彌永先生の数学的な業績

三宅　克哉
早稲田大学理工学術院・客員教授
津田塾大学数学・計算機科学研究所・客員教授

彌永昌吉先生の満１００歳を記念する特集の一端としてこの原稿の依頼を受けたあと，先生は6月１日にご逝去なさいました．まず先生のご冥福をお祈りいたします．

彌永先生の数学的な業績としては，すでに 1994 年に岩波書店から欧文の著作集 ”Shokichi Iyanaga Collected Papers” が出版されており，1993 年までのご出版物の文献表が付けられている．これには邦文による数学的なご著作も含まれている．さらにその最後に，欧文ご著作についての先生ご自身による 19 ペイジにおよぶ ’Comments’ も用意されている．また佐武一郎氏による簡明な解説文 ”A survey of Iyanaga’s work in number theory” が巻頭を飾っている．従って屋上に屋を重ねるといった試みはしない．ここでは彌永先生のご自身の数学に対する思いについて，最新のご自伝に接して筆者が感じたところに従い，僭越を省みずに主観的との誹りには甘んじることにして書き進める．

上の欧文ご著作集のあと，先生が欧文によってご出版なさったものには，1994 年から約 6 年を掛けて纏められた仏文による

Travaux de Claude Chevalley sur la théorie du corps de classes: Introduction

がある．この論文は，事情があって，新装なった Japanese Journal of Mathematics 第３シリーズ第１巻で出版されたばかりである．特にその電子版は彌永先生の満１００歳のお誕生日である本年４月２日に発刊された．さらに「Special Offprint」も用意され，その前付けとして JJM 編集長小林俊行氏の一文が付けられている．

また，1998 年 6 月に開催された日本数学会の The Seventh MSJ International Research Institute 研究集会 ’Class Field Theory — its Centenary and Prospect —’ においては，彌永先生はその開幕を飾って ”Memories of Professor Teiji Takagi” というご講演をなさった．その原稿は 2001 年に日本数学会から出版された Proceedings, ’Class Field Theory — its Centenary and Prospect —’, Advanced Studies in Pure Mathematics Series, vol. 30, pp. 1–11, に収録されている．

その後，邦文の御著『ガロアの時代　ガロアの数学　第一部　時代篇』が 1999 年に，その『第二部　数学篇』が 2002 年にシュプリンガー・フェアラーク東京から出版された．

さらには『若き日の思い出　数学者への道』が 2005 年に岩波書店から出版された．特に付録として「類体論と私」という一文が付けられており，彌永先生ご自身がご自分の数学について語っておられる．この付録の冒頭近く（第二段落）で彌永先生は

> 「私は高木貞治先生の門弟のひとりとして類体論を勉強し，さらにアルティンやハッセのところに行ってその研究を続けた．簡潔に言ってしまえばこれが私の数学的生涯の全部である.」

と述べておられる．実に印象深い．お言葉通りに受け取ってしまうと，先生の「数学的生涯」がドイツ，フランスへのご遊学からお帰りなった 1934 年，28 歳の頃に終わったことになる．ご帰国の翌年に東京帝国大学に赴任され，幾何学，その他の講義を担当されるとともに，多様な「雑事」をこなさざるを得ないお立場になられた．従ってご遊学中のようにひたすら数学に没頭する充実感を懐かしむ

お心持ちの一端が現れたものであろうか．数年の後にはあの大戦が始まり，さらには東大数学教室が長野県の諏訪に二ヶ所に分かれて疎開するという時代であった（『若き日の思い出』pp. 159–163）．先生の "Collected Papers" にある "Comments" (p. 347) では

> "... I published no research papers in the period 1935-39. I realize now that I was idle in doing research in these years because of the pressure of teaching and other business to which I had not to be accustomed."

と書いておられる．ともかくも先生のご自身の数学研究に対する厳しいお考えの現れと拝察される．また "Comments" (p. 352) では

> "In reviewing the list of my papers, I see that the period of my scientific creativity stopped very early in the 1930's and after I began teaching at the University of Tokyo I could produce no really original papers (perhaps with the exception of [1939a] which contains some original idea). I feel ashamed when I realize this, and regret that I was not diligent enough to push forward my research. I made an effort, however, to generate an atmosphere to encourage others to do more creative work and to give the subjects of our research easier access to wider circles."

と率直に感慨を吐露なさっておられる．先生が東京帝国大学に赴任なさった年には高木先生の演習を手伝われ，そのクラスに小平邦彦，伊藤清，河田敬義，古屋茂といった諸氏が，また幾何学の講義を受け持たれた翌年のクラスには岩澤健吉氏，阿部亮氏などがおられたようである（『若き日の思い出』pp. 157–158）．

それまでの代数的数論に関する論文のあと，彌永先生は 1939 年にホモロジー群に関するノート，1940 年に若き小平邦彦氏との概周期関数についての共著の論文，さらに，1943 年にはユークリッド幾何学の直観的な公理系について，早世された阿部亮氏との 2 篇からなる共著の論文を出版され，1951 年には玉河恒夫氏との共著の論文を出版された．この最後の論文では，有理数体についての類体論が明示的に扱われ，Chevalley 流のイデールによってその最大アーベル拡大のガロア群が簡明に記述されるとともに，古典的な 2 次体に関する種の理論 (genus theory) が有理数体の一般の巡回拡大体の場合に拡張されている．

「類体論と私」にはもう一点，強く印象づけられる箇所がある．付録 p. 18 に，彌永先生はご自身が編集者となって出版された岩波数学選書第 10 巻の『数論』について次のように書いておられる：

> 「高木先生は... ［類体論の］非アーベル化について何回か重要性を指摘された．その解決を目指したひとつの試みは，玉河恒夫，服部昭，佐武一郎諸氏の助力を得てなされ，私が主となって編集し，岩波数学選書第 10 巻の『数論』として 1969 年に出版された．同書は 1973 年に再版されたが，全般的に成功であったとは言い難い.」

ところが，件の "Comments" ではこの「類体論の非アーベル化」にはまったく触れておられない．彌永先生が残された，読み流せば何ということもないこれらのコメントがことに印象深く響き，筆者には「類体論から非アーベル的世界へ」という問題意識こそが先生ご自身の代数的数論への深く，強い思いであったと感じられた．以下では，彌永先生の数学的な研究業績の中核である「単項化定理」をめぐる 'original papers' に注目し，この文脈のなかでその数学的な背景やその後の展開についての解説を試みる．

1929 年から 1934 年に出版された 4 篇の論文では，彌永先生は，合同イデアル類体における分岐の動向を司る導手 (Fühler; conductor) について精緻にお調べになり，種の法 (Geschlechtermoduln) を導入し，単項化定理を合同イデアル類体の場合にまで拡張なさった．また 1934 年の論文では，単項化定理の証明に対する代数的な部分について，著しく簡明な対処法を生み出されている．この代数的な部分というのは，メタベリアン群におけるその交換子群への「群の移送」が自明であることを示すものである．まず Furtwängler はこれを難解な群論的計算を延々と続けて証明した．その証明を改善しようとした Magnus のアイデアを先生は Artin と共に深く検討し，処理が簡明な「分解群」(Zerfällungsgruppe) を導入し，群の移送をそこで取り扱うことに帰着させた．その上で，結局は（イデアル類群に対応する）アーベル群とその可換な作用環の分析へと持ち込む．そして彌永先生はここに独創性に溢れた構図をもたらされた．すなわち，この作用環の中に問題のアーベル群を消す (annihilate)「位数イデアル」(Ordnungsideal) を定性的に導入し，さらにその生成元を具体的に決定するという形の簡明な証明を与えられた.（位数イデアルはのちに H. Fitting によって「行列式イデアル」(Determinantenideal) として取り上げられ，拡張されて，最終的には「Fitting イデアル」として可換環論の中に位置づけられた．そしてまたこれが代数的数論に反映され，Mazur–Wiles によってアーベル体に対する「岩澤の主予想」の証明において活用されることにもなった.）

さて，数論的な意味を見るために，まず「単項化定理」について説明する．

19 世紀冒頭に Gauss は『数論研究』で平方剰余の相互法則の証明を与え，また円分論を提示し，指数関数の周期の等分点での値に代えてレムニスケート関数の周期の等分点での値を見ることを示唆した．これによって方向づけられ，できるだけ一般な形で羃剰余の相互法則を探求することを基調として，19 世紀を通して代数的数論が新たなる学問分野として確立された．そしてその世紀も押し詰まった時点で，Hilbert はいわゆる『数論報文』をまとめ，例えば定理 94 として次を証明した：

> 代数的数体 K の奇素数次の不分岐巡回拡大 L が存在すれば，K の類数はこの次数で割り切れ，少なくとも次数個のイデアル類に属するイデアルがすべて L で単項イデアルになる．

さらに類数が 2 の代数的数体が 2 次の不分岐拡大を持つことを示し，一般の代数的数体において平方剰余の相互法則を与えた．そしていわゆる Hilbert の類体の構想を発表する.（簡略した形で述べる.）

> 代数的数体 K に対して次が成り立つ：
>
> （１）K の不分岐アーベル拡大 L で，L/K のガロア群が K のイデアル類群と同型であるものが存在する；
>
> （２）K の素イデアルは，それが属するイデアル類のイデアル類群における位数を反映した形で L/K で分解する；例えば，K の「素数」で生成される単項イデアルは L/K で完全に分解する；
>
> （３）L は K の最大の不分岐アーベル拡大である；
>
> （４）K の素イデアルはすべて L で単項イデアルになる（単項化定理）.

まず Furtwängler は（１）と（２）を満たす拡大体 L の存在を証明した．さらにそれを用いて羃剰余の相互法則の探求に赴く．

そして 1920 年に高木貞治が H. Weber の合同類別と Hilbert の符号分布を総合した合同イデアル類群を導入し，上の（１）と（２）を自然に拡張して高木の類体論を打ち立て,「アーベル体は類体

である」という形で一般の代数的数体の相対アーベル拡大の理論を提示した．例えば（１）は次のような二つの命題で置き換えられる：

（０）K のアーベル拡大体 L は適当な合同イデアル類群に対する K の類体であり，そのガロア群はこの合同イデアル類群と同型である；

（１＋）K の各合同イデアル類群に対してその類体 L が存在する；特に L/K で分岐する素イデアルはその合同イデアル類群の導手 (Führer; conductor) を割り，導手を割る素イデアルは L/K で分岐する．

これにより，Hilbert の類体の性質（３）も確定した．従って，例えば次が成り立っている：

代数的数体 K の Hilbert 類体を L とし，さらにその Hilbert 類体，すなわち K の第 2 Hilbert 類体を M とするならば，M/K はガロア拡大であり，その群はメタベリアン群で，交換子群は M/K の部分体 L に対応する．

この群が「単項化定理」を代数化するための枠組みとなる．

高木先生はその類体論を十全に活用して冪剰余の相互法則を扱い，Furtwängler の仕事を随分と簡略化なさったが，彼をして「快挙なり！」と評せしめたのが Artin の「一般相互法則」であった．E. Artin は 1927 年の論文で，一般にイデアル類群とその類体のガロア群との同型写像を，分岐しない素イデアルに対してその Frobenius 写像を対応させて明示化し，簡潔な証明を与え，それに基づいて種々の「相互法則」を簡明に導くことに成功した．さらに，代数的数体 K のイデアルを K の Hilbert 類体 L に持ち上げる写像を，L/K のレヴェルと L の Hilbert 類体 M に対応する M/L のレヴェルで彼の一般相互法則によって Frobenius 写像を介して記述し，それをガロア群 Gal(M/K) からその交換子群 Gal(M/L) への「群の移送」として表示した.（なお，群の「移送」(Verlagerung; transfer) は Hasse が「イデアルの持ち上げ」に因んで命名した.）このように群論化された群の移送写像が自明であることを，Furtwängler は数年にわたる「いささかの計算」によって証明し，1930 年の論文で発表した．この結果を受けて H. Hasse は「単項化定理」を「非アーベル的な現象」であると断じた．この群論における群の移送についての命題の証明に関する彌永先生のご寄与については上述した通りである．また，上記の Hilbert の定理 94 と単項化定理とを包含する枠組みの分析は A. Scholz によって「capitulation 問題」と命名され，手探り状態で探索が始められる．彼はまた「中心拡大」の考察により非アーベル拡大への一歩を運んだが，間もなく若くして去ってしまった．

さて，この単項化定理の証明に関する結果に先立って，彌永先生は，合同イデアル類群の導手における素イデアルの冪を代数的に決定するという問題を取り上げられた．高木先生のご示唆によるところであった（『若き日の思い出』付録 p. 27）．先生の兄弟子にあたる菅原正夫氏はすでにこの問題に対する解析的な形での解答を出していた．それを代数的に処置し，表示することが問題であった．彌永先生はこの解答を巡回群の場合に得て 1929 年の論文に纏められた．さらに 1930 年の論文では，代数体 K において，共通の導手を持つ合同イデアル類群のうちで最大となるもの，すなわち，Strahl 類群に対する類体 L を取り，基礎の体 K から見てその第 2 Hilbert 類体にあたる L の Strahl 類体 M を確定する問題を取り上げられた．このために，M に対応する L の Strahl 類群の導手を「種の法」(Geschlechtermodul) を通して決定し，メタベリアン群 Gal(M/K) の交換子群 Gal(M/L) への群の移送に対して Furtwängler の結果を適用し,「一般単項化定理」を与えられた．この結果については若くして亡くなったフランス人数学者 J. Herbrand も独立に得ており，図らずも当時の興味が集まるところであった．

また Hilbert の定理 94 は後に自然にコホモロジーによる翻訳が与えられたが，この定理を巡回拡大の外へ拡張する手がかりは，結局は得られなかった．

ところが驚くべきことに，約 90 余年を経た 1991 年に鈴木浩志氏が次の美しい定理を証明した．

> 代数的数体 K の不分岐アーベル拡大 L においては，少なくとも次数 [L : K] 個のイデアル類に属する K のイデアルがすべて L で単項イデアルになる．

これが Hilbert の定理 94 と単項化定理を含んでいることは明らかであろう．Hilbert はこの定理を構想して「単項化定理」を予言したものと推察される．(Hilbert は『数論報文』において，定理 94 の証明の直後に,「この対応から不分岐巡回拡大 L を K の一つの類体 (Klassenkörper) と呼ぶ」として「類体」という言葉を初めて導入している.）ところがこの定理の証明となると，幾多の挑戦が見るべき成果のないままに退けられてきたのであった．

鈴木氏はさらに上述の 1998 年 の「類体論 100 年コンファレンス」でもう一段の拡張を与えた．

淡中忠郎氏は単項化定理のある種の拡張である「巡回拡大の種の体における単項化定理」を定式化し，1949 年に寺田文行氏が Furtwängler の手法を活用してそれを証明していた．鈴木氏はこの定理をも包括する形の定理に対して証明を与えたのであった．証明の手法は，大雑把に誤解を恐れずに述べてしまえば，彌永先生の代数的な方法を，巧妙に，しかもその限界にまで進展させたものである．（この結果も 2001 年に出版された上述の「類体論 100 年コンファレンス」の Proceedings に収録されている.）ここに至り，翻って「capitulation 問題」を司るべき「数論的な要因の抽出」が数論の側での問題として浮かび上がっている．

数論の側から見れば容易に判るように，メタベリアン群 G の交換子群を含む部分群への群の移送写像は，実は G の最大冪零剰余群にまで還元される．従って，G の位数を割る各素数 p に対して最大剰余 p-群において適切な移送写像を調べれば十分である．この意味からも上述の Scholz は代数的数体の中心拡大の考察に踏み出した．群論の場合とは異なり，数体の中心拡大の場合にはさらに数論的な要因が働き，単にガロア群の Schur multiplier のみで統制される訳ではない．これから見ても，上の鈴木氏の代数的な結果に呼応する数論的な要因が取り出されることが切望される．(因に，代数的数体の中心拡大の基本的な枠組みの分析や，さらには代数体の最大冪零拡大体に対するある種の「局所-大域関係」の記述が筆者によりなされている.）

上述したように，彌永先生の「位数イデアル」が可換環論において「Fitting イデアル」として一般化され，さらにこれは代数的数論に反映されて，アーベル体に対する「岩澤の主予想」の証明において活用された．さて，筆者が岩澤先生から直接に伺ったことであるが，この岩澤理論に発展するお仕事についての岩澤先生の主要な動機の一つは，非アーベル的な数論へ歩を進めることにあった．この方面では，代数体の岩澤加群をさらに非アーベル的な副 p-拡大の世界へと自然に展開した理論が尾崎学氏によって打ち立てられ，それに基づいてアーベル的な現象の限界を見ようとする若手の活動も興味ある結果をもたらして来ている．

このように我が国の「若手数学者達」の最近の意欲的な活動の幾つかを見ても，高木先生，彌永先生，さらには，岩澤先生，等を経て,「類体論から非アーベル的世界へ」という問題意識は脈々と受け継がれ，独創性に富んだ充実した結果を生み出している．彌永先生が残して下さった数学へのご寄与の大きさはこういった面でも目にすることができる．

先生に深く感謝しつつ，ここで拙い筆を置くことにする．(2006 年 7 月 19 日）