知恵の輪のトポロジー

谷山 公規（早稲田大学教育学部・教授）

1. トポロジー・結び目理論の紹介

トポロジー（位相幾何学）とは何でしょうか？
ここでは「図形のつながり方の研究」であると答えることにします．
では図形とは何でしょうか．またつながり方とは何でしょうか．
これらについて説明していこうと思います．

図形とは
２次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ の部分集合を平面図形
３次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ の部分集合を空間図形
一般に，n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の部分集合を図形と呼ぶことにします．この図形の持つ種々の性質のうちつながり方に注目して一般化した概念として位相空間というものがありますが，ここでは位相空間については考えないことにします．

２つの図形 A と B に対して
合同（形も大きさも同じ）　$A \equiv B$
相似（形は同じ　大きさは違ってもよい）　$A \backsim B$
という概念があるのはご存じかと思います．実は
同相（つながり方は同じ　形と大きさは違ってもよい）　$A \cong B$
という概念があります．Figure 1.1 を参照して下さい．つながり方とは何かを説明するために，同相とは何かを説明することにします．

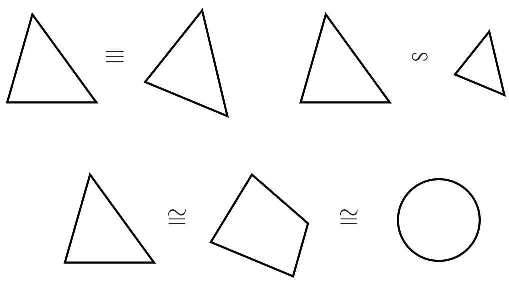

Figure 1.1

日本数学会秋季総合分科会市民講演会（2013 年 9 月 23 日）

つながり方・同相とは
２つの図形 X と Y に対して，全単射連続写像 $f: X \to Y$ で，その逆写像 $f^{-1}: Y \to X$ も連続となるものが存在するとき，X と Y は同相であるといい，$X \cong Y$ と記します．このような写像 f を X から Y への同相写像と云います．X と Y が同相であるとき X と Y のつながり方は同じであるといいます．この同相という関係は同値関係になることがすぐに分かりますが，この同値類（以下では同相類と云うことにします）のことをつながり方と云います．

少し専門用語が入ってしまいましたが定義は以上です．具体例として，アルファベットの大文字を（文字や記号としてではなく）平面図形と考えて同相分類してみると Figure 1.2 のようになります．ここでは線分や曲線からなる 1 次元の図形として考えています．Figure 1.2 の実線の長方形が同相類を表わしています．点線の長方形は（ここでは定義しませんが）ホモトピー同値類と呼ばれるものを表わしています．このホモトピー同値類はアルファベットの線を太くして Figure 1.3 のようにしたときの同相類と 1 対 1 に対応がつきます．アルファベットの線を太くするということは，専門用語で云うと正則近傍として得られる境界付きコンパクト曲面を考えることに対応します．このホモトピー分類はオイラー標数やベッチ数と呼ばれるトポロジーの基本的な不変量によってなされます．ここではこれらの説明も省きますが，Figure 1.2 や Figure 1.3 をご覧になれば何となく雰囲気はつかめるのではないでしょうか．

さて，２つの平面図形もしくは２つの空間図形（もしくはより一般的に２つの n 次元ユークリッド空間図形）に対しては，同相より強い同位（正確には全同位といいます）という概念が存在します．

２つの平面図形 $X \subset \mathbb{R}^2$ と $Y \subset \mathbb{R}^2$ に対して，$\mathbb{R}^2$ の向きを保つ同相写像 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ で $f(X) = Y$ となるものが存在するとき，
X と Y は同位であるといい，$X \approx Y$ と記します．

向きを保つとはどういうことかはここでは説明しませんが，直観的には平面を裏返さないということです．同様に，

２つの空間図形 $X \subset \mathbb{R}^3$ と $Y \subset \mathbb{R}^3$ に対して，$\mathbb{R}^3$ の向きを保つ同相写像 $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ で $f(X) = Y$ となるものが存在するとき，
X と Y は同位であるといい，$X \approx Y$ と記します．

同相ではあるが同位ではない２つの平面図形の例を Figure 1.4 に載せておきます．この２つの図形が空間内にあると思えば空間図形としては同位になります．

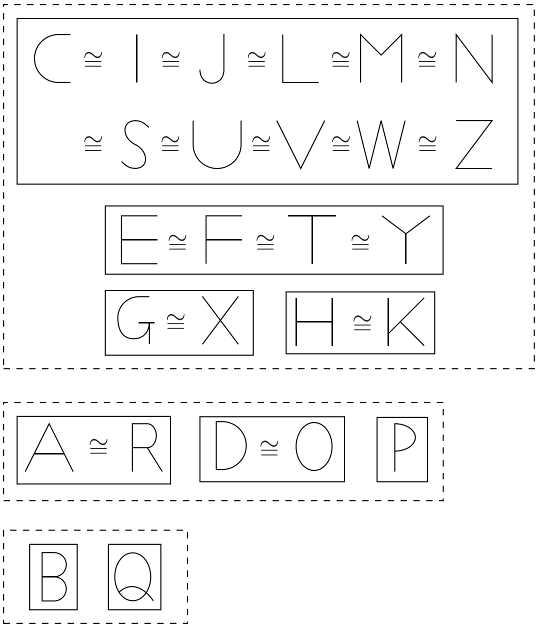

Figure 1.2

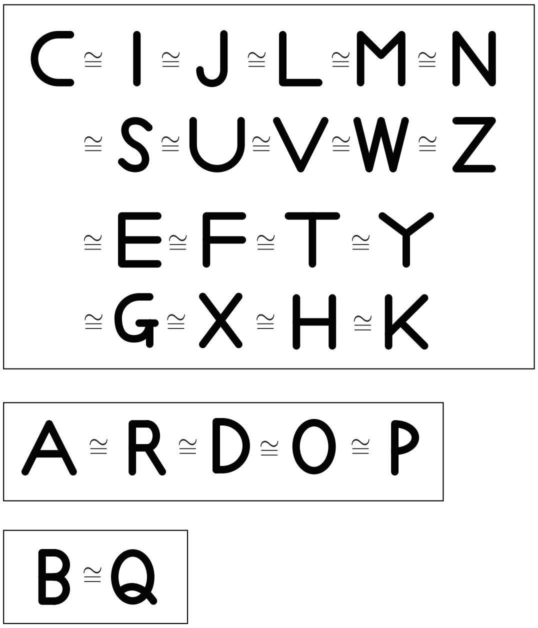

Figure 1.3

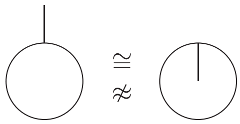

FIGURE 1.4

空間内の単純閉曲線を結び目と云います．２つの結び目が同位かどうかを研究するのが結び目理論です．２つの結び目はつねに同相ですが一般に同位ではありません．Figure 1.5 に自明な結び目 0_1 と三葉結び目 3_1 を載せておきました．

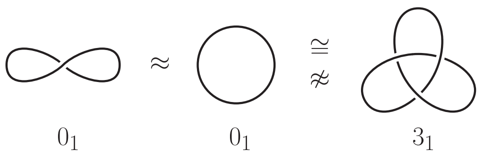

FIGURE 1.5

2. 知恵の輪のトポロジー

知恵の輪については歴史的にも世界的にもいろいろな観点からの研究があるようです．ここでは，木や金属やプラスチックなどの変形しない部分（ハード部分）に紐（ソフト部分）が絡まって出来ているタイプの知恵の輪をハード・ソフト系知恵の輪と呼んで，これについて結び目理論の観点から考察してみることにします．つまり知恵の輪を結び目の一般化である空間グラフと考え，空間図形の同位問題として考えます．空間グラフの研究は結び目理論の一分野ですが空間グラフ理論と呼ばれることもあります．具体的に次の問題を考えてみましょう．

問題 1　Figure 2.1 のゴムひもを金属部分からはずしなさい．

図があるので問題の意味はお分かりかと思いますが，もう少し数学的な問題にしてみます．

問題 2　Figure 2.1 のゴムひもを金属部分からはずすためにはゴムひもは点線部分を最低何回通過する必要があるか？

解答を考える前にこの問題は Figure 2.2 のようにレベル化出来ることを注意しておきます．

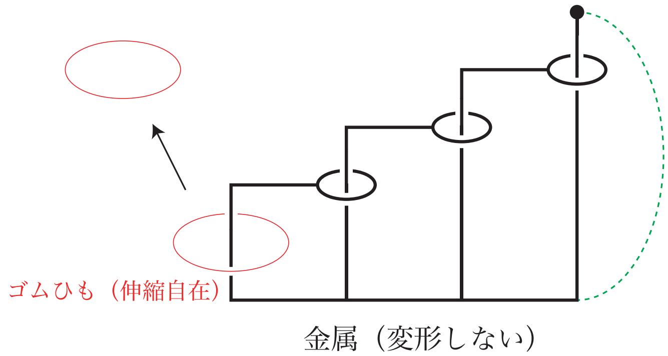

Figure 2.1

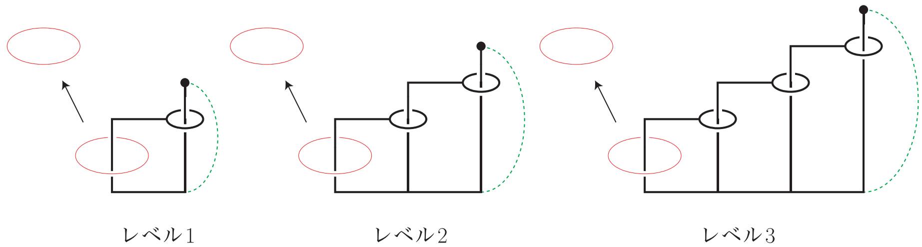

Figure 2.2

答えはレベル 1 では 2 回，レベル 2 では 4 回，レベル 3（すなわち問題 2）では 8 回になります.（この先もレベル n では 2^n 回となります.）ここでは 8 回通過すればはずれることを示します．7 回以下でははずれないことを示してはじめて完全な解答となるのですが，そのことについては後で少し触れるだけにします．先ず実際に 8 回ではずれることを Figure 2.3 に図示してみます.

これだと何故答えが 2 のべきになるのかはっきりしないと思います．そこで次のように考えてみます．金属部分は変形しないということになっていますが，思考実験として金属部分が変形すると考えてみます．Figure 2.4 のように金属部分を順次抜いていき，代わりに点線部分を引き延ばします．この最後の状態では 8 回ではずれることが明らかです．この金属部分を抜いていく変形は空間内の同位変形になっています．後で説明しますがそのことから，最後の状態で 8 回ではずれるならば最初の状態でも 8 回ではずれることが分かります．このように考えれば一般にレベル n の答えが 2^n 以下になることもお分かりかと思います.

このように考えることは具体的な解法を発見する手助けにもなります．実際 Figure 2.4 の最後の状態ではゴムひもは点線部分と 8 点で交わる円板の境界になっていますが，この円板を空間の同位変形で最初

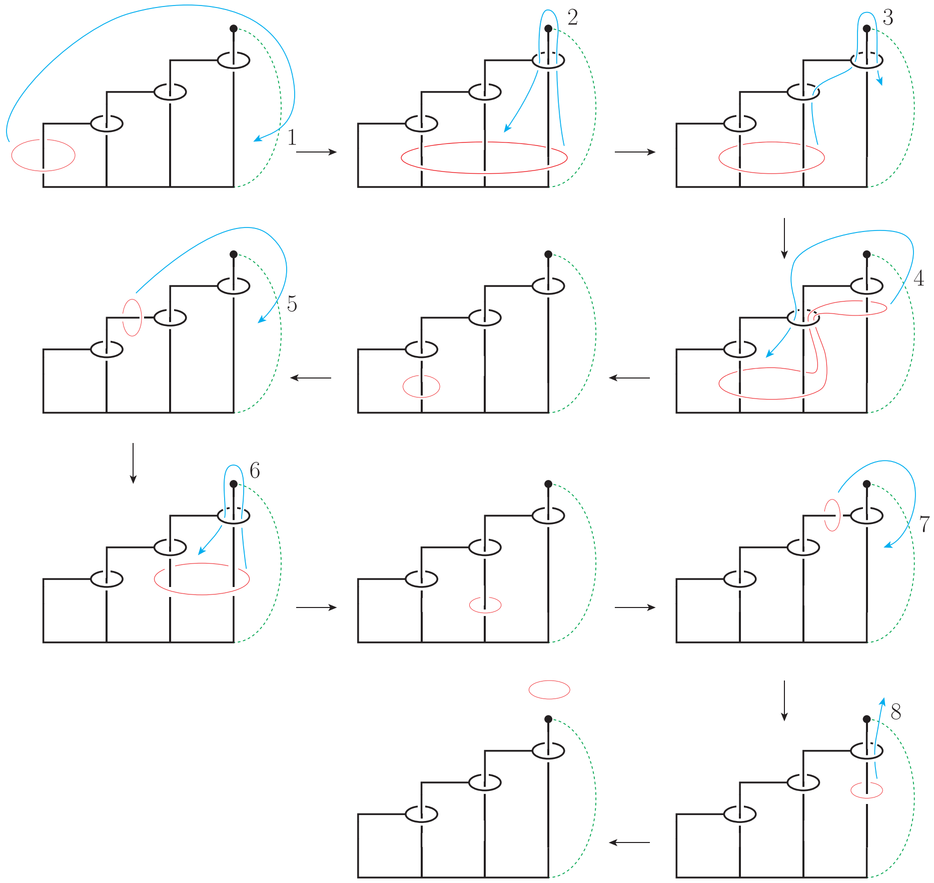

FIGURE 2.3

の状態に戻したものはぐにゃぐにゃに曲がった円板になりますが，依然として点線部分と 8 点で交わっていて，この円板に沿ってゴムひもを動かせば 8 回ではずれる解法となります．

　このように，金属部分が変形するという現実には起きないと思われることを自由に思考実験することで現実的な解法も得ることが出来ます．このような柔軟な発想がトポロジーの真面目（しんめんぼく）ではないでしょうか．もっともトポロジーに限らず，零，負の数，虚数，4 次元空間，などなど非現実的と思われる概念を自由自在に考えるのは数学本来の姿なのかもしれません．

　本当に 8 回必要であること，つまり 7 回以下でははずれないことは論文 [1] で群論的な議論を使って証明されています．最近筆者は被覆空間を使った別証明を考えました．[1] の議論と本質的には同じなのかも知れませんが，少なくとも筆者にとってはイメージのわく証明となりました．より一般的な空間グラフに対する命題として論文 [2] を準備中

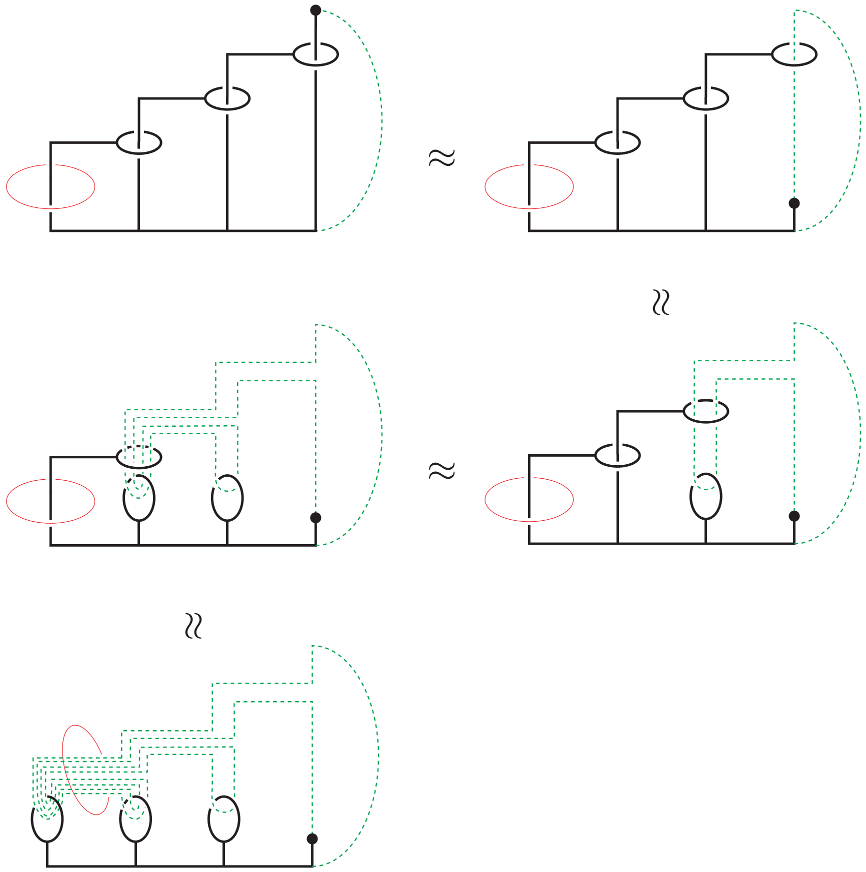

Figure 2.4

です．その証明の詳細はここでは述べませんが，レベル n の知恵の輪に対して適当な被覆空間をとることによってレベル $n-1$ の知恵の輪が 2 個出て来て，その両方をはずさなければならないことからレベル $n-1$ の回数の 2 倍になる，という証明をします．

最後に，ハード・ソフト系知恵の輪の作り方を Figure 2.5 に例示しておきます．この図のように，最初はばらばらな金属部分にゴムひもを絡めてから，順次金属部分を差し込んで，最後に金属部分がはずれない形に成形すれば完成です．このようにして Figure 2.6 のようにハード・ソフト系知恵の輪を大量生産することが出来ます．

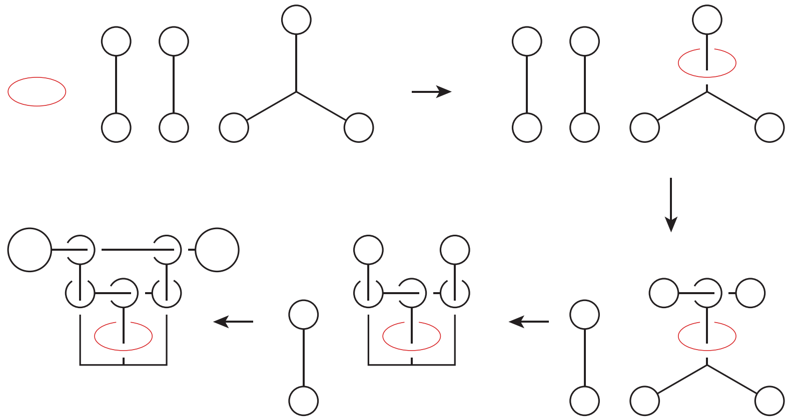

FIGURE 2.5

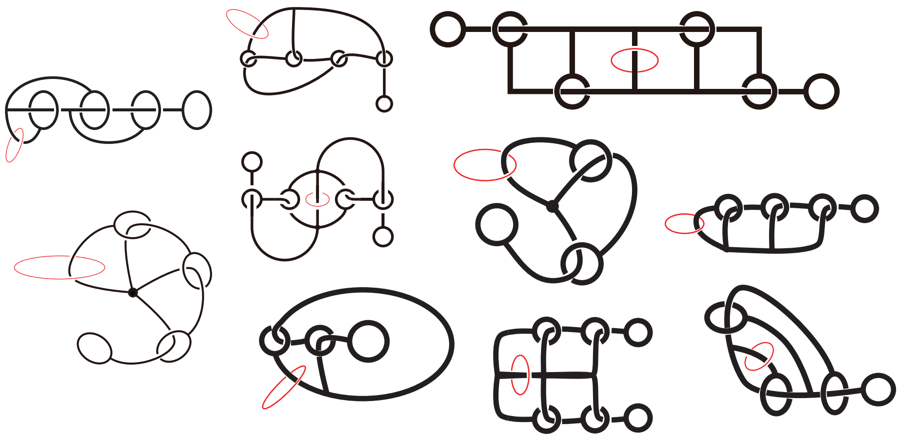

FIGURE 2.6

REFERENCES

[1] J. Przytycki and A. Sikora, Topological insights from the Chinese rings, *Proc. Amer. Math. Soc.* 130 (2002), no. 3, 893-902.
[2] K. Taniyama, Site-specific Gordian distances of spatial graphs, in preparation.