第一回　大学生数学基本調査報告書

2013 年 3 月 14 日

一般社団法人　日本数学会　教育委員会

この報告書は，一般社団法人　日本数学会　教育委員会が取りまとめ理事会の審議を経て公表するものである。

一般社団法人　日本数学会教育委員会委員

運営委員：
宇野勝博（大阪教育大学）（委員長）（運営委員１期２年目）　調査事務局員
徳永浩雄（首都大学東京）（副委員長）（運営委員１期１年目）
菅原邦雄（大阪教育大学）（運営委員２期１年目）
小島定吉（東京工業大学）（運営委員１期２年目）
坪井俊（東京大学）（運営委員１期２年目）
松岡隆（鳴門教育大学）（運営委員１期１年目）
新井紀子（国立情報学研究所）（前委員長）　調査事務局責任者
専門委員：
高橋哲也（大阪府立大学）（副委員長）（１期２年目）
清水勇二（国際基督教大学）（２期１年目）
竹山美宏（筑波大学）（２期１年目）　調査事務局員
岡部恒治（埼玉大学）（１期３年目）
加藤毅（京都大学）（１期２年目）
藤田岳彦（中央大学）（１期２年目）
森田康夫（東北大学）（１期２年目）
神直人（滋賀大学教育学部）（１期１年目）
牛瀧文宏（京都産業大学理学部）（１期１年目）
2011年3月時点で委員でありその後退任した委員
伊藤仁一(熊本大学)（専門委員2006.7.1-2010.6.30、運営委員2010.7.1-2012.6.30）
安井孜(鹿児島大学)（専門委員　2006.7.1-2012.6.30）
熊谷隆(京都大学数理解析研究所)（専門委員2009.7.1-2012.6.30）
担当理事　真島秀行（お茶の水女子大学）

協力者

本調査には 46 大学の方々にご協力いただいた.報告書及び参考資料の作成に当たっては以下の方々にご協力いただきました.
土屋　隆裕（情報・システム研究機構　統計数理研究所）専門：統計調査法
尾崎　幸謙（情報・システム研究機構　統計数理研究所）　専門：心理統計学，教育統計学
犬塚　美輪（大正大学）専門：教育学，教育心理学
川添　愛　（情報・システム研究機構　国立情報学研究所）専門：言語学，自然言語処理

目　次

１． 本調査の趣旨と概要

1.1. 調査に至る経緯

日本数学会に所属する大学教員は，入学試験や大学での講義・演習などを通して，時代とともに変化する大学生の数学的な能力の実態に触れることができる．その現場において1990年代初頭から大学新入生の学力低下を危惧する声が聞かれるようになった．これを受けて日本数学会は 1994 年に大学基礎教育ワーキンググループを立ち上げ，大学教員を対象とする「大学基礎教育アンケート調査」を1996年に実施した．この調査により，多くの大学教員が「大学生の学力が低下している」と感じていることが確認された．特に，数学を理解するために必要な論理的思考力の低下や，抽象的な概念を理解することの困難を指摘する意見が多かった．また，自分で考えることに消極的でパターン化された解法に頼る傾向や，知識に対する意欲の低下，問題を最後まで考え続ける忍耐力の低下なども指摘された．さらに，数学だけではなく，すべての学問の基礎として必要な日本語の読解力・表現力の低下について言及する回答者も少なからずいた.（参照：西森敏之，浪川幸彦「数学基礎教育WG便り（6）基礎教育アンケート調査報告（速報）：大学生の数学学力は低下しているか?」数学 48(3)，311-315，日本数学会.）

1998年には，大学基礎教育ワーキンググループを解散，代わりに日本数学会教育委員会を設置し，初等中等教育を含め数学教育の現状の把握に努めてきたが，大学生の学力について危機感を表す意見はなお少なくない．2000年代に入り，多くの大学ではリメディアル教育などの枠組みで高校数学の補習授業を行うことが必要となった．このような状況のなかで，ここ数年は多くの数学会会員から「入学試験や一年生の期末試験における数学の答案にまったく意味の通じないものが増え，どう対処したらよいか当惑している」という声が寄せられている．1996年の調査でも論理的思考力，日本語の読解力・表現力の低下は指摘されていたが，その傾向がさらに深刻なものになっていることが懸念される．そこで教育委員会メンバーが様々な大学の教員から意見を集めたところ,「論理的文章を理解する力,論理を組み立てて表現する力が学生から失われつつあるのではないか」との危惧が数学教育の現場に広くあることが分かった．そこで教育委員会では大学生に対する調査を行うことを決定し，理事会の許可の下で実施することとなった。

1.2. 調査の目的

数学教育は，科学技術立国日本を支える人材育成や，次の世代を育てる教員育成に欠くことができない．日本数学会会員の多くは大学での数学教育に携わっており，その改善を担うことができる．数学は，小学校の算数から大学の基礎教育まで，その内容に連続性と一貫性をもつ科目であるため，大学での数学教育を改善するにはどのように初等中等教育と連携すれば良いのかを検討する必要もある．そこで本調査は，大学新入生の数学的素養と論理力の実態を把握して，大学教育の改善に活用するとともに初等中等教育への提言の

材料とし,数学教育関係者のみならず社会全体で共有することを第一の目的とする.また,大学新入生の基礎的な数学力の実態について因子分析を行うこと，特に，数学の問題解決における言語表現に関しては誤答の具体的な内容を把握し，そのような答案に至る背景を明らかにすることも目的とした.

1.3. 調査の設計方針

1.3.1. 対象

平成 23 年度入学の大学新入生を主な対象として調査を行う．入試形式，文系・理系などの区別をせず，なるべく広い範囲の学生を対象とした.

1.3.2. 出題範囲

代数・幾何・解析の 3 分野から偏りなく出題する．さらに，本調査までの経緯を踏まえ，論理的な文章の理解を主題とした問題を含める．また，平成 23 年 4 月から順次実施される新学習指導要領では統計の扱いが拡充されることから，統計に関する問題も出題する.

対象となる大学新入生のほとんどは，小学校・中学校において平成 10 年 12 月告示，高等学校においては平成 11 年 3 月告示の学習指導要領の下で学んでいる.本調査の出題範囲もこれらの学習指導要領に準拠して定めた.

文系・理系の区別をしないという本調査の性格から，解答に必要な知識は小学校の算数および中学校の数学で学ぶ範囲に留めた．ただし，解析分野の問題では関数概念について問うため，必履修である数学Ⅰの「二次関数」の項目で学ぶ内容までを範囲とした.

1.3.3. 出題内容

数学に関する基礎的な学力には様々な観点があり，本調査以外にも定評のある学力調査がいくつか実施されている．本調査では日本数学会教育委員会におけるこれまでの経緯を踏まえ，論理的な読み書きや，数学的な概念そのものの理解に焦点をあてる．特に以下の側面に注目しその能力を問う.

- 論理的な文章の理解

  命題論理・述語論理を記述した言語表現を正確に理解できるか.

- 論理的な説明

  数学の概念を使って演繹的に説明する議論を組み立てられるか.

- 概念から構成される数学イメージの言語化

  数学用語を正確に使って概念や対象の性質を記述できるか.

- 数量スキル
  対象の性質や特徴を把握するために必要な計算を実行できるか.

- 具体的な場面における活用
  数学的な知識を具体的な問題に対して運用できるか.

1.3.4. 出題形式

調査対象として広範囲の学生を含められるように，なるべく簡素に実施できる形式にする．そのため，一部の問題を選択式にするなどして，実施時間を 30 分程度に納めるように設計する．また，調査対象となる学生の思考の自然な傾向を捉え，合わせて白紙回答を少なくするため，問題文を短くするなど問題の表現についても考慮する.

1.4. 実施概要

2011 年 4 月 1 日から 7 月 20 日にかけて本調査を実施した．以下はその概要である.

1.4.1. 調査票の内容

調査票は以下の 4 つの部分からなる(カッコ内は解答時間).

① アンケート(5 分程度)
小学校・中学校・高等学校で得意だった科目・不得意だった科目，塾や予備校で算数・数学の指導を受けた期間，大学受験での数学の試験の有無・記述式試験の有無について，質問に回答する.

② 第 1 ステージ(5 分)
選択式の問題(正しい記述には○，間違った記述には×を記入する)を 2 題解答する．問 1-1 は平均の定義とそれに関する初歩的な推論，問 1-2 は命題と条件の論理的な読み取りに関する問題である.

③ 第 2 ステージ(10 分)
記述式の問題を 2 題解答する．問 2-1 は整数の性質に関する初歩的な論証を行う問題，問 2-2 は二次関数の性質を列挙する問題である.

④ 第 3 ステージ(10 分)
平面図形の作図アルゴリズムを記述する問題(1 題)を解答する.

1.4.2. 実施範囲

本調査は協力者を募り実施した．したがって無作為標本抽出ではない．ただし，ベネッセコーポレーション マナビジョンが提供する偏差値分類および系分類(理工系，文学系，社会科学系など)を参考に調査実施機関およびクラスを分類し，各偏差値群および各系統に多くの異なる大学のデータが含まれるように留意した．サンプルが不足した場合には個別に調査を依頼した．（注：参考にした分類は「2012 年度入試合格目標偏差値(高 2 生)・7 月」．ただし，この分類を採用したのは便宜的な理由であり，日本数学会がこれを支持しているという意味ではない．）

実際に調査を行った機関は 48 大学,実施クラスは 90 クラス(オリエンテーション等の機会を含む)，調査を受けた学生総数は 5946 名である．実施した 90 クラスのうち，数学の時間に調査を行ったのは 72 クラスである.各系統において各偏差値群の機関が完全には均等に分布していない．また，国内の大学全体の分布に比べ，高偏差値群に分類される国公立大学が調査機関に多く含まれている．

1.4.3. 採点方法

数学者 10 名を含む大学教員 12 名で採点を実施した．記述式問題(第 2 ステージ・第 3 ステージ)については，数学者 2 名を含め 3 名以上で採点基準を策定した上で，合議制によって採点を行った．採点作業においては公平を期するため，調査票がどの機関・クラスで実施されたのかについて，採点者には知らされていない．

1.5.データの集計方法と分析法

アンケート部分及び選択式問題については単純にデータ入力し,記述式問題については，上記のように数学者10人を含む大学教員12名で採点を実施した.各記述式問題に関して，数学者 2 名を含む 3 名以上で採点基準を策定した上で，答をその傾向から分類するというやり方で，合議制によって採点を行った．すなわち，答を正答 A，準正答 B，誤答 C 等と，その傾向から分類した上で，因子（偏差値群，系，小中高で得意だった科目,不得意だった科目，算数・数学に関係しての通塾経験，入試体験等）との関係を統計的に分析した． 実際の分析は，統計数理研究所常勤教員である尾崎幸謙氏に依頼した．氏の今回の調査の評価は以下のようである（附録 B を参照のこと)．

「教育測定の分野では，主として難易度（正答率）と識別力の２つの統計的指標の観点から問題の性質を捉える．識別力とは，測定しようとしている特性の個人差や集団差を，各問題がどれだけ敏感に反映するかを表す指標であり，識別力の高い問題は良い問題である.・・・今回の調査対象者の数学力を測定するという目的に対して適切な問題であったと言える.」

２．　問題と採点基準

2.1. 調査項目と学習指導要領との関係

本調査の対象は，主として大学入試直後の大学 1 年生である．彼らは(帰国子女や留学生など例外はあるが)平成 4 年から実施された学習指導要領の下で小学校に入学し，小学校高学年で平成 14 年から実施された学習指導要領に切り替わり，高校卒業まで学んできた世代だと想定される．平成 4 年と平成 14 年から実施された 2 つの学習指導要領は，昭和 46 年から実施されたいわゆる「現代化カリキュラム」との対比で，しばしば「ゆとり」カリキュラムとよばれる．「ゆとり」の語源は，各教科で教える内容を精選し，詰め込み型教育を排し，ゆとりある充実した学校生活の実現を目指したことによる．平成 14 年から実施された学習指導要領は，小中学校の教育内容をさらに厳選し，基礎・基本を確実に身に着けさせ，自ら学び考える力を養うことで，本質的な「生きる力」につなげることを最大の目標としていた．調査問題は「ゆとり」カリキュラムの下で編まれた複数の検定教科書を参照した上で，そこに共通して基本問題として取り上げられているもの，ボールド体で強調されている概念のみから出題した．

2.2. 各設問の内容と採点基準

各設問の内容と出題意図，および採点基準(記述式問題については正答例と答案の分類基準)について述べる．各設問の内容に関しては問題文のみを掲載し，図と解答欄は省略する．

2.2.1. 問 1-1（第 1 ステージ）

問題 ある中学校の三年生の生徒 100 人の身長を測り，その平均を計算すると 163.5 cm になりました．この結果から確実に正しいと言えることには○を，そうでないものには×を，左側の空欄に記入してください．

(1) 身長が 163.5 cm よりも高い生徒と低い生徒は，それぞれ 50 人ずついる．

(2) 100 人の生徒全員の身長をたすと，163.5 cm×100 = 16350 cm になる．

(3) 身長を 10 cm ごとに「130 cm 以上で 140 cm 未満の生徒」「140 cm 以上で 150 cm 未満の生徒」・・・というように区分けすると，「160 cm 以上で 170 cm 未満の生徒」が最も多い．

出題意図 本調査を受けた学生は，小学校 6 年生で「平均」について学んでいる．その後，高校 2 年で学ぶ数学 B まで，統計について系統的に学ぶ機会はない．必履修なのは数学 I または数学基礎までであることから，少なからぬ学生が「中央値」「最頻値」「相関」「分散」「偏差値」などの言葉に触れることなく高校を卒業したものと想定される．以上のような状況を鑑み，本設問では，小学 6 年生の教科書の典型的な記述に沿って作問した．学生が

学んできた学習指導要領の精神にのっとり，「平均をもとめる式の暗記と計算」ではなく，「平均から導くことができる結論」「平均のみでは導くことができない結論」を見極める論理的判断力を問う．

算数・数学の授業に限らず，学生たちは，テストの平均点や身長の平均値などのデータに日常的に接してきたことだろう．突出して背の高い生徒がいると平均が押し上げられること(小問(1)の反例)や，女子と男子では平均にかなりの差があり，クラス全体をグラフにまとめると「ふたこぶ」になること(小問(3)の反例)など，日常で接するデータから小問(1)や(3)の反例を思い浮かべられることが望ましい．そのためには，基礎的な論理力のみならず，問題文に書かれた内容を情景として思い浮かべられる国語力も必要となる．これらの力は，数学に限らず人文科学も含め広く科学を学ぶ上での前提となるものであろう．

採点基準　全問正解だけを正答とし，それ以外は誤答とした．

(1)の解答：平均が 163.5 cm であることからは，平均より身長が高い生徒と低い生徒がちょうど半数ずついることを論理的に導くことはできない．よって答えは×である．

(2)の解答：小学 6 年生で学ぶ「平均」の定義から，「平均が 163.5 cm ならば，100 人の身長の和は 163.5 cm ×100」であることを論理的に導くことができる．よって答えは○である．

(3)の解答：平均が 163.5 cm であることからは，平均を含む区分け「160 cm 以上で 170 cm 未満」に最も多くの生徒が含まれることを論理的に導くことはできない．よって答えは×である．

2.2.2. 問 1-2（第 1 ステージ）

問題　次の報告から確実に正しいと言えることには○を，そうでないものには×を，左側の空欄に記入してください．

公園に子供たちが集まっています．男の子も女の子もいます．よく観察すると，帽子をかぶっていない子供は，みんな女の子です．そして，スニーカーを履いている男の子は一人もいません．

(1) 男の子はみんな帽子をかぶっている．
(2) 帽子をかぶっている女の子はいない．
(3) 帽子をかぶっていて，しかもスニーカーを履いている子供は，一人もいない．

出題意図　平成 14 年から実施された学習指導要領と，平成 23 年から実施されている新学習指導要領では，論理的思考力の育成が重要な目標として掲げられている．本設問では，平易な条件文をどれだけ正確に読みとることができるかの論理的読解力，また，その結果から正しいことのみを帰結することができる論理的思考力を問うた．

高校の数学Ａでは，このような条件文を正しく読むための形式的な方法論を学ぶ．たとえば，小問(1)は「帽子をかぶっていない子供は，みんな女の子です」の対偶にあたるので正しい．一方，小問(2)は「帽子をかぶっていない子供は，みんな女の子です」の逆であり，正しいとは限らない．逆が正しいと思いこむ誤謬は「後件肯定」とよばれ，陥りがちな誤謬であることが知られている．小問(3)では，与えられた条件を論理的に組み合わせて判断することが必要となる．

本設問のように，自然言語で書かれた文章から論理的な骨組みを正確に取り出すことは，数学の学習の場だけではなく，現実世界の諸問題を精確に記述し，逆に記述されたものを正しく理解し判断するというコミュニケーションにおいても必要となるだろう．

採点基準　全問正解だけを正答とし，それ以外は誤答とした．

問題文中の「帽子をかぶっていない子供は，みんな女の子です」という文から，「男の子は帽子をかぶっている」ことを帰結できる（帽子をかぶっていない男の子がいると矛盾する）．しかし「女の子は誰も帽子をかぶっていない」とは言っていない．以上のことから(1)の答えは〇，(2)の答えは×である．さらに，「スニーカーを履いている男の子は一人もいません」という文と併せても，「帽子をかぶっていて，しかもスニーカーを履いている女の子がいる」可能性を否定できないため，(3)の答えは×である．

2.2.3. 問 2-1（第 2 ステージ）

問題　偶数と奇数をたすと，答えはどうなるでしょうか．次の選択肢のうち正しいものに〇を記入し，そうなる理由を下の空欄で説明してください．

(a) いつも必ず偶数になる．

(b) いつも必ず奇数になる．

(c) 奇数になることも偶数になることもある．

出題意図　平成 14 年から実施された学習指導要領において，奇数と偶数について最初に学ぶのは 小学 5 年次である．ここで，「2 の倍数を偶数といいます．0 は偶数とします．また，偶数でない整数を奇数といいます」あるいは「2 でわりきれる整数を，偶数といいます．また，2 でわりきれない整数を，奇数といいます．0 は偶数とします」と定義し，整数が奇数と偶数の 2 種類に分類できること，奇数は 2 で割るとあまりが 1 になる整数であることを学ぶ．さらに「偶数＋奇数」が奇数になる理由を考える活動が予定されている．

次に中学2年次の「文字式の利用」の単元において，文字を使って整数の性質を論証する方法論を学ぶ．たとえば，「3つの連続する整数の和が3の倍数になること」を証明する問題はどの教科書にも登場し，高校入試でも頻出する典型的な問題である．どの教科書も「独立した2つの数」を異なる文字 m，n で表すタイプの問題を扱っているが，「偶数＋奇数

が必ず奇数になる」という問題も扱われる．「説明しなさい」「証明しなさい」という言い回しが用いられている．中学で「証明する」ことを徐々に習うが，この段階が初めであり「説明しなさい」が用いられる．（平成２４年４月実施の全国学力テスト中学校第３学年数学Ｂの第２問（「連続する3つの整数の和は，3の倍数になる．」）でも「説明」を完成しなさい，という形式である．）

さらに，高校１年の数学Ａの「論証」の単元において，文字を使って整数の性質を論証する方法をもう一度学ぶ．

「証明せよ」と書くとそれだけで無回答が増えるという可能性があるので避けた，ということもあるが，「理由を説明せよ」ということをどう受け取り答えるかを見ようと意図した．問 2-1 で問うた内容は，上で説明したように学習指導要領上，小学校・中学校・高校で，発達段階に応じて３度にわたって学んでいる箇所で，「すべての場合を尽くした」説明をする上では文字式等を用いた一般的な説明が求められることを中学校および高校で２回学んでいる．あえて文字式を使わずに図等で「説明しよう」と意図することも可能であるが、以上のように，「数学の言葉を使って論理的に説明する」という学習内容は，発達段階を意識しながら「スパイラル形式」で３度にわたって扱われ，その指導の効果の現状が反映されるであろう．

正答例　正しい選択肢は(b)である．正しい理由の記述に関しては，複数の検定教科書を参考に，調査対象の大学新入生が中学２年次に受けたであろう授業における類似問題の正答例に基づいて，本設問での正答例を以下の通りに定めた．

偶数と奇数は，整数 m, n をもちいて，それぞれ $2m, 2n+1$ と表すことができる．そして，この２つの整数の和は

$$2m+(2n+1)=2(m+n)+1$$

となる．$m+n$ が整数なので，この和は奇数である．

分類基準　以下の基準では分類困難な答案が若干数存在した．それらに対しては(必要に応じて採点グループ内で議論して)答案ごとに判断したが，E 群への分類はできるだけ避けた．

<u>A 群：正答</u>　正答例と合わせて，以下のような解答も正答とした．

例 1：「$m+n$ が整数なので」の部分が「$2(m+n)$ が偶数なので」となっている．

例 2：正答例の「・・・$=2(m+n)+1$ となる．$m+n$ が整数なので」の部分が，「・・・$=2k+1$（k は整数)」(もしくは「・・・$=2k+1$. $2k$ が偶数なので」)となっている．

例 3：正答例における「整数」の部分で「自然数」や「非負整数」という用語を使っている．

B 群：準正答　論理的にやや不備があるもの．

例 1：正答例の冒頭に対応する部分が「m, n を整数とすると，$2m$ は偶数，$2n+1$ は奇数になる」となっている．

例 2：正答例の「$m+n$ が整数なので」に対応する記述がない．

C 群：誤答　内容によって以下のように分類し，C-2 群・C-5 群を深刻な誤答とした．

［C-1］隣り合う偶数と奇数に対してのみ証明している答案

正答例の冒頭に対応する部分が「偶数は $2m$，奇数は $2m+1$（m は整数）と表せる」「偶数は x，奇数は $x+1$ と表せる」「奇数は y，偶数は $y+1$ と表せる」などとなっているもの．

［C-2］具体例を示して証明終了としている答案

「$6+1=7$, $4+5=9$ などとなるので，偶数と奇数の和は必ず奇数になる」のようなもの．定義に基づく演繹的な議論により現象を説明できることが数学の良さであるとの観点から，この群の答案も深刻な誤答とした．なお，具体例の個数が極度に少ない答案は C-5 群に含めた．

［C-3］C-1 群・C-2 群・C-4 群以外で，論理的には大きな誤りがない答案

例 1：偶数(ないしは奇数)を 2 個以上足す場合を考察している．(問題文を誤読している答案)

例 2：正答例の冒頭や末尾の「整数」部分が「実数」となっている．(数学用語を誤用している答案)

例 3：正答例の冒頭の「整数 m, n をもちいて」に対応する部分がない．

また，計算間違いを正したり説明を若干補ったりすれば B 群・C-1 群・C-4 群のいずれかと見なせる答案も C-3 群に含めた．

［C-4］論理的な誤りはないが何を証明すべきかが理解できていない答案や，厳密な証明ではなく大雑把な説明になっている答案

以下で答案の例を具体的に示す．

例 1：「偶数＋奇数＝偶数＋$(偶数+1)$＝$(偶数+偶数)+1$＝偶数＋1＝奇数.」

例 2：「偶数を 2 で割ると余りが 0 で，奇数を 2 で割ると余りが 1 である．したがって，偶数と奇数の和を 2 で割ると余りが 1 である．つまり，偶数と奇数の和は奇数である.」

例 3：「偶数と奇数は，『偶数，奇数，偶数，奇数，偶数，奇数，…』と交互に並んでいる．したがって，奇数を偶数の分だけずらしても奇数のままである.」

［C-5］論理的に説明するための前提に立っていない答案

極度に説明不足の答案や，論理的に大きな誤りがある答案など．時間切れで中途半端になった答案を含む．以下で答案の例を具体的に示す．

例 1：「$1+2=3$ だから．」

例 2：「偶数と奇数が『偶数，奇数，偶数，奇数，偶数，奇数，…』と交互に並んでいるから．」

例 3：「偶数を奇数にするためには，偶数を足しても駄目だが，奇数を足せばよい．」

例 4：「偶数同士を足すか奇数同士を足さない限り，整数の和は偶数にはならない．したがって，偶数と奇数の和は奇数である．」

例 5：「学校で習ったのだから『偶数＋奇数＝奇数』が間違っている筈はない．」

<u>D 群：白紙</u>

「わかりません」と書いてあるだけの答案など，白紙と同様のものを含む．

<u>E 群：解答の意思が無いと思われるもの，および分類できなかったもの</u>

「数学など意味がない．」「私は留学生です．言葉の意味がわかりません．」など．

2.2.4. 問 2-2（第 2 ステージ）

問題　2 次関数 $y=-x^2+6x-8$ のグラフは，どのような放物線でしょうか．重要な特徴を，文章で 3 つ答えてください．

出題意図　二次関数のグラフの性質については，中学 3 年から高校 1 年にかけて学ぶ．中学 3 年次では，まず $y=ax^2$ のグラフが放物線とよばれることを学び，グラフの特徴として，(1) $a>0$ のとき「上に開いた形」になること，(2) $a<0$ のとき「下に開いた形」になること，(3) 対称軸をもつこと，などの特徴が列挙される．教科書ではこれらの特徴が重要であることを印象づけるため，太字を用いる，枠で囲んで箇条書きで表現する，表でまとめるなどの工夫をしている．

次に二次関数について学ぶのは高校 1 年次の数学Ⅰの前半においてである．高校では数学基礎または数学Ⅰが必履修であるが，大学入試を受験するほぼすべての学生は数学Ⅰを学んでいると考えられる．数学Ⅰにおいて，一般の二次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフの特徴と，その特徴を決定するための方法論を約半年かけて学ぶ．最初に，二次の係数 a の符号からグラフが「上に開いた形」か「下に開いた形」を決定できることを学ぶ．ここで「上に開いた形」を「下に凸」，「下に開いた形」を「上に凸」と呼ぶことを学ぶ．次に，グラフの頂点と軸を求める計算法（平方完成）を学び，頂点の座標が (s,t) であるとき，

$y = ax^2$ のグラフを x 軸の方向に s，y 軸の方向に t だけ平行移動すると，考えている二次関数のグラフに重なることを学ぶ．さらに，グラフと x 軸との交点(共有点)の個数を決定する方法論(二次方程式の判別式)や，x 軸との交点の求め方(二次方程式の解の公式)を学ぶ．これらは，センター入試を含め大学入試で数学を受験したすべての学生が繰り返し勉強した内容だと考えられる．また，以上で言及した二次関数の特徴が重要であることを印象づけるため，中学校の教科書と同様に，太字を用いる，枠で囲んで箇条書きで表現する，表でまとめるなどの工夫が，高校の教科書においてもなされている．さらに，高校 2 年次の選択科目である数学 II においては，微分を使って $y = ax^2 + bx + c$ の $x = t$ における接線の方程式を求める方法を学ぶ．また，主として理系に進む学生のための選択科目である数学 C において，放物線の焦点と準線について学ぶ．

本設問では，二次方程式の解の公式を使わずに因数分解で x 軸との交点を求めることができる関数 $y = -x^2 + 6x - 8$ を題材にとり，その重要な特徴を文章で列挙することを求めた．「重要な特徴を挙げよ」という設問は，個人の価値観に関係するものであるため，このような設問を設定することについては教育委員会でも異論があった．しかし，他の専門分野と同様に，「何が重要な特徴であるか」を判断し抽出することは数学においても不可欠である．この観点において，論理的に正しいことは価値をもつための必要条件ではあるが十分条件ではない．若い世代に数学を伝える(教える)にあたっては，価値観も含めた数学の知恵を伝えることも必要であろう．

中学から高校 1 年まで 1 年以上をかけて学んだ二次関数に関して，重要だと大学新入生が受け止めている観点を文章として記述するように求めることで，数学の価値観が伝わっているかどうか，さらに，伝わっていないとすると何が原因かを探る重要な手がかりとなると考え，このような設問形態をとった．

正答例　与えられた放物線の特徴をつかむ方法として，中学 3 年および高校 1, 2 年では次のような方法を学ぶ．

1. 二次の係数から，上に凸（下に開いている）か，下に凸（上に開いている）かを決定する．
2. 軸と頂点を求める．
3. x 軸との交点があるかどうかを調べ，もしある場合にはその個数と座標を求める．
4. y 軸との交点を求める．
5. 導関数を求めて，どの点で最大値（あるいは最小値）をとるかを調べる．

さらに，高校 3 年では放物線の焦点と準線を求める方法を学ぶ．

以上のうちから適切に 3 つの観点を選び，数学的に正しいことを述べているものを典型的な正答例とする．以下に正答の一例を挙げる．

1. 上に凸である．
2. 頂点の座標は (3, 1) である．

3.　y 軸と点 $(0,\ -8)$ で交わる.

分類基準　問 2-1 と同様に，以下の基準では分類困難な答案が若干数存在した．それらに対しては答案ごとに対処し，E 群への分類はできるだけ避けた.

A 群：正答　正答例の項を参照のこと．ただし，正答例以外にも二次関数のグラフに関する観点は存在しうる．その場合には，複数の数学者による合議により正答かどうかを判定した．3 つの要素のセットで解答とみなし，部分点はつけない.

B 群：準正答　軸と頂点の座標を異なる二つの観点として挙げ，残る一つの観点を加えても二次関数が決定できない場合，準正答に分類した．（軸が $x = 3$ であることは，頂点が $(3,1)$ であることに直接的に含まれる条件であり，異なる重要な観点として挙げるのは好ましいとはいえない．）この判定は主として，このような解答行動をとる学生の割合を把握するためである．他にも，正答例の項で述べた条件を満たしているが，余白で行った計算からの転記ミスや，漢字の誤りなどを含む答案が若干数存在した．数学用語の誤用がある場合は内容に応じて C-1 群・C-2 群に分類した.

C 群：誤答　内容によって以下のように分類し，C-2 群を深刻な誤答とした.

［C-1］採点者が想像力を若干働かせると解答者の意図が理解できる誤答

以下，カギカッコ内で該当する答案の例を示す.

例 1：用語を混同して使っている．数値と座標を混同している．「y 軸と $(0,-8)$ で接する」「中心が $(3,\ 1)$」「y 軸対称」「x は 2，4 を通る.」「原点における y の値は -8」「軸が $x = 3$ を通る」「軸が正」

例 2：グラフの特徴をつかむための過程で行う作業と，グラフの特徴を混同している．「実数解が 2 つある.」「$D > 0$」「実数解は 2 と 4 」「$f(0) < 0,\ f(0) = -8$」

例 3：数学的には正しいがグラフの特徴として挙げるには不十分．「原点を通らない」「定義域は実数全体」「いたるところ連続」「微分すると $-2x + 6$」

2 つ以下しか特徴を挙げていない答案で C-2 群に分類されないものも，この群に含めた．なお挙げた特徴が 2 つ以下で，しかも二次関数を決定できた答案が全体で 2 枚存在した.

［C-2］論理的に説明するための前提に立っていない答案

解答者が何を意図しているかを正確に理解するのが困難なもの．以下で答案の例を具体的に示す.

例 1：「2 つできる」（主語が不明）

例 2：「傾きは -1 である」「傾きは 6 」

例 3 :「急カーブ」「ゆっくり曲がっている」「広がっている．大きい」「小さい放物線になる」「細長い放物線」「真ん中より下」「右寄り」「原点より下にある」（客観的な性質と主観的な印象とを混同している）

例 4 :「最大・最小をもとめるとき」「因数分解する」「数を代入して傾きを考えること」（グラフの特徴をつかむために必要な作業内容を書く）

例 5:「曲がった感じのやつ」

D 群：白紙

E 群：解答の意思が無いと思われるもの，および分類できなかったもの

D 群と E 群については問 2-1 と同様である．

2.2.5. 問 3（第 3 ステージ）

問題 右の図の線分(注：長さが 5cm の線分)を，定規とコンパスを使って正確に 3 等分したいと思います．どのような作図をすればよいでしょうか．作図の手順を，箇条書きにして分かりやすく説明してください．なお，説明に図を使う場合は，定規やコンパスを使わずに描いてもかまいません．

出題意図 中学 3 年次で学ぶ図形の相似は，障害物があるなどの理由で直接には測れない二点間の距離を測るための基礎となる理論である．高校 1 年次で学ぶ三角比の有用性を理解する上で，図形の相似は極めて重要な単元である．昭和 20 年代から 30 年代にかけて実施されていた学習指導要領（「生活単元学習」）では，学校の地図を作るなどの活動を通じ，相似の理論がどのように役に立つかを実践的に教える場面が教科書本文に盛り込まれていた．現在の教科書ではそのような活動に関して，章末や巻末で発展的学習を提案することに留めている．相似の単元において手を動かして考える活動として教科書本文に残っている唯一ともいえる問題が，本設問の「与えられた線分をコンパスと定規で三等分する」問題である．

現実世界での課題に数学を活用できることが，どれだけ学生に認知されているか，そして，その能力を学生がどれだけ身につけているのかを，本設問の正答状況から推し量ることができよう．さらにこの問題では，調査したかった力がもうひとつある．それは，手順(アルゴリズム)を簡潔かつ論理的に表現する能力である．これが特に高度理工系人材にとって必要不可欠なものであることは異論がないだろう．

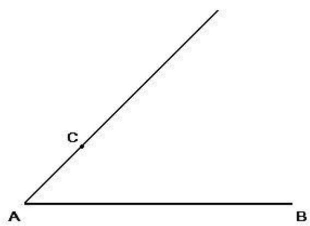
この問題は，ほぼすべての中学 3 年の教科書で取り上げられている．ただし，相似の単元は高校入試前の中学 3 年次後半に置かれているため，教科書で取り上げられているとしても実際に現場で教えられているかどうか，また，生徒たちが手を動かして問題を解いているかどうかは不明であった．本調査に先立って 2010 年に実施したプレ調査では，本設問

を解いた多くの学生が「このような問題は見たことがない」「小学校のときに進学塾で解いたことがあるが学校では習っていない」などと答えたことから，本調査でも出題することにした．この問題の正答状況は，学習指導要領の設計主旨およびそれに沿った教科書の作成意図が，実際の教育現場にどの程度の影響を与えているのかを知る手がかりにもなるだろう．

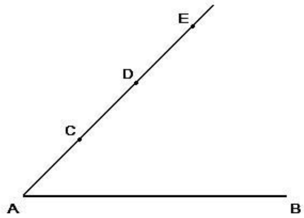
正答例　作図の手順をどの程度詳しく書くことを求めるかについて採点グループでも議論があった．特に，平行線の作図方法まで求めるか否かに関して議論があった．が，解答時間が 10 分であることから，基本的な考え方が合っていれば正解とした．実際の中学 3 年の教科書に基づいて作成した正答例を以下に示す．

1. まず，図の線分の端点を A，B とする．

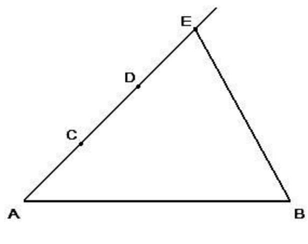
2. 定規を使って，線分 AB と重ならないように点 A から半直線をひき，その上に点 A と異なる点 C をとる．



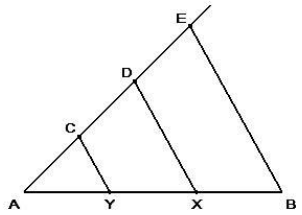
3. AC=CD=DE となる点 D，E を，半直線 AC 上にコンパスを使って図のようにとる．



4. 定規を使って点 B と点 E をむすぶ．



5. コンパスと定規を使って，点 D を通り線分 BE に平行な直線をひく．この直線と線分 AB との交点を X とする．同様に，点 C を通り線分 BE に平行な直線をひき，線分 AB との交点を Y とする．



6. 点 X，Y は線分 AB の 3 等分点である．

分類基準　これまでの問題と同様に，以下の基準では分類困難な答案が若干数存在した．それらに対しては答案ごとに対処し，E 群への分類はできるだけ避けた．

<u>A 群：正答</u>　数学的に正しく 3 等分ができる作図アルゴリズムを，図を利用して正確に記述できているものを正答とした．正答例の他に，以下のような方針が考えられる．

例 1：与えられた線分を中線とする三角形を作り重心をとる．

例 2：与えられた線分の両端に長さが 1:2 の線分を平行かつ逆向きに立て，それらの端点を結んだ線分と与えられた線分の交点として 3 等分点を求める．

<u>B 群：準正答</u>　正しい方針は何らかの方法で書かれているが，作図アルゴリズムの記述が不十分なもの．たとえば，説明図に補助線を引けば作図法が理解できる答案や，作図した点のどれが 3 等分点なのかを明示していない答案など．

<u>C 群：誤答</u>　内容によって以下のように分類し，C-4 群を深刻な誤答とした．

[C-1] 垂直二等分線の作図から始め，正答に至らなかった答案

例 1：垂直二等分線の作図を二度繰り返し，4 等分点を求める点として記述している．

例 2：垂直二等分線の作図を三度行い線分を 8 等分し，線分の長さの 3/8 の位置にある点を求める点として記述している．

例 3：垂直二等分線の作図を繰り返せば 12 等分ができると主張している(12 に限らず 3 の倍数が書かれているもの)．

[C-2] 「定規を使って線分の長さを測る」という操作を含む答案

典型的なものとして「線分の長さを定規で測り 3 で割ればよい」というもの．

［C-3］数学的な操作として可能だが正答に達しない答案で C-1 群・C-5 群以外のもの

［C-4］論理的に説明するための前提に立っていない答案
　以下で例を示す．カギカッコ内は答案の具体例である．
　例 1：図のみが書いてあり文章による説明がまったくない．
　例 2：数学的に不可能な作図の操作を含む．「コンパスを用いて，線分が書く円の直径になるように円を書く．そのとき，コンパスの軸を置いた点が線分を 2 等分する点であり･･･」（線分の中点を作図することなく，線分を直径とする円を描いている．）
　例 3：循環論法をなしている．「まず，左の端 A，右の端を B として，直線の 3 分の 2 の長さの半径の円を A を中心として描く．」

［C-5］与えられた線分を一辺とする正三角形の作図から始め，正答に至らなかった答案

D 群：白紙
E 群：解答の意思が無いと思われるもの，および分類できなかったもの
　D 群と E 群については問 2-1 と同様である．

３．調査の実施

- 「大学生数学基本調査」は 2011 年 4 月 1 日から 7 月 20 日にかけて実施した．
  - 調査票は調査実施事務局で印刷し，内容を確認の上，必要部数を各調査協力者に郵送した．調査実施にあたっては，人を対象とする研究に関わる研究倫理の精神にのっとり，匿名での調査とした．また，調査対象者に対して，書面および口頭で研究への参加について説明し，それに同意した場合にのみ調査票に記入，提出させる方法をとった．
  - 調査実施機関：48 大学，調査実施クラス（オリエンテーションを含む）：90，調査を受けた学生総数：5946 名
  - 調査を受けた学生が主として所属する大学・学部を，ベネッセコーポレーションのマナビジョンが提供する偏差値分類（国公立 S，国公立 A，国公立 B，私立 S，私立 A，私立 B，私立 C）および系分類に従って分類した上で，分析を行った．偏差値が高いほうから S,A,B,C である．国公立 S 群には，公立大学のサンプルは含まれない．
  - 調査を受けた学生の人数

	国 S	国公 A	国公 B	私立 S	私立 A	私立 B	私立 C
学生数	1026	2271	675	223	819	586	346

系	理工	文学	社会科学	教育	保健衛生	学際	混合
学生数	2502	202	853	1179	391	251	530

  - 各偏差値群には，少なくとも 3 つの異なる大学のデータが含まれている．
  - 学部・学科の「系」分類も某大手教育・出版会社が提供する分類に従った．
    - 理学／工学 系統　（以下：理工系）
    - 文学／外国語 系統　（以下：文学系）
    - 法学／経済・経営・商学／社会学／国際関係学 系統　（以下：社会科学系）
    - 教員養成／教育学 系統　（以下：教育系）
    - 薬学／保健衛生学 系統　（以下：保健衛生系）
    - 学際系統　（以下：学際系）
  - いくつか全学向け共通科目で実施された場合があり，その場合は「混合」と表現した．
  - 医歯学系・芸術系はサンプルに含まれていない．サンプル数が極めて少なかった系統については，表にはまとめなかった．

４．結果

本調査の調査項目は，中学・高校で数学を学ぶための基礎をなすものであるとの観点から，期待される正答率を，問 1-1 および 1-2 は 90%，問 2-1，2-2 は 75%と設定する．問 3 については，出題意図のひとつが実際に学校で教えられているか否かを把握することであったことから，期待される正答率は，ここには記さない．

以下，問 2-1,2-2,3 について，「解答の意思が無いと思われるもの，および分類できなかったもの(E 群)」を除く調査票に占める正答率および準正答率を表 5,6,8,9,11,12 では記載した．表 7,10 にはＥ群も含めた全調査票に占める正答率および準正答率を記載した．

問 1-1.

表1. 偏差値群による問1-1の正答率

	国Ｓ	国公Ａ	国公Ｂ	私Ｓ	私Ａ	私Ｂ	私Ｃ	全体
正答率%	94.8	80.4	73.8	83.0	64.8	56.0	51.2	76.0

表2. 系による問1-1の正答率

	理工	文学	社会科学	教育	保健衛生	学際	混合
正答率%	82.0	67.3	82.6	70.8	57.8	61.0	72.6

「平均の定義とそれに関する初歩的な推論」に関する，調査対象者全体の正答率は 76.0%であり，期待される正答率（90%）を大幅に下回った．期待される正答率を超えたのは国立Ｓ群のみであり，理工系でも 18%が不正解であった（表 1,2）．文学系・教育系・保健衛生系・学際系では正答率が 80%を大きく割り込んでおり，課題が残る．

アンケート項目から，正答に近くかつ誤答から遠い因子（および正解から遠くかつ誤答から近い因子）をそれぞれ絞り込んだ．その結果，正答に近くかつ誤答から遠いのは，①国公Ｓ・Ａ群，②数学記述試験経験あり，③中学数学得意，④小学算数得意，⑤物理得意，なグループである．逆に，正解から遠くかつ誤答に近いのは，①私Ａ・Ｂ・Ｃ群，②数学記述式試験経験なし，③中学数学不得意または普通，④小学算数不得意または普通，⑤物理不得意，なグループであることがわかった．

もっともよくある誤答は，3 番目の選択肢「身長を 10 cm ごとに区分けすると，「160 cm 以上で 170 cm 未満の生徒」が最も多い」に○をつけたものである．ちなみに，すべての選択肢に×をつけた学生は，理工系ではわずか 1.7%であり，すべての選択肢に×をつける学生は偏差値が下がるほど増える傾向にあった．

理系高校生の 2005 年基礎学力調査報告(東京理科大学数学教育研究所)によれば,平均を求めさせる典型的な計算問題の正答率は 92.5%である．本調査と単純に比較することはで

きないが，定義に従って平均を計算することはできるが，平均の性質や意味がわからない層がかなりいると思われる．

問 1-2.

表3. 偏差値群による問1-2の正答率

	国 S	国公 A	国公 B	私 S	私 A	私 B	私 C	全体
正答率%	86.5	66.8	60.6	66.8	56.9	44.5	41.6	64.5

表4. 系による問1-2の正答率

	理工	文学	社会科学	教育	保健衛生	学際	混合
正答率%	70.1	51.5	68.6	58.9	56.5	50.6	61.1

「命題と条件の論理的な読み取りに関する問題」に関する調査対象者全体の正答率は 64.5%であり，期待される正答率（90%）を大きく下回った（表 3）．問１－１同様に，文学系・教育系・保健衛生系・学際系では正答率が 60%を割り込んでおり，大きな課題が残る（表 4）．

アンケート項目から，正答に近くかつ誤答から遠い因子（および正解から遠くかつ誤答から近い因子）をそれぞれ絞り込んだ．その結果，正答に近くかつ誤答から遠いのは，①国公 S・A 群，②数学記述式試験経験あり，③中学数学得意，なグループである．逆に，正解から遠くかつ誤答に近いのは，①私 A・B・C 群，②数学記述式試験経験なし，③中学数学不得意，なグループであることがわかった．

問 2-1

表5. 偏差値群による問2-1の正答率（その他含まず）

	国 S	国公 A	国公 B	私 S	私 A	私 B	私 C	全体
正答%	41.4	21.9	10.2	13.5	10.6	4.3	1.4	19.1
正答＋準正答%	76.9	35.7	16.3	27.8	20.7	11.8	3.2	34.0

表6. 系による問2-1の正答率（その他含まず）

	理工	文学	社会科学	教育	保健衛生	学際	混合
正答%	26.1	5.9	19.1	14.8	10.7	7.6	13.4
正答＋準正答%	46.4	11.4	36.8	24.3	16.1	14.8	24.6

「整数の性質に関する初歩的な論証」に関する調査対象者全体の正答率は 19.1%，準正

答を加えても 34.0%であり，期待される正答率（75%）をはるかに下回る．国立 S 群においても，準正答率を加えることで，期待される正答率をわずかに超える程度に過ぎない．理工系でも半数以上が準正答にたどりついておらず，大変憂慮すべき状態にある．

問 2-1 の正答率を同じ偏差値群内で比較したところ,数学で受験をしない学生に比べて，マークシート方式であっても数学を受験した学生のほうが 2.4 倍正答しやすく，記述式で数学を受験した学生は 9.6 倍正答しやすいことがわかった．

表 7．偏差値群による問 2-1 の傾向

	国 S	国公 A	国公 B	私 S	私 A	私 B	私 C
正答＋準正答%	76.6	35.7	16.3	27.8	20.6	11.8	3.1
典型的な誤答%	20.9	54.6	65.1	57.0	52.0	49.3	51.1
深刻な誤答%	1.4	7.4	13.9	13.5	21.6	30.7	35.2
白紙%	0.8	2.4	4.7	1.8	5.5	8.0	10.4
その他%	0.4	0	0	0	0.2	0.2	0

（「その他」を含めて再計算）

表7は，C-1,C-3,C-4に分類された誤答を「典型的な誤答」，採点基準のC-2およびC-5に分類された誤答を「深刻な誤答」として，偏差値群ごとの傾向を表したものである．（「その他」とは解答の意思が無いと思われるもの，および分類できなかった答案.）
アンケート項目から，正答に近くかつ誤答から遠い因子（および正解から遠くかつ誤答から近い因子）をそれぞれ絞り込んだ．その結果，正答に近くかつ誤答から遠いのは，①国立 S 群，②数学記述試験経験あり，③理工系，④物理得意，⑤高校数学得意，⑥中学数学得意，なグループである．逆に，正解から遠くかつ誤答に近いのは，①国公 B 群，私 A・B・C 群，②数学記述試験経験なし，③文学系・学際系・保健衛生系・教育系，④物理不得意，⑤高校数学不得意，⑥中学数学不得意・普通，なグループであることがわかった．

問 2-2.

表8．偏差値群による問2-2の正答率

	国 S	国公 A	国公 B	私 S	私 A	私 B	私 C	全体
正答%	55.0	44.3	42.2	31.4	33.1	20.2	8.7	39.5
正答＋準正答%	75.4	59.8	54.1	44.8	43.3	27.9	12.4	53.1

表9. 系による問2-2の正答率

	理工	文学	社会科学	教育	保健衛生	学際	混合
正答%	48.4	15.9	36.2	35.4	29.9	27.6	31.8
正答＋準正答%	64.1	20.9	49.8	48.4	44.0	38.4	41.4

「二次関数の性質を列挙する問題」の調査対象者全体の正答率は 39.5%，準正答を加えても 52.9%であり，期待される正答率（75%）をはるかに下回る（表 8）．国立 S 群においても，準正答率を加えれば，期待される正答率をわずかに超える程度に過ぎない．理工系でも三割以上，教育系や社会科学系では半数以上が準正答にたどりついておらず，憂慮すべき状態にある（表 9）．

問 2-2 について正答率を同じ偏差値群内で比較したところ，数学で受験をしない学生に比べて，マークシート方式であっても数学を受験した学生のほうが 3.1 倍正答しやすく，記述式で数学を受験した学生は 7.4 倍正答しやすいことがわかった．

表10は採点基準のC-1に分類された誤答を「典型的な誤答」，C-2に分類された誤答を「深刻な誤答」として，偏差値群ごとの傾向を表したものである．(「その他」とは解答の意思が無いと思われるもの，および分類できなかった答案.）

表 10. 偏差値群による問 2-2 の傾向

	国 S	国公 A	国公 B	私 S	私 A	私 B	私 C
正答・準正答%	75.3	59.7	54.0	44.9	43.2	27.7	12.4
典型的な誤答%	23.6	31.7	37.3	28.3	34.3	40.4	44.5
深刻な誤答%	0.9	7.7	7.3	21.1	16.6	20.8	26.3
ほぼ白紙%	0.1	0.9	1.3	5.8	5.5	10.8	16.8
その他%	0.2	0	0	0	0.5	0.2	0

(「その他」を含めて再計算)

アンケート項目から，正答に近くかつ誤答から遠い因子（および正解から遠くかつ誤答から近い因子）をそれぞれ絞り込んだ．その結果，正答に近くかつ誤答から遠いのは，①数学記述試験経あり，②国 S・国公 A 群，③ 理工系，④高校数学得意，⑤中学数学得意，⑥１年生，なグループである．逆に，正解から遠くかつ誤答に近いのは，①数学記述試験経験なし，②私 A・B・C 群，③文学系・学際系・保健衛生系・教育系，④高校数学不得意，⑤中学数学不得意または普通，なグループであることがわかった．

問3.

表11. 偏差値群による問3の正答率

	国公S	国公A	国公B	私S	私A	私B	私C	全体
正答%	13.1	3.7	2.5	2.3	2.0	0.5	0.3	4.4
正答+準正答%	22.8	5.7	4.9	7.2	3.3	1.9	0.3	7.6

表12. 系による問3の正答率

	理工	文学	社会科学	教育	保健衛生	学際	混合
正答%	6.7	0.5	4.0	2.9	1.0	1.6	2.7
正答＋準正答%	11.2	1.5	8.3	4.6	1.5	2.9	5.3

「平面図形の作図アルゴリズムを記述する問題」の全体の正答率は4.4%，準正答を加えても7.6%に留まった（表11,12）. 作図方法を過不足なく表現した回答はほとんど見当たらなかった. 全体の誤答傾向にはあまり差がなく，本問題は，どの偏差値群にとっても，またどの系にとっても難しかった問題だといえるだろう. 本設問に関しては，解答時間が十分でなかったとの声が調査協力者から寄せられており，反省すべき点である.

アンケート項目から，正答に近くかつ誤答から遠い因子（および正解から遠くかつ誤答から近い因子）をそれぞれ絞り込んだ. その結果，正答に近くかつ誤答から遠いのは，①国S群，である. 逆に，正解から遠くかつ誤答に近いのは，①国S群以外，であることがわかった.

全体.

全問正答（準正答を含む）したのは，総数5946人のうち221人（3.7%）だった. 国立S群では13.9%,国公立A群では2.3%,国公立B群では0.7%,私立S群では1.8%,私立A群では1.7%,私立B群では0.3%，私立C群では0%であった.

質問紙の項目にはあるが，正答との間の関係が薄かったものについて以下挙げる.

- 算数・数学に関して通塾（家庭教師を含む）経験があるかどうかとの関係はなかった.
- 本調査を受けた時間が，数学の時間かそれ以外かについては，問2-2の正答率に若干関係がある程度で，ほとんど関係がなかった.
- 英語が得意・不得意であることとの間に，目立った関係は見当たらなかった.
- 生物が得意・不得意であることとの間に，目立った関係は見当たらなかった.

データから否定された仮説は以下の通り.

- 「塾に通った子のほうが有利になる」という仮説は，今回の問題については当てはま

らない．ただし，塾に通った長さを今回は考慮に入れていないので，その分析が必要かもしれない．

- 「数学の授業中に調査を受けていた学生は正答率が高い」という仮説は，今回の問題については，少なくとも，問2-2以外は当てはまらない．問2-2の正答状況は，対象となる学生が理系であることとの相関が高く，今回の調査は理系についてはたまたま数学の授業で調査をした例が多かったためだと考えられる．
- 「大都市圏の学生は正答率が高い」という仮説は，今回の問題については，少なくとも，問3以外は当てはまらない．問３の正答状況は，対象となる学生が国立S群であることと極めて関係が深く，国立S群の大学は大都市圏に集中しているためだと考えられる．
- 「英語が得意であること（不得意であること）と相関がある」という仮説は，今回の問題については，当てはまらない．
- 「実データに接する経験が豊富であり，有効数字や測定誤差についての知識がある理工系の学生は，問1-1の小問(2)に×をつけやすい」という仮説は，当てはまらない．
- 「後件肯定は誰もが同じ程度に陥りやすい誤謬だ」という仮説は，問1-2に関しては当てはまらない．なぜなら，偏差値群と正答率との間に顕著に正の傾向があったためである．

５．結果の分析

「大学生数学基本調査」のすべての問題において，正答率をもっとも左右する因子が，偏差値群と受験した大学数学入試の方式であることがわかった．それらの影響は，学部の系統よりもはるかに大きかった．以下，その 2 つの因子を，正答率を左右する主要因子として捉え，その背景について分析をする．

5.1　小学校算数，中学校数学，高校数学，受験方式の関係

本調査のアンケートでは，小学校・中学校・高校において，各科目が得意・普通・不得意のどれであったかを答えてもらった．科目の得意・普通・不得意は調査対象となった学生の主観によるものであることを留意願いたい．

また，大学入試においてどのような形式で数学を受験したことがあるかを①記述試験を受験したことがある，②マークシート方式のみで数学を受験した，③数学は受験しなかった，の 3 つの選択肢から答えてもらった．図 1 は各偏差値群に属する学生のうち，①記述試験を受験したことがある（記述），②マークシート方式のみで数学を受験した（マーク），③数学は受験しなかった（経験なし），の割合をグラフで示したものである．

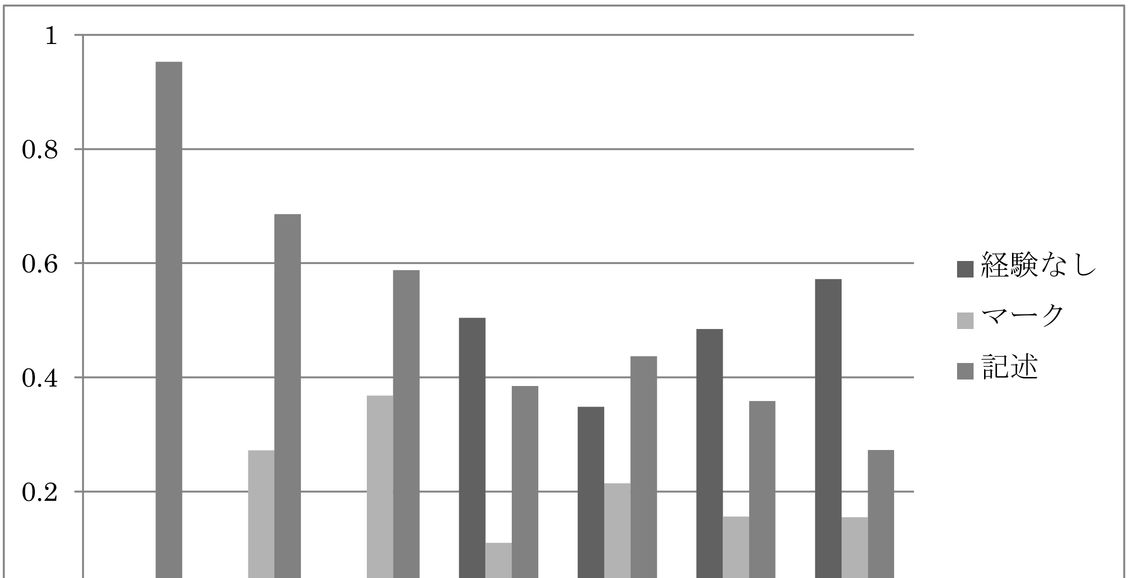


図 1．各偏差値群における数学入試方式経験の違い

項目間の関係を調べたところ，以下の傾向がわかった．（カッコ内はオッズ比）

・　小学校で算数が得意だった場合には，普通だった場合よりも，中学で数学が得意にな

る(7.392)　…　1%有意

- 小学校で算数が不得意だった場合には，普通だった場合よりも，中学で数学が不得意にはなりやすい(5.393)　…　1％で有意
- 中学で数学が不得意だった場合には，普通だった場合よりも，高校で数学が不得意になりやすい(4.923)　…　1％で有意
- 高校で数学が得意だった場合には，普通だった場合よりも，数学の記述式入試を受験する傾向がある(1.776)　…　1％で有意
- 高校で数学が不得意だった場合には，普通だった場合よりも，数学の記述式入試を受験しない傾向がある（0.537）　…　1％で有意
- 記述式入試を受験したことがある場合には，数学受験経験がない場合よりも深刻な誤答をしにくい(0.133)　…　1％で有意
- マークシート方式のみで数学入試を受験した場合には，数学受験経験がない場合よりも典型的な誤答をしやすい(2.229)　…　1％で有意
- 記述式入試を受験したことがある場合には，数学受験経験がない場合よりも典型的な誤答をしにくい(0.783)

積み上げ科目である算数・数学の特徴として，小学校で算数が不得意だった生徒は，中学校で数学が不得意になりやすく, さらに高校でも不得意になりやすいことがうかがえる．高校で数学が不得意な場合には，数学の記述式試験を回避しようとする傾向がみられる．

数学受験経験がない場合には，深刻な誤答に陥りやすい傾向が見られる．一方，マークシート方式のみで数学入試を受験した場合には，それ以外の場合に比べて典型的な誤答につながりやすい傾向が見られる．典型的な誤答の回数とその要因を分析したところ,「記述式受験経験」＜「数学受験なし」＜「マークシート方式のみ受験」の順で典型的な誤答の回数が多くなる傾向がわかった．

本調査における典型的な誤答の種類には以下のようなものがあった．①数学用語や表現の誤用（頂点を「中心」と書く，上に凸を「山型」「下に凹」などと書く，座標と数値の混同，交わるを「接する」と書く等），②独立した偶数と奇数をひとつの変数を用いて表す，③変数の定義域を書かない．どれもがマークシート方式ではスクリーニングが難しいタイプの誤りだといえよう．

5.2.　得意な科目との関係

今回の調査では，小中高校での主要な科目に関して,「得意・不得意・どちらでもない」のいずれに該当したかを答えてもらい, その結果と正答率との間に相関があるかを調べた．科目の得意・不得意は，成績等による客観的評価と，好き嫌いのような主観的評価の中間に位置すると考えられるだろう．

小中高校で算数・数学が得意だと答えることと正答率の高さの間に強い正の相関があっ

た．また，物理が得意だと答えることとの間にも，強い正の相関があった．化学が得意だと答えることとの間には，正の相関があった．

今回の調査に用いられた5問すべてについて，国語が得意だと答えることと，正答率との間に有意に負の相関が見られた．その度合いは，問2-1と2-2で特に大きかった．さらに，国語が得意だと答えた学生は「深刻な誤答」に陥りやすいとの結果が得られた．この結果は偏差値群や学部の中だけで比較した場合も変わることはなかった．ただし、センター入試における受験者全体の数学の成績と国語のそれの間に正の相関が知られている．

このような傾向は「英語が得意」だと答えることとの間には見られなかったものである．

本結果の解釈については，教育委員会内でも様々な議論があり，軽々と因果関係を判断すべきではないと考える．ただし，得られた結果は公平に公開すべきという立場から，結果を記載するものである．

5.3. 学習指導要領の内容の定着について

問 2-1 において，調査対象者全体の正答率は 19.1%，準正答を加えても 34.0%であり，かなり低い.その問にあえて式を使わずに「説明しよう」と意図した可能性のある答案は若干あったが，そういう「説明」の意図があったというよりは，段階的に文字式等を使って簡明に論証する方法を身につけていないと考えられる．式を用いず，言葉や図による説明を試みて不十分な解答にしか至らなかったのは全体の 8.9%であった．式を用いた証明をする姿勢はかなり定着しているが，早合点して相続く 2 つの整数の場合しか考えていない典型的な誤答に見られるように，すべての場合を尽くす証明を書けているかどうか自身で省みる習慣を身につけるまでには至っていないと考えられる．

問 2-2 の,二次関数が復元できるような 3 つの特徴を挙げる問題では,正答率約 39.5%，正答＋準正答率は 53.1%であった．上に凸か下に凸かの判定，頂点の座標の計算，座標軸との交点の座標の計算は個々に問えばできた可能性がある。これについては、比較可能な対象群を選び、フォローアップのための調査を実施する予定である．

問 3 の正答率は極めて低い.それは高校入試直前の中学 3 年 2 学期後半に位置する単元「相似とその利用」の問題である．作図に関しては，角の二等分線，垂直二等分線などの基本的な作図は中学校 1 年で習い，その技能が使えることが期待されるが，無理やり二等分の議論に帰着しようとする解答もあり，適切な作図技能の定着はまだまだ時間と機会が足りないように思われる．作図の問題に取り組ませようとすると，実際にコンパスと定規を出させて，試行錯誤をさせる必要があるが，高校入試に頻出する相似三角形における辺の長さの問題を繰り返し練習することを中学校では重視し，相似と作図を併せたこの種の問題を扱わなかったか,あるいはごく簡単にしか扱っていない可能性もあると考えられる．

附録 A. 調査協力教員のアンケートから

調査に協力していただいた教員からアンケートの回答を得ることができた．（回収率 65%）

回答者のうち，大学の教養科目あるいは全学共通科目としての数学を教えている教員は 62%であった．

A.1　学生に理解をさせる上で困難を覚える内容は？

「大学の教養科目あるいは全学共通科目としての数学を教えている」と答えた教員に対して，どのような内容を理解させる際に困難を感じているかを「大変困難」「やや困難」「ほぼ問題ない」の三段階で答えてもらった．

A.1.1. 線形代数および解析の計算

「線形代数における逆行列や行列式の計算」を理解させたり実行させたりすることに困難を感じることがあるかどうかを尋ねた結果，大変困難と答えた教員は 0%，やや困難は 11%，ほぼ問題ないが 58%，教えていないが 31%であった．「一変数の初等関数の微分および積分の計算」を理解させたり実行させたりすることに困難を感じることがあるかどうかを，尋ねた結果，大変困難と答えた教員は 4%，やや困難は 11%，ほぼ問題ないは 54%，教えていないが 31%であった．

多くの教員が線形代数や初等関数の微積分の各種計算を実行させることはそれほど困難ではないと答えている．ただし，線形代数の計算よりも，微積分の計算のほうがやや困難を覚えているようである．

A.1.2. 抽象概念の理解

「集合における部分集合と元との違い」「同値関係・同値類・商・代表の理解」「写像の理解（単射や全射の意味等）」についても，理解させたり実行させたりすることに困難を感じることがあるかどうかを尋ねた．

「集合における部分集合と元との違い」に関しては，大変困難と答えた教員は 8%，やや困難は 38%，ほぼ問題ないが 31%，教えていないが 23%であった．「同値関係・同値類・商・代表の理解」は，大変困難と答えた教員は 35%，やや困難は 38%，ほぼ問題ないが 4%，教えていないが 23%であった．「写像の理解」は，大変困難と答えた教員は 28%，やや困難は 44%，ほぼ問題ないが 20%，教えていないが 8%であった．

アンケート結果からは，ごく基本的な概念であっても，抽象的な概念を理解させることが困難であることが浮かび上がってきた．特に，同値関係や写像を理解させることに多くの教員が困難を感じている様子がわかる．

A.1.3. 命題の証明

「全称命題が正しいことを，どのように証明すべきか」「存在命題が正しいことを，どのように証明すべきか」を理解させたり実行させたりすることに困難を感じることがあるかどうかを尋ねた．

「全称命題が正しいことを，どのように証明すべきか」に関しては，大変困難と答えた教員は 23%，やや困難は 39%，ほぼ問題ないが 19%，教えていないが 19%であった．「存在命題が正しいことを，どのように証明すべきか」に関しては，大変困難と答えた教員は 23%，やや困難は 35%，ほぼ問題ないが 23%，教えていないが 19%であった．

抽象概念を理解させることほどではないが，どのようにすれば全称命題や存在命題が正しいことを証明できたことになるのかを理解させることにかなりの教員が困難を感じている様子がわかる．

A.2.（科目を超えて）理解させたり実行させたりすることが困難な内容

次に，（数学の教員に限らず）今回調査に協力をしてくれた教員全員に対し，学生に理解させたり実行させたりする上で困難を感じることについて尋ねた．

「具体例と一般化した説明との区別」を理解させたり実行させたりすることに困難を感じることがあるかどうかに関しては，大変困難と答えた教員は 17%，やや困難は 58%，ほぼ問題ないが 25%であった．「主張に対する根拠の適切性」に関しては，大変困難と答えた教員は 23%，やや困難は 56%，ほぼ問題ないが 21%であった．「展開された主張を読み，その中から矛盾点を見つけ出す」に関しては，大変困難と答えた教員は 31%，やや困難は 58%，ほぼ問題ないが 11%であった．

数学系とそれ以外とでは，上記の設問でイメージされる内容がかなり異なると思われるが，多くの教員がそれぞれの分野において，学生の論理的な判断力や思考力に課題があり，指導することに困難を覚えている様子がうかがえる．

A.3. 結果をどのように受け止めているか

調査を実施した教員には，全体の結果と，各自が実施したクラスでの結果をフィードバックした．その上で今回の調査結果をどのように受け止めているかを尋ねた．

過半数である 62%の教員が「予想通りである」と答えている．ふだんの授業の様子や期末試験等から受ける印象と，調査結果との間にそれほど乖離がなかったと思われる．

A.4.教員アンケートのまとめ

アンケート結果から，主として数学教員が指導する上で困難を覚えているのは，計算よりも，抽象的な概念の理解であることがわかった．また，論理的な判断力や思考力に課題があり，論証の進め方などの指導に困難を覚えている様子もわかった．この結果は，本調査全体から導き出された結論と比較的よく合致するものだといえよう．

附録 B. 調査の評価（統計数理研究所　尾崎幸謙）

B.1 調査の統計的性質に関する評価

「大学生数学基本調査」は 5 問からなる数学力調査と算数の得意・不得意などを尋ねるアンケート調査に分かれている．ここでは双方の調査に関して統計的性質の検討を行う．

B.1.1 数学力調査の統計的性質に関する評価

教育測定の分野では，主として難易度（正答率）と識別力の 2 つ統計的指標の観点から問題の性質を捉える．識別力とは，測定しようとしている特性の個人差や集団差を，各問題がどれだけ敏感に反映するかを表す指標であり，識別力の高い問題は良い問題である．ここでの識別力は，属性の違い（例えば偏差値群の違い）が各問題の正答・誤答確率に与える影響とする．偏差値群の違いが正答率に大きな影響を与えるとき，その問題は偏差値群の違いをよく反映していると言える．

各問題の特徴

偏差値群と受験方式ごとの正答率を示した表 1 と表 2 を見ながら，各問題の特徴を（特に識別力の観点から）述べると以下のようになる．問題 1-1 と問題 1-2 は，国公立内では S,A,B の順に，私立内では S,A,B,C の順に正答率が下がっており，偏差値群をなだらかに識別している問題であると言える．また，国公立の方が私立よりも正答率が高いので，国公立と私立を識別する問題であるとも言える．受験方式についても，記述式，マーク式のみ，受験せずの順に正答率が下がっており，問 1-1 と 1-2 は受験方式の違いについてもなだらかに識別している問題である．問 1-1 については国立 S 群の正答率が 100%に近かったが，それ以外は極端な正答率ではなく，今回の調査対象者の数学力を測定するという目的に対して適切な問題であったと言える．

表1.　偏差値群ごとの正答率

	問 1-1	問 1-2	問 2-1	問 2-2	問 3
全体の正答率%	76.0	64.5	33.9	52.9	7.6
国立 S%	94.8	86.5	76.6	75.1	22.6
国公立 A%	80.4	66.8	35.7	59.7	5.7
国公立 B%	73.8	60.6	16.3	54.1	4.9
私立 S%	83.0	66.8	27.8	44.8	7.2
私立 A%	64.8	56.9	20.6	43.1	3.3
私立 B%	56.0	44.5	11.6	27.8	1.9
私立 C%	51.2	41.6	3.2	12.4	0.3

表２．　受験方式ごとの正答率（複数回答と無回答は除外して計算した）

	問 1-1	問 1-2	問 2-1	問 2-2	問題 3
全体の正答率%	76.0	64.5	33.9	52.9	7.6
記述式%	85.3	72.4	49.8	67.6	11.4
マーク式のみ%	69.1	60.7	14.3	43.7	2.0
受験せず%	53.6	44.2	5.3	16.0	1.9

問題 2-1 は国立 S 群の正答率が 76.6%で飛び抜けて高いため，国立 S 群とその他を識別する問題であると言える．他の偏差値群についても国公立内では A, B の順に，私立内では S, A, B, C の順に正答率が下がっている．しかし，国公立 A 群の正答率でさえ 35.7%であることから，国立 S 群以外の学生にとっては難しい問題であった．受験方式については，記述式受験経験がある学生とそれ以外の学生を識別している．しかし，マーク式のみの場合の正答率は 14.3%，数学受験経験がない場合の正答率は 5.3%であり，記述式受験経験がない学生にとっては極めて難しい問題であったと言える．以上より，正答率のみからすると，問題 2-1 は国立 S 群や記述式試験経験ありとそれ以外を識別するだけの問題になってしまう．しかし，問題 2-1 は記述式であり，誤答は典型的な誤答・深刻な誤答・白紙に分類されている．誤答の分類も加えて偏差値群ごとの傾向を示した表３からすると，深刻な誤答は正答とは逆に，国公立内では S, A, B の順に，私立内では S, A, B, C の順に所属確率が上昇している．また，典型的な誤答も国公立内では S, A, B の順に所属確率が上昇している．したがって，問題 2-1 は正答・典型的な誤答・深刻な誤答という 3 つの観点から識別力を持った問題であると言える．偏差値が下がるほど典型的な誤答や深刻な誤答の割合が多くなることは予想されることであるから，この結果は一貫した妥当な採点が行われたことの証左とも言えるだろう．

表３．偏差値群による問 2-1 の傾向

	国 S	国公 A	国公 B	私 S	私 A	私 B	私 C
正答＋準正答%	76.6	35.7	16.3	27.8	20.6	11.8	3.1
典型的な誤答%	20.9	54.6	65.1	57.0	52.0	49.3	51.1
深刻な誤答%	1.4	7.4	13.9	13.5	21.6	30.7	35.2
白紙%	0.8	2.4	4.7	1.8	5.5	8.0	10.4
その他%	0.4	0	0	0	0.2	0.2	0

問題 2-2 も他の問題と同じように国公立内では S, A, B の順に，私立内では S, A, B, C の順に正答率が下がっているが，他の問題にない特徴を持っている．それは，国公立 B 群よりも私立 S 群の正答率が低いことである．結果的にこの問題は国公立と私立を最も識別する

問題となっている（国公立と私立の正答率の差は 29.3%．ただし，問題 2-1 も 27.3%であり同程度識別している）．受験方式については，記述式・マーク式のみ・数学受験せずとなるにしたがって正答率が 25%程度ずつ下がっており，受験方式についても識別力は高いと言える．誤答の分類も加えた偏差値ごとの傾向を示した表４からすると，深刻な誤答の所属率は国公立(0.9%～7.7%)よりも私立(16.6%～21.8%)で大きくなっている．したがって，問題 2-2 は正答率のみならず深刻な誤答についても国公立と私立を識別する問題であると言える．また，典型的な誤答の所属確率は国公立内では S, A, B の順に，私立内では S, A, B, C の順に上昇している．

表４．偏差値群による問 2-2 の傾向

	国 S	国公 A	国公 B	私 S	私 A	私 B	私 C
正答＋準正答%	75.3	59.7	54.0	44.9	43.2	27.7	12.4
典型的な誤答%	23.6	31.7	37.3	28.3	34.3	40.4	44.5
深刻な誤答%	0.9	7.7	7.3	21.1	16.6	20.8	26.3
ほぼ白紙%	0.1	0.9	1.3	5.8	5.5	10.8	16.8
その他%	0.2	0	0	0	0.5	0.2	0

問題 3 は全体の正答率が 7.6%であり，偏差値群別・受験方式別にみたときにも正答率が一様に低く，識別力について述べるには難易度が高過ぎたと言える．唯一，国立 S 群とその他を識別しているというのが，この問題に対する評価である．しかし，この問題の出題意図は 2.2.5 にあるように，「学習指導要領の設計主旨およびそれに沿った教科書の作成意図が，実際の教育現場にどの程度の影響を与えているのかを知る手がかり」となることを狙ったものであり，その目的は達成されたと考えられる．今回の調査において，問題 3 は識別力とは別の観点から評価されるべきである．

以上をまとめると，問題 3 を除く他の問題は，偏差値群や受験方式との間に相関が見られたため，偏差値群や受験方式の違いを識別する問題であると言える．これは教育測定学的意味における「妥当性」の 1 つである「基準関連妥当性」が高いと言い換えることもできる．

誤差の影響

教育測定学の分野では，学力などを測定するために複数の問題を出題することが推奨されている．それらは選択式などあまり時間のかからない問題であることが多い．複数の問題を出題する理由は，たまたま出題された問題が解けた，解けなかったことの影響を排除するためである．実力通りの力を測定するため，あるいは教育測定学的意味での「信頼性」

を高めるためと言い換えることもできる．教育測定学では，学力の測定状況を表すために，「観測値＝実力＋誤差」という式を用いる．これは実際にデータとして得られた得点（観測値）は，実力と誤差の和として表されることを意味している．したがって，誤差の関与する部分を少なくすることで，観測値に実力が反映されるようになる．そのために，同一の概念を測定する問題を複数出題するのである．

観測値に誤差が多く含まれる状況は，実力が測定できていないというだけでなく，他の要因（本調査の場合は偏差値群や受験方式など）との相関を計算するときに，誤差の影響で相関が低くなってしまう結果を招いてしまう．今回の調査では各個人にとってみれば偶然の（誤差の）影響によって正答できたケースや誤答してしまったケースがあったと思われるが，それにも拘わらず，正答率と諸要因との関係がみられた．この結果は，本来ならばより高い相関が存在する可能性を示唆している．あるいは，1.3.3 で述べられているような測定すべき能力についての議論や，問題作成や採点の過程での議論が誤差を少なくすることに貢献した結果かもしれない．

B.1.2 アンケート調査の統計的性質に関する評価

客観的指標と主観的指標

アンケート調査を行った目的は，数学調査の各問題との相関を調べることであった．アンケート調査には，客観的な指標である偏差値群や受験方式に加えて，各教科の得意不得意など主観的な指標についての項目も含まれていた．「4.結果の分析」の冒頭で述べられているように，偏差値群や受験方式は最も相関の高い 2 要因であった．これらとの相関が高かった理由は，本来高い相関がある要因であることに加えて，客観的な要因であることも挙げられるだろう．B.1.1 の最後で述べた「観測値＝実力＋誤差」はアンケート調査の質問項目にも当てはまり，得意不得意を尋ねられた場合にはその時々の気分によって回答が変化することも考えられるため，主観的な指標には誤差が含まれる．しかし，客観的な指標の場合にはそのような誤差が回答結果に影響することはほぼないと考えられるので誤差の影響によって相関が低くなることはなかったと考えられる．

今回の調査では，「4.結果の分析」で算数・数学の得意不得意が再三登場することからも分かるように主観的な指標である算数・数学の得意不得意が重要な要因となっている．これらは誤差を含んだ要因であるが，例えば高校時であれば大学受験模擬試験の偏差値を尋ねるなどすれば，客観的な意味での得意不得意を要因とすることもできたであろう．もちろん，模擬試験の偏差値は主催した予備校によって（模擬試験の受験者集団によって）変化してしまうが，偏差値を尋ねればある程度の客観性を持たせることができると考えらえ

る．しかし，ここで注意すべきことは，誤差の観点からすると客観的な指標が望ましいが，どちらを選択するかは第一に調査目的によって決められるべきだということである．

算数・数学の得意不得意は今回の調査では主観的な指標であるが，それでも（同じく誤差を持つ）各問題の正答・誤答や誤答パターンとの間に相関がみられた．このことは，両者の間には本来ならばより高い相関があることを意味している．

B.2 次回への課題

すでに B.1.2 で，主観的な得意不得意ではなく客観的な偏差値を尋ねることの意義を述べたが，その他の課題について以下に述べる．

個人属性とクラス属性

今回の調査では，調査対象となった学生個人が回答した質問と，調査対象となったクラスの担当教員が回答した質問があった．必修の授業か否かなどについては担当教員に尋ねてもよいが，学年や学部系統については個人に尋ねた方が良いと思われる．例えば，教育学部の学生が 80%で文学部の学生が 20%のクラスがあった場合に，担当者はそのクラスを「教育学部」として回答するだろう．しかしこのことは，20%の文学部の学生に対しては誤った学部系統が付与されることを意味する．これは，結果として相関が不正確となる要因ともなり得る．クラスの中に 1 人だけ別の学部の学生がいる場合には，個人に対して尋ねにくいことがあるかもしれないが，統計学的観点からすると個人に尋ねるべき質問である．

塾・予備校

今回の分析では塾･予備校は高い相関を持つ要因とはならなかった．その理由の 1 つに，塾・予備校の要因は，時期や期間を問わず 1 度でも通ったか・通わなかったかというコーディングを行ったことが挙げられる．それは，例えば「中学校 3 年生の 1 年間と高校 3 年間」という回答結果を小学校 1 年から高校 3 年までの 12 カテゴリでそれぞれ通ったか通わなかったかという変数にコーディングすることが今回のような大規模調査では困難だからである．この問題の解決策として，例えば，小学校 1 年から高校 3 年までの 12 カテゴリに対してそれぞれの時期に通ったか通わなかったかに○を付けたり，カテゴリ数が多すぎるのであれば小学校・中学校・高校それぞれの時期に通ったか通わなかったかに○を付けるような形式で質問することが一案として挙げられる．

性別

性別を尋ねなかった理由は，女子大が特定される可能性があるからということであった．また，どちらかの性別の学生がクラスの中に少数しかいない場合には，個人が特定される危惧を学生は抱くかもしれない．しかし，性別はおそらく相関がある要因であり，その意

味では尋ねる価値はあると考えられる．また，今回のように無作為抽出で調査が行われなかった場合，正答率を母集団における結果に補正する際には相関の高い要因を用いる必要がある．性別は補正のための有力な要因となるであろう．

附録C. 正答率の補正（統計数理研究所　尾崎幸謙）

大学生数学基本調査は無作為抽出によって実施された調査ではなく，全国の大学・研究所の教員に調査協力依頼を行い，調査協力者の担当する授業内で実施されたものである。したがって，対象者となった学生集団（標本）は日本全国の大学生（母集団）に比べて偏りが生じている。偏差値群と学部系統について標本の分布を求めたものが表 1 と表 2 である。

表 1：偏差値群の分布

偏差値群	国S	国公A	国公B	私S	私A	私B	私C
学生数	1026	2271	675	223	819	586	346
相対度数	0.173	0.382	0.114	0.038	0.138	0.099	0.058

表 2：学部系統の分布

学部系統	理工	文学	社会科学	教育	農学	保健衛生	学際	混合
学生数	2502	202	853	1179	38	391	251	530
相対度数	0.421	0.034	0.144	0.198	0.006	0.066	0.042	0.089

ここから分かることは，数学を含む学力全般が高い国立 S や国公立 A の割合が高く，両者で全体の 55.5%を占めていることや，数学の学力が高い理工系学部の学生が全体の 42.1%を占めていることである。したがって，標本データから計算された正答率は母集団における正答率よりも高い値であることが予想される。そこで，尾崎・新井・土屋(2012)では日本の大学生の真の正答率に迫るために補正を試みた。ここでは，補正の方法と結果について報告する。

興味のある変数を y（ここでは問題に対する正誤）とする。τy は母集団における y の総和(母集団における正答者数)である。yi は学生 i の正誤を表しており，正答ならば yi =1，誤答ならば yi =0 である。wi は学生 i の重みを表しており，これは標本の抽出法によって決まる。この重みは母集団において学生 i が代表する学生数を表している。母集団サイズを N，標本サイズを n とした場合，単純無作為抽出ならば wi =N/n であり，全ての学生について同じ重みが与えられる。s は標本を表す。正答率を求める場合には，τy /N とすればよい。本分析では単純無作為抽出を仮定して wi=N/n とした。

$$\hat{\tau}_y = \sum_s w_i y_i$$

正答率の補正を行うためには，変数 y と相関の高く，母集団と比べて分布に偏りのある補助変数 x を用いて，各学生に対して補正された重み w_i^c を求めればよい。τy,C/N が補正後の正答率である。

$$\hat{\tau}_{y,C} = \sum_s w_i^c y_i$$

ここでは，x として偏差値群と学部系統を用いる。その理由は，特に偏差値群は正誤と大きな関連があり，両変数とも母集団に比べて分布が偏っていることと，母集団における分布を知ることができるからである。各大学・学部の偏差値群についてはベネッセから情報提供を受け，学生数については文部科学省に対して学校基本調査のデータ提供申請を行い，母集団データを収集した。大学生数学基本調査は大学 1,2 年生が中心であったため，2011 年時点における日本の大学 1,2 年生を母集団として考えた。

補正を行うためには，補正される y_i のデータが必要となるが，例えば国立 S の文学系については対象となった学生がいないため y_i のデータがない。そのため，学部を理系（理工・農学・保健衛生）と文系（文学・社会科学・教育）の 2 つに大別し，偏差値群は，国 S，国公 A，国公 B，私 S と A，私 B と C の 5 つにした。2×5=10 個のセルには必ず対象学生が含まれる。学部系統の学際と混合については，理系と文系のどちらかに分類することは困難であるため，分析からは除外した。本分析で対象となった学生数は 5165 名である。

補正結果は表 3 の通りである。「標本平均」は 5165 名に関する補正前の平均である。「偏差値群」「学部系統」は，それぞれの変数の分布を標本と母集団で一致させるような重みを使って補正を行った結果である。「偏差×学部」は 2×5=10 個のカテゴリーを持つ変数を作り，その分布を標本と母集団で一致させるような重みを使って補正を行った結果である。「偏差＋学部」は「偏差値群」と「学部系統」の両変数の分布を標本と母集団で一致させるような重みを使って補正を行った結果である。

表 3：補正結果

	問題 1-1	問題 1-2	問題 2-1	問題 2-2	問題 3
標本平均	77.1%	65.5%	35.8%	54.9%	8.0%
偏差値群	63.9%	52.1%	17.0%	36.6%	3.3%
学部系統	76.2%	64.0%	32.6%	51.4%	7.1%
偏差×学部	63.0%	51.1%	14.7%	30.8%	3.1%
偏差＋学部	62.4%	50.9%	14.3%	31.0%	2.9%

4 つの補正結果が示されているが，どれも標本平均よりは低い値になっている。学部系統は補正にはあまり影響を与えず，偏差値群の効果が大きい。補正結果としては，両変数が使われている「偏差×学部」あるいは「偏差＋学部」を見ればよい。

最後に，表 3 で示した結果が必ずしも真の正答率とは限らない理由を 3 つ述べておく。1 つ目は，本調査は無作為抽出によって行われたものではないが，重みの計算では単純無作為抽出を仮定したことである。2 つ目は，学部系統や偏差値群のカテゴリーの合算を行ったことである。3 つ目は，補正すべき変数は他にも存在する可能性があることである。

文献

尾崎幸謙・新井紀子・土屋隆裕. (2012). 大学生数学基本調査の正答率補正. 日本行動計量学会第 40 回大会抄録集. pp.329-330.