サイ投げからブラウン運動まで

楠岡成雄

前書き

この記事は１９９９年１２月２５，２６日に湘南国際村センターで行った第５回湘南数学セミナー「高校生のための現代数学」の際に配布した予稿を基に作製したものである。セミナーでは講義を実質６時間行い、ワークショップと称して、さいころによる実験やゲームのようなことを行った。講演者の本来の目的は何とか確率論のおもしろさを伝えると同時にブラウン運動というものを理解してもらうことにあったが、能力不足のためうまくいかなかったようである。ただ確率論の説明の仕方の実験例としてお読みいただきたい。

はじめに

確率という概念は古くからある概念であり、日常では曖昧に用いられている。その一方、今日では確率論は不確実な現象の解析、数値計算、通信などに用いられている。この講座では、確率論の現代的な取り扱いとその応用をいろいろな形で述べていきたい。確率論の厳密な取り扱いには測度論をはじめとする、現代数学の道具が必要であるが、当然のことながらここではそれについては述べない。したがって、いくつかのところで議論を誤魔化すことになる。ごまかしに気づき、おかしいと議論に納得できない人は、大学の数学科に進みぜひ確率論を本格的に勉強して下さい。

話の内容は次のようなものを予定している。

◇　確率論に関する原理的問題

◇　現代確率論の基礎概念

◇　確率論の種々の話題

種々の話題では、時間の許す限りいろいろな話題について述べ、またさいころや硬貨を使っていろいろな実験をしてみる。

1　確率概念に関する種々の問題・パラドックス

問題１．（これは Galilei(1564-1642) の論文に現れた。）

３個のサイコロを振ると　9 の目と 10 の目のでる組合せはともに

$$9:\quad (1,2,6),(1,3,5),(1,4,4),(2,2,5),(2,3,4),(3,3,3)$$

$$10:\quad (1,3,6),(1,4,5),(2,2,6),(2,3,5),(2,4,4),(3,3,4)$$

の６通りであるのに、経験によれば 9 の目より 10 の目の方がよくでる。これはどうしてか。

問題２．（これは Pascal(1623-1662) と Fermat(1601-1665) の間の往復書簡の中で論じられた。）

Ａ，Ｂ二人がゲームをし、いずれも６万円を賭金として出し、はじめに３点とったものが、賭金を全部とるということを決めた。Ａが２点、Ｂが１点とったとき、相談してゲームをやめた。この賭金１２万円をどの様に分けたらよいか。

問題３．（これはしばしばペテルスブルグ問題とよばれる。）

Ａが一枚の硬貨を裏がでるまで投げ続ける。１回目に表がでたらＡはＢから１円受け取る。２回目に表がでたらＡはＢから２円受け取る。３回目に表がでたらＡはＢから４円受け取る。４回目なら８円、５回目なら１６円受け取るという風にゲームを進める。裏がでればこのゲームは終了する。この時このゲームを公平にするためにはＡはＢにいくら払えばよいか。

この問題のみそはもし期待値を計算すると

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{4}{8}+\frac{8}{16}+\frac{16}{32}+\dots \\ = \; & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\dots \end{aligned}$$

と無限大となってしまい、ＡはＢに無限の金を払わねばならない。しかし、硬貨を投げ続ければいつか必ず裏がでるからＡはＢから有限の金しか受け取れないのでとても公平とはいえない。ではどう考えればよいのか。これが問題である。

問題４．　Ａ氏は飛行機に爆弾を仕掛けられる確率は一万分の一であると聞き、絶対に爆発しないように細工した爆弾をひそかに飛行機に

持ち込んだ。A氏は思った。「これで私はずっと安全になった。なぜなら飛行機に二つ爆弾が持ち込まれる確率は一億分の一だから、もう一つ爆弾が持ち込まれる確率は一万分の一よりずっと小さい。」これは本当だろうか。

問題5． 3人の囚人アラン，バーナード，チャールズが幽閉されている。アランは、翌日二人が処刑され一人が釈放されることを知ったが、3人のうち誰が釈放されるかまったくわからなかった。そこでアランは看守に対し、「3人のうち2人が処刑されるのだから、バーナードとチャールズのうち少なくとも1人は確実に処刑される。私（アラン）のことについてはまったく情報を与えないはずだから、バーナードとチャールズのうち処刑されるものの名前を一人だけ教えてほしい。」と言ったところ、看守はアランの言い分を納得し、「バーナードが処刑される。」と答えた。アランはこれを聞いて、釈放される可能性があるのは、自分のほかはチャールズのみになったので、自分が釈放される確率が増えたと喜んだ。これは本当だろうか。

問題6． A氏とB氏とがつぎのような会話をした。

A：Bさん、金星に生物の存在する確率について、あなたの意見をお聞かせてください。

B：よろしい。私は金星についての知識がまったくありませんので、生物の存在する可能性と存在しない可能性とは同様に確からしいと推定します。よって確率は 1/2 と考えます。

A：なるほどわかりました。でもこの問題を別の角度から考えてみましょう。金星に猫の住んでいない確率はいくらでしょうか。

B：くどいようですが、私はその方面に無知ですので、やはり確率は 1/2 と考えます。

A：では宇宙怪獣キングギドラの住んでいない確率は。

B：やはり 1/2 です。

A：わかりました。でもそうすると、猫もキングギドラもいない確率は 1/2 かける 1/2 の 1/4 になりますね。

B：（当面の問題に気が付いてきたので）さあ、どうでしょうか。

A：したがって、猫かキングギドラのいる確率は 3/4 ですね。すると、金星に生物のいる確率はすくなくとも 3/4 となり、最初にあなたのおっしゃった 1/2 と矛盾しますね。

とうとうB氏は何も言えなくなってしまいました。さて、B氏の考

え方がおかしいのでしょうか、それともＡ氏の議論がおかしいのでしょうか。

2　講演で実際に扱う種々の問題とゲーム

１．行列の長さ

ある郵便局では切手や葉書などの郵便物を取り扱う窓口が一つだけある。この窓口では単位時間あたりに一人の客の用を処理できる。一方、単位時間あたりにあらたな客が１人か２人来ることがあるとする。客が１人または２人来る確率はそれぞれ p_1, p_2 であるとする（ $p_1, p_2 \geq 0$, $p_1 + p_2 < 1$）。窓口が開いてから十分の時間がたった頃に窓口へ行くとどのくらいの人の長さの行列ができているだろうか。

２．中性子の連鎖反応

原子核は中性子との偶然の衝突により分裂する。この核分裂で今、２個の新しい中性子が放出されるとしよう。これらの第２次の中性子のそれぞれが他の原子核に偶然に衝突し再び中性子が放出されるというように続く。中性子が原子核に衝突する確率が p $(0 < p < 1)$ であるとする。最初の粒子から生まれ出てくる第 n 世代の粒子の個数はどのようになるであろうか。特にこの反応が止まる確率はいくらであるか。

３．ゼロ和ゲーム

じゃんけんをする。相手に勝てば相手から１００円をもらえ、負ければ相手に１００円渡し、あいこの時は何ももらったり渡したりしないとする。どのような戦略でじゃんけんをすればよいであろうか。

同じく、じゃんけんをする。相手に勝てば相手からお金をもらえ、負ければ相手にお金を渡し、あいこの時は何ももらったり渡したりしないとする。もらう金額はグーで勝った時は３００円、チョキ、パーで勝った時は６００円であり、相手も勝ったとき同じようにもらえるとする。今度ははどのような戦略でじゃんけんをすればよいであろうか。

４．ポケモンゲットゲーム

ポケモンをモンスターボールでゲットするゲームを考える。モンスターボールは１つしかなく、ポケモンは３回現れるが、モンスターボールでとらえねばすぐ逃げてしまう。ポケモンは１０種類いて、どの種類のポケモンも同じ確率の1/10で現れる。また、１回目、２回目、３回目に

どの種類が現れるかは独立とする。１０種類のポケモンに１から１０までの番号をふる。それぞれの種類のポケモンは得点をもっているとしよう。その得点は、
第１〜４番目の種類のポケモンの得点は１点
第５〜７番目の種類のポケモンの得点は３点
第８、９番目の種類のポケモンの得点は７点
第１０番目の種類のポケモンの得点は１０点
としよう。さてどうすれば高得点が得られるであろうか。

上と同じ設定でポケモンの得点が
第１〜４番目の種類のポケモンの得点は１点
第５〜７番目の種類のポケモンの得点は５点
第８、９番目の種類のポケモンの得点は１０点
第１０番目の種類のポケモンの得点は５０点
としよう。この場合、どうすれば高得点が得られるであろうか。

５．サイ投げで一次方程式が解けるか

方眼紙を使って正方格子を作る。中心を原点とし、いつものように右方向に x 軸（第１座標）上方向に y 軸（第２座標）をとる。そうすると、各格子点には整数の組の座標が与えられる。各格子点に対して、実数値を与える関数 $u(x,y)$, x,y は整数、を考える。N を自然数とする。この関数 $u(x,y)$ は次のような方程式を満たしているとする。

x,y が $-N < x,y < N$ を満たすならば

$$u(x,y) = \frac{1}{4}(u(x-1,y) + u(x,y-1) + u(x+1,y) + u(x,y+1))$$

今、$N = 4$ として、$|x| = 4$ または $|y| = 4$ を満たす (x,y) に対し $u(x,y)$ の値がわかっている時に $u(1,1)$ の値を求めたい。

何も考えずにコインを投げるだけでこの問題が解けるだろうか。

3　確率の定式化、重要な道具

確率論にパラドックスが発生する一つの理由は確率を曖昧に与えてしまうからである。そのようなことが起きることをさけるために今日ではまず確率の定義できる範囲を定めてしまう。

確率の対象は事象、則ち事柄である。事象とはこれから考える問題で起こりうるすべての可能性といった意味である。

まず、すべての事象はこれ以上分解ができないという根元事象にまで分解されると考える。根元事象などというものが本当にあるかどうかは疑問であるが、数学の設定では矛盾をさけるためにそのようなものがあるとする。そしてそのような根元事象全体の集まりをふつう Ω で表し全事象の空間 と呼ぶ（標本空間とも呼ぶが私は標本空間という言葉は別の意味に用いることにしている)。Ω は集合であるが、具体的に与える必要はない。Ω は大きければ大きいほど好都合なので、明らかにしないことがよくある（大きな数を言った方が勝ちというゲームをする時、先に数字を言った方が不利になる)。

確率を厳密に定式化するには「可測性」という概念が必要になる。しかしここではおおらかに考えていく。事象とは Ω の部分集合のことと考える。確率とは事象 A に対して 0 以上 1 以下の実数 $P(A)$ を対応させる関数と考える。確率に対しては以下のような条件が成り立つものとする。(1) 全事象 Ω に対して $P(\Omega)=1$. 何もない空の事象 $\emptyset$ に対して $P(\emptyset)=0$. (2)（確率の加法性） 事象 A, B は背反事象であるとする。則ち、事象 A, B は同時には起こり得ないとする。(数学的には A, B は事象、則ち Ω の部分集合で $A \cap B=\emptyset$ ）この時、事象 A, B を合わせた事象 $A \cap B$ （事象 A, B のどちらかが起こるという事象）の確率は $P(A)$ と $P(B)$ の和となる。つまり、

$$P(A \cup B)=P(A)+P(B)$$

（注意）数学ではもっと強く確率の可算加法性を要請する。則ち、A_1, $A_2, A_3, \ldots,$ が互いに背反な事象であれば、そのどれかが成り立つという事象 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ の確率に対し、

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)=\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

が成り立つ。

［確率変数　　random variable］

もともとは確率的に値の変わりうるものを確率変数と呼んでいた。

例. さいころを３回振る。

１回目に振ったときのさいころの目の数を X_1,

２回目に振ったときのさいころの目の数を X_2,
３回目に振ったときのさいころの目の数を X_3,
とすると、 X_1, X_2, X_3 は確率変数となる。

「 X が 1 である」というのは事象となる。したがって X の値で Ω が分割される。ω を根元事象とすると、ω の下で X の値は 1 通りに定まるはずである。よって X は Ω の上で定義された関数と見なせる. したがって数学では「確率変数とは Ω で定義された関数」と定義する。

［確率変数の期待値］ X が確率変数で $x_1, x_2, \ldots, x_n$ の値をとるとする。この時、確率変数の期待値 $E[X]$ を

$$E[X] = \sum_{k=1}^{n} x_k P(X = x_k)$$

で表すことにする。期待値の重要な性質は線形性を持つことである。

定理 X, Y を確率変数、 a を実数とする。
(1) $E[X+Y] = E[X] + E[Y]$
(2) $E[aX] = aE[X]$

証明. 証明は簡単であるが、確率の扱い方になれてもらうためにも詳述する。

(1)

$$E[X+Y] = \sum_{k=1}^{n} z_k P(X+Y = z_k)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} (x_i + y_j) P(X = x_i, Y = y_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} x_i (\sum_{j=1}^{M} P(X = x_i, Y = y_j)) + \sum_{j=1}^{M} y_j (\sum_{i=1}^{N} P(X = x_i, Y = y_j))$$

$$= \sum_{i=1}^{N} x_i P(X = x_i) + \sum_{j=1}^{M} y_j P(Y = y_j) = E[X+Y]$$

(2)

$$E[aX] = \sum_{k=1}^{n} z_k P(aX = z_k) = \sum_{i=1}^{N} a x_i P(X = x_i) = aE[X]$$

［条件付き確率］

A, B は事象で $P(A) > 0$ とする。事象 A が起こったということを知ったという条件の下での事象 B の確率（条件付き確率） $P(B|A)$ を

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

で与える。なぜ、条件付き確率をこのように与えるかについては講演の中で述べる。

［事象、確率変数の独立性］

A, B は事象であるとする $P(A) > 0$ であり、条件確率 $P(B|A)$ が元の確率 $P(B)$ と変わらないとき事象 A, B は独立であるという。これは

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

と同値である。

また、確率変数 X, Y がある時、任意の実数 x, y に対して事象 $\{X = x\}$ と $\{Y = y\}$ が独立であるとき、確率変数 X, Y は独立であるという。

定理 X, Y が独立な確率変数であるとき

$$E[XY] = E[X]E[Y]$$

証明.

$$E[XY] = \sum_{k=1}^{n} z_k P(XY = z_k)$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} x_i y_j P(X = x_i, Y = y_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} x_i y_j P(X = x_i)(Y = y_j)$$

$$= (\sum_{i=1}^{N} x_i P(X = x_i))(\sum_{j=1}^{M} y_j P(Y = y_j)) = E[X]E[Y]$$

以上が確率論の基本的道具である。

4 サイ投げの考察

いま正確にできたさいころをよく振って n 回投げるということを考える。1 回目にでた目の数を X_1, 2 回目に出た目の数を X_2, といった具合に X_n までを決めていく。$X_1, X_2, \ldots, X_n$ は確率変数である。正確にできているから $X_1 = 1$ という事象（正確には $\{\omega \in \Omega;\ X_1(\omega) = 1\}$ とすべきだが、ふつう集合の記号を省略してしまう）の確率は 1/6 であろう。同じようにして

$$P(X_1 = 1) = P(X_1 = 2) = \ldots = P(X_1 = 6)$$
$$= P(X_2 = 1) = \ldots = P(X_n = 6) = \frac{1}{6}$$

であろう。また、よく振って投げているから、1 回目に出た目の数と 2 回目に出た目の数は独立（何の関係もない）であろう。すると、$X_1 = 1$ という事象 $X_2 = 1$ という事象は独立、よって

$$P(X_1 = 1, X_2 = 1) = P(\{X_1 = 1\} \cap \{X_2 = 1\})$$
$$= P(X_1 = 1)P(X_2 = 1) = (\frac{1}{6})^2 = \frac{1}{36}$$

となる。同様に 1,2 回目に出た目の数と 3 回目に出た目の数は独立なので $X_1 = 1, X_2 = 1$ という事象と $X_3 = 1$ という事象は独立で、

$$P(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1) = P(X_1 = 1, X_2 = 1)P(X_3 = 1) = (\frac{1}{6})^3$$

となる。このようにして

$$P(X_1 = i_1, X_2 = i_2, \ldots, X_n = i_n) = (\frac{1}{6})^n, \qquad i_1, i_2, \ldots, i_n = 1, 2, \ldots, 6$$

となる。

問題 1 を考えるてみると 3 回さいころを振ったとき出た目の数の和が N であるということは $X_1 + X_2 + X_3 = N$ という事象に他ならない。

$$\{X_1 + X_2 + X_3 = N\} = \bigcup_{i_1+i_2+i_3=N} \{X_1 = i_1, X_2 = i_2, X_3 = i_3\}$$

よって

$$P(X_1 + X_2 + X_3 = N) = \frac{1}{216}(\ i_1 + i_2 + i_3 = N \text{ となる } (i_1, i_2, i_3) \text{ の個数 })$$

となる。

問題5を考えてみよう。アランが釈放されるという事象を A, バーナードが釈放されるという事象を B, チャールズが釈放されるという事象を C, と表すことにする。それぞれは背反事象である。その確率を今 $P(A) = P(B) = P(C) = 1/3$ としてみよう。看守の答えが「バーナードが処刑される」である事象を D「チャールズが処刑される」である事象を D とする。事象が B である時、看守は「チャールズが処刑される」と答え、事象が C である時、看守は「バーナードが処刑される」と答える。問題は事象が A である場合である。実はそのとき看守がどのようにして答えを選ぶかをはっきりさせていない。そこで看守の答えの選び方を何種類か考えてみよう。

方法１．さいころを振り奇数の目が出たら「バーナードが処刑される」と答え偶数がでたら「チャールズが処刑される」と答える。

方法2．さいころを振り 3 か 6 の目が出たら「バーナードが処刑される」と答えそれ以外の時「チャールズが処刑される」と答える。

方法３．さいころを振り 3 か 6 の目が出たら「チャールズが処刑される」と答えそれ以外の時「バーナードが処刑される」と答える。

さいころの目の数を X で表す。事象が A であることとサイの目とは独立であろう。よって

$$P(A \cap \{X = i\}) = P(A)P(X = i) = \frac{1}{18}, \qquad i = 1, 2, \ldots, 6$$

もし、方法１を選ぶならば

$$E = C \cup (A \cap \{\ X = 1 \text{ または } 3 \text{ または } 5\ \})$$

となるので

$$P(A|E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}$$

である。同様に計算すると方法２の時は $P(A|E) = 1/4$, 方法３の時は $P(A|E) = 2/5$ となる。

ふつうは「アランが釈放されるとき」には看守が「バーナードが処刑される」と言うか「チャールズが釈放される」と言うかどちらかわからないからどちらを言うかの確率は 1/2 則ち方法１がとられると考えてアランの釈放される確率は変わらないと考えるが一般的であるがそれが問題５に対する絶対的な解答ではないのである。

5　完全な暗号：乱数暗号

暗号は現在いろいろなところで用いられている日常的なものとなりつつある。かっては、軍事や外交において電波で情報を送るために用いられていた。暗号とは以下のものと定式化できる。情報の送信者（A）から受信者（B）へ秘密の情報を送りたい。簡単のために、その情報は 0,1 2つの数字の列 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ で表されるとする。この情報を送信者Aは、やはり 0,1 2つの数字の列 $b_1, b_2, \ldots, b_m$ に変換し受信者Bに送る。この情報 $b_1, b_2, \ldots, b_m$ は第３者も知ることができる。受信者Bは $b_1, b_2, \ldots, b_m$ から情報 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ を再現できなくてはならない。一方第３者が $b_1, b_2, \ldots, b_m$ から情報 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ が再現できては困る。ではどのようにするか。これが暗号の問題である。

完全な暗号は乱数を用いた暗号である。これは第２次世界大戦の時などに用いられたが、今日ではいろいろな理由でほとんど用いられなくなった。しかし、確率論の簡単な応用なので述べていく。

いま、N を大きな数とし、$X_1, X_2, \ldots, X_N,$ を $0,1$ の値を $1/2$ の確率でとる独立な確率変数とする。その実現値を $x_1, \ldots, x_N$ とする。例えば、硬貨を何回も投げ k 回目に硬貨の表がでたら 1 裏がでたら 0 と x_k の値を定めればよい。この $0,1$ の列を送信者 A が作り受信者Bにあらかじめ届けておく（この列は第３者に知られてはいけない)。さて、$0,1$ の組を与えると、 $0,1$ の値を返す関数 f を

$$f(0,0) = f(1,1) = 0,\ f(0,1) = f(1,0) = 1$$

という関数を用意する。この時、

$$f(x, f(x,y)) = y, \qquad x, y = 0, 1$$

であることに注意する。さて送信者 A が情報 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ を送りたいとき、$b_k = f(x_k, a_k), k = 1, \ldots, n$ とおき $b_1, \ldots, b_n$ を送信する。受信者Bは $c_k = f(x_k, b_k), k = 1, \ldots, n$ とおくと実は $c_k = a_k$ であるので、$a_1, \ldots, a_n$ が再現される。

ではなぜ、第三者は $b_1, \ldots, b_n$ から $a_1, \ldots, a_n$ を再現できないのであろうか。原理的に見ると $b_k = f(x_k, a_k)$ であるから b_k は $Y_k = f(X_k, a_k)$ という確率変数の実現値である。ところが、 $Y_1, \ldots, Y_n$ という確率変

$$v(1) = 0, \qquad v(9) = 1$$

という1次方程式となる。簡単わかるようにこの方程式の答えは

$$v(x) = \frac{x-1}{8}, \qquad x = 1, 2, \ldots, 9$$

であることがわかる。

ではこのすごろくを始めてはずれまたは当たりの場所までたどり着くのに平均して何回くらいかかるであろうか。これは x から出発するときの τ の平均値 $u(x)$ を調べることになる。則ち、

$$u(x) = E[\tau | X_0 = x]$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} kP(\tau = k | X_0 = x) + \infty P(\tau = \infty | X_0 = x) \quad x = 2, \ldots, 8,$$

を計算することになる。先と同じく $2 \leq x \leq 8$ ならば

$$u(x)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{\infty} kP(\tau = k, X_1 = x-1 | X_0 = x) + \infty P(\tau = \infty, X_1 = x-1 | X_0 = x) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{\infty} kP(\tau = k, X_1 = x+1 | X_0 = x) + \infty P(\tau = \infty, X_1 = x+1 | X_0 = x) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} kP(\tau = k | X_1 = x-1, X_0 = x) P(X_1 = x-1 | X_0 = x) \\
&\quad + \infty P(\tau = \infty | X_1 = x-1, X_0 = x) P(X_1 = x-1 | X_0 = x) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{\infty} kP(\tau = k | X_1 = x+1, X_0 = x) P(X_1 = x+1 | X_0 = x) \\
&\quad + \infty P(\tau = \infty | X_1 = x+1, X_0 = x) P(X_1 = x+1 | X_0 = x) \\
&= \frac{1}{2}(u(x-1) + 1) + \frac{1}{2}(u(x+1) + 1)
\end{aligned}$$

ただし、ここでは $u(1) = u(9) = 0$ とおく必要がある。したがって、一次方程式

$$2u(x) - u(x-1) - u(x+1) = 2, \qquad x = 2, \ldots, 8,$$

れば左に一つ進む（１つ多い番号の場所に移る)。1 のマスにつけばはずれ、 9 のマスについたらあたりとしよう。そこで、1 または 9 についたらそこで止まる（形式的にさいころのどの目が出てもそこに留まるとする）と考えよう。この時、 $M=9$ で、上で定めた $p_{x,y}$ は

$$x=1 \text{ または } 9 \text{ の時 } p_{x,y}=\begin{cases} 1 & x=y \\ 0 & x\neq y \end{cases}$$

$$2\leq x\leq 8 \text{ の時 } p_{x,y}=\begin{cases} 1/2 & y=x-1 \text{ または } x+1 \text{ の時} \\ 0 & \text{それ以外の時} \end{cases}$$

となる。

さて出発点が x, $x=2,3,\ldots,8$, のマスの時当たりにたどり着く確率はいくらであろうか。その確率 $v(x)$ は、 $\tau=\tau_{\{1,9\}}$ と表すことにすると

$$v(x)=P(X_\tau=9,\tau<\infty|X_0=x),\quad x=2,3,\ldots,8$$

となる。したがって、$v(1)=0, v(9)=1$ と定めておく。もし、$2\leq x\leq 8$ であれば

$$v(x)=P(X_\tau=9,\tau<\infty|X_0=x)$$
$$=P(X_\tau=9,\tau<\infty,X_1=x-1|X_0=x)$$
$$+P(X_\tau=9,\tau<\infty,X_1=x+1|X_0=x)$$

A,B,C を事象とすると

$$P(A\cap B|C)=\frac{P(A\cap B\cap C)}{P(B\cap C)}\frac{P(B\cap C)}{P(C)}=P(A|B\cap C)P(B|C)$$

なので

$$v(x)$$
$$=P(X_\tau=9,\tau<\infty|X_1=x-1,X_0=x)P(X_1=x-1|X_0=x)$$
$$+P(X_\tau=9,\tau<\infty|X_1=x+1,X_0=x)P(X_1=x+1|X_0=x)$$
$$=\frac{1}{2}v(x-1)+\frac{1}{2}v(x+1)$$

したがって

$$2v(x)-v(x-1)-v(x+1)=0,\qquad x=2,\ldots,8$$

7　一人すごろく（マルコフ連鎖）

すごろくを一人でやってもつまらないかもしれないが、どのように駒が動いていくかを見るのは確率過程の基本である。

駒の動くマスに番号をつけて $1, 2, \ldots, M$ としよう。X_0 を駒の出発点とする。ふつうは出発点は振り出しであるが、どの場所からも出発できるものとする。X_n, $n = 1, 2, \ldots,$ は n 回目についたマスを表すとする。いま、駒が x のマスにいるときさいころを振って z の目が出たとき進むマスが $g(x, z)$ であるとする。

さて、Z_n, $n = 1, 2, \ldots,$ は さいころの n 回目にふったときの目とする。すると、 $X_n = g(X_{n-1}, Z_n)$, $n = 1, 2, \ldots,$ となる。よって

$$P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n, X_{n-1} = x_{n-1}, \ldots, X_0 = x_0)$$

$$= P(g(x_n, Z_n) = x_{n+1} | g(x_{n-1}, Z_{n-1}) = x_n, \ldots, g(x_0, Z_1) = x_1)$$

$$= P(g(x_n, Z_n) = x_{n+1}) = P(g(x_n, Z_1) = x_{n+1})$$

$p_{x,y} = P(g(x, Z_1) = y)$, $x, y = 1, 2, \ldots, M,$ とおけば

$$p_{x,y} \geq 0, \qquad \sum_{y=1}^{M} p_{x,y} = 1,$$

$$P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n, X_{n-1} = x_{n-1}, \ldots, X_0 = x_0) = p_{x_n, x_{n+1}}$$

となる。

さてこの１人すごろくで最も重要な概念が到達時刻 (Hitting Time) である。今、動けるマス全体 $\{1, 2, 3, \ldots, M\}$ の一部分 $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ を定めておく。この時、 駒が $a_1, a_2, \ldots, a_m$ のどれかのマスに最初に止まる時刻を τ_A とする。つまり、第 τ_A 回目に駒を進めたとき駒が $a_1, a_2, \ldots, a_m$ のどれかのマスに初めて止まったとする。ただし、止まることが一度もなければ $\tau_A = \infty$ と定める。数学的にきっちり書くと

$$\tau_A(\omega) = \min\{n \geq 1;\ X_n(\omega) = \ a_1 \text{ または } a_2 \ldots \text{または } a_m\}$$

となる。$\tau_A < \infty$ の時 X_{τ_A} は、駒が $a_1, \ldots, a_m$ のどのマスに最初に止まったかを表している。

マスが９つある１次元すごろくを考える。立方体のさいころを振って奇数が出れば右に一つ進み（１つ少ない番号の場所に移る)、偶数が出

以上となる。よって、利得の期待値はうまく戦略をとれば

$$c_0 = \max_{\mathbf{p}} f(\mathbf{p})$$

を最低でも確保できる。

ＡとＢの立場を逆転させて考えてみる。Ｂの利得は $-a(i,j)$ である。Ｂが j の手を q_j でとるという戦略を $(j = 1, 2, \ldots, M)$ を $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_M)$ で表すとする。Ｂが戦略 $\mathbf{q}$ をとると先と同様にＡがどのような戦略をとっても

$$g(\mathbf{q}) = \min\{\sum_{i=1}^{N} -a(i,j)q_j; i = 1, 2, \ldots, N\}$$

を利得の期待値として得ることができ、よってＢがうまく戦略をとれば最低でも

$$c_1 = \max_{\mathbf{q}} g(\mathbf{q})$$

を確保できる。

$$-g(\mathbf{q}) = \max\{\sum_{i=1}^{N} a(i,j)q_j; i = 1, 2, \ldots, N\}$$

に注意すると、どのような $\mathbf{p}$ $(p_1, p_2, \ldots, p_N)$, $\mathbf{q}$ $(q_1, q_2, \ldots, q_M)$, に対しても

$$f(\mathbf{p}) = \sum_{j=1}^{M} f(\mathbf{p})q_j \le \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} p_i a(i,j) q_j \le \sum_{i=1}^{N} p_i(-g(\mathbf{q})) = -g(\mathbf{q})$$

となる。したがって、

$$c_0 = \max_{\mathbf{p}} f(\mathbf{p}) \le \min_{\mathbf{q}} -g(\mathbf{q}) = -c_1$$

が得られる。実は、$c_0 = -c_1$ が常に成り立つことが証明されている (saddle point theorem)。したがって、ある $\tilde{\mathbf{p}} = (\tilde{p}_1, \ldots, \tilde{p}_N)$, $\tilde{\mathbf{q}} = (\tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_M)$, が存在して、

$$c_0 = f(\tilde{\mathbf{p}}) = \sum_{i=1}^{N} \tilde{p}_i a(i,j) \tilde{q}_j = -g(\tilde{\mathbf{q}})$$

となる。すなわち、Ｂが最適な戦略 $\tilde{\mathbf{q}}$ をとれば、Ａの利得の期待値は c_0 を超えることができない一方、Ａが最適な戦略 $\tilde{\mathbf{p}}$ をとればＡは利得の期待値として c_0 を確保できるのである。

となる。相手が j を出すとき、得られる利得の期待値は

$$p_1a(1,j)+p_2a(2,j)+p_3a(3,j)$$

となる。直観的には今の場合 $p_1=p_2=p_3=1/3$ が最適な戦略と思われる。実際、この時は

$$p_1a(1,j)+p_2a(2,j)+p_3a(3,j)=0, \qquad j=1,2,3 \tag{2}$$

となり、相手がどのような戦略を採ろうとも利得の期待値は 0 となる。絶対負けないが勝つこともない戦略である。(1),(2) を p_1, p_2, p_3 の方程式と考えると $p_1=p_2=p_3=1/3$ が唯一の解であることが容易にわかる。一方、どのような p_1, p_2, p_3 に対しても

$$\sum_{j=1}^{3}(\sum_{i=1}^{3}p_ia(i,j))=0$$

となるので $p_1=p_2=p_3=1/3$ でないならば

$$p_1a(1,j)+p_2a(2,j)+p_3a(3,j)<0$$

となるような j がある。すなわち、このような確率の戦略をとっていることを見抜かれると、相手の付け入る隙ができるのである。

では、2番目の場合のように利得がグー、チョキ、パーについて対称性がない場合はどうなるであろうか。

一般に以下のようなことが知られている。

A，B 2人のプレーヤーがいるとする。Aのとれる手が $1,2,\ldots,N$, Bのとれる手が $1,2,\ldots,M$ とする。さらにAが i の手を出し、Bが j の手を出すとき、AがBから $a(i,j)$ 円受け取るとする。($a(i,j)$ が負の時は $-a(i,j)$ 支払うと考える)。Aが i の手を確率 p_i で出す ($i=1,2,\ldots,N$) という戦略を $\mathbf{p}=(p_1,p_2,\ldots,p_N)$ で表すことにする。Aが戦略 $\mathbf{p}$ をとる時きBが j の手を出した時の利得の期待値は

$$\sum_{i=1}^{N}p_ia(i,j)$$

となる。よって、BがAの戦略を知って最も効率的な手段をとったとしても利得の期待値は

$$f(\mathbf{p})=\min\{\sum_{i=1}^{N}p_ia(i,j); j=1,2,\ldots,M\}$$

数は $f(a_k, Y_k) = X_k$ に注意すると

$$P(Y_1 = y_1, Y_2 = y_2, \ldots, Y_n = y_n)$$

$$= P(X_1 = f(a_1, y_1), \ldots, X_n = f(a_n, y_n))$$

$$= P(X_1 = f(a_1, y_1))P(X_2 = f(a_2, y_2)) \cdots P(X_n = f(a_n, y_n)) = (\frac{1}{2})^n$$

すなわち、$Y_1, Y_2, \ldots, Y_N$, も $0, 1$ の値を $1/2$ の確率でとる独立な確率変数となる。その実現値 $b_1, \ldots, b_N$ は硬貨を何回も投げ k 回目に硬貨の表がでたら 1 裏がでたら 0 と b_k の値を定めたとしたものと区別ができない、何の規則性もない列である。したがって、もし元の情報 $a_1, \ldots, a_n$ が別の列であっても同じことになる。したがって、最初のものが何であったかを知ることは全く不可能なのである。

乱数暗号は用いられなくなったが、上で述べたような考察はシャノンにより情報量という概念に発展していった。これは通信の理論ではなくてはならないものとなっている。

6　ゼロ和ゲーム

じゃんけんをするとき、くせがあってそのくせを読みとらてしまうと、長くじゃんけんを続けると負ける率が高くなる。くせの内容にじゃんけんを行うには、ランダムに出す手を選ぶという方法がある。

今じゃんけんの「グー」を 1 、「チョキ」を 2 、「パー」を 3 で表すことにする。今、自分が i 相手が j の手を出すときの自分の利得を $a(i, j)$ (円) とする。例えば、最初の例では

$$a(i,j) = \begin{cases} 0 & i = j \\ 100 & i = j-1 \text{ または } i = j+2 \\ -100 & i = j+1 \text{ または } i = j-2 \end{cases}$$

となる。さて、毎回さいころなどを使って、確率 p_1 でグー、確率 p_2 でチョキ、確率 p_3 でパーを出すことにする。もちろん

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1, \qquad p_1, p_2, p_3 \geq 0 \tag{1}$$

$$u(1) = u(9) = 0$$

の解である。さて答えは何であろうか。

このような１人すごろくは、さいころを複雑にしていけば、 $p_{x,y}$ は必ずしも有理数でなくてもよいであろう。また、駒の動ける範囲も有限ではなく、すべての非負整数を動けるとしてもよいであろう。そのようなものをマルコフ連鎖と呼ぶ。しかし、基本的な考え方は１人すごろくと変わらない。

8　待ち行列

「行列の長さ」の問題を考えよう。まずこれは数学としてはどのような問題であるかを規定する必要がある。注意すべきことは、問題の定式化によっては異なる答えが出ることもあり得るということである。

多くの場合、問題を一人すごろくの問題としてしまうとうまくいく(そうでない場合も少なくないが)。ここでも問題を一人すごろくに変換しよう。どのようなすごろくにすればよいか。これが確率過程モデル(模型) の設計の問題である。

今は、何人お客が列に並んでいるかに興味がある。そこで、現在窓口にいる人の数をすごろくのマスにすればよいであろう。すなわち、マスは $0, 1, 2, 3, \ldots$ と無限に並んでいる。それぞれの番号が列に並んでいるお客さんの人数である。新たに来るお客さんの人数は、簡単のために今の列に並んでいるお客さんの人数と独立と仮定する。もちろん地球の人口だけの人数が窓口に並んでいれば、新たなお客さんは宇宙人ということになり、厳密にはこの仮定はおかしいが、モデルなのだから仕方ないとあきらめよう。各回で、新たなお客さんが１人くる確率が p_1 ２人くる確率が p_2 であった。$p_0 = 1 - (p_1 + p_2)$ とおくと一人も来ない確率が p_0 ということになる。

さて、 それぞれ確率 p_i で i $(i = 0, 1, 2)$ の目の出る変形さいころがあるとしよう。するとわれわれのすごろくの n のマスにおけるルールは

（１）$n \geq 1$ の時はさいころを振って、0 の目が出れば $n-1$ に進み 1 の目が出れば n に進み 2 の目が出れば $n+1$ に進む。

（２）$n = 0$ の時はさいころを振って、0 の目が出れば 0 に進み 1 の目

が出れば 1 に進み 2 の目が出れば 2 に進む。
というようなものである。
　前章での $p_{i,j}$, $i,j=0,1,2,\ldots$ は $i=0$ の時は

$$p_{0,j}=\begin{cases} p_0 & j=0, \\ p_1 & j=1, \\ p_2 & j=2, \\ 0 & j \text{ が上記以外の場合} \end{cases}$$

で与えられ、 $i \geq 1$ の場合は

$$p_{i,j}=\begin{cases} p_0 & j=i-1, \\ p_1 & j=i, \\ p_2 & j=i+1, \\ 0 & j \text{ が上記以外の場合} \end{cases}$$

で与えられる。さて、

$$P(X_{n+1}=j)=\sum_{i=0}^{\infty} p_{i,j}P(X_n=i), \qquad j=0,1,\ldots$$

が成り立つ。もし、$P(X_n=j)$ が $n\to\infty$ の時、π_j に近づくならば、きっと、

$$\pi_j \geq 0, j=0,1,2,\ldots, \qquad \sum_{j=0}^{\infty}\pi_j=1$$

$$\pi_j=\sum_{i=0}^{\infty}\pi_i p_{i,j}, \qquad j=0,1,\ldots$$

が成り立つだろう。

$$\pi(s)=\sum_{i=0}^{\infty}\pi_i s^i$$

という関数を考えると

$$\pi(s)=\sum_{j=0}^{\infty}(\sum_{i=0}^{\infty}\pi_i p_{i,j})s^j$$

$$=\pi_0(p_0+p_1 s+p_2 s^2)+\sum_{i=1}^{\infty}\pi_i(p_0 s^{i-1}+p_1 s^i+p_2 s^{i+1})$$

$$= \pi_0(p_0 + p_1 s + p_2 s^2) + s^{-1}(\pi(s) - \pi_0)(p_0 + p_1 s + p_2 s^2)$$

したがって $K(s) = p_0 + p_1 s + p_2 s^2$ とおくと

$$(s - K(s))\pi(s) = \pi_0 K(s)(s-1) \tag{3}$$

となる。単位時間に来る人の人数の平均を $\mu = p_1 + 2p_2$ と表そう。

$$\frac{s - K(s)}{s-1} = \frac{p_0(s-1) + p_2(s - s^2)}{s-1} = p_0 - p_2 s$$

より

$$1 - \mu = p_0 - p_2 = (p_0 - p_2)\pi(1) = \pi_0$$

となる。$\mu > 1$ であると、 $\pi_0 < 0$ となり矛盾。$\mu = 1$ でも、 $p_0 = 0$ でなければ $\pi_1 = 0$ となり、$p_2 = 0$ でないかぎり、式 (3) から矛盾が現れる。よって、 $\mu < 1$ でない限り、確率が収束することはないことがわかる。

$\mu < 1$ であるならば、式 (3) より

$$\pi(s) = (1-\mu)\frac{p_0 + p_1 s + p_2 s^2}{p_0 - p_2 s} = p_0^{-1}(1-\mu)(p_0 + p_1 s + p_2 s^2)\sum_{n=0}^{\infty} c^n s^n$$

ただし、 $c = p_2/p_0$. したがって、

$$\pi_0 = 1 - \mu, \quad \pi_1 = (1-\mu)c + p_0^{-1}(1+\mu)p_1,$$

$$\pi_n = (1-\mu)c^n + p_0^{-1}(1+\mu)p_1 c^{n-1} + p_0^{-1}(1+\mu)p_2 c^{n-2}, \qquad n \geq 2$$

となる。行列の長さの平均を計算してみよう。関数 π の微分を計算すると、

$$\pi'(s) = p_0^{-1}(1-\mu)\frac{(p_1 + 2p_2 s)(1 - cs) + c(p_0 + p_1 s + p_2 s^2)}{(1-cs)^2}$$

となるので、簡単な計算により

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\pi_n = \pi'(1) = \mu + \frac{p_2}{1-\mu}$$

がわかる。これが十分な時間がたったときの列の長さの平均である。

9　分枝過程

中性子の連鎖反応に対するすごろくはどのように設計すればよいのであろうか。まず、確率 p で 2 の目が $1-p$ で 0 の目が出るというさいころを用意する。すごろくのマスは $0, 1, 2, \ldots$ というものを用意しておく。m のマスに止まっているときは、さいころを m 回振り、その出た目の数の和の数字のマスに移動する。ただし、 0 に止まったときはそこからもう動けないものとする。

X_n を n 回目に止まったマスの数字を表すことにする。X_n を実際に表現するには次のようにすればよい。まず、$Y_{i,j}$, $i, j = 1, 2, \ldots,$ はさいの目を表す確率変数で独立で $P(Y_{i,j} = 0) = 1 - p$, $P(Y_{i,j} = 2) = p$ となるものとする。この時、 X_n, $n = 0, 1, 2, \ldots,$ は

$$X_0 = 1$$

$$X_n = \sum_{j=1}^{X_{n-1}} Y_{n,j}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

と表現される。ここで知りたいのは $P(X_n = 0)$ の $n \to \infty$ の時の極限値である。これを調べるには、次のような関数 φ_n を調べるとよい。

$$\varphi_n(s) = E[s^{X_n}] = \sum_{k=0}^{\infty} P(X_n = k) s^k$$

ここで条件付き確率に関する期待値を導入する。A を事象、X を確率変数とすると

$$E[X|A] = \sum_{k=1}^{N} x_k P(X = x_k|A) = \sum_{k=1}^{N} x_k \frac{P(X = x_k, A)}{P(A)}$$

もし、A_i, $i = 1, \ldots, M$ が背反事象で $\bigcup_{i=1}^{M} A_i = \Omega$ (全事象) であるならば

$$\sum_{i=1}^{M} P(A_i) E[X|A_i] = \sum_{i=1}^{M} \sum_{k=1}^{N} x_k P(X = x_k, A_i)$$

$$= \sum_{k=1}^{N} x_k P(X = x_k) = E[X]$$

となる。よって、

$$\varphi_n(s) = E[s^{X_n}] = \sum_{i=0}^{\infty} P(X_{n-1} = i) E[s^{X_n} | X_{n-1} = i]$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} P(X_{n-1} = i) E[s^{Y_{n,1}} \cdots s^{Y_{n,i}} | X_{n-1} = i]$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} P(X_{n-1} = i) E[s^{Y_{n,1}}] \cdots E[s^{Y_{n,i}}]$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} P(X_{n-1} = i)((1-p) + ps^2)^i = E[((1-p) + ps^2)^{X_{n-1}}]$$

$$= \varphi_{n-1}((1-p) + ps^2)$$

となる。したがって、 $\psi(s) = (1-p) + ps^2$ とおくと

$$\varphi_n(s) = \varphi_{n-1}(\psi(s)) = \psi(\psi(\cdots \psi(s) \cdots))$$

となり、$\varphi_n(s)$ は計算可能となる。そして、 $P(X_n = 0) = \varphi_n(0)$ となる。実は次が成り立つ。

定理　$p \leq 1/2$ ならば $P(X_n = 0) \to 1, n \to \infty$ 、$1/2 < p \leq 1$ ならば $P(X_n = 0) \to (1-p)/p, n \to \infty$

証明を与えよう。t を $p \leq 1/2$ の時は $t = 1$ 、$1/2 < p \leq 1$ の時は $t = (1-p)/p$ とする。t は実は $\psi(s) = s$ を満たす最小の非負解である。$0 \leq t$ より $\psi(0) \leq \psi(t) = t$ である。帰納的に

$$\varphi_{n+1}(0) = \varphi_n(\psi(0)) \leq \varphi_n(t) = t$$

がわかる。$P(X_n = 0)$ は n と共に増大するので、極限が存在する。それを z とすると $0 \leq z \leq t$ であり、

$$z = \lim_{n\to\infty} \varphi_{n+1}(0) = \lim_{n\to\infty} \psi(\varphi_n(0)) = \psi(z)$$

となる。よって $z = t$ となる。

10　ランダムウォーク（２次元）

平面上に正方形からなる格子（正方格子）を作る。格子の各点をすごろくのマスと考える。１，２，３，４ の目が 1/4 の確率で現れるさいころを作り、さいころを振って、１の目が出たら右へ、２の目が出たら上へ、３の目が出たら左へ、４の目が出たら下へ一つ進むものとする。このすごろくではマスは整数の組 (i,j) で表され、マスの n 手目の位置を $X_n = (U_n, V_n)$ で表すと、

$$P(X_n = y | X_{n-1} = y) = p_{x,y}$$

$$p_{x.y} = \begin{cases} 1/4 & y - x = (1,0), (0,1), (-1,0) \text{ または } (0,-1) \\ 0 & \text{上記以外} \end{cases}$$

となる。今、 $|i| = 4$ または $|j| = 4$ となるようなマス (i,j) の全体を A で表し、駒が A に止まる最初の時刻を σ で表す。則ち

$$\sigma = \min\{n \geq 0; X_n \in A\}$$

(i,j), $|i| \leq 3$ かつ $|j| \leq 3$, となるマス全体を B と表し、 $A \cup B$ のどのマスも出発点（振り出し）となりうると考える。n 手目（時刻 n ）の位置を X_n で表すことにする。A の上で定義された関数 f とし、

$$u(x) = E[f(X_\sigma)|X_0 = x], \qquad x \in A \cup B$$

とおくと、$x \in B$ であれば

$$u(x) = \sum_{y \in A \cup B} E[f(X_\sigma)|X_1 = y, X_0 = x] P(X_1 = y | X_0 = x)$$

$$= \sum_{y \in A \cup B} p_{x,y} E[f(X_\sigma)|X_1 = y] = \sum_{y \in A \cup B} p_{x,y} u(y)$$

となるので、

$$u(i,j) = \frac{1}{4}(u(i+1,j) + u(i,j+1) + u(i-1,j) + u(i,j-1)), \qquad (i,j) \in B$$

$$u(i,j) = f(i,j), \qquad (i,j) \in A$$

が成り立つ。則ち u は「５．サイ投げで一次方程式が解けるか」の方程式の解である。では、 $u(1,1)$ はどのように求めればよいか。

11 ランダムウォーク、確率差分方程式

１番２番、二つのすごろく盤を用意する。どちらも実直線であるが、１番のすごろく盤では整数の点をマスと考える。２番のすごろく盤では実数の任意の点をマスと考える。いま、硬貨をさいころと考え、硬貨を投げると 1/2 の確率で裏表が出る。１番のすごろくでは 0 を出発点 (振り出し) として表が出れば正の方向へ一マス進み、裏が出れば負の方向へ一マス進むことにする。２番のすごろくのルールは以下のように決める。まず、正数の値をとる実数上定義された関数 $r(x)$ と $\ell(x)$ を用意する。出発点を x_0 として、n 手目に x のマスにいる時、硬貨を投げて表が出れば $x+r(x)$ のマスに進み、裏が出たら $x-\ell(x)$ のマスへ進むことにする。

さて、１番のすごろくと２番のすごろくを同時に行うことにする。つまり、硬貨を１回投げるたびにすごろくの規則に従って、１番のすごろくの駒と、２番のすごろくの駒を共に動かすことにする。ξ_n を n 回目に振った硬貨が表の時は 1 裏の時は -1 と定める。１番のすごろくの駒が n 手目にいる駒の場所を W_n ２番のすごろくの駒が n 手目にいる駒の場所を X_n とし、$a(x)=(r(x)+\ell(x))/2, b(x)=(r(x)-\ell(x))/2$ とおくと $X_0=x_0$ であり

$$W_n-W_{n-1}=\xi_n, \qquad X_n-X_{n-1}=a(X_{n-1})\xi_n+b(X_{n-1}), \qquad n=1,2,\ldots$$

よって

$$X_n-X_{n-1}=a(X_{n-1})(W_n-W_{n-1})+b(X_{n-1}), \qquad n=1,2,\ldots \tag{4}$$

となることがわかる。今は、さいころにより X_n, W_n を決めていったが、式 (4) を見ると、 $\{W_n\}_{n=1}^{\infty}$ という１番のすごろくの駒の動きの履歴を知れば、それより２番のすごろくの駒の動きが定まることがわかる。１番のすごろくでは駒はランダムウォークという単純な動きであるが、それから２番のすごろくのような、より複雑な動きを作り出すことができる。

12　ブラウン運動、確率微分方程式

今までのすごろく方式では時間パラメータが連続でしかも連続的に複雑に動くようなものは記述できない。ではどうすればよいのか。実は前章で述べたことがそのヒントを与えてくれる。連続的に変化するものでもっとも単純なものはおそらくランダムウォーク $\{W_n\}_{n=0}^{\infty}$ を一般化し時間を連続にしたものであろう。そのようなもの $\{B_t\}_{t\geq 0}$ をブラウン運動と呼ぶ。前章では

$$W_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$$

であったので、何か独立な確率変数 $\{\eta_t\}_{t\geq 0}$ をとり

$$B_t = \int_0^t \eta_s ds$$

と置けばよさそうなものだが、これではうまくいかない。Paul Levy という人は

$$B_t = \int_0^t \eta_s \sqrt{ds}$$

と置けばよいと主張したが、$\sqrt{ds}$ に意味をつけることはできないので、これも失敗であった。

N.Wiener は１９２３年に初めて確率過程としてのブラウン運動を数学的に定義し存在を証明した。N.Wiener の結果を見ると、ブラウン運動の定義には集合論、測度論、関数解析の基礎が必要であることがわかり、１９２０年以前には数学的道具がととのっておらずたぶん不可能であった。

式 (4) の発想によりブラウン運動からもっと複雑なものを確率微分方程式

$$dX_t = a(X_t)dB_t + b(X_t)dt$$

を用いて構成するということは伊藤清により１９４２年に初めて行われた。この方程式に厳密な意味づけを与えるにはさらに複雑な数学を必要とする。

確率微分方程式が誕生してもうすぐ６０年となるが今日では物理学、化学、生物学、工学、経済学などの多くの分野で用いられている。

（くすおかしげお，東京大学大学院数理科学研究科）