書　　評

最近の微積分の教科書について

中島匠一著：「なっとくする微積分」
講談社，２００１年，１９６頁

小林昭七著：「微分積分読本」
裳華房，２０００年，２２４頁

小林昭七著：「続微分積分読本」
裳華房，２００１年，２１７頁

この３冊の本の書評を依頼されました．どれも微積分の優れた入門書なので多くの人に読んでもらいたいと思いますが，対象とする読者あるいは目的が少しづつ異なるので，このあたりを中心に述べたいと思います．私自身は，３０年余の大学教師生活の間に約２５年間主に理工系の学生に微積分の講義をしてきましたので教師の立場になりがちなのですが，約４５年前の学生時代のことを思い出して読者の立場に立つように心掛けたいと思います．また，著者の意図を読者にできるだけ正確に伝えるために，原文を「･･･」として所所引用したいと思います．

１．「なっとくする微積分」について．著者は，いわゆる「教科書」には書いてないような自分なりの“ノウハウ”を「能書き」と呼んでいる．本書は，１変数の微積分について，「微積分に関する「能書き」の中から数学の「基本精神」に関わる部分を書き下したものである」．具体的には，重要な概念（言葉）と定理の意味，由来，あるいは公式の使い方などが親しみ易い言葉で懇切丁寧に説明されている．対象とする読者は，高校の数学Ⅲあるいは大学初年級の微積分を学んでいる人の中，教科書の説明に疑問を感じたり，微積分の「基本精神」を知りたい人などであると思われる．別な言い方をすると，本書では，熱心な学生に質問された教師の答え方が言葉を尽して説明されている，という感じもする．

本書の構成は次のようになっている：「なんともクドイまえがき」（８頁），第１章　数列の極限（２４頁，５節），第２章　関数（２８頁，７節），第３章　関数の極限・連続関数（４２頁，７節），第４章　微分（５０頁，８節），第５章　積分（５９頁，７節），「これまたシツコイあとがき」（２頁），索引（２頁）．また，２７節すべてに親しみ易い副題が付いている．例えば，「１.１　収束と発散－行こか戻ろか近づこか」，「２.７　逆関数－逆立ちはできますか？」，「３.４　中間値の定理－値は１つも逃さぬぞ」，「４.３　平均値の定理－微分学のエース」，「４.４　関数の増減－山あり谷あり奈落あり」，「５.４　微積分の基本定理－真打ち登場」，「５.７　置換積分－お役に立ちます，お得です」などである．

本書は，重要な概念と定理には１つの節全体が当てられているので辞典のようにして読むこともできるかと思う．例えば，第４.３節では平均値の定理の意味あるいは重要性が約３頁にわたって説明されている．また，関数の増減と極大・極小は第４.４節で約５頁にわたって説明されている．

本書の性格は，「なんともクドイまえがき」の４つの「スローガン」によく表われてい

るかと思う．列挙すると，「スローガン１：疑問がなければ答えはいらぬ」，「スローガン２：定理の陰に動機あり」，「スローガン３：論理と心理は別物だ」，「スローガン４：暗記より理解を！」となる．例えば「スローガン１」の一部分を紹介すると，「スローガン１は誰でも「当然である」と同意するだろうが，数学の講義では往々にして忘れられていることだと筆者は感じている．その典型例として「イプシロン－デルタ論法」が挙げられる．本文にも書いたが，「イプシロン－デルタ論法」は「収束とは何か」という（深刻な）疑問に対して数学者が長い時間をかけてたどり着いた「完璧な答え」である．（中略）「イプシロン－デルタ論法」という「答え」は多くの教科書に書かれているが，その「答え」を要求した主体であるもともとの「疑問」についてはあまり書かれていないように思う．もちろん，学校の講義や演習でそのような話はされているのだろうが，「イプシロン－デルタ論法」で苦しむ人が多いという現状は，それがまだまだ不十分であるということを示していると思う．（中略）本書では「イプシロン－デルタ論法」の中身については解説してないが，「イプシロン－デルタ論法」を導いた「疑問」については筆者なりに説明しておいた」．私自身はまえがきを読んでいる中に本書に引き込まれた．

本書には脚注が多い．これらは本文の流れを損なわないための補足説明もあるが，著者が読者に語りかけている場合も多い．これを読むと，読者は著者の人柄に接することができて親しみが増すと思われる．私自身は著者と対話しているような錯覚を起した．ただし，煩わしいと思う人は読まなくても本文の意味がわかれば差し支えはないかと思う．また，５つの「コラム」が関連する場所に置かれている．これらは本文の補足と見ることもできるが，１つ１つが独立した読み物になっている．身近な素材を一段高い立場から論じたものだが，親しみ易い言葉で興味深く説明されている．

最後に，教師の立場から見ると本書は微積分に関する数学教育論としても興味深い．私自身は同感する場合が多く，また，啓発されることも少くなかった．

２．「微分積分読本」について．副題が「１変数」となっているように，本書の内容は１変数の微積分である．本書の目的などについては少し長くなるが著者の「まえがき」から引用する．「この本では，微積分の基本的定理を理解したいか，する必要のある読者のために，証明はかなり丁寧に書いたつもりである．定義，定理を説明するため具体例や図も多く付けるようにしたが，分厚い本にならないように演習問題などは付けなかった．大部分の読者は他の適当な参考書で易しい演習問題をやりながら本書を参考にすればよいかと思う」．

本書の構成は次のようになっている：まえがき（３頁），第１章　実数と収束（３４頁，７節），第２章　関数（６３頁，９節），第３章　微分（６１頁，１０節），第４章　積分（６１頁，９節），索引（３頁）．また，所所の節の終りに微積分の歴史に関する記事が付けられている．微分の前（第１章と第２章）に１００頁近く当てられていることからも本書の性格を伺うことができるかと思う．この部分に出てくる「基本的定理」は例えば，数列に関する「ボルツァーノ・ワイヤシュトラスの定理」，連続関数に関する「ワイヤシュトラスの定理」（閉区間　$a \leqq x \leqq b$ で連続な関数 f はこの区間のどこかで最大値および最小値をとる），「中間値の定理」，「有界閉区間で連続な関数は一様連続である」という定理などである．また，より進んだ段階でこれらの定理がもつ意味なども所所で述べている．例えば，「実数列 $\{a_n\}$ がコーシー列ならばある実数に収束する」という定理の証

明の後で，「この定理はトポロジーの本には「実数の集合Rは完備な距離空間である」という形で述べてある」などである．

本書で扱われている素材は基本的事項に限られているが，論証のレベルはかなり高いようだ．（例えば，高木貞治先生の「解析概論」に近いレベルかと思う）．しかし，言葉使いは（高校生でも抵抗感が無いと思われる程）親しみ易く，また説明も丁寧なので，このレベルの本としては異例とも言える程近付き易い本である．また，重要な概念は労を惜しまず言葉を尽して説明されている．例えば，“$\varepsilon-\delta$論法”は第１章５節「数列と収束」（約６頁）で登場するが，著者はこの論法を読者に抵抗なく受け入れてもらうためにかなりの労力を費している．この節は数列の収束とコーシー列の説明に当てられているが，高校の数学Ⅲと同じ収束の定義から始めてコーシー列を説明した後で，$\varepsilon-\delta$式の定義をする直前で次のように述べている：「これは直観的にわかり易い代りに「近付く」という意味をはっきりさせるためくどくど説明したり，「$m, n\to\infty$はmとnが互いに無関係に∞にいく」ということだなどと説明を加える必要があった．しかし「互いに無関係に」という意味を説明するのは容易でない．結局，次のような一見難しそうな定義の方が曖昧な点が残らずすっきりしているのである．そこでは“無限大∞”とか“限りなく”という表現はでてこない」．この後で数列の収束とコーシー列の$\varepsilon-\delta$式の定義を約２頁半にわたって説明している．

本書の特徴（または長所）はこの他にもいくつか挙げられるが，１つは直観を非常に重視しながら論証もきちんとやっていることである．著者は労を厭わず，言葉を尽して読者の抵抗感をとり除きながら高いレベルの論証を維持している．また，重要なテーマは徹底した形で論じている場合が多い．「有理関数の原始関数を求める」というテーマを例にとると，第２章の７節で複素数の説明をした後，８節で「代数学の基本定理」を２通りの方法で証明している．次に９節で有理関数の「標準形を得るアルゴリズム」を丁寧に説明している．最後に第４章の３節で「有理関数の積分は，原理的には計算できる」ことがわかる．もう１つ例を挙げると，$(1+x)^m$（mは実数）のテイラー展開（二項級数）である．第１章の７節で級数の収束の判定法を説明した後も，本書では級数があちこちで登場するが，上記のテイラー展開については，第４章の５節で「積分の形の剰余項」をもつテイラーの定理を使って $|x|<1$の場合を証明した後で$x=\pm1$の場合が完全に解決されている．ちなみに，$x=1$で $m>-1$の場合は通常の演習書では最も難しい問題として分類されている．

本書を読むための予備知識はそれ程多くはない．高校の教科書で言うと，数学Ⅲは知らなくてもよい（もちろん知っていた方が良いが）．二項定理と数学的帰納法には或る程度慣れている必要があるが，三角関数と指数関数は定義から説明してあるので，“論理的には”知らなくても読める．例えば，三角関数については第２章の２節で，角の大きさを測る２つの単位（「度」とラジアン）の説明から始めて三角関数の定義をした後で「加法公式」（加法定理）の証明が約２頁にわたって述べてある．従って予備知識の点では高校２年生でも読める本かと思う．また，本書全体を通して計算あるいは式の変形は“目で追うことができる”程丁寧に説明されているが，ノートを使って計算を確かめたり，証明の論点を整理しながら読み進むと理解が一層深まると思われる．

３．「続微分積分読本」について．本書は「微分積分読本」（以後「第Ｉ巻」と呼ぶ）

の続編として書かれたもので，構成は次のようになっている：まえがき（１頁），第１章　偏微分（６８頁，１１節），第２章　重積分（５６頁，８節），第３章　曲面（５０頁，５節），第４章　線積分，面積分，体積分の関係（４０頁，７節），索引（３頁）．また第Ｉ巻と同様に,「いろいろな定理の背景を理解してもらうため歴史的な話を処々に入れた」．

本書の目的などについては少し長くなるが著者のまえがきから引用する．「グリーン，ガウス，ストークスの定理を目標として書いた．本書の最後に簡単に説明するように，数学的立場からいえば，これらの定理は微分形式の理論を使って一つの定理として統一して扱うのが一番すっきりして望ましいが，教育的立場および物理への応用を考慮して伝統的な方法を選んだ．そのため第２章６節と第４章３節で３次元ベクトル解析を説明する．第３章もガウス，ストークスの定理の準備の範囲内での曲面論である」．本書の書き方はやはりまえがきから引用すると,「基本的な執筆方針は前書と同様である．本書の副題は「多変数」となっているが，２変数と３変数の場合を詳しく説明し，一般のｎ変数の場合は類推してもらう．物理現象を記述するために創られ発展した微積分が３次元空間で考えられなければならないのは当然である」．

最近の大学のカリキュラムでは微積分に割り当てられる時間が以前より少くなっているように思われる．例えば，多変数も含めた微積分を週に１回（通常９０分）１年間の授業で済ませてしまうコースも多いかと思う．この場合，本書の第１章と２章を終えた段階で残り時間は少くなり，大部分の学生は第３章と４章に相当する部分をきちんと習う機会は少いと思われる．また，重積分の変数変換に関する定理を証明する時間も無いことが多いかと思う．本書はこのような場合でも，「自習書として使えるよう証明はできるだけ詳しく書いたつもりである」．例えば，第２章３節「変数変換（２次元の場合）」では，長方形の面積が１対１対応で微分可能な変換によってどのように変るか，という公式を約８頁にわたって証明している（１００頁の１行目の A(J)は A(P)のミスプリントかと思う)．これ以外にも本書では変数変換に関する説明が，通常の微積分の本に比べて特に詳しく，読者は変数変換が“わかる”と思われる．また，陰関数および逆写像の定理が何度も使われているのでこれらの定理に“慣れる”かと思う．

本書では息の長い計算も多く，第Ｉ巻と違って“目で追う”ことはできない場合が多いので，ノートを使う必要がある．また，内容の濃い「例」も多いので“解答付きの演習問題”として取り組むと効果的かと思う．

最後に，各章毎に本書の特色と思われる点を列挙する．通常の教科書では，陰関数および逆変換の定理は偏微分の一般論より一段高いレベルの教材として扱われることが多いかと思うが，本書の第１章では４節「連鎖律，平均値定理」に続いて５節「陰関数定理」（５頁），６節「多変数の陰関数と逆変換」（５頁）となっている．また，９節「２次対称行列の固有値」（約１０頁）では，冒頭に「次節１０への準備として対称行列の固有値を説明する．一般論を展開せず，２次の場合に限ることにより具体的な計算で済ますことにする.」と述べている．この節では，２変数の２次形式の単位円周上における最大値，最小値が係数行列の固有値であることを（高校生でもわかる計算で）示している．最後に標準形の２次形式のグラフが固有値の符号毎に付いているので，最大，最小あるいは鞍点が一目でわかるようになっている．

第２章の２節「累次積分」では，２重積分と累次積分の関係を表わす「Fubini の定理」

が，長方形で定義された有界な関数については「２重積分の存在」のみを仮定して証明している．通常はこの他に１変数の定積分の存在も仮定するが，そうすると３変数の場合は仮定が複雑で使いづらい定理になる．一方，本書の形だと「３重積分の存在」のみを仮定すると６つの累次積分がすべて３重積分に等しい，という使い易い定理になる．これを証明するために本書では，“累次上積分”（関数　$f(x,y)$ の y に関する上積分を x の有界な関数と見た上積分），“累次下積分”および（２変数の）上積分，下積分に関する不等式を１つ導いている．また，８節「微分と積分の可換性」では，関数 $f(x,y)$ を y について区間：$\phi(x) \leqq y \leqq \psi(x)$ で積分した（x の）関数を微分したときの公式が証明されている．これはよく使う公式だが通常の微積分の教科書には見当らないことが多い．

第３章の１節「空間内の曲線と曲面」では，「１つの曲面に対し３つの表し方」があることを説明した後でそれらの関係およびそれぞれの場合に接平面の方程式がどうなるかということを丁寧に説明している．２節「２次曲面」では，冒頭に「(x,y,z)－空間内の平面は x,y,z の１次式で定義された．平面の次に簡単な曲面は２次曲面とよばれるもので，…」と述べた後，直交変換によって２次曲面の標準形を求め，９種類の２次曲面の説明と見易いグラフが付いている．これによって読者はその後何回も出てくる「曲面」のイメージをつかむことができるかと思う．３節「曲線の長さ」には「長さの存在しない曲線」の易しい例が挙げられている．４節「曲面の面積」では，曲面の面積をどのように定義したらよいか，ということを約１０頁にわたって説明した後で通常のように定義している．

第４章２節「グリーンの定理（平面領域の場合)」では，グリーンの定理の応用として，第２章３節で証明した２重積分における変数変換の公式の別証を与えている（もちろん仮定は前より強いが)．第２章では証明が難しくて息切れした読者もこの証明はわかるかと思う．著者は次のように述べている：「グリーンの定理の応用として簡単に証明される．それは２変数の変換公式を１変数の場合に帰することができるからである.」４節「グリーンの定理（ベクトル場表示)」では，「**2** では平面上の領域における１次微分形式に対してグリーンの定理を証明した．ここではそれを平面上のベクトル場に対する公式として表わす.」と述べた後，「発散定理」とストークスの定理の特別な場合の形を導いている．５節「ストークスの定理（曲面領域の場合)」では，ストークスの定理の証明が，ベクトル場の回転を含む恒等式を１つ証明すればグリーンの定理に帰着できることが説明されている．６節「ガウスの発散定理」に続いて最後の７節「微分形式」で，グリーンの定理，ガウスの定理，ストークスの定理について，「実は，これらは一つの一般な公式の特別な場合なのである．それを微分形式というものを使って簡単に説明する．ここではおおよそどういうことかを知ってもらうだけである.」と述べている．この節を読むと変数変換（および合成関数の微分法）がいかに大切であるかを再認識できるかと思う．

（久保田幸次，北海道大学名誉教授）