# 授 賞 報 告

## 2008年度代数学賞

２００８年度代数学賞は，伊山修氏（名古屋大学大学院多元数理研究科），谷崎俊之氏（大阪市立大学大学院理学研究科），並河良典氏（大阪大学大学院理学研究科）の三名が受賞されました．偶然ながら，本年度授賞された三氏の業績にはすべて表現論が何らかの形でかかわっています．

### 伊山修氏「高次 Auslander-Reiten 理論の研究」

伊山修氏は，多元環および整環の表現論から出発して，Cohen-Macaulay 加群の表現論の分野においてきわめて斬新なアイデアを提供し，それを適用することで幾多の未解決問題を解決してきました．氏が提供したアイデアのうちで際立ったものを挙げるとすると,「削除理論」と「高次元 Auslander-Reiten 理論」であろうと思われます．

削除理論 rejection lemma とは，整環の表現とその拡大整環の表現とを比較する理論です．Bass 整環の理論で重要な役割を果たしたこの概念を，氏は概分裂完全列を有する Krull-Schmidt 加法圏である $\tau$-圏という形に公理化して，$\tau$-圏における削除理論を構築し (*A generalization of rejection lemma of Drozd-Kirichenko*, J. Math. Soc. Japan, 1998; *Some categories of lattices associated to a central idempotent*, J. Math. Kyoto Univ., 1998)，その応用として，有限表現型整環の Auslander-Reiten quiver を組み合わせ論的に特徴付けました（伊山氏自身による解説 *Representation theory of orders*, In: Algebra – representation theory, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2001 参照)．さらには Artin 環上の加群がかならず準遺伝的自己準同型環をもつ加群の直和因子となることを証明しました．その系として，ホモロジー代数における一連の未解決問題（中山予想を含む）の一つであった「有限次元多元環の表現次元の有限性」が導かれますし (*Finiteness of representation dimension*, Proc. Amer. Math. Soc., 2003), また副産物として，整環から定まる Solomon ゼータ関数の形に関する「Solomon の第二予想」も同時に解決されました (*A proof of Solomon's second conjecure on local zeta functions of orders*, J. Algebra, 2003)．

整環の表現論において中心的役割をはたす加群圏上の関手圏は，Auslander 多元環上の加群圏の一般化と捉えることができます．Auslander-Reiten 理論とは，Auslander 多元環に対するホモロジー代数的考察（あ

る種の性質をもつアルティン環の圏と別の性質をもつアルティン環の圏との間の森田同値性）を，より一般の多元環の圏と加群の圏との対応へと拡張したものです．

Auslander 多元環は，大域次元と支配次元がともに2であるという条件で特徴付けられます．より高い大域次元と支配次元をもつ多元環（高次 Auslander 多元環）と森田同値となる加群圏を見出すことは，Auslander による表現次元理論 (1971) にさかのぼる問題ですが，多元環に対応する加群圏をどう定式化すればよいのかが，大きな問題でした．伊山氏は，大域次元が $n+1$ 以上，支配次元が $n+1$ 以下の環の圏に対応する加群圏は，有限次元環上の加群の圏の極大 $(n-1)$ 直交部分圏（$n$-クラスター傾斜部分圏）の同値類である，と定式化して二者の間の森田同値を示し，高次 Auslander-Reiten 理論として提唱するとともに，Auslander-Reiten 双対性や概分裂完全列，商特異点上の極大 $(n-1)$ 直交部分圏，等を与えました (Higher-dimensional Auslander-Reiten theory on maximal orthogonal subcategories, Adv. Math., 2007; *Auslander correspondence*, *ibid*).

氏の高次 Auslander-Reiten 理論は，Fomin-Zelevinsky のクラスター多元環に端を発する Buan-Marsh-Reineke-Reiten-Todorov，Geiss-Leclerc-Schröer らによるクラスター傾斜理論（3次 Auslander-Reiten 理論）を含む形で現在進行中ですが，すでにいくつかめざましい成果が挙っています．I. Reiten 氏との共同研究では，高次 Auslander 多元環の一種である Calabi-Yau 多元環上の傾斜理論を，非可換クレパント特異点解消の理論に応用しました．また吉野雄二氏との共同研究では，三角圏の $n$-クラスター傾斜部分圏の mutation 理論を構築して，ある種の商特異点上における rigid Cohen-Macaulay 加群の分類に用いました．

伊山氏の論文はおおむね短く，非常に簡潔に書かれていますから，一読すると無機質な抽象論という印象を与えるかもしれません．しかし事実は少し違うようです．組み合わせ的手法を主体とした機械的アプローチでは到底到達し得ない，膨大な具体計算がまず背景にあり，その集積を深い洞察力によって高度に抽象的な理論へと昇華させているのです．

伊山氏の研究歴はまだ十年程に過ぎませんけれども，すでにその独創的かつ高水準の業績は国際的に高い評価を得ており（昨2007年8月ポーランドで開催された第12回 International Conference on Representations of Algebras and Workshop において，栄えある第1回 ICRA Award を受賞したことは，そのよい例証といえるでしょう)，代数学賞を受賞するにふさわしいものです．

# 谷崎俊之氏 「リー代数と量子群の表現の研究」

谷崎氏は，複素半単純リー代数の表現論を中心として，関連する量子群，Kac-Moody リー代数やアフィン Hecke 代数の表現論など，表現論の多岐にわたる分野において卓越した業績をあげてきました．なかでも柏原正樹氏との共同研究で，代数解析的手法にもとづきアフィン・リー代数に関する Kazhdan-Lusztig 予想を証明したこと，最近では Beilinson-Bernstein 対応が量子群についても成立することを示したことが，特筆すべき成果です．以下では谷崎氏の研究の中心的なテーマである Kazhdan-Lusztig 予想とその周辺の話題に的を絞って説明します。

複素半単純リー代数 $\mathfrak{g}$ の表現論における基本的問題は，最高ウエイト $\lambda$ が定める既約 $\mathfrak{g}$ 加群 $L(\lambda)$ の指標決定ですが，1970 年代 Kazhdan と Lusztig は，ワイル群 $W$ の Kazhdan-Lusztig 多項式を用いると，反支配的ウエイト $\lambda$ と $W$ の元 $w$ に対し，$L(w\cdot\lambda)$ の指標が種々の $y\in W$ に関する Verma 加群 $M(y\cdot\lambda)$ の指標の線形結合として明示的に書けると予想しました．$M(y\cdot\lambda)$ の指標は計算できるので，予想が正しければ既約 $\mathfrak{g}$ 加群の指標が決定できます．Kazhdan-Lusztig 予想は，柏原-Brylinski と Beilinson-Bernstein とが独立に，代数解析手法により問題を $\mathfrak{g}$ の旗多様体 $X$ 上の $\mathcal{D}_X$ 加群の言葉に翻訳することによって解決しました．その過程で証明された「自明な中心指標を持つ有限生成 $\mathfrak{g}$ 加群のなすアーベル圏は，$X$ 上の連接 $\mathcal{D}_X$ 加群のなすアーベル圏と圏同値になる」という事実が Beilinson-Bernstein 対応と呼ばれるものです．

正標数の半単純代数群の既約指標に関しても Lusztig は類似の予想を提示していたのですが，複素半単純リー代数の場合が解決すると，彼は予想をアフィン・リー代数 $\widehat{\mathfrak{g}}$ やパラメータ $q$ が 1 の巾根の場合の量子群 $U_q(\mathfrak{g})$ の表現にまで拡張し，アフィン・ワイル群に関する Kazhdan-Lusztig 多項式を用いてそれらすべてを統一的に定式化しました．またこれらの表現の圏を比べることで，$G$ に関する Kazhdan-Lusztig 予想を $\widehat{\mathfrak{g}}$ についての予想に帰着させる構想 (Lusztig プログラム) を 1980 年代後半に発表，以後 Lusztig プログラムの完成が表現論の最重要課題となります．

谷崎氏は M. Kashiwara and T. Tanisaki: *Kazhdan-Lusztig conjecture for symmetrizable Kac-Moody Lie algebras II* (Progress in Math. **92** Birkhaüser 1990) に始まる柏原氏との共同研究により，$\widehat{\mathfrak{g}}$ を含む種々の状況における Kazhdan-Lusztig 予想の解決に成功しました．上記論文では対称化可能な Kac-Moody リー代数に対しての Kazhdan-Lusztig 予想，すなわち，支配的正則ウエイト $\lambda$ に対し $M(w\cdot\lambda)$ の指標が Kazhdan-Lusztig 多項式を用いて $L(y\cdot\lambda)$ の指標の線形結合として表示されるこ

と，が示されています．証明には無限次元旗多様体上定義され有限余次元の Schubert 多様体に台を持つ左 $\mathcal{D}$ 加群と，無限次元スキーム上の混合ホッジ加群を用います．さらに、*Kazhdan-Lusztig conjecture for affine Lie algebras with negative level II*, Duke Math. J. 1996 では，Lusztig プログラムで必要とされるアフィン・リー代数 $\widehat{\mathfrak{g}}$ に対する Kazhdan-Lusztig 予想を解決しました．今度は反支配的正則ウエイト $\lambda$ に対し $L(w\cdot\lambda)$ が $M(y\cdot\lambda)$ の線形結合として表され，有限次元 Schubert 多様体に台をもつ右 $\mathcal{D}$ 加群が使われます．この第二論文とほぼ同時期に Kazhdan-Lusztig が $U_q(\mathfrak{g})$ と $\widehat{\mathfrak{g}}$ の間の圏同値を証明し，Andersen-Jantzen-Soergel が $G$ と $U_q(\mathfrak{g})$ の表現を（標数が十分大きいとき）関連づけたので，谷崎氏の仕事とあいまって Lusztig プログラムはおおむね完成したのでした．

以上に関連して谷崎氏は柏原氏との共著論文で，対称化可能な Kac-Moody リー代数のワイル群に付随する放物的 Kazhdan-Lusztig 多項式の幾何学的実現を，Schubert 多様体の交差コホモロジーを用いて与えました．ここから放物的 Kazhdan-Lusztig 多項式の係数が正の整数であることがわかります．Kazhdan-Lusztig 多項式の係数については一般的な予想がありますが，柏原・谷崎は現在のところ最も一般的な結果です．

谷崎氏の最近の注目すべき成果は，Beilinson-Bernstein 対応の量子群への一般化です．半単純リー代数 $\mathfrak{g}$ に付随した旗多様体 $X$ と $\mathcal{D}_X$ 加群の圏の $q$ 類似として，量子群 $U_q(\mathfrak{g})$ に付随した量子旗多様体 $X_q$ とその上の $\mathcal{D}$ 加群の圏が Luntz-Rosenberg により導入されました．ここでは $q$ は超越元とします．量子旗多様体は「非可換射影的スキーム」であり，具体的には $U_q(\mathfrak{g})$ の双対 Hopf 代数の次数付き部分代数上の次数付き加群の圏をねじれ部分圏によって割った商として定義されます．また $X_q$ 上の $\mathcal{D}$ 加群の圏とは，$X_q$ 上の $q$ 差分作用素の環 $\widetilde{D}$ 上のある種の次数付き加群の圏をねじれ部分圏で割った商です．Luntz-Rosenberg は，Beilinson-Bernstein 対応の $q$ 類似として，$X_q$ 上の $\mathcal{D}$ 加群の圏と $U_q(\mathfrak{g})$ の商に対する加群の圏とが圏同値であることを予想しました。

$\widetilde{D}$ は定義によって非常に大きな代数になり，扱いが難しいのですが，谷崎氏は $\widetilde{D}$ をより扱い易い部分代数 $D$ で置き換えて $X_q$ 上の $\mathcal{D}$ 加群の圏を再定義することで，Luntz-Rosenberg の予想 (の変形版) を証明しました (T. Tanisaki: *The Beilinson-Bernstein correspondence for quantized enveloping algebras*, Math. Z. 2005; 通常の旗多様体の場合， $\widetilde{D}$ から構成しても， $D$ から出発しても，$\mathcal{D}_X$ 加群の圏は互いに同値になります).

Beilinson-Bernstein 対応のさらなる拡張として，$q$ が 1 の巾根の場合の量子群についても，谷崎氏は精力的に研究を進めています．Bezrukavnikov-Mirkovic-Rumynin が示した，正標数のリー代数の表現から定まる導来圏

と旗多様体上の $\mathcal{D}$ 加群の導来圏との同値性 (Beilinson-Bernstein 対応の導来圏版) に想を得たもので，各方面の注目を集めています.

以上のように、谷崎氏は一貫して Kazhdan-Lusztig 予想，Beilinson-Bernstein 対応という，表現論の最も本質的な問題に果敢に挑戦し，卓越した業績を挙げています，これらの結果を中心にリー代数，量子群の表現論への氏の貢献は多大であり，代数学賞を受賞するにふさわしいものです.

## 並河良典氏「3次元 Calabi-Yau 多様体と正則シンプレクティック幾何」

並河氏は自明な標準因子をもつ多様体，特に３次元 Calabi-Yau 多様体と高次元正則シンプレクティック多様体の研究において顕著な業績をあげてきました．複素代数多様体は一般に複雑な構造をもっていますが,「極小モデルプログラム」という自然な手順を踏むと，標準因子が正，自明，負という３種の多様体に分解すると考えられています．このうち自明な標準因子をもつ代数多様体，より一般には自明な標準因子をもつケーラー多様体は，さらに３種類の基本要素に分解できます (Bogomolov 分解). ３種とは複素トーラス，Calabi-Yau （以下では略して CY）多様体，正則シンプレクティック（以下では正則を省略）多様体で，このうち幾何学的にも興味深い後２種が並河氏のフィールドです,

２次元では CY もシンプレクティックも同じ $K3$ 曲面です．$K3$ 曲面とその変形の理論は豊かな内容をもち，当然その高次元化が期待されますが，3次元以上になると，これら２種には共通部分がありませんし，性質も大きく異なります．また極小モデル理論を考えると，特異点をもつ場合をも扱う必要がでてきます．並河氏は特異点付き CY 多様体，シンプレクティック多様体の変形理論を研究し，特にスムージングに関して決定的な結果を証明しました．最近ではリー環の随伴軌道の閉包について，そのシンプレクティック特異点解消を分類しポアソン変形を考察するなど，研究の幅を広げつつあります.

並河氏の業績の第一は，３次元 CY 多様体のスムージング理論です．３次元 CY 多様体は $K3$ 曲面の３次元版としてのみならず，数理物理の弦モデルにおけるコンパクト化の材料として，多方面から関心をもたれています．代数幾何からしても物理理論からいっても，端末特異点を許して考えるのが自然なのですが，そのために変形論はかなり複雑になってしまいます．$K3$ 曲面の場合，変形の障害空間（接束の第 2 コホモロジー）

が消えるため，変形空間は必然的に非特異でした．しかし３次元以上になると一般に障害空間は消えません．それにもかかわらず，特異点のない CY 多様体の変形空間はスムーズであることが，微分幾何的手法で示され (Bogomolov, Tian, Todorov)，$T^1$ 持上げとホッジ理論を用いると代数的に証明することもできます（Z. Ran).

川又雄二郎氏との共著 *Logarithmic deformations of normal crossing varieties and smoothing of degenerate Calabi-Yau varieties*, Invent. Math. 1994 において，並河氏は Ran の議論を対数幾何の思想で洗練し，３次元単純正規交叉多様体 が非特異な CY 多様体に平坦変形（スムージング）できるための十分条件を与えました．これは R. Friedman が曲面で得ていた結果の飛躍的拡張で，３次元 CY 多様体がミラー対称性で脚光を浴びていたこととあいまって大きな注目を集めました．一方同じ年発表の Y. Namikawa: *On deformations of Calabi-Yau 3-folds with terminal singularities*, Topology 1994 に始まる一連の論文（Steenbrink 氏との共著 Invent. Math., 1995 を含む）では，端末的特異点のみをもつ３次元 CY 多様体がスムージング可能である条件を決定しました．たとえば $\mathbb{Q}$ 分解的な特異点しかなければ可能です．この定理のひとつの応用は Bogomolov 分解の一般化で，小平次元０の３次元非特異射影的多様体は適当なエタール被覆をとると，a) 単連結，あるいは b) $K3$ 曲面と楕円曲線の直積に双有理同値，あるいは c) アーベル多様体に双有理同値のいずれかになる，というものです．

端末特異点よりも広いクラスである標準特異点を許した３次元 CY 多様体の変形やスムージングも，興味ある問題です．一般には未解決なのですが，並河氏はこの問題に関して数理物理の文脈から提出された Morrison-Seiberg 予想を解決しました (Y. Namikawa: *Global smoothing of Calabi-Yau threefolds, II*, Compositio. 2001).

３次元 CY が一段落すると，並河氏の研究対象は高次元シンプレクティック多様体に移りました．ここでも特異点が問題となります．商やモジュライとして自然に得られるシンプレクティック多様体は，多くの場合特異点をもつので，非特異なものを得るにはシンプレクティック特異点解消をするか，変形でスムージングする必要があります．例えば O'Grady は，ベクトル束のモジュライとして現れる 10 次元特異シンプレクティック多様体から，前者の方法によって非特異シンプレクティック多様体の新種を構成しました．並河氏はまず特異点つきの変形理論と周期写像の基礎を固め，次いでスムージングの問題に取り組んで，シンプレクティック特異点つきシンプレクティック多様体 $X$ に対する以下の命題 a) b) が同値であることを証明しました (Y. Namikawa: *On deformations of $\mathbb{Q}$-facorial* *symplectic varieties*, Crelle J. 2006).

a) 非特異シンプレクティック多様体による特異点解消 $f\colon Y \to X$ がある

b) $X$ は (平坦) 変形でスムージング可能

実をいうと証明時点では，$X$ についてひとつ仮定がついていたのですが，一般型多様体に対する極小モデル予想が解決した現在，仮定はもはや不要です．証明のポイントは，$\mathbb{Q}$ 分解的端末特異点つき正則シンプレクティック多様体 $Y$ の変形が全て局所的に自明という，3 次元 CY の場合とは正反対の事実です．

現在並河氏が研究しているのは，冪零軌道から得られるシンプレクティック特異点です．半単純リー群 $G$ の Lie 環 $\mathfrak{g}$ への随伴作用を考え，$\mathcal{O}$ を一つの冪零軌道とすると，閉包 $\overline{\mathcal{O}}$ の特異点は全てシンプレクティックになります (Panyushev)．このような特異点がいつシンプレクティック多様体によって特異点解消できるかを，並河氏は決定しました．B. Fu は $\overline{\mathcal{O}}$ のシンプレクティック特異点解消がみな Springer 射（適当な放物部分群 $P$ に対する等質空間の余接束 $T^*(G/P)$ からの自然な射）であることを証明していました．並河氏は Springer 射に対する A, D, E 型向井フロップの概念を導入し，$\overline{\mathcal{O}}$ のシンプレクティック特異点解消を一つ与えると，どんなシンプレクティック特異点解消も，もととなるものに A, D, E 型向井フロップを何度か施すことによって得られること，それらの特異点解消が互いに変形で移り合うことを示しました (Y. Namikawa: *Birational geometry of symplectic resolutions of nilpotent orbits*, Adv. Stud. Pure Math., 2006)．かならずしも双有理的でない一般の Springer 射に対しても並河氏は類似の結果を得ています．

以上のように変形理論・特異点理論を自明な標準因子をもつ多様体のクラスで高度かつ有用に展開した並河氏の業績は，代数学賞にふさわいものです．

（代数学賞委員会委員長　宮岡洋一　東京大学大学院数理科学研究科）