

小林昭七 著
『なっとくする オイラーとフェルマー』

講談社 256ページ, 2003年1月刊

著者は言わずと知れた有名な幾何学者である。その著者が、「数論の愛好者」として、「素数を調べるのが整数論である」との明確な方針のもとに、オイラーとフェルマーの得た結果を中心に解説したものが本書である。ギリシャ時代からはじまり、リーマン予想まで、実に本格的に書かれている。ゼータ関数のところ以外では高校数学で習う程度の数学しか使わずに書き上げられていて、広範囲の読者に最適である。

簡単にあらすじを追ってみよう。第1章「古代ギリシャの天才たち」はイタリア南岸のクロトンで活躍したピタゴラスからはじまる。まず、ピタゴラス数とピタゴラスの定理が紹介されている。この本では、すべてのことを基本的な性質からはじめて、きちんと証明付きで述べるという丁寧な書き方がしてあり、じっくり読み込めば確実に解るようになっている。さらに、数学の歴史的側面に詳しく触れるという配慮がなされている。たとえば、ピタゴラスの定理はユークリッド『原論』第1巻の命題47にあり、その定理の逆「三角形の一辺の上の正方形が、他の二辺の上の正方形の和に等しいならば、後の二辺の挟む角は直角である」が命題48となっていることやコロンビア大学所蔵の粘土版 Plimpton Collection 322 には (3,4,5), (5,12,13), (7,24,25), (9,40,41) 等のピタゴラス数の組が15個与えられていること、などの興味深い数学史の事実を知ることができる。ここから、数学の定理を単に見ているだけでは味わえない楽しみがわいてくる。ちなみに、この粘土版は今から4000年ほど昔の古代バビロニアのものであり、発掘されたのはイラクの地である。その深い知性の証しを見ていると、数学発祥の地の貴重な記録（発掘されてないものも含めて）が現在の戦争で失われていないことを祈りたくなる。第1章の中心は「素因数分解の一意性（整数論の基本定理）」の証明であり、ユークリッドの互除法を用いて行われている。同時に、「素数は無限個存在する」という古代ギリシャ数学の華が証明されている。その基本は素因数分解である。これらの証明は、少なくとも今から2300年以上昔のギリシャ時代に発見されたものであり、その当時から論理的な数学的思考力が既に高度に発達していたことがはっきりと解る。素数を自然数の列から取り出すエラトステネスの篩（ふるい）を説明する際には、エラトステネスがアレクサンドリア図書館長だったことや、地球の周の長さを上手に測ったこと、さらに、エラトステネスの友人である有名な数学者アルキメデスがエラトステネスに出した『方法』と呼ばれる手紙が1906年に発見されたことまで書かれていて、当時を身近に偲ぶことができる。球の切片に関して、その体積や重心の計算をしている古代ギリシャの積分論（『方法』によると原子論の創始者デモクリトスが円錐の体積を無限小の厚さの切片に分けて積み重ねて計算し底面と高さを同じくする円柱の体積の3分の1になることを証明したのが、その方法のはじまりという）が2000年の時を隔ててコンスタンチノーブル（イスタンブール）の僧院で発見されなかったとしたら、これらの数学事情がそのまま埋もれてしまったのかと思うと、数学を伝えることの重大さを再認識する。第1章の後半では、完全数・ペル方程式・連分数に触れられていて、後の章への導入にもなっている。

第2章は「アマチュアに愛されるフィボナッチ数」というタイトルであり、1175年頃イタリアのピサに生まれたフィボナッチの考え出したフィボナッチ数の性質が黄金比との関連を含めて詳しく述べられている。さらに、中世ヨーロッパの数学を紹介する一環としてイタリアのカルダーノの著書『Ars Magna』(1545年)に公表された3次方程式の根の公式(タルタルアの発見)と4次方程式の根の公式(フェラーリの発見)が解説されている。

第3章「フェルマーからオイラーへ」において、いよいよ本書の表題にあらわれているフェルマーとオイラーが正式に登場する。オイラーは実は第1章で偶数の完全数を決定したことであらわれていたので、再登場であるのだが。まず、フェルマーの小定理を示したあとに「素数が2つの平方数の和に書ける必要十分条件はその素数を4で割ったときに1余ることである」という有名なフェルマーの定理が証明されている。さらに、フェルマーが予想し、オイラーの研究後にラグランジュが証明を完成した定理「すべての自然数は(たかだか)4つの平方数の和として表すことができる」が証明される。その後、2次の無理数の連分数展開を調べてペル方程式の解法に応用するというオイラーのアイデアと、それを実現したラグランジュの方法が説明されている。古典的整数論の醍醐味が感じられる章である。

第4章は「オイラーとその遺産」であり、フェルマーの小定理のオイラーによる一般化からはじまって、後半ではオイラーによるゼータ関数論が展開されている。また、途中に、次数が4の場合のフェルマー予想の証明(フェルマー自身の方法)や完全に証明されたのはオイラーより後であるが平方剰余の相互法則の証明も入っている。ゼータ関数論はオイラーの考察を詳しく解説してあり、まず「平方数の逆数の和(ゼータ関数の2における値)は円周率の平方を6で割ったものに等しい」というゼータ関数論の出発点となったオイラーの大発見とその証明法が述べられる。次に、ゼータ関数が素数全体にわたる積という表示(オイラー積表示)を持つことが示され、それをを用いて素数が無限個あることの別証明が与えられている。さらに、この方法は「素数の逆数の和が無限大になる」という、より精密なことまで証明できることが示される。続いて、発散級数の和を上手く求めて、ゼータ関数の関数等式を見出したことが説明され、オイラーによるゼータ関数論が幕を閉じる。最後にリ-マン予想に触れて本書が終わる。

本書を読んで強く感ずることは、数学(整数論は最も歴史が古く数学の典型である)が数千年前から連綿と続く研究者の努力の積み重ねであるという事であり、それはとりも直さず数学は人類の文化の一環であるという観点である。このような歴史は、これから整数論に分け入ってみようとする若い人々に力を与えるだけでなく、整数論を研究している当事者にも勇気を与えてくれるものである。整数論を研究する上でも、どのような歴史的背景のもとにその研究が存在しているのかを認識するのは必須のことである。残念ながら、現代の整数論の専門書や論文からはその長い歴史を実感することは不可能に近くなっているように見える。

本書を、プロとアマを問わずすべての整数論の愛好者にお薦めしたい。

(黒川信重)