加藤和也氏の無限遠点への旅

斉藤　秀司（東大数理科学研究科）

　このたびは加藤和也氏の恩賜賞・日本学士院賞受賞を心からお慶び申し上げます。加藤氏が成し遂げられた数学的業績は誠に偉大であり、数学の歴史に深く刻まれるべきものです。今後何十年あるいは何百年にわたり加藤氏の業績は、数学界に甚大な影響を与え続けるでしょう。私のような未熟者がこれほど偉大な業績を概説しようと試みたところで、加藤氏の脳裏に描かれた深遠な数学の世界のほんの一部も表現できないと感じます。それでも敢えてこのような拙文を書かせていただいたのは、これを通して加藤氏の数学の素晴らしさをより多くの読者に感じていただければ、私にとってこの上もない喜びであるからです。

　加藤氏の数学的業績について述べさせていただく前に、そのお人柄について語らせていただきたいと思います。

　加藤氏は常々「心」を大切にする方です。誰にたいしてもとても謙虚な態度で話をします。氏が結婚間もないころ、「加藤さんのどんなところに魅力をお感じになられたのですか？」という私のぶしつけな問いに、奥様がすかさず「少年のような純真な心です」とお答えになり、大変な感銘を受けました。このような加藤氏の心の在り方は現在もまったく変わっていないと思います。私はしばしば加藤氏の研究の在り方から、「論理的思考の究極ともいえる数学は、実は単なる思考の機械的作業ではなく人間らしさに溢れた心の営みである」というメッセージを感じます。

　加藤氏は自然を愛されます。山々の景色を眺めながら、「数学を研究するときの心は、あの山の彼方に何があるのだろう、という童心のような心に似ている」と語ります。私は大学院修士で加藤氏の指導を受ける幸運を得ました。セミナーは私一人が学生でした。時には「野外セミナー」と称して秩父の山奥で山歩きをしながらセミナーを行いました。もう２０年以上昔のことですが、あるコホモロジー群が有限体上無限次元のベクトル空間を含んでいることを理解したとき、はるか向こうの山の頂まで有限体が数珠となって連なる様子が眼前にくっきり浮かび上がったときの感動をいまでもはっきり覚えています。

　加藤氏の心の暖かさは、学生の熱心な指導ぶりや後輩の研究への惜しみない援助にも現れています。氏は、その泉のように湧き出る数学のアイデアを学生や後輩たちの研究に役立たせることを惜しみません。加藤氏のアイデアをもとに優れた研究をなさった方々がどれほどいるかは想

像もできません (私もその一人です)。その数は氏ご自身の論文の数を凌ぐほどかもしれません。加藤氏が数学にもたらした貢献の大きさを考えるとき、ご自身の研究業績だけではなく、加藤氏がどれほど多くの優れた後継者を育てたかを忘れてはならないと思います。

加藤氏は、数学ばかりでなく詩歌や天文学も愛されます。氏の文章には詩心が溢れています。難解な数学の概念でさえも、民話からの喩えを使ったり、そのイメージを詩歌に詠んだり、まるで人間味ある生き物のようにして、読者にその面白さを伝えようとします。「数学も詩歌も同じ根源に根ざしたものだ」と語るのです。人間の生の営みの中で、数学を孤立したものでなく、他のいろいろな営みと有機的に絡み合ったものとして捉えることにより、数学に暖かい生の息吹きを注ぎ込んでいるように思います。また、「星空が数学の定理を語りかけてくれる」という言葉には、数学は人を自然や宇宙の神秘に触れることを可能にしてくれる素晴らしい心の営みである、という加藤氏の想いが込められていると思います。

さて加藤氏の人柄についてはこのくらいにさせていただき、氏の数学的な業績について述べさせていただきます。加藤氏の数々の偉大な業績は、そのひとつひとつが非常に独創的であり、数学の世界に新たに大きな流れを生み出すほどの影響力を持つものです。それらの仕事の中に現れた数々のアイデアは、ここ２０数年間の数論や代数幾何学を引っ張る牽引力となりました。加藤氏はまさに世界の数学をリードしてきたのだと思います。これらすべてをここで解説することは私の能力の及ぶところではありません。ここでは主なものを４つ選んで述べさせていただきますが、これ以外にも数多くの優れた業績を為されていることをあらかじめ了解していただきたいと思います。またこの解説を書くにあったって、栗原将人氏のご協力を得たことを述べるとともに、氏に感謝の意を表したいと思います。

加藤氏の最初の研究は「高次元類体論」です。類体論とは、与えられた体の可換拡大の様子をその体の情報のみによって統制する理論です。ガウスの平方剰余相互法則をその源流とし現代整数論の大海へと流れ込む大河、古典的類体論、つまり代数体の類体論は最終的には高木・Artin により確立された偉業ですが、加藤氏はこれを高次元化することを最初の研究目標としました。氏のアイデアは、まず局所理論を高次元化しその後にこれを大域化するというものでした。氏はその修士論文において、局所体を一般化した高次元局所体を定義し、これに対する類体論である高

次元局所類体論を完成しました。高次元局所体のガロアコホモロジーの構造を決定するのが核心ですが、このために氏は極めて膨大な量の複雑で繊細な計算を遂行しました (当時氏が一日に行った計算は大学ノート数冊を費やしたと聞いています)。これは後に述べる、p 進ホッヂ理論の幕開けともいえるブロック・加藤の仕事の基礎にもなりました。残された高次元類体論の目標はこの高次元局所類体論を大域化することで、代数体上有限生成な体の類体論を構成することです。加藤氏は、高次元局所類体論の完成後この仕事に着手し、最終的には、「整数環上有限型スキームのアーベル被覆を代数的 K 理論を用いて統制する幾何学的類体論」という形でこれを完成しました (この仕事には私も協力させていただくことができ大変光栄に思っています)。加藤氏の高次元局所類体論が、高次元類体論において本質的な役目を果たしたことはいうまでもありません。しかしこの最初の業績がその後の数論幾何学に与える影響は類体論をはるかに凌ぐことになりました。

加藤氏は高次元類体論に一区切りをつけた後に、p 進体上の代数多様体の p 進エタールコホモロジーの研究に着手しました。ここにおいても高次元局所類体論で用いられた手法が重要な役目を果たしたのです。エタールコホモロジーの理論は、もともとヴェイユ予想に刺激を受けたグロタンディックが、その膨大な著作 (EGA、SGA) において構築した大理論です。当時はデュリーニュがヴェイユ予想の最終的な解決を与えてから間もないころでした。グロタンディック・デュリーニュの理論は、標数 p の有限体上の代数多様体の ℓ 進エタールコホモロジー (ただしここが重要な点なのですが $\ell \neq p$ と仮定します) の十分な理解を与えるものです。これを用いれば、p 進体上の代数多様体の ℓ 進エタールコホモロジーも十分に理解することができます。しかし、p 進体上の代数多様体の p 進エタールコホモロジーになると状況は一変して、これをきちんと理解するためにはグロタンディック・デュリーニュの理論とは異なる新しい理論を構築する必要があったのです。その原型となる仕事がテイトによりなされていました。彼は p 進体上のアーベル多様体の p 進エタールコホモロジーを独創的な方法により研究し、これに基づいて一般の場合についての予想 (ホッヂ・テイト予想) を提出していました。加藤氏は、ブロック氏との共同研究においてこの予想にたいする大きな成果を挙げました。この業績の重要性は、単にホッヂ・テイト予想への貢献ということにとどまらず、その後いわゆる p 進ホッヂ理論という数論幾何学における大河となる大理論の源流となったことです。もちろん加藤氏ご自身もこの大理論の発

展の立役者です。また、かつて氏の指導を受けた栗原将人氏、兵頭治氏、辻雄氏たちがこの分野で世界的な業績を挙げられています。p 進ホッヂ理論は今や数論幾何学にとってはなくてはならない重要な理論です。たとえば最近の志村・谷山予想の解決においても重要な役目を果たしています。加藤・ブロックの結果が当時の数学にとっていかにインパクトの大きいものであったかが、加藤氏が IHES での講演でこの結果をはじめて公表したとき、デュリーニュが驚きのあまり床に転げていた、という逸話からも窺い知ることができます。

この後の加藤氏の研究は整数論の王道ともいえるゼータ関数の研究へと向かいます。まず最初にゼータ関数の特殊値の問題について大きな仕事をなされました。オイラーはリーマンゼータ関数の正の偶数における値をベルヌイ数を用いて表すことに成功しました。この３００年近く前の整数論の幕開けともいえる偉業に、この問題は起源を発しています。ゼータ関数はリーマン以後さまざまな形で一般化され、それに伴いこの問題も発展してきました。加藤氏はブロック氏との２番目の共同研究において、代数多様体の最も一般的なゼータ関数に対してすべての整数点での値を記述する予想の定式化に成功しました (玉河数予想)。さらに、加藤氏はこの予想をガロア群の作用も込めた形に一般化することにも成功しました。これは岩澤理論におけるいわゆる岩澤主予想をも含む非常に一般的な予想です。これらの仕事では p 進ホッヂ理論が本質的な役割を果たしています。先に述べた p 進体上の代数多様体の p 進エタールコホモロジーについてのブロック・加藤の結果から p 進ホッヂ理論の発展が起こり、さらにこれをゼータ関数の特殊値問題という古典的な数論の大問題に応用するという加藤氏の研究はまさに数学の王道を行くものであるといわざるを得ません。

加藤氏のゼータ関数に関する研究はここからさらに驚くべき展開をします。保型形式の岩澤理論の研究とバーチ・スウィンナートン-ダイア予想への貢献です。氏は、70 年代にメイザーが提出していた保型形式の岩澤主予想を部分的に解決したのです (岩澤主予想とはふたつのイデアルが等しいことを主張する予想ですが、片方のイデアルがもう片方のイデアルに含まれるという結果を氏は得ました)。この結果はメイザーが予想を提出して以来の最大の結果であり、数論研究者から驚愕をもって迎えられた真に深遠な結果です。加藤氏がこのテーマについての研究を初めて発表してから、最終的に昨年論文が出版されるまで、実に 15 年の歳月をかけて完成した労作です。ベイリンソンは、モヂュラー曲線の K 群に元

を構成し、これがレギュレーター写像により重さ 2 の保型形式のゼータ関数の $s=2$ における値に結びつくことを発見しました。この仕事にヒントを得た加藤氏は、革新的なアイデアにより、ベイリンソンの元をオイラー系と呼ばれる極めて良い性質を持つ元のシステムへと洗練し、これが p 進レギュレーター写像により、保型形式の p 進ゼータ関数の $s=1$ における値に結びつくことを示しました。これが保型形式の岩澤主予想への大きな成果をもたらしたのです。氏は、さらにこのオイラー系を用いて、楕円曲線のゼータ関数についての有名なバーチ・スウィナートン-ダイア予想に関して、既にコリバギンによって得られていた大定理の別証明を与えること、さらにそれを一般化することにも成功しました。証明は極めて繊細で、高次元局所類体論の相互写像の明示公式や p 進ホッヂ理論が重要な役割を果たしています。

ベイリンソンの結果は、保型形式のゼータ関数の $s=2$ に関係する結果だったのですが、加藤氏はバーチ・スウィナートン-ダイア予想や岩澤主予想のような $s=1$ に関する結果を得たことになります。このことを氏は p 進ワープ航法と説明したり、ご自身が構成したオイラー系をゼータ関数の化身と感じて、これを「鶴の恩返し」の鶴と重ね合わせて説明するなど、いわゆる加藤節も完成しました。その結果の美しさを思うとき、氏ご自身の大きな感動もわかるように思えます。

最後に触れさせていただく加藤氏の業績は対数構造の理論の構築です。代数幾何学あるいは数論幾何学では、体上の多様体ばかりでなく付値環上の多様体 (あるいはスキーム) をその研究の対象にすることが重要です。これは、与えられた多様体を変形したときどのように退化するかを考えることに相当します。滑らかな多様体から出発して、退化しても滑らかのままでいるときを良い還元を持つ場合といい、退化したとき特異点が生じるときを悪い還元を持つ場合といいます。往々にして (あるいは興味深い場合は) 悪い還元を持つのですが、その中でもある程度性質の良い「半安定な還元を持つ場合」に状況が把握できればたいていの場合は応用上十分です。そこでこの場合の研究が最も重要になりますが、良い還元を持つ場合に成り立つ多くの定理が半安定な還元を持つ場合には成り立たなくなり、問題は非常に複雑になります。対数構造の理論とは、半安定な還元を持つ場合でも良い還元を持つ場合と同様に問題を扱うことを可能にしてくれる夢のような理論です。これは、通常のスキームに対数構造を付加した「対数的スキーム」を考えれば、半安定な還元を持つスキームが対数的スキームとしては良い還元を持つとみなすことができる、と

いうフォンテーヌ・イリュージーによる卓越したアイデアに基づくものです。もともとのアイデアはナイーブなものでしたが、加藤氏はこれを数学的に正確に定式化し、さらに基本的な枠組みとなる基礎理論を構築なさりました。氏の構築なさった対数構造の理論が今後の代数幾何や数論幾何学にもたらす貢献は計り知れません。代数幾何の基礎理論の対数化、特にEGA、SGAを対数化する対数的EGA、対数的SGAの完成への大きな流れが既に生まれています。対数構造はp進ホッヂ理論にも大きな進歩をもたらしました。またその効力は複素代数幾何、特にホッヂ理論にまで及んでいます。臼井三平氏との共同研究においては、ホッヂ構造のモヂュライ空間のコンパクト化という大問題に、対数的ホッヂ構造の理論を用いて大きな成果をもたらしています。先日、JAMIにおける国際研究集会「ホッヂ理論と対数的幾何学」においてホッヂ理論の大家カプラン氏が、「今やホッヂ理論の研究に対数的幾何学が重要な役割を果たすことは明らかである」と述べたことに感銘を受けました。

加藤氏の研究ぶりは現在も衰える様子はなく、今後どれだけの業績を挙げられるか私には想像もできません。ここ最近の研究ぶりにもただただ驚かされるばかりです。中山能力氏と梶原健氏との共同研究においては、アーベル多様体のモヂュライのコンパクト化といった古くからの大問題に対して、対数的アーベル多様体の理論という新しい見地から大きな貢献をもたらそうとしています。斎藤毅氏との共同研究では、数論的スキームの分岐に関する革新的な理論を構築しています。また、コーツ氏と深谷太香子氏と共に、非可換岩澤理論という岩澤理論の新しい流れを生み出そうともしてます。

最後に、私が最近大変な感銘を受けた加藤氏の言葉をもってこの拙文を締めくくらせていただきます。
「有限の身の人間が、無限遠の彼方にある真実を思って努力しても、できることはしれている。しかしそれはむなしいことではなく、大切なことだと思う」