# 書　評
# 梅田亨著「代数の考え方」
# 放送大学教育振興会出版（2010年）

## 1　何をどのように伝えるべきか

「代数の考え方」は梅田氏が放送大学における同名の講義のために書いた教科書である．講義はラジオ放送で行われたそうである．黒板やプロジェクタを使った講義とは違い，そもそも音声だけでこのような本格的な題名の数学の講義をすることなど出来るのだろうか? という疑問がまず湧いてくる．評者に思いつくのは「数学史に登場する人物の物語でお茶を濁す」または「ラジオ放送であるという点を考慮せずに普通に数学の講義をする」のどちらかである．

しかし著者は全く妥協しない．

気合の入った「まえがき」ではまず，講義名にもある「考え方」とは何を伝えることなのか，という誰もがもつであろう苦悩を真正面から述べ，著者の方針が提示されている（全文引用したいくらいである）．目標として「一方で，専門的な知識の伝達を目指しつつ，他方，啓蒙的・入門的な性格を持って書く」を掲げる．具体的な方針として,「(1) 中学・高校までの初等中等教育の題材を最大限生かすことで，学習者の動機を保ち, (2) 歴史的視点を加味することで，人類共有の財産としての数学の発展を感じ, (3) それによる一種「必然」の物語が我々の思考方法を拡充し，自由かつ豊かな発想を生む下地となってきたことを理解する．そして，このような前提と助走を経て, (4) 現代数学の基本的考えの核心に近づく.」と宣言している．著者は「望みすぎかもしれないが，目標だけでも高くするのは最低限の礼儀」と書いているが，本書はそれが決して不可能ではないことを示している．高校レベルの数学知識を前提として，数学や物理の様々な分野の根底にある「代数の考え方」が手際よく解説され,「代数の考え方」が人間による世界の理解を切り開いてきたことを実感できる構成となっている．

内容をざっと掴んでもらうために，目次をあげて，内容をいくらか紹介する: 「1．代数という言葉」「2．未知数という方法–方程式–」「3．一次方程式」「4．2次および3次・4次方程式」「5．量の自立–恒等式の世界」「6．幾何学の代数化–デカルト以降」「7．複素数」「8．四元数」「9．グラスマン代数」「10．非可換環」「11．群という対称性」「12．群と代数方程式」「13．群と不変性」「14．微分方程式」「15．物理と代数」

## 2　「代数」という言葉に込められた「代数の考え方」

第 1 章「代数という言葉」は「代数（algebra）」という言葉の語感，歴史から始まる．しかし単なる歴史趣味でも「話の枕」でもなく,「分野としての代数」の基本的な考え方を明らかにするというのがテーマである．なぜ歴史を見ることで「代数の考え方」が分かるのか? 歴史を紐解いて分かる重要な事実は,「代数」という言葉の持つ語感が，時代や場所によって一定ではなかったという事実である．これは「地球（geo）」＋「測る（metry）」という "由緒正しい" ギリシア語に語源を持つ「幾何学（geometry）」が「物の形・大きさ・位置，その他一般に空間に関する性質を研究する数学の一部門」という辞書的な「意味」をあまり変えなかったと思われるのと対照的である.「代数（というより algebra）」の語源は，西暦 800 年頃のアラビアの数学者アル・クワリズミの著書にある "al-jabr" という言葉にさかのぼる．これは現代なら「移項」としてまとめられる式変形のテクニックの一つだそうである．"al-jabr" がヨーロッパに伝わると分野名として使われ，19 世紀に中国語に翻訳される際には,「数の代わりに文字式を扱う」というこの分野の特徴を以って「代数」という文字が採用された．20 世紀に入ると「非可換代数」や「リー代数」のように,「（いくつかの）演算を持った集合」までも意味するようになる．このように「代数」という言葉は，各時代における「分野としての代数学」の意識の焦点を反映しており，その単語の意味の変遷に注目することは,「代数の考え方」の真髄に迫ることなのである.

## 3　当たり前になるまでは難しかったこと

本書の前半（2〜7 章）は主に高校数学〜大学初年度レベルの題材が扱われている．その数学的内容をここで再現することはしないが，初等的なテーマを徹底的に見直すことによって，繰り返し指摘されている事実がある．それは，分かってしまえば当り前のことでも，そうなるまでには気の遠くなるような永い試行錯誤があったという事実である．例えば，二乗したら $-1$ になる数 $\sqrt{-1}$ の導入は，当初はかなり躊躇いがあり，今となっては「無用の心配」と感じるが，永い試行錯誤の末「$\sqrt{-1}$ を使っても特に矛盾は起こらなそうだし，何よりも便利だから」と受け入れられたことはよく知られている．しかしこの種のことは，複素数の導入に限らず，もっと前から何度も起こっているのである．本書で著者が特に注目しているのは「文字式の導入」である．確かに数の計算が数学の全てであった人々にとって，文字式の導入は，虚数以上に異質なものであっただろう.「数である 3 と数ではない文字 $x$ を足して $x+3$ と書くけど，では $x+3$ は数なの? 数でないの?」という疑問は，数学者達が文字式を受け入れられるまで永く続いた深い悩みなのである.

## 4　文字式の導入に見られる現代数学の萌芽

文字式の導入は単に方程式を解くなどの応用にとどまらず，それまで親しんできた数の演算を反省する契機となった．その結果「交換法則」「結合法則」「分配法則」などの基本的性質が定式化された．数の世界だけで生きている限り，このような法則が定式化される必要はほとんどない．このような基本性質の認識が，抽象代数系の理論を展開する下地となったのである．このような流れはその後も続き,「代数系」達が住む世界を反省することで，圏論的な枠組みが整備され，様々な圏の研究が盛んに行われている.「代数の考え方」の振り子はゆっくり確実に振れ続けているのである．

後半（8〜15 章）のテーマは，数学の諸分野に現れる「代数の考え方」の紹介である．テーマは多岐にわたるが，全てを貫くキーワードは「（内包と外延の）双対性」である．例えば座標平面上の直線を表示するのに，パラメタ表示（外延）と定義方程式（内包）という二つの方法がある．多くの数学概念はこのような二面性を持っており，実際にガロア理論，代数幾何，不変式論，表現論，関数解析，$D$-加群など多くのテーマの基礎に「双対性」が現れることが紹介されている．まさに最先端の数学に通じる「代数の考え方」と言える．

## 5　「代数の考え方」が切り開く新たな世界

今や実数概念なしに自然を記述するなど考えられない．微分積分のライプニッツ流の記号 $\frac{dy}{dx}$ の便利さを実感するには，文字式の加減乗除に慣れていることが前提である．しかし「代数の考え方」が役に立つのはこのような例にとどまらない．最終章では，人間の世界観に革命を起こした二つの理論「相対性理論」と「量子力学」でも「代数の考え方」が表現論を通して重要な役割を果たすことが紹介されている．まさに「代数の考え方」は人間が世界を理解するための強力な武器としての役割を果たしているのである．

昨今様々な形での数学のアウトリーチ活動が行われているが，初等的題材に対する手加減なしの知的格闘は，単なる「お話」でもなく,「定義・定理・証明...」という数学研究コミュニティー内の効率のよい情報伝達方法を踏襲したものでもない，新しい「語り方」のモデルになるのではないかと思う．自分の講義でも使ってみたい素材がたくさん詰まった本である．

（吉永正彦，京都大学大学院理学研究科）