ファイナンスの数理と実務

高橋明彦

東京大学大学院経済学研究科

2004年1月23日

本稿は，日本数学会2003年度年会市民講演会 (2003年3月21日，東京大学) における講演内容を加筆修正したものである.

1　はじめに

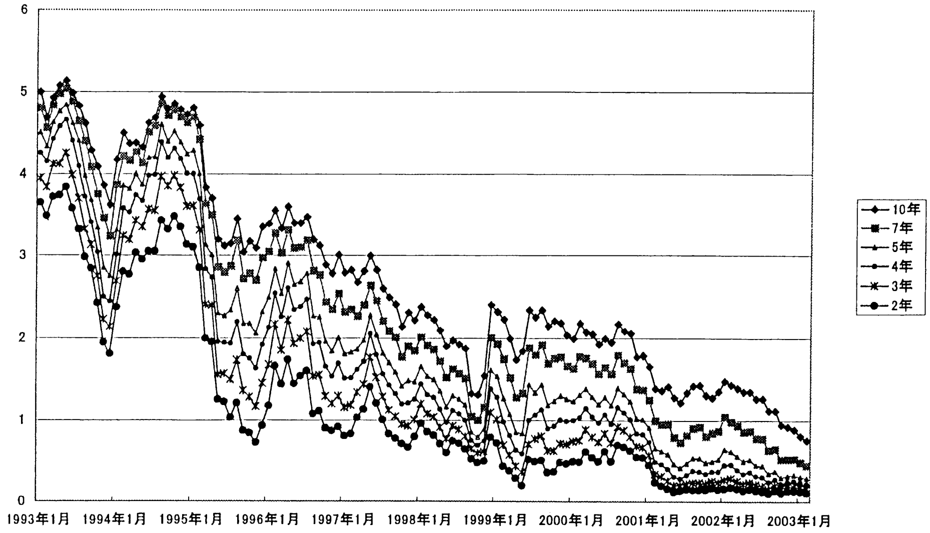
まずはじめに，ファイナンスの世界において，数理的なものの考え方，数理的方法の適用が活発になった背景をお話ししたいと思います.

全般的な環境としては，標準的な数理ファイナンス理論が前提とする「市場」に現実の市場が近づいてきたことが挙げられます．例えば，株の売買手数料などの取引手数料の大幅な引き下げ，最低取引単位の引き下げ，空売り制約の緩和，国際間の資金・資本移動の自由化等の取引規制の緩和が進展しました．また，取引参加者の自由化が進み，情報技術の進化による情報の均一化，ネット・トレーディングの進展もあって，大手の銀行, 証券会社, 生損保, 商社, 事業法人に加え, 中小企業，個人も容易に市場に参入できるようになりました．より直接的には，情報技術の発展によって各種情報のリアルタイム化，計算高速化が可能となり，数値計算や統計分析も非常に容易になったことが挙げられます．さらに，商品・契約の理解そのものに，数理的知識，ノウハウを必要とするフォワード, スワップ, 先物，オプション等の金融派生商品 (デリバティブ) 取引の活発化・複雑化も極めて重要な環境変化でしょう.

以上のような状況を背景として，理論のみならず実務面においても, 数理的アプローチが活発になり，少し大袈裟に言えば，基礎的な数理知識がないと金融取引そのものについていけない，といった感があります．本日は，債券・金利の基礎的な事項と取引例を用いてその一端をご紹介したいと思います.

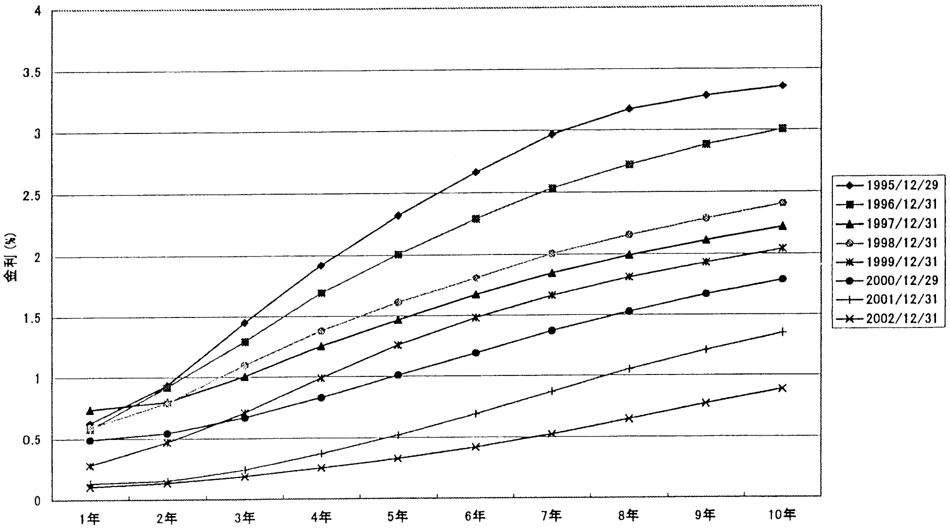
2　金利について

まず最初に，様々な契約期間の円金利の時系列を見てみましょう．



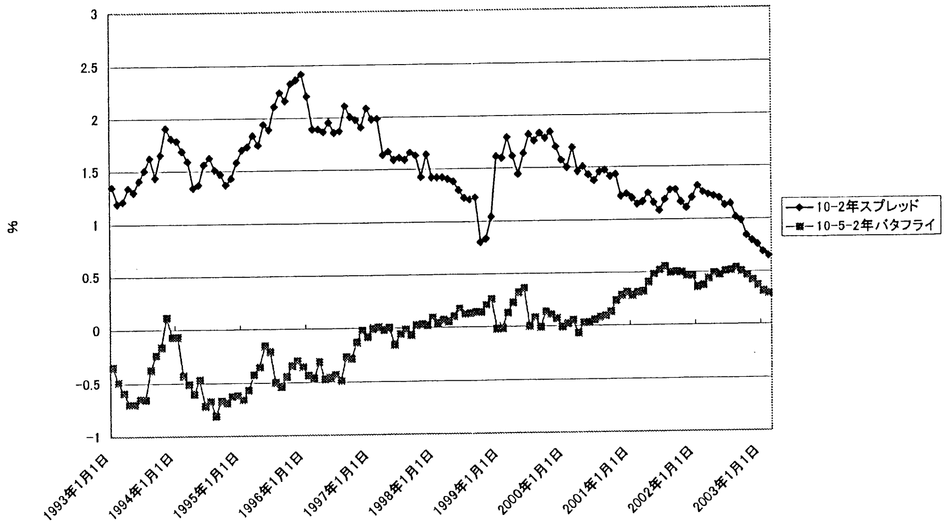
図：円金利推移

ご存知のように，円金利は短期的な上下はあるものの政策的な理由や景気状況を背景として全体として低下傾向にあります．次に，いくつかの時点を固定した時，代表的な契約期間の金利をプロットし直線でつないだものをご覧下さい．



図：円金利の期間構造

非常に大雑把な方法を用いましたが，これは金融の世界で「金利の期間構造」と呼ばれているものを表しています．期間構造は，全体的に下方にシフトしていると共に，その形状も変化しています．例えば，次の図は，実務において期間構造の「長短の傾き」と「中期の膨らみ」の指標としてしばしば用いられる，10 年-2 年の金利差 (スプレッド) 及び，10 年-5 年のスプレッドと 5 年-2 年のスプレッドの差 (バタフライ) の推移を示しています．金利の絶対水準と比較すれば小幅ですが，それなりに無視できない変動をしていることが分かると思います．



図：スプレッドとバタフライの推移

このように，色々な契約期間の金利が同時に存在するので，その絶対水準のみならず，相対的な関係，即ち，金利の期間構造の形状も重要となります．

さらに，一口に金利と言っても様々な種類があります．預金金利，貸出金利，国債の利子率，スワップ金利，社債の利子率などが思い浮かびます．さらに「利回り」も債券の収益性を表す指標としてしばしば用いられるようです．通常，資金の借り手，債券の発行者が，資金返済を契約どおり履行する信用の程度に応じて金利が異なり，信用がないほど利子が上乗せされます．(これを，信用スプレッドと呼ぶことがあります．) 以降は簡単化のため，このような危険のない借り手，債券の発行者を前提として話を進めましょう．つまり，契約は確実に履行されるとしましょう．

しかし，それでも，利子や元本の返済・償還スケジュールによって様々な契約・債券が存在し，それに対応して多種多様な債券の価格・利回りがあるので，ただそれらを眺めていても，何が有利な契約であるとか，割安な債券である等といった相互関係はよく分からないのが普通でしょう．例えば (固定) 利付き国債などの利付き債券は，元本は満期に一括償還されるとして，満期;T_n, 額面;G, 利払い時点;$\{T_1, \cdots, T_n\}$, T_i 時点に支払われる利子;C_i により特徴付けられますが，それに対応する利付き債券価格，$P_{(T_n, G, \{T_i\}_{i=1}^n, \{C_i\}_{i=1}^n)}$ を並べて見ても, どれが割安・割高などの相互関係はよく分からないでしょう．

また, しばしば収益性の指標として用いられる最終利回り (Yield-to-Maturi ty(YTM))も同じです．利付債券の連続複利表示の最終利回り，YTM は，利付き債券の条件，$(T_n, G, \{T_i\}_{i=1}^n, \{C_i\}_{i=1}^n)$ と価格，$P_{(T_n,G,\{T_i\}_{i=1}^n,\{C_i\}_{i=1}^n)}$ を所与として，未知数 x の以下の方程式の解として与えられます．

$$P_{(T_n,G,\{T_i\}_{i=1}^n,\{C_i\}_{i=1}^n)} = \sum_{i=1}^{n-1} C_i e^{-xT_i} + (C_n + G)e^{-xT_n}$$

しかし価格と同様，これを見ても，異なる債券・金利契約の相互関係は限定的な状況を除いて明確には分かりません．

銘柄	償還期日	利率(%)	利回り(%)	単価(円)	前日比(銭)
長期国債 210	20090320	1.9	0.4	109.02	0
長期国債 211	20090622	1.8	0.431	108.57	0
長期国債 212	20090622	1.5	0.432	106.68	0
長期国債 213	20090622	1.4	0.432	106.06	0
長期国債 214	20090921	1.8	0.462	108.69	0
長期国債 215	20090921	1.9	0.462	109.34	0
長期国債 216	20091221	1.7	0.486	108.17	0.01
長期国債 217	20091221	1.8	0.489	108.82	-0.01
長期国債 218	20091221	1.9	0.489	109.49	0
長期国債 219	20100322	1.8	0.517	108.93	0.02
長期国債 220	20100322	1.7	0.518	108.23	0
長期国債 221	20100621	1.9	0.546	109.74	0.01
長期国債 222	20100621	1.8	0.549	109	0.02
長期国債 223	20100920	1.7	0.579	108.32	0.01
長期国債 224	20100920	1.8	0.577	109.08	0
長期国債 225	20101220	1.9	0.606	109.9	0.02
長期国債 226	20101220	1.8	0.607	109.13	0.01
長期国債 227	20110321	1.6	0.639	107.57	0.02
長期国債 228	20110321	1.5	0.64	106.77	0.03
長期国債 229	20110321	1.4	0.642	105.97	0.04
長期国債 230	20110321	1.1	0.645	103.58	0.03
長期国債 231	20110620	1.3	0.671	105.09	0.03
長期国債 232	20110620	1.2	0.674	104.26	0.03
長期国債 233	20110620	1.4	0.668	105.93	0.04
長期国債 234	20110920	1.4	0.699	105.84	0.03
長期国債 235	20111220	1.4	0.724	105.78	0.04
長期国債 236	20111220	1.5	0.722	106.65	0.03
長期国債 237	20120320	1.5	0.748	106.6	0.04
長期国債 238	20120320	1.4	0.751	105.69	0.02
長期国債 239	20120620	1.4	0.779	105.58	0.04
長期国債 240	20120620	1.3	0.782	104.66	0.04
長期国債 241	20120920	1.3	0.806	104.55	0.03
長期国債 242	20120920	1.2	0.807	103.62	0.04
長期国債 243	20120920	1.1	0.809	102.68	0.04
長期国債 244	20121220	1	0.831	101.59	0.05
長期国債 245	20121220	0.9	0.833	100.63	0.03

表：国債銘柄・償還日・利率・利回り・価格の例

3　ゼロクーポン債と「裁定取引」

金利の期間構造を表現する代表的な方法に，ゼロクーポン債を用いる方法があります．ゼロクーポン債とは，その保有者が満期で1の資金を受け取り，それ以外の資金の出入り (キャッシュ・フロー) は発生しない債券のことを指します．つまり利子のない債券 (ゼロクーポン) です．多種多様な発生時点や金額のキャッシュ・フローをゼロクーポン債を用いて表現し直すことにより，各金利契約・債券を同じ視点で見ることができます．

以下では，現実とはやや乖離がありますが，様々な満期のゼロクーポン債に関して，その単位数や金額の制限がなく，取引費用，税金なども被らずに自由に売買できるとしましょう．この前提の下，ゼロクーポン債価格を用いて将来の資金の出入り (キャッシュフロー) の現在価値を評価できることを示します．t 時点における T 時点満期のゼロクーポン債価格を $P(t,T)$ と表わすことにしましょう．

例えば，時点 $T>0$ において金額 c(定数) の資金の出入りがある場合，現時点で c 単位のゼロクーポン債の購入或いは売却によりその資金の出入りを実現できるので，その現在価値は $cP(0,T)$ で表せます．仮に，この将来のキャッシュフロー c に対して $cP(0,T)$ とは異なる価格がついているとすれば，これより高い場合はその値段で売って，c 単位のゼロクーポン債を購入することにより，現時点で手元にお金が残り，将来はネットでゼロのキャッシュフローとなるので，確実に利益が得られることになります．逆に $cP(0,T)$ より低い場合は，その価格で買って，c 単位のゼロクーポン債を売却すれば，やはり確実に利益を得ることができます．このように，金融の世界では「確実に利益を得る取引」を「裁定 (arbitrage) 取引」と呼びますが，$cP(0,T)$ は「裁定取引を起こせない」価格と言う意味で，時点 T におけるキャッシュフロー c の現在価値の合理的な評価と言えるでしょう．

同様に，様々な満期のゼロクーポン債が自由に取引できることを前提にすると，条件 $(T_n, G, \{T_i\}_{i=1}^n, \{C_i\}_{i=1}^n)$ により特徴付けられる利付債券の「裁定取引を起こせない」現在価値も，

$$\sum_{i=1}^{n-1} C_i P(0,T_i) + (C_n + G) P(0,T_n)$$

と表現できることは容易に分かります．但し，現実の市場では，通常，多くの満期のゼロクーポン債は取引されていないので，取引されている利付き債券などから逆にゼロクーポン債価格を推定し，それらを用いて様々なキャッシュフローを同じ視点で評価することが必要になります．

4 金利変動のモデル化

ゼロクーポン債価格 $P(t,T)$ に対応する金利には，しばしば計算等で扱いやすい，連続複利金利，$Y(t,T)$ を用います．価格と金利の関係は，

$$
\begin{aligned}
Y(t,T) &= \frac{-1}{(T-t)}\log P(t,T) \\
P(t,T) &= \exp\{-Y(t,T)(T-t)\}
\end{aligned}
$$

で与えられます．また，通常，金利期間 $(T-t)$ が 1 年未満の金利を短期金利と呼びますが，特に理論的に扱いやすい金利期間 $(T-t)$ が微小な (概念的) 短期金利に注目しましょう．その t 時点の量を $r(t)$ で表し，時点 t において将来の $r(t)$ に対する不確実性がなく，$\{r(u); u \geq t\}$ を市場参加者の間で既知としましょう．この時，ゼロクーポン債価格 $P(t,T)$ やその金利 $Y(t,T)$ と短期金利 $r(t)$ の合理的な関係は，各 $u(u \geq t)$ 時点で $r(u)$ による微小期間の貸借が可能であることを前提に，先の「裁定取引」の議論を用いて，

$$
\begin{aligned}
Y(t,T) &= \frac{1}{(T-t)}\int_t^T r(u)du \\
P(t,T) &= e^{-\int_t^T r(u)du}
\end{aligned}
$$

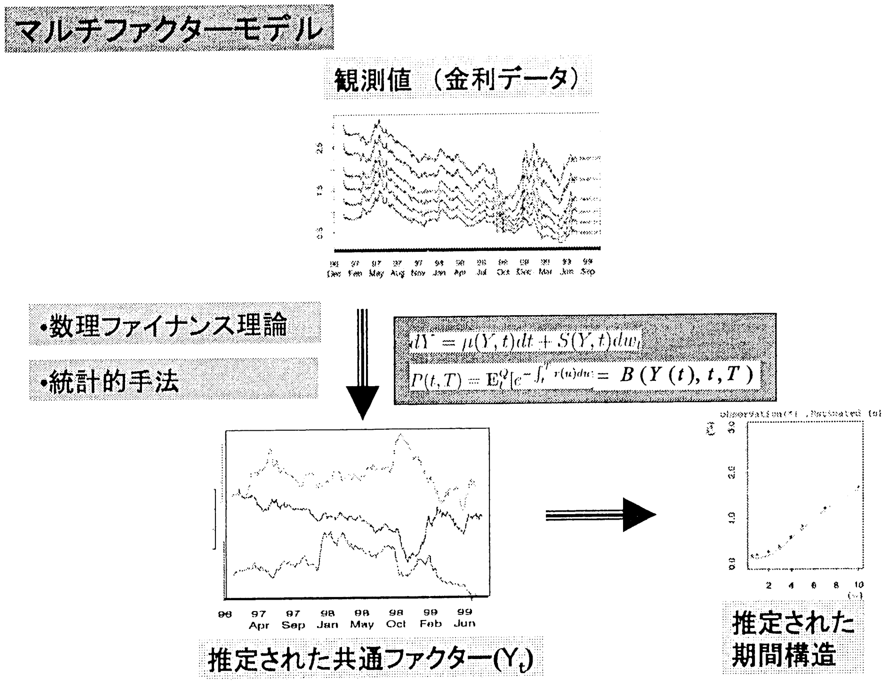
により表すことができます．つまり，$Y(t,T)$ は将来の短期金利の平均，$P(t,T)$ は元本 1 を短期金利の累計により割り引いた量と見ることができます．

しかし，もちろん現実的には未来のことは不確実なので，将来の金利動向は現時点で完全に分かっているわけではありません．そこで 1 つのアプローチとして短期金利 $r(t)$ の不確定な変動を確率論を用いてモデル化することが考えられます．短期金利の変動に着目するのは，将来の短期金利が，金利・債券取引に携わる人々が予想する経済指標と直接，間接的に深く関係しており，比較的イメージしやすいからでしょう．例えば，各国中央銀行の主な金融政策手段の 1 つが「短期金利水準の調節」であり，また，将来の財政収支，インフレ率，経済成長率等の主要経済指標は将来の短期金利の動向と密接に関わっています．さらには，現時点の期間構造が将来の短期金利の平均と関連している点も，短期金利の変動をモデル化する理由として挙げられます．先に述べたように，将来の短期金利に対する不確実性がなければ，現在の各期間金利は，将来の対応する期間の短期金利の平均と一致します．

次に，もう少し具体的に考えるため，短期金利 $r(t)$ をある確率変数 Y の関数として表現します．Y はファクター，状態変数などと呼ばれ，一般的にはベクトル値確率過程によりその変動が記述されます．通常 Y は各満期のゼロ・クーポン債価格の変動を説明する共通の要因を表し，現実のデータを用いた分析を通じて具体的に特徴付けられます．また，$\{r(u); u \geq t\}$ と $P(t,T)(Y(t,T))$ の関係は，詳細は省きますが，「裁定取引」の考え方と確率論を基礎に数理ファイナンス理論により決定されます．

5　分析例

それでは，実際の分析例を見てみましょう．まず次の図は，分析の流れを要約したものです．



図：マルチファクターモデル

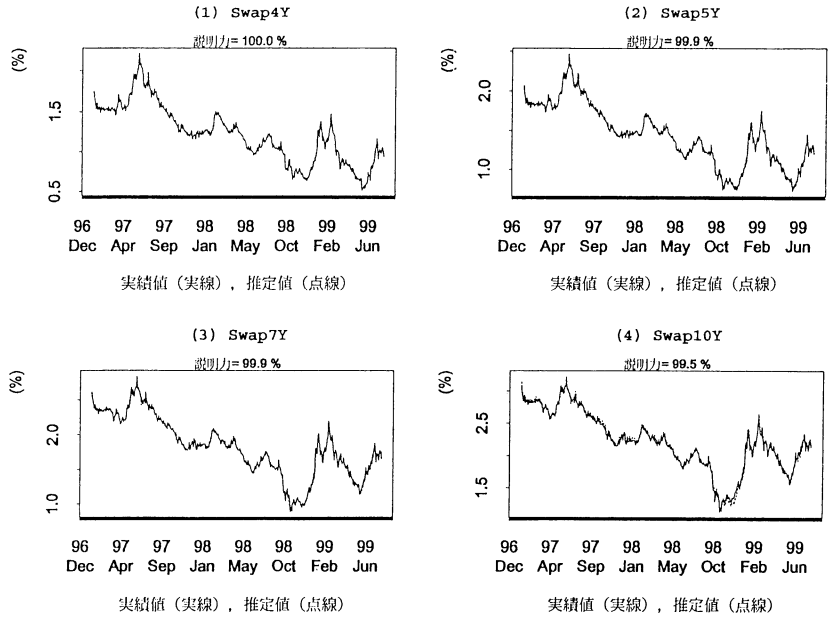
この図は，数理ファイナンス理論により構築されたマルチファクターモデル(複数の状態変数を持つモデル)に基づき，統計的手法を用いて現実のデータから共通のファクターとその確率過程のパラメータを推定し，そのモデルと推定値を使って金利の期間構造全体を推定する手続きを要約したものです．

中央にあるように，ゼロクーポン債価格は，元本1を短期金利の累計により割り引いた量の，ある確率測度の下における条件付期待値として表されており，将来の短期金利が既知のケースのある種の拡張と見ることができます．さらに，それはファクターと時間パラメータと満期のある関数として表されています．また，直接観測される市場データの理論値は，1つ以上の満期のゼロクーポン債価格の既知の関数を用いて表現されるので，これらも状態変数の関数として表すことができます．従って，市場データの時系列から統計的手法を用いて，ファクターの時系列とその確率過程のパラメータの推定が可能になります．

左下は，推定された3つのファクターの時間的推移を示しています．詳細は省略しますが，Y_1は6ヶ月金利，Y_2は10年先フォワード金利と2年先フォワード金利の差(スプレッド)，Y_3は10年先フォワード金利と相関が高いことが分かります．ここで，10年先フォワード金利とは，各時点で決定される，

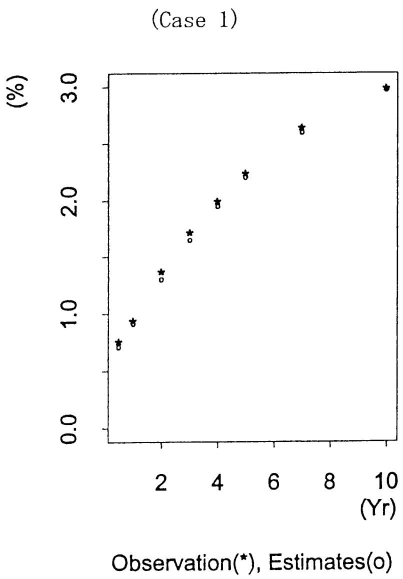
その時点より10年先にスタートする短期金利で，通常，各時点の金利の期間構造から決定されます．2年先フォワード金利も同様です．

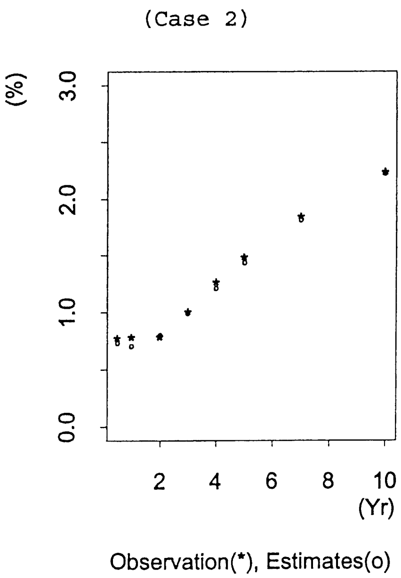
次に，推定に利用した代表的な金利契約の市場金利とそのモデルによる推定値の時系列を比較した図をご覧下さい．各市場金利(実績値)はモデルにより，かなり良く再現されていると思います．

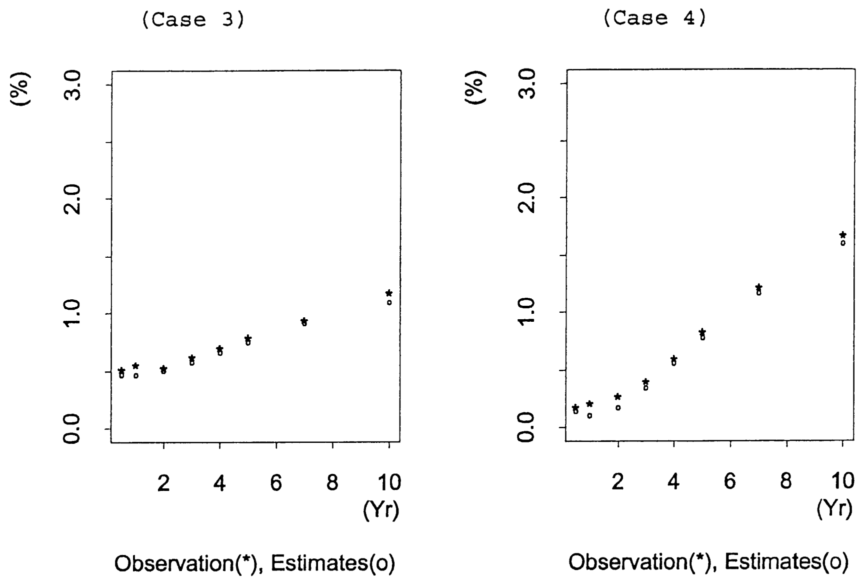


図：Swap4Y,5Y,7Y,10Y

さらに，いくつかの時点(Case 1-4)における代表的な金利期間の市場金利とそれらのモデルによる推定値をプロットして比較してみましょう．いずれの時点においても，モデルの期間構造が現実のそれをかなりの程度再現していることが分かります．







図：期間構造の推定

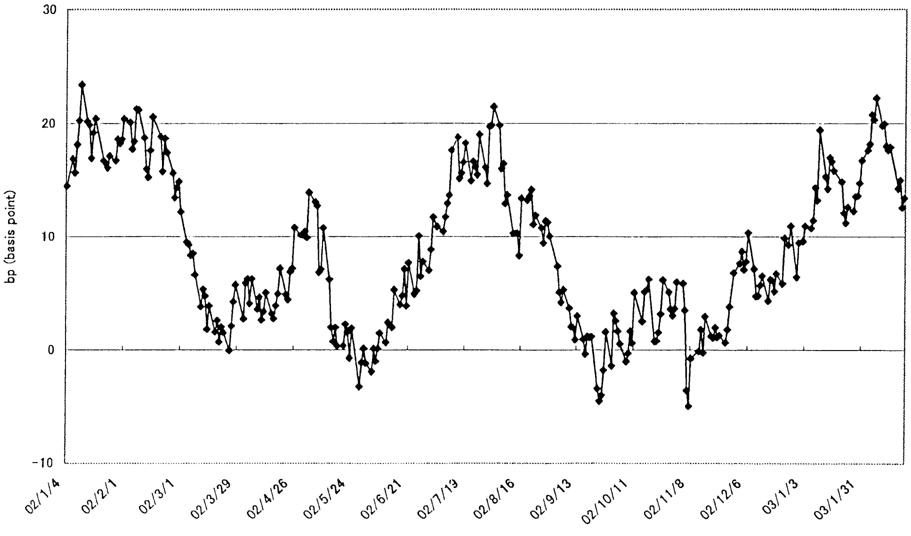
このような作業を通して，市場金利の変動を説明する共通の要素を認識できるほか，観測値が直接得られない期間を含め，期間構造全体，即ち，原理的には，全ての満期のゼロクーポン債価格を推定することが可能になります．そして推定されたゼロクーポン債価格を用いて，様々な金利契約や債券の価値を同じ視点で評価できるようになります．また，金利変動全般に関しての理解も深まるので，金融政策などの政策分析に役立てることもできるでしょう．

6　実際の取引への活用

最後に，債券取引を例として，以上の分析を実務に活かす方法の一つをご紹介致します．その考え方は，まず基準とする債券を選択し，その市場価格を最も正確に再現するようにファクター Y の値を推定します．次に，その Y の値を用いて他の債券の価格をモデルに基づき評価し，そのモデル価格により市場価格の「割安」「割高」を判定することで取引の参考にする，というものです．

最も単純で極端な例を挙げますと，ファクターが1つの Y の場合，基準とする満期 T_1 のゼロクーポン債の t 時点の市場価格 $P(t,T_1)$ を所与として，$B(y,t,T)$ を時点 t，満期 $T(>t)$，ファクターの値が y の時のモデルによるゼロクーポン債価格の表現とすれば，$P(t,T_1)=B(y,t,T_1)$ となるような y を算出し，これを用いて，他の債券，例えば満期 T_2 のゼロクーポン債のモデル価格 $B(y,t,T_2)$ を計算します．そして，その市場価格 $P(t,T_2)$ がこれより高ければ割高，低ければ割安と判断するわけです．これを指標に用いて，この乖離が一時的で後に解消すると判断すれば，割高の場合この債券を売り，割安の場合買う取引を実施します．但し，あくまでモデル価格に対しての割高・割安なので，同時にモデル価格に基づく反対取引，即ち，市場価格で買った(売った)場合はモデル価格で売る(買う)取引を実施する必要があります．この時，モデル価格の債券そのものは市場に存在しないので，例えば基準とした満期 T_1 のゼロクーポン債を用いてモデル価格に基づく反対取引と同じ効果を実現するのです．

少し複雑になりますが，同様の考え方に基づく分析の結果，残存期間約5年の利付債券の割安・割高の時系列推移を示したものが次の図です．但し，縦軸は金利ベースでの差を表しているので，ゼロを超える時は債券価格の割安，ゼロ未満の時は価格の割高を意味します．



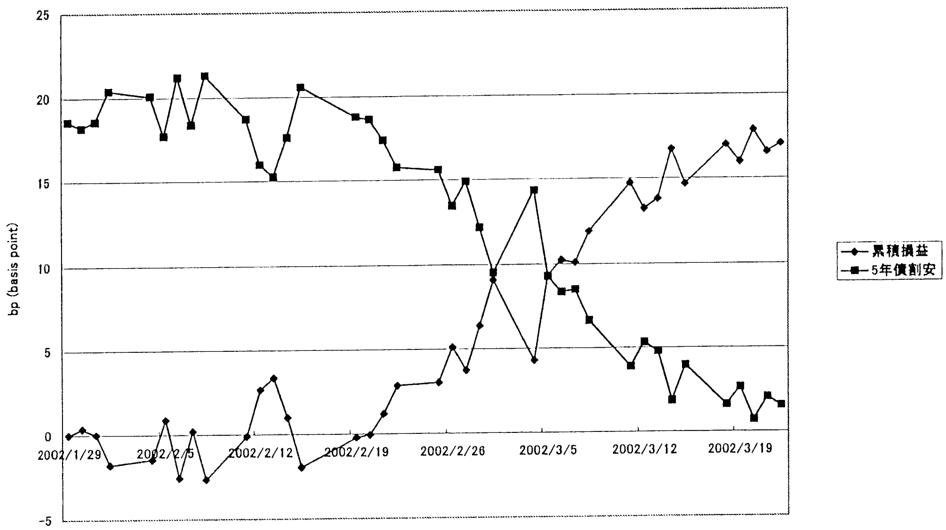
図：モデル金利と市場金利の差 (市場金利 ー モデル金利)

以下の表とグラフは，現実の取引の雰囲気を少しお伝えしようと作成したものです．まず，表は，残存期間約５年のある債券の価格がモデル価格に対して18.6ベーシスポイント (0.186%) 割安であることを示しています．それと同時にモデル価格を実現するための他の残存期間の債券を用いたポートフォリオを示しています．

日時	2002年○月○日		
ターゲット	割高/割安（市場価格がモデルに対し）		
5年債	18.6bp (0.186%) 割安		
	債券の残存期間(年)	単位数	買い/売り
ターゲット	5.05	1	買い
	債券の残存期間(年)	単位数	買い/売り
ポートフォリオ	0.33	0.22	買い
	2.05	0.77	売り
	9.05	0.45	売り

表：取引候補の債券 (例)

図は，この指標に基づいてその残存期間約５年の債券を市場価格で買うと共に，モデル価格による債券の売却と同等の効果を実現するためのポートフォリオを構築した場合の，割安幅の推移とこの取引の結果である累積損益の推移を示したものです．割安が解消するに従って利益が増大していることがお分かりになると思います．



図：債券価格の割安幅と累積損益

以上をもちまして簡単ではございますが，終了させていただきたく存じます．ご拝聴有難うございました．

（たかはしあきひこ，東京大学大学院経済学研究科）