会員ニュース

伊藤清氏の文化勲章受章に寄せて

池田　信行

伊藤清京都大学名誉教授は第一回 Gauss 賞に続き，2008 年度文化勲章を受章されました．この一文は当初，その受章を記念する業績紹介として依頼がありました．受章の朗報を喜ぶ間もなく，去る 2008 年 11 月 10 日，享年 93 歳で，不帰の人となられたとの悲報に接しました．ここでは，心からの哀悼の念をこめて，70 年にわたる伊藤清氏の業績の一端を，比較的初期のものを中心に，関連の話題や略歴と併せながら紹介します．

伊藤氏は 1915 年 9 月 7 日に三重県に生れ，(旧制) 三重県立神戸(かんべ)中学校 4 年修了で，(旧制) 第八高等学校へ進み，1938 年に東京帝国大学理学部数学科を卒業された．御自身の話によれば，八高の学生の時に力学の話に興味を持ち，数学科の同級生達と議論している中に，次第に現代数学全般に関心が向き，あわせて J. Bernoulli の大数の法則や A. de Moivre の極限定理を通じて，無秩序に見える現象の中の統計的法則に心惹かれ，確率論に関する論文や著書に目を通すようになったとのことである．大学卒業後は，最初の 1 年間大蔵省，続いて 4 年間内閣統計局に勤務する一方，1940 年からは東大の研究補助の嘱託でもあった．この時期の研究をまとめた，1942 年に発表された確率過程に関する最初の 2 つの論文が，それ以後の伊藤氏の研究のみならず，今日確率解析と呼ばれている分野の基盤になっている．

確率論の極限定理の理論では，無限分解可能な確率測度の特性関数の標準形は解析的方法で示される．これに対し P. Lévy は 1937 年の著書で，まず加法過程の軌跡の構造を決定し，それを用いて特性関数の標準形を導いた．伊藤氏は最初の論文（[1]）で，直観的な把握によるところが多い彼の議論を再検討し，現在 Lévy−伊藤表現と呼ばれている加法過程の表現定理を確立した．D. Mumford は，論説 :「確率時代の夜明け」で，Lévy−伊藤の表現から始める考え方を，彼が思い描いている 21 世紀の数学の姿の一例として挙げている．

2 番目の論文（[2]）は，当時欧文による発表の場がなく，全国紙上数学談話会誌に掲載された．そのために，日本以外では長期間にわたりその内容は知られなかった．この論文には問題の背景等が詳しく述べられていて，議論の進め方はセミナー・ノートに近い形式になっている．この論文の目標は，Kolmogorov が 1931 年の論文で提起した確率的力学系の運動方程式を確立することである．このことについて，伊藤氏は，次のように述べている．

「コルモゴロフは通常の力学系に対し，確率的な力学系を考え，その推移確率を定める有名なコルモゴロフの微分方程式を導きました．私はコルモゴロフの考えの奥に潜むものを考察して，確率的力学系の見本道を支配する法則を直接書き表わすために確率微分方程式を考え，これを解くために確率積分，確率微分を定義しました．こうして得られた結果の平均をとることにより，コルモゴロフの微分方程式が得られます．(日本アクチュアリー会会報 42 号第 2 分冊，(1989 年))」

ここで考えている確率的力学系では，N. Wiener の Brown 運動が古典力学系における自由粒子の運動の役割に相当する働きをしている．Wiener は 1923 年の論文で，液体の中を浮遊する，（大きさが 1 ミクロン程度の）微粒子，すなわち Brown 粒子，の運動の軌跡の挙動を支配する確率測度の導入に成功した．これを Wiener 測度と呼び，連続関数の空間と組みにして Wiener 空間と呼ぶ．ここでは Brown 運動の役割を手短に述べるために，Kolmogorov の方程式に現れる空間変数に関する微分の項がある Riemann 計量 g に関する Laplace－Bertrami 作用素の 1/2 倍の形に表わされる場合を考える．そのときはおおらかな言い方をすれば Brown 運動の各点で微分不可能な軌跡を接線とする Riemann 接続に関する測地線が求まれば先に述べた目的は達成される．この意味を述べるために，論文［2］とは話の進め方が違うが，先ず Brown 運動の軌跡を，適切な方法（任意ではない）で滑らかな曲線により一様近似する．次に，計量 g をもつ Riemann 多様体をその曲線に沿って回転させる．そのとき，この回転により曲線の跡として多様体上の曲線が得られる．それらの曲線を表わす方程式の系列の極限として，対称確率積分で表わされた確率微分方程式が現れる．この方程式を，確率積分を用いて書きかえると，論文［2］で導入された確率微分方程式と（本質的に）同じ役割を持つものに到達する．これが先に述べた確率的力学系の運動方程式である．なお論文［2］では，対称確率積分を経由することなく，確率積分の概念の導入から始まり，それを用いた確率微分方程式と Kolmogorov の方程式との直接の繋がりを念頭に入れた議論がなされている．この手順で，Brown 運動の軌跡に Riemann 多様体上の曲線を対応させる写像が決まる．それによる Wiener 測度の像測度が，Kolmogorov の微分方程式から導かれる確率的力学系の軌跡の挙動を支配する確率法則になる．厳密な言い方をする時はこの話は，orthonormal frame bunndle に関連した言葉を用いて進められる．なおその時は，テンソル場の確率平行移動を論じた伊藤氏の論文（1962 年）に触発されて始まった，J. Eells，K.D. Elworthy や P. Malliavin の成果が用いられる．また Kolmogorov の 1931 年の論文では Markov 性を持つ一般の運動から決まる確率的力学系を考えている．例えば，伊藤氏は Memoires Amer. Math. Soc. 4（1951）の論文で，論文［2］の内容を一般化し，標語的な言い方をすれば，Brown 運動のみでなく加法過程を接線とする軌跡に対する確率微分方程式を論じている．

論文［2］で確率微分方程式の考えとともに生れた確率積分と伊藤の公式は，次第にその直接の繋がりを離れ，Wiener 空間上の解析に不可欠な概念としての独自の役割が確立されて行く．なお論文［2］ではいわゆる「伊藤の公式」は，整理された公式としては，話を Brown 運動の場合に限定して例題としてだけで述べられている．明確に公式として取上げたのは Nagoya Math. Jour.（1951 年），に発表された論文である．また，同じ頃 Wiener 空間上の 2 乗可積分な関数の空間の重複 Wiener 積分を用いる直交分解が示されている．これは Wiener の考えを発展させたもので Wiener－伊藤分解と呼ばれている．これも確率積分が重要な役割を果たした例である．

Wiener 測度の存在を，明快な新たな道筋で示すために，R.E.A.C. Paley と Wiener は Fourier

展開，Lévy は Haar 関数系による wavelet 展開を用いた．伊藤氏は西尾真喜子氏との共同の論文（1963 年）でこれらを Cameron－Martin 空間における直交系による Fourier 展開として統一した．一方 Wiener－伊藤展開で 2 次の重複 Wiener 積分で表わされる部分空間の元に対しては Cameron－Martin 空間上の Hilbert－Schmidt 作用素が対応する．その作用素の固有関数系による Brown 運動の軌跡の Fourier 展開が広く用いられている．

伊藤氏のこれらの成果から，Feynman の経路積分と古典力学の間の関係と類似な結びつきが Brown 運動と古典力学の間にも存在することが分かる．実際 Lagrangian が 2 次形式の場合には，波動関数は Schrödinger 方程式の厳密解である．しかもその解は，古典軌道に対する作用積分と Jacobi 場により表示されることが J.H. Van Vleck によって示されている．また R.C. Feynman は，軌道の Fourier 展開と三角関数の無限積表示に関する Euler の公式を用いて同じ表示を示した．Wiener 空間では R.H. Cameron と W.T. Martin による変数変換の議論で，上にのべた Jacobi 場の計算と同じことが行われている．また Lévy は軌跡の Fourier 展開を用いて，2 次元 Brown 運動の軌跡が囲む領域の確率面積の確率分布の特性関数の表示を求め，一様磁場の場合の結果に相当することを示している．Wiener－伊藤分解と軌跡の Fourier 展開を用いると，これらを一つの枠組みの中で扱うことができる．さらに経路積分と Wiener 空間の話の類似を磁場を持つ場合に知るためには，確率積分の概念が不可欠になり，丸山－Girsanov 定理を用いて議論される．

伊藤氏のもう一つの著名な業績としては，一次元拡散過程に関するものが広く知られている．この研究は 1954 年の伊藤氏の Princeton 滞在の時から始まり，その成果は，1957 年 9 月から約 10 ヶ月間の McKean の京都大学滞在をこめて，約 10 年の年月を費やして書かれた McKean との共著にまとめられている．これより前 1950 年頃，W. Feller は Hille－吉田の半群の理論を用いて，一次元拡散過程全体の族を特徴づけた．彼は与えられた拡散過程に関し調和な単調関数と軌跡が各点に滞在する状況を特徴付ける測度を求め，それらによって表示される 2 階の（一般化された）微分作用素を導入した．伊藤氏は McKean と共同して，当時解明されつつあった強 Markov 性と Lévy の局所時間の考えを用いて，Feller が思い描いた，この微分作用素が支配する軌跡の挙動を完全に描写することに成功した．ここでも，２人の作業は Lévy が 1948 年の著書で導入した Brown 運動の局所時間の定義の再検討から始まった．Brown 運動の軌跡が時刻 t までに点 a に滞在する時刻全体の集合の Lebesgue 測度は 0 であるが Lévy はこの集合に非自明で，軌跡が点 a を訪問する状況を記述するために有効な量を導入し a における局所時間と呼んだ．この量が一次元拡散過程の軌跡の挙動を記述する鍵になった．なお，この本の叙述は一般論の説明が極めて少なく，多くの話が一次元の場合の具体的計算を基礎にして進められていて，現在も難解と言う声もある．一方，Poisson 点過程の理論等のように，この本がきっかけで新たな展開を見せている話題も次第に多くなっている．

1940 年代には，丸山儀四郎氏が伊藤氏の理論の唯一人の理解者であったが，1950 年代になると，モスクワやキエフの人達が確率微分方程式に興味を示し始め，1963 年にはジョ・ジュ

ギョン氏の「確率積分方程式」と題する 500 頁におよぶ単行本が出版されている．1969 年にMcKean の確率積分についての著書が現れ，事情は一変し，伊藤氏の成果は，分野の壁を超えた広範囲の数学者とともに, 確率制御とか filtering 等工学を始めとする応用分野の研究者等の知るところとなり，その人達の研究と深く結びつくことになった．このような事情を反映し，伊藤氏の成果のように，確率過程の軌跡の挙動を解析する微積分の体系に基礎をおいて研究を進める数学の分野を一括りにして,「確率解析」（または「伊藤解析」）と呼ぶ慣わしが生れた．さらに，この時期に伊藤氏の成果の応用がこれまでにない新たな広がりを見せている．その一つが数理ファイナンス，すなわち金融工学の基礎理論で果たしている役割である．この方面では, Brown 運動が現代的数学の枠組みの外側に置かれていた頃の 1900 年の L. Bachelier の論文が古典として有名である．しかし 1970 年代になると事情が大きく変わり，数理ファイナンスの話は装いを一新し，現代数学と強い繋がりを持つものに変わる．この理論では伊藤の公式と共に「伊藤の表現定理」も基本的な役割を果たしている．この定理は Brown 運動に関するマルチンゲールが確率過程として確率積分の形に表現されることを主張するものであり，Wiener－伊藤の分解を用いて示すことができる．

確率積分や伊藤の公式を巡る話をマルチンゲールの理論の枠内で再構成することに成功したことが確率解析にもう一段の飛躍をもたらした．そのような視点を最初に指摘したのは J. Doob で，続いて Markov 過程の特性を利用して話を前進させたのは本尾実，渡辺信三両氏である．さらに，国田寛，渡辺両氏による論文（1967 年）で，Doob と P.A. Meyer の優マルチンゲールに関する成果を基礎にした新たな枠組みが生れた．一方先に述べた幾何学の話題だけでなく，応用の分野でも確率微分方程式を常微分方程式の視点で考察するために，対称確率積分の概念の重要性が明らかになって来ていた．これに対し伊藤氏は，新たな装いをまとった確率解析の枠組みの中で，確率微分の空間の概念を新たに定式化し，その空間の中で確率積分，対称確率積分等の基本的概念を統一的な方法で扱う道筋を確立した．伊藤氏のこの成果はそれだけに留まらず，確率解析のその後の発展に大きな影響を及ぼし，多くの著書でこの考えが取り入れられ活用されている．またこれら確率解析の研究の進展により，Brown 運動の局所時間も確率解析の枠の中で捉えられ，その結果は確率微分方程式の話と組み合わさって拡散過程の研究の中で活かされている．

確率解析の流れに，決定的な新たな衝撃を与えたのは，伊藤氏の成果に強い関心を持ち続けていた Malliavin である．彼は確率変分の考えを用いて，有限次元の時の部分積分の考え方が Wiener 空間上で展開出来ることを示した．その後，この考えは渡辺氏により Wiener 空間上の超関数論として形式が整えられた．2 階の作用素の準楕円性や，（一般化した意味での）平均をとると熱方程式の基本解やパラメトリックスを与える Wiener 空間上の超関数の研究に応用されている．伊藤氏は Malliavin の考えに当初から強い関心を持ち，その理論の出発点の基盤を明快にする方向の研究を続けた．その成果は，1990 年と 1994 年に開催された国際会議の報告にまとめられている．後者が伊藤氏の数学についての最後の論文である．また Aarhus 大学

滞在頃から，無限次元の確率微分方程式に興味を持ち始め，Cornell 大学から京都大学に復帰する頃からその議論の基盤を整備する研究を積極的に続けた．この研究は伊藤氏が Poisson 点過程の体系的な研究を新たに始める動機にもなった．

伊藤氏の研究でこれまで全く触れなかったものも数多く．例えば，確率過程の軌跡が生成する σ-加法族と表現の問題，乱流の問題，エルゴード性，Feynman 積分の基礎づけ等多岐に亘っている．また数学基礎論の話題にも関心を寄せていて，例えば雑誌「数学」の第一号にゲーデルの数学基礎論（近藤洋逸訳）の書評がある．また Kolmogorov complexity にも関心を持ち続けていた．

確率論の研究を根底から一新した伊藤氏の業績に対し，朝日賞，学士院・恩賜賞，Wolf 賞，京都賞，文化功労者，第一回 Gauss 賞に続き，今回 2008 年度の文化勲章が授与された．さらに，伊藤氏は学士院会員，フランス学士院外国人会員，アメリカ科学アカデミー外国人会員に推挙され，加えて Paris 第六大学，スイス工科大学（Zürich），Warwick 大学から名誉学位を授与された．また名古屋大学，京都大学，学習院大学，Princeton 大学，Tata 研究所，Stanford 大学，Aarhus 大学，Cornell 大学，Minnesota 大学等で教育・研究に携わり，その間数多くの研究者に大きな影響を及ぼし，それらの人々との交流が絶えまなく続いていた．

数学辞典の第三版および英語版の編集委員長としての伊藤氏の尽力は広く知られている．さらに 1990 年に京都で開催された国際数学者会議では，学術会議会員としてその準備から，Vice President としてその実際の運営に一方ならぬ貢献をされた．また谷口財団数学部門（第一部）の責任者を長期間つとめ，数学者の国際交流に尽力し，加えて数理科学振興会の役員として青少年への数理科学の普及に貢献された．

日常の生活では，海外に滞在中から囲碁や卓球を楽しんでおられたが，京都の自宅の卓球台と黒板がおかれている一室を訪ねる数学者も数多く，また 10 数年前には 2 日にわたる報道関係者からの取材もここで黒板を使いながら行われたと聞く．

残念なことに，数学会が行った伊藤氏との対談の記録は最初の数頁を整理したところで，健康を害され未整理のままになっている．

参考文献：

［1］K. Itô, On stochastic processes (infinitely divisible laws of probability), Japan. Journ. Math. XVIII, (1942).

［2］伊藤清，Markoff 過程ヲ定メル微分方程式，全国紙上数学談話会，244 号，(1942).