A3 特性関数

目次

$\boxed{1}$ 定義と反転公式 1

$\boxed{2}$ Bochner の定理 4

$\boxed{3}$ 無限分解可能な確率分布とその特性関数 6

$\boxed{4}$ 連続定理 9

$\boxed{5}$ 典型的な確率分布に関する特性関数 11

$\boxed{6}$ モーメント問題 13

$\boxed{7}$ 補　足 14

$\boxed{8}$ 文　献 17

A 3. 特性関数

[1] 定義と反転公式 （[4], [7], [9], [13], [14], [18], [20], [25] 参照）。

特性関数の定義については上にあげた参考文献は勿論のこと，確率論の多くの本にかいてある。また確率論の手引の"A 1 確率論"，"A 2 確率分布"に詳しくのべてあるので参照されたい。特に A.2 とは相当の部分において重複する。

[1.1] n 次元ユークリッド空間 R^n の確率分布 P（→ A.2 確率分布，§14）があるとき，

$$(1.1)\qquad \varphi(z) = E\{e^{i(z,x)}\} = \int_{R^n} e^{i(z,x)}\, dP(x), \qquad z\in R^n.$$

を 確率分布 P の 特性関数（*characteristic function, fonction caractéristique, charakteristische Funktion*）という。ここで，(z, x), $z\in R^n$, $x\in R^n$ は内積をあらわす。すなわち特性関数は、確率分布 P の *Fourier–Stieltjes* 変換である。特性関数の名は *P. Lévy* [20] による。またある確率空間 Ω $(\mathbb{B}, \mu)$ に定義された R^n の値をとる確率変数 $\{X(\omega), \omega\in\Omega\}$ があるとき，

$$P(x) = \mu\{\omega\,;\, X_1(\omega)\le x_1, \cdots, X_n(\omega)\le x_n\},$$
$$X(\omega) = (X_1(\omega), \cdots, X_n(\omega)), \quad x=(x_1,\cdots,x_n)$$

とおき，$P(x)$ から通常の方法で構成される n 次元確率分布の特性関数 $\varphi(z)$ のことを 確率変数 $X(\omega)$ の特性関数と呼ぶこともある。定義から明らかなように，特性関数に関しては測度の *Fourier* 変換の一般論が適用できる。確率論においては，特に、極限定理、加法過程、定常過程、超過程等との関連で研究されている。

確率分布と特性関数の関係で最も基本的なことはつぎのことである。：

1°）n 次元確率分布 P はその特性関数によって一意的に定まる。

2°）確率分布とその特性関数の間にはつぎの関係式が成立つ：任意の $a_p < b_p$, $p = 1, 2, \cdots, n$, に対して

$$(1.2)\qquad \int_{R^n} \prod_{p=1}^{n} f(x_p\,;\, a_p, b_p)\, dP(x) = \lim_{c\to\infty} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{-c}^{c}\!\cdots\!\int \prod_{p=1}^{n} \frac{e^{-ib_pz_p} - e^{-ia_pz_p}}{-iz_p}\, \varphi(z_1,\cdots z_n)\, dz_1\cdots dz_n\,,$$

ここで $f(y;a,b)$ は区間 $[a,b]$ の定義関数を $y=a$, $y=b$ では $1/2$ と修正したものである。もし R^n の区間

$$I:\ a_p \leq y \leq b_p,\quad p=1,2,\cdots\cdots,n,$$

が確率分布 P に関して連続区間ならば、(1.2) の左辺は $P(I)$ に一致する。この関係式を特性関数についての Lévy の反転公式という。([4],[10],[13],[20] 参照)。

$\boxed{1.2}$ 定義より直ちにわかるつぎのような性質がある。

1°) n 次元確率分布 P の特性関数 φ は R^n で一様連続で

$$\varphi(0)=1 \qquad |\varphi(z)|\leq 1 \qquad \varphi(-z)=\overline{\varphi(z)}$$

である。

2°) 2つの独立確率変数の和の特性関数は、個々の確率変数の特性関数の積になる。このことから、ある確率分布の特性関数があれば、その絶対値の2乗はまたある確率分布の特性関数になっている。

3°) n 次元確率分布 P の特性関数 φ について、任意の z に対して

$$1-\mathrm{Re}\,\varphi(2z) \leqq 4(1-\mathrm{Re}\,\varphi(z))$$

なる不等式が成立つ。このことから $e^{-|z|^\alpha}$ $2<\alpha<\infty$, $z\in R^1$, がある1次元確率分布の特性関数になり得ないことがわかる。

4°) 1次元確率変数 $\{X(\omega),\ \omega\in\Omega\}$ の取り得る値が $a+kh$, k は整数とあらわせるような a と h が存在するとき、$X(\omega)$ より定まる確率分布は格子型という。その時、格子型であるための必要かつ十分条件はその特性関数が0でない値 z に対して $|\varphi(z)|=1$ となることである。

5°) 1次元確率分布 P に対し、もし

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|^k \, dP(x) < \infty$$

ならば、確率分布 P の特性関数 $\varphi(z)$ について、

$$(1.3)\qquad \alpha_p=\int_{-\infty}^{\infty} x^p \, dP(x) = \frac{1}{i^p}\,\frac{d^p}{dz^p}\,\varphi(z)\Big|_{z=0},\quad p=1,2\cdots k$$

が成立つ。

$\boxed{1.3}$ (1.1)式を一般化して無限次元空間 R^T の確率分布 P についても考えられる(一)A.2、確率分布 §14)。R^T の中、台が有限集合になる元の全体を R^T_0 とする。

（1.4）　$\varphi(z)=\int_{R^T} e^{i(z,x)}\,dP(x),\quad z\in R_0^T$

を確率分布Pの<u>特性汎函数</u>という。ここで$(z,x)=\sum_{t\in T} z(t)x(t)$，$z\in R_0^T$である。

$\boxed{1.4}$　さらに一般に考えることもある（⟶ A.2。確率分布、§14）。Φをlocally convexな線型位相空間とする。そのときΦのdual空間Φ'のBorel cylinder setの全体$\widetilde{\mathbb{B}}$に定義された集合函数μがつぎの性質をみたすとき、それをΦ'のcylinder set上の測度とよぶ。
1）任意の$B\in\widetilde{\mathbb{B}}$に対して、$0\leqq\mu(B)\leqq 1$，2）．$\mu(\Phi')=1$．3）$B=\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n$，もし$n\neq m$ならば$B_n\cap B_m=\phi$，$B_n\in\widetilde{\mathbb{B}}$，でしかも共通の$\varphi_1,\cdots,\varphi_k\in\Phi$に対して

$$B_n=\{F;\ ((F,\varphi_1),\cdots,(F,\varphi_k))\in A_n,\ F\in\Phi'\},\quad n=1,2,\cdots,\ A_n\in\mathbb{B}^k$$

が成立するとき、$\mu(B)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu(B_k)$。
4）．任意のBorel cylinder set Bに対して，$\mu(B)=\inf\mu(U)$，ここでUは$U\supset B$なるすべての開cylinder setを動く。

Φ'のcylinder setの測度μは任意の$\varepsilon>0$と$A>0$に対してΦにおける0の近傍Uが存在して

$$\mu\{F;\ |(F,\varphi)|\geqq A\}<\varepsilon,\quad \varphi\in U.$$

のとき連続という。Φ'のcylinder set上の連続な測度μが与えられたとき

（1.5）　$C(\varphi)=\int_{\Phi'} e^{i(F,\varphi)}\,d\mu(F),\quad \varphi\in\Phi,$

をμの<u>特性汎函数</u>という。（〔7〕，〔25〕）。

[2.] Bochnerの定理　（[1], [7], [13], [14] 参照）

[2.1] n次元確率分布Pの特性関数$\varphi(z)$はつぎの性質をもつ。

1) 任意の$z^{(1)}, \cdots, z^{(k)} \in R^n$と任意の複素数$a_1, \cdots, a_k$に対して

$$\sum_{j,p=1}^{k} a_j \overline{a}_p \varphi(z^{(j)} - z^{(p)}) \geqq 0。 \tag{2.1}$$

2) $z^{(k)} \to 0$のとき$\varphi(z^{(k)}) \to \varphi(0)$,

3) $\varphi(0) = 1$。

上の逆を主張するのがBochnerの定理である。すなわち、上の1), 2), 3)をみたす関数，言いかえると$\varphi(0)=1$なる連続な正の定符号関数$\varphi(z)$はあるn次元確率分布Pにより（1.1）の形に書ける（[1], [3]）。この定理に相当することは正の定符号系列についても成立つ（Herglotzの定理，[11]）。一般にGを局所コンパクトな可換群とする。局所可積分函数$\varphi(z)$は任意の台がコンパクトなG上の連続函数fに対して，

$$\iint \varphi(xy^{-1}) f(x) \overline{f(y)}\, dx\, dy \geqq 0 \tag{2.2}$$

のとき，正符号と呼ばれる。eをGの単位元とするとき，$\varphi(e) \leqq 1$なる連続な正定符号関数$\varphi(z)$は指標群$\hat{G}$上に一意的に定まるRadon測度μで$\mu(\hat{G}) \leqq 1$となるものにより，

$$\varphi(z) = \int_{\hat{G}} \langle z, \chi \rangle\, d\mu(\chi), \qquad \langle z, \chi \rangle = \chi(z), \tag{2.3}$$

と書ける（[3], [21]）。

この他にpositive definiteな超関数に対する結果もある（[7], [26]）。それに関連してmultiplicativelly positive definiteな超関数という概念もある。これらについては[7], [26]等に詳しい。

[2.2] つぎに[2.1]の結果に対応する特性汎関数についての結果をのべる。Φをlocally convexな線型位相空間とすれば、Φのcylinder set上の連続な測度μの特性汎関数（1.4），$\psi \in \Phi$，はつぎの性質をみたす：

1) 任意の$\psi_1, \cdots \psi_n \in \Phi$と任意の複素数$a_1, a_2, \cdots, a_n$に対し

$$\sum_{i,j=1}^{n} C(\psi_i - \psi_j)\, a_i \overline{a_j} \geqq 0, \tag{2.4}$$

2) Φで$\psi_j \to 0$のとき，$C(\psi_j) \to C(0)$,

3) $C(0) = 1$。

逆に上の 1), 2), 3) をみたす $C(\varphi)$, $\varphi \in \Phi$, に対しては一意的に Φ' の cylinder set 上の連続な測度 μ が存在し, (1.4) の形にあらわすことができる。この結果は Φ にもう少し制限をおけば Bochner の定理の形に改めることができる。$\mathbb{B}$ を Φ' の cylinder set により生成される σ-algebra とする。

a) Φ が可算ヒルベルト空間で, "nuclear" の性質をみたすときは, 上の 1), 2), 3) をみたす, すなわち $C(0)=1$ なる連続な正定符号汎関数 $C(\varphi)$, $\varphi \in \Phi$, は $\Phi'(\mathbb{B})$ 上の完全加法的測度 μ（＝確率）で $\mu(\Phi')=1$ なるものの特性汎関数になる（[7], [23]）。

b) Φ が可算ヒルベルト空間で, "nuclear" の性質をみたす空間の系列 $\{\Phi^{(n)}\}$ の inductive limit であるとき, a) と同様なことが成立つ。

c) $B(\varphi_1, \varphi_2)$ を可算ヒルベルト空間 Φ の連続な非負 scalar product とするとき,

(2.5) $$C(\varphi) = \exp\left\{-\frac{1}{2} B(\varphi, \varphi)\right\}, \qquad \varphi \in \Phi,$$

は Φ での連続な正定符号汎関数で $C(0)=1$ である。(2.5) の形のものを特に Gauss型 の特性汎関数 という。Φ での Gauss 型の連続な正定符号汎関数が $\Phi'(\mathbb{B})$ 上の完全加法的測度 μ で $\mu(\Phi')=1$ なるもの, すなわち確率分布の特性汎関数であるための必要かつ十分条件は Φ が nuclear 空間であることである（[7], [27]）。

d) 上の a), b) のような空間 Φ の例としては Schwartz の意味の超関数の空間 $(\mathcal{S})$, $(\mathcal{D})$ 等がある。

3 無限分解可能な確率分布とその特性関数 （〔9〕,〔13〕,〔20〕〔24〕〔32〕 参照）

特性関数のうち、后でのべる意味の無限分解可能分布の特性関数は、Markov過程の中で典型的なクラスである加法過程と対応するので，Markov過程での研究および、確率分布の系列やMarkov過程の収束の問題においても重要な役割をもっている。

3.1. n次元確率分布Pが$\int_{|x|>\varepsilon} dP(x) < \varepsilon$ のとき $P \in \mathcal{U}(\varepsilon)$ と書くことにする。n次元確率分布Pが無限分解可能な分布であるとは，任意の$\varepsilon > 0$に対して $P = P_1 * P_2 * \cdots * P_n$; $P_k \in \mathcal{U}(\varepsilon)$, $k = 1, \cdots, n$ と分解できることである。ここに$*$は確率分布のConvolutionを表わす（$\longrightarrow$ B.2 加法過程）。この条件は任意のkに対して確率分布P_kが存在して，$P = P_k * P_k * \cdots * P_k$（$k$箇）なることと同等である。このときつぎのようなことが成立つ。

3.1.1. n次元確率分布Pが無限分解可能であるための必要かつ充分条件はその特性関数 $\varphi(z)$ が任意の自然数kに対して，あるn次元確率分布の特性関数 $\varphi_k(z)$ が存在して

$$\varphi(z) = (\varphi_k(z))^k$$

とあらわされることである。

3.1.2. n次元確率分布Pが無限分解可能であれば、その特性関数は決してvanishしない。

3.1.3 $\varphi(z)$, $z \in R^1$ が1次元無限分解可能な確率分布の特性関数であるための必要かつ充分条件は、つぎの形にあらわされることである：

$$(3.1). \quad \varphi = \exp\left\{ i\gamma z + \int_{R_1} \left\{ e^{izu} - 1 - \frac{izu}{1+u^2} \right\} \frac{1+u^2}{u^2}\, dG(u) \right\}.$$

ここでγは実な定数，$G(u)$は有界変分な非減少函数である。$u=0$における（3.1）の右辺の被積分関数は方程式

$$\left(\left\{ e^{izu} - 1 - \frac{izu}{1+u^2} \right\} \frac{1+u^2}{u^2} \right)_{|u=0} = -\frac{z^2}{2}$$

で定義する。しかも（3.1）の表現は一意的である。（3.1）を無限分界可能な確率分布の特性関数に関するLévy-Khinchine型表現という。

3.1.4. 無限分解な1次元確率分布Pの特性関数 $\varphi(z)$はまたつぎのようにも表わせる：

$$(3.2)\qquad \varphi(z) = \exp\left[imz - \frac{v}{2}z^2 + \int_{R^1}\left\{e^{izu} - 1 - \frac{izu}{1+u^2}\right\} n(du)\right].$$

ここで m は実な定数，$v \geqq 0$，n は測度で，$n(\{0\})=0$ かつ $\int_{R^1}\frac{u^2}{1+u^2}n(du) < \infty$，しかも m, v, n は P に関して一意的に定まる。これを無限分界可能な確率分布の特性関数に関する Lévy 型の表現という。n次元の場合も（3.2）と同様な式が成立つ。すなわち，

$$(3.3)\qquad \varphi(z) = \exp\left[i(m,z) + \sum_{p,q=1}^{n} C_{pq} z_p z_q + \int_{R^n}\left\{e^{i(z,x)} - 1 - \frac{(z,x)}{1+|x|^2}\right\} n(dx)\right]$$

$$m=(m_1,\cdots,m_n),\quad z=(z_1,\cdots,z_n) \in R^n,$$

である。ここで $\{C_{pq}\}$ は、Positive definite な行列 $n(dx)$ は R^n の上の測度で $n(\{0\})=0$，$\int \frac{|x|^2}{1+|x|^2} n(dx) < \infty$ をみたす。（3.2），（3.3）の測度 $n(dx)$ を無限分解可能分布の Lévy 測度 という。

3.1.5　とくに無限分解可能な1次元確率分布 P が $\int_{R^1} x^2 dP(x)$ をみたすならば，その特性関数は

$$(3.4)\qquad \varphi(z) = \exp\left\{imz + \int_{-\infty}^{\infty}\left\{e^{izu} - 1 - izu\right\}\frac{1}{u^2}\, dK(u)\right\}$$

と書ける。mは実な定数、$K(u)$ は $K(-\infty)=0$ でしかも有界変分な非減少関数。この（3.4）は無限分解な確率分布の特性関数に関する Kolmogorov 型表現という。このとき，

$$\left[\frac{d}{dz}\log\varphi(z)\right]_{z=0} = im,\quad \left[\frac{d^2}{dz^2}\log\varphi(z)\right]_{z=0} = -\int_{-\infty}^{\infty} dK(u)。$$

$\boxed{3.2}$　$X = (x_t, \zeta, \mathcal{M}_t, P_x)$，$x \in R^n$，は時間的にも空間的にも一様な Markov 過程とする。適当に構成することにより，X は standard な Markov 過程になっていると考えることができる。そのとき，X を R^n の加法過程という。（⟶ B.2. 加法過程）。

X の道 $x_t(\omega)$ に関し、$x_1(\omega) - x_0(\omega)$ の確率分布亜をを考えると，それは無限分解可能で，その特性関数を $\varphi(z) = \exp\{\psi(z)\}$ とおけば，

$$(3.5)\qquad E_x\left\{e^{i(x_t(\omega)-x_0(\omega))z}\right\} = \exp\{\psi(z)t\}$$

となる。逆に任意に無限分解可能な確率分布を与えると，（3.5）の関係をみたす時間的に一様な加法過程が同等なものを除いて唯一つ存在する。

いま 1次元加法過程Xを考え，A_t を X の non-negative な連続な additive functional とするとき，$(\Pi(x,dy), A)$ が X の Lévy *system* であるとは、任意の $\varepsilon > 0$ に対し、$f \in C_\varepsilon(R^1 \times R^1)$ をとって来ると、

$$E_x\left\{\int_0^t \Pi f(x_s(\omega))\, dA_s(\omega)\right\} = E_x\left\{\sum_{s \le t} f(x_{s-}, x_s)\right\}$$

が成立つことである。ここで $\Pi f(x) = \int_{R^1} \Pi(x, dy) f(x, y)$ で，$C_\varepsilon(R^1 \times R^1) = \{f\,;\, f(x,y) = 0,\ |x - y| \le \varepsilon,\ x, y \in R^1\}$ とする。Xに対しては，$A_t = t \wedge \zeta$ ととることができて、こうとった時の *Lévy system* を $\{n(x, dy), A\}$ とおけば，$n(x, E) = n(0, E - x)$ の関係が成立ち、それはその加法過程に対応する無限分解可能な分布の *Lévy* 測度になる。

また X に対応する平均 0 の *additive functional* A_t で $\int_0^\infty e^{-\lambda t} E_x(A_t^2)\,dt < \infty$，$x \in R^n$，なる λ が存在するもの全体を $\mathfrak{A}$ とすれば; $\mathfrak{A}$ の元で連続なものの全体 $\mathfrak{A}_c$ とおくとき $\mathfrak{A}$ は $\mathfrak{A}_c$ とそれに直交する $\mathfrak{A}_d$ に分解できる。上の *Lévy* 測度は $\mathfrak{A}_d$ の構造を定めている（[13], [20], [24]）。従って Xが連続部分を持たない時は、Xに対応する *Dirichlet norm* は X の *Lévy* 測度で表現される。

$\boxed{3.3}$ 　無限分解可能な確率分布の問題は R^n の加法過程との対応から考えて，空間的に一様という概念をもつ均質空間（*homogeneous space*）のときに考えることができる。最近無限分解可能な確率分布の特性関数はこの立場から盛んに研究されている（⟶ B.2. 加法過程，[1], [6], [12], [15]，[20], [31]，その他）。ここでは最も典型的なものとして 3次元で原点が中心で半径 1 になる球面 S^2 の例だけをあげておく。Gを回転群とする。点 0 を（1, 0, 0）とし，それを不変にするGの全体をHとする。H不変な関数や測度は $x = \cos\theta$ （点 $P \in S^2$ の x 座標）のみに関係する。このとき、無限分解可能な確率分布の特性関数は

$$C_n = \exp\left\{-\sigma n(n+1) - \int_{-1}^{1-0} \frac{1 - P_n(x)}{1 - x}\, dG(x)\right\}$$

なる系列になる。ここで $P_n(x)$ は *Legendre* の多項式で，$G(A)$ は $[-1, 1]$ 上の正の測度で $\int_{-1}^{1-0} dG(x) < \infty$ であり，σ は非負の実数である。

4 連続定理 （[4], [8], [13], [14], [20] 参照）。

特性関数は確率分布と1対1に対応するのみならず、その収束が確率分布の収束と対応するので、極限定理の理論で，特に重要な役割を持っている。この種のことは最近特性汎函数についても研究されている。そのことについては A.2、確率分布 §7－§14 で述べられている（[16], [19], [25], [29], [30] 参照）。ここでは基本的な n 次元の場合に限ってのべる。

4.1 1) n 次元分布の系列 $\{P_k\}$ がある n 次元の確率分布 P に収束すれば，P_k の特性関数 φ_k は P の特性関数 φ に広義一様収束する。

2) 逆に n 次元確率分布 P_k の特性関数 φ_k が n 次元確率分布 P の特性関数 φ に収束すれば，P_k は P に収束する（[8]）。

3) n 次元確率分布 P_k の特性関数 $\varphi_k(z)$ が各点で収束し、しかも収束が $z=0$ の近傍で一様ならば、極限関数 $\varphi(z)$ はある n 次元確率分布 P の特性関数で，P_k は P に収束する（[20]）。これを Lévy の連続定理という。

4.2 特に無限分解可能な1次元確率分布 P_k がある無限分解可能な確率分布へ収束するための必要かつ充分な条件は $k\to\infty$ のとき

1) $G_k(x)$ が測度の意味で $G(x)$ に収束し

2) $\gamma_k \to \gamma$ であることである。

ここで G_k, γ_k, G, γ は P_k, P にそれぞれ対応して Lévy-Khinchine 型の表現 (3.1) 式で定義されるもの。

さらに有限な分散をもつ無限分解可能な1次元確率分布 P_k が無限分解可能な P に収束し，P_k の分散が P の分散に収束するための必要かつ充分条件は、$k\to\infty$ のとき，

1) $K_k(u)$ が測度の意味で $K(u)$ に収束し，

2) $m_k \to m$ なることである。

ここで $K_k(u)$, m_k, K, m は P_k, P に対応し、Kolmogorov 型の表現 (3.4) で定まるものである。

4.3 一般の独立確率変数列の和の極限定理の基礎を与えるのはつぎの結果である。

$\{\xi_{nk}(\omega)\}$ は独立1次元確率変数列で任意の $\varepsilon>0$ に対して $\sup_{1\le k\le k_n} P\{|\xi_{nk}|\ge\varepsilon\}\to 0$ とする。$\xi_{nk}(\omega)$ の定める1次元確率分布を $F_{nk}(x)$ とす。その時適当に A_n をえらび

$$S_n(\omega) = \sum_{k=1}^{k_n} \xi_{n,k}(\omega) - A_n$$

の分布函数がある一つの極限分布へ収束するための必要かつ充分条件は、つぎのような条件をみたす $(-\infty, 0)$; $(0, +\infty)$ に定義された非減少関数 $M(u)$, $(M(-\infty)=0)$, $N(u)$ $(N(+\infty)=0)$ とある定数 $\sigma \geqq 0$ が存在することである：

1) $M(u)$, $N(u)$ の連続点で

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_n} F_{nk}(u) = M(u), \qquad u < 0.$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_n} (F_{nk}(u) - 1) = N(u), \qquad u > 0.$$

2)
$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varliminf_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \left\{ \int_{|x|<\varepsilon} x^2 dF_{nk}(x) - \left(\int_{|x|<\varepsilon} x\, dF_{nk}(x) \right)^2 \right\}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \varlimsup_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \left\{ \int_{|x|<\varepsilon} x^2 dF_{nk}(x) - \left(\int_{|x|<\varepsilon} x\, dF_{nk}(x) \right)^2 \right\} = \sigma^2 .$$

しかもこのとき上の A_n は

$$A_n = \sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x|<\tau} x\, dF_{nk}(x) - \gamma(\tau)$$

ととれる。ここで $\gamma(\tau)$ は任意の定数で、$-\tau$ と τ は $M(u)$ と $N(u)$ の連続点。（[9] 参照）。

$\boxed{4.4}$ その他，*local limit theorem* や *stable law の attraction domain* に関する特性関数の性質について等多くの研究があるが、それらに関しては特に [9] に詳しい。

[5] 典型的な確率分布に関する特性関数 （[4], [7], [9], [13] 参照）

[5.1] 先ず特性関数の典型的な例として，つぎのようなものがある。

a) n 次元正規分布の特性関数：

$$\varphi(z) = \exp\left\{ i\,(m, z) - \frac{1}{2} z v z' \right\},$$

ここで $m \in R^n$, v は $n \times n$ 対称狭義正定符号行列 (v_{ij}) で，

$z' = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$, $\quad z v z' = \sum_{i,j} z_i v_{ij} z_j$ である。

b) Poisson 分布の特性関数：

$$\varphi(z) = \exp\{\lambda(e^{iz} - 1)\}, \qquad 0 < \lambda < +\infty$$

c) Cauchy 分布の特性関数：

$$\varphi(z) = \exp\{imz - C|z|\}, \quad 0 < C < \infty, \quad -\infty < m < \infty.$$

d) 安定分布の特性関数： $0 < \alpha \leqq 2$ に対して

$$\varphi(z) = \exp\left\{ i\gamma z - C|z|^{\alpha} \left[1 + i\beta \frac{z}{|z|}\, \omega(z, \alpha) \right] \right\},$$

$$w(z, \alpha) = \begin{cases} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2}\alpha, & \alpha \neq 1, \\ \frac{2}{\pi} \log|z|, & \alpha = 1. \end{cases} \qquad \gamma \in R^1, \quad 0 \leqq C < \infty, \ |\beta| \leqq 1.$$

とくに，$\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = 1$, $\gamma = 0$, $C = 1$ とすれば，それに対応する確率分布の Lebesque measure に関する密度函数 $p(x)$ は

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2x}}\, x^{-\frac{3}{2}}, & x > 0, \end{cases}$$

にとれる。この分布は1次元 Brown 運動に関する first hitting time の分布としてあらわれる。

e) 2項分布の特性関数：

$$\varphi(z) = (pe^{iz} + q)^n, \qquad p, q > 0, \quad p + q = 1.$$

f) Γ型の分布の特性関数：

$$\varphi(z) = \left(1 - \frac{iz}{c}\right)^{-\gamma} \qquad c > 0, \quad \gamma > 0.$$

このときの分布の Lebesque measure に関する密度函数は

$$p(x) = \begin{cases} \frac{c^{\gamma}}{\Gamma(\gamma)}\, x^{\gamma-1} e^{-cx}, & x > 0, \\ 0, & x \leqq 0, \end{cases}$$

である。

$\boxed{5.2}$ つぎに特性汎函数の例をのべる。$\boxed{2}$ でのべたことから $(\mathcal{D})'$ に確率分布 P が定義可能であるが，そのとき $\varphi_1 \cdot \varphi_2 = 0$ なる任意の $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}$ に対して $X(\varphi_1)$，$X(\varphi_2)$ が測度 P に関して独立であれば，$\{\mathcal{D}', \mathbb{B}(\mathcal{D}'), P\}$ は 各点独立な超過程 とよばれる。このとき，その特性汎函数 $C(\varphi)$ は $\varphi_1 \cdot \varphi_2 = 0$，$\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}$ ならば

(5.1) $$C(\varphi_1 + \varphi_2) = C(\varphi_1)\, C(\varphi_2)$$

なる関係式をみたす。(5.1) をみたす $C(\varphi)$ をすべて決定することは未解決であるが，$e^{f(z_1, \cdots, z_n)}$ を n 次元確率分布で無限分解可能なものの特性関数とするとき，

$$C(\varphi) = \exp\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(\varphi(t), \varphi^{(1)}(t), \cdots, \varphi^{(n-1)}(t))\, dt \right\}$$

は各点独立な超過程の特性汎函数になる（[7]）。

そのなかで，特に典型的なものは

$$C(\varphi) = \exp\left\{ -c \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|^2\, dt \right\}, \qquad 0 < c < \infty, \qquad \varphi \in (\mathcal{D}),$$

で，*white noise* の 特性汎函数 とよばれる。

6 モーメント問題 （[28] 参照）。

6.1 これまで Fourier 変換としての特性関数が確率論の研究で有効であることをのべて来たが，つぎのような Laplace 変換が便利なことも多い。

$$\varphi(z)=\int_0^\infty e^{-zx}\,dP(x),\quad \varphi(z)=\int_{-\infty}^\infty e^{-zx}\,dP(x).$$

たとえば 片側安定分布では上の片側 Laplace 変換が有効で，それは

$\exp\left\{-\dfrac{c_0}{\cos\frac{\pi}{2}\alpha}z^\alpha\right\}$ の形に書ける。

また

$$(6.1)\qquad P(x)=\sum_{k\le[x]}a_k,\quad a_k>0,\quad \sum_{k=0}^\infty a_k=1,$$

のときは

$$(6.2)\qquad \varphi(s)=\sum_{k=0}^\infty a_k s^k,\qquad -1\le s\leqq 1,$$

なる母函数を用いることもある。いま $\{a_{k,n}\}$，$\{a_k\}$ は (6.1) の条件をみたし，(6.2) 式でそれぞれに対応して $\varphi_n(s)$，$\varphi(s)$ が決まるとする。そのとき，すべての固定した k に対して，$n\to\infty$ のとき

$$a_{k,n}\to a_k$$

なるための必要かつ充分条件は，$0\le s<1$ なる任意の s に対し

$$\varphi_n(s)\to\varphi(s)$$

なることである。また $m_n=\int_{-\infty}^\infty x^n\,dP(x)<+\infty$，$n=0,1,2,\cdots$，のとき

$$F(s)=\sum_{n=0}^\infty\frac{m_n}{n!}s^n$$

が収束するとき，モーメント母函数という。

6.2 1次元分布の列 P_k と1次元分布 P があり，

$$\lim_{k\to\infty}\int_{-\infty}^\infty x^n\,dP_k(x)=\int_{-\infty}^\infty x^n\,dP(x)<\infty,\qquad n=0,1,2,\cdots$$

で $\sum_{n=1}^\infty \mu_n^{-1/n}=\infty$，$\mu_n=\int_{-\infty}^\infty|x|^n\,dP(x)<\infty$ ならば，P_k は P に収束する（[17] 参照）。

$\boxed{6.3}$　m_n, $n=0,1,2,\cdots$ なる実数列を与えたとき，

$$(6.3)\qquad m_n=\int_{-\infty}^{\infty} x^n\, d\alpha(x)$$

なる非減少函数 $\alpha(x)$ を求めることを Hamburger モーメント問題という。(6.3) 式で積分範囲を $[0,\infty)$ にしたものを Stieltjes モーメント問題という。積分範囲を $[0,1]$ にし，α を有界変動としたとき，Hausdorff モーメント問題という。但しこの場合も α を非減少函数とすることもある。これらの問題の解の存在については [2], [28] 等を参照。

$\boxed{7}$ 補足

$\boxed{7.1}$　(1.3) 式により，$\int_{-\infty}^{\infty}|x|^k\,dP(x)<\infty$, $k=1,2,\cdots,n$ のときは

$$\varphi(z)=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_k}{k!}(iz)^k+o(z^k),\qquad z\downarrow 0,$$

となる。ここで α_k は (1.3) で与えられるもの。また

$$\log\varphi(z)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\gamma_k}{k!}(iz)^k+o(z^k),\qquad z\downarrow 0,$$

である。この γ_k は半不変値である。類似の結果の計算が特性汎函数についても行われている（[25]）。

$\boxed{7.2}$　特性関数 $\exp\{imz-\frac{vz^2}{2}\}$ の1次元 Gauss 分布を $N^{m,v}$ とし，特性関数 $\exp\{iza+\lambda(e^{iz}-1)\}$ の Poisson 分布を $P^{\lambda,a}$ とする。

$$N^{m,v}=\Phi_1*\Phi_2,\qquad P^{\lambda,a}=\tilde{\Phi}_1*\tilde{\Phi}_2,$$

で Φ_k, $\tilde{\Phi}_k$, $k=1,2$, は1次元確率分布とすれば，$\Phi_k=N^{m_k,v_k}$, $\tilde{\Phi}_k=P^{\lambda_k,a_k}$, $k=1,2$, となる。これはそれぞれ Camér および Raikov の定理として知られている。一般に分布のある族 $\mathcal{L}=\{\Phi\}$ が $*$ でとじているとき，上のような定理が成立つのはどのような時かという問題がある（分解問題）。この問題の研究には，特性関数の解析関数的考察が特に重要である。それらについては Linik [22] 参照。

$\boxed{7.3}$ ここにのべた以外にも特性関数については非常に多くの研究がある。これらに関しては [1], [4], [9], [13], [14], [20], [22] 等を参照されたい。また最近も homogeneous space の場合や, nuclear space の場合に関連した研究が多く行われている。

あとがき

この項目は 渡辺(信), 野本氏の協力を得て 池田が書いた。

白尾, 十時両氏には討論の段階で協力を得た。

索　　引

項　目	頁
B	
Bochner の定理	4
母函数	13
モーメント ――	13
H	
半不変値	14
Herglotz の定理	4
L	
Lévy の反転公式	2
Lévy の連続定理	9
Lévy system	7
M	
multiplicativelly 超関数	4
無限分解可能な分布	6
―― の Lévy 測度	7
モーメント問題	3
Hamburger の ――	14
Stieltjes の ――	14
Hausdorff の ――	14
P	
positive definite な超関数	4
T	
特性関数	1
確率分布 P の ――	1
確率変数 $X(\omega)$ の ――	1
n 次元正規分布の ――	11
Poisson 分布の ――	11
Cauchy 分布の ――	11
安定分布の ――	11
2項分布の ――	11
Γ型の分布の ――	11
―― Lévy-Khinchine 型の表現	6
―― Lévy 型の表現	7
―― Kolmogorov 型の表現	7
特性汎函数	3, 5, 12
各点独立な超過程の ――	12
white noise の ――	12

8 文 献

[I] Bochner, S. Vorlesunger über Fourierhe Integrale. Leipzig, 1932.

__________. Harmonic analysis and the theory of probability. Univ. of Calif. press. 1955.

__________. Positive zonal functions on spheres. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 40 (1954).

[2] Carleman, T. Sur le probléme des moments. Comptes Rendus, 174 (1922).

__________. Sur le équations intégrales singulières a noyau réel et symétrique. Uppsala Univ. Årsskrift, 1923.

__________. Les fonctions quasi-analytiques. Gauthier-Villars. Paris, 1926.

[3] Cartan, H – Godement, R. Analyse harmonique et theorie de la dualité dans les groupes localement compacts abelians, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 64, 1947.

[4] Cramer, H. Random variables and probability distributions. Cambridge Tracts in Math. 36, 1937.

[5] Feller, W. An introduction to probability theory and its application. New York, 1957.

[6] Getoor, R. K. Infinitely divisible probabilities on the hyperbolic plane. Pacific J. Math. 11 (1961).

[7] Гельфанд, И. М — Виленкин, Н. Я. Обобщенные функции. 4, 1961.

[8] Glivenko, V. Sul teorema limite della teoria delle funzioni caracteristische. Giornale d. istituto italiano d attuari. 7 (1936).

[9] Gnedenko, B. V – Kolmogorov, A. N. Limit distributions for sums of independent random variables. Cambridge, Addison – Wesley, 1954.

[10] Haviland : On the inversion formula for Fourier-Stieltjes transforms in more than one dimension. Amer.

J. Math. 57, 1935.

[11] Herglotz, G: Über Potenzreichen mit positiven. reelem Teil in Einheitskreis. Lepz, Ber. 63, 1911.

[12] Hunt, G: Semi-groups of measures on Lie groups. Trans. Amer. Math. Soc. 81 (1956).

[13] 伊藤 清,: 確率論, 岩波, 東京, 1953.

[14] 河田龍夫 : フーリエ解析と確率論, 中文館, 東京, 1947.

[15] Karpelevic, F, I - Tutubalin, V. N. - Sur, M, G. Limit theorems for compositions of distributions in the Lobacevski plane and space" Theory of prabability theory and its application. 4 (1959).

[16] Kallianpur: The topology of weak convergences of probability measures. Jour. Math. & Mech. 10 (1961).

[17] Kac, M. Probability and related topics in physical sciences. Interscience Pub. LTD. London, 1957.

[18] Kolmogorov, A. N. La transformation de Laplace dans les espaces linéaires. C. R. Acad. Sci. 200 (1935).

[19] Le Cam. L. Convergence in distribution of stochastic processes. Univ. Calif. Publ. Stat. 2 (1957).

[20] Lévy, P. Calcul des probabilités. Gauthier-Villars, Paris. 1925.

——— Theorie de l'addition des variables aléatoires. Gauthier - Villars. Paris. 1937.

——— Processus stochastiques et mouvement Brownian. Paris. Gauthier - Villars. 1948.

[21] Loomis. L. H. An introduction to abstract harmonic analysis. D. Van. Nostrand Company. Inc. New York 1953.

[22] Линик, Ю. В. Разложения вероятносных законов. Ленинградского Унив. 1960.

[23] Минлос, Р. А, Обобщенные случайные процессы и их продолжение до меры. Труды Моск. матем. обва. 8. (1959).

[24] 本尾 実. マルコフ過程の Additive functional. Seminar on Prob. 15, 1963.

[25] Prohorov, Yu. V. The convergence of random processes and limit theorems in the theory of probability. Theory of probability and its applications. 1, 1956.

________. The method of characteristic functionals. Proc. of Fourth Berkeley Symp. on Math. Stat. and Prob. theory. Univ. of California Univ. Press. 1961.

[26] Schwartz, L. Théorie des distributions. I & 2, Paris, 1950.

[27] Сазонов, В. Замечание о характеристических функционалах. Theory of probability and its applications. 3 (1958).

[28] Shohat, J, A - Tamarkin, J, D. The problem of moments. Amer. Math. Soc. 1943.

[29] Varadarajan, V. S - Rao, R. R. On a theorem in metric spaces. Ann. Math. Stat. 29 (1959).

[30] Varadarajan, V. S. Weak convergence of measure in separable metric space. Sankya. 19 (1958).

________. Measures on topological spaces Mat. Sbor. 55 (1961).

________.

[31] Wall, J. Homogeneous stochastic processes. Pacific J. Math. 9 (1959).

[31] 渡辺信三他 : 安定過程. Seminar on Prob. 13, 1962.