数え上げのいろは

日比孝之

昨今，多数の大学が趣向を凝らした公開講座を開催し，開かれた大学の姿（イメージ）が世間に定着しつつある．数学教室が主催する公開講座に限っても，その趣旨は千差万別で個々の教室の特質が色濃く反映されている．大阪大学では高校生対象の公開講座――現代数学への冒険――を毎年夏休みに開催しているが，本稿は当該公開講座における筆者の講演「現代の数え上げ数学」の草稿に加筆を施したものである．例年，参加者の大多数は高校1年生と2年生であるが，現在の高校数学のカリキュラムでは「個数の処理」が従来よりも重んじられ，順列・組合せと数列の計算等を高校1年生の早い段階で習得するため，公開講座で数え上げの話をするには誠に好都合な条件が揃っている．但し，高校数学のカリキュラムに「個数の処理」を現行の形態で組み込む是非については議論の余地があると言えるであろう．本稿の話は概ね拙書［6］の第1編（1～19ページ）に沿っているが，高校生対象の公開講座での講演草稿という雰囲気が随所に漂うように配慮した．

公開講座の果たす役割については賛否両論の多様な見解が聞かれるが，よしんば細やかなれど，公開講座は子供の数学離れに歯止めをかけるために貢献をしている．高等学校で数学を学ぶときには，履修事項を受験数学の技巧（テクニック）として消化しなければならないという脅迫観念に縛られる．そのような現実の反面，公開講座に参加した高校生のアンケートを読んで感じることは，参加の動機として数学者が語る数学の雰囲気が朧気ながらも感じることができればと思い参加した，という動機が断然多いことである．そのような動機で参加すると，いささかなりとも興味を誘う定理に遭遇すると，「なるほど面白い！」と素直に思える．こんな難問が入学試験問題に出題されては困る，と恐怖を抱くのではなく，こんな難問がこんな素晴しい着想で解けるのか，と感銘を覚える．そのような感動が冷め止まぬうちに類似の問題を出題すると，「ひょっとしたら自分で解けるかも知れないから頑張ってちょっとやってみよう！」と試行錯誤をする元気が湧いてく

る.「ちょっとやってみよう！」と思う気持ちを子供に持たせ子供の好奇心を刺激することが数学教育の永遠不滅の根本原理である．反面，どうやったら「ちょっとやってみよう！」と思う気持ちを子供に持たせることできるかということは数学教育における永遠不滅の難問である．我々の世代の多くは幼少の頃，鉄腕アトムのお茶の水博士や鉄人２８号の敷島博士に憧れたものだ．彼等の魅力はその独創性と柔軟性にある．今の高校生は幼少の頃から算数・数学とは「多種多様な解き方のパターンを徹底的に覚え，覚えているパターンに当て填めて問題を解く科目」という概念を持ち続けている．そのような誤解が生徒の数学離れを加速し，由々しき状況に陥っている．そのような認識を改め，独創性と柔軟性の大切さを教える場として，公開講座は貴重な機会である．

本稿の§１では二項係数$\binom{n}{q}$（高校数学の教科書では${}_n\mathrm{C}_q$）の背景をちょっと復習している．高校数学ではややもすると順列・組合せの計算問題に焦点が置かれている現状を憂慮し，前半部分では二項係数の公式$\binom{n}{q} = n!/q!(n-q)!$を意図的に避け数え上げ論法を解説することに専念し，後半部分では$\binom{n}{q}$をnについてのq次式と思うとどんな面白い現象が起きるかを論じた．予備知識としては高校数学で習う順列・組合せと数列の計算程度で十分に理解できるが，一般次元の凸多面体の概念を既知とする部分が若干含まれている．

次に，§２では「実数係数の二次方程式$ax^2 + 2bx + c = 0$が実数解を持てば不等式$b^2 - ac \geq 0$が成立する」という高校数学で習う基礎定理をn次方程式に一般化したニュートンの補題と呼ばれる結果を紹介する．高校数学の微分を習得していることを前提に話を進めているので，簡単な微分の計算と微分係数が接線の傾きであること等は知っていることが望ましい．

数え上げ理論の舞台には二項係数を筆頭に多種多様な数え上げ数が登場し，それらが複雑多岐に係り逢うことで華麗なる世界が築かれている．本稿の§３では順列の降下集合の数え上げから生起するオイラー数と呼ばれる数え上げ数について，その振る舞いが二項係数と酷似していることを披露する．数え上げ数を係数とする方程式が与えられたとき，そのすべての解が実数であることを証明する一般的な方法の一つを具体的な例を使って解説することが要である．加えて，オイラー

数が数え上げ理論で寵愛される背景を理解するために，オイラー数に関連した母函数の話を紹介する．

公開講座の講演を終えるときは「今日の話で，個数の処理，二次方程式の判別式，微分の概念という一瞥（いちべつ）では無関係とも思える高校数学の履修項目が意外なところで結び付いていることを理解して頂ければ幸いである．数え上げの話に興味を持ったならば［ 6 ］を読まれることを推薦する．総じて，昨今の数え上げ数学の際立って面白い部分は数学の様々な分野との密接な接点であって，たとえば可換代数との相互関係については［ 5 ］の序章を読むと朧気ながらにもその雰囲気を感じることができる．」という挨拶で締め括るのが筆者の習わしである．

1　二項係数

数え上げ理論では有限集合 $\{1,2,\ldots,n\}$ を$[n]$で表すのが慣習である．都合上 $n=0$ のときも考慮し$[0]$は空集合$\emptyset$ であると約束する．

$$[n]=\{1,2,\ldots,n\} \qquad (\ n \text{ は非負整数 })$$

一般に，集合 Tが集合$[n]$の部分集合であるとき $T\subset[n]$で表す．但し，空集合および$[n]$自身も$[n]$の部分集合であると約束し $T\subset[n]$は $T=[n]$ の場合を排除しない．有限集合$[n]$の部分集合 Tが$[n]$の q元部分集合であるとは，Tが q個の元から成るときに言う．空集合は$[n]$の 0 元部分集合，$[n]$自身は$[n]$の n 元部分集合である．有限集合$[n]$の q元部分集合の個数を$\binom{n}{q}$と書く．特に，任意の非負整数 n について，

$$\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1 \tag{1}$$

である．たとえば，$[5]$の 3 元部分集合は

$$\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,2,5\},\{1,3,4\},\{1,3,5\},$$

$$\{1,4,5\},\{2,3,4\},\{2,3,5\},\{2,4,5\},\{3,4,5\}$$

の１０個であるから$\binom{5}{3} = 10$となる．記号$\binom{n}{q}$は英語だと "n choose q" と読むようだ．高校数学の教科書では印刷の都合等を考慮し$\binom{n}{q}$ではなく${}_n\mathrm{C}_q$を採用している．

有限集合$[n]$のq元部分集合の個数と$(n-q)$元部分集合の個数は一致する．すると，

$$\binom{n}{q} = \binom{n}{n-q} \tag{2}$$

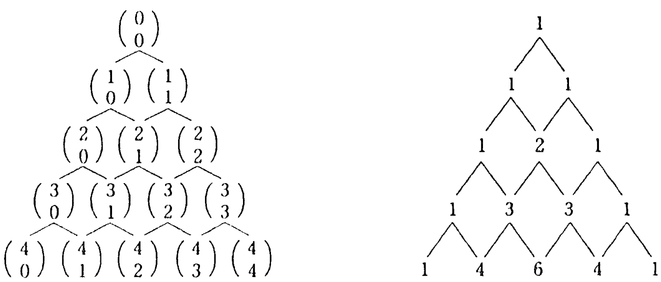
である．他方，$[n]$のq元部分集合Tで$n \in T$となるものの個数は（$[n-1]$の$(q-1)$元部分集合の個数と一致するから）$\binom{n-1}{q-1}$であり，$[n]$のq元部分集合Tで$n \notin T$となるものの個数は（$[n-1]$のq元部分集合の個数と一致するから）$\binom{n-1}{q}$である．従って，

$$\binom{n}{q} = \binom{n-1}{q-1} + \binom{n-1}{q} \tag{3}$$

が得られる．

二重数列$\binom{n}{q}_{n=0,1,2,\ldots;q=0,1,2,\ldots,n}$は初期条件(1)と漸化式(3)で決定される．

いわゆるパスカル三角形（図－１参照）の原理である．



図－１（パスカル三角形）

いま，n個の可換な変数$x_1, x_2, \ldots, x_n$を準備し，$[n]$の部分集合Tに付随する変数の積x_Tを

$$x_T = \prod_{i \in T} x_i$$

で定義する．すなわち「Tに属するiを添字とする変数x_iの積」がx_Tである．特に，Tが空集合$\emptyset$ならば$x_\emptyset = 1$である．有限集合$[n]$のすべての部分集合Tを列挙することを真似て，すべてのx_Tの和

$$\begin{aligned}&\sum_{T\subset[n]} x_T \\ = \;& x_\emptyset + x_{\{1\}} + x_{\{2\}} + \cdots + x_{\{n\}} + x_{\{1,2\}} + x_{\{1,3\}} + \cdots + x_{\{n-1,n\}} \\ &+ \cdots + x_{\{1,2,\ldots,n\}} \qquad (4)\end{aligned}$$

を計算する．式 (4) を因数分解することで等式

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n) = \sum_{T\subset[n]} x_T \qquad (5)$$

が得られる.(実際，式 (5) の左辺を展開したときに現れる各々の項は

$$\xi_1\xi_2\cdots\xi_n \qquad (\,\xi_i は 1 または x_i\,) \qquad (6)$$

であるから，$\xi_i = x_i$である$i \in [n]$の全体から成る集合をTとすると積 (6) はx_Tと一致する．) 等式 (5) において「すべてのx_iを別の変数xで置き換える」という操作を施す．この操作によってTが$[n]$のq元部分集合ならばx_Tはx^qに移る．等式 (5) の右辺にはTが$[n]$のq元部分集合となるx_Tがちょうど$\binom{n}{q}$個現れる．すると，二項展開の公式

$$(1+x)^n = \sum_{q=0}^{n} \binom{n}{q} x^q \qquad (7)$$

が従う．換言すると，多項式$(1+x)^n$を展開したときx^qの係数が$\binom{n}{q}$である．そこで$\binom{n}{q}$を二項係数と呼ぶ．多項式$(1+x)^n$をちょっと変形して

$$x^n(1+(1/x))^n = (1+x)^n$$

$$(1+x)^n = (1+x)^{n-1}(1+x)$$

とすると，公式 (7) から直ちに等式 (2) と (3) が従う．他方，等式 (7) において$x = 1$を代入すると

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n \qquad (8)$$

となる．換言すると，有限集合$[n]$の部分集合の個数は2^nである．

一般に，正の整数から成る有限数列

$$a_0, a_1, \ldots, a_n \tag{9}$$

が対称数列であるとは，$a_q = a_{n-q}$が任意の$0 \le q \le n$について成立するときに言う．他方，有限数列(9)が単峰数列（文献［4］では単峠（たんとうげ）数列と呼んだ）であるとは，適当な$(0 \le) i (\le n)$を選ぶと不等式

$$a_0 \le a_1 \le \cdots \le a_i \ge a_{i+1} \ge \cdots \ge a_n$$

が成立するときに言う．特に，単調増加数列と単調減少数列は単峰数列である．

補題 1.1　正の整数から成る有限数列(9)が不等式

$${a_q}^2 \ge a_{q-1}a_{q+1} \qquad (1 \le q < n) \tag{10}$$

を満たすならば(9)は単峰数列である．

［証明］不等式$a_0 \le a_1 \le \cdots \le a_j$が成立する最大の整数$0 \le j \le n$を選ぶ．すると，$a_j > a_{j+1}$である．他方，(10)で$q = j+1$とすると$a_j a_{j+2} \le {a_{j+1}}^2$であるから，$a_{j+2} \le {a_{j+1}}^2 / a_j < a_{j+1}$である．この操作を繰り返すと$a_j > a_{j+1} > a_{j+2} > \cdots > a_n$が得られ，有限数列(9)は単峰数列である．∎

たとえば，非負整数nを固定したとき，二項係数の数列

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n} \tag{11}$$

は対称単峰数列である．実際，対称数列であることは既に等式(2)で示した．単峰数列であることは次の命題1.2と補題1.1から従う．

命題 1.2　任意の整数$1 \le q < n$について，不等式

$$\binom{n}{q}^2 \ge \binom{n}{q-1}\binom{n}{q+1} \tag{12}$$

が成立する．

[証明] ちょっと雑談だけれど，ここでは二項係数$\binom{n}{q}$が有限集合$[n]$のq元部分集合の個数であるという定義から，直接，数え上げ論法によって(12)を証明する．後述する（高校数学で周知の）公式$\binom{n}{q}=n!/q!(n-q)!$を認めると(12)は単なる計算問題である．高校数学の「個数の処理」の章では，兎角（とかく）公式$\binom{n}{q}=n!/q!(n-q)!$の計算練習に焦点が置かれ，数え上げの着想と論法を習得するゆとりはないようだ．そんな訳で，今から始める証明は数え上げ論法による証明のお手本であるから（いささか苦痛であっても）高校生諸君とともに高校教育に携わる現場の諸先生にもじっくりと読んで貰えることを願っている．

有限集合$[n]$のq元部分集合の全体をS_qと置き，有限集合$\mathcal{M}$と$\mathcal{N}$を

$$\mathcal{M}=\{(A,B)\,;\,A\in S_{q-1},B\in S_{q+1}\},\ \mathcal{N}=\{(C,D)\,;\,C,D\in S_q\}$$

と定義する．このとき，$\mathcal{M}$に属する元の個数は$\binom{n}{q-1}\binom{n}{q+1}$個，$\mathcal{N}$に属する元の個数は$\binom{n}{q}^2$個である．すると，不等式(12)を示すためには，写像$\psi:\mathcal{M}\to\mathcal{N}$で単射であるものを構成すればよい．部分集合$X\subset[n]$と$1\le j\le n$について，$X_j=X\cap[j]$と置く．換言すると，$X_j$は$X$に属する整数$i\in[n]$で$j$を越えないものから成る集合である．簡単のため，有限集合Xに属する元の個数を$\sharp(X)$で表す．いま，$(A,B)\in\mathcal{M}$があったとき，$\sharp(A_j)=\sharp(B_j)-1$を満たす整数$j\in[n]$が存在する．実際，$p(j)=\sharp(B_j)-\sharp(A_j)$と置くと，$p(j+1)$の値は$p(j)-1,p(j),p(j)+1$のどれかに一致する．すると，$-1\le p(1)\le 1,p(n)=2$であるから，$j$を1から$n$まで動かすことによって$p(j)=1$となる$j$の存在を知る．そこで$\sharp(A_j)=\sharp(B_j)-1$を満たす最大の整数$(1\le)j(<n)$を取って

$$C=A_j\bigcup(B\setminus B_j),\qquad D=B_j\bigcup(A\setminus A_j)$$

と置く．このとき，$A_j\bigcap(B\setminus B_j)=\emptyset,B_j\bigcap(A\setminus A_j)=\emptyset$であること，及び$\sharp(A\setminus A_j)=\sharp(B\setminus B_j)-1$に注意すると，$\sharp(C)=\sharp(D)=q$となる．従って，$(C,D)\in\mathcal{N}$である．そこで，写像$\psi:\mathcal{M}\to\mathcal{N}$を$\psi((A,B))=(C,D)$で定義する．この写像$\psi$が単射であることを示す．

いま，$\psi((A,B))=\psi((A',B'))$を満たす$(A',B')\in\mathcal{M}$があったとし，$\sharp(A'_{j'})=\sharp(B'_{j'})-1$を満たす最大の整数$(1\le)j'(<n)$を選ぶ．このとき，$j=j'$であれば$A_j=A'_j,B_j=B'_j,A\setminus A_j=A'\setminus A'_j,B\setminus B_j=B'\setminus B'_j$

から $(A,B)=(A',B')$ が従う．そこで，$j\neq j'$とし，たとえば，$j'<j$ とする．さて，$\psi((A,B))=\psi((A',B'))=(C,D)\in\mathcal{N}$とすると，

$$C_{j'}=A_{j'}=A'_{j'},\quad C\setminus C_j=B\setminus B_j=B'\setminus B'_j$$

$$D_{j'}=B_{j'}=B'_{j'},\quad D\setminus D_j=A\setminus A_j=A'\setminus A'_j$$

が従う．すると，$Y=\{j'+1,j'+2,\ldots,j\}$ とするとき，

$$\sharp(A\cap Y)=\sharp(A'\cap Y),\qquad \sharp(B\cap Y)=\sharp(B'\cap Y)$$

である．従って，$\sharp(A_j)=\sharp(A'_j),\sharp(B_j)=\sharp(B'_j)$ となり，j'の最大性に矛盾する． ∎

有限数列 $a_0,a_1,\ldots,a_n$が対称単峰数列であれば n'を $n/2$ を越えない最大の整数とするとき

$$a_0\leq a_1\leq\cdots\leq a_{n'}\geq a_{n'+1}\geq\cdots\geq a_n$$

と左右対称の綺麗な山形になる．単峰数列の魅惑的な背景については文献［８］が詳しく，引用文献も豊富である．単峰数列が興味深いのは対称数列のときであるが，対称とは限らない単峰数列の著名な例も幾つか知られている．対称単峰数列の一般化として，正の整数から成る有限数列 $a_0,a_1,\ldots,a_n$についての条件

（あ）　$a_q\leq a_{n-q}$　　（$0\leq q\leq n'$）

（い）　$a_0\leq a_1\leq\cdots\leq a_{n'}$

を考える．但し，n'は $n/2$ を越えない最大の整数である．すると，条件（あ）と（い）を満たす有限数列で（あ）の不等号がすべて等号であるものが対称単峰数列である．

たとえば，次元 n の単体的凸多面体 $\mathcal{P}$の $i-1$ 次元の面の個数を f_i とし，$f_0=1$とするとき，有限数列 $(f_0,f_1,f_2,\ldots,f_n)$ は必ずしも単峰とは限らない（文献［１］参照）が条件（あ）と（い）を満たす（文献［３］参照）数列である．

有限集合$[n]$の q元部分集合の数え上げとともに，n 個の可換な変数を使って得られる q次の単項式の数え上げも数え上げ理論の神髄である．二項係数の表記法$\binom{n}{q}$を真似て，n 変数 q次の単項式の個数を $\left(\binom{n}{q}\right)$

と書く．特に，次数 0 の単項式は 1 であるから $\left(\binom{n}{0}\right)=1$ である．高校数学の教科書では $\left(\binom{n}{q}\right)$ ではなく ${}_n\mathrm{H}_q$ を使っている．

たとえば，3 個の変数 x,y,z を使って得られる 5 次の単項式をすべて列挙すると

$$x^5, x^4y, x^4z, x^3y^2, x^3yz, x^3z^2, x^2y^3, x^2y^2z, x^2yz^2, x^2z^3, xy^4,$$

$$xy^3z, xy^2z^2, xyz^3, xz^4, y^5, y^4z, y^3z^2, y^2z^3, yz^4, z^5$$

となるから，3 変数 5 次の単項式は全部で２１個ある．いま，仕切棒 | を 2 個，星印☆を 5 個準備して，それら 7 個を一列に並べた図式を考える．そのような図式の全体と 3 変数 5 次の単項式の全体が 1 対 1 に対応する．具体的に

$$\begin{array}{rcl} ☆☆ \mid ☆ \mid ☆☆ & \longleftrightarrow & x^2yz^2 \\ ☆☆ \mid\mid ☆☆☆ & \longleftrightarrow & x^2z^3 \\ \mid ☆ \mid ☆☆☆☆ & \longleftrightarrow & yz^4 \end{array}$$

等々である．すなわち，2 個の仕切棒 | と 5 個の星印☆を一列に並べた図式について，左側仕切棒の左側にある☆の個数を x のベキ，左側仕切棒と右側仕切棒の間にある☆の個数を y のベキ，右側仕切棒の右側にある☆の個数を z のベキとすることで 3 変数 x,y,z の 5 次の単項式が対応する．すると，3 変数 x,y,z の 5 次の単項式の個数は，2 個の仕切棒 | と 5 個の星印☆を一列に並べた図式の個数に一致する．その個数は $\binom{7}{5}=21$ である．

一般に，n 変数 q 次の単項式の個数を数えるときには，仕切棒を $n-1$ 個，星印を q 個準備することになるから，n 変数 q 次の単項式の個数 $\left(\binom{n}{q}\right)$ は $\binom{n+q-1}{n-1}$ と一致する．すると，公式

$$\left(\binom{n}{q}\right)=\binom{n+q-1}{q}=\binom{n+q-1}{n-1} \tag{13}$$

が得られる．

二項係数 $\binom{n}{q}$ は公式

$$\binom{n}{q}=n!/q!(n-q)! \tag{14}$$

で計算できる．但し，n の階乗 $n!$ は 1 から n までの積である．

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n$$

公式 (14) を示すために，集合 $[q] = \{1, 2, \ldots, q\}$ から $[n]$ への写像 $f : [q] \to [n]$ で条件

$$i \neq j \qquad\qquad f(i) \neq f(j) \tag{15}$$

を満たすものを考える．このような写像は，まず $f(1)$ を決め，次に $f(1)$ と異なるように $f(2)$ を決め，次に $f(1), f(2)$ と異なるように $f(3)$ を決め，... とすることで得られる．まず $f(1)$ を決める方法は n 通り，次に $f(1)$ と異なるように $f(2)$ を決める方法は $n-1$ 通り，次に $f(1), f(2)$ と異なるように $f(3)$ を決める方法は $n-2$ 通り，...，$f(1), f(2), \ldots, f(q-1)$ と異なるように $f(q)$ を決める方法は $n-q+1$ 通りである．すると，条件 (15) を満たす写像 $f : [q] \to [n]$ は全部で

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-q+1) = n!/(n-q)! \tag{16}$$

個ある．他方，写像 $f : [q] \to [n]$ が条件 (15) を満たすとき f による $[q]$ の像

$$f([q]) = \{f(1), f(2), \ldots, f(q)\}$$

は $[n]$ の q 元部分集合である．いま，$[n]$ の任意の q 元部分集合 T を固定したとき，条件 (15) を満たす写像 $f : [q] \to [n]$ でその像 $f([q])$ が T と一致するものは全部で $q!$ 個存在する．従って，$[n]$ の q 元部分集合の個数と $q!$ の積が条件 (15) を満たす写像 $f : [q] \to [n]$ の個数である．すると，

$$q!\binom{n}{q} = n!/(n-q)!$$

であるから望む公式 (14) が示された．ついでに言うと，公式 (14) は奇蹟的とも思える重宝な代物であって，一般には数え上げ理論に出現する著名な数え上げ数が公式 (14) の如く簡明に表示できることは稀である．

二項係数の計算公式 (14) を

$$\binom{n}{q} = (1/q!)n(n-1)(n-2)\cdots(n-q+1) \tag{17}$$

と表示する．他方，$\left(\!\binom{n}{q}\!\right)$ についても公式 (13) を使って

$$\left(\!\!\binom{n}{q}\!\!\right) = (1/q!)n(n+1)(n+2)\cdots(n+q-1) \tag{18}$$

と表示する．但し，等式 (17) が意味を持つのは $1 \leq q \leq n$ のとき，等式 (18) が意味を持つのは $q \geq 1, n \geq 1$ のときである．それにも拘らず，ひとまず，等式 (17) と (18) を qを定数とする n の多項式と思うことにする．すると，あれっ?... と両者の類似性に驚く．等式 (18) の右辺において n を$-n$ に置き換え $(-1)^q$を掛けると，等式 (17) の右辺が得られる．換言すると，n の多項式として

$$\binom{n}{q} = (-1)^q \left(\!\!\binom{-n}{q}\!\!\right) \tag{19}$$

が成立する．等式 (19) は二項係数の相互法則と呼ばれる．もちろん，$\left(\!\binom{-n}{q}\!\right)$ に然るべき組合せ論的解釈を授けることなどできないが，等式 (19) は単なる偶然の結果ではない．

いま，ユークリッド空間 $\mathbb{R}^q$において $q+1$ 個の点

$$(0,0,\ldots,0),(1,0,0,\ldots,0),(1,1,0,0,\ldots,0),\ldots,(1,1,\ldots,1)$$

を頂点とする次元 qの単体 $\mathcal{P}$とその‘膨らまし’$n\mathcal{P}$を考える．但し，

$$n\mathcal{P} := \{n\alpha\,;\,\alpha \in \mathcal{P}\}$$

（ $n=1,2,3,\ldots$ ）である．このとき，$\mathbb{R}^q$の点 $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_q)$ が $n\mathcal{P}$に属するためには

$$0 \leq \alpha_q \leq \alpha_{q-1} \leq \cdots \leq \alpha_1 \leq n$$

となることが必要十分である．他方，$(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_q)$ が $n\mathcal{P}$の内部に含まれるためには

$$0 < \alpha_q < \alpha_{q-1} < \cdots < \alpha_1 < n$$

となることが必要十分である．すると，$n\mathcal{P}$に含まれる格子点（すべての座標成分が整数である点）の個数を $i(\mathcal{P},n)$，$n\mathcal{P}$の内部に含まれる格子点の個数を $i^*(\mathcal{P},n)$ とすると，

$$i(\mathcal{P},n)=\left(\binom{n+1}{q}\right)$$

$$i^*(\mathcal{P},n)=\binom{n-1}{q}$$

である．従って，二項係数の相互法則 (19) は

$$i^*(\mathcal{P},n)=(-1)^q i(\mathcal{P},-n) \tag{20}$$

を導く．然る如く，二項係数の相互法則 (19) を凸多面体に含まれる格子点の数え上げの観点から解釈すると興味が深まる．一般論として，次の結果がフランスの高等学校の数学教師 Ehrhart によって１９５０年代後半に証明された．証明の詳細等については拙書［５］を参照されたい．

定理 1.3 (Ehrhart)　次元 qの凸多面体 $\mathcal{P}$の頂点はすべて格子点であると仮定し，$n\mathcal{P}$に含まれる格子点の個数を $i(\mathcal{P},n)$，$n\mathcal{P}$の内部に含まれる格子点の個数を $i^*(\mathcal{P},n)$ とする．このとき，
（あ）$i(\mathcal{P},n)$ は n についての次数 qの多項式（$\mathcal{P}$の Ehrhart 多項式と呼ばれる）であって，その定数項は 1 である．
（い）（Ehrhart 相互法則）任意の $n\geq 1$ について等式

$$i^*(\mathcal{P},n)=(-1)^q i(\mathcal{P},-n)$$

が成立する．

たとえば，$q=2$ とし座標平面において $(0,0),(4,0),(4,3),(1,2)$ を頂点に持つ四角形を $\mathcal{P}$とするとき，$i(\mathcal{P},n)$ と $i^*(\mathcal{P},n)$ を実際に計算することは数列の計算の絶好の練習問題である.（受験問題集に掲載するならば「座標平面において $(0,0)$, $(4n,0)$, $(4n,3n)$, $(n,2n)$ を頂点に持つ四角形を A とし，A の内部および周上に含まれる格子点の個数α，A の内部に含まれる格子点の個数βとする．このとき，αとβを n の式で

表せ．但し，n は正の整数である．」と記述すれば良い．）しかし，定理 1.3を認めるならば，$i(\mathcal{P},n)=an^2+bn+1$，$i^\star(\mathcal{P},n)=an^2-bn+1$ と置け，$\mathcal{P}$に含まれる格子点の個数と $\mathcal{P}$の内部に含まれる格子点の個数の数え上げから $a+b+1=14, a-b+1=5$ である．従って，$i(\mathcal{P},n)=(17/2)n^2+(9/2)n+1$，$i^\star(\mathcal{P},n)=(17/2)n^2-(9/2)n+1$ を得る．一般論で，$i(\mathcal{P},n)$ における n^2の係数 $17/2$ は $\mathcal{P}$の面積に一致する．すると，$\mathcal{P}$に含まれる格子点の個数と $\mathcal{P}$の内部に含まれる格子点の個数を数えることから $\mathcal{P}$の面積が計算できる．いわゆる Pick の公式である．

2　ニュートンの補題

実数係数の二次方程式 $ax^2+2bx+c=0$ が実数解を持てば不等式 $b^2-ac\geq 0$ が成立する，という高校数学で習う定理は，数え上げとは無関係に思えるが，然に非ず．いま，敢えて x の係数を $2b$ にする理由は判別式 $(2b)^2-4ac$ が旨い具合に 4 で割れ，解の公式がいささか簡単な表示になるからであるが，実際は $ax^2+2bx+c=0$ は二項係数を使った表示 $\binom{2}{2}ax^2+\binom{2}{1}bx+\binom{2}{0}c=0$ なのである．すると，三次方程式を

$$\binom{3}{3}ax^3+\binom{3}{2}bx^2+\binom{3}{1}cx+\binom{3}{0}d=0$$

と表示するとどんな御利益があるのだろうか．

問．実数係数の三次方程式

$$ax^3+3bx^2+3cx+d=0 \tag{21}$$

のすべての解が実数であれば不等式

$$b^2-ac\geq 0, \qquad c^2-bd\geq 0$$

が成立することを証明せよ．

解．（その１）三次方程式 (21) の解をα,β,γとすると

$$ax^3+3bx^2+3cx+d=a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

であるから，いわゆる解と係数の関係

$$b = -(a/3)(\alpha + \beta + \gamma)$$

$$c = (a/3)(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$$

$$d = -a\alpha\beta\gamma$$

が成立する．すると，

$$\begin{aligned} & b^2 - ac \\ = \ & (a^2/9)((\alpha + \beta + \gamma)^2 - 3(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) \\ = \ & (a^2/9)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) \\ = \ & (a^2/18)((\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2) \geq 0 \end{aligned}$$

である．類似の計算で $c^2 - bd \geq 0$ も示せるが，少し手間を省くならば $\alpha\beta = \alpha', \beta\gamma = \beta', \gamma\alpha = \gamma'$ と置くと

$$bd = (a^2/3)(\alpha'\beta' + \beta'\gamma' + \gamma'\alpha')$$

であるから，$c^2 - bd \geq 0$ は $b^2 - ac \geq 0$ に帰着する．

（その２）いま，$f(x) = ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d$ とすると，$f(x) = 0$ の（重複を込めた）３個の解が実数であるから，$y = f(x)$ のグラフを書いて接線の傾きが０となる点を探すと，二次方程式 $f'(x) = 0$ が実数解を持つことが判明する．すると，$f'(x) = 3(ax^2 + 2bx + c) = 0$ の判別式を計算すると $b^2 - ac \geq 0$ を得る．次に，$c^2 - bd \geq 0$ を示すために $d \neq 0$ を仮定すると，$f(x) = 0$ の解 α, β, γ は０でない実数である．従って，三次方程式

$$x^3 f(1/x) = dx^3 + 3cx^2 + 3bx + a = 0$$

は実数解 $1/\alpha, 1/\beta, 1/\gamma$ を持つ．すると，$x^3 f(1/x)$ を微分することで $c^2 - bd \geq 0$ も従う．

いささか受験参考書の雰囲気が漂うが，解（その１）は解と係数の関係の練習問題として平凡に扱っているけれども，解（その２）では微分の概念を拝借しているので幾らか面白い．解（その２）は高校生が

思い浮べる解答としては突拍子もないが，$f(x)=ax^3+3bx^2+3cx+d$ を微分をすることで係数が二項係数であることの有り難みが認識できる．一般に，実数係数の多項式

$$f(x)=\sum_{q=0}^{n}\binom{n}{q}a_q x^q$$

の微分は

$$f'(x)=n\sum_{q=0}^{n-1}\binom{n-1}{q}a_{q+1}x^q \tag{22}$$

であるから，$f'(x)$ の係数が再び二項係数で表示できる．

問の結果は一般の実数係数 n 次方程式についても成立し，ニュートンの補題と呼ばれている（文献［２，p. 270 ］等）．ニュートンの補題を議論する準備として解（その２）で使った事実を補題として要約する．

まず，高校数学で習った方程式の解の重複度についてちょっと復習しよう．実数係数の多項式 $F(x)$ があったとき，方程式 $F(x)=0$ の実数解δの重複度がちょうどkということは，$F(x)$ は $(x-\delta)^k$で割り切れ，$(x-\delta)^{k+1}$で割り切れないということ，換言すると，実数係数の多項式 $G(x)$ で，

$$F(x)=(x-\delta)^k G(x),\ \ G(\delta)\neq 0$$

を満たすものが存在するということであった．然らば，一般の函数 $F(x)$（たとえば，$\sin x$ とか $\cos x$ など）のときには方程式 $F(x)=0$ の解δの重複度がkということをどうやって定義するのが自然であろうか．簡単のため，函数 $F(x)$ は何回でも微分できると仮定し，$F(x)$ の i 回微分を $F^{(i)}(x)$ で表す．このとき，$F(x)=0$ の解δの重複度がちょうどkということを，条件

$$F(\delta)=F^{(1)}(\delta)=F^{(2)}(\delta)=\cdots=F^{(k-1)}(\delta)=0, \qquad F^{(k)}(\delta)\neq 0$$

が満たされるときと定義しよう．すると，函数 $F(x)$ が多項式のとき，整除関係による馴染み深い前者の定義は高階微分による後者の定義と同値である.（具体的に $k=2$ のときなどは高校数学の教科書などでも紹介されている.）　高校数学の微分で習うロルの定理「閉区間$[\alpha,\beta]$

で連続，開区間 (α,β) で微分可能な函数 $F(x)$ が $F(\alpha)=F(\beta)$ を満たせば $F'(\gamma)=0$ となる $\alpha<\gamma<\beta$ が存在する」は平均値の定理などとともに重要な存在定理の一つである．

補題 2.1　開区間 (α,β) において何回でも微分可能な函数 $F(x)$ について，方程式 $F(x)=0$ が (α,β) において重複を込めて n 個の解を持てば，方程式 $F'(x)=0$ は (α,β) において重複を込めて少なくとも $n-1$ 個の解を持つ．

［証明］方程式 $F(x)=0$ の開区間 (α,β) における重複を込めてた n 個の解を $\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_n$（但し，$\delta_1\leq\delta_2\leq\ldots\leq\delta_n$）とする．このとき，$\delta_i<\delta_{i+1}$ ならばロルの定理から $F'(\delta'_i)=0$ を満たす $\delta_i<\delta'_i<\delta_{i+1}$ が存在する．他方，$\delta_{i-1}<\delta_i=\delta_{i+1}=\cdots=\delta_{i+k-1}<\delta_{i+k}$ とすると δ_i は $F(x)=0$ の重複度 k の解であるから，解の重複度の定義から δ_i は方程式 $F'(x)=0$ の重複度 $k-1$ の解である．従って，方程式 $F'(x)=0$ は (α,β) において重複を込めて少なくとも $n-1$ 個の解を持つ．　■

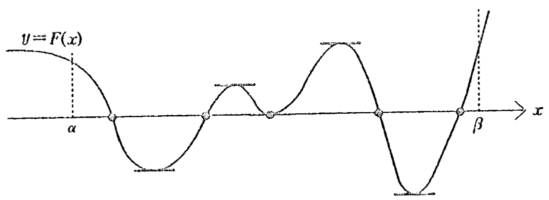


図 - 2（ロルの定理）

補題 2.1を解説（証明？）するときは（わざわざ文章を板書するまでもなく）図 - 2 を黒板に描いてロルの定理（に加えて，方程式の解の重複度を）説明しつつ，感覚的に説得させる（大体，納得して貰える）のだけれど，方程式の解の個数に関連させてロルの定理を考えることは高校数学ではあまり馴染みがない．

一般に，実数係数の n 次多項式 $P(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ が実零点を持つとは，実数係数の n 次方程式 $P(x)=0$ のすべての解が実数であるときに言う．実数係数の n 次多項式は複素数の範囲で n 個の一

次式の積に因数分解される（代数学の基本定理）．すると，実数係数の n 次多項式 $P(x)$ が実零点を持つことと $P(x)$ が実数の範囲で n 個の一次式の積に因数分解されることは同値である．

問（エルミート多項式）．函数の列 $H_0, H_1, H_2, \ldots$ を初期条件 $H_0 = 1$ 及び漸化式

$$H_n(x) = -e^{x^2}(e^{-x^2}H_{n-1}(x))' \tag{23}$$

で定義する．このとき，$H_n(x)$ は次数 n の多項式で実零点を持つことを証明せよ．但し，e は自然対数の底である．

解．函数 $H_n(x)$ が次数 n の多項式であることは n についての帰納法で簡単に証明できる.(教養課程の解析学の入門書ならば大抵載っているが，$(e^{-x^2})' = -2xe^{-x^2}$ であることと積の微分の公式 $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ を知っていれば高校生でもちゃんと証明できる．）次に，次数 n の多項式 $H_n(x)$ が実零点を持つことを示そう．再び，帰納法を使い，$H_{n-1}(x)$ が実零点を持つとすると，方程式 $e^{-x^2}H_{n-1}(x) = 0$ は重複を込めて $n-1$ 個の解を持つ．それら $n-1$ 個の解のうち最小のものを α，最大のものを β とすると，補題 2.1 から方程式 $(e^{-x^2}H_{n-1}(x))' = 0$ は閉区間 $[\alpha, \beta]$ において重複を込めて少なくとも $n-2$ 個の解を持つ．他方，

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x^2}H_{n-1}(x) = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty} e^{-x^2}H_{n-1}(x) = 0$$

であるから，方程式 $(e^{-x^2}H_{n-1}(x))' = 0$ は開区間 (β, ∞) においても開区間 $(-\infty, \alpha)$ においても解を持つ（再びロルの定理）．従って，方程式 $(e^{-x^2}H_{n-1}(x))' = 0$ は少なくとも n 個の解を持つから，漸化式（23）から方程式 $H_n(x) = 0$ は（少なくとも，従って，ちょうど）n 個の解を持ち，$H_n(x)$ は実零点を持つ多項式である．———

問．多項式の列 $F_0, F_1, F_2, \ldots$ を初期条件 $F_0 = 1$ 及び漸化式

$$F_n(x) = x\{F_{n-1}(x) + F'_{n-1}(x)\}$$

で定義する．このとき，$F_n(x)$ は実零点を持つことを証明せよ．
[略解．$G_n(x) = e^x F_n(x)$ と置くと $G_n(x) = xG'_{n-1}(x)$ である．]

補題 2.2　実数係数の n 次多項式 $P(x) = \sum_{q=0}^{n} a_q x^q$ が実零点を持つならば，多項式 $x^n P(1/x)$ も実零点を持つ．

[証明] いま，

$$P(x) = a_n x^m (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_{n-m})$$

とする．但し，$\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-m}$は 0 でない実数である．すると，

$$x^n P(1/x) = a_n(1 - \alpha_1 x) \cdots (1 - \alpha_{n-m} x)$$

となるから $x^n P(1/x)$ は実零点を持つ $n - m$ 次多項式である．∎

定理 2.3 (ニュートンの補題)　実数係数の n 次多項式

$$P(x) = \sum_{q=0}^{n} \binom{n}{q} a_q x^q$$

が実零点を持つならば

$$a_q^2 \geq a_{q-1} a_{q+1} \tag{24}$$

が任意の $1 \leq q < n$ について成立する．

[略証] 補題 2.1 から $P(x)$ が実零点を持つならばその微分 $P'(x)$ も実零点を持つ．すると，$P(x)$ の $q-1$ 回微分 $Q(x) = P^{(q-1)}(x)$ も実零点を持つ．次に，$R(x) = x^{n-q+1} Q(1/x)$ と置くと補題 2.2 から $R(x)$ も実零点を持つ．このとき

$$R^{(n-q-1)}(x) = (n!/2)(a_{q-1} x^2 + 2a_q x + a_{q+1})$$

も実零点を持つから ${a_q}^2 \geq a_{q-1} a_{q+1}$が従う．∎

略証における（詳細は割愛した）いささか複雑な計算を避けるために，n についての帰納法を使うのも名案である．式 (22) に着目すると，補題 2.1と帰納法の仮定は不等式 (24) が $2 \leq q < n$ で成立することを保証する．他方，$a_1^2 \geq a_0 a_2$を示すには $a_0 \neq 0$ を仮定し，補題 2.2 を使うと $q = n - 1$ のときに帰着する．計算がちょっと繁雑になる恐れを厭（いと）わなければ，解（その 1 ）を模倣し n 次方程式の解と係数の関係から望む不等式を導くことも可能である．

さて，ニュートンの補題，命題 1.2 及び補題 1.1 を使うと，正の整数から成る有限数列が単峰数列であることを判定する有効な手段が得られる．

系 **2.4**　正の整数を係数に持つ n 次多項式 $P(x)=\sum_{q=0}^{n}a_q x^q$ が実零点を持つならば，数列 $a_0,a_1,\ldots,a_n$ は単峰数列である．

［証明］まず，$b_q=a_q/\binom{n}{q}$ と置くと

$$P(x)=\sum_{q=0}^{n}\binom{n}{q}b_q x^q \tag{25}$$

と表せる．実数係数の n 次多項式 (25) が実零点を持つからニュートンの補題を使うと

$$b_q^2 \geq b_{q-1}b_{q+1} \tag{26}$$

が任意の $1\leq q<n$ について成立する．このとき，不等式 (26) と命題 1.2を併用すると

$$\begin{aligned} a_q^2 &= \binom{n}{q}^2 {b_q}^2 \geq \binom{n}{q-1}\binom{n}{q+1}{b_q}^2 \\ &\geq \binom{n}{q-1}\binom{n}{q+1}b_{q-1}b_{q+1}=a_{q-1}a_{q+1} \end{aligned}$$

が従う．すると，補題 1.1 から有限数列 $a_0,a_1,\ldots,a_n$ は単峰数列である．∎

3　オイラー数と母函数

数え上げ理論の舞台には二項係数を筆頭に多種多様な数え上げ数が登場し，それらが複雑多岐に係り逢うことで華麗なる世界が築かれている．然る様相は文献［7］等で詳細に論じられている．本節の前半ではオイラー数と呼ばれる数え上げ数について，その振る舞いが二項係数と酷似している（対称単峰数列である）ことをニュートンの補題を武器にして証明する．他方，本節の後半ではオイラー数が数え上げ理論で寵愛される背景を理解するために，オイラー数に関連した母函数の話を紹介する．

文字 $1,2,\ldots,n$ の並べ変えを $1,2,\ldots,n$ の順列と言う．簡単のため，1 番目を c_1，2 番目を c_2，…，n 番目を c_n とする順列を $c_1c_2\cdots c_n$ で表

す．すると，$1, 2, \ldots, n$ の順列は全部で $n!$ 個ある．順列 $\pi = c_1 c_2 \cdots c_n$ について

$$D(\pi) = \{i\,;\, c_i > c_{i+1}\}$$

を π の降下集合と呼ぶ．たとえば $n = 7$ で $\pi = 3517426$ とすると $a_1 < a_2 > a_3 < a_4 > a_5 > a_6 < a_7$ であるから $D(\pi) = \{2, 4, 5\}$ である．

いま，整数 $n \geq 1$ と $0 \leq q < n$ を固定し，文字 $1, 2, \ldots, n$ の順列 π でその降下集合 $D(\pi)$ が q 元集合（q 個の元から成る集合）となるものの個数を $A_n(q)$ で表し，n の q 番目のオイラー数と呼ぶ．特に，

$$A_n(0) = A_n(n-1) = 1 \tag{27}$$

である．

二項係数のパスカル三角形を真似てオイラー数を成分に持つ疑似パスカル三角形を作成する．

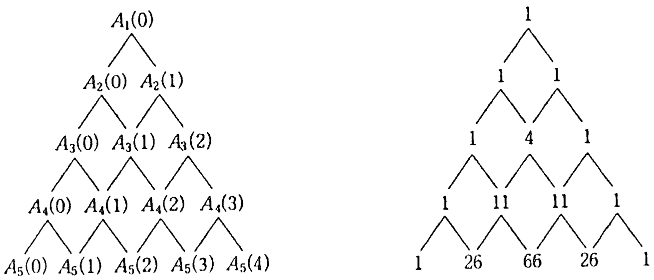


図 - 3（オイラー数）

さて，図 - 3 をちょっと眺めるとそれぞれの横段を構成する有限数列は対称単峰数列であり，二項係数のパスカル三角形と酷似していることに気付く．実際，整数 $n \geq 1$ を固定したとき，オイラー数の数列

$$A_n(0), A_n(1), \ldots, A_n(n-1) \tag{28}$$

は対称単峰数列である．

有限数列 (28) が対称数列であること，換言すると，任意の $n \geq 1$ と $0 \leq q < n$ について

$$A_n(q) = A_n(n-1-q) \tag{29}$$

であることを示すために，$1, 2, \ldots, n$ の順列$\pi = c_1 c_2 \cdots c_n$の逆順列

$$\pi^\star = c_n c_{n-1} \cdots c_1$$

を考える．いま，iがπの降下集合に属すると仮定する．すなわち，πにおいて $c_i > c_{i+1}$を仮定する．逆順列$\pi^\star$においては左から $(n+1)-(i+1)$ 番目が c_{i+1}，左から $(n+1)-i$ 番目が c_iであるから，$(n+1)-(i+1)$ は$\pi^\star$の降下集合には属さない．従って，$i \in D(\pi)$ と $n-i \notin D(\pi^\star)$ は同値である．すると，πの降下集合が q元集合ならば$\pi^\star$の降下集合は $n-1-q$元集合となる．従って，文字 $1, 2, \ldots, n$ の順列でその降下集合が q元集合となるものの個数と降下集合が $n-1-q$元集合となるものの個数は一致するから，望む等式 (29) が得られる．

次に，有限数列 (28) が単峰数列であることを示す準備として，二項係数の漸化式 (3) を真似てオイラー数の漸化式を探そう．

命題 3.1　任意の $n \geq 3$ と $1 \leq q \leq n-2$ について，等式

$$A_n(q) = (n-q)A_{n-1}(q-1) + (q+1)A_{n-1}(q) \tag{30}$$

が成立する．

［証明］文字 $1, 2, \ldots, n$ の順列σは文字 $1, 2, \ldots, n-1$ の順列$\pi = c_1 c_2 \cdots c_{n-1}$ の c_i と c_{i+1}の間に n を挿入することで得られるとする．但し，$i = 0$のときは c_1の前に，$i = n-1$のときは c_{n-1}の後に n を置くことと約束する．いま，$c_i < c_{i+1}$とすると $c_i < n > c_{i+1}$であるからσの降下集合の元の個数はπの降下集合の元の個数よりも 1 個だけ増える．他方，$c_i > c_{i+1}$とすると $c_i < n > c_{i+1}$であるからσの降下集合の元の個数はπの降下集合の元の個数と一致する．但し，$i = 0$ のときは前者，$i = n-1$ のときは後者に含まれる．すると，$1, 2, \ldots, n$ の順列σでその降下集合が q元集合となるものは（あ）$1, 2, \ldots, n-1$ の順列$\pi = c_1 c_2 \cdots c_{n-1}$

でその降下集合が $q-1$ 元集合となるものの $c_i < c_{i+1}$となる箇所に n を挿入することで得られるか，または（い）$1,2,\ldots,n-1$ の順列 $\pi = c_1c_2\cdots c_{n-1}$でその降下集合が$q$元集合となるものの $c_i > c_{i+1}$となる箇所に n を挿入することで得られる．さて，（あ）の型の順列の個数は $((n-2)-(q-1)+1)A_{n-1}(q-1)$ であり，（い）の型の順列の個数は $(q+1)A_{n-1}(q)$ であるから，望む等式 (30) を得る． ▯

以下，系 2.4 を武器に有限数列 (28) が単峰数列であることを示す．我々の課題は実数係数の多項式

$$\sum_{q=0}^{n-1} A_n(q)x^q$$

が実零点を持つことを示すことである．そのためには，実数係数の n 次多項式

$$x\sum_{q=0}^{n-1} A_n(q)x^q = \sum_{q=1}^{n} A_n(q-1)x^q$$

が実零点を持つことを示せばよい．いま，

$$F_n(x) = \sum_{q=1}^{n} A_n(q-1)x^q \tag{31}$$

と置くとオイラー数の初期条件 (27) と漸化式 (30) から

$$F_1(x) = x$$

$$F_n(x) = (x-x^2)F'_{n-1}(x) + nxF_{n-1}(x) \tag{32}$$

（ $n=2,3,4,\ldots$ ）が従う．多項式に微分の簡単な計算問題であるから，興味を持つ読者（特に，高校生）は自ら鉛筆を持って計算されたい．昨今の高校生は具体的な 3 次式，4 次式ならばすらすらと計算するが，一般の n 次式となると途端に拒絶反応を起こすようだ．ちょっと試しにやってみよう，という積極的に挑む姿勢が全く欠落している．数学教育の根幹原則が脆（もろ）くも崩壊している証である．愚痴を零（こぼ）したが，証明の本筋に戻る．次に，

$$G_n(x) = F_n(x)/(x-1)^{n+1} \tag{33}$$

と置くと，等式 (32) から

$$G_n(x) = -xG'_{n-1}(x) \tag{34}$$

（ $n = 2, 3, 4, \ldots$ ）が従う． 等式 (34) を導くには，商の微分の公式（ $(f(x)/g(x))' = (f'(x)g(x) - f(x)g'(x))/(g(x))^2$ ）が必要である．漸化式 (30) と比較して等式 (34) は随分とあっさりした表示である．さて，我々の課題は実数係数の n 次多項式 $F_n(x)$ が実零点を持つことを示すことであったが，$F_n(x)$ の係数は非負整数であるから方程式 $F_n(x) = 0$ の実数解は 0 を越えない．すると，$F_n(x)$ が実零点を持つことを示すためには

（☆）$G_n(x) = 0$ が $x < 1$ において重複を込めて n 個の解を持つ

を示せばよい．そこで，n についての帰納法で（☆）を証明する．手始めに，$G_1(x) = x/(x-1)^2$ であるから，$n = 1$ のとき（☆）は成立する．いま，$n \geq 2$ とし，$n - 1$ のときに（☆）が成立すると仮定し，方程式 $G_{n-1}(x) = 0$ の $x < 1$ における最小の解を δ と置く．すると，補題 2.1 から方程式 $G'_{n-1}(x) = 0$ が $\delta \leq x < 1$ において重複を込めて少なくとも $n-2$ 個の解を持つ．他方，式 (33) の右辺の分子 $F_n(x)$ は n 次式，分母 $(x-1)^{n+1}$ は $n+1$ 次式であるから

$$\lim_{x \to -\infty} G_n(x) = 0$$

となる．従って，方程式 $G'_{n-1}(x) = 0$ は $x < \delta$ の範囲にも少なくとも 1 個の解を持つ．すると，方程式 $G'_{n-1}(x) = 0$ が $x < 1$ において重複を込めて少なくとも $n - 1$ 個の解を持つ．このとき，等式 (34) を考慮すると，方程式 $G_n(x) = 0$ が $x < 1$ において重複を込めて（少なくとも，従って，ちょうど）n 個の解を持つことが判明する．

定理 3.2 整数 $n \geq 1$ を固定したとき，オイラー数の数列

$$A_n(0), A_n(1), \ldots, A_n(n-1)$$

は対称単峰数列である．

文献 [2] の p. 292 では有限数列 (28) が単峰数列であることを示すことが演習問題として掲載されており，そのヒントとしてニュート

ンの補題を使うことが言及されている．試行錯誤の計算をして $G_n(x)$ の置き方に辿り着く部分が面白く，学生のレポート問題として適している．

ところで，オイラー数の数列（28）が数え上げ理論で寵愛される背景には，無限数列

$$1^n, 2^n, 3^n, \ldots$$

の母函数がある．母函数については「現代数学序説 I」（川久保勝夫・宮西正宜（編），大阪大学出版会）にも筆者による解説（高校生にも十分理解できる）が掲載されている．準備として，形式的ベキ級数の話から始めよう．

多項式とは係数を持つ単項式の有限和であるが，この有限和を形式的な無限和とすることで形式的ベキ級数の概念に到達する．実数を係数とする変数λの形式的ベキ級数とは，形式的な無限和

$$a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + a_3\lambda^3 + \cdots \tag{35}$$

（$a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ は実数）のことである．実数 a_n を形式的ベキ級数 (35) における λ^n の係数と呼ぶ．形式的な無限和ということは，収束・発散などに神経を摺減らす必要はない．式 (35) に現れる＋も「和」ではなく便宜的な仮の記号である．形式的ベキ級数 (35) において，たとえば $a_n = 0$ のとき $a_n\lambda^n$ の部分を省略する等，多項式の標準的表記方法を踏襲する．たとえば，

$$1 + 3\lambda^2 - \lambda^3 - 2\lambda^5 + \lambda^7$$

は

$$a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = 3, a_3 = -1, a_4 = 0, a_5 = -2,$$

$$a_6 = 0, a_7 = 1, a_8 = a_9 = \cdots = 0$$

なる形式的ベキ級数である．形式的ベキ級数 (35) を

$$\sum_{q=0}^{\infty} a_q\lambda^q$$

と略記する．形式的ベキ級数

$$F(\lambda) = \sum_{q=0}^{\infty} a_q \lambda^q \tag{36}$$

と

$$G(\lambda) = \sum_{q=0}^{\infty} b_q \lambda^q \tag{37}$$

が等しいとは

$$a_0 = b_0, a_1 = b_1, a_2 = b_2, \ldots$$

であるときに言う．形式的ベキ級数についての代数的演算の幾つかを列挙する．

（あ）多項式の加法と乗法はそっくりそのまま形式的ベキ級数に踏襲される．すなわち形式的ベキ級数 (36) と (37) の和 $F(\lambda) + G(\lambda)$ と積 $F(\lambda)G(\lambda)$ を

$$F(\lambda) + G(\lambda) = \sum_{q=0}^{\infty} (a_q + b_q) \lambda^q$$

$$F(\lambda)G(\lambda) = \sum_{q=0}^{\infty} (\sum_{k=0}^{q} a_{q-k} b_k) \lambda^n$$

で定義する．

（い）逆元の概念を導入することで多項式と形式的ベキ級数の相違が明瞭になる．形式的ベキ級数 $F(\lambda)$ が可逆であるとは

$$F(\lambda)G(\lambda) = 1 \tag{38}$$

となる形式的ベキ級数 $G(\lambda)$ が存在するときに言う．このとき，$G(\lambda)$ を $F(\lambda)$ の逆元と呼び，$G(\lambda)$ を $F(\lambda)^{-1}$ あるいは $1/F(\lambda)$ で表す．たとえば

$$(1 - \lambda)(1 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \cdots) = 1 \tag{39}$$

から

$$1 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \cdots = 1/(1 - \lambda) \tag{40}$$

が従う．実数係数の多項式の世界では，定数ではない多項式と別の多項式の積が 1 になることは起こらない．等式 (39) と

$$(1-\lambda)(1+\lambda+\lambda^2+\lambda^3+\cdots+\lambda^{q-1}) = 1-\lambda^q$$

を比較すると形式的な無限和という効能が納得できる．

（う）形式的ベキ級数の微分は多項式の微分を形式的に模倣する．すなわち，形式的ベキ級数 (36) の微分を

$$F'(\lambda) = \sum_{q=0}^{\infty} q a_q \lambda^{q-1} = \sum_{q=1}^{\infty} q a_q \lambda^{q-1} \tag{41}$$

で定義する．但し，微分と言ってもあくまでも代数的演算であるから (36) の収束半径などを気に咎める必要はない．高校数学で習得した積の微分の公式と商の微分の公式はそのまま形式的ベキ級数の世界でも有効である（一応ちゃんと証明する必要はあるけれども）．たとえば，等式 (40) の両辺を微分すると

$$1+2\lambda+3\lambda^2+\cdots = 1/(1-\lambda)^2 \tag{42}$$

を得る．

問．形式的ベキ級数

$$(1+\lambda+\lambda^2+\lambda^3+\cdots)^n \tag{43}$$

を計算せよ．但し，$n \geq 1$ は整数である．

解．形式的ベキ級数 (43) を‘展開’するときλ^qは第 1 番目の括弧からλ^{p_1}，第 2 番目の括弧からλ^{p_2}，$\ldots$，第 n 番目の括弧からλ^{p_n}を選んで積$\lambda^{p_1}\lambda^{p_2}\cdots\lambda^{p_n}$を作ることで得られる．

$$(\cdots+\lambda^{p_1}+\cdots)(\cdots+\lambda^{p_2}+\cdots)\cdots(\cdots+\lambda^{p_n}+\cdots)$$

但し，非負整数 $p_1, p_2, \ldots, p_n$ は

$$p_1+p_2+\cdots+p_n = q \tag{44}$$

を満たす．すると，形式的ベキ級数 (43) におけるλ^qの係数は p_1, p_2, $\ldots, p_n$ を未知数とする方程式 (44) の非負整数解の個数と一致する．他

方，方程式 (44) の非負整数解の個数は n 変数 q次の単項式の個数 $\left(\binom{n}{q}\right) = \binom{n+q-1}{n-1}$ に等しい．従って，形式的ベキ級数 (43) におけるλ^qの係数は$\binom{n+q-1}{n-1}$である．すると

$$(1+\lambda+\lambda^2+\lambda^3+\cdots)^n = \sum_{q=0}^{\infty} \binom{n+q-1}{n-1} \lambda^q$$

である．等式 (40) を考慮すると，式 (43) は $1/(1-\lambda)^n$に等しい．従って

$$\sum_{q=0}^{\infty} \binom{n+q-1}{n-1} \lambda^q = 1/(1-\lambda)^n \qquad (45)$$

を得る．———

形式的ベキ級数

$$F(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \cdots$$

が逆元を持つためには $a_0 \neq 0$ となることが必要十分である．実際，$G(\lambda)$ を $F(\lambda)$ の逆元とすると $F(\lambda)G(\lambda) = 1$ であるから，両辺の定数項を比較すると $a_0 \neq 0$ である．他方，$a_0 \neq 0$ を仮定すると，

$$a_0 b_0 = 1$$

$$a_0 b_1 + a_1 b_0 = 0$$

$$a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = 0$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

を順次解くことで実数 $b_0, b_1, b_2, \ldots$ を決めることができる．このとき，$G(\lambda) = \sum_{q=0}^{\infty} b_q \lambda^q$ は $F(\lambda)G(\lambda) = 1$ を満たし，$F(\lambda)$ は可逆である．

実数の数列

$$a_0, a_1, a_2, \ldots \qquad (46)$$

に付随する形式的ベキ級数

$$F(\lambda) = \sum_{q=0}^{\infty} a_q \lambda^q$$

を数列 (46) の母函数と呼ぶ．

具体的な計算例としてフィボナッチ数列の母函数を求める．フィボナッチ数列とは

$$a_0 = a_1 = 1, \qquad a_q = a_{q-1} + a_{q-2} \quad (q = 2, 3, 4, \ldots)$$

と定義される数列 $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots$ である．フィボナッチ数列の母函数を計算すると

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= \sum_{q=0}^{\infty} a_q \lambda^q \\ &= 1 + \lambda + \sum_{q=2}^{\infty} (a_{q-1} + a_{q-2}) \lambda^q \\ &= 1 + \lambda + \sum_{q=2}^{\infty} a_{q-1} \lambda^q + \sum_{q=2}^{\infty} a_{q-2} \lambda^q \\ &= 1 + \lambda + \lambda \sum_{q=2}^{\infty} a_{q-1} \lambda^{q-1} + \lambda^2 \sum_{q=2}^{\infty} a_{q-2} \lambda^{q-2} \\ &= 1 + \lambda + \lambda \sum_{q=1}^{\infty} a_q \lambda^q + \lambda^2 \sum_{q=0}^{\infty} a_q \lambda^q \\ &= 1 + \lambda + \lambda (F(\lambda) - 1) + \lambda^2 F(\lambda) \\ &= 1 + \lambda F(\lambda) + \lambda^2 F(\lambda) \end{aligned}$$

である．すると

$$F(\lambda) = 1 + \lambda F(\lambda) + \lambda^2 F(\lambda) \tag{47}$$

であるから，等式 (47) を $F(\lambda)$ について解くと

$$F(\lambda) = 1/(1 - \lambda - \lambda^2)$$

を得る．

さて，形式的ベキ級数の議論にもそろそろ慣れた頃と思うので，懸案のオイラー数の数列 (28) と無限数列 $1^n, 2^n, 3^n, \ldots$ の母函数について述べよう．

定理 3.3 任意の整数 $n \geq 1$ について，無限数列 $1^n, 2^n, 3^n, \ldots$ の母函数

$$1^n + 2^n\lambda + 3^n\lambda^2 + \ldots \tag{48}$$

は

$$(A_n(0) + A_n(1)\lambda + \ldots, A_n(n-1)\lambda^{n-1})/(1-\lambda)^{n+1} \tag{49}$$

に一致する．

［証明］いささか安直な証明であるけど，n についての帰納法を使うと難無く片付く．形式的ベキ級数 (48) を $Q_n(\lambda)$ と置く．まず，$n = 1$ とすると，等式 (42)

$$Q_1(\lambda) = 1/(1-\lambda)^2 = A_1(0)/(1-\lambda)^2$$

を得る．次に，式 (31) の多項式 $F_n(x)$ を使うと有理函数 (49) の分子は $F_n(\lambda)/\lambda$である．いま，

$$\lambda Q_{n-1}(\lambda) = F_{n-1}(\lambda)/(1-\lambda)^n$$

を仮定し，その両辺をλで微分すると，左辺の微分は

$$\begin{aligned}
(\lambda Q_{n-1}(\lambda))' &= Q_{n-1}(\lambda) + \lambda Q'_{n-1}(\lambda) \\
&= \sum_{q=0}^{\infty}((q+1)^{n-1} + q(q+1)^{n-1})\lambda^q \\
&= \sum_{q=0}^{\infty}(q+1)^n\lambda^q \\
&= Q_n(\lambda)
\end{aligned}$$

であり，右辺の微分は

$$(F_{n-1}(\lambda)/(1-\lambda)^n)' = ((1-\lambda)F'_{n-1}(\lambda) + nF_{n-1}(\lambda))/(1-\lambda)^{n+1}$$

である．従って，

$$\lambda Q_n(\lambda) = ((\lambda - \lambda^2)F'_{n-1}(\lambda) + n\lambda F_{n-1}(\lambda))/(1-\lambda)^{n+1} \tag{50}$$

である．このとき，等式 (32) を使うと (50) の右辺は $F_n(\lambda)/(1-\lambda)^{n+1}$ に一致する． □

もはや紙面も尽きたので，定理 3.3の面白い応用を一つ紹介し筆を置く．実数の数列 $a_0, a_1, a_2, \ldots$ が次数 n の多項式数列であるとは，実数係数の n 次多項式 $f(x)$ を適当に選ぶと

$$a_q = f(q), \qquad q = 0, 1, 2, \ldots$$

となるときに言う．

系 3.4 実数の数列 $a_0, a_1, a_2, \ldots$ が次数 n の多項式数列であるためには，実数 $h_0, h_1, h_2, \ldots, h_n$ で

$$h_0 + h_1 + \cdots + h_n \neq 0 \tag{51}$$

を満たすものを適当に選んで数列 $a_0, a_1, a_2, \ldots$ の母函数 $\sum_{q=0}^{\infty} a_q \lambda^q$ が

$$(h_0 + h_1\lambda + h_2\lambda^2 + \cdots + h_n\lambda^n)/(1-\lambda)^{n+1} \tag{52}$$

と表されることが必要十分である．

[証明] 十分性を示す．等式 (45) を使うと，式 (52) は

$$\begin{aligned}
&(h_0 + h_1\lambda + h_2\lambda^2 + \cdots + h_n\lambda^n)(\sum_{q=0}^{\infty}\binom{q+n}{n}\lambda^q) \\
=\ & \sum_{q=0}^{\infty}(\sum_{k=0}^{n} h_k \binom{q-k+n}{n})\lambda^q \\
=\ & \sum_{q=0}^{\infty}(\sum_{k=0}^{n} h_k (q-k+n)(q-k+n-1)\cdots(q-k+1)/n!)\lambda^q
\end{aligned}$$

となる．従って，

$$a_q = (1/n!)\sum_{k=0}^{n} h_k (q-k+n)(q-k+n-1)\cdots(q-k+1) \tag{53}$$

を得る．厳密には等式 (53) は $q \geq n$ の範囲で有効であるが，$0 \leq q < k \leq n$ のとき

$$(q-k+n)(q-k+n-1)\cdots(q-k+1) = 0$$

であることに着目すると等式 (53) は任意の $q \geq 0$ で成立する．従って，等式 (53) の右辺を q についての多項式 $f(q)$ と思うとその次数は高々 n で q^n の係数は

$$(h_0 + h_1 + \cdots + h_n)/n!$$

である．すると，条件 (51) は q についての多項式 $f(q)$ の次数が n であることを保証する．

必要性を示す．次数 n の実数係数多項式 $f(x)$ について

$$f(x) = f((x+1)-1) = c_0(x+1)^n + c_1(x+1)^{n-1} + \cdots + c_{n-1}(x+1) + c_n$$

（ $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}, c_n$ は実数 ）と表示すると，任意の整数 $q \leq 0$ について

$$f(q) = c_0(q+1)^n + c_1(q+1)^{n-1} + \cdots + c_{n-1}(q+1) + c_n$$

である． すると，等式 (40) を考慮し， 定理 3.3 を繰り返し使って $\sum_{q=0}^{\infty} f(q)\lambda^q$ を計算し，$(1-\lambda)^{n+1}$ を共通分母として整頓すると，望む表示 (52) が従う．残るは条件 (51) の判定である．仮に，$h_0 + h_1 + \cdots + h_n = 0$ とすると式 (52) の分子と分母が $1-\lambda$ で割り切れる．従って，十分性の議論から多項式 $f(x)$ の次数は高々 $n-1$ となり矛盾が起きる．∎

＊＊＊　参考文献　＊＊＊

[1] A. Björner, The unimodality conjecture for convex polytopes, *Bull. Amer. Math. Soc.* 4 (1981), 187 188.

[2] L. Comtet, "Advanced Combinatorics," Reidel, Dordrecht/Boston 1974.

[3] T. Hibi, What can be said about pure O-sequences?, *J. Combin. Theory. Series A* **50** (1989), 319 322.

[4] 日比孝之, "q-analogue" の世界，数学 41 (1989)，269 274．

[5] 日比孝之，可換代数と組合せ論，シュプリンガー東京，1995 年．

[6] 日比孝之，数え上げ数学，朝倉書店，1997 年．

[7] R. P. Stanley, "Enumerative Combinatorics, Volume 1," Wadsworth and Brooks/Cole, Pacific Grove, CA, 1986.

[8] R. P. Stanley. Log-concave and unimodal sequences in algebra, combinatorics, and geometry. *in* "Graph Theory and its Applications: East and West," Annals of the New York Academy of Sciences, Volume 576, 1989, pp. 500–535.

（ひび たかゆき，大阪大学大学院理学研究科）