ピタゴラスの定理と宇宙のかたち

砂田利一

「宇宙という書物は，数学の言葉で書かれている」－ガリレオ・ガリレイ－

1　はじめに

幾何学とは何かを話すとき，私はいつも次の文章を引用することにしています．

「ではみなさんは，そういうふうに川だと言われたり，乳の流れたあとだと言われていた，このぼんやりと白いものがほんとうは何かご承知ですか 」

この文章が，どの小説から引用されているかご存知ですね．そうです．ジョバンニとカムパネルラの友情と悲しい別れを書いた，宮沢賢治 (1896-1933) の「銀河鉄道の夜」の冒頭部分です．先生が，空一杯に広がる天の川のことを，ジョバンニとカムパネルラたち生徒に説明しようとしているところなのです．

都会では，天の川を見る機会は滅多にありませんが，人里はなれた山の中では，夜になるとまさに無数にあると思えるような星のきらめきを見ることができます．そして，その星空を眺めていると，宇宙のことを考えるようになります．たとえば「宇宙は，どこまでも無限に続いているのだろうか」,「宇宙は，どんな形をしているのだろうか」という問が自然と沸きおこります．そこで，私も「ではみなさんは，そういうふうに宇宙と言われたり，空間と言われたりする，この目の前に広がるものがほんとうは何かご承知ですか」ということを問いかけて，話を始めたいと思います．

2　幾何学と宇宙

これからお話するのは,「宇宙の形」をどのように考え，いかにして研究するかということです．

皆さんは，こう言うと，数学の話ではなく，天文学の話と思うかもしれません．それに,「幾何学って，三角形や円の性質を調べることなのだから，宇宙なんて関係がない」，そう思うでしょう．でも，それは違います．幾何学を学ぶことは，実は宇宙を調べることと直

藤岡市「おもしろ数学教室」(1998 年 9 月 28 日）および湘南国際村「市民講演会」(1998 年 12 月 26 日）における講演

接・間接に結びついているのです．なぜなら,「もの」の「形」を研究するのが幾何学だからなのです．でも

「宇宙の形?　どんな意味なのだろう?」

こういう質問が，当然出ると思います．図形の「形」というのなら分かるけど，宇宙の「形」と言っても，どう考えればよいのか分からない．それは，当然です．宇宙の「形」の意味がはっきりと分かったのは，そんなに昔ではないのです．

宇宙の「形」についてお話する前に，地球や太陽系の話をしましょう．大昔の人は，我々の住む地球を,「平ら」なものと思っていました．地球が「平ら」でないことは，現在では人工衛星から写した写真を見て理解されますね．でも，昔の人は，周りに広がる地面の様子から，地面はずっと平らに続いているものと思っていました．しかし，2000 年以上前に，地球は「丸い」ことを推測し，その半径を計ろうとした人がいるのです．それは，エラトステネス (紀元前 275-194) という，エジプトの科学者です．彼の考え方は，次のような観測に基づいています．

「ナイル河畔のシエネ (アスワン) において，夏至の正午になると太陽の光が井戸の底まで 届くという．同じ時刻にアレキサンドリアでは地面に立てた棒に影ができて，棒と太陽光線のなす角が 7.2 度であることが計測された．一方，シエネとアレキサンドリアの距離は，ラクダの隊商がその間を旅するのにかかる日数と旅行速度から 925 km と見積もった。もしシエネが北回帰線上にあり，しかもアレキサンドリアとシエネが同一子午線にあるとすれば，子午線の全長はいくらか」

エラトステネスは、次のような前提をおいて答えを出しました．

前提　太陽からの光りは，地球に平行に差し込む．そして，地球は完全な球体である．

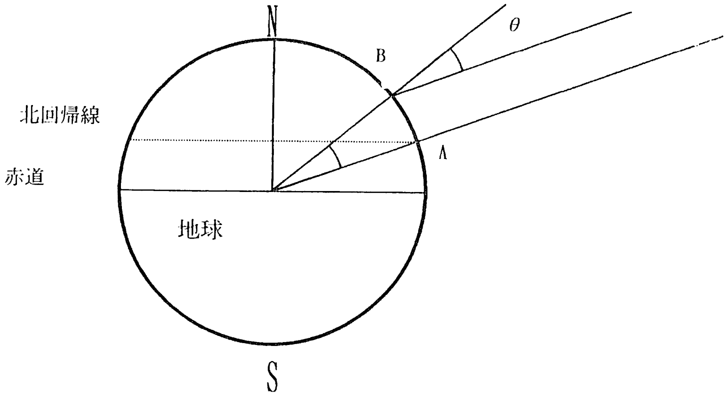


図　1

夏至ということと，シエネが北回帰線上にあることから，シエネでは太陽が真上から差し込むわけです．またシエネとアレキサンドリアが同じ子午線上にあることから，上のような図を考えればよいことになります．この図において，

$$A = \text{シエネ (アスワン)}, \qquad B = \text{アレキサンドリア},$$

$$\theta = 7.2\,\text{度}, \qquad \text{弧}\,AB = 925\text{km}$$

とします．すると，平行線の同位角は等しいことから，$\angle AOB = 7.2$ 度となります．7.2 度は 360 度の 50 分の 1 です．よって

答　925 km ×50 =46250km

これは，現在知られている値と 16% しか違いません．

さらに，古代ギリシャでは，地球ばかりでなく，宇宙のことに目を向けた科学者も登場しました．アリスタルコス (紀元前 310-230) がその人です．彼は，次のような観測から，

$$\frac{\text{地球から太陽までの距離}}{\text{地球から月までの距離}}$$

を求めようと考えたのです．

「あるとき，月と太陽が同時に見え，月の見える方向と太陽の見える方向のなす角が 87 度であった．しかも月は半月の状態であった」

アリスタルコスは，次のように考えました．

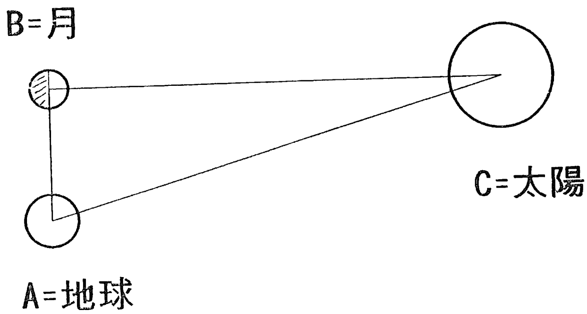


図　2

上の図から，三角形 ABC は直角三角形であり，

$$\angle B = 90 \text{ 度}, \qquad \angle A = 87 \text{ 度}$$

となっています．地面の上に，三角形 ABC と「相似」な三角形 $A'B'C'$ を書きます．

$$\angle B' = 90 \text{ 度}, \quad \angle A' = 87 \text{ 度},$$

$A'B' = 50\text{cm}$ とすると，$A'C' = 1400\text{cm}$ となりますから，相似三角形の性質から次の答えを得ます．

答

$$\frac{AC}{AB} = \frac{A'C'}{A'B'} = \frac{1400}{50} = 28.$$

実際は $\angle A = 89$ 度 51 分で，答えは約 400 倍です．アリスタルコスの求めた値は，現在知られている値と相当異なりますが，考え方は合理的です．

さて，今の 2 つの話で，幾何学が使われていること (平行線の同位角，相似三角形の性質) に注意してください．幾何学は，紙や地面の上に書かれた三角形や円の性質を調べるだけではなく，もっと大きな世界の性質を調べるのに使えるのです．

3　ピタゴラスの定理

最初の問題に戻りましょう．地球が平らであるかどうかという問いに対応して

「宇宙は，どこまでいっても果てのない，真っすぐで平らなものなのだろうか?」

という問題を考えます．ここで,「真っ直ぐで平ら」というのは，どう言う意味でしょうか．また，宇宙が平らではないとしたら，それはどういうことを意味しているのでしょうか．地球と違って，宇宙の「外」に出て，宇宙を眺めることは不可能です．ではどのようにして，宇宙の形を知ることができるのでしょうか．

現代の「幾何学」は，この問題に答えるための「道具」を与えています．幾何学は，エラトステネスやアリスタルコスの時代に比べて，長足の進歩を遂げています．それを使って，上の疑問に答えようと思うのです．

ここで，幾何学の歴史について復習してみましょう.「幾何学」の言葉の意味は、

$$\begin{aligned}
\text{幾何学} &= \mathit{Geometry} \quad (\text{英語}) \\
&= \mathit{Geometria} \quad (\text{ギリシャ語}) \\
geo &= \text{土地} \\
metria &= \text{測る}
\end{aligned}$$

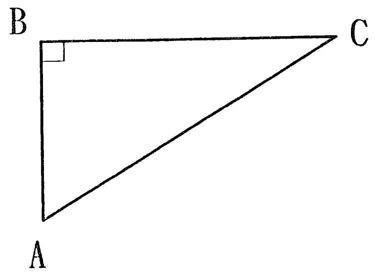
から来ています．幾何学は，バビロニア，エジプト，中国で，測量技術として発展しました．図形の性質は，実生活に密接な「経験的知識」として，蓄積されていたのです．そして，ギリシャにおいて,「経験的知識」から「理論的体系」にまとめられました．それは、ギリシャの奇跡と言って過言でないほど，人間の精神的営みの発展において，大きな位置を占めています．

ほとんど伝説上のことなのですが，ターレス（紀元前 624-546 頃）という人が現れて，エジプトの神官から数学を学び，その知識を元に幾何学の体系的な構成を初めて試みたと言われています．この体系の中で重要な役割を果たすのが,「論証」というものです．図形の様々な性質は，実はいくつかの簡単な性質に帰着され，逆に簡単な事柄から，図形についての複雑な性質を導くことができることにターレスは気づいたのです．このような考え方は，幾何学ばかりでなく，広く科学に影響を与えました．それで，ターレスは「科学の父」と称されているのです．伝説によると,「相似」の考え方を用いて，ピラミッドの高さを，その影の長さから計ったと言われています．これが事実とすると，エラトステネス，アリスタルコスの考え方の先駆けと言えるでしょう．

ターレスに続いて，ピタゴラス（紀元前 572-492 頃）と彼の学派が数学の発展に寄与しました．数学は英語で Mathematics と言いますが，この言葉はピタゴラスの時代に生まれました．ギリシャ語では mathematike となりますが，これは幾何学と算術を意味しています．現代では，これらと解析学を合わせたものが数学です．

さて，ピタゴラスといえば，次の有名な定理があります．

ピタゴラスの定理（三平方の定理）



$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

図　3

ピタゴラスの定理は，古代文明で「経験的」に知られていました．測量などで必要になる直角を手早く作る方法だったのです (たとえば，辺の長さが 3 : 4 : 5 の三角形は直角三角形になることは，よく知られていました)．前にも述べたように,「経験」から「理論」への代表的な例がピタゴラスの定理です.

ピタゴラスの定理には多くの証明が知られています．ここでは代表的な 2 つの証明を説明しましょう.

ピタゴラスの定理の証明　頂点 B から辺 AC に垂線 BD を下ろします.

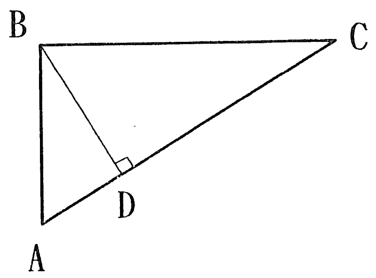


図　4

$\triangle ABD$ と $\triangle ACB$ は相似．よって

$$\frac{AB}{CD} = \frac{AD}{AB}, \quad AB^2 = AC \cdot AD$$

$\triangle BCD$ と $\triangle ACB$ は相似．よって

$$\frac{BC}{AC} = \frac{DC}{BC}, \quad BC^2 = AC \cdot DC.$$

こうして

$$AB^2 + BC^2 = AC \cdot AD + AC \cdot DC = AC(AD + DC) = AC \cdot AC = AC^2$$

を得ます．

別証明　これは面積を使った証明です．次のような，正方形の分割を考えます

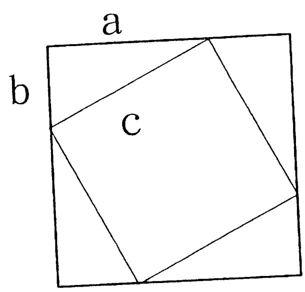


図　5

正方形の面積を二通りに計算して

$$\text{正方形の面積} = (a+b)^2 = c^2 + 4 \cdot \frac{1}{2}ab = c^2 + 2ab$$

を得ます．一方，

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

ですから，

$$c^2 + 2ab = a^2 + 2ab + b^2.$$

よって，

$$a^2 + b^2 = c^2$$

となります．

4　平行線の公理

ピタゴラスの定理の証明に使った「相似」や「面積」の考え方の背景にあるもの，それは「平行線」の性質です．

「与えられた直線 ℓ と，その上にはない点 p に対して，p を通り ℓ に平行な直線はただ 1 つしか存在しない」

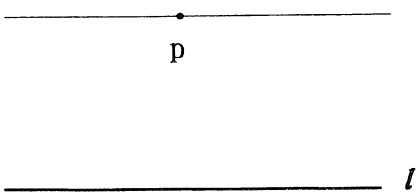


図　6

この平行線の性質は，ユークリッド原論の中で述べられている幾何学の公理の１つであり，線分の比例を考えるのに，この性質が本質的な役割を果たしています．したがって，図形の相似について論じるためにも，この平行線の性質が必要なのです．

ユークリッドは，紀元前330-275頃に生存していたプラトン学派の数学者です．彼の書いたと言われる原論（$\Sigma\tau\iota\chi\epsilon\iota\alpha$；ストイケイア）は，13巻からなる幾何学の本ですが，それはユークリッド以前に知られていた定理をまとめ，それまであいまいに証明されていた多くの定理を完全にしたと言われています．原論の内容は極めて完成度が高く，そのスタイルは後まで影響を与えました（スピノザ，ニュートン）．現在，中学校で学ぶ幾何学は，ユークリッド原論に書いてある幾何学に基づいています．

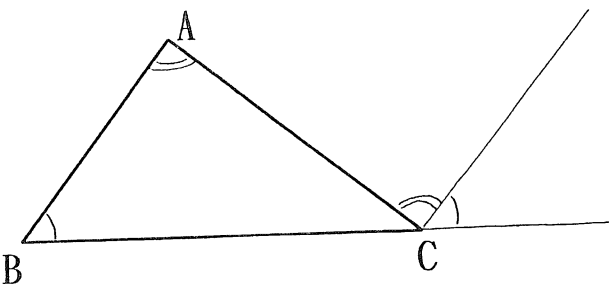
原論の際立った点は，ターレスの考え方を推し進め，誰もが認めるいくつかの事実を大前提（公理）として最初に置き，それから論証を行うことにより，様々な図形の性質（定理）を導いていくことでした．たとえば,「異なる２点を通る直線がただ１つある」や上で述べた平行線の性質が公理です．エラトステネスが使った「平行線の同位角は等しい」ことや，アリスタルコスの使った相似三角形の性質は，このような公理から得られる定理なのです．

ユークリッドの公理は，我々の前に広がる空間の直観的理解から纏められたものでした．逆に言えば，この空間の性質を調べるのに，これらの公理を大前提として仮定しているのです．

さて，宇宙空間が「平ら」ということは，幾何学的にはどのようなことなのでしょうか．実は,「平ら」であるということは，平行線の公理が成り立つことと同じなのです．このことが，はっきりと認識されたのは19世紀になってからなのですが，詳しいことは後で述べることにします．

後で必要になる，平行線の性質から導かれる定理を述べておきましょう．

定理１　三角形の内角の和は２直角



$\angle A + \angle B + \angle C = 180$ 度

図　7

証明は，皆さんもご存知の方法です（図７参照）．

5　空間の曲がり方

前に述べた問題を繰り返します.

「宇宙が平らであることは，本当に正しいか？」

前節で述べたように，これは「我々のいる世界（宇宙）は，平行線の性質が成り立つ世界か ？」を問うているのです．19 世紀になるまで，これを問題にする人はありませんでした．その理由は，哲学者カントに代表されるように，我々の目の前にある空間の直観的呪縛から逃れられなかったからです．一方，このような呪縛は,「平行線の性質は，幾何学の他の公理から証明できる」はずだという確信を，多くの数学者に与えたのです．その背景には，ユークリッドが原論で述べている平行線の公理が，他の公理に比べて複雑であることがありました（前節で述べた平行線の性質は，元のユークリッドの公理を言い換えたものです）．そして，平行線の公理を証明しようとする努力が 2000 年以上，たくさんの数学者により成されたのです．その中で，いくつか有名な人たちの名前を挙げておきます.

ポシドニウス（前 1 世紀）

プトレミー（前 1 世紀）

シンプリシウス（6 世紀）

ナサル-エディン（1201-1274）

ヴィタエ（1633-1711）

ウォリス（1616-1703）

サッケリ（1667-1703）

彼らの努力はむなしく終わりました．ここで，世界最大の数学者と言われるガウス（1777-1855）が登場します． 彼こそ，宇宙が「平ら」であることに，初めて疑いを持った数学者なのです．ガウスは，宇宙に大きな三角形を描いて，その内角の和を調べることを提案しました．もし，それが 180 度に ならなければ，我々の宇宙では平行線の性質が成り立たないことになります．さらに，ガウスは，平行線の性質が成り立たない空間を調べる方法まで示唆したのです．その方法とは，曲面の幾何学という新しい幾何学です．ガウスは，この方法を曲面の形の研究に適用しました.

曲面の幾何学について説明したいのですが，数学的準備が必要となるので，ここでは球面に話を限定してお話しすることにします.

半径 r の球面を考えましょう．平面における直線や三角形の類似を，球面においても考えることができます．平面では，直線はその上の 2 点を結ぶ最短線であることを思い出しましょう．球面の 2 点を結ぶ最短線は，大円弧です．ここで，大円とは，球の中心を通る平面による切り口に他なりません（東京・ロンドン間の直行便が最短のコースを取ろうとすると，それは東京とロンドンを通る大円です）．そして，球面上の三角形は，3 つの大円弧で囲まれる図形を指します.

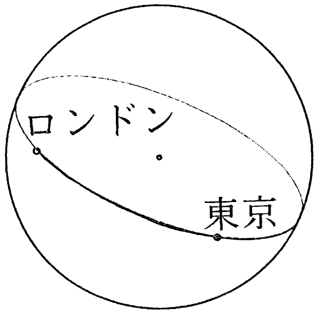


図 8

定理 2　球面上の三角形の内角の和は 2 直角より大きい．もっと詳しくは，球面上の三角形 ABC に対して

$$\frac{(\angle A + \angle B + \angle C) - \pi}{\text{三角形の表面積}} = (\text{球面の半径})^{-2}$$

が成り立つ．ここで，角度はラジアンで表します (すなわち，半径 1 の円周角を考え，その弧の長さで角度を計るのです．従って 4 直角は 2π，２直角は π となります）．

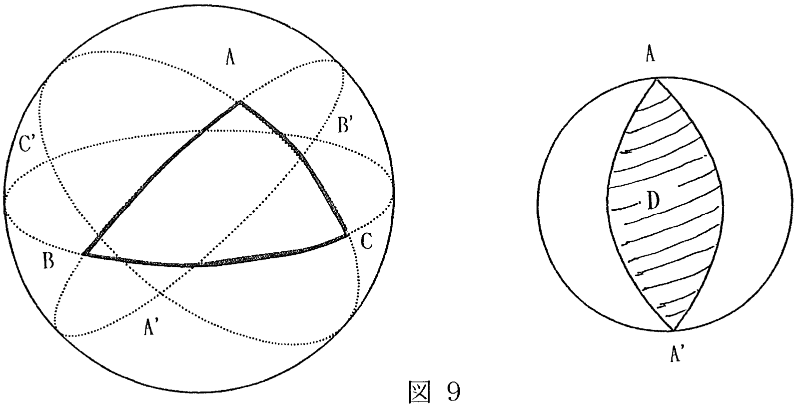


図 9

証明は，次のように行われます．まず，西瓜の皮のような図形 D の表面積を求めましょう．半径 r の球面の表面積は $4\pi r^2$ ですから，D が球面全体の $\angle A/2\pi$ の部分を占めていることに注意して，

$$D \text{ の表面積} = \frac{\angle A}{2\pi} \times 4\pi r^2 = \angle 2A \times r^2$$

となります．$\triangle ABC$ と $\triangle AB'C$，$\triangle ABC$ と $\triangle ABC'$，$\triangle A'B'C'$ と $\triangle AB'C'$ を合わせると，それぞれ西瓜の形になりますから，

$$(\triangle ABC \text{ の表面積}) + (\triangle AB'C \text{ の表面積}) = 2\angle B \times r^2 \qquad (1)$$

$$(\triangle ABC \text{ の表面積}) + (\triangle ABC' \text{ の表面積}) = 2\angle C \times r^2 \qquad (2)$$

$$(\triangle A'B'C' \text{ の表面積}) + (\triangle AB'C' \text{ の表面積}) = 2\angle A \times r^2 \qquad (3)$$

が成り立ちます．次のことに注意しましょう．

$$(\triangle A'B'C' \text{の表面積}) = (\triangle ABC \text{ の表面積}). \tag{4}$$

さらに

$$\begin{aligned} & (\triangle ABC \text{ の表面積}) + (\triangle AB'C \text{ の表面積}) \\ & +(\triangle ABC' \text{の表面積}) + (\triangle AB'C' \text{の表面積}) \\ = \ & \text{半球の表面積} \\ = \ & 2\pi r^2 \end{aligned}$$

となります．(4) を (3) に代入し，(1),(2),(3) の和を取って，上式を使えば

$$2(\triangle ABC \text{ の表面積}) + 2\pi r^2 = 2(\angle A + \angle B + \angle C)r^2$$

となりますから

$$(\triangle ABC \text{ の表面積})r^{-2} = (\angle A + \angle B + \angle C) - \pi$$

を得ます．これは定理 2 の主張にほかなりません．

さて，球面の半径を大きくすると，球面は大きくなっていきますが，球面上の小さい部分に注目すると，どんどん平らになっていきます．すなわち、球面の各点の周りでの「曲がり具合」が少なくなるのです．こう思うと，

$$\frac{(\angle A + \angle B + \angle C) - \pi}{\text{三角形の表面積}}$$

は「曲がり具合」の程度を表す量と考えることができます．このような量を「曲率」と言います．定理 1 は平面の曲率が零であることを意味しています．

もっと一般の曲がった図形（曲面）に対しても，このような考え方を一般化して、曲率を定義することができます．このため，直線や大円の一般化として，測地線というものを考えます．測地線とは，その上の十分近い点を取ると，その 2 点を結ぶ曲線の中で最短線となっているような曲線です．そこで，

$$\text{直線} = \text{測地線} \tag{5}$$

$$\text{三角形} = \text{測地線を辺とする三角形} \tag{6}$$

と思うことにしましょう．そして，点 p における曲率は，点 p を内部に含む小さい三角形 ABC を取って

$$\frac{(\angle A + \angle B + \angle C) - \pi}{\text{三角形の表面積}}$$

として定義するのです（正確には、三角形を p に近づけたときの極限を考えます）．

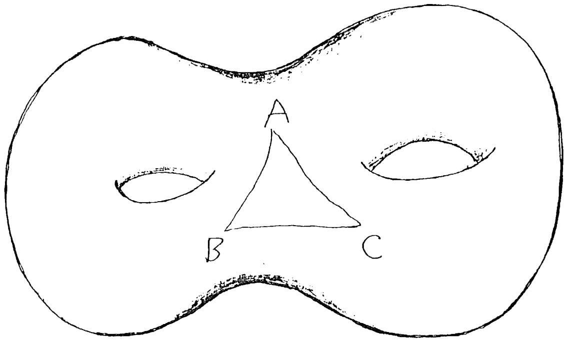


図 10

この曲率は，曲面の外から曲面を眺めることなしに，曲面の上の「世界」の言葉で定義される量であることに注意してください．このことは，我々の宇宙空間の「曲がり方」を議論するとき，宇宙空間の外に出なくてもよいことを示唆しています．

さて，空間が曲がっているかどうかを調べるガウスの試みはどうなったのでしょうか．宇宙はあまりにも大きく，地球上で大きな三角形を作って見ても，宇宙の規模に比べれば小さすぎるのです．ですから，三角形の内角の和を測量しても誤差を無視することができず，曲がっているかどうかは確認できませんでした．

6 非ユークリッド幾何学

平面は，曲率が零であり，球面は曲率が正であるような曲面でした．当然，曲率が負になるような曲面も存在します．

図 11

この曲面は，空間の中に実現されていますが，もっと抽象的に負の曲率をもつ面を作ることができます．このため，半径が 1 の円の内部 D を考えます．D の中の「直線」は，円周と直角に交わる円弧と規定し，2 つの「直線」のなす角は円弧のなす角として定義します．

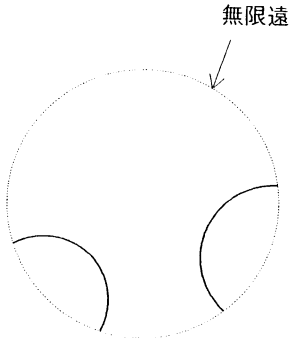


図　1 2

すると，この D は，負の曲率を持つことが分かります．実は，このような負の曲率を持つ面の存在は，前に述べた平行線の性質を証明する努力が無駄であること，すなわち，平行線の性質は幾何学の他の公理からは証明できないことを意味しているのです．なぜでしょうか．

たとえば，公理「２点を通る直線はただ１つ存在する」は,「D の内部の２点を通り，円周と直角に交わる円弧は唯１つ存在する」ので，確かに満たされます．さらに，平行線の公理以外のすべての公理を満たすことも，円の幾何学を使って確かめられます．しかし，平行線の公理に対応することは成り立ちません．実際，与えられた点を通り，与えられた「直線」に交わらない「直線」が無限個存在するからです．

でも,「直線」と言っても，本当の直線ではないのだから，これで平行線の性質が他の公理からは証明できないことを意味しているとは思えない．そう言う人もいるでしょう．しかし，幾何学の「論証」についてよく反省してみると，点や直線と言っても，それらが絵に描くような点や直線であることはまったく必要はないことが分かります．実際には，公理で規定された点と直線の間の関係のみを使って「論証」を行っているのです．よく考えてみると，点や直線をそれぞれ独立に「定義」することはできないのです．ユークリッドの原論には,「点とは部分をもたないものである」,「線とは幅のない長さであり，直線とはその上にある点について一様に横たわる線である」と書いていますが，これらは「雰囲気」を伝えるだけのものであって，ユークリッドもこのような定義を使って「論証」を進めているのではないのです．

平行線の公理を満たさない幾何学は，最初にガウスが気づき，ついでボヤイ，ロバチェフスキにより，独立に発見されました．このような幾何学は，非ユークリッド幾何学とよばれます．

7　現代幾何学と宇宙

ガウスの考えを引き継ぎ，さらに大きく発展させた数学者がリーマン（1826-1866）です．リーマンは，曲面を一般化した「曲がった」空間の幾何学（微分幾何学）を提唱しました．それは「n-次元」の空間，すなわち，n-個の方向に広がった空間を扱う幾何学です．平面，

球面あるいはもっと一般の曲面は2-方向に広がっていますから２次元であり，宇宙空間は3-方向に広がっていますから，３次元なのです．さて，リーマンの考えたn-次元空間は，微小な部分に限れば，ほとんど真っ直ぐで平らな空間です．それをもっと正確に言うと，「無限小」な部分では，ピタゴラスの定理が成り立つ空間なのです．

ピタゴラスの定理は，座標を使うと次のように言い表されます．

「２点 $P=(x_1,y_1)$，$Q=(x_2,y_2)$ の距離を Δs とすると

$$(\Delta s)^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$$

が成り立つ」

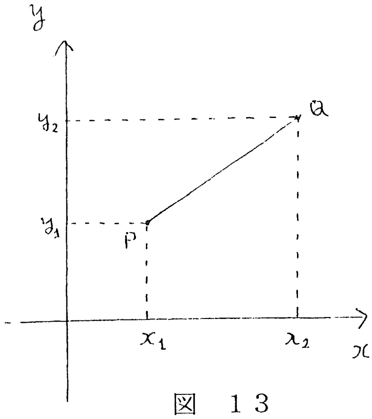


図　１３

$\Delta x=x_2-x_1, \Delta y=y_2-y_1$ とおくと，

$$(\Delta s)^2=(\Delta x)^2+(\Delta y)^2$$

となります．もっと一般の座標（斜交座標）では，

$$(\Delta s)^2=a(\Delta x)^2+2b(\Delta x)(\Delta y)+c(\Delta y)^2 \qquad (b^2-ac<0)$$

と表されます．「無限小」な部分でピタゴラスの定理が成り立つというのは，$\Delta s, \Delta x, \Delta y$ をそれぞれ無限小な量 ds, dx, dy にしたとき，

$$ds^2=adx^2+2b\cdot dxdy+cdy^2$$

が成り立つと言うことなのです．

「曲がった」n-次元空間の数学的モデルは，リーマン多様体とよばれています．この空間の各点の周りでは，座標系 $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ が取れて，無限小な部分でのピタゴラスの定理は

$$ds^2=\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}dx_idx_j$$

と表されます．ここで g_{ij} は $x_1,x_2,\ldots,x_n$ の関数です．空間の「形」は，g_{ij} により完全に決まるのです．

このような一般化された空間でも曲率を定義することができます．この曲率は，空間を「外」から眺めることなしに定義できるのです．言いかえれば，この宇宙の「形」を，宇宙の「外」から見ることなしに，論ずることができることになります．そして，曲面との類推から，

(1) 曲率が至る所「正」の空間は，球面のように曲がっている，

(2) 曲率が至る所「零」の空間は，平面のように「平ら」で，ユークリッド幾何学が成立する，

(3) 曲率が至る所「負」の空間は，非ユークリッド幾何学が成立する

と考えることができます．

リーマン幾何学は，リーマンの後，レヴィ・チビタにより整理拡充され，20 世紀の幾何学に引き継がれました．古代ギリシャで考察された図形が，三角形や円であるように，現代幾何学が扱う図形は多様体なのです．

宇宙を論じるための幾何学は，こうして整備されました．ここで，次のような問題が生じます．

問 題 1 我々の宇宙空間の曲率は，「正」，「零」，「負」のいずれか？

問 題 2 我々の宇宙空間は，球面のように「閉じた」空間か？

問 題 3 我々の宇宙空間は，「裏表」のある空間か？

これらの問題に，まだ解答はありません．数学の問題と言うより，むしろ物理の問題と言えるでしょう．問題２，３の意味は，ここでは説明できません．別の機会に譲りたいと思います．

最後にいくつか注意を述べましょう．

(1) これまで，我々は空間の曲がり方のみを考察してきました．アインシュタインの相対性理論によると，実は空間と時間を合わせた時空宇宙というものが「曲がって」いる可能性があります．実際，宇宙の大域的な性質を論ずるときは，時空宇宙を考察すべきです．

(2) 宇宙の「形」を決める方程式があります．それは，アインシュタインの方程式とよばれ，

$$R_{ij} - g_{ij}R/2 = \kappa T_{ij}$$

により与えられます．ここで，R_{ij} や R は曲率に関連する量です．宇宙の形は，計量テンソルとよばれる g_{ij} により決まりますが，曲率はこの g_{ij} たちの微分で書けますから，アインシュタインの方程式は g_{ij} に関する（微分）方程式なのです．

8 まとめ

古代ギリシャで花開いた幾何学は，一見，紙の上に書かれた三角形や円などの性質を調べるだけの学問に見えます．しかし，その背景には，我々の周りに広がる空間を，どう理

解するかと言う根源的な問題があるのです．実際，平行線の性質を公理として置くことは，宇宙が「平ら」であるとの認識に結びついているのです．もちろん，当時は「曲がった」空間の考えはまったくありませんでしたから，平行線の性質と空間の平坦性を関連させてはいませんでした．しかし，2000 年の後，平行線の性質の意味が明確になり，彼等がいかに大事なものを捉えていたのかが改めて分かったのです．初等幾何学は，決してかび臭いものではありません．幾何学を学ぶとき，紙の上に書かれた図形から，皆さんは宇宙を見ているのです．また，学校で学ぶ幾何学は，現代幾何学で扱われる概念の源泉となっているのです．このことを理解していただければ，この講演の目的は達せられたと言えるでしょう．

参考文献

[1] 中村幸四郎，寺坂英孝，伊藤俊太郎，池田美恵（訳・解説）「ユークリッド原論」（縮刷版），共立出版，1996 年

[2] 砂田利一 「幾何入門 1，2」，岩波講座「現代数学への入門」，1997 年

[3] 砂田利一 「曲面の幾何」，岩波講座「現代数学への入門」，1997 年

（すなだ としかず，東北大学大学院・理学研究科・数学専攻）