1, 2, 4, オイラー　～トポロジーの話　～

松本幸夫

少し長い前書き

この記事は２０００年３月２６日に早稲田大学で行った市民講演会の原稿に手を入れたものです．内容は，実数から複素数へ，さらに複素数から４元数へと数の範囲を拡張する際に現れるトポロジーがらみの現象を紹介したものです．タネは「ベクトル場についての Hopf の定理を使って，３次元の可除代数が存在しないことを初等的に証明する」ということだけです．その他の部分はみな wellknown なことばかりです．

講演の翌日に学習院大学の中島匠一氏から，よく似た話がＨ－Ｄ．エビングハウス他著，成木勇夫訳「数」上下（シュプリンガー・フェアラーク東京，１９９１年）に出ているというご指摘を受けました．早速調べましたところ，やはり実数から複素数，複素数から４元数への拡張の話が出ていました．とくに下巻の第 11 章に,「可除代数とトポロジー」と題する Hirzebruch の見事なサーヴェイ論文がありました．そこには,「奇写像 $g : S^{n-1} \times S^{n-1} \to S^{n-1}$ が存在するなら n は 2 のべきである」という Hopf の定理を使って,「可除代数の次元は 2 のべきである」という事実（これ自身も Hopf の定理）が証明されていて，また，リー群のホモトピー群に関する（ほとんど同じことですが，球面の K-群に関する）Bott の周期性定理を使って,「可除代数の次元は 1,2,4 または 8 である」という定理（Kervaire と Milnor の定理）が証明されていました．

幸いというべきか，私の講演のタネであった「ベクトル場に関する Hopf の定理から，直接に，3 次元可除代数の非存在を示す」ということ，そのものは書かれていませんでした．これはあまりにも議論をミニチュア化するものだからだと思われます．しかし，ミニチュア化した議論とはいえ、「３次元可除代数の非存在は簡単なトポロジーの定理である」ということは，多少なりとも読者の興味を引くかも知れないと思い，以下の記事をまとめることにしました．エビングハウスの本をご紹介下さった中島匠一氏に感謝致します．

1. 数とトポロジー

まず，題名の１，２，４について説明します．これは，１，２，３，４の間違いではありません．じつは，次のような意味を表そうと思ったのです．

1 = 実数全体 $\mathbb{R}$ の次元. (数直線)

2 = 複素数全体 $\mathbb{C}$ の次元. (複素数平面)

4 = ４元数全体 $\mathbb{H}$ の次元.

これらの数の世界は，実数から複素数へ，複素数から４元数へ，と次第に広がって行きます．この様子を記号で

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H}$$

のように表します．数の世界が広がって行くことを数の拡大ということもあります．これが今日の講演のひとつのテーマです．

さて，１，２，４のあとの「オイラー」は１８世紀の数学者の名前（Leonhard Euler, 1707-83）です．オイラーは生涯にたくさんの研究を行いました．「オイラーの多面体定理」という有名な定理をご存知の方も多いと思いますが，この定理はトポロジー（位相幾何学）の最も基本的な定理と言ってよいものです．「オイラー」と書くことで，「オイラーの多面体定理」とそれに続くトポロジーとの関連を暗示したつもりです．（もちろん，トポロジーに関連する研究はオイラーの研究のごく一部に過ぎませんが.）この講演で，数の拡大とトポロジーの間の密接な関連を紹介したいと思います．

2. プラスとマイナス

実数は有理数と無理数から成り立っています．別の見かたをすると，プラスの数とマイナスの数と０から成り立っているとも言えます．

先日，授業のあと，大学生達と話していたら，「プラスの数は実在の数という気がするが，マイナスの数というのは空理空論の気がする」という学生がいてびっくりしました．「そんなことはないよ．温度計にはちゃんとマイナスの温度もあるじゃないか」と言ったのですが，あまり納得してもらえませんでした．皆さんのご意見はいかがですか．

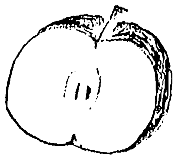

図 1: 半分のりんごは $\frac{1}{2}$ 個

私個人としては，長いこと数学をやってきたせいか，プラスの数もマイナスの数も全く同等の存在に思えます．それらが「実在」かどうかという「哲学的議論」はさておいても，プラスとマイナスにそれほどの区別があるとは思えません．

そこで，逆にどうして「マイナスの数」が空理空論に思えるのかを考えてみると，多分，数というものを「量を計る」という役割だけに限定して考えているためではないか，と思われます．

例えば，もっと素朴な段階として,「ものの個数を数える」という役割だけに限定して考えると，正の整数（自然数）だけで十分です．少し拡張して,「半分のりんご」などを記述する数が欲しいと思うと，正の分数なども必要になりますが，せいぜいそこまでです（図 1）．正の分数だけで，ものの個数を数えるには十分でしょう．

ところが，例えば一辺の長さが 1 の正方形の対角線の長さを表す数が欲しいと思ったら，分数の範囲にとどまっているわけには行きません．無理数も必要になります．このように，長さなどの量を測ろうとすると無理数も必要になりますが，それでも正の実数（と 0) さえあれば用が足りるようです．そうすると，たしかにマイナスの数は空理空論という感じになります．

マイナスの数が自然に必要になるのは，左右両方に延びている直線を「目盛ろう」とする時ではないかと思います．右のほうがプラスで目盛られていたら，左のほうはマイナスで目盛ろうというのは自然な発想です．この場合，マイナスの記号「−」は単に「反対の方向」を意味するだけの記号になります．つまり,「反対のほうを向きなさい」あるいは「180° 回転しなさい」という意味だと考えられます．そうすると，マイナスを 2 回掛けたらプラスにな

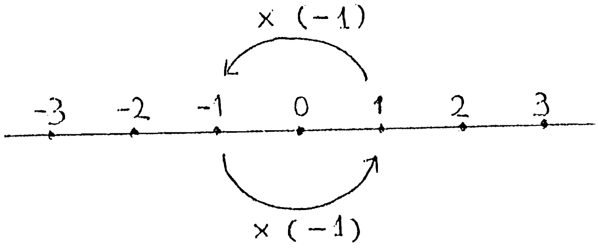

図 2: 直線の目盛りとしての実数．-1 倍は 180° 回転．

るということも自然に納得できます．180° 回転を 2 回続ければもとの方向を向くわけですから（図 2）．マイナスの数を純粋に論理的に説明することも可能ですが，それでも気分的な実在感が欲しいという向きには，直線の持つ２０００年来の実在感に訴えて,「実数とは直線を目盛る数なのだ」と言いきってしまうのがよいと思います．

３．実数から複素数へ

複素数は，２つの実数 a と b を使って

$$a + bi$$

と書ける数です．ここで，i は２乗すると -1 になる「数」です：

$$i^2 = -1.$$

このため，i は $\sqrt{-1}$ とも書かれ，虚数単位と呼ばれます．

マイナスの数をプラスの数と同様に認める人でも，虚数単位 i だけは，なんだか空理空論と考えがちです．なにせ，0 でないどんな実数も２乗すればプラスになるわけですから，２乗して -1 になる数など考えられません．次の方程式

$$x^2 + 1 = 0$$

は，当然のことながら，実数の範囲では解がありません．

数の範囲を拡大して虚数単位 i という新しい「数」を考えると，上の方程式は

$$x = \pm i$$

という２つの解を持つことになります，と言われても，そういう議論はいかにも屁理屈のような気がしないでもありません．

しかし，我々の素朴な感覚よりも，「自然」のほうはもっと奥深いようです．というのは，物質の世界を記述するはずの物理の方程式のなかには，複素数を使わなければ書き下せないようなものがあるからです．シュレーディンガーの方程式

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=(-c\Delta+V)\psi$$

はそのひとつの例です．この方程式の一番左端にある i は虚数単位 $\sqrt{-1}$ です．

数学のほうでも，１６世紀前半のイタリアで，カルダノ，タルタリア，フェラリといった人々による３次方程式，４次方程式の研究を通して複素数が次第に姿を現して来ました．この辺の事情は，Ｓ．Ｇ．ギンディキン著三浦伸夫訳「ガウスが切り開いた道」（シュプリンガー・フェアラーク東京１９９６年）に興味深く書かれています．志賀浩二著「数の大航海」（日本評論社１９９９）に「複素数に数学が踏み込むためには，量という考えから解放された新しい数学の世界が見えてこなくてはならないだろう」という言葉がありますが，マイナスの数を考えたときも，数を，量に関する役割だけに限定するのは，かなり不自由な考え方でした．

マイナスの数の「実在感」は，実数を「直線を目盛る数」と考えることによって得らると思うのですが，複素数の「実在感」も，複素数を「平面を目盛る数」と考えることによって獲得できます．ガウス (C.F.Gauss, 1777-1855) は次のように言っています．

「この主題（虚数）が今まで神秘的な暗闇に包まれてきた原因は，主として記号が主題によく適応しないことにある．例えば，$+1$, -1, $\sqrt{-1}$ を正，負，虚（あるいは不可能）と呼ばずに，直進，逆，横の単位と呼んだとしたら，そのような暗闇は解消していたであろうに.」（Ｅ．マオール著，伊理由美訳「不思議な数 e の物語」岩波書店１９９９年より）

ここで大切なのは，「神秘的な複素数を分かりやすく図解したものが複素数平面である」と考えるのではなくて，端的に「**複素数は平面の目盛りにほかならない**」と考えることなのではないか，と思います．数学的には，どう考えても全く同じことなので，こんなことをくどくど言っても仕方がないのですが，しかし，どう思うかで，「複素数への信頼感」みたいなものが（少なく

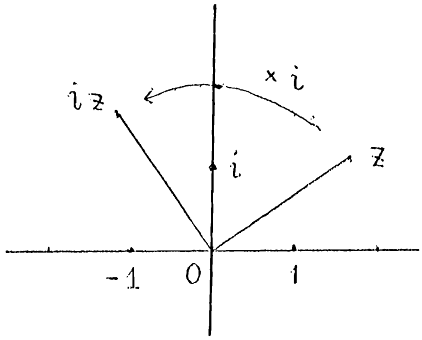

図 3: i 倍は 90° 回転

とも個人的には）随分違うような気がします．

複素数を平面の目盛りと考えると，虚数単位 i は，ほらここに，目でみえるところにちゃんとあるじゃないか，と言えるわけです．また，任意の複素数 $a + bi$ を i 倍することは，

$$(a + bi) \times i = -b + ai$$

ですから，平面の 90° 回転に相当します（図 3）．そうすると，

$$i \times i = 90^\circ \text{回転を 2 回続けること} = 180^\circ \text{回転} = -1$$

となって，$i^2 = -1$ も何の不思議もない式になります.（ここのところは一種の循環論法であることは自覚してます．気分の問題を言っているのですから目をつむって下さい.）

このように複素数平面によってこそ複素数の実在感が得られると思うのですが，高校の新しい指導要領からは複素数平面が消えてしまいます．これはかなり残念です．

４．代数学の基本定理

代数学の基本定理というのは次のような定理です．これはガウスによって証明されました．

定理： 複素数を係数とするどんな方程式も，複素数の範囲に解を持つ．

すなわち，

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$$

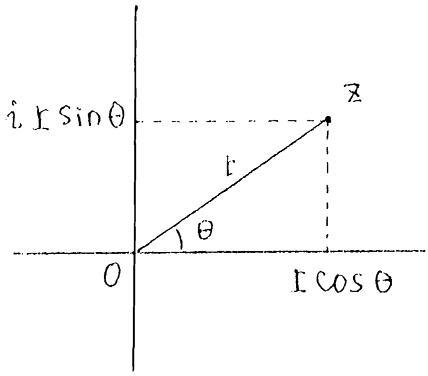

図 4: 複素数の極表示

という方程式（係数 $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ は複素数）には何らかの複素数の解

$$z = \alpha$$

があるというわけです．

この定理は純粋に代数の定理に見えますが，じつはその裏にはトポロジーの事実が隠されています．それを説明しましょう．

まず，準備として，複素数の極表示

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

と呼ばれる表示を考えます（図 4）．ここで，$r = |z|$ は z の絶対値であり，また，$\theta = \arg z$ は z の偏角です．

複素数を極表示してその両辺を 2 乗してみましょう．

$$\begin{aligned} z^2 &= r^2(\cos\theta + i\sin\theta)^2 \\ &= r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta + 2i\cos\theta\sin\theta) \\ &= r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta). \end{aligned}$$

ここでは最後に，三角関数の 2 倍角の公式を使いました．今は 2 乗を考えましたが，一般に $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ を n 乗すると，次の結果が得られます．

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) \qquad \text{ド・モアブルの公式.}$$

ド・モアブルの公式の図形的な意味は図 5 に示されています．すなわち，複素数 z が 0 を中心とする半径 r の円周上を 1 周すると，z^n のほうは 0 を中心とする半径 r^n の円周上を n 周するというわけです（図 5）．

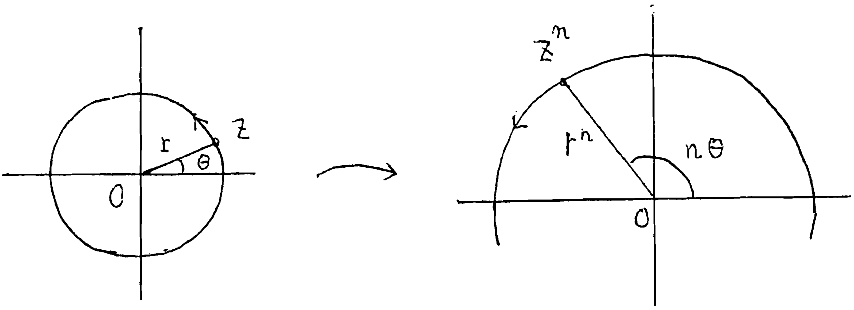

図 5: z が半径 r の円周上を 1 周すると，z^n は半径 r^n の円周上を n 周する．

さて，代数学の基本定理を証明しようとするとき，最高次の係数 a_n は 1 としてよいでしょう．そこで，つぎの方程式

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$$

を考えます．

この方程式に解があるかというわけですが，いま，この左辺だけに注目して，左辺の式を $f(z)$ とおき，z の関数と考えます．

$$f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

z が複素数平面上を動くと，$f(z)$ のほうもそれに応じて複素数平面上を動きます．その動き方を観察しましょう．

まず，z が，0 を中心とするものすごく大きな半径 r の円周上を 1 周するとき，$f(z)$ のほうはどのように動くか考えましょう．$r = |z|$ がものすごく大きいとき，次の不等式がなりたつことは明らかでしょう．

$$|z^n| > |a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0|.$$

たとえば，$|z|$ が 1 億くらいだと想像して見て下さい．$|z^n|$ は，$|z^{n-1}|$ の $|z|$ 倍なのですから，$|z^n|$ は $|z^{n-1}|$ の 1 億倍あるわけです．$|z^{n-2}|$ と比較すると，もっとすごくて，$|z^n|$ は $|z^{n-2}|$ の 1 億倍の 1 億倍もあります．このように，z^{n-1}，z^{n-2}，$\ldots, z$ などの数の絶対値は z^n の絶対値と比較すると 1 億分の 1 以下しかありません．これらの「微々たる」数に，a_{n-1}，a_{n-2}，$\cdots, a_1$ などの定数を掛けて加え，さらに定数 a_0 を加えても，とても $|z^n|$ には太刀打ちできません．というわけで上の不等式が成り立ちます．(もちろん，a_{n-1}，a_{n-2}，$\cdots, a_1$，a_0

などの絶対値が1億くらいだったり，加える項の数 n がすでに1億くらいだったら，z の絶対値 r のほうをもっと大きく，例えば1兆くらいにとっておかなければなりませんが.）

上の議論からわかるように，$|z|$ を十分に大きくとりさえすれば，$|z^n|$ の大きさは $|a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0|$ の1億倍以上にも1兆倍以上にもできます.

このような観察をした上で，あらためて

$$f(z)=z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0$$

の動きを考えてみます．z が半径 r の十分に大きな円周上を1周するとき，$f(z)$ はどんな動きをするでしょうか．まえに，ド・モアブルの公式によって，z^n は半径 r^n の円周上を n 周することを見ました．$f(z)$ は z^n と $a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0$ の和で表されていますが，r が十分大きいとき，z^n の絶対値に比べて $a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0$ の絶対値のほうはほとんど無視できるくらい小さいと考えられるので，$f(z)$ の動きを決める主要な部分は z^n であることがわかります．こうして，$f(z)$ の動きはだいたい z^n の動きとつかず離れず連動しています．原点0を太陽，z^n を地球にたとえると，$f(z)$ は地球 z^n のまわりを回る月のようなものです．太陽から見れば，月の動きも地球の動きもそれほどの違いはありません．とくに，太陽のまわりを回る回数を数えれば，地球も月も同じです．1年かかって地球が太陽のまわりを1周するなら，月のほうも1年かかって太陽の周りを1周しています．これと全く同様に，z^n が0のまわりを n 回まわるなら，$f(z)$ のほうも，細かい揺れはあるものの，結局0のまわりを n 回まわることになります（図6）.

さて，$f(z)$ の動きのように，0の回りをまわる閉じた輪（連続閉曲線）には，**回転数**というものが定義できます．0のまわりを何回まわったかという，その回数のことです．いまの場合は $f(z)$ の回転数は n です．さてここで，トポロジーの定理が登場します．それは，

回転数の定理：$f(z)$ のように0のまわりを回る閉曲線が次第に（連続的に）変形して行くとき，その変形の途中で0を通らないなら，どんなに変形しても，0のまわりの回転数は変わらない.

という定理です.

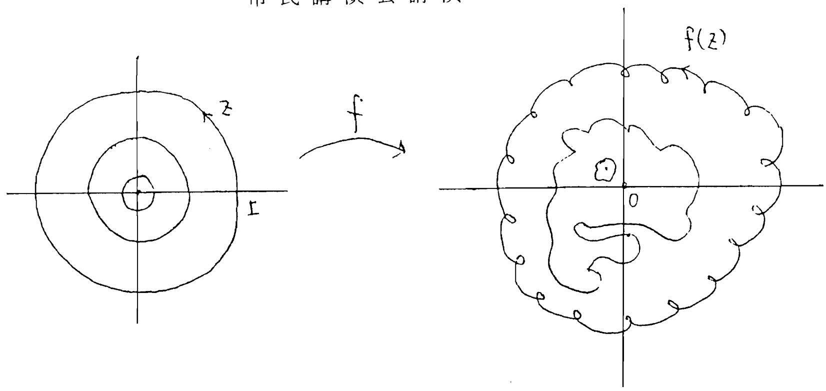

図 6: z が 1 周する円の半径 r を小さくしていったときの $f(z)$ の動き

この定理を使うと，代数学の基本定理が次のようにして証明できます．はじめ，z が半径 r のものすごく大きな円周上を 1 周するとして，そのときの $f(z)$ の動きを追ったのでした．いま，z の 1 周する円の半径 r をだんだん小さくしていってみましょう．対応して，$f(z)$ の動きも変化します．変化はしますが，z が半径 r の円周上を 1 周するとき $f(z)$ も何か閉曲線を描くことには変わりありません．r をどんどん小さくしていって，ほとんど 0 にしたときのことを想像すると，z は 0 のまわりのものすごく小さな円周上を 1 周することになります．そうすると，(写像 f は連続ですから）$f(z)$ のほうも，$f(0)$ のまわりのものすごく狭い範囲を動き回るほかなくなります．r を小さくすればするほど，$f(z)$ の動き回れる範囲はどんどん小さくなり，1 点 $f(0)$ に収縮して行きます（図 6）．

このとき，もし，$f(0) = 0$ であれば，方程式 $f(z) = 0$ には解 $z = 0$ があることになりますが，もし，$f(0) \neq 0$ であれば，0 から離れた 1 点 $f(0)$ のまわりのものすごく小さな範囲しか動き回れない $f(z)$ という閉曲線は，0 のまわりをただの 1 度も回ることが出来ません．だから，回転数は 0 になってしまいます．はじめ，r が大きいとき，それに対応して $f(z)$ は 0 のまわりを n 周したのでした．r を小さくして行くと，ついに対応する $f(z)$ は 0 のまわりを 0 周しかしなくなります．閉曲線 $f(z)$ を連続変形させる間に，0 のまわりの回転数が n から 0 に変化しています．そうすると，もし，この連続変形のあいだに $f(z)$ が 0 を通過しないなら，上に述べた回転数の定理に矛盾してしまいますので，変形の途中で $f(z)$ は 0 を通過しなければならない，すなわち，$f(z_0) = 0$ となる何らかの z_0 がなくてはならないことになります．こうして，方程式 $f(z) = 0$ には複素数の解 $z = z_0$ が存在するということが証明されま

した.

5．ハミルトンの４元数

代数学の基本定理は，方程式を解くという観点で複素数の世界が自己完結していて，それ以上，数の範囲を拡張する必要はないことを示しています．しかし，複素数が平面を目盛る数であったことを思いだすと，では３次元空間を目盛る数はないかとか，４次元空間を目盛る数はないかという問題が気になってきます．この問題に取り組んだのがハミルトン（W.R.Hamilton, 1805-65）です．彼はいろいろと努力した末，ついに，４つの実数 a, b, c, d を用いて

$$a + bi + cj + dk$$

と表される４**元数**の考えに到達しました．４元数には３種類の虚数単位

$$i,\ j,\ k$$

があります．それらは

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1.$$

という性質を持っています．さらにそれらの間の積には次の公式がなりたちます．

$$\begin{aligned} ij &= -ji = k \\ jk &= -kj = i \\ ki &= -ik = j \end{aligned}$$

ひとつの４元数 w は４つの実数を使って

$$w = a + bi + cj + dk$$

と表されるので，４次元空間の点

$$(a, b, c, d)$$

に対応しています．４元数は４次元空間を目盛る数になっているわけです．４元数には和と積があります．和や積の結合法則とか分配法則とかはなりたち

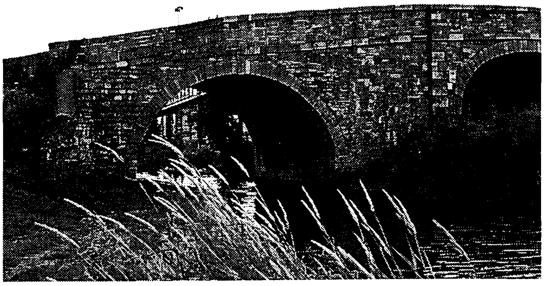
図 7: ブローガム橋

ますが，上の積の規則からもわかるように，４元数では，積の交換法則は一般に成り立ちません．また，任意の０でない４元数 w には，その「逆数」w^{-1} があります．逆数はつぎの性質で特徴付けられます．

$$w^{-1}w = ww^{-1} = 1.$$

前掲のエビングハウス他の本の下巻第７章に Koecher と Remmert の共著によるハミルトンの４元数の話がでていますが，それによると，ハミルトンが４元数のアイデアを得たのは，１８４３年１０月１６日，夫人とともにダブリンへ向かう途中，ブローガム橋という橋にさしかかったときのことだったそうです．図７がそのブローガム橋です．図８の写真は，ブローガム橋にはめ込まれた４元数発見の記念板です．(図７と図８の写真はともに弘前大学の菊地茂樹氏によります．菊地氏のご好意に感謝致します．)

記念板の文章はつぎのように読み取れます．

Here as he walked by
on the 16th of October 1843
Sir William Rowan Hamilton
in a flash of genius discovered
the fundamental formula of
quaternion multiplication
$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$

本当はこの下にもう１行なにか書いてあるのですが，写真では読み取れませんでした．

図 8: 4元数発見の記念板

ハミルトンは，初め2種類の虚数単位 i と j を考えて，3次元空間を目盛る数

$$a + bi + cj$$

を発見しようと努力していたらしいのです．これらの間にうまく積の規則を定めて，和や積の結合法則とか分配法則が成り立ち，かつ，0以外の数の逆数が存在するようにしたいと考えたわけですが，どうしてもうまい積の規則を見出すことができず，企ては成功しませんでした．結局，四苦八苦の末，3次元でなく4次元を考えれば，4次元空間を目盛る数がある！という発見に導かれたのです．

今日では，3次元空間を目盛る数は存在しないことが知られています．どうしてでしょう．その理由もやはりトポロジーのある定理をつかって証明することができます．今日の講演の本当の目的は，そのわけをお話することなのです．

6．オイラー数

3次元空間を目盛る数が存在しないことの証明で大切な役割を果たすのは，「オイラー数」と呼ばれるトポロジーの不変量です．その説明からはじめましょう．

普通のボールの表面を2次元球面とよびます．記号で S^2 と表します．2次元球面を，その上に描かれた三角形，辺、頂点の集まりに分解します．図9がそのようなひとつの分割を与えています．この分割に現れた頂点の数を α_0，辺の数を α_1，三角形の数を α_2 と書きましょう．そして，$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2$

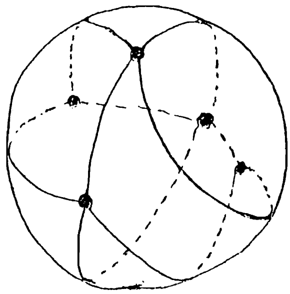

図 9: 球面の分割

という数を計算すると，

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 2$$

となるはずです．図 9 の分割について確かめてください．「球面をどんなふうに分割しても，この答えが 2 になる」というのが，§1 で触れた「オイラーの多面体定理」の内容です．もっとも，オイラー自身は

$$\alpha_0 + \alpha_2 = \alpha_1 + 2$$

という公式の形で自分の定理を述べています．

答えの数 2 は球面の分割によらないのですから，この数は分割によって姿を表すものの，もともと分割する前から球面に具わっていた球面に特有な数なのだと考えることもできます．そこで，この数 2 のことを球面 S^2 の**オイラー数**とよび，

$$\chi(S^2) = 2$$

という式で表します．左辺の χ はエックス x ではなく，ギリシャ文字のカイ χ です．$\chi(S^2)$ が球面のオイラー数を表す記号です．

あとの話で必要なのは球面のオイラー数だけなのですが，ついでですから，一般の閉曲面の場合についても考えておきましょう．

閉曲面は「穴の数」，いわゆる**種数** g，によって分類されます．球面の種数は 0，それから**トーラス**といってドーナツの表面であるような閉曲面の種数は 1，また，図 10 の閉曲面の種数は 2 です．いま，なにか閉曲面 S が与えられたとき，これをその上に描かれた三角形，辺，頂点の集まりに分割します．そして，分割に現れた三角形の数 α_2，辺の数 α_1，頂点の数 α_0 を数え

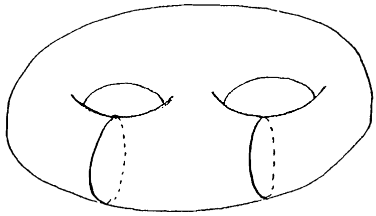

図 10: 種数 2 の閉曲面

て，$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2$ という数を計算します．答えの数は閉曲面 S をどのように分割するかに依存せず，S で決まってしまう S に特有の数になります．この数のことを閉曲面 S のオイラー数と呼び，$\chi(S)$ という記号で表します．すなわち，

$$\chi(S) = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2$$

です．球面 S^2 のオイラー数は 2 でした．トーラス（記号：T^2）のオイラー数は 0 です：$\chi(T^2) = 0$．このことは，トーラスを適当に分割して $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2$ を計算してみれば分かります．また，図 10 の種数 2 の閉曲面のオイラー数は -2 です．一般に，閉曲面 S の種数が g のとき，その閉曲面のオイラー数はつぎの式で与えられます．

$$\chi(S) = 2 - 2g.$$

$g = 0$ の場合が球面の公式になりますから，この式は球面の分割に関するオイラーの多面体定理を一般の閉曲面に拡張したものと考えられます．ポアンカレによれば，最初にこの公式を発見したのはド・ジョンキエール提督という人だそうです.（斎藤利弥訳「ポアンカレ　トポロジー」p.89．朝倉書店１９９６年）

７．ホップの定理

オイラー数は閉曲面のいろいろな性質に関わっています．この§7 では，ベクトル場との関係を説明します．**ベクトル場**というのを正確に定義するのは少し厄介なので，ここでは簡単に，「曲面 S の各点に，その点から出る矢印を描いたもの」を S 上のベクトル場と呼ぶことにしましょう．矢印のことを，

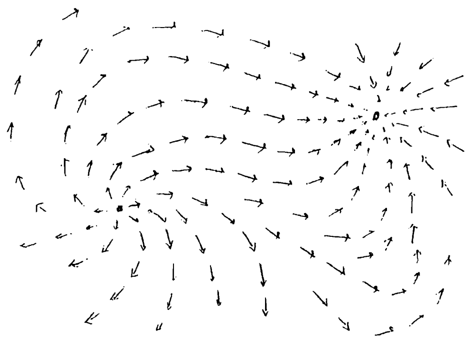

図 11: 平面上のベクトル場

その点にくっついたベクトルと呼びます．このベクトル場は連続的ベクトル場であることを仮定します．すなわち，S 上を点 p が連続的に動くと，それにともなって p にくっついているベクトルのほうも長さや方向が連続的に変化すると仮定するのです．なお，ベクトル場では，長さが 0 のベクトルも許すことにします．長さが 0 のベクトルの与えられている点のことを，そのベクトル場の特異点と呼びます．図 11 は平面上のベクトル場の例です．ここには，２個の特異点があります．

オイラー数のすごいところは，それが思いもかけない状況に突然顔をだすことなのですが，次のホップ（H.Hopf, 1894-1971）の定理は，オイラー数がベクトル場にも関係していることを示しています．

ホップの定理：閉曲面 S の上に，特異点のないベクトル場があれば，S のオイラー数は 0 である．

図 12 を見てください．ここには，球面上のベクトル場とトーラス上のベクトル場の例が描いてあります．トーラス上のベクトル場には，特異点がありません．どこにもかしこにも長さが 0 でないベクトルが描かれています．ホップの定理によれば，このようなベクトル場を描くことが可能なのは，トーラス T^2 のオイラー数が 0 だからなのです．

一方，球面上のベクトル場には南極と北極のあたりに，長さ 0 のベクトルが現れています．すなわち特異点が現れています．球面上のベクトル場はこの他にもたくさん例があるわけですが，そのどれにも，なんらかの特異点が現れてしまいます．球面 S^2 のオイラー数は 2 なので，ホップの定理によれば球面上に特異点のないベクトル場は描けないのです．

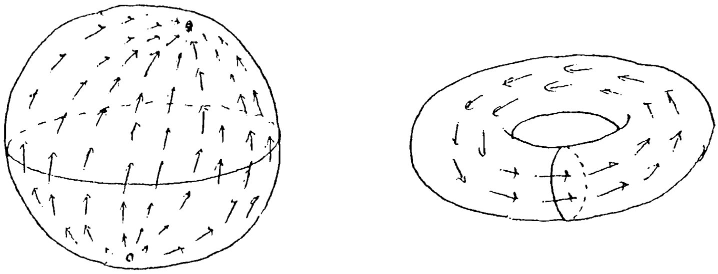

図 12: $\chi(S^2) = 2. \qquad \chi(T^2) = 0$

8．３次元空間を目盛る数は存在しない．

さて，いよいよこの事実の証明をしましょう．背理法で証明します．いま，２種類の「虚数単位」i と j を用いて

$$w = a + bi + cj$$

と表される数の体系（仮に「３次元複素数」とよびましょう）があったとします．以下の証明には，$i^2 = j^2 = -1$ であることは必要ありません．i と j はなんだか知らないが実数とは違う「数」なのだということを仮定すればよいのです．ただし，このような数の体系には，和と積の演算が決まっていて，それらの間に結合法則や分配法則が成り立っていると仮定します．また，0 でない３次元複素数 w には，その逆数 w^{-1} があるとします．このような仮定から矛盾がでることを示せば良いわけです．

個々の３次元複素数 $w = a + bi + cj$ は通常の３次元空間の１点 (a, b, c) と対応しています．w がこの点を目盛っているわけです．以下，３次元空間の点を，その点の目盛りになっている３次元複素数 w で表すことにします．例えば，３次元空間の座標の原点 $(0, 0, 0)$ は３次元複素数としての 0 で表せます．

さて，３次元空間の原点 0（この 0 は３次元複素数です）を中心として，半径１の球面を描き，これを S^2 としましょう．S^2 の上の任意の点 w（これも３次元複素数です）をとり，それを虚数単位 i 倍してみましょう．iw を考えるわけです．iw で表される点はどこにあるでしょうか．通常の複素数平面なら，i 倍は平面の 90° 回転でした．３次元複素数ではどうなるか分かりません．しかし，次のことは確かです．すなわち，

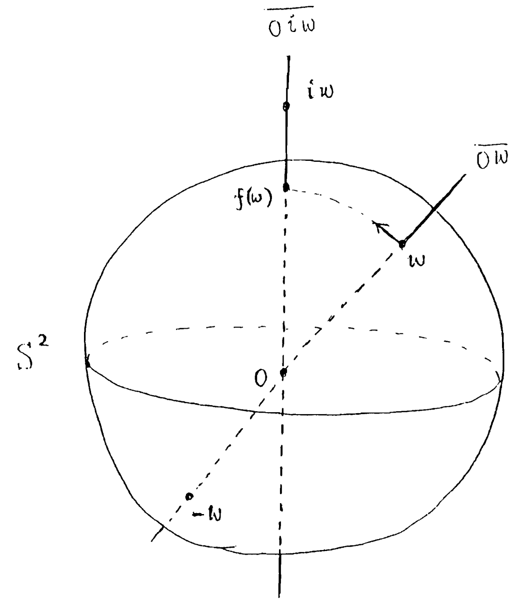

図 13: 3次元複素数があれば，球面上に特異点のないベクトル場ができる．

原点 0 と w を結ぶ直線 $\overline{0w}$ 上には，iw はない．

ということです．なぜかというと，直線 $\overline{0w}$ は w の実数倍で表される点を全部寄せ集めた図形と考えられるわけですから，もし，iw が直線 $\overline{0w}$ 上にあったとすると，iw は w の実数倍で表されます．すなわち，なにか実数 c を使って

$$iw = cw$$

という式が成り立つはずです．この両辺に右から，w の逆数 w^{-1} を掛けてみましょう．すると

$$iww^{-1} = cww^{-1}$$

となりますが，ここで，$ww^{-1} = 1$ ですから，この式から，$i = c$ が出てきます．つまり，i が実数ということになってしまいます．これは仮定に反しますので，iw は直線 $\overline{0w}$ 上にないことが分かるわけです．

図 13 を見てください．

ここに，いま説明したことが描いてあります．S^2 上の任意の点 w をとり，w を i 倍すると，iw は直線 $\overline{0w}$ 上にはありません．すると，原点 0 と iw を結ぶ直線 $\overline{0iw}$ はもとの直線 $\overline{0w}$ とは違う直線ですから，直線 $\overline{0iw}$ と球面 S^2 の交点は，w とも $-w$ とも一致しません．直線 $\overline{0iw}$ と球面 S^2 の交点（2点

あります）のうち，iw に近いほうの交点を選んで $f(w)$ と名前をつけましょう．ここで関数のような記号をつけたのは，点 $f(w)$ が w を決めれば決まってしまう点だからです．はっきりとは述べませんでしたが，w を i 倍した点 iw の位置は w に連続的に依存することは仮定されています．これは複素数の場合にはなりたっていますので，３次元複素数の体系にもこの性質が成り立つと要請するのは自然でしょう．そうすると，上のように構成した球面上の点 $f(w)$ も点 w に連続的に依存しています．$f(w)$ は w とも $-w$ とも違う球面上の点なのですから，w と $f(w)$ を通る球面上の大円が存在します．いま，小さな正の数 ϵ をあらかじめ選んでおいて，点 w から出発してこの大円上を $f(w)$ のほうに向かう長さ ϵ の矢印を描きましょう．

w は球面 S^2 の上の任意の点でしたから，球面 S^2 上の任意の点 w から出る長さ ϵ の矢印が連続的に描けたことになります．球面上に特異点のない連続ベクトル場が描けてしまったわけで，これはホップの定理に矛盾します．

３次元複素数の体系が存在すると仮定すると，それを使って球面上の特異点のないベクトル場が構成できたわけですから，背理法により，そのような３次元複素数の体系は存在しないことが証明できました．

（まつもとゆきお，東京大学大学院数理科学研究科）