を構成することができてしまうことになり，4 章の議論に反します．
以上から頂点が全て格子点にある正 n 角形は $n = 4$ の場合に限ることが分かります．

6　三角関数の値の数論的性質

三角関数が π の有理数倍で有理数の値をとる場合について，次の命題を初等的に証明してみましょう．

命題　r を有理数とする．$\cos(r\pi)$ が有理数ならば $\cos(r\pi) = 0,\ \pm\dfrac{1}{2},\ \pm 1$ に限る．
また $\sin(r\pi)$ が有理数ならば $\sin(r\pi) = 0,\ \pm\dfrac{1}{2},\ \pm 1$ に限る．

この証明は，円分体の拡大次数から簡単にわかりますが [3][5]，初等的な以下の証明を紹介します．

H. W. Richmond の証明であり，[1][2] に紹介されたものです．

r を有理数とします．$\cos(r\pi)$ が有理数ならば 0 以上の整数 m に対し $\cos(2^m r\pi)$ も有理数となることが倍角公式から分かります．

さて $\cos(2^m r\pi)$ は有限通りの値しかとらないことを以下に示します．$r = \dfrac{p}{q}$ （p と q は最大公約数 1 の整数で $q > 0$) とおいて

$$\zeta_{2q} = \cos\frac{2^{m+1}p}{2q}\pi + i\sin\frac{2^{m+1}p}{2q}\pi$$

を考えます．$(\zeta_{2q})^{2q} = 1$ であり，$\cos(2^m r\pi)$ は複素数 ζ_{2q} の実部です．つまり $X^{2q} = 1$ の解の実部なのですから $u_m := \cos(2^m r\pi)$ は高々 $2q$ 通りの値しか取りません．しかもこれは有理数でした．
さて，その高々 $2q$ 通りの有理数のうち，分母が最大のものを有理数 $\dfrac{a}{b}$ （a と b は最大公約数 1 の整数で，$b > 0$) とおきます．この最大分母の有理数を $u_s = \cos(2^s r\pi)$ とおけば，その倍の角に対応する有理数 u_{s+1} に対して倍角公式より $u_{s+1} = \dfrac{2a^2 - b^2}{b^2}$ が得られます．
場合を分けましょう．a が 0 のときは $u_s = 0$ となります．a が 0 でないときは，さらに以下のように場合分けをします．

(i) b が奇数ならば a と b の最大公約数が 1 であることから $2a^2$ と b^2 の最大公約数は 1 となります．$u_{s+1} = \dfrac{2a^2 - b^2}{b^2}$ において b が最大分母であることより，$b^2 \leq b$ が得られます．即ち $b = 1$ となります．

(ii) b が偶数ならば，a と b の最大公約数が 1 であることから $2a^2$ と b^2 の最大公約数は 2 となります．このとき (i) と同様に $u_{s+1} = \dfrac{a^2 - \frac{b^2}{2}}{\frac{b^2}{2}}$ において b が最大分母であることより，$\frac{b^2}{2} \leq b$ が得られます．これより $b = 1$ または 2 となるので，0 以上の全ての整数 m に対して，$2u_m$ は整数であり，特に $2\cos(r\pi)$ は整数であることが分かります．

以上と $-1 \leq \cos\theta \leq 1$ であることから，$\cos(r\pi)$ が有理数となるならば，その値は 0，$\pm\dfrac{1}{2}$，± 1 に限ります．
一方，$\sin(r\pi) = \cos(\frac{1}{2} - r)\pi$ でした．このことから，有理数 r に対して $\sin(r\pi)$ が有理数となるならばその値も 0，$\pm\dfrac{1}{2}$，± 1 に限ることがわかります．

参考文献

[1] H. S. M. Coxeter, *Introduction to Geometry*, John Wiley and Sons, New York, (1961).

[2] F. Gramain, *Les degrés des nombres algébriques*, $\cos(2\pi/n)$, $\sin(2\pi/n)$ *et la transcendance de* π, Gazette des Mathématiciens, Soc. Math., France, no. 58, novembre, (1993), 29–37.

[3] 上野 健爾，小川 束，小林 龍彦，佐藤 賢一，関 孝和論序説，岩波書店, (2008).

[4] 平山 諦，下平 和夫，広瀬 秀雄，関 孝和全集，大阪教育図書, (1974).

[5] 平田 典子, 鷲尾 勇介, 単位円上の有理数座標の点の幾何学的考察, 数学教育学会誌 2012 年秋季例会発表論文集, (2012), 84–86.