望月拓郎氏の日本学術振興会賞と日本学士院学術奨励賞受賞によせて

神戸大学大学院理学研究科
齋藤政彦

京都大学数理解析研究所の望月拓郎氏が「調和バンドルの漸近挙動の研究」に関する業績に対して, 第6回（平成21年度）日本学術振興会賞と第6回（平成21年度）日本学士院学術奨励賞を受賞されました. 望月氏の上記の業績は, 後で述べるように代数・幾何・解析が交錯する分野において深い理論を構築したものであり, それらが高く評価され二つの賞を受賞されたことは, 望月氏個人にとってだけでなく, 数学という学問分野にとっても大変意義あることと考えます. 日本学術振興会賞は, 優れた研究成果をあげ, 今後の活躍が期待される若手研究者に対して与えられる賞です. 数学分野からは, 過去6回毎年1名ないし2名の方が受賞されています. 平成21年度は各分野から25名が受賞されました. 日本学士院学術奨励賞は, その受賞者の中から, 我が国の学術の発展に特に寄与することが期待される6名以内に送られるものです. 数学分野からは, 過去に望月新一氏（第1回）および辻雄氏 (第5回) が受賞されています. 望月氏は, すでに「Harmonic Bundles の漸近挙動」で2006年度日本数学会春季賞を, 2008年に「ツイスター D-加群と半単純偏屈層の研究」で第1回湯川・朝永奨励賞を受賞されています.

それでは, 今回受賞対象となった望月氏の研究とその背景について, 簡単に紹介したいと思います. 1980年代, K. Corlette と C. Simpson はそれぞれ非特異複素射影多様体上において, 平坦ベクトル束の半単純性とチャーン類が0となる Higgs 束の多重安定性をそれぞれのベクトル束上の調和計量の存在によって特徴づけました. これらの結果は, ベクトル束の多重安定性が Einstein–Hermite 計量の存在と同値であるという小林–Hitchin 対応の拡張であり, 代数幾何的な「安定性」と微分幾何的な「良い計量の存在」が対応する一般的な原理の表れと見なせます. さらに, C. Simpson は, 非特異射影多様体上では調和バンドルを介して, 半単純平坦ベクトル束とチャーン類が0となる安定 Higgs 束の直和が一対一に対応する事を示しました. この対応は **Corlette–Simpson 対応**と呼ばれています.

さて, この Corlette–Simpson 対応を, 非コンパクトな準射影多様体の場合に完全な形で拡張することは, 理論的にも応用上も期待されていましたが, J. Jost と K. Zuo の結果や, C. Simpson, O. Biquard による部分的な結果しかありませんでした. しかしここ数年の一連の望月氏の仕事により, ほぼ完全な形で拡張されました. X を非特異射影多様体, $D = D_1 + \cdots + D_n$ を X の正規交差因子とします. $(E, \overline{\partial}_E)$ を $X \setminus D$ 上の正則ベクトル束, $\theta \in \mathrm{End}(E) \otimes \Omega^{1,0}$ を E の Higgs 場で $\theta \wedge \theta = 0$ を満たすものとします. E のエルミート計量を h, それと両立する接続を ∂_E, $\theta^\dagger$ を θ の h に関する共役とします. 一般に $\lambda \in \mathbf{C}$ に対して $\mathbf{D}^\lambda := \overline{\partial}_E + \theta + \lambda \cdot (\partial + \theta^\dagger)$ とおき, $\mathbf{D}^1 \circ \mathbf{D}^1 = 0$ を満たすとき $(E, \overline{\partial}_E, \theta, h)$ を調和

バンドルと呼びます．この条件は, すべての $\lambda \in \mathbf{C}$ に対して $\mathbf{D}^\lambda \circ \mathbf{D}^\lambda = 0$ と同値であり, 調和バンドルの条件は $\mathbf{D}^\lambda$ が平坦接続という事です.

$X \setminus D$ 上の調和バンドル $(E, \overline{\partial}_E, \theta, h)$ に対して, 詳しいことは省きますが, θ の無限遠因子 D 上の特異性が対数的であること, およびその留数行列の固有値がすべて純虚数であることにより, 従順性 (tameness), 純虚性等の概念が定義できます．また, X 上の局所自明 $\mathcal{O}_X$ 加群 $\mathcal{E}$ の D に沿ったパラボリック構造が定まり, (X, D) 上のパラボリック Higgs 束 $(\mathcal{E}_*, \theta)$ の概念が定義でき，同様に (X, D) 上のパラボリック平坦ベクトル束 $(\mathcal{E}_*, \nabla)$ も定義でき, これらのパラボリック構造付き対象に対しても, 自然に安定性を定義できます. 望月氏は, [3], [5] において, **Corlette–Simpson 対応の準射影版**として, 次の 3 つの対象 (1), (2), (3) が一対一に対応することを示しました．「(1) $X \setminus D$ 上の従順調和バンドル $(E, \overline{\partial}_E, \theta, h)$ 」,「(2)(X, D) 上の自明な特性類をもつ安定パラボリック Higgs 束の直和」,「(3)(X, D) 上の自明な特性類をもつ安定パラボリック平坦ベクトル束の直和」.

この定理より, 適当な議論から,「非特異準射影多様体上の平坦ベクトル束 (E, ∇) に関して, 半単純性と**従順純虚な調和計量の存在**は同値」という Jost–Zuo の定理の精密化が得られます. この定理の証明において，鍵となったのが今回の主な受賞の対象となった従順調和バンドルの無限遠因子 D での漸近挙動に関する結果でした.

望月氏は, 従順調和バンドルの漸近挙動の研究において, **極限混合ツイスター定理**を示すことに成功しました．([1], [4])．この定理は標語的に述べると「$X \setminus D$ 上の従順調和バンドルの無限遠因子 D における情報から, 極限偏極付き混合ツイスター構造が得られる」という定理です. 混合ツイスター構造とは $\mathbf{P}^1$ 上のフィルター付きベクトル束 (V, W) で $Gr_j^W(V)$ が $\mathbf{P}^1$ 上の次数 j の直線束 $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(j)$ の直和になっているものです．混合ツイスター構造に関しては, 射とペアリングの組に関する偏極の自然な定義があります.

さて, ここで重要な点は, 偏極付き混合ツイスター構造から, $Gr^W(V)$ を取ると, 再び偏極付き混合ツイスター構造となり, この構造には適当にトーラスの作用を持ち上げる事ができ, 偏極付きホッジ構造となることです．偏極付きホッジ構造の漸近挙動については, Cattani–Kaplan–Schmid や Kashiwara–Kawai の多変数冪零軌道定理等の重要な研究がありますが, それの結果が $Gr^W(V)$ に引き継がれ それはさらに元の偏極付き混合ツイスター構造の性質を導くという複雑な議論で漸近挙動が制御されるわけです．この原理は従順調和バンドルのノルム評価の証明や, 齋藤盛彦氏のホッジ加群における重要な結果がツイスター構造に移植されるという重要な結果を導きます.

さて, 従順調和バンドルの漸近挙動の研究に, 混合ツイスター構造が自然に表れ, D-加群や, 齋藤盛彦氏のホッジ加群の類似から，Simpson の Meta Theorem によれば, 混合ツイスター加群という理論が期待されます. この方向では, C. Sabbah が純ツイスター D-加群を導入しました. その目的は, 1996 年に柏原正樹氏が提出した次の予想を解決する事でした.「**柏原予想**: 代数多様体 X 上の半単純正則ホロノミック代数的 D-加群 M と, 射影射 $f : X \longrightarrow Y$ に対して, 押し出しのコホモロジーとして得られる正則ホロノミック D-加群

$\mathcal{H}^i f_* M$ は半単純であり, 相対強レフシェッツ定理や, 分解定理が成り立つ」. C. Sabbah は純ツイスター D-加群を定義し, その下にある正則ホロノミック D-加群については柏原予想を証明しました. 望月氏は, C. Sabbah の定義した純ツイスター D-加群と従順純虚調和ベクトル束との対応をつけ, さらに従順純虚調和ベクトル束と半単純正則ホロノミック D-加群の対応も得ていたので, D-加群が正則な場合に柏原予想の証明が完成しました.

望月氏のその後の研究の発展は, まさに目を見張るもので, プレプリント [6] において, 調和バンドルの従順性という仮定を外し, 野生的調和バンドルに関しても今まで説明した殆どすべての性質を拡張し, 柏原予想をすべての半単純ホロノミック D-加群について証明しました.

望月氏の論文を読むと, 代数幾何, 微分幾何, 位相幾何, 解析の各分野においていろいろな重要な結果に精通し, 自由自在に使いこなしている事に驚かされます. 代数幾何と微分幾何, そして解析の結果を行き来し, 必要な理論は自ら構築し, 目的とする結果に到達するという, 現代数学の真髄と広がりを, 望月氏の数学の中に見ることが出来ます.

最後に, 個人的な思い出ですが, 筆者が, 京都大学理学部に助教授として在職していた時, 望月氏が 3 年時で学部を退学し大学院に進学した頃を思い出します. あの頃すでに, Atiyah–Singer の指数定理の論文をセミナーで勢力的に発表されていました. 望月氏は非常に親切な人柄ですが, 数学をする時間を最優先する強い姿勢には, しばしば感銘を受けました. 今後のご活躍を楽しみにして筆をおきたいと思います.

参考文献

[1] T. Mochizuki, *Asymptotic behaviour of tame nilpotent harmonic bundles with trivial parabolic structure*, J. Differential Geom. 62 (2002), no. 3, 351–559.

[2] 望月拓郎, 従順調和バンドルの漸近挙動と純ツイスター D-加群について, 数学, Vol.58, No.4 (2006), 337–363.

[3] T. Mochizuki, *Kobayashi–Hitchin correspondence for tame harmonic bundles and an application*, Astérisque No. 309 (2006).

[4] T. Mochizuki, *Asymptotic behaviour of tame harmonic bundles and an application to pure twistor D-modules. I, II*, Mem. Amer. Math. Soc. 185 (2007), I: no. 869, II, no. 870.

[5] T. Mochizuki, *Kobayashi–Hitchin correspondence for tame harmonic bundles. II*, Geom. Topol. 13 (2009), no. 1, 359–455.

[6] T. Mochizuki, *Wild Harmonic Bundles and Wild Pure Twistor D-modules* math.DG/0803.1344v4.