B 2 加法過程

目　　次

凡　　例

R^N ： N次元ユークリッド空間　$x=(x_i)$，$y=(y_i)\in R^N$に対し$x\cdot y=\sum_{i=1}^{N}x_iy_i$（内積）とする。特に　$x^2\equiv|x|^2=\sum_{i=1}^{N}x_i^2$

$C(R^N)$ ： R^N上の有界連続函数の全体

$C^n(R^N)$ ： f及びそのn回までの微係数がすべて$C(R^N)$に属する函数fの全体

$C(\overline{R}^N)$ ： $f\in C(R^N)$で特に$\lim_{|x|\to\infty}f(x)$が存在するもの全体

$C_0(R^N)$ ： $f\in C(R^N)$で特に$\lim_{|x|\to\infty}f(x)=0$なるもの全体

$C_K(R^N)$ ： $f\in C(R^N)$で台がcompactなもの全体

$C^n(\overline{R}^N)$（$C_0^n(R^N)$，），$f\in C^n(R^N)$でn回までの各微係数が$C(\overline{R}^N)$（$C_0(R^N)$）に属するもの

一般にXを位相空間とするとき$C(X)$はX上の有界連続函数の全体

$\mathcal{D}(R^N)$ ： Schwartz の空間$=C_K(R^N)\cap\bigcap_{n=1}^{\infty}C^n(R^N)$

$\mathcal{D}'(R^N)$ ： $\mathcal{D}$のdual ： 超函数の空間

1　定義と基本的性質

1.0　定義

ある確率空間$\Omega(\mathbb{B}.P)$上に定義された実数値或いはR^Nの値をとる確率過程$X(t)$；$t\in T=[0,\infty]$ ($X(0)\equiv 0$)が加法過程であるというのは任意の時点列$0=t_0\leq t_1\leq t_2\cdots\leq t_n$に対し$X(t_i)-X(t_{i-1})$ ($i=1,2,\cdots n$)が互いに独立なことと定義する。

特に$X(t)-X(s)$の分布が$t-s$にのみ関係するとき時間的に一様(temporally homogeneous)な加法過程という。

二つの加法過程，$X_1(t)$と$X_2(t)$があって，すべてのt，sに対し$X_1(t)-X_2(s)$と$X_2(t)-X_2(s)$の分布がひとしいとき，$X_1(t)$と$X_2(t)$を同一視する。

場合によっては加法過程の定義を少し一般化して次のようにしておく事もある。

$\Omega(\mathbb{B}.P)$の上にBorel 集合族の系$\{\mathbb{B}_t\subset\mathbb{B},\ t\in[0,\infty]\}$が与えられ$\mathbb{B}_t\subset\mathbb{B}_{t'}$ ($t<t'$)とする。確率過程$X(t)$ ($X(0)\equiv 0$)が$\mathbb{B}_t$に関する加法過程であるというのは

i) $X(t)$は$\mathbb{B}_t$可測

ii) $X(t')-X(t)$は$\mathbb{B}_t$と独立($t'>t$)

のことと定義する。

注意　$F_t=B(X_s : s\leq t)$ ($X_s : s\leq t$を可測にする最小のBorel 集合族)

とおくと$F_t\subset\mathbb{B}_t$であり，

B_tに関する加法過程があればそれは又，F_tに関する加法過程になる。即ち最初の定義に於る加法過程になる。

1.1　Markov過程としての加法過程

R^Nの値をとる時間的に一様な加法過程$X(t)$は次のようにして State space R^N上のMarkov 過程と考えることができる。

R^Nの値をとる$T=[0,\infty]$上の函数全体を$\mathbb{W}$，そのCylinder Set より生成されるBorel 集合族を$\mathbb{B}(\mathbb{W})$とし，

$x\in R^N$と$B\in\mathbb{B}(\mathbb{W})$に対し

$P_x(B)=P(x+X(\cdot)\in B)$とおくことにより$\mathbb{W}$，$\mathbb{B}(\mathbb{W})$の上に確率測度の系$\{P_x\}$が定義される。

このとき$\mathbb{M}=(\mathbb{W},\mathbb{B}(\mathbb{W}),P_x,x\in R^N)$はMarkov 過程になり，次の性質をもつ。

今WからWへの変換τ_x，$x\in R^N$を　$\tau_x\omega(t)=x+\omega(t)$　$\omega\in W$で定義するとき

$$P_x(B)=P_y(\tau_{y-x}(B))$$

この性質をもつR^N上のMarkov 過程を空間的に一様(spacially homogeneous)なMarkov 過程という。

定理 (K. Ito 〔111〕参照)

R^Nの加法過程より上のように導びかれたR^NのMarkov過程は，空間的に一様であり，逆にR^N上の空間的に一様なMarkov 過程は必らずある加法過程より上のようにして導くことができる。

注意：この定理はR^Nの加法過程とR^Nの空間的に一様なMarkov 過程が本質的に同じものであることを示している。尚あとで注意するごとく時間的に一様な加法過程はLévy過程でその見本過程は第1種不連続かつ右連続にとれる。

1.2　固定不連続点，Lévy 過程

以下の議論はK. Ito 〔109〕による。

今R^1上の値をとる確率変数をX，その分布を$\Phi_x(dx)$とする。

$$\delta(X)=-\log\left[\iint e^{-|x-y|}\Phi_X(dx)\Phi_X(dy)\right]$$

とおいて，これをXの(又はΦ_Xの)散布度という。又，X_tが加法過程であると　$\delta(X_t)$はtの増加函数になる(散布度増加の原理)。このときX_tは次のように分解できる。

$$X_t=u_t+v_t+g(t)$$

ここで$g(t)$はtのみの函数。$\delta(u_t)$は連続　$E(\tan^{-1}u_t)=0$　　$\delta(v_t)$は純粋不連続。$E(\tan^{-1}v_t)=0$　かつ　u_t，v_t　は互に独立な加法過程である。

$\delta(v_t)$の不連続点の全体は$\delta(X_t)$の不連続点の全体Dと一致する。$t\in D$をX_tの固定不連続点という。

この分解により加法過程の研究においては$\delta(x_t)$が純粋不連続なものと，$\delta(X_t)$が連続なものとをそれぞれしらべればよい。

前者は次の構造をしている。高々可算個の時点の集合　$D=\{S_i\}$と二つの互に独立な独立確率変数$\{\xi_i\}\{\eta_i\}$と数列の系$\{C_t^{(n)}\}$　$t\in T$に対し

$$X_t=\lim_{n\to\infty}\sum_{\substack{i\leq n\\ S_i<t}}(\xi_i+\eta_i)-C_t^{(n)}\qquad t\notin D$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{\substack{i\leq n\\ S_i<t}}(\xi_i+\eta_i)+\xi_k-C_t^{(n)}\qquad t=S_k\in D$$

次に$\delta(X_t)$が連続になる。すなわち固定不連続点をもたない加法過程は次の意味で確率連続になる

$t \in T$に対し　$P(|x_s - x_t| > \varepsilon) \to 0\ (s \to t)$が各　$\varepsilon > 0$に対してなりたつ。

X_tをこのような加法過程とするとき加法過程Y_tが存在して

i）　殆んどすべての見本過程は第1種不連続かつ右連続

ii）　各$t \in T$について　$P(X_t = Y_t) = 1$

このようなY_tは一意的に定まる。(Doob [57]) Y_tをX_tの標準変形(standard modification)という。固定不連続点をもたない加法過程は常にその標準変形をとつて考えると都合がよい。ここで一般に固定不連続点をもたない加法過程でその見本過程が確率1で第1種不連続かつ右連続なものをLévy 過程とよぶ。以上であきらかなように加法過程の研究は本質的にはLévy 過程の研究になる。

注意1　時間的に一様な加法過程では固定不連続点は存在しない。特にそれはLévy 過程である。

注意2　以上のことはR^Nでも同様である。

注意3　時間的に一様なLévy 過程をR^NのMarkov 過程と考えたとき，その半群は$C_0(R^N)$をそれ自身にうつし強連続になる。特にそれはMarkov 過程である。逆にこのような半群をもつ空間的に一様なMarkov 過程は時間的に一様なLévy 過程から導かれる。

1.3　無限分解可能な分布とLévy 過程

ここでは無限分解可能な分布の定義，標準形及びLévy 過程との対応について述べる。

R^Nの分布が　$\int_{|x|>\varepsilon} \Phi(dx) < \varepsilon$のとき$\Phi \in v(\varepsilon)$とかく。$\Phi$が無限分解可能な分布であるとは，任意の$\varepsilon > 0$に対し　$\Phi = \Phi_1 * \Phi_2 * \cdots\cdots * \Phi_n$; $\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_n \in v(\varepsilon)$という形で分解がなりたつことと定義する。(ここに$*$はconvolution ; 即ち$\Phi_1 * \Phi_2(E) \equiv \int_{R^N} \Phi_1(E-x)\Phi_2(dx) = \int \Phi_2(E-x)\Phi_1(dx)$で定義される演算)

正規分布　$N(\cdot m, v) = N_1 * \cdots * N_n$:

$$N_1 = \cdots = N_n = N\left(\cdot \frac{m}{n} \cdot \frac{v}{n}\right)$$

($N(\cdot m \cdot v)$は平均m，分散vの正規分布)

Poisson分布　$P(\cdot \lambda) = P_1 * \cdots * P_n$

$$P_1 = \cdots = P_n = P\left(\cdot \frac{\lambda}{n}\right)$$

($P(\cdot \lambda)$: 平均λのpoisson分布)

であるからどちらも無限分解可能な分布になる。

注意　無限分解可能な分布は次のように定義してもよい。

任意のnに対し，分布Φ_nが存在し

$$\Phi=(\Phi_n)^{*n} \quad (n\text{回の convolution}).$$

Lévy 過程X_tに於てX_1-X_0の分布をΨとするとΨが無限分解可能な分布であることが簡単に分るが逆に次の定理がなりたつ。

$\boxed{\text{定理}}$

無限分解可能な分布Φに対して，Lévy 過程X_t，を適当に定めて，X_1-X_0の分布をΦにひとしくすることができる。（実は時間的に一様なLévy 過程をたゞ一つ得ることができる

次に無限分解可能な分布の標準形を示そう。特性函数：$\varphi(z)=\int_{R^N} e^{tzx}\Phi(dx)$ とおくとき

$\boxed{\text{定理}}$ 無限分解可能な分布Φの特性函数$\varphi(z)$は次の形に表現される。（Lévyの標準形）

$$\varphi(z)=\exp\left\{imz-\frac{v}{2}z^2+\int_{R^N}\left(e^{tzu}-1-\frac{izu}{1+u^2}\right)n(du)\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (1.1)$$

こゝにmは実数$v\geqq 0$，nは測度で$n\{0\}=0$ 又 $\int_{R^N}\frac{u^2}{1+u^2}n(du)<\infty$；且つ分布に対して$m$，$v$，$n$はunique にきまる。

又上の条件をもつm，v，nに対して，（1.1）でφを定義するとそれは無限分解可能な分分の特性函数になつている。

なお無限分解可能な分布の標準形はLévy の他にも少し異つた形でKhinchinによつても与えられ，特別の場合には，色々便利な表現が得られている。（$N=1$として）

例えばΦの分散$V(\Phi)$が有限であるとき

$$\varphi(z)=\exp\left\{imz-\frac{v}{2}z^2+\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{izu}-1-izu\right)n(du)\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (1.2)$$

こゝに$\int u^2 n(du)<$　　　　　　(Kolmogorov)

この式のmは（1.1）のmと異なるが，v，nは同じである。

更に $\int_{-1}^{1}|u|n(du)<$ のときには

$$\varphi(z)=\exp\left\{imz-\frac{v}{2}z^2+\int_{-\infty}^{\infty}(e^{izu}-1)\,n(du)\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (1.3)$$

と書ける。このときmは（1.1）と異り，v，nは同じである。

$\boxed{2}$ で論じられる言葉を用いればΦに対応するLevy 過程が飛躍だけで変化するときには

$$\varphi(z)=\exp\left\{\int_{-\infty}^{\infty}(e^{izu}-1)\,n(du)\right\}$$

正の飛躍のみで変化するときは

$$\varphi(z)=\exp\left\{\int_{-\infty}^{\infty}(e^{izu}-1)n(du)\right\}$$

と書ける。

<u>定義</u>　：　測度　$n(du)$を<u>Lévy 測度</u>という。

<u>分解問題</u>

正規分布$N(\cdot m, v)$（特性函数が$\exp(imz-\frac{1}{2}vz^2)$）及びPoisson 分布$P(\lambda; a)$（特性函数が$\exp\{iza+\lambda(e^{iz}-1)\}$）は次の式から明らかなごとくconvolutionに関して閉じている。

$$N(\cdot m_1, v_1)*N(\cdot m_2, v_2)=N(\cdot m_1+m_2, v_1+v_2)$$

$$P(\lambda_1; a_1)*P(\lambda_2; a_2)=P(\lambda_1+\lambda_2; a_1+a_2)$$

逆に

$\boxed{定理}$（Cramer）

$N(\cdot m, v)=\Phi_1*\Phi_2$ なら

$\exists m_i v_i (i=1, 2)$　$\Phi_i=N(\cdot m_i, v_i)$

$\boxed{定理}$（Raikov）

$P(\lambda; a)=\Phi_1*\Phi_2$ なら

$\exists \lambda_i, a_i (i=1, 2)$　$\Phi_i=P(\lambda_i; a_i)$

一般に分布のある族$\mathcal{L}=\{\Phi\}$が$*$でとじているとき，上のCramer や Raikovの定理がなりたつのはどのようなときかという問題がおこる。（分解問題）この問題においては特性函数の解析函数論的考察が重要になる。（くわしくはLinnik〔155〕の本及びそこの文献を参照されたい）

$\boxed{1.4}$　基本的な加法過程

こゝではWiener 過程，Poisson 過程について述べよう。なお安定過程については$\boxed{3}$で詳しくのべる。

A．<u>Wiener 過程</u>

Lévy 過程のpath が第一種不連続函数であることを先に注意したが，特にpathが連続の場合には次の定理がなりたつ。

$\boxed{定理}$（Lévy〔144〕Th.52.1）

X_tをR^1のLévy 過程としそのpath　$X_t(\omega)$が殆んどすべてのωに対して連続であると

すると，$^{\forall}t>s$ に対して X_t-X_s は正規分布に従う。

特に X_t が時間的に一様であれば X_t に対応する正規分布の平均及び分散 $m(t)$，$v(t)$ は $m(t)=m\cdot t$，$v(t)=v\cdot t$ の形に書ける。

上の定理で時間的に一様の場合 $m=0$，$v=1$ となる Lévy 過程 X_t を Wiener 過程 (Brown 運動) という。

注意　X_t の分布は $P(X(t)\in E)=\int_E \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx$ であたえられる。

Wiener 過程は，path が連続な Martingale としても導くことができる。

$\boxed{\text{定理}}$ (Doob [57] Th.11.9)

$\{X_t, F_t, a\leq t\leq b\}$ を実数値をとる Martingale とし次の条件をみたすとする。

(i) $E\{X_t^2\}<\infty$, $E(X(t))=0$,　$a\leq t\leq b$

(ii) $E\{(x_t-x_s)^2/F_s\}=t-s$,（確率1で），$a\leq {}^{\forall}s\leq {}^{\forall}t\leq b$

(iii) X_t のほとんどすべての path は連続

このとき X_t は F_s に関する加法過程となり，更に Wiener 過程になる。

B．Poisson 過程

Poisson 過程も Lévy 過程に於る path がある典型的な行動をとるものとして特徴づけられる。

$\boxed{\text{定理}}$ X_t を R^1 の Lévy 過程とする。X_t のほとんどすべての path が高さ1の飛躍のみで増加する階段函数であるとき，$^{\forall}t\cdot s$ に対して X_t-X_s は Poisson 分布に従う

定義：上の定理に於て X_t-X_0 に対する分布 $P(\cdot\,\lambda(t))$ の平均 $\lambda(t)$ が $\lambda(t)=\lambda\cdot t$ と書けるとき，Poisson 過程といゝその他の場合“広義の” Poisson過程とよぶ。

注意　平均 λt の Poisson 過程 $X_t(X_0=0)$ に対して $P(X_t=n)=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n}$

$\boxed{\text{定理}}$

$\{X_t, F_t, a\leq t\leq b\}$ で

(i) $X_0=0$，X_t は高さ1の飛躍のみで増加する階段函数

(ii) $E(X(t)-X(s)/F_s)=\lambda(t-s)$　(すなわち $\{X(t)-\lambda t, F_s\}$ が martingale)

このとき X_t は F_s に関する Poisson 過程になる。

今 X_t を Poisson 過程 ($E(X_t-X_s)=\lambda(t-s)$) とする。sample path

X_t の増加時点を $T_0, T_0+T_1, T_0+T_1+T_2 \cdots\cdots$ とおくと，$T_0, T_1, T_2, \cdots\cdots$ は同じ指数分布 $\lambda e^{-\lambda t}dt$ にしたがう独立な確率変数列になる。逆にこのような独立確率変数列 $\{T_n\}$ に対し

$X_t = \inf\{n / T_0+T_1+\cdots\cdots+T_n > t\}$ とおくと x_t が Poisson 過程になる。

Brown 運動と Poisson 過程は，Lévy 過程の中で基本的なものであり一般の Lévy はそれらの合成によつてえられる。これは Lévy 過程の path の構造に関する Lévy−Ito の定理であり $\boxed{2}$ でのべられる。

複合 Poisson 過程

特性函数 $E(e^{iz(x_t-x_s)}) = \exp\{(t-s)\int_{-\infty}^{\infty}(e^{izu}-1)n(du)\}$ で特に $\lambda = \int_{-\infty}^{\infty}n(du) < \infty$ のものを複合 Poisson 過程という。今 Ⓗ$(du) = \frac{1}{\lambda}n(du)$ とおくと Ⓗ は確率分布である。複合 Poisson 過程は次のようにして構成できる。P_t を $E(e^{i\xi(P_t-P_s)}) = \exp\{(t-s)\lambda(e^{i\xi}-1)\}$ なる Poisson 過程。P_t と独立で分布 Ⓗ にしたがう独立な確率変数列を $\{\eta_n\}$ とし $X_t = \sum_{n=0}^{\infty} x\{T_0+T_1+\cdots\cdots T_n \leqq t\}\cdot\eta_n$（$x$ は特性函数）とおくと X_t は複合 Poisson 過程である。（$\{T_n\}$ は P_t に対する上でのべたもの）

$\boxed{1.5}$ 各点独立な超過程

一般に確率過程は函数空間上にあたえられた確率分布に他ならないが，函数空間をもつと一般にして超函数の空間にしておくと色々都合のよいことがある。超函数の空間 $\mathcal{D}'(\mathbb{B}(\mathcal{D}'))^{(*)}$（$\mathbb{B}(\mathcal{D}')$ は cylinder set $\{X : X(\varphi) \in E\}$ $\varphi \in \mathcal{D}$ から生成された Borel field 上にあたえられた確率分布 μ を超過程又は一般化された確率過程という。

Minlos の定理（Gelfand−Vilenkin〔254〕参照）によつて超過程は $\mathcal{D}$ 上の連続かつ正定値な函数 $L(\varphi)$ で $L(0)=1$ をみたすものと Fourier 変換を通じて１対１に対応する；

$$L(\varphi) = \int e^{iX(\varphi)}d\mu(X)$$

$L(\varphi)$ を超過程 μ の特性汎函数という。

今 X_t を $-\infty < t < \infty$ で与えられた Lévy 過程とするとき超函数の意味での微分 DX は $\mathcal{D}'$ 上の分布を induce する；

$$\mu(E) = P(\omega ; DX \in E) \qquad E \in \mathbb{B}(\mathcal{D})$$

X_t の加法性より容易に $\varphi_1\cdot\varphi_2 \equiv 0$ $\varphi_1\varphi_2 \in \mathcal{D}$ なら $X(\varphi_1)$ と $X(\varphi_2)$ は独立になる。

一般に

(*) 今は $\mathcal{D} = \mathcal{D}(R^1)$ としておく。

定義　$\varphi_1 \cdot \varphi_2 \equiv 0$ なら　$X(\varphi_1)$　$X(\varphi_2)$ が独立になるような超過程 μ を各点独立な超過程という。

したがつて特性汎函数のことばでいえば，各点独立な超過程は

(*) $\varphi_1 \cdot \varphi_2 = 0$　ならば　$L(\varphi_1+\varphi_2)=L(\varphi_1)L(\varphi_2)$

なる超過程のことである。これについては次の結果が知られている。Gelfand. Vilenkin (254)

$\boxed{\text{定理}}$ $L(\varphi)=e^{M(\varphi)}$

$$M(\varphi)=\int f\ [\varphi(t) . \varphi'(t),\ \cdots\ \varphi^{(n-1)}(t)]\,dt$$

とおくと（f は R^N で定義された函数）あきらかに (*)はなりたつが，これが特性汎函数になるための必要十分条件は　$e^{f(z_1, \cdots, z_n)}$ が n 次元の無限分解可能な特性函数になることである。

今　$e^{tf(z_1 \cdots z_n)}=E(e^{i(z \cdot x_t)})$ となる R^N の Levy 過程 $x_t=(x_t^{(1)} \cdots x_t^{(n)})$ をとるとき $L(\varphi)$ に対応する超過程は次のようにしてえられる。

$$X(\varphi, \omega)=-\sum_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} x_t^{(i)}\, D^i \varphi(t)\,dt \quad \left(D=\frac{d}{dt}\right)$$

すなわち　$X(\cdot, \omega)=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1} D^i x^{(i)}$ なる超函数である。特に

$$L(\varphi)=e^{-\frac{1}{2}\int \varphi^2(t)dt}$$

に対応する超過程は Brown 運動の１回微分で White noise といわれる。

又　$L(\varphi)=\exp\left[C\int \exp\left[ih_1\varphi(t)+\cdots+ih_nD^n\varphi(t)\right]dt\right]$ に対応する超過程は一般Poisson型過程 (generalised Poisson type process) とよばれる。この過程では path の飛躍のみでなく，速度や加速度の飛躍がすべて Poisson 分布にしたがう。

各点独立の超過程をすべて求めるという問題は未解決である。

$\boxed{2}$ Lévy–Ito の分解定理

Lévy 過程のpath の構造に関するLévy，Ito の定理を（Lévy〔144〕，Ito〔107〕〔109〕〔111〕参照）Ito〔109〕〔111〕にしたがつて要約する。

$X(t)$（$t \in T = [a, b]$，$x(a) \equiv 0$）を（必ずしも時間的に一様でない）Lévy過程としpath は右連続なるようにしておく。

今 $N(E)$（ここでEは$T \times R^N$ のBorel 集合）を $N(E) = \{(t, X(t) - X(t-)) \in E$となる時点$t$の個数$\}$とおく。

一般に$N(E)$は$+\infty$の値をとるが $E \subset T \times \{x ; |x| > \varepsilon\}$（$\varepsilon > 0$）のときには確率1で有限の値をとる。この$\{N(E), E \in \mathcal{B}(T \times R^N)\}$はPoisson 加法系をなす。（すなわち次の（$N.1$），（$N.2$）をみたす）

（$N.1$） $E(N(E)) \overset{(*)}{=} +\infty \Leftrightarrow P(N(E) \equiv \infty) = 1$

$$E(N(E)) < +\infty \Leftrightarrow P(N(E) < +\infty) = 1$$

かつ $N(E)$はPoisson 分布にしたがう。

（$N.2$） E_j が互にdisjoint ならば $N(E_j)$は互いに独立で

$$P\left(N\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} N(E_j)\right) = 1$$

特に（$N.1$）より $n(E) = E(N(E))$とおくと $n(T \times \{x ; |x| > \varepsilon\}) < +\infty$（$\varepsilon > 0$）であるが，さらに

（$N.3$） $\int_{|u| < 1} \int_a^t |u|^2 n(dt, du) < +\infty$ がなりたつ。

そして $\lim_n \int_{|u| > \frac{1}{n}} \int_a^t \left[uN(dt, du) - \frac{u}{1+|u|^2} n(dt, du)\right]$ がtにかんし広義一様することが示せる。すなわちpath $x(t)$の$\frac{1}{n}$以上のjumpの総和（時間$[a, t]$における）を上のようにtのみの函数で加減すると，収束するようにできる。この極限ともとのpath とは連続な函数しか違わないから，結局

$$x(t) = y(t) + \lim_n \int_{|u| > \frac{1}{n}} \int_a^t \left[uN(dt, du) - \frac{u}{1+u^2} n(dt\ du)\right]$$

とかけ $y(t)$は連続な加法過程である。前の $\boxed{1.4}$ から$y(t)$は正規過程で $\{N(E)$

(*) 平均値

$E \in \mathcal{B}(T \times R^N)\}$と独立なこともわかる。

逆に（N，1）（N．2）（N．3）をみたすPoisson 加法系$\{N(E)\}$ とそれと独立な連続な加法過程$y(t)$をもつてくると，上記の式によつて$x(t)$が定義できてしかもLévy過程になる。これがLévy–Ito によるLévy 過程の構造にかんする定理の概要であり，これによりLévy 過程の構造が完全にわかつたことになる。この定理は最初P. Lévy〔144〕によつてその概要があたえられ，K. Ito〔105〕によつてその厳密な証明があたえられた。

尚 $\boxed{1.3}$ でLévy 過程 $x(t)$ $0 \leq t \leq 1$ の$x(1)$の分布は無限分解可能な分布であることを注意したが，上記の分解によつてもその一般形が求まるわけで，確率論的なより深い定理の系として解析学の一定理が得られる一例となつている。又，無限分解可能な分布はあるとLévy過程$x(t)$ $0 \leq t \leq 1$の$x(1)$の分布になつていることもわかる。

特に時間的に一様な場合 $y(t) = b \cdot B(t) + a \cdot t$ （a, b（$b \geq 0$）は定数，$B(t)$はBrown運動） 又 $n(dt\ du) = n(du)dt$ (*)となる $n(du)$をLévy measure という。これをMarkov 過程と考えた場合その生成作用素は $u \in C_0^2(R^N)$に対して

$$\mathcal{G}u(x) = au'(x) + \frac{b}{2}u''(x) + \int_{R^N} \{u(x+y) - u(x) - \frac{1}{1+|y|^2}\sum_{i=1}^{N} y_i \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\} dy$$

であたえられる。（尚 $\boxed{6.2}$ を参照）

Markov 過程一般でpath の分解を論じそれを通して生成作用素の表現などMarkov過程の解析的研究の確率論的な意味を見ることは興味のある問題であるが，種々の困難のため部分的な結果しかえられていない。その一つの方向はK. Ito〔255〕による確率微積分方程式である。（尚Skorohod〔254〕参照）そこにおいてはMarkov 過程を構成することのみに主点がおかれているが最近additive functional の研究は又別の視野をあたえている。例えば上の$\{P(E)\}$がPoisson 加法系をなすということは「同じBorel field に関する二つのPoisson過程P_1, P_2 はjump を共有しないときかつそのときのみ独立」という事実の結果として示せるが又このことは

$$q_1(t) \equiv P_1(t) - \lambda_1 t \quad q_2(t) \equiv P_2(t) - \lambda_2 t$$ （λ_1, λ_2 はq_1, q_2の平均が0になるようにとる）

とおくとき$E(q_1(t)\ q_2(t)) = 0$とも同値になる。つまりadditive functional によつて直交とか分散とかHilbert 空間論的な議論でこのようなpathの分解を論ずること

(*) 1.3 で定義したものと同じである。

ができる。一般に平均が0のaddit ive functional の分散のみでMarkov 過程がきまつてしまうことはMarkov 過程の生成作用素が（その局所作用素の部分が）2階の微分になることとも関連して興味のある事実である。

注意1　Brown 運動による確率積分の他にPoisson加法系ないしそれを平均0にした彷徨測度による確率積分も確率微分積分方程式において重要であるがここではふれない。K. Ito〔255〕Skorohod，〔254〕

注意2　重複Wiener 積分も加法過程へ拡張して論ずることができ時間的に一様な加法過程からinduce されるFlowのspectral type の決定に有効である。K. Ito〔108〕。尚，spectral type はσ−LebesgueでBrown 運動とかわりがない。

上記の分解に関する注意

1）$\int_{|u|<1}\int_a^t |u|\, n(dt\ du)<+\infty$ のときは

$\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^t uN(dt\ du)$は単独で収束するから

$X(t)=\tilde{X}_1(t)+\int_{R^N}\int_a^t uN(dt\ du)$

と連続部分と純粋不連続部分へ分割できる。

2）特に時間的に一様な純粋不連続Lévy 過程

$X(t)=\int_{R^N}\int_a^t uN(dt\ du)$については，

これをMarkov 過程と考えたとき，各点が瞬間滞在点であることと $n(R^N)=+\infty$ とは同等である。したがって $n(R^N)<+\infty$ ならば各点は<u>指数型滞在点</u>になる。(*) これは $\boxed{1.4}$ の複合Poisson 過程に他ならない。この場合その推移確率 $P(t,E)=P_0(X(t)\in E)$は

$$P(t,E)=e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k t^k}{k!}\Theta^{*k}(E)$$

であたえられる。ここで

$\lambda=n(R^N)$ ，$\Theta(E)=\lambda^{-1}n(E)$とおき

θ^{*k}は測度Θのk回のconvolution である。

したがってそのGreen kernel はPotential 論で<u>elementary kernel</u> といわれる型のものである。

(*) これと有限時間に有限個のjump しかおこらないという命題とは同等である。

[3] 安定過程 (Stable process)

[3.0] 1940年ごろまでは，安定分布は，独立変数の和の極限定理の研究において，重要な役割を果したが，最近は，Bochner によるSubordinationやpotential 論の影響によつて，安定過程は著しく進展した部門である。定性的のみならず計量的な研究が可能である点で，今後もMarkov 過程の研究において，具体的なexample を提供することになるであろう。

[3.1] 安定分布とその特性函数

二つの分布Φ，Ψが，ある正数$\lambda>0$によつて

(1.1) $\Psi(E)=\Phi(\lambda E)$, $\lambda E=\{\lambda\cdot\xi\,;\,\xi\in E\}$

で結びつけられているとき，ΦとΨとは同型であるという。Φ，Ψの分布函数，特性函数をそれぞれF，G；φ，ψとすれば，(1.1)は

(1.1') $G(x)=F(\lambda x)$

または

(1.1") $\psi(\lambda z)=\varphi(z)$

と同等である。

分布Φと同型の任意の二つの分布Φ_1，Φ_2のconvolution $\Phi_1*\Phi_2$がまたΦと同型であるとき，Φは安定(stable)であるという。Φが安定ならば，Φと同型の分布は安定である。Φの安定性はその特性函数$\varphi(z)$を用いて，つぎのように特徴づけられる。任意のλ_1，$\lambda_2>0$に対して，$\lambda=\lambda(\lambda_1,\lambda_2)>0$があつて

(1.2) $\varphi(\lambda z)=\varphi(\lambda_1 z)\,\varphi(\lambda_2 z)$

上の定義はつぎのようにも述べられる。安定法則$\mathcal{L}$は，$\mathcal{L}$に従う独立変数X_1，X_2と任意の正数λ_1，λ_2に対して，適当な正数λが存在して

(1.3) $(\lambda_1X_1+\lambda_2X_2)/\lambda$

の法則が同じ$\mathcal{L}$にしたがうものをいう。

(1.2)から，安定分布は無限分解可能であることが証明でき，

(1.4) $\varphi(z)=e^{\psi(z)}$, $\psi(\lambda z)=\psi(\lambda_1 z)+\psi(\lambda_2 z)$

と，(1.2)は書き換えられる。また

(1.5) $\psi(z)=(-c_0+i\frac{z}{|z|}c_1)\,|z|^{\alpha}$ $(c_0\geqq 0,\ -\infty<c_1<\infty)$

ここで$0<\alpha\leqq 2$であつて，αは安定分布の指数(exponent, index)と呼ばれる。
$\alpha=2$のときは，正規分布にほかならない。

$\varphi(z) = \exp\psi(z)$ は無限分解可能な確率法則の特性函数であるから，時間的に一様な加法過程$\{x_t \ ; 0\leqq t<\infty\}$を定めて，

$$\varphi_{ts}(z) = E(e^{iz(x_s-x_t)}) = \exp\{(s-t)\psi(z)\}$$

とすることができるので，これを安定過程(stable process)という。特性函数の形から，任意の正数rに対して，$x(rt)$と$r^{1/\alpha}x(t)$とが同じ法則に従うことがわかる。この関係を，われわれは時空変換と呼ぶことにするが，安定過程の研究において重要な役割を演ずるものである。時空変換は，任意の正数rと，任意のR^Nの部分集合Bに対して

(1.6) $\quad P_x[rx(t)\in B] = P_{rx}[x(r^\alpha t)\in B]$

とも書ける一種の相似変換である。$x(t)$と$c_t x(1)$(ここでc_tはtのみに関係する定数)とが同じ法則に従う確率過程は安定過程のみであることが示されるので伊藤〔Ⅱ〕のようにこれで安定過程を定義する立場もある。

安定過程($0<\alpha<2$)のLévy measure $n(du)$は

(1.7)
$$n(du) = \begin{cases} c_+\cdot u^{-\alpha-1}du & (u>0) \\ c_-\cdot|u|^{-\alpha-1}du & (u<0) \end{cases} \qquad (c\pm>0)$$

と書ける。αの値により，$\psi(z)$はLévy−Itoの表現より，簡単な形でえられる。

(a) $0<\alpha<1$のとき

$$\int_{-\infty}^{\infty} n(du)=\infty, \quad \int_{-1}^{1}|u|n(du)<\infty, \quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{|u|}{1+u^2}n(du)<\infty$$

であつて，

(1.8)
$$\psi(z)=c_+\int_0^\infty (e^{izu}-1)\frac{du}{u^{\alpha+1}}+c_-\int_{-\infty}^0(e^{izu}-1)\frac{du}{|u|^{\alpha+1}}$$

$$x(t)=\lim_{n\to\infty}\int_{|u|\geqq\frac{1}{n}} u\, N([0, t], du)$$

したがつて，$x(t)$は jumpだけで変動するpathをもつ。$c_t = c_- = 0$ の特別な場合（このときは実はΦは単位分布である）をのぞいて，jumpの数は，確率１で無限大である。$c_+ \neq 0$, $c_- = 0$ あるいは $c_+ = 0$, $c_- \neq 0$ のときは，単調増加（減少）なpathを持ち，片側安定過程（one-sided stable process）と呼ばれる。

（ｂ） $1<\alpha<2$のとき

$$\int_{-\infty}^{\infty} n(du)=\infty,\ \int_{-\infty}^{\infty} un(du)=\infty,\ \int_{|u|>1} |u|n(du)<\infty,\ \int_{-\infty}^{\infty}\frac{u^2}{1+|u|}\,n(du)<\infty$$

であつて，

$$(1.9)\quad \psi(z)=c_+\int_0^{\infty}(e^{izu}-1-izu)\frac{du}{u^{\alpha+1}}+c_-\int_{-\infty}^{0}(e^{izu}-1-izu)\frac{du}{|u|^{\alpha+1}}$$

$$x(t)=\lim_{n\to\infty}\int_{|u|\geqq\frac{1}{n}}\left[u\,N(\,[0,t]\,,du)-utn(du)\right]$$

この場合，jumpの数およびjump の高さの絶対値の和も無限大である確率は１である。

（ｃ） $\alpha=1$のとき

（1.5）から直ちに

$$\psi(z) = ic_1 z - c_0|z|$$

であるが，さらに

$$(1.10)\qquad \psi(z)=ic_1 z-\frac{c_0}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{izu}-1-\frac{izu}{1+u^2}\right)\frac{du}{u^2}$$

なる表現もえられる。この場合に対応する分布はCauchy 分布であつて，（1.10） に対応する確率密度函数は

$$(1.11)\qquad \frac{c_0}{\pi}\cdot\frac{1}{c_0^{\,2}+(x-c_1)^2}$$

で与えられる。それゆえ対応する加法過程をCauchy過程という。

（d） その他

（1.5）において，$\alpha=2$のときは，$c_1=0$となる。すなわち

$$\psi(z) = -c_0\ z^2$$

であつて，このときBrown運動（正規過程）にほかならない。またその退化した場合として，

$$\psi(z)=ic_1 z\ ,\qquad x(t) = \text{定数}\times t$$

なるuniform motion がある。

（1.5）の右辺が一つの特性函数の対数$\psi(z)$であるためには，c_0とc_1 の間に一定の関係が必要である。$0<\alpha<1$および$1<\alpha<2$のときには，（1.8）および（1.9）におけるc_+，c_- を用いて，

$$(1.12)\qquad \begin{cases} -c_0 =(c_+ + c_-)\,\Gamma(-\alpha)\cos\dfrac{\pi\alpha}{2} \\ c_1 =(c_- - c_+)\,\Gamma(-\alpha)\sin\dfrac{\pi\alpha}{2} \end{cases}$$

が得られる。$c_1 = c_0\ \beta\ \tan\dfrac{\pi\alpha}{2}$とおくと，$\beta=\dfrac{c_+ - c_-}{c_+ + c_-}$で$c_+\geqq 0$，$c_-\geqq 0$であるから$|\beta|\leqq 1$となる。$\alpha=1$のときは，$c_1$は任意の実数である。$\beta=0$のときは，$c_+=c_-$で<u>対称安定過程</u>（このとき$\psi(z)=-c_0|z|^\alpha$）と呼ばれる場合である。$\beta=1$のときは，$c_-=0$，$\beta=-1$のときは$c_+=0$で片側の場合となる。

安定分布の一つの拡張は<u>準安定分布</u>（quasi-stable distribution）である。これを，Gendenko-Kolmogorov 〔92〕を始め，ソビエトの文献では，単に安定分布と呼んでいる。Fを分布函数とするとき，任意の正数λ_1，λ_2と任意の実数b_1，b_2に対して，ある$\lambda>0$とある実数bが対応して

$$(1.13)\qquad F\left(\frac{x-\lambda_1}{b_1}\right) * F\left(\frac{x-\lambda_2}{b_2}\right) = F\left(\frac{x-\lambda}{b}\right)$$

が成り立つとき，準安定というのである。$\{X_i\}$ を同分布に従う独立確率変数系とするとき，

$$(1.14)\qquad \Phi_n = \frac{1}{B_n}\sum_{i=1}^{n} X_i - A_n$$

が適当な実数A_n，B_nをえらぶことによつて収束する分布が準安定分布であることをP. Lévyは示した。

(1.1 3) を特性函数$\varphi(z)$で表わすと

$$\varphi(b_1 z)\varphi(b_2 z) = \varphi(bz)e^{irz}$$

ここで$r=\lambda-\lambda_1-\lambda_2$となる。特性函数の一般式は

(1.15) $\psi(z)=\log\ \varphi_m(z\,;\alpha,\beta,c)=imz-c|z|^{\alpha}\left\{1+i\beta\frac{z}{|z|}\omega(z,\alpha)\right\}$

ただし，mは実数，$c\geqq 0$，$0<\alpha\leqq 2$，$|\beta|\leqq 1$で$\omega(z,\alpha)$は

$$\omega(z,\alpha)=\begin{cases}\tan\dfrac{\pi\alpha}{2}, & \alpha\fallingdotseq 1\\ \dfrac{2}{\pi}\log|z|, & \alpha=1\end{cases}$$

によつて与えられる。結局$\alpha\fallingdotseq 1$のとき，安定法則を平行移動したもの，すなわち，単位分布と安定分布のconvolutionにすぎないが，$\alpha=1$のときは，Cauchy law と異なるものである。

安定分布のもう一つの拡張は半安定分布(semi-stable distribution)である。これは$\psi(z)$ が少くともある正数q ($\fallingdotseq 0$，1)について

(1.16) $$\psi(qz) = q^{\alpha}\psi(z)$$

をみたすような分布のことで，このときも，安定分布と類似の仕方で(1.5)，(1.8)，(1.9)に対応する結果が得られる。特別な例としては，

$$\psi(z) = \sum_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos z\ q^{v}-1}{q^{2}}$$

のようなものがある。(Lévy 〔144〕の 58参照)

3．2 密度函数の解析的性質

特性函数を(1.4)，(11.5)と同様に$\varphi(z)$，$\varphi_m(z;\alpha,\beta,c)$で表わす。$|\varphi(z)| = \exp(-c_0|z|^{\alpha})$であるから，$\varphi(z)$は，$L_1$にも$L_2$にも属する。ゆえにそのFourier 変換は連続函数であつて，φに対応する分布が連続密度をもつことがわかる。この密度函数を$p(x)$，$p(x;\alpha,\beta,c)$などと書くことにする。

すなわち，

(2．1) $$p(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-izx}\varphi(z)dz$$

$$(2.2)\qquad p(x;\alpha,\beta,c)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-izx}\varphi_0(z;\alpha,\beta,c)dt$$

とする。$\varphi_0(z;\alpha,\beta,c)$とは$\varphi_m(z;\alpha,\beta,c)$においてて$m=0$の場合を表わしている。明らかに，

$$(2.3)\qquad p(x;\alpha,\beta,c)=p(-x;\alpha,-\beta,c)$$

が成り立つ。$p(x)$ の具体的な形が初等函数で表わされるのは，ごくわずかである。$\alpha=2$のときは，Ganss 密度函数，$\alpha=1$で$\beta=0$は（1.11）で示したCauchy 密度函数である。$\alpha=1$，$\beta=0$，$c=1$に対応する場合は，N次元で

$$\frac{c_n}{(1+x^2)^{\frac{N+1}{2}}}\qquad c_n=\pi^{-(\frac{N+1}{2})}\Gamma(\frac{N+1}{2})$$

となる。(Lévy 〔146〕 p.192.−) P.LévyとN.V.Smirnovは $\alpha=1/2$，$\beta=1$，$c=1$のとき，

$$p(x;\frac{1}{2},1,1)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{1}{2x}}\,x^{-\frac{3}{2}} & x>0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

なる密度函数を与えた。これは，system of Pearson curves (Type V)に属するものである。

$\alpha=2$のときと，uniform motion を除いたすべての安定分布函数$F(x)$ に対して，

$$(2.4)\qquad \lim_{x\to+\infty}x^{\alpha}\{1-F(x)+F(-x)\}=r>0$$

が成立つような正の定数rが存在する。これに対応して，対称安定過程の推移密度函数$f_\alpha(t,x-y)$，すなわち

$$(2.5)\qquad e^{-t|\xi|^{\alpha}}=\int_{R^N}e^{i(x,\xi)}f_\alpha(t,x)dx$$

に対しては

$$(2.6)\qquad \lim_{|x|\to\infty} |x|^{N+\alpha} f_\alpha(1,x) = \alpha 2^{\alpha-1} \left(\frac{1}{\pi}\right)^{N/2+1} \sin\frac{\alpha\pi}{2}\Gamma\left(\frac{N+\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

が計算されている。Polya 〔186〕, Blumenthal−Getoor 〔27〕. このような計算のとき，つぎの変換式は有用である。

$$(2.7)\qquad p(t,x) = t^{-\frac{N}{\alpha}}\, p(1, t^{-\frac{1}{\alpha}} x)$$

指数$\alpha=2$のときを除いた安定分布に関するp次の絶対能率は，$0<p<\alpha$のとき，有限であ$p\geqq\alpha$のとき，存在しない。すなわち，安定分布のうち，分散が存在するのは，ガウス分布のみであり，平均が存在するのは，$1<\alpha\leqq 2$のときだけである。

安定分布の密度函数に関する解析的な研究は，Lapinによつて始められた。彼は$p(x;\alpha,\beta,c)$は$\alpha>1$のとき，整函数であつて，$\alpha=1$のときは，実軸上の点xの近傍におけるTaylor 展開の収束半径はcより小さくないことを示した。(〔92〕, p.183参照）また$0<\alpha<1$のときは，Skorohod 〔211〕によつて

$$p(x;\alpha,\beta,c)=\begin{cases} \dfrac{1}{x}\Phi_1(x^{-\alpha}), & x>0 \\[2ex] \dfrac{1}{|x|}\Phi_2(|x|^{-\alpha}), & x<0 \end{cases}$$

と表わされた。ここで$\Phi_1(z)$, $\Phi_2(z)$はzの整函数である。

Zolotarev 〔246〕は，$\alpha>1$なる密度函数を，$1/\alpha$のときの密度函数で表わすことに成功している。(2.3)から$x>0$で$-1<\beta<1$のときを調べれば十分である。

すべての$x>0$，$|\beta|<1$と，$\alpha>1$に対して，$v=-\beta\tan\frac{\pi\alpha}{2}$かつ$a_v=(1+v^2)^{\frac{\alpha}{2}}$とするとき，

$$a_v x\, p(-a_v x;\alpha,\beta,1) = a_{\tilde v}\, x^{-\alpha} p\left(a_{\tilde v} x^{-\alpha}; \frac{1}{\alpha}, \tilde\beta, 1\right)$$

である。ここで

$$\tilde v = -\tilde\beta\tan\frac{\pi\alpha}{2},\quad \tilde\beta = \left[\tan\frac{\pi}{2\alpha}\right]^{-1} \tan\left\{\frac{\pi}{2\alpha}\left[\frac{2}{\pi}\arctan v + (\alpha-1)\right]\right\}$$

この結果から，〔247〕では($\alpha=2/3$, $\beta=1$), ($\alpha=3/2$, $\beta=1$),

（$\alpha=2/3$，$\beta=0$），（$\alpha=1/3$，$\beta=1$），（$\alpha=1/2$，βは任意）の場合について，超越函数(higher transcendental function) を用いて表わしている。さらにZolotarev〔248〕はMellin 変換$F(s)=\int_0^\infty x^s \alpha F(x)$ を組織的に使つて，$\alpha\to0$ あるいは$\alpha\to1$ のときの分布函数の漸近表示を得た。

Medgyessy〔169〕は，$\alpha=m/n$なる有理数（m，nは互いに素な整数）であるとき，$\alpha=1$のときは，$\beta=0$として，$p=p(x;\alpha,\beta,c)$ は定数係数の偏微分方程式

$$K_1\frac{\partial^{b_1+a_1}p}{\partial c^{b_1}\partial x^{a_1}}+K_2\frac{\partial^{b_2+a_2}p}{\partial c^{b_2}\partial x^{a_2}}+K_3\frac{\partial^{b_3+a_3}p}{\partial c^{b_3}\partial x^{a_3}}=0$$

を満すことを示した。ただし，a_i，b_i，K_i（$i=1,2,3$）はm，n，βにdependしかつ，一意的には決まらない。またMedgyessyは〔170〕は$\alpha\fallingdotseq1$（ただし必ずしも有理数ではない）に対して，pに対するpartial integro-differential equationを導いている。

Skorohod〔212〕は，$p(x,\alpha,\beta)\equiv p(x;\alpha,\beta,1)$の$x\to\pm\infty$および$x\to0$に関する漸近公式を表にまとめた。これは，Pollard〔185〕，Bergström〔19〕，Linnik〔148〕と彼自身の研究である。

	$\alpha<1$	$\alpha=1$	$\alpha>1$
$\beta=1$	$x\to+\infty$ I $x\to0$ $(x>0)$ IV	$x\to+\infty$ II $x\to-\infty$ V	$x\to+\infty$ III $x\to-\infty$ VI*
$-1<\beta<1$	$x\to+\infty$ I $x\to-\infty$ I*	$x\to+\infty$ II $x\to-\infty$ II*	$x\to+\infty$ III $x\to-\infty$ III*
$\beta=-1$	$x\to-\infty$ I* $x\to0$ $(x<0)$ IV*	$x\to-\infty$ II* $x\to+\infty$ V*	$x\to-\infty$ III* $x\to+\infty$ VI

I　$$p(x,\alpha,\beta)=\frac{1}{\pi x}\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^{-\alpha n}$$

$$a_n=\frac{(-1)^{n-1}\Gamma(n\alpha+1)}{n!}\left(1+\beta^2\tan^2\frac{\pi\alpha}{2}\right)^{n/2}\sin n\left[\frac{\pi\alpha}{2}+\arctan\left(\beta\tan\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right]$$

II $$p(x+\beta\frac{2}{\pi}\ln x,\beta,1)=\frac{1}{\pi x}\sum_{k=1}^{N}b_k\,x^{-K}+O(x^{-N-2}),$$

$$b_k=I_m\int_0^{\infty}e^{-v}v^k(i+i\beta-\frac{2}{\pi}\beta\ln v)^k dv.$$

III $$p(x,\alpha,\beta)=\frac{1}{\pi x}\sum_{n=1}^{N}a_n x^{-\alpha n}+O(x^{-(N+1)\alpha-1}),$$

$$a_n=\frac{(-1)^{n-1}\Gamma(n\alpha+1)}{n!}(1+\beta^2\tan^2\frac{\pi\alpha}{2})^{n/2}\quad\sin n\left[\frac{\pi\alpha}{2}+\text{arc }\tan(\beta\tan\frac{\pi\alpha}{2})\right]$$

IV $$p(x,\alpha,1)=A(\alpha)x^{-1-\frac{\lambda(\alpha)}{2}}\exp(-B(\alpha)x^{-\lambda(\alpha)})\times\left[1+O(x^{\frac{\lambda}{2}-\varepsilon})\right],$$

$$A(\alpha)=\frac{\alpha^{\frac{1}{2(1-\alpha)}}(\cos\frac{\pi\alpha}{2})^{-\frac{1}{2(1-\alpha)}}}{\sqrt{2\pi(1-\alpha)}}\quad;\quad B(\alpha)=(1-\alpha)\alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}(\cos\frac{\pi\alpha}{2})^{-\frac{1}{1-\alpha}},$$

$$\lambda(\alpha)=\frac{\alpha}{1-\alpha},$$

V $$p(x,1,1)=\frac{1}{\pi\sqrt{e}}\exp\left\{-\frac{\pi x}{4}-\frac{2}{\pi e}e^{-\frac{\pi}{2}x}\right\}\times\left[1+O(e^{\frac{\pi}{4}x(1-\varepsilon)})\right]$$

VI $$p(x,\alpha,1)=A'(\alpha)x^{-1+\frac{\lambda'(\alpha)}{2}}\exp\left\{-B'(\alpha)x^{\lambda'(\alpha)}\right\}\times\left[1+O(x^{-\frac{\lambda'(\alpha)}{2}+\varepsilon})\right]$$

$$A'(\alpha)=\frac{\alpha^{\frac{-1}{2(\alpha-1)}}\left|\cos\frac{\pi\alpha}{2}\right|^{\frac{1}{2(\alpha-1)}}}{\sqrt{2\pi(\alpha-1)}}\quad;\quad B'(\alpha)=(\alpha-1)\alpha^{\frac{-\alpha}{\alpha-1}}\left|\cos\frac{\pi\alpha}{2}\right|^{\frac{1}{\alpha-1}},$$

$$\lambda'(\alpha)=\frac{\alpha}{\alpha-1}$$

*上の表の中にある番号 I ―VIは，各々の場合に対応する公式のいずれかを表わす。密度函数は，$\alpha<1$，$\beta=1$のとき$(-\infty, 0]$で，$\alpha<1$，$\beta=-1$のとき$[0, +\infty)$で0になる。(2.3)から$x\to-\infty$と$x\to0$ ($x<0$)の場合は，*印のない同番号($x\to+\infty$と$x\to0$ ($x>0$))の場合の公式から，xを$-x$，βを$-\beta$とおきかえてえられる。なお，この公式

集におけるβの符号は（1.15）と$\alpha \neq 1$のとき，逆になつているので注意せられたい。すなわち

$$\psi(z) = \begin{cases} \exp\left\{-|z|^{\alpha}\left(1 - i\beta\frac{z}{|z|}\tan\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right\}, & \alpha \neq 1 \\ \exp\left\{-|z|\left(1 + i\frac{2}{\pi}\beta\frac{z}{|z|}\log|z|\right)\right\}, & \alpha = 1 \end{cases}$$

$\boxed{3.3}$ Riesz potential と安定過程

Riesz ポテンシャルとは，R^N で

$$U_{\mu}(x) = \int u(x, y)\mu(dy)$$

ここで

$$(3.1)\quad u(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma\left(\frac{N-\alpha}{2}\right)}{2^{\alpha}\pi^{N/2}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}|x-y|^{\alpha-N}, & \alpha > 0,\ \alpha \neq N \\ \dfrac{1}{2^{N-1}\pi^{N/2}\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)}\log\dfrac{1}{|x-y|}, & \alpha = N \end{cases}$$

なるようなポテンシャルでNewton ポテンシャル（$\alpha = 2$）の拡張として，O. Frostman [77]，M. Riesz [201] らによつて，主として，1930 年代に研究された。ここでは，Hunt によつて構成されたMarkov 過程によるポテンシャル論の特別な場合として，Rieszポテンシャルを考える。

M_s をR^N上の対称安定過程，すなわち，R^N 上の加法過程から導かれるMarkov過程で，

$$(3.2)\qquad E_0\left(e^{i\langle\xi, x_t\rangle}\right) = e^{-t|\xi|^{\alpha}} \qquad (0 < \alpha \leqq 2)$$

をみたすものとする。$\overrightarrow{M_0}$ は右向きに進むR^1 上の片側安定過程，すなわち，

$$(3.3)\qquad E_0\left(e^{-\lambda x_t}\right) = e^{-t\lambda^{\alpha}} \qquad (0 < \alpha \leqq 1,\ \lambda > 0)$$

をみたす加法過程より導びかれるMarkov 過程とする。M_s，$\overrightarrow{M_0}$ はexcessive measure としてLebesgue 測度をとれば，Hunt [100] のⅡの条件 (F) をみたしており，したがつて

$$(3.4)\qquad \hat{P}_{\gamma}f(x) = \int r(f)\,\hat{T}_t f(x)dt$$

で定義される半群$\hat{T}_t : C_0 \to C_0$（強連続）* が存在し，よつて，Markov過程$\hat{M}$が存

---

* $C_0 = \{|x| \to \infty$ のとき 0 となる連続函数$\}$

在する。これを$\mathbb{M}$のdual processという。$\hat{\mathbb{M}}_s = \mathbb{M}_s$，$\overrightarrow{\hat{\mathbb{M}}}_0 = \overleftarrow{\mathbb{M}}_0$（左向き）となる。以下$\hat{\mathbb{M}}$に関する推移確率，平均，半群などは$\mathbb{M}$と区別するために"$\wedge$"をつけて示す。

さらにHuntの条件〔G〕は$\mathbb{M}_s$については，$N > \alpha$のとき，すなわち$N \geqq 3$のときは$0 < \alpha \leqq 2$すべてについて，$N=2$では$0 < \alpha \leqq 2$のとき，$N=1$では，$0 < \alpha < 1$のときのみみたされ，0次のGreen 核は（3.1）で与えられる。$\overrightarrow{\mathbb{M}}_0$に関しては，つねに〔$G$〕がみたされて，0次のGreen核$g_0(x, y)$は

$$u(x, y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{1}{|y-x|^{1-\alpha}} \chi_{R^+}(y-x), \quad x, y \in R^1 \tag{3.5}$$

$$0 < \alpha \leqq 1, \quad R^+ = (0, +\infty), \quad \chi \text{は特性函誠}$$

となる。

Huntの理論はあるlocally finiteなexcessive measure $\xi(dx)$に対して，〔F〕がなり立つMarkov過程で，$\int g_\lambda(x, y)\mu(dy)$なる形のポテンシャルに対して適用できる。さらに〔$G$〕もみたされるときは，$\lambda=0$を含めて成り立つ。なお（3.5）で$x=y$のとき，$u(x, y)=0$となるversionがとられていることはHuntの理論の上で重要である。uniform motion（$\alpha=1$）のときは，ポテンシャル論的に異常な現象があらわれる。その一例として，Hunt の条件〔H〕は，安定過程において，uniform motion だけ例外的にみたされないことが挙げられる。

R^1で$1 \leqq \alpha \leqq 2$，R^2で$\alpha=2$のときは，〔G〕のみたされない，recurrent な場合である。このとき，λ次のGreen 核

$$g_\lambda(x, y) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} p(t, x-y)\, dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos(x-y)\xi}{\lambda + |\xi|^\alpha} d\xi \quad (R^1\text{のとき}) \tag{3.6}$$

については

$$g_\lambda(x, y) - h(\lambda) = u(x, y) + \varepsilon(x, y : \lambda) \tag{3.7}$$

ここで

$$h(\lambda) = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha \sin\frac{\pi}{\alpha}} \lambda^{\frac{1}{\alpha}-1} & N=1<\alpha \leqq 2\text{のとき} \\ \dfrac{1}{\pi} \log \dfrac{1}{\lambda} & N=\alpha=1\text{のとき} \\ \dfrac{1}{4\pi} \log \dfrac{4}{\lambda} + \dfrac{\gamma}{2} \quad (\gamma\text{はEuler定数}) & N=\alpha=2\text{のとき} \end{cases} \tag{3.8}$$

$$
(3.1') \quad u(x,y)=\begin{cases} \dfrac{1}{2\cos\dfrac{\pi\alpha}{2}\Gamma(\alpha)}\cdot\dfrac{1}{|x-y|^{1-\alpha}} & N=1<\alpha\leqq 2 \text{ のとき} \\ \dfrac{1}{\pi}\log\dfrac{1}{|x-y|} & N=\alpha=1 \text{ のとき} \\ \dfrac{1}{2\pi}\log\dfrac{1}{|x-y|} & N=\alpha=2 \text{ のとき} \end{cases}
$$

となり，$\varepsilon(x,y;\lambda)$は$|x-y|$が有界な集合をうごくとき，一様に0に収束する。($\lambda\downarrow 0$)(3.1')は，Riesz核(3.1)に他ならない。

Fをcompact集合とすると，点xからFへのhitting probability $\Phi_F(x)\equiv P_x(\sigma_{F^*}<\infty)=P_x(\exists s>0, x(s)\in F)$は，条件〔$G$〕がみたされるとき，

$$
(3.9) \quad \Phi_F(x)=\int u(x,y)\mu_F(dy)
$$

とRiesz ポテンシャルで表わされる。ここで$\mu_F(dy)$はF上のuniqueな測度である。μ_Fの全質量$\mu_F(F)$をFの容量(capacity)と呼び，$C(F)$または$C^{N-\alpha}(F)$などと書く。この定理から，指数αのN次元対称安定過程(ただし$N>\alpha>0$)において，$\Phi_F(x)>0$と$C^{N-\alpha}(F)>0$とは同等であることがわかる。(3.9)におけるuniqueな測度を平衡分布(equilibrium distribution)という。compact Fのかわりにその閉包がcompactとなるような開集合Gをとつても同じであるが，このときはμ_Gは$G\cup G^{co-r}$上の分布となる。*

平衡分布，容量はつぎのように特徴づけられる。

$$
\Phi_F(x)=\sup\{U_\mu(x)\ ;\ U_\mu\leqq 1,\ S(\mu)\subset F\}^{**}
$$

$$
C(F)=\sup\{\mu(F)\ ;\ U_\mu\leqq 1\quad S(\mu)\subset F\}
$$

---

* dual processについて$\hat{P}_x(\sigma^*_G=0)\equiv\hat{P}_x\{\inf(t>0, x(t)\in G)=0\}=1$となるような点$x$の集合を$G$のco-regular pointといい，$G^{co-r}$と書く。

** $S(\mu)=\mu$の台

任意の解析集合Eに対して，Eの容量が正であるための必要十分条件はあるEの上の測度μ（$\neq 0$）によつてエネルギー積分$\|\mu\|^2$

$$\|\mu\|^2 = \iint_{E\times E} u(x, y)\ \mu(dx)\mu(dy)$$

を有限ならしめることができることである。

Fを半径Rの球とするとき，その平衡分布および容量はM. Riesz 〔201〕，Blumenthal—Getoor—Ray 〔31〕によつて計算されている。

$$(3.10)\qquad \mu_F(dy)= \frac{\sin\frac{\pi\alpha}{2}\Gamma(\frac{N}{2})}{\pi^{N/2+1}}\ \frac{dy}{(R^2-|y|^2)^{\alpha/2}}$$

$$(3.11)\qquad C^{N-\alpha}(F)= \frac{\Gamma(\frac{N}{2})}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})\Gamma(\frac{N-\alpha+2}{2})}\cdot R^{N-\alpha}$$

Brown 運動（$\alpha=2$）のときと異なり，球の内部全体に質量が分布しているが，pathの不連続性と関係することである。

条件〔G〕のなりたたない場合にも$\lambda>0$として（3.9）のanalogy

$$(3.12)\qquad \Phi_E^{\lambda}(x)=E_x(e^{-\lambda\sigma_E^*})= \int_{E\cup E^r} g_\lambda(x, y)\mu_E^{(\lambda)}(dy)$$

が成り立ち。すべての点xについて，$P_x(\sigma_E^*=+\infty)<1$となるような解析集合$E$を容量正の集合と定義することにすると，（3.12）を使つて容量正の集合Eに対しては，すべての点xについて$P_x(\sigma_E^*<+\infty)=1$が導ける。条件〔$G$〕がなりたたない場合の平衡分布はつぎのような測度である。Fを正の容量をもつcompact集合とするとき，$\mu_F(F)=1$かつ$U\mu_F(x)=\int u(x, y)\mu_F(dy)$が容量0の集合を除いて定数となるような$F$上のuniqueな測度$\mu_F$である。エネルギー積分と容量正の集合との前述の関係はrecurrentな場合にもそのまゝ成り立つ。

---

* E^rはEのregular pointの全体を表わす。$P_x(\sigma_E^*=0)=1$となる点の集合である。

調和測度(harmonic measure)に関しては，古典的にM. Riesz [201] によって計算された半径Rの球の外部の場合を挙げておくにとどめる。

(3.13) $\pi(x,dy)=P_x\{x(\sigma^*)\in dy\}=$

$$\frac{1}{\pi^{N/2+1}}\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)\sin\frac{\pi\alpha}{2}\frac{\left|R^2-|x|^2\right|^{\alpha/2}}{\left|R^2-|y|^2\right|^{\alpha/2}}\frac{dy}{|x-y|^N}$$

こゝで $|x|<R$, $|y|\geqq R$, $\sigma^* = \inf(t>0, x(t)\in$ 半径Rの球の外部)

recurrent な場合について，つぎのような変形された掃散の原理がなり立つ。

Eを容量正の有界集合とし，

$$\pi^E(x\,dy) = P_x(x(\sigma_E{}^*)\in dy)$$

とおくと，これは$E\cup E^r$上の全質量1の分布となり

$$k(x)+u(x,y)\geqq\int_{E\cup E^r}\pi^E(x,dz)u(z,y)$$

かつ等号は，E上の高々容量0の集合をのぞいてなりたつ。ここで

$$k(x) = \lim_{\lambda\downarrow 0} h(\lambda)(1-E_x(e^{-\lambda\sigma_E{}^*}))$$

である。

3.4 Riesz potentialの一般化

Feller は [68] において，Rieszポテンシャルと Riemann–Liouville 積分を特別な場合として含むような parameter を二つもつポテンシャルを導入した。以下，この論文の大要を要約する。

簡単のため$f(x)$ を compact な台をもった連続函数とする。δ を実数とし，作用素 I_δ^α を次式で定義する。

(4.1) $$I_\delta^\alpha f = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\sin\alpha\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,|y-x|^{\alpha-1}\cdot\sin\alpha\left(\frac{\pi}{2}+\frac{y-x}{|y-x|}\delta\right)dy.$$

十分regularな函数fに対しては，解析接続によつて，すべての複素数αに関して正則にできる。(4.1)式のRiemann−Lionville積分 J_{+}^{α}，J_{-}^{α} との関係は

$$(4.2) \qquad I_{\delta}^{\alpha} = \frac{\sin \alpha(\delta+\frac{\pi}{2})}{\sin \alpha\pi} J_{+}^{\alpha} + \frac{\sin \alpha(-\delta+\frac{\pi}{2})}{\sin \alpha\pi} J_{-}^{\alpha}$$

$$I_{0}^{\alpha} f = I^{\alpha} f = \frac{1}{2\Gamma(\alpha)\cos\frac{\pi\alpha}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,|y-x|^{\alpha-1} dy,$$

$$I_{\pi/2}^{\alpha} = J_{+}^{\alpha}, \quad I_{-\pi/2}^{\alpha} = J_{-}^{\alpha} \quad ,$$

となる。M. Riesz [201] によるよく知られた性質から，

$$(4.3) \qquad I_{\delta}^{0} = I \qquad I_{\delta}^{-2} = -\frac{d^2}{dx^2} \quad , \quad I_{\delta}^{\alpha+\beta} = I_{\delta}^{\alpha} \circ I_{\delta}^{\beta}$$

が得られる。(2.2)で定義したquasi stable density $p(x;\alpha,\beta,c)$に対して，半群(semi−group) T_t，$t>0$が定義できる。

$$(4.4) \qquad u(t,x) = T_t f(x) = t^{-\frac{1}{\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) p(t^{-\frac{1}{\alpha}}(x-y);\alpha,\beta,c) dy$$

$\alpha=2$，$\beta=0$のGauss核の場合は，古典的な拡散方程式

$$(4.5) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad , \qquad u(0,x) = f(x)$$

が対応する。Bochner [33] によつて，$\beta=0$ の対称な場合の半群には，記号的に $-(-\frac{d^2}{dx^2})^{\alpha/2}$ と書かれる作用素が対応することが指摘された。(4.3)の第二式および(4.5)の関係から考えて

$$(4.6) \qquad \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = -I_{\delta}^{-\alpha} u(t,x)$$

なる方程式を導入することは自然である。

$0<\alpha<1$のとき，(4.6)の形式解は，kernel $U_{\alpha\delta}(x-y)$を持つたfの積分変換として表わされる。

$$(4.7) \qquad u(t,x)=\Sigma \frac{(-t)^n}{n!} I_\delta^{-n\alpha} f$$

$$(4.8) \qquad U_{\alpha\delta}(x)=\frac{-1}{\pi|x|}\Sigma\left(\frac{-t}{|x|^\alpha}\right)^n \frac{\Gamma(1+n\alpha)}{n!} \sin n\alpha\left(\frac{\pi}{2}+\frac{x}{|x|}\delta\right)$$

さらに$0<\alpha<1$かつ$\alpha\delta<\pi/2$のとき，$U_{\alpha\delta}(x)$がstable densityを表わしていることが証明される。(4.8)からCanchyの積分公式によつてえられる。

$$U_{\alpha\delta}(x)=\frac{1}{\pi}\ \mathcal{R}\int \exp\left(-ir|x|-tr^\alpha \exp\left(-i\alpha\delta\frac{x}{|x|}\right)\right)dr$$

を使つて，(4.8)の解析接続が可能となり，$1<\alpha\leqq 2$のときのstable densityは

$$(4.9) \qquad U_{\alpha\delta}(x)=\frac{-1}{\pi|x|}\mathcal{J}\,\Sigma\frac{(-i|x|\exp(i^{\delta x/|x|}))^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\Gamma\left(\frac{n+1}{\alpha}+1\right.$$

で与えられる。$\alpha=1$，$\delta=0$の場合は，(4.8)(4.9)の両方とも発散するにもかかわらず，$|x|>t$のとき，Cauchy densityが導ける。これは

$$I^{-1}=I^{-2}\,I=\frac{d^2}{dx^2}\cdot I=-\frac{d}{dx} \qquad \text{(Hilbert変換)}$$

と共役調和函数の性質から導かれる。したがつて，$\frac{\partial\Phi}{\partial t}=-I^{-1}\Phi$の形式解

$\Sigma(-t)^n I^{-n} f/n!$ は上半平面における調和函数となる。これは，Bochner が別な方法でえたものと一致する。

Bochner，Fellerの研究から発展して，生成作用素の'fractional power'の性質およびいろいろの函数方程式論への応用は，日本では吉田耕作，加藤敏夫，米国ではBalakrishnan 〔7〕〔8〕などにみられる。これらについての綜合報告としてYosida〔245〕があり，そこにある文献表も参考になるであろう。

3.5 Subordination

Markov 過程のおのおののpath に沿つて，時間の尺度をそのpath に関係した割合で変更すると，新しいMarkov 過程が得られ，この方法をtime change と呼ぶのだが，

Bochner によつて導入されたsubordination も time change の一つであつて，これによつてN次元Brown運動から任意指数のN次元対称安定過程が得られ，したがつて，対称安定過程の path の研究に有力な手段を与える。

$\{\theta(t), 0 \leq t < \infty\}$を非減少なpathをもつ時間的に一様な加法過程（ただし$\theta(0) \equiv 0$）とする。この加法過程に対応する分布のLaplace変換は

$$(5.1) \qquad E(e^{-z\theta(t)}) = \int_0^\infty e^{-zu} P(\theta(t) \in du) = e^{-t\psi(z)}$$

$$\psi(z) = cz + \int_0^\infty (1 - e^{-zu}) n(du), \int_0^\infty \frac{u}{1+u} n(du) < \infty, \quad c \geqq 0$$

で与えられる。この加法過程をsubordinatorと呼ぶことがある。指数α（$0 < \alpha < 1$）の片側安定過程は

$$(5.2) \qquad \psi(z) = z^\alpha = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty (1 - e^{-zu}) \frac{du}{u^{\alpha+1}}$$

となる特別な場合であつて，α位のsubordinatorともいう。

$x(t, w_1)$をMarkov過程（または時間的に一様な加法過程）でsubordinator $\theta(t, w_2)$とは独立であるとする。

$$(5.3) \qquad y(t, w) \equiv x(\theta(t, w_1), w_2) \qquad w = (w_1, w_2)$$

なる操作をsubordinationといい，$y(t)$は新しいMarkov過程（または時間的に一様な加法過程）となる。とくに指数α $0 < \alpha \leqq 2$の対称安定過程にβ位のsubordination をほどこすと指数$\alpha\beta$の対称安定過程がえられる。

original な Markov過程およびsubordinateされたMarkov 過程の推移確率をそれぞれ$P(t, a, E)$，$\widetilde{P}(t, a, E)$と書くと，

$$(5.4) \qquad \widetilde{P}(t, a, E) = \int_0^\infty P(u, a, E) P(\theta(t) \in du)$$

の関係が成り立つ。また両者のsemi-group，generator とその定義域の間には

$$(5.5) \qquad \widetilde{T}_t f = \int T_u f \, P(\theta(t) \in du)$$

$D(\mathcal{G}) \subset D(\widetilde{\mathcal{G}})$であり，$f \in \mathfrak{D}(\mathcal{G})$に対して

$$(5.6)\qquad \tilde{\mathcal{G}} f = c\mathcal{G} f + \int_0^\infty (T_u f - f)\, n(du)$$

が成り立つ。加法過程の場合には，originalなprocess，およびsubordinatorの特性函数をそれぞれ，$\exp(-t\varphi(z))$，$\exp(-t\psi(z))$とすると，subordinateされたprocessのそれは，$\exp(-t\psi(\varphi(z)))$となる。

$(N-1)$次元Canchy過程は，N次元Brown 運動を用いた表現がえられるが，これは手引「Brown 運動」p.56 で説明されている。

subordination及びその応用に関する文献としては，Bochner 〔32〕，〔36〕 Blumenthal 〔25〕，Blumenthal–Getoor 〔27〕，〔29〕，K.Ito 〔110〕，S.Watanabe 〔233〕，および 〔225〕 が参考になる。

3.6　次元と指数に依存するpathの性質

この節では，Brown運動の場合，状態空間の次元Nによつて変われる性質を安定過程に拡張してえられた研究を列挙する。手引「Brown運動」の 5.10 再帰性，6.1 道の重複点，6.2 道のHausdorff測度に対応することなので，これを参照されたい。

〔1〕 再帰性

指数α $0<\alpha\leqq 2$のN次元対称安定過程において，$N>\alpha$のとき，すなわち，$N\geqq 3$では$0<\alpha\leqq 2$，$N=2$のとき$0<\alpha<2$，$N=1$では$0<\alpha<1$のとき，non–recurrentであつて，$P(\lim_{t\to\infty}|x(t)|=+\infty)=1$である。またpathの像集合はnowhere denseである。

一方，$N\leqq\alpha$のとき，すなわち$N=2$では$\alpha=2$のBrown運動，$N=1$では$1\leqq\alpha\leqq 2$のとき，recurrentであつて，任意の開集合へのhitting time σは，$P(\sigma<+\infty$ $=1$となる。pathの像集合はevery where denseである。とくに$N<\alpha$のときには，一点へのhitting time は確率1で有限であるに反して，$N=\alpha$すなわち，二次元Brown運動と一次元Canchy 過程においては容量0の集合（したがつて与えられた一点）へは到達しない。しかし再帰的であるから，零点はないが出発点の近傍にはいかほどでも近づいて，$P(\underline{\lim}_{t\to\infty}|x(t)|=0)=1$となる。H.P.McKean 〔168〕 参照。

〔2〕 PathのHausdorff測度と零点

N次元対称安定過程において，$N\geqq\alpha$のとき，pathの像集合のN次元Lebesgue 測

度は0で$N<\alpha$のときは∞である。 Lebesgue 測度0であるような微細な集合の計量としては，Hausdorff測度を用いるのが適切である。一般にN次元Lebesgue 外測度とN次元的Hausdorff 測度とは同位である。すなわち，その値は必ずしも一致しないが，一方の値が0となれば，他方も0となる。(Sa Ksの積分論p.54参照)。集合Eのα次元的Hausdorff測度を$\Lambda^{\alpha}(E)$と表わすことにすると

$$\mathrm{Snp}\ \{\alpha : \Lambda^{\alpha}(E) = \infty\} = \inf\{\alpha : \Lambda^{\alpha}(E) = 0\}$$

となるので，この共通の値をEのHausdorff次元といい，記号としてはdim Eを用いる。Brown運動と安定過程のpathおよびgraphと零点については，Lévy, Taylor, McKean, Blumenthal—Getoor, S. Watanabeの研究がある。

EをHausdorff次元数λなる〔0，1〕の部分Borel集合とするとき，N次元の一般な安定過程に対して

$$P[\dim X(E,\omega) = \min(N, \alpha\lambda)] = 1$$

である。ここで$X(E, \omega) = \{a \in R^N :$ ある$t \in E$に対して$a = x(t, \omega)\}$である。また最近，Ciesielski—Taylor 〔47〕によつて，$N \geqq 3$のBrown運動のpathの'exact Hausdorff measure'が求められた。すなわち，Lévyは$\{x(\tau_1\omega), 0 \leqq \tau \leqq t\} \equiv \Gamma_t$なる$arc$に対して，$h(\rho) = \rho^2 \log\log\frac{1}{\rho}$としたときの$h$−Hausdorff測度を$\mu$で表わすと$\mu(\Gamma_t) \leqq kt$ （kは定数）が確率1で成立つことを示したが，彼らは反対の不等式$\mu(\Gamma_t) \geqq kt$ ($k \neq 0$)を示した。二次元のときのexact Hausdorff measureは，$\rho^2 \log\rho^{-1} \log\log\log\rho^{-1}$であろうと予想されている。Taylorからの私信によれば安定過程の場合も，$h(\rho) = \rho^{\alpha}\log\log\frac{1}{\rho}$なる$h$−Hausdorff測度で正であることは，証明できるといつている。一方Blumenthalの手紙では，$N = 1 > \alpha$のとき，exact Hausdorff測度は$\rho^{\alpha}|\log\rho|^{\alpha/1-\alpha}$であろうと述べているが，Taylorの予想とは一致しない。

一次元対称安定過程のgraph $G(w) = \{(t, x(t, \omega)) : t \geqq 0\}$と零点$Z(\omega) = \{t : x(t, \omega) = 0\}$の次元は，Blumenthal—Getoor〔30〕によつて求められた。

$$P[\dim G(\omega) = 2 - 1/\alpha] = 1 \qquad 1 < \alpha \leqq 2 \text{のとき}$$
$$P[\dim G(\omega) = 1] = 1 \qquad 0 < \alpha \leqq 1 \text{のとき}$$
$$P[\dim Z(\omega) = 1 - 1/\alpha] = 1 \qquad 1 < \alpha \leqq 2 \text{のとき}$$

零点の場合は，S.Watanabeも独立に証明し，原点におけるlocal time の逆函数

は指数$1-\dfrac{1}{\alpha}$の片側安定法則に従うことを示した。

また指数$1<\alpha\leqq 2$の一次元対称安定過程について，local time $l(t,x,\omega)$があること。すなわち，$A\subset R^1$とするとき

$$\text{Lebesgue測度}\left\{\tau\leqq t \mid x(\tau,\omega)\in A\right\}=\int_0^t \chi_A(x(\tau))\,d\tau=\int_A l(t,x,\omega)dx$$

なるdensity $l(t,x,\omega)$があり，(t,x)に関して可測であるという一次元Brown運動のTrotterの結果はBoylanによつて拡張されている。

Hausdorff測度の定義および上述の研究については手引「Brown運動」のほか，文献〔225〕に詳説しておいた。

〔3〕 重複点

Hausdorff測度と一般化された容量の関係および〔2〕で述べたpathのHausdorff測度に関する研究を応用して，Dvoretzky—Erdos—Kakutani の結果はつぎのように拡張される。指数αのN次元対称安定過程には$N\leqq 3$かつ$N/2<\alpha\leqq 2$のとき，ほとんどすべてのpath について重複点に対応する時点は無限に存在する。一方$N\geqq 4$の場合と$N\leqq 3$でも$0<\alpha\leqq N/2$のときには確率1で重複点をもたない。文献〔225〕参照。

多重点(Multiple point)について，S.J.Taylorはつぎのように予想している。r重点があつて，$(r+1)$重点が存在しない場合は，$\dfrac{rN}{r+1}\geqq\alpha>\dfrac{(r-1)N}{r}$である。Dvoretzky—Erdös—Kakutani は1954年に二次元Brown運動には，確率1で，固定された任意の自然数kに対して，k重点が存在することを示したが，この結果はさらに〔58〕において，"確率1で連続体の濃度の多重度をもつた点が存在する"と強められた。したがつて，指数$1\leqq\alpha\leqq 2$の一次元安定過程にも，連続体の濃度のmultiplicityがあると予想される。

3.7 上級・下級函数の判定条件

本節では，手引「Brown運動」の 4.2 "道の局所連続性"およびこれと密接な関係にある 5.9 "Wiener テスト" に対応する結果を述べる。

〔1〕 上極限型の上級・下級函数の判定条件

Brown運動に関する有名なKolmogorov test に対応する判定条件はKhinchine 〔129〕によつて得られた。

$x(t,\omega)$を$x(0)\equiv 0$なるN次元安定過程$(0<\alpha<2)$とする。$t>0$で定義され

た正の単調増加函数$g(t)$に対して

$$(7.1) \qquad F(\omega) = \left\{ t;\ |x(t)| > t^{\frac{1}{\alpha}} g\left(\frac{1}{t}\right) \right\}$$

とおくとき，

$$(7.2) \qquad P\left(\inf_{t \in F(\omega)} t > 0 \right) = 1 \qquad (\text{あるいは} = 0)$$

のとき，$g(t)$は上級$\overline{\mathcal{U}}_0$（あるいは下級$\overline{\mathcal{L}}_0$）に属するという。

また同じく単調増加函数$g(t)$に対して，

$$(7.3) \qquad E(\omega) = \left\{ t;\ |x(t,\omega)| > t^{\frac{1}{\alpha}} g(t) \right\}$$

とおくとき，

$$(7.4) \qquad P(E(\omega)\text{が有界}) = 1 \qquad (\text{あるいは} = 0)$$

にしたがつて，$g(t)$を上級$\overline{\mathcal{U}}_\infty$（または下級$\overline{\mathcal{L}}_\infty$）に属するという。このとき$g(t)$が上級$\overline{\mathcal{U}}_0$，$\overline{\mathcal{U}}_\infty$に属するための必要十分条件は

$$(7.5) \qquad \int_{t_0}^{\infty} \frac{dt}{t\{g(t)\}^{\alpha}} < +\infty$$

である。ここで$t_0(>0)$は$g(t)$の定義域の任意の値でよい。したがつて，下級$\overline{\mathcal{L}}_0$，$\overline{\mathcal{L}}_\infty$に属するための条件は（7.5）の積分が発散することである。

$$g(t) = (\log t)^{\frac{1+\delta}{\alpha}} \in \overline{\mathcal{U}}_0 \quad (\text{ただし}\delta > 0)\text{，また}g(t) = (\log t)^{\frac{1}{\alpha}} \in \overline{\mathcal{L}}_0$$

となるので，δを任意の正数として

$$P\left(\overline{\lim_{t \to 0}} \frac{|x(t,\omega)|}{t^{\frac{1}{\alpha}} \left(\log \frac{1}{t}\right)^{\frac{1+\delta}{\alpha}}} = 0 \right) = 1$$

$$P\left(\overline{\lim_{t \to 0}} \frac{|x(t,\omega)|}{t^{\frac{1}{\alpha}} (\log t)^{\frac{1+\delta}{\alpha}}} = 0 \right) = 1$$

$$P\left(\overline{\lim_{t \to 0}} \frac{|x(t,\omega)|}{\left(t \log \frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{\alpha}}} = \infty \right) = 1$$

$$P\left(\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{|x(t,\omega)|}{(t\log t)^{\frac{1}{\alpha}}}=\infty\right)=1$$

が導ける。上の事実の証明において，重要な役割を果している関係は（2.4）式であり，$\alpha=2$のときとは，大いに異なる。

〔2〕 下極限型の上級・下級函数の判定条件

Dvoretzky-Erdös test に対応する判定条件は，最近，つぎのように求められた。Takeuchi 〔224〕．以下，指数α（$0<\alpha\leqq 2$）のN次元対称安定過程$x(t,\omega)$でとくにnon-recurrentな$N>\alpha$のときを論ずる。

正の単調減少函数$g(t)$に対して

(7.6) $$E(\omega)=\left\{t\ ;\ |x(t,\omega)|\leqq g(t)t^{\frac{1}{\alpha}}\right\}$$

とおくとき，

(7.7) $$P(E(\omega)\text{が有界})=0\quad(=1)$$

ならば$g(t)$は$x(t,\omega)$に関して上級$\mathcal{U}$（下級$\mathcal{L}$）に属するという。このとき，正の単調減少函数$g(t)$が$\mathcal{U}$（$\mathcal{L}$）に属するための必要十分条件は

(7.8) $$\int_{t_0}^{\infty}\frac{1}{t}\{g(t)\}^{N-\alpha}dt=\infty\quad(<\infty)$$

である。これから，$g(t)=\dfrac{1}{(\log t)^{\frac{1+\delta}{N-\alpha}}}$ は$\delta\leqq 0$のとき，$\mathcal{U}$ に$\delta>0$のとき$\mathcal{L}$に属することがわかる。

また，任意の$\delta>0$に対して

$$P\left(\text{十分大きい}t\text{に対して}\quad|x(t)|\geqq\frac{t^{\frac{1}{\alpha}}}{(\log t)^{\frac{1+\delta}{N-\alpha}}}\right)=1$$

$$P\left(\lim_{t\to\infty}|x(t)|=+\infty\right)=1$$

が得られ，無限大にescapeしてゆく速度はαが小さいほど，Nが大きいほど大きいこともわかる。上の事実の証明は，Wiener testと同様，容量の概念と本質的に結びついている。

$N=\alpha$のときには，Spitzer test が対応するわけであるが，一次元Cauchy 過程について，この種の問題はまだ解かれていない。$N<\alpha$のときは，零点が存在するため，下極限型の研究は意味をもたない。

〔3.7〕 Wiener test

Ito-Mckean はNewtonポテンシャルに対するWiener test を確率論的方法で証明しているが(手引きBrown運動参照) それは，Brown運動のpath の連続性を用いた方法であるので，そのまゝRieszポテンシャルに適用することはできない。S.Watanabeは〔225〕において，Borel-Cantelliのlemma の拡張であるChung-Erdösの定理(手引「確率論」p.12参照)を用いて，N次元対称安定過程($N>\alpha$)に関するWiener testを証明した。なおこれは，Frostman〔78〕の結果に対応する。要するにWiener testは確率論的にみればBorel-Cantelli のlemma に他ならない。

R^Nの解析集合Bに対して，$\sigma_B^* = \inf(t>0\,;\,x(t,\omega)\in B)$とし，

$$B_n = \{y\,;\,2^{-n}\leqq|y-x|\leqq 2^{-n+1}\}\cap B$$

とおく。このとき

$$x\text{が}\left\{\begin{array}{l}B\text{の irregular point}^{(*)}\\ B\text{の regular point}\end{array}\right. \iff P_x(\sigma_B^*=0)$$

$$=\left\{\begin{array}{l}0\\1\end{array}\right. \iff \Sigma 2^{(N-\alpha)n}C(B_n)\quad\left\{\begin{array}{l}<+\infty\\=+\infty\end{array}\right.$$

3.8 pathの変動(variation)

$x(t,\omega)$をN次元安定過程($0<\alpha\leqq 2$)とし，βをある正数とする。$x(t)$ の〔0，1〕の上のβ-variation V_βをつぎのように定義する。

$$(8.1)\qquad V_\beta = \sup\sum_{j=1}^{m}|x(t_j,\omega)-x(t_{j-1},\omega)|^\beta$$

ここでsupは〔0，1〕の有限個からなる細分$0=t_0<t_1<\cdots\cdots<t_m=1$のすべて

---

* xがBのregular point $\iff$ Bの平衡分布がxで1をとる。

($\alpha=2$のとき)領域DでのDirichlet問題を考えるとき，$x\in\partial D$がDirichlet問題に関して正則ということはxがD^cのregular pointなることである。

にわたるものとする。これに対して，Blumenthal−Getoorはつぎの定理を得た。

指数αのN次元安定過程について，$\beta\leqq\alpha$ならば確率1で$V_\beta=\infty$である。また$0<\alpha<1$かつ$\alpha<\beta$ならば確率1で$V_\beta<+\infty$である。後者のβ−variation有限の場合は$\alpha\geqq1$のときは，未解決であるが，Subordination を応用して，N次元対称安定過程（$0<\alpha\leqq2$）について，$\alpha<\beta$ならば確率1で$V_\beta<+\infty$ が示されている。文献〔225〕参照。

安定過程はuniform motion と$\alpha=2$のときを除いて有限時間に無限箇の jump を含み，$[0,t]$までのjump の高さの絶対値のβ乗の和

$$\sum_{0\leq\tau\leq t}\left|x(\tau,\omega)-x(\tau-0,\omega)\right|^{\beta}$$

は，確率1で$\alpha<\beta$のとき有限な値をもち，$\alpha\geqq\beta$のとき無限大となる。K. Ito〔111〕参照。

3.9 martingaleと安定過程

McKean〔168〕は指数α（$0<\alpha<2$）の一次元対称安定過程$x(t,\omega)$から導かれるいろいろなSemi−martingale を構成した。以下のことは，多次元でも同様であろうと思われるが，未確認なのでMcKean の論文に従つて一次元で述べておく。

確率過程$\{\pi(t,\omega)\mid 0\leqq t<+\infty\}$がlower semi−martingaleであるとはつぎの二条件をみたすときにいう。

（i）すべての$t>0$に対して，$s<t$のとき，$E(\pi(t,\omega)\mid\mathcal{B}_s)\leqq\pi(s,\omega)$が確率1で成り立つ。ここで$\mathcal{B}_s$は（$\pi(\theta,\omega)\mid\theta\leqq s$）の定めるBorel族である。

（ii）　$E(|\pi(t,\omega)|)<+\infty$

上の不等式において，不等号の向きが逆のとき，upper seml−martingaleといい，等号が成り立つとき，martingale という。

〔A〕　$0<\alpha$，$\beta<1$かつ$\alpha+\beta\leqq1$とし，mをR^1上の任意のBorel確率測度とすると，

$$\pi(t,\omega)=\int_{R^1}|x(t,\omega)-x|^{-\beta}m(dx)$$

はlower semi−martingaleである。また$t>0$ならば$E(\pi(t,\omega))$は有界である。

〔B〕　$0<\alpha\leqq 1$とし，mをR^1上の任意のBorel確率測度とすると

$$\pi(t,\omega)=\int_{R^1}\log|x(t,\omega)-x|m(dx)$$

はupper semi-martingale である。

〔C〕　$0<\alpha<2$のとき，uを非負なBorel可測函数とし，$u(x(t,\omega))$がmartingaleであるとすると，実はuは定数にすぎない。

〔D〕　$0<\alpha<2$のとき，不変測度は通常のBorel測度の正定数倍である。

〔C〕は$\alpha=2$のときと異なる性質で，別証がBlumenthal〔25〕にある。（ただし$0<\alpha<1$のとき）〔D〕は〔C〕から導かれる性質で，不変測度とは推移確率を$P(t,x,E)$とすると

$$m(E)=\int_{R^1}P(t,x,E)m(dx)$$

をみたす測度をいう。

$\boxed{3.10}$　吸収問題（ruin problem）

N次元の指数α（$0<\alpha<2$）の対称安定過程$x(t,\omega)$について述べる。（最後の〔4°〕を除いて）

〔1°〕　$\sigma=\inf\{t\,;\,|x(t)|>1\}$

$\tau=\inf\{t\,;\,|x(t)|<1\}$

とする。すなわち，σ，τはそれぞれ単位球の外部あるいは内部への最小到達時刻とする。さらに

$$(10.1)\qquad \begin{aligned}\mu_x(dy)&=P_x[x(\sigma)\in dy,\ \sigma<\infty]\\ \mu_x^*(dy)&=P_x[x(\tau)\in dy,\ \tau<\infty]\end{aligned}$$

とおく。すなわち，μ_x，μ_x^*はそれぞれ，点xから出発して，単位球の外部あるいは内部へ最初に到達した位置の分布を表わす。したがつて，$\mu_x(\{y\,;\,|y|<1\})=0$，$\mu_x^*(\{y\,;\,|y|>1\})=0$

$$(10.2)\qquad f(x,y)=\frac{\Gamma(\frac{N}{2})\sin\frac{\pi\alpha}{2}}{\pi^{N/2+1}}\cdot\frac{|1-|x|^2|^{\alpha/2}}{|1-|y|^2|^{\alpha/2}}\cdot\frac{1}{|x-y|^N}$$

とおくと，つぎの結果がわかつている。

（A） $0<\alpha<2$のとき， $\mu_x(dy)=f(x;y)\,dy$， $|x|<1$，$|y|\geqq 1$

（B） $\alpha<N$あるいは$\alpha=N=1$のとき，$\mu^*_x(dy)=f(x;y)\,dy$，

$|x|>1$，$|y|\leqq 1$

（C） $N=1<\alpha<2$のとき

$$\mu^*_x(dy)=f(x;y)\,dy-\frac{(\alpha-1)}{\pi}\sin\frac{\pi\alpha}{2}\int_1^{|x|}(u^2-1)^{\alpha/2-1}du\,(1-y^2)^{-\alpha/2}dy$$

$|x|>1$，$|y|\leqq 1$

（D） $N=1$のとき，$|x|<1$に対して，$p(x)=P_x[x(\sigma)\geqq 1，\sigma<\infty]$ すなわち，xから出発して，$(-\infty，-1]$より先に$[+1，+\infty)$に到達する確率は

$$p(x)=2^{1-\alpha}\Gamma(\alpha)\left[\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]^{-2}\int_{-1}^{x}(1-u^2)^{\alpha/2-1}du$$

となる。これは超幾何函数Fを用いて

$$p(x)=\frac{1}{2}+\frac{\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\;x\;F\left(\frac{1}{2},\,1-\frac{\alpha}{2};\,\frac{3}{2};\,x^2\right)$$

とも書ける。

（E） $\alpha<N$かつ$|x|>1$のとき，xから出発して，単位球に到達しない確率を$q(x)=p_x[\tau=\infty]$とすると

$$q(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{N-\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\int_0^{|x|^2-1}\frac{u^{\alpha/2-1}}{(u+1)^{N/2}}\,du$$

（F） $N=1\leqq\alpha<2$のとき，$|x|>1$，$t>0$に対して，xから出発して時刻tまでに単位球に到達しない確率を$r(x,t)=P_x[\tau>t]$とすると，

$\alpha=1$ならば， $\lim_{t\to\infty}\log t\cdot r(x,t)=\log\left(|x|+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\right)$

$1<\alpha<1$ならば

$$\lim_{t\to\infty} t^{1-1/\alpha} \cdot r(x,t) = \frac{\alpha \sin\frac{\pi\alpha}{2} \cdot \Gamma(2-\alpha)}{\Gamma(1-\frac{1}{\alpha}) \cdot [\Gamma(\frac{1}{\alpha})]^2} \int_1^{|x|} (u^2-1)^{\alpha/2-1} du$$

(G)　Eを単位球内の部分Borel集合とする。$|x|<1$に対して，$H(x, E)$をxから出発して，単位球を飛び出すまでにEに滞在する平均時間とする。

すなわち

$$H(x,E) = E_x \left[\int_0^{\sigma} \chi_E(x(t,\omega))\,dt\right]$$

ここでχ_EはEの特性函数である。このとき

$$H(x,dy) = \frac{\Gamma(\frac{N}{2})}{2^{\alpha}\pi^{N/2}[\Gamma(\frac{\alpha}{2})]^2} \int_0^z \frac{u^{\alpha/2-1}}{(u+1)^{N/2}}\,du \frac{dy}{|x-y|^{N-\alpha}}$$

ここで$z=(1-|x|^2)(1-|y|^2)|x-y|^{-2}$，$|x|<1$，$|y|\leqq 1$である。

以上の最終的な成果は，Blumenthal—Getoor—Ray〔31〕によるが，ここにいたるまでに多くの人たちによつて部分的に解かれてきたことが多い。(A) および (D) については$N=\alpha=1$のとき，Spitzer，$N=1$，$0<\alpha<2$のときは，WidomおよびS. Watanabeによつて解かれた。(A) は$\alpha<N$のとき，(3.1 3) で述べた調和測度であることに気づくと直ちに出る。(G) はいわゆる0次のGreen函数と呼ばれるものであり，$N=\alpha=1$のとき，Kac—Pollard，$N=1$，$0<\alpha<1$のときKesten，また$N=1$，$0<\alpha<2$のときは，Widom. およびS. Watanabe によつて (違つた形で) 解かれた。

以上はすべて半径が1の球のときを述べているが，(1.6) 式を用いて任意の半径の球についても求められる。

〔2〕　$\sigma(r)=\inf\{t\,;\,|x(t)|>r\}$とおく。この$\sigma(r)$の平均および二乗の平均はつぎのようになる。$|x|\leqq r$に対して

(A)　$E_x[\sigma(r)] = K(\alpha,N)(r^2-|x|^2)^{\alpha/2}$

(B)　$E_x[\sigma(r)^2] = \alpha r^{\alpha}[K(\alpha, N)]^2 \int_{|x|^2}^{r^2} (t-|x|^2)^{\alpha/2-1}$

$$\times F(-\frac{\alpha}{2}, \frac{N}{2}; \frac{N+\alpha}{2}; tr^{-2})\,dt$$

ここで

$$K(\alpha, N) = \frac{\Gamma(\frac{N}{2})}{2^{\alpha}\Gamma(1+\frac{\alpha}{2})\,\Gamma(\frac{N+\alpha}{2})}$$

$$F(-\frac{\alpha}{2}, \frac{N}{2}; \frac{N+\alpha}{2}; tr^{-2}) = \frac{\Gamma(\frac{N+\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{N}{2})\Gamma(\frac{\alpha}{2})}\int_0^1 u^{N/2-1}(1-u)^{\alpha/2-1}(1-utr^{-2})^{\alpha/2}du$$

これらの公式は，$\alpha=2$のときも同じく成立する。N次元の以上のような最終的な結果は，Getoor〔85〕によるが，(A)は$N=\alpha=1$のときKac–Pollard，$N=1$，$0<\alpha<1$のときは，Elliot．また$N=1$，$0<\alpha<2$のときはWidom およびS．Watanabeが解いている。

〔3〕　上の〔1〕〔2〕は，一次元でいうと，区間$(-1, +1)$または$(-r, r)$を考えて，その両端に吸収壁をおいた場合であつた。これに対して$(-\infty, b)$なる区間の点から出発して，点$b>0$を飛びこえたとき，殺してしまう場合についてRay〔196〕はつぎの結果をえた。$0<\alpha<2$のとき，$\sigma=\inf\{t : x(t) \quad [b, +\infty)\}$として

$$P_0[x(\sigma)\in d\xi] = \frac{\sin\frac{\pi\alpha}{2}}{\pi}\left(\frac{b}{\xi-b}\right)^{\alpha/2}\frac{d\xi}{\xi} \qquad b\leqq\xi<+\infty$$

また$P_0(x, t) = \frac{d}{dx}P_0[x(t)\leqq x ; \sigma>t]$として，0次のGreen 函数が求まる。

$$\int_0^{\infty}P_0(x, t)dt = \frac{1}{[\Gamma(\frac{\alpha}{2})]^2}\int_0^{\min(b, b-x)}\xi^{\alpha/2-1}(\xi+|x|)^{\alpha/2-1}d\xi$$

〔4〕　一次元の片側安定過程$(0<\alpha<1)$について，$b>0$を越える直前および直後の位置を$x(\sigma)$，$x(\tau)$とすると，

$$P_0(x(\sigma)\in d\xi, x(\tau)\in d\eta)=\frac{\alpha\ \sin\alpha\pi}{\pi}\ \frac{1}{\xi^{1-\alpha}}\ \frac{1}{(\eta-\xi)^{1+\alpha}}\,d\xi\ d\eta$$

$$(b>\xi>0,\quad \eta>b)$$

また $y_1=b-x(\sigma)$, $y_2=x(\tau)-b$ とおくと

$$P_0(y_1\in du,\quad y_2\in dv)=\frac{\alpha\ \sin\ \pi\alpha}{\pi}\cdot\frac{1}{(b-u)^{1-\alpha}}\cdot\frac{1}{(u+v)^{1+\alpha}}$$

となる。この式はDynkin〔59〕によるが，調和測度とLévy測度の関係についてのIkeda–Watanabe〔104〕の研究からもえられる。

$\boxed{3.11}$ 生成作用素

以下1次元の対称安定過程（$0<\alpha\leq 2$）について考える。

〔1〕　$C_0(R^1)$ 上の半群の生成作用素

$f\in C_0(R^1)$ に対し　$T_t f(x)=\int_{R^1} f(y)p(t,x-y)\,dy$

但し　$p(t,x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-t|z|^\alpha}\cos zx dz$

とおくと，$C_0(R^1)$ 上のHille–Yosida の意味の半群がえられる。一般論によって（$\boxed{2}$ 参照）　その生成作用素を $\mathfrak{g}$ とすると（$0<\alpha<2$）

$C_0^2(R^1)\subset D(\mathfrak{g})$　かつ

$f\in C_0^2(R^1)$ に対して

$$\mathfrak{g}f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[f(y)-f(x)-(y-x)f'(x)\right]\frac{C(\alpha)}{|x-y|^{\alpha+1}}\,dy$$

但し　$C(\alpha)=\frac{1}{\pi}\Gamma(\alpha+1)\sin\frac{\pi\alpha}{2}$

となる。逆にこれによって半群は一意的にきまり上のものと一致する。

$D(\mathfrak{g})$ の完全な特徴づけは次の形であたえることができる。

(S. Watanabe 〔233〕 及び文献 〔225〕 参照)

$$D(\mathfrak{g})=\{f\in C_0(R^1)\,;\quad \exists g\in C_0(R^1)\quad \forall\varphi\in\mathcal{D}(R^1)\text{に対し}$$

$$(f(x),\ \frac{C(\alpha)}{\alpha(\alpha-1)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi''(y)}{|x-y|^{\alpha-1}}dy)=(g(x),\ \varphi(x))\}^{(*)}$$

$f\in D(\mathfrak{g})$ に対してこの g は一意的に定まり

$$\mathfrak{g}f=g$$

この結果は $\alpha=2$ では左辺を $((x),\varphi''(x))$ とおきかえてなりたつことはよく知られている。この結果を用いれば $\alpha<2$ の $D(\mathfrak{g})$ が $\alpha=2$ (Brown 運動) の $D(\mathfrak{g})$ より本当に大きくなつていることなどがわかる (〔225〕 参照)

〔2〕 吸収壁過程

$I=(-1,1)$ での吸収壁過程 (I をはなれたら吸収さしてしまう Markov 過程) の K. Ito 〔111〕 の意味での生成作用素 $\mathfrak{g}$ は

$$\mathfrak{g}u(x)=\frac{c(\alpha)}{\alpha(\alpha-1)}\ \frac{d^2}{dx^2}\int_{-1}^{1}\frac{u(y)}{|x-y|^{\alpha-1}}dy\qquad 0<\alpha<2\qquad \alpha\neq 1$$

$$\left(=\frac{c(\alpha)}{\alpha}\ \frac{d}{dx}\int_{-1}^{1}u(y)\frac{\mathrm{sgn}(y-x)}{|x-y|^{\alpha}}\ dy,\qquad 0<\alpha<1\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}\ \frac{d}{dx}\ P\int_{-1}^{1}\frac{u(y)}{y-x}\ dy\qquad\qquad \alpha=1$$

$D(\mathfrak{g})=\{u\,;\,u\in C(I),\ \mathfrak{g}u$ が I 上で有界可測 $\}$

$$\mathfrak{N}=\{f:\ f=0\quad a.e.\ \text{on}\ I\}$$

$\alpha=2$ では $\mathfrak{g}=\dfrac{d^2}{dx^2}$ $D(\mathfrak{g})=\{u\,;\,u\in C(I)\ \ u''$: 有界可測

---

* $(f(x)\ g(x))=\int_{R^1}f(x)g(x)dx$

かつ$u(-1)=u(1)=0$ $\}$となり境界条件の問題がおこるが，$0<\alpha<2$ではこの境界条件は$\mathfrak{g}$の形のうちに吸収されてしまつている。以上の研究は Kac〔115〕に始まり Elliott〔62〕 S. Watanabe〔233〕でなされた（なお〔225〕参照）

〔3〕 安定過程に関係した$I=(-1,1)$上のある種の作用素

簡単のため $\alpha=1$ の場合を考え

$$\tilde{\mathfrak{g}}\, u(x)=\frac{1}{\pi}\, P\int_{-1}^{1}\frac{u'(y)}{y-x}\, dy$$

なる作用素を考えると $\dfrac{\partial u}{\partial t}\cdot=\tilde{\mathfrak{g}}\, u$ なる発展方程式は $x=\pm 1$での境界条件をあたえないと一意的にとけない。特にMarkov解をあたえる境界条件はElliott 〔60〕で完全に決定され，それは1次元拡散過程でFellerが求めた境界条件と完全に対応する。特に境界条件 $u(-1)=u(1)=0$ に対応するのが〔2〕の吸収壁過程である。又これらのMarkov過程のpathの構造についてはS. Watanabe 〔233〕及び文献〔225〕参照。

4　極限定理と汎函数の分布法則

4.0　まず最初に，独立変数の和の極限法則に関する Khinchine, Levy の基本的的な研究について述べる。周知のごとく，この問題の発展途上で，必然的に加法過程の一般論が確立されたのであつた。Kac, Erdös は，独立変数の和のいろいろな函数の極限法則を適当な確率過程の汎函数の分布として求めた。Donsker はこれらの方法を適用するための根拠となる一般論を研究し，これは，Prokhorov, Skorokhod, Kimme によつて発展せしめられた。また，汎函数の分布を計算する方法としては，Andersen, Spitzer, Baxter による combinatorial lemma が重要である。最後に，ある種の極限定理とも考えられる path の性質の研究についてまとめておく。

4.1　独立確率変数の和の極限分布

中心極限定理 (central limit theorem) はある種の条件のもとで，独立確率変数の多数個の和の分布は近似的に正規分布をなすことを主張するもので，文字通り，古典的確率論の中心課題であつた。ところで正規分布は無限分限可能な分布の特別な場合であるから，後者を極限分布にもつ極限定理が成立すれば，中心極限定理はこれの系として出てくる。これは同時に Poisson 分布，Polya-Eggenberger 分布，安定分布などへの収束問題，および大数の法則も含み，重要な極限定理を提出している。

これらの問題は，今世紀前半に開拓されつくし，有名な Gnedenko-Kolmogorov の本〔92〕にまとめられている。本節では，これの特に重要な部分だけをまとめておく。

〔1°〕 確率変数の集合 $\{X_{nm} | n=1,2,\cdots\cdots ; m=1,2,\cdots\cdots, K_n\}$ が与えられ，同行の確率変数 $X_{n1},\cdots\cdots X_{nk_n}$ はすべて独立であるが，異行では必ずしも独立ではないと仮定し，適当に与えられた実数 A_n に対して，

$$(1.1)\qquad X_{n1}+X_{n2}+\cdots\cdots+X_{nk_n}-A_n$$

の極限を論ずるとき，つぎのような条件を課するのは自然である。すべての $\varepsilon>0$ に対して

$$(1.2)\qquad \lim_{n\to\infty} \sup_{1\leqq k\leqq k_n} P\{|X_{nk}|\geqq\varepsilon\}=0$$

が成り立つとき，X_{nk} は infinitesimal (個々に無視可能) であるといい，以下こ

れを仮定する。さらにこれを少し弱めた，つぎの条件もよく使われる。変数X_{nk} が asymptotically constant であるとは，任意の$\varepsilon>0$に対して

$$(1.3)\qquad \lim_{n\to\infty} \sup_{1\leqq k\leqq k_n} P\{|X_{nk}-a_{nk}|\geqq\varepsilon\}=0$$

となるような定数 a_{nk} が存在することをいう。もし X_{nk} が asymptotically constant であるとき，(1.3) における a_{nk} は X_{nk} の中央値 (median) になる。

Khinchine は1937年に，無限分解可能な分布をつぎのように特徴づけた。
“infinitesimal な独立変数の和（1.1）の分布函数が$n\to\infty$のとき，一つの分布函数$F(x)$ に法則収束するための必要か十分な条件は $F(x)$ が無限分解可能なことである。”

この定理の証明，および（1.1）の極限が存在するための必要かつ十分な条件については，文献〔92〕の第四章をみよ。

〔2°〕 独立確率変数列$\{X_1, X_2, \cdots\cdots, X_n, \cdots\cdots\}$とある実数列 A_n と $B_n(>0)$ を適当にとり

$$(1.4)\qquad \frac{1}{B_n}(X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n)-A_n$$

の極限を $X_{nk}=X_k/B_n\ (1\leqq k\leqq n)$ が asymptotically constant である条件のもとで与えたとき，(1.4) の分布函数が，$n\to\infty$のとき，ある分布函数$F(x)$に法則収束するとき，$F(x)$は class L に属するという。この class はもちろん，無限分解可能な分布に含まれるが，その全体より狭い class である。この法則のつぎのような判定条件は Lévy によつて与えられている。

(a) すべてのa $(0<a<1)$ に対して，$F(x)$が$F(x/a)$と他の単位分布以外の分布との convolution として表わされることである。

あるいは，また

(b) $F(x)$が無限分解可能であり，その特性函数の対数を

$$\varphi(z)=\mathrm{i}mz-\frac{v}{2}z^2+\int_{-\infty}^{0}\left\{e^{izu}-1-\frac{izu}{1+u^2}\right\}dM(u)+\int_{0}^{\infty}\left\{e^{izu}-1-\frac{izu}{1+u^2}\right\}dN(u)$$

と書くとすると，$M(u)$および$N(u)$はともに$\log|u|$ の凸函数であることである。
文献〔92〕の第六章，Levy〔144〕，国沢〔138〕のp.108 参照。

〔3°〕上の〔1°〕および〔2°〕の場合は，変数が必ずしも同分布ではない一般論であつ

た。ここでは，独立変数$\{X_1, X_2, \cdots\cdots, X_n, \cdots\cdots\}$の各々が同分布に従うものと仮定する。このとき，もし，（1.4）の分布が法則収束するならば，特性函数に関する性質を使って

$$X_{nk}=\frac{X_k}{B_n}-\frac{A_n}{n}$$

は infinitesimal であることが示され，（1.4）の極限分布は class L に属することになる。そこで，（1.4）の極限分布の class を決定する問題が生ずるわけで，ここに登場するのは，前章で解説ずみの 準安定分布 安定分布である。すなわち，"$\{X_n\}$をことごとく同じ分布をもつ，独立確率変数列とし，適当な実数列 $\{A_n\}$ と正数列 $\{B_n\}$ に対し，（1.4）の分布函数がある分布函数$F(x)$に法則収束するならば，$F(x)$は準安定分布であり，また逆も成立する。とくに $A_n=0$（$n=1, 2, \cdots\cdots$）なるときは，安定分布になる。"

これは Levy が早くも１９２５年に示した事実である。無限分解可能な分布は，確率論に現われる確率分布の広大な範疇を形成しているが，準安定分布は，このうちで，かなり特殊な分布である。上の定理における確率変数 X_k の共通な分布は準安定分布の牽引域（domain of attraction for quasi stable law）に属するという。この牽引域を決定する判定条件も知られている。（文献〔９２〕の§３５参照）準安定分布の牽引域のうち，正規分布に収束する分布は，非常に広い class をなしているに反し，これ以外の，すなわち $0<\alpha<2$の準安定分布に収束するような分布は，その特性が準安定分布と似かよったものに限られている。

de Moivre, Laplace 以来の古典的な研究においては，（1.4）における B_n をとくに $B_n=a\sqrt{n}$（aは正定数）とした場合に興味がおかれていた。この事実を拡大して，確率変数 X_k の共通な分布$F(x)$が，つぎの性質をみたすとき，$F(x)$は準安定分布$V(x)$の正規牽引域（domain of normal attraction of the law $V(x)$）に属するという。ある正数aとある実数 A_n に対して，

$$(1.5)\qquad \lim P\left\{\frac{1}{an^{1/\alpha}}\sum_{k=1}^{n}X_k-A_n<x\right\}=V(x)$$

ここでαは $V(x)$ の指数を表わすものとする。

〔４°〕 上の〔３°〕の場合について，（1.4）は収束しないが，適当な部分列

$n_1 < n_2 < \cdots\cdots < n_m < \cdots\cdots$ を選んで

$$(1.6) \qquad \frac{1}{B_{n_m}}(X_{n_1} + X_{n_2} + \cdots\cdots + X_{n_m}) - A_{n_m}$$

の分布函数が$m \to \infty$のとき，ある分布函数 $V(x)$ に法則収束する場合がある。この$V(x)$を部分極限法則 (partial limit law) ということにすると，Khinchine によって得られた結果は，つぎのごとくに述べられる。

“任意の部分極限法則は無限分解可能である。逆に任意の無限分解可能な確率法則は，部分極限法則でもある。”

この定理の後半は，とくに深い内容をもつたものと考えられる。(文献〔92〕の§37参照)

〔50〕 以上は，主な確率法則の極限定理の観点からの特徴づけを述べたものである。よりくわしい研究は，手引「極限定理」の項目で扱われるであろう。独立変数の和の極限定理は現在もなお，ソビエトでは進展しているが，その内容はつぎのようである。(1) 収束速度の評価，(2) 法則収束よりも強い収束の型の問題，(3) 整数値確率変数の場合の研究などである。これらについては，Gonedenko 〔91〕および文献〔253〕の pp.206-211などの綜合報告が便利であろう。この手引の文献表も，最近のものは，なるべく収録しておいた。

4.2 確率過程の収束に関する基礎定理

平均0，分散1で，同分布に従う独立変数 $X_1, X_2, \cdots\cdots$ の部分和の列を$S_1, S_2, \cdots\cdots$ とする。このとき，中心極限定理は

$$\lim P\{P_n < \alpha\sqrt{n}\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\alpha} \exp(-\frac{t^2}{2})\,dt$$

の成立することを主張するわけであるが，これはまた 右辺の極限分布は，確率変数$\{X_k\}$の本来の分布とは independent であることを示すものである。このように極限分布が存在し，考えている確率変数の分布とは independent であるときに，われわれは“invariance principle”が成立するという。Erdös-Kac 〔65〕〔66〕は，ある種の極限定理を証明するのに，まず最初に invariance principle が成立することを示し，さらに確率変数に適した確率過程（この場合は Wiener 過程）の汎函数を

選んで極限分布を計算した。Donsker 〔55〕は F_n が $S_1, S_2, \cdots\cdots, S_n$ の函数であるような確率変数の列 $\{F_n\}$ を考え，非常に弱い条件のもとで，F_n の極限分布は，Wiener 空間の上のある汎函数の分布と等しくなること，すなわち，F_n の極限分布は，$\{X_k\}$ の分布とは independent であることを示した。Donsker の場合は，極限の確率過程が Wiener 過程のときに限られていたので，当然もつと広い確率過程へと広げられる研究が，Prokhorov 〔191〕，Skorokhod 〔213〕〔214〕〔215〕〔217〕，Kimme 〔131〕〔132〕によつて各々立場を少しずつ異にしてなされた。ここでは，加法過程に重点をおいて，これらの研究を述べる。

〔1°〕 Prokhorov 〔191〕は可分，完備な距離空間の確率測度の収束ということを足場において，確率過程の法則収束の一般論を研究した。とくにこのような距離空間としては，一様収束の距離を与えた閉区間〔0，1〕の上の連続函数の空間 C〔0，1〕と適当な距離が定義された，〔0，1〕の上の第一種不連続函数全体の空間 D〔0，1〕がとくに確率論の立場から考察の対象になる。確率測度の列を考え，境界が P-測度0であるようなすべての集合の上で，測度 P に収束するとき，この測度の列は収束するという。C〔0，1〕および D〔0，1〕の上の確率測度の族がコンパクトであるための必要十分条件が与えられているが，これによつて，有限次元分布が法則収束するとき，ある確率過程の列は一つの確率過程に法則収束するところの根拠が与えられる。とくに Kolmogorov の条件

$$(2.1) \qquad E\left[\,|x(t_2)-x(t_1)|^a\,\right] \leqq K\,|t_2-t_1|^b$$

（ここで a，K，$b-1$ はいずれも正ですべての測度に対して，等しいとする。）

が，C〔0，1〕の上の確率測度の列のすべてに対して成立するとき，有限次元分布の列の収束は，C〔0，1〕の上の測度列の収束を意味する。（手引，「Brown 運動，p.5参照）

任意の n に対して

$$0=t_{n,0} < t_{n,1} < \cdots\cdots < t_{n,kn}=1$$

を〔0，1〕の細分とし，$X_{n,1}, \cdots\cdots, X_{n,nk}$ は互いに独立な確率変数と仮定する。平面上の点 $\left(t_{n,k}, \sum_{j=1}^{k} X_{n,j}\right)$ を，折線でつなぐと，C〔0，1〕に属する函数が，またこれらの点から水平な線分を引くと，D〔0，1〕に属する函数が得られる。かくして，任意の n に対して，確率変数 $X_{n,j}$ は C〔0，1〕の上の確率測度 P_n を，また D〔0，1〕の上の確率測度 P'_n を induce する。確率変数がすべての n について，平均0，分散有

限であるとし，$t_{n,k}$ を $\sum_{j=1}^{k} X_{n,j}$ の分散とおくとき，$C[0,1]$の上の P_n の列が $C[0,1]$の上の Wiener 測度に収束するための必要かつ十分な条件はLindeberg の条件，すなわち，すべての$\lambda>0$に対して

$$F_{n,k}(x) = P\{X_{n,k} < x\}$$

とするとき

$$\text{(2.2)}\quad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x|>\lambda} x^2 dF_{n,k}(x) = 0$$

が満されることである。これは，Donsker の結果の拡張になっている。

つぎに，変数 $X_{n,k}$ が infinitesimal であり，PをLévy 過程に対応する $D[0,1]$上の確率分布であるとする。このとき，P_n' が Pに収束するための必要かつ十分な条件は有限次元分布が収束し，かつある種の条件が満されることである。（この条件については，Prokhorov の論文，定理3.2をみよ） また上の特別な場合で確率変数$X_{n,k}$が同分布かつ，$t_{n,k}=k/k_n$ としたときの条件は，非常に簡単になり，X_{n,k_n} の分布が極限をもつことである。この特別な場合は Skorokhod [213] で始めて指摘された。

[20] Skorokhod [214] は，Prokhorov の考えを背景にして，Donsker principle の類似の拡張をえた。$\mathfrak{X}$を可分，完備な距離空間とし，$[0,1]$から$\mathfrak{X}$への函数で，$[0,1]$では右連続，1では左連続で高々第一種不連続なものの全体を$K[0,1]$で表わす。確率1で見本函数が$K[0,1]$に属するような確率過程の列$\{\xi_n(t), 0\leqq t\leqq 1\}$を考える。任意の自然数$k$と任意の$0\leqq t_1, t_2, \cdots\cdots, t_k\leqq 1$に対して $\{\xi_n(t_1), \cdots\cdots, \xi_n(t_k)\}$ のk次元分布が，$n\to\infty$のとき，$\{\xi_0(t_1), \cdots\cdots, \xi_0(t_k)\}$ の分布に収束すると仮定する。Fを$K[0,1]$上の実函数で $F(\xi_n(t,\omega))$ が確率変数を定義するとき，すなわち確率分布をもつとき，このFを汎函数（functional）と呼ぶ。

$F(\xi_n(t))$ が$n\to\infty$のとき，$F(\xi_0(t))$ に法則収束するためのいくつかの十分条件が与えられるが，そのために $K[0,1]$ の上にいくつかの位相が導入される。例えば，J_1 位相で$x_n(t)$ が $x_0(t)$ に収束するとは，

$$\lambda_n(0)=0,\quad \lambda_n(1)=1,\quad \lim_{n\to\infty} \sup_t |\lambda_n(t)-t|=0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_t |x_n(\lambda_n(t)) - x_n(t)|=0$$

となるような狭義単調かつ連続函数の列$\{\lambda_n(t)\}$が存在することである。FをJ_1位相で連続な汎函数とするとき，$F(\xi_n(t))$が$F(\xi_0(t))$に法則収束するための必要かつ十分な条件は

(a) 〔0，1〕における dense な可算集合N（ただし $N\ni 0, 1$）の上のtに対して，$\{\xi_n(t)\}$の有限次元分布が $\xi_0(t)$ の有限次元分布に収束する。

(b) 任意の$\varepsilon>0$に対して

$$\lim_{c\to 0}\overline{\lim_{n\to\infty}} P\left\{\sup_{t-c<t_1<t<t_2<t+c} \min\left[\,|\xi_n(t_1)-\xi_n(t)|,\ |\xi_n(t)-\xi_n(t_2)|\,\right]>\varepsilon\right\}=0$$

で与えられる。

Skorokhod〔215〕では，上の一般論を K〔0，1〕に属する path をもつ加法過程に適用して，つぎの結果を得ている。"加法過程の列$\xi_n(t)$ の有限次元分布が，Lévy 過程 $\xi_0(t)$ の有限次元分布に収束しているとする。$n\to\infty$のとき$x_n(t)\to 0$となるある函数列 $x_n(t)$ が存在して，J_1位相に関して連続なすべての汎函数Fに対して，$F(\xi_n(t)-x_n(t))$ の分布は，$F(\xi_0(t))$ の分布に収束する。"

最後に〔217〕では，推移確率がある regularity condition をみたす場合の Markov 過程についてこの種の研究を行っている。文献〔165〕を参照。

〔30〕 Kimme〔131〕も Prokhorov や Skorokhod とは独立に，ほぼ類似の結果をえているので，その一部分を以下に述べる。

任意の正整数nに対して，$\{X_{nk},\ k\leq k_n\}$を infinitesimal な互いに独立な確率変数の有限列とする。$0\leq t\leq 1$に対して，x_n をこれらの確率変数の最初の$[tk_n]$個の和とすると，$\{x_n(t),\ 0\leq t\leq 1\}$は加法過程になる。Gnedenko の定理を用いて，いろいろの意味でこの加法過程の有限次元分布が収束するための条件を求めている。たとえば$(t_1, t_2, \cdots\cdots, t_m)$が〔0，1〕を任意に動き，特性函数の変数が有限区間を変わるに対して一様に，$[x_n(t_1), \cdots\cdots, x_n(t_m)]$の特性函数が Lévy 過程の有限次元の特性函数に収束するための十分条件はつぎのようになる。

実函数$\gamma(t)$，$0\leq t\leq 1$と有界函数 $G(t;x)$，$-\infty<x<+\infty$，$0\leq t\leq 1$が存在して

(a) $\lim \sum_{k=1}^{[tk_n]} \left(\alpha_{nk}+\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\, dF_{nk}(x+\alpha_{nk})\right) = \gamma(t)$, ($t$に関して一様)

ここで $F_{nk}(\lambda)=P\{X_{nk}\leqq\lambda\}$, $\alpha_{nk}(\tau)=\int_{|x|<\tau} x\, dF_{nk}(x)$

(b) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{[tk_n]} \int_{-\infty}^{x} \frac{u^2}{1+u^2}\, dF_{nk}(u+\alpha_n k)=G(t;x)$

($G(1;x)$の連続点xでkに関して一様)

(c) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{[tk_n]} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u^2}{1+u^2}\, dF_{nk}(u+\alpha_{nk})=G(t;+\infty)$, (tに関して一様)

が満されればよい。

また加法過程の列 $x_n(t)$ が先に述べた特性函数の意味で Lévy 過程 $x(t)$ に収束すると仮定する。$D\ni f_n$ ならば，高々可算個の点を除いて $f\in D$に収束するような$[0,1]$を定義域にもつ実函数の全体をDとする。FをDの上に定義された一様位相に関して一様連続な有界汎函数とする。このとき

$$\lim_{n\to\infty} F[f_n] = F[f]$$

となり，さらに

$$\lim_{n\to\infty} E\{F[x_n(\cdot,\omega)]\} = E\{F[x(\cdot,\omega)]\}$$

これらの結果の応用として 4.4 で後述するように，確率変数の有限和の分布から，連続な parameter をもつ加法過程に関する分布を計算することができる。

4. 3 combinatorial method

$X=(X_1,\cdots\cdots, X_n)$ をn次元ベクトル値確率変数，$\mu(x)=\mu(x_1,\cdots\cdots,x_n)$をその確率測度とする。さらに位数$h$の変換群$G$のすべての要素$g$に対して，$\mu(x)=\mu(gx)$が成立すると仮定する。$f(x)=f(x_1,\cdots\cdots,x_n)$ がμ可積分な函数ならば，$f(x)$の平均は

(3.1) $E(f(X)) = \int f(x)d\mu(x)= \int f(x)d\mu(x)$

ここで

$$(3.2)\qquad \overline{f}(x)=\frac{1}{h}\sum_{g\in G}f(gx)$$

となる。ここで，もしも $f(x)$ を直接，積分するのより，$f(x)$ を適当に書きかえてより容易に計算できるならば，有益なことが知れるであろう。この考えをn個の文字に関する置換σの対称群に適用してみる。ベクトル値確率変数 $X=(X_1,\cdots\cdots,X_n)$が任意の置換に対して，$\mu(x)=\mu(\sigma x)$となるとき，symmetrically dependent であるという。以下，$X_1,\cdots\cdots,X_n$ の各々は同分布かつ互いに独立であると仮定する。独立確率変数の部分和を $S_0=0$，$S_1=X_1,\cdots\cdots$，$S_n=X_1+\cdots+X_n$ とおき，(1.1) の函数$f(x)$ として，たとえば

$$f(x)=\max\left[S_0,\ S_1,\cdots\cdots,S_n\right]$$

をとり，すべてのσを動かしたときの$[f(\sigma x)]$の集合を計算に都合のよい性質をもった$[g(\sigma x)]$の集合と同一視する。つまり確率変数 $X_1,\cdots\cdots,X_n$ の特別な値には，関係しないで suffix $1,2,\cdots\cdots,n$の順序を交換に不変な性質を見つけ出すというのが，E. Sparre Andersen [3][4][5] によって始められたcombinatorial method の基本原理である。

Spitzer [219] は，この考えを押しすすめて，つぎに述べる基本的な関係式を導き，興味ある漸近的な性質をえている。

$\phi_n(\lambda)$ および $\psi_n(\lambda)$ をそれぞれ $\max\limits_{0\leq k\leq n} S_k$，$\max\{0,S_n\}$ の特性函数とするとき $|t|<1$，$\mathrm{I}m(\lambda)\geq 0$ に対して

$$(3.3)\qquad \sum_{n=0}^{\infty}\phi_n(\lambda)\,t^n=\exp\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\psi_n(\lambda)}{n}t^n\right]$$

となる。この系として

$$(3.4)\qquad E\left(\max_{0\leq k\leq n}S_k\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}E\left(\max\ (0,S_n)\right)$$

$$(3.5)\qquad \sum_{n=0}^{\infty}P\left(\bigcap_{k=1}^{n}[S_k\geq 0]\right)t^n=\exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^k}{k}P[S_k\geq 0]\right\}$$

を得る。(3.4) は Kac–Hunt (文献〔116〕), (3.5) は Andersen 〔5〕 がえていたものである。類似の関係式は，そのほか いくつか知られているが，それは省略し，combinatorial method に関する文献をあげておく。Baxter 〔15〕〔16〕〔17〕 Wendel 〔235〕 および Brandt, A. "A generalization of a combinatorial theorem of Sparre Andersen about sums of rahdom variables ", Math, Scand 9. 352–358. (1963).

4.4 具体的な応用例

この節では 4.2 で述べた invariance principle および汎函数の分布を求めるのに有力な手段である Kac の定理 (文献〔111〕, Kac 〔114〕〔115〕 参照)，前節の combinatorial method を利用して，得られた結果を列挙する。4.2 で述べたことから，独立変数の和の極限定理は，加法過程の汎函数の分布を求めることに帰着されたわけであるが，また逆に連続な parameter をもつ場合の分布が，確率変数列の有限和のそれから求められる立場もあるわけである。

〔1°〕 中心極限定理が成立つような 平均0，分散1の独立確率変数の部分和を S_n と書くと，

$$\lim_{n\to\infty} P\{\max_{1\leq k\leq nt} |S_k| < x\sqrt{n}\} = \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1} \exp\left\{-\frac{(2m+1)^2\pi^2 t}{8x^2}\right\} \quad (x\geq 0)$$

これは，Brown 運動 $x(t)$ に対しては

$$P_0(\max_{0\leq s\leq t} |x(t,\omega)| < x)$$

に等しい。Erdös–Kac 〔65〕

〔2°〕 独立確率変数が指数 α の対称安定分布に従うとするとき

$$\lim_{n\to\infty} P\{\max_{1\leq k\leq n} S_k < x\, n^{\frac{1}{\alpha}}\}$$ の density $f(x)$ は

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{x^{-s}}{\Gamma(1-s)\Gamma(1-\alpha^{-1}+s\alpha^{-1})}\int_0^{\infty} z^{-s} \exp\left(-\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\log(1+z^{\alpha}y^{\alpha})}{1+y^2}\right) dy\, dz\, ds$$

となる。$\alpha=1$のときは

$$f(x)=\frac{1}{\pi\sqrt{x}\,(1+x^2)^{3/4}}\ \exp\left(-\frac{1}{\pi}\int_0^x \frac{\log w}{1+w^2}dw\right)\quad x>0$$

Darling [51]

[3o] 時間的一様な加法過程で $P_0\{\sup_{0\leq s\leq t} x(s)<x\}$ の density を $\sigma(x,t)$ とするとき，すべての $u>0$，$\lambda>0$ に対して

(a) 特性函数の対数$\psi(z)$が実数ならば

$$u\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-ut-\lambda x}\sigma(x,t)dx\ dt=\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_u^\infty\int_{-\infty}^\infty \frac{\lambda}{\lambda^2+z^2}\frac{\psi(z)}{s(s-\psi(z))}dzds\right\}$$

(b) $\psi(z)$ が複素数値で，ある$\delta>0$で$\int_{-\delta}^{\delta}\left|\frac{\psi(z)}{z}\right|dz<\infty$ ならば

$$\text{前式の左辺}=\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_u^\infty\int_{-\infty}^\infty \frac{\lambda}{z(z-i\lambda)}\frac{\psi(z)}{s(s-\psi(z))}dz\ ds\right\}$$

特別な場合として，$\psi(z)=a(e^{iz}-1)$ の Poisson 過程について

$$P_0(x(t)\leq \gamma t,\ 0\leq t<\infty)=1-\frac{a}{\gamma}\qquad (\text{ただし}\ \gamma>a>0\ \text{のとき})$$

をえる。Baxter-Donsker [18]

[4o] 時間的一様な対称加法過程で，$P_o(x(t)=0)=0$ が任意の$t>0$について，成り立てば，いわゆる <u>arcsine law</u>

$$P_0(\text{時刻}\ t\ \text{以前に path が}\ (0,\infty)\ \text{にある時間の累計}\leq y)=\frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{\frac{y}{t}}$$

が成り立つ。Kac[115].

同分布な独立確率変数の和についても 同じ type の定理が得られているが，(Lévy[145]，Erdös-Kac[66])，さらにSpitzer[219] は，つぎのように拡張している。N_n を $S_1, S_2, \cdots\cdots, S_n$ のうち正であるものの数，$a_k=P[S_k>0]$

とおく。もし$(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)/n\to\alpha$ ならば

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\frac{N_n}{n}\leqq x\right]=F_\alpha(x)$$

ここで

$$F_\alpha(x)\begin{cases} =0 \quad (if\ x<0) \qquad =1 \quad (if\ x\geqq 0) & (\alpha=0) \\ =\dfrac{\sin\pi\alpha}{\pi}\displaystyle\int_0^x s^{\alpha-1}(1-s)^{-\alpha}\,ds & (0<\alpha<1) \\ =0 \quad (if\ x<1) \qquad =1 \quad (if\ x\geqq 1) & (\alpha=1) \end{cases}$$

また $(a_1+\cdots\cdots+a_n)/n$ が発散するとき，$P[N_n/n\leqq x]$も発散する。

〔50〕 $a\in(-1,+1)$とし，吸収壁対称安定過程の推移密度函数

$$q(a,x,t)=\frac{d}{dx}P_a\left\{\max_{0\leqq s\leqq t}|x(s)|<1,\ x(t)\leqq x\right\}$$

は，$\alpha=2$のとき，(分散2のBrown 運動)

$$q(a,x,t)=\sum_{j=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{\pi^2 j^2 t}{4}\right)\phi_j(a)\ \phi_j(x)$$

$$\phi_{2k-1}(x)=\pi^{-1/2}\cos\left(\frac{k-1}{2}\right)\pi x$$

$$\phi_{2k}(x)=\pi^{-1/2}\sin k\pi x$$

である。これは〔10〕で述べたことと同様。

$\alpha=1$のときは，

$$(4.1)\quad q(a,x,t)=\sum_{j=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{t}{\lambda_j}\right)\phi_j(a)\ \phi_j(x)$$

ここで，λ_j および ϕ_j は

$$\frac{1}{2\pi}\log\frac{1-xy+[(1-x^2)(1-y^2)]^{1/2}}{1-xy-[(1-x^2)(1-y^2)]^{1/2}}$$

を核にもつ，$(-1,1)$の上の積分方程式の固有値および正規化された固有函数である。

Kac–Pollard〔120〕

一般の α ($0<\alpha\leqq 2$) についても積分方程式の核を

$$K(x,y)=\frac{\sec\frac{\alpha\pi}{2}}{2\Gamma(\alpha)}|x-y|^{\alpha-1}$$

$$-\frac{\tan\frac{\alpha\pi}{2}}{2\pi\Gamma(\alpha)}(1-y^2)^{\alpha/2}\int_{-1}^{1}\frac{(1-xt)^{\alpha-1}}{(1-t^2)^{\alpha/2}(1-yt)}\,dt$$

として，(4.1) が成り立つ。Widom [237].

$\boxed{4.5}$ path の variation

この節では $\boxed{3.8}$ で述べた性質と類似の結果についてまとめる。これは，手引「Brown 運動」 $\boxed{4.1}$ のLévy の研究の発展にあたる。

$g(s)$ を直線上に定義された連続函数で，原点で第2次微分可能，$g(0)=0$ とする。$\{x(t);t\in[t_1,t_2]\}$ は可分なLévy 過程で，時間的一様性は仮定しないが，特性函数の表示式

$$\exp\left\{im(t)z-\frac{1}{2}v(t)z^2+\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^t\left(e^{izu}-1\ \frac{izu}{1+u^2}\right)n(d\tau,du)\right\}$$

における $m(t)$ は $[t_1,t_2]$ において，有界変動函数とする。

$t_1=t_{n0}<t_{n1}<\cdots\cdots<t_{n,k_n}=t_2$ を含有区間 $[t_1,t_2]$ の細分で

$\max\limits_k(t_{n,k}-t_{n,k-1})\to 0$ ($n\to\infty$ のとき) を満すとすれば

$$\lim_{n\to\infty}\sum_k g[x(t_{n,k})-x(t_{n,k-1})]$$

$$=g'(0)[x(t_2)-x(t_1)]+g''(0)\frac{\sigma^2}{2}+\sum\{g(J_t)-g'(0)J_t\}$$

が確率1で成立する。ここで，σ^2 とは，$x(t_2)-x(t_1)$ の Gaussian part の分散で，最後項の J_t は jump の高さ（正負をこめて）で和は jump のすべてにわたる。Cogburn-Tucker [48] $g(s)=s^2$ とした Brown 運動の場合が Lévy によるものである。

Lévy の研究の類似の拡張としては，Kozin [137], Baxter [12] がある。

4.6　上級，下級函数の判定条件

3.7 で述べた結果と類似の研究としては，Khintchine 〔130〕 および Sirao 〔210〕 がある。

$\{x(t)\ ;\ -\infty<t<\infty\}$ を時間的に一様な加法過程とする。$0<t<1$ で定義された正の単調非減少函数 $u(t)$ が

$$P\left(\lim_{t\to 0}\frac{x(t)-x(0)}{u(t)}=0\right)=1$$

を満たすとき，$x(t)$ に関して upper limit であると呼ぶことにする。

(a)　$P_c(t)=P(|x(t)|>c\,u(t))$ とおくと，$u(t)$ が upper limit であるための必要かつ十分な条件は　すべての $c>0$ に対して

$$\int_0^1 \frac{1}{t}\,P_c(t)\,dt<\infty$$

となることである。

(b)　もしも Gaussian part がないならば，$u(t)=\sqrt{t\log\log\frac{1}{t}}$ は upper limit である。

(c)　Gaussian part も含まれる場合は

$$P\left(\varlimsup_{t\to 0}\frac{|x(t)-x(0)|}{t\log\log\frac{1}{t}}=\text{定数}>0\right)=1$$

(d)　$u(t)(t\log\log 1/t)^{-\frac{1}{2}}\to 0$ ($t\to 0$ とき) ならば，$u(t)$ を upper limit としない，Gaussian part を含まない加法過程が存在する。

(b) (c) (d) の証明は，(a) と特性函数の表示式から得られる。

Sirao 〔210〕 は，モーメントに関するいくつかの仮定のもとで手引「Brown 運動」の 4.4 で述べてある type の判定条件を与えた。すなわち，$E(x(t))=mt$，$V(x(t))=\sigma^2 t$ なる時間的一様な一次元加法過程 $x(t)$ について，上級，下級函数をつぎのように定義する。

$$P(E(\omega)\ \text{が有界})=1,\quad E(\omega)=\{t\,;x(t,\omega)>\sigma\sqrt{t}\,g(t)\}$$

のとき，非負単調非減少函数 $g(x)$ は上級(upper class) に属するといい，上の確率が0のとき，下級 (lower class) に属するという。

(1) $x(t)$ の分布函数を $F_t(x)$ で表わすと，

$$\int_{|x-m|<z} |x-m|^3 dF_1(x) = O(z(\log\log z)^{-1/2}) \quad (z\to\infty のとき)$$

(2) 任意の $\varepsilon>0$ に対して

$$\int_{|x-m|>z} (x-m)^2 dF_1(x) = O((\log\log z)^{-(2+\varepsilon)})$$

あるいは

$$\int_{|x-m|>z} (x-m)^2 dF_1(x) = o((\log\log z)^{-2}) \quad (z\to\infty のとき)$$

(3) $0\leqq t\leqq \alpha$ および $0<N\leqq b-a$ に対して

$$\int_{a\leqq|x-mt|<b} dF_t(x) = O\left(t\int_{a\leqq|x-m|<b} dF_1(x)\right) \quad (a\to\infty のとき)$$

が t に関して一様に成立するような正数 α，N が存在する。

以上三条件の下で，単調非減少右連続函数 $g(t)$ が上級（あるいは下級）に属するための必要かつ十分条件は

$$(6.1)\quad \int^{\infty} \frac{1}{t}\, g(t)\ \exp\left(-\frac{1}{2}g^2(t)\right) dt < \infty \qquad (あるいは\ =\infty)$$

である。上の三条件はたとえば Poisson 過程において満される。また $E((x(t)-mt)^4)<\infty$ のときについても同じ判定条件 (6.1) が成立する。

[5] 加法過程に対応する測度の絶対連続性（微分可能性）

$X_1(t)$, $X_2(t)$ $t\in[0,1]$, $(X_1(0)=X_2(0)\equiv 0)$ を2つのLévy過程とする。今Wを$[0.1]$上のR^Nの値をとる函数の全体。$\mathbb{B}(W)$を cylinder set から生成される Borel field 又 $\mathbb{B}_t(W)$ をとくに0からtまでの時点できまる cylinder set から生成される Borel field とする。X_1, X_2 によつて $W(\mathbb{B})$ に2つの測度 P_{X_1}, P_{X_2} が induce される。このとき次の問題が考えられる。

① いつ P_{X_2} は P_{X_1} に関し絶対連続になるか。

② このとき density $\dfrac{dP_{X_2}}{dP_{X_1}}$ の形を求めること。

又このとき P_X は P_{X_1} に関し，$\mathbb{B}_t(W)$ 上でも絶対連続になるがその density

$$\rho_t(w)=\frac{dP_X}{dP_X}/\mathbb{B}_t$$ を求めること。

この問題は次の意味で重要である。確率論では確率1でなりたつ性質が特に重要であるが，もし $P_{X_2}\ll P_X$ であればX_1に関し確率1でなりたつ性質はX_2でも確率1でなりたつ。とくにBrown 運動に絶対連続な process では Kolmogrov test や一様連続性など Brown 運動と同じ性質をもつことになる。

そして density の形をしれば P_{X_1} によつて P_{X_2} が計算できる。又函数空間上の測度の絶対連続性は，函数空間上の解析学の1つの分野として重要であるが，その1つの例をあたえることにもなる。この問題は Skorohod, A.V [216] によつて完全にとかれたのでその結果を紹介する。なお Skorohod は Markov 過程でもこの問題を考えているが，これは Markov 過程の変換論特に Multiplicative functional と深い関係がある。（尚 Skorohod [256] 参照）。

以後簡単のため $N=1$ とするが，一般でも同様の定理がなりたつ。

<u>定理1</u> (Skorohod A. V [216])

X_1 X_2の特性函数を $(j=1.2)$

$$E(e^{i\xi X_j}) = \exp\left\{i\xi a_j(t) - \frac{1}{2}b_j(t)\xi^2\right.$$

$$\left.+\int_0^t \int_{|u|<1} (e^{i\xi u}-1-i\xi u)n_j(d\tau du) + \int_0^t \int_{|u|\geq 1} (e^{i\xi u}-1)n_j(d\tau du)\right\}$$

とするとき

$$P_{X_2} \ll P_{X_1} \qquad \text{(絶対連続)}$$

となるための必要十分条件は

1) $b_1(t) \equiv b_2(t)$

2) Lévy measure が絶対連続：

$$n_2(dt\ du) = \rho(t,u)\ n_1(dt,du) \qquad \text{かつ}$$

(i) $$\iint_{|\rho-1|>\frac{1}{2}} (\rho(t\ u)-1)\ n_1(dt\ du) < \infty$$

(ii) $$\iint_{|\rho-1|<\frac{1}{2}} (\rho(t,u)-1)^2\ n_1(dt\ du) < \infty$$

3) $\int_{|u|<1}\int_0^1 (\rho(t,u)-1)\,u\ n_1(dt\ du)$ が収束し

$$\triangle(t) = a_2(t) - a_1(t) - \int_{|u|<1}\int_0^t (\rho(t,u)-1)u\ n_1(dt,du)$$

とおくとき

$$\triangle(t) = \int_0^t p(\tau)\ db_1(\tau) \qquad \text{とかけ}$$

$$\int_0^t p^2(\tau)\ db_1(\tau) < +\infty$$

となることである。

定理２　(Skorohod)

X_1　X_2　が定理１の仮定をみたすとし　そのpath の分解を

$$X_j(t)=a_j(t)+\int_0^t\sqrt{b_j'(s)}\,dB_j(s)+\int_{|u|<1} u\,q_j(ds\,du)+\int_{|u|>1} u\,p_j(ds\,du)$$

$$(q(ds\,du)=p(ds\,du)-n(ds\,du))$$

とする。

今　$\rho_t(w)=\dfrac{dP_2}{dP_1}\Big/\mathcal{B}_t$　とおくと　$(w=X_1(\cdot)$　として$)$

$$\rho_t(X_1(\cdot))=\exp\Big\{A(t)+\int_0^t P(s)\sqrt{b_1'(s)}\,dB_1(s)$$

$$+\int_0^t\int_{|\rho-1|<\frac{1}{2}}\log\rho(u.s)\,q_1(ds.du)$$

$$+\int_0^t\int_{|\rho-1|\geqq\frac{1}{2}}\log\rho(u.s)\,p_1(ds\,du)$$

ここで

$$A(t)=-\frac{1}{2}\int_0^t p^2(s)\,d\,b_1(s)+\int_0^t\int_{|\rho-1|>\frac{1}{2}}(1-\rho(u.s))\,n_1(ds\,du)$$

$$+\int_0^t\int_{|\rho-1|\leqq\frac{1}{2}}(1-\rho(u.s)+\log\rho(u.s))\,n_1(ds\,du)$$

特に

$$X_1(t)=B(t)$$
$$X_2(t)=a(t)+B(t)$$

(ここで　$B(t)$　は　Brown 運動　$a(t)$　はtのみの函数)

とするとき　$P_{X_2}\ll P_{X_1}$　なるための条件は

$a(t)$ が絶対連続で $a'(t) \in L^2(dt)$ をみたすことであり

このとき

$$\frac{dP_2}{dP_1} \Big/ \mathbb{B}_t = \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^t a'(s)^2 ds + \int_0^t a'(s) dB(s)\right\}$$

となる。

これは最初Cameron - Martin [257] によって得られた結果である。

$\boxed{6}$ 均質空間上の無限分解可能な分布と不変Markov過程

R^N 上の時間的に一様な Lévy 過程と R^N 上の空間的に一様な Markov 過程とは本質的に同じものであつた。このことより空間的に一様という概念が意味をもつ均質空間 (Homogeneous Space) の上で加法過程の概念の自然な拡張が考えられる。同様に無限分解可能の分布の概念も自然に拡張される。

$\boxed{6.1}$ 均質空間上の無限分解可能な分布

今 Mを変換群Gをもつ均質空間とし (GはMに transitive に作用する) Mの一点0を不変にするGの全体をHとする。HはGの部分群でMは Coset space $G/H = \{gH\}$と同一視できる。今

$$\mathfrak{M} = \{\mu : M\text{上の確率分布で } H\text{−不変：すなわち}$$
$$\mu(A) = \mu(hA) \quad h \in H\}$$

とおく。 μ_1 $\mu_2 \in \mathfrak{M}$ に対して その convolution

$$\mu = \mu_1 * \mu_2$$

が 次のようにして定義される。 $A \subset M$に対し

$\mu_2(g^{-1}A) \equiv f(g)$ は $f(gh) = f(g)$ をみたすから$G/H = M$上の函数と考えられる ： $f(g) = f(y)$ $y = gH \in M$

$$\mu(A) = \int_M f(y)\mu_1(dy) = \int \mu_1(dy)\,\mu_2(g^{-1}A)$$

でμを定義する。

Convolution が定義できたので無限分解可能な分布を $\mu \in \mathfrak{M}$ で 任意のnに対し $^{\exists}\mu_n \in \mathfrak{M}$

$$\mu = (\mu_n)^{*n} \quad (n\text{回の convolution})$$

をみたすものと定義する。

このとき無限分解可能な分布の構造をしらべる問題がおこるが，その一般的な解決方法はR^Nの場合と同じく Fourier 解析を用いる方法で以下その一般的な概要をのべると次のようになる。

M上で定義された有界連続，かつH−不変な函数 $K(x)$ (すなわち

$K(hx) = K(x)$ $h \in H$) が (帯) 球函数であるというは

$$\int K(ghx)\,d\mu_H(dh)=K(y)K(x)$$

$y=gH\in M$ μ_H は H 上の正規化された Haar－測度

（今 H は compact としておく）

をみたすこととする。このとき 定義からただちに

$$\varphi_\mu=\int_M K(x)\mu(dx) \qquad \mu\in\mathfrak{M} \quad \text{とおくと}$$

$$\varphi_{\mu*\nu}=\varphi_\mu\circ\varphi_\nu \quad \text{となる。}$$

球函数の全体を $\mathfrak{K}$ とし それに自然な位相をいれる。 $\rho\in\mathfrak{K}$ に対する球函数を $K_\rho(x)$ とかく。

$\varphi_\mu(\rho)=\int_M K_\rho(x)\mu(dx)$ が測度 $\mu\in\mathfrak{M}$ の特性函数にあたるものである。対称空間の場合には φ_μ から μ が一意的に定まるので φ_μ の方で色々議論がおこなえる。特に無限分解可能な分布の構造や極限定理などに有効である。

<u>例1</u> $\boxed{1}$ でのべた R^N の場合はこの一般的な話の枠内では

$G=R^N$ で $gx=g+x$ $x\in R^N$

とすればよい。convolution や無限分解可能な分布の定義など $\boxed{1.3}$ のものと全く同じになる。又この場合 $\mathfrak{K}$ は R^N と同位相でこれを同一視するとき

$K_\rho(x)=e^{i(\rho\cdot x)}$ $\rho\in R^N=\mathfrak{K}$ となる。

無限分解可能な分布 $\boxed{1.3}$

<u>例2</u> （円周）

この場合 $\mathfrak{K}=\{0\,.\,1\,.\,2\cdots\cdots\cdots\cdots\}$ で

$K_n(x)=e^{inx}$

これによつて R^N と類似結果がえられる。（Lévy [146], 39, 参照）

<u>例3</u> 球面 （Bochner [35]）

3次元の原点が中心で，半径1なる球面 S^2 を考え G はその回転群とする。点0を

$(1, 0, 0)$ とすると Hはx軸のまわりの回転であるからH不変な函数や測度は

$x=\cos\theta$ (点 $P\in S^2$ のx座標)

のみに関係する。又 この場合 $K=\{0, 1, 2\cdots\}$

で

$$K_n(P)=P_n(\cos\theta) \qquad P\in S^2$$

(ここで P_nは Legendre の多項式) となることもよく知られている。

したがつて特性函数は 数列$\{C_n\}$となる。無限分解可能な分布の特性函数は

$$C_n=\exp\left\{-\sigma n(n+1)-\int_{-1}^{1-0}\frac{1-P_n(x)}{1-x}\,dG(x)\right\}$$

ここで $G(A)$は$[-1, 1]$上の正の測度で

$$\int_{-1}^{1-0} dG(x)<\infty$$

σは正の定数 である。

もつと次元の高い球面でも同様のことがなりたつ。尚 Bochner [35] では 次元nを一般に実数2γ ($\gamma>0$) として議論してあり 対応する球函数は Jacobi の多項式である。この fractional 次元の球面というべきものが どういう幾何学的意味があるのかよくわからない。

例3 双曲型空間(Lobachevski space) (Getoor [86])

簡単のため 2次元 すなわち Lobachevski 平面の場合を論ずる。Lobachevski 平面を単位円の内部 $D=\{|z|<1\}$, $z=x+iy$で表現する。その運動群は

$$g=(\theta, z_0) \qquad 0\leq\theta<2\pi$$
$$z_0\in D$$

$$gZ=e^{i\theta}\frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}$$

なるgの全体である (手引き [2] p B1—118 参照)

点oを$z=0$にとると，Hは $g=(\theta. 0)$ $0\leq\theta<2\pi$ の全体 すなわち 原点のまわりの回転群になる。H—不変の測度又は函数は $\rho(Z)=2\tan h^{-1}|Z|$ のみに関係する。

この場合，Fourier 解析に必要な球函数は

$$P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\cosh\rho(Z)) \qquad -\infty<\lambda<\infty$$

(ここで $P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(x)$ は第1種 Legendre 函数)
であたえられ，無限分解可能な分布 μ は，その特性函数を

$$\varphi_{\mu}(\lambda)=\int_{D} P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\cosh\rho(z))\mu(dz)$$

とおくとき

$$\varphi_{\mu}(\lambda)=\exp\left\{-c\left(\frac{1}{4}+\lambda^2\right)+\int_{0+}^{\infty}\left[1-P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\mathrm{cns}h\rho)\right]n(d\rho)\right\}$$

ここで　$c\geqq 0$　n は $\displaystyle\int_{1}^{\infty} n(d\rho)+\int_{0+}^{1}\rho^2 n(d\rho)<+\infty$ なる正の測度

であたえられる。

なお，Karpelevič − Tutubalin − Šur [121] では，この空間上の分布の極限定理などを論じている。尚最近種々の対称空間の上で分布の極限定理が研究され，Doklady に主として発表されているので，注意だけしておく。

6.2　Lie 群に関する Hunt の結果

次に Homogeneons space M 上の Markov 過程が不変 Markov 過程であるというのは，その推移確率 $P(t,x,A)$ が

$$P(t,x,A)=P(t,gx,gA) \qquad g\in G$$

をみたすことである。$t>0$ に対して

$\mu_t(A)\equiv P(t,o,A)$ とおくと，容易にわかるように，

$$\mu_t\in\mathfrak{M}$$

$$\mu_{t+s}=\mu_t*\mu_s$$

である。このことより μ_t は無限分解可能な分布である。実際　各 n について $\mu_t=(\mu_{\frac{t}{n}})^{*}$，しかしこのことの逆，すなわち　任意の無限分解可能な分布に μ に対し，

上のような測度の半群$\{\mu_t\}$をもつてきて　$\mu=\mu_1$　と出来るということは一般にはなりたたない。（6.1の例ではすべてなりたつ）

Homogeneous space 上の不変過程の研究は本質的には＊に関する測度の半群$\{\mu_t\}$　$\mu_t\in\mathfrak{M}$ の研究である。 Hunt［98］はMが Lie group 又はその factor space の場合にこのような測度の半群の構造を完全に決定した。

(i) GをLie group とするとき　$g\in G$に対し

$$\tau_g : G \longrightarrow G$$
$$\tau_g g' = gg'$$

とおいて　Gは均質空間になる。又　Gが compact でないときは　$G_C=G\cup\{\omega\}$をその一点 compact 化の空間とし

$$\sigma\omega=\omega\sigma=\sigma \qquad \forall\sigma\in G_C$$

と定める。G_C上の測度　μ，νの convolution $\mu*\nu$は

$$\mu*\nu(E)=\int_G \mu(d\sigma)\,\nu(\sigma^{-1}E)$$

$$\mu*\nu(\omega)=\mu(\omega)\,\nu(G_C)+\nu(\omega)\,\mu(G)$$　で定義する。

$C(G_C)$を　G_C上の連続函数の全体とし　$\|f\|=\max_{g\in G_C}|f(g)|$

とおくと Banach 空間になる。$\{\mu_t\}$　を　G_C上の確率測度のなす半群とする。

Case 1　単位元eの任意の近傍　E　に対し

(＊)　$\lim_{t\downarrow 0}\mu_t(E)=1$　となるとき

このとき

$$T_t f(g)=\int f(gg')\,\mu_t(dg')$$

は　$C(G_C)$上の半群で強連続となる。μ_tは　T_tによつて完全にきまるから　T_tの構造をしらべたらよい。

今　YをGの左不変 Lie 環の元，$\zeta(S)=\exp sY$

とおく。$f\in C(G_C)$に対し

$$Yf=\lim\frac{1}{s}(R_{\zeta(s)}f-f)\qquad (R_\sigma f(\tau)=f(\tau\sigma))$$

が $C(G_c)$ の強位相で収束するとき，これによって Yf を定める。又

$$C_2=\{f\in C(G_c):\ Y_1(Y_2f)\text{が}\ {}^\forall Y_1,Y_2\text{に対し 定義可能}\}$$

とおく。

今 左不変 Lie 環の基底の一つ $X_1X_2\cdots X_d$ をとり固定する。次に $x_1\cdots x_d$ は C_2 の函数で

$$x_i(e)=0\quad\text{かつ}\quad X_i\ x_j(e)=\delta_{ij}\ \text{なるものとする。}$$

このとき T_t の生成作用素 A は C_2 をその定義域に含み

C_2 の上で

$$Af=\Sigma a_iX_if+\Sigma a_{ij}X_iX_jf$$

$$+\int_{G_c-\{e\}}[f(\tau\sigma)-f(\tau)-\Sigma X_jf\circ(\tau)x_i(\sigma)]\ n(d\sigma)$$

なる表現をもつ。ここで (a_{ij}) は正定値（弱い意味で）

$n(d\sigma)$ は $G_c-\{e\}$ 上の測度で

任意の ϕ ($\in C_2$ かつ e の近傍で Σx_i^2 と同じ order)

に対し $\int\phi n(d\sigma)<+\infty$

逆にこのような a_{ij} と $n(d\sigma)$ 及び a_i に対し，上式の Af を定めると丁度唯一つの (*) をみたす測度の半群 $\{\mu_t\}$ が存在し，A は μ_t に対応する $C(G_c)$ 上の半群 T_t の生成作用素の C_2 への制限になる。

注意 一点 compact 化を考えないとき $C(G_c)$ のかわりに 左一様連続（すなわち $f(\tau g_n)\to f(\tau)$；一様 $(g_n\to e)$）な函数の全体を C として議論しても全く同様の結果をうる。

このとき n は $G-\{e\}$ 上の測度になる。

Case 2　(*) のなりたたないとき

このとき あるGの compact 部分群 K が存在し μ_t は K の正規化されたHaar

測度ν_Kへ弱収束する。

今 均質空間 $M=G/K=\{gK\}$を考え，その一点 compact 化を $M_C=M\cup\{\omega'\}$ とする。（ω' はGの変換で不変であるようにしておく） 今 $f\in C(G_C)$に対し

$$\pi f(g)=\int_K f(gk)\nu_K(dk)$$

とおくと $\pi f(g)$ は $G/K=\{gK\}$ すなわち M上の函数と考えることが出来る。 $\pi f(\omega')=f(\omega)$とすると容易に $\pi f\in C(M_C)$ もわかる。

さて今 $\{\mu_t\}$ を G_C上の測度の半群で $\mu_t\longrightarrow\nu_K$ $(t\to 0)$ なるものとする。このとき $C(M_C)$上の強連続な半群S_t で $S_t\geq 0$， $S_t 1=1$ なるものが存在し

$$T_t=S_t\pi f$$

となる。

（ここで T_tは$T_t f(g)=\int f(gg')\mu_t(dg')$）

逆に このような $C(M_C)$上の半群 S_t から $C(G_C)$上の半群 T_tを

$$T_t f=S_t \pi f \quad \text{でおけば}$$

$$T_t f(g)=\int f(gg')\mu_t(dg')$$ とするとき μ_tは$t\to 0$のときν_Kに収束することも見易い。したがつて case 2 においては M上の半群S_tによつてT_t及びμ_tが完全にきまるわけである。

ii） 均質空間の場合

Gを Lie 群，Kをその compact 部分群， $M=G/K$ とし，$M_C=M\cup\{\omega'\}$の定義は前と同じとする。coset K に対するMの点をOとかくことにする。今 T_t を $C(M_C)$上のG--不変な半群で強連続，正， $T_t 1=1$，なるものとする。

（G—不変 とは $T_t\circ\tau_g f=\tau_g\circ T_t f$ を意味する。ここで $\tau_g f$は $\tau_g f(P)=f(gP)$ で定義する。このとき T_tの生成作用素AはC_2を含み $f\in C_2$に対し

$$Af(o)=\Sigma\, a_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(o)+\Sigma\, a_{ij}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(o)$$
$$+\int_{M_c-\{o\}}[f(q)-f(o|q)]\,n(dq)$$

ここで a_{ij}は正定値（弱い意味で）

$$Bf \equiv \Sigma\, a_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_o + \Sigma\, a_{ij}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_o$$

はK不変な汎函数（すなわち

$B\tau_k f = f$, $k \in K$ をみたす。）

又 測度 $n(dq)$は $M_c - \{o\}$の正の測度で $\phi(O)=O$, $M-\{o\}$では真に正，Oの近傍でΣx_i^2と同じ order となるような任意の函数ϕに対し

$$\int \phi(q)\, n(dq) < +\infty$$

となるもの。

ここで M上の函数 x_iは次のものである。

（点Oの normal coordinate （今 G/KにはG一不変な Riemann metric が入ることに注意）を $z_1\ z_2 \cdots z_e$ とし それを全体でC^2函数になるように，しかも無限点の近傍でOとなるように拡張したものが $x_1 \cdots x_e$ である。

逆に C_2上で定義された上の性質をもつAfは唯一つの M_c上の

$$T_t : C(M_c) \longrightarrow C(M_c) \quad \text{強連続}$$

正

$$T_t 1 = 1$$

$$\tau_g T_t = T_t \tau_g$$

なる半群より上のようにしてみちびかれる。

6.3 その他の結果

微分構造などを仮定しない一般の均質空間の上の不変 Markov 過程では 6.2 のようなくわしい結果をえることは不可能であるが，たとえば Woll 〔244〕では次のような研究がなされている。

Mを均質空間 Gをその変換群 $o \in M$を不変にするGの部分群をKとする。Mは局所 compact で可分な Hausdorff 空間とすると （$P(t . x . E)$を推移確率として）

$\frac{1}{t}P(t, o, \cdot)$ が $t \downarrow o$のとき $M-\{o\}$ である測度 Q に収束する。

Qは $\boxed{6.2}$ のnー測度と同じもので Lévy 測度と呼ばれる。

又 M上で複合 Poisson 過程を定義することができる。それには，普通のPoisson過程 P_t と K 不変な確率分布μを用意して，P_tが変化するごとに各位置xからEへ確率 $\mu(\tau_{-x}E)$ （τ_{-x}はxを0へうつす任意の変換）で飛躍するような jump process を作ればよい。

一般の不変過程はある意味で複合 Poisson 過程の極限になる。その他 Subordination についても色々研究されているが詳細は略する。

あ　と　が　き

このノートの作成にあたつたものは次のとおりである。

$\boxed{3}$ $\boxed{4}$　竹内順治

$\boxed{1}$　山田俊雄，渡辺信三

$\boxed{2}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$　渡辺信三

尚，$\boxed{3.1\ 1}$ は渡辺がかいた。又，池田信行氏には色々相談に応じていただいた。

索　　引

(1) Aczel, J. "On composed Poisson distributions. III," Acta. Math. Acad. Sci. Hunger., 3, (1952) 219-224.

(2) Alda, Vaclav. "A note on Poissons distribution," Cekoslovak. Mat. Z. 2 (77) (1952) 243-246.

(3) Andersen, E. S. "On the number of positive sums of random variables", Skand. Aktuar. 32 (1949), 27-36.

(4) ________ , "On sums of symmetrically dependent randoms variables", Skand. Aktuar. 36 (1953), 123-138.

(5) ________ , "On the fluctuations of sums of random variables", Math. Scand. 1 (1953), 263-285. 2 (1954), 195-223.

(6) Balakrishnan, A. V. "Representation of abstract Riesz potentials of elliptic type", Bull. Amer. Math. Soc. 64 (1958), 288-289.

(7) ________ , "An operational calculus for infinitesimal generators of semigroups", Trans. Amer. Math. Soc. 91 (1959), 330-353.

(8) ________ , "Fractional powers of closed operators and the semi-groups generated by them", Pacific J. Math. 10 (1960), 419-437.

(9) Barndorff-Nielson, Ole, "On the rate of growth of the partial maxima of a sequence of independent identically distributed random variables, Math. Scand. 9 (1961), 383-394.

(10) Bartoszyński, R. "Some remarks on the convergence of stochastic processes", Studia Math. 17 (1958), 313-322.

(11) Baxter, F. "An analogue of the law of the iterated logarithm", Proc. Amer. Math. Soc. 6 (1955), 177-181.

(12) ________ , "A strong limit theorem for Gaussian processes", Proc. Amer. Math. Soc. 7 (1956), 522-527.

(13) ________ , "An operator identity", Pacific J. Math. 8 (1958), 649-663.

(14) ________ , "On the measure of Hilbert neighborhoods for processes with stationary, independent increments", Proc. Amer. Math. Soc. 10 (1959), 690-695.

(15) ________ , "A two-dimensional operator identity with application to the change of sign in sums of random variables", Trans. Amer. Math. Soc. 96 (1960), 210-221.

(16) ________ , "A combinational lemma for complex numbers", Ann. Math. Statist. 32 (1961), 901-904.

(17) ________ , "Combinatorial methods in fluctuation theory", Z. Wakrscheinlichkeitstheorie 1. (1963), 263-270.

(18) Baxter, G; Donsker, M. D. "On the distribution of the supremum functional for processes with stationary independent increments", Trans. Amer. Math. Soc. 85, (1957), 73-87.

(19) Bergström, H. "On some expansions of stable distribution functions", Arkiv. Math. 2. NO. 18. (1952) 375-378.

(20) ________ , "Eine Theorie der Stabilen Verteilungsfunktionen", Arch. Math. 4. (1953). 380-391.

(21) ________ , "On distribution functions with a limiting stable distribution function", Arkiv. Mat. 2 No. 25 (1953), 463-474.

(22) Berman, S. M. "An extension of the arc sine law". Ann. Math. Statist. 33 (1962), 681-684.

(23) Billingsley, P. "Limit theorems for randomly selected partial sums". Ann. Math. Statist 33 (1962), 85-92.

(24) Blum, J. R; Rosenblatt, M. "On the structure of infinitely divisible distributions". Pacific J. Math. 9 (1959), 1-7.

(25) Blumenthal, R. M. "Some relationships involving subordination", Proc. Amer. Math. Soc. 10 (1959), 502-510.

(26) Blumenthal, R. M; Getoor, R. L. "The asymptotic distribution of the eigenvalues for a class of Markov operators", Pacific J. Math. 9 (1959), 399-408.

(27) ________ , ________ , "Some theorems on stable processes" Trans. Amer. Math. Soc. 95 (1960), 263-273.

(28) ________ , ________ , "A dimension theorem for sample functions of stable processes", Illinois J. Math. 4 (1960), 370-375.

(29) ________ , ________ , "Sample functions of stochastic processes with stationary independent increments", J. Math. Mech. 10 (1961), 493-516.

(30) ———— , ————, "The dimension of the set of the zeros and the graph of a symmetric stable process", Illinois J. Math. 6 (1962), 308-316.

(31) Blumenthal, R. M.; Getoor, R. K.; Ray, D. B. "On the distribution of first hits for the symmetric stable processes", Trans. Amer. Math. Soc. 99 (1961), 540-554.

(32) Bochner, S. "Stable laws of probability and completely monotone functions", Duke. Math. J. 3 (1937), 726-728.

(33) ———— , "Diffusion equations and stochastic processes", Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 35 (1949), 369-370.

(34) ———— , "Length of random paths in general homogeneous spaces", Ann. Math. 57, (1953), 309-313.

(35) ———— , "Positive zonal functions on spheres", Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 40. (1954), 1141-1147.

(36) ———— , "Harmonic analysis and the theory of probability", Berkeley and Los Angeles, (1955).

(37) Borovkov, A. A. "Some problems concerned with large deviations of the maximum of sums of independent equally distributed random variables". Dokl. Akad. Nauk. SSSR 121 (1958), 13-15.

(38) Boyer, R. H. "An integro-differential equation for a Markov Process" J. Soc. Indust. Appl. Math. 7 (1959), 473-486.

(39) Braumann, "Some remarks about infinitely divisible probability laws", Univ. Lisboa Revista Fav. Ci. A (2) 6 (1957-58), 265-268.

(40) Caregradskii, I P. "On uniform approximation to a binomial distribution by infinitely divisible laws", Teor. Veroyatnost. i Primenen. 3 (1958), 470-474.

(41) Castoldi, L. "A property of Poissonian distributions", Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari 29 (1959), 220-222.

(42) Chao, Chung-Jeh. "Explicit formula for the stable law of distribution", Acta. Math.

Sinica. 3 (1953). 177-185 (Chinese, English summary)

(43) Cheng, Tseng-Tung. "On asymptotic expansions connected with the sums of independent random variables", Acta. Math. Sinica 5 (1955), 91-108.

(44) Chung, K. L. "On maximum of partial sums of independent random variables", Trans. Amer. Math. Soc. 64 (1948), 205-233.

(45) Chung, K. L; Fuchs, W. H. J, "On the distribution of values of sums of random variables", Memoirs of Amer. Math. Soc. 6 (1951), 1-12.

(46) Chung, K. L; Kac, M. "Remarks on fluctuations of sums of independent random variables", Memoirs of Amer. Math. Soc. 6. (1951), pp. 11

(47) Ciesielski, Z; Taylor, S. J. "First passage times and sojourn times for Brownian motion in space and the exact Hausdorff measure of the sample path", Trans. Amer. Math. Soc. 103 (1963), 434-450.

(48) Cogburn, R.; Tucker, H. C. "A limit theorem for a function of the increments of a decomposable process", Trans. Amer. Math.

Soc. 99 (1961), 278-284.

(49) Darling, D. A. "Sums of symmetrical random variables", Proc. Amer. Math. Soc. 2, (1951), 511-517.

(50) ________ , "The influence of the maximum term in the addition of independent random variables", Trans. Amer. Math. Soc. 73. (1952), 95-107.

(51) ________ , "The maximum of sums of stable random variables", Trans. Amer. Math. Soc. 83. (1956), 164-169.

(52) Darling, D. A.; Erdös, P. "A limit theorem for the maximum of normalized sums of independent random variables", Duke. Math. J. 23. (1956), 143-155.

(53) Darling, D. A.; Kac, M. "On occupation times for Markov processes", Trans. Amer. Math. Soc. 84. (1957), 444-458.

(54) Dobrushin, R. L. "On Poisson's law for the distribution of particles in space," Ukrain. Math. Zh. 8 (1956), 127-134.

(55) Donsker, M. D. "An invariance principle for certain probability limit theorems", Memoir. Amer. Math. Soc. 6 (1951), 1-11.

(56) Doob, J. L. "Heuristic approach to the Kolmogorov-Smirnov theorem", Ann. Math. Stat. 20 (1949), 393-403.

(57) ________ , "Stochastic processes", New York, (1953).

(58) Dvoretzky, A; Erdös, P; Kakutani, S, "Points of multiplicity c of plane Brownian paths", Bull. Res. Counc. Israel. 7F. (1958), 175-180.

(59) Dynkin, E. B. "Some limit theorems for sums of independent random quantities with infinite mathematical expectations", Izv. Akad. Nauk. SSSR, Ser. Mat. 19 (1955), 247-266.

(60) Elliott, J. "The boundary value problems and semi-groups associated with certain integro-differential operators", Trans. Amer. Math. Soc. 76. (1954), 300-331.

(61) ________ , "On an integro-differential operator of the Canchy type", Proc. Amer. Soc. 7 (1956), 616-626.

(62) ________ , "Absorbing barrier processes connected with the symmetric stable densities". Illinois J. Math. 3 (1959), 200-216.

(63) Elliott, J; Feller, W. "Stochastic processes connected with harmonic functions", Trans. Amer. Math. Soc. 82 (1956), 392-420.

(64) Emeljanov, G. V. "A local limit theorem for probability densities in the case of convergence to a non-Gaussian distribution", (Russian, English summary) Vestnik Liningrad. Univ. 16 (1961), No. 1, 55-60.

(65) Erdös, P; Kac. M, "On certain limit theorems of the theory of probability", Bull. Amer. Math. Soc. 52 (1946), 292-302.

(66) ________ , ________ , "On the number of positive sums of independent random variables", Bull. Amer. Math. Soc. 53 (1947), 1011-1020.

(67) Feller, W. "The asymptotic distribution of the range of sums of independent random variables", Ann. Math. Statis. 22 (1951), 427-432.

(68) ________ , "On a generalization of M. Riesz' potentials and the semigroups generated by them", Comm. Sem. Math. Univ. Lund. 21 Suppl. (1952), 72-81.

(69) ________ , "An introduction to probability theory and its applications", Vol. 1. 2nd edition, New York, (1957).

(70) ________ , "On combinational methods in fluctuation theory", Probability and statistics: The Harald Cramer volume (edited by Ulf Ggenander), (1959), 75-91.

(71) Finetti, B. de, "Sulle funzioni a incremento aleatorio", Rend. Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis; Mat. Nat. 6 (1929), 163-168.

(72) Fisz, M. "A central limit theorem for some stochastic processes", Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astr. Phys. 6 (1958), 437-443.

(73) ________ , "A limit theorem for non-decreasing random functions", Bull. Acad. Polm. Sci. Ser. Sci. Math. Astr. Phys. 6 (1958), 485-487.

(74) ________ , "A central limit theorem for stochastic processes with independent increments", Studia Math. 18 (1959), 223-227.

(75) ________ , "Infinitely divisible distributions; recent results and applications", Ann. Math. Statist. 33 (1962), 68-84.

(76) Fisz, M; Urbanik, K. "The analytical characterization of the composed non-homogeneous Poisson process", Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III 3. (1955), 149-150. Studia. Math. 15 (1956), 328-336.

(77) Frostman, O. "Potentiel d'equilibre et capacit des ensembles avec quelques applications à la théorie des fonctions", Medd. Lunds Univ. Mat. Sem. 3 (1935)

(78) ________ , "Les points irreguliers dans la théorie du potentiel et le critère de Wiener",

(79) ________ , "Sur les fonctions surharmoniques d'ordre fractionnaire", Arkiv. för mat., astr. och fys. 26A (1938) et Communic. Semin. Math. de l'Univ. de Lund 4 (1939)

(80) Fuchs, A.; Roby, N. "Sur le domaine d'attraction de la loi de Poisson", Publ. Inst. Statist. Univ. Paris 9 (1960), 391-394.

(81) Gani, J.; Pyke, R. "The content of a dam as the supremum of an infinitely divisible process", J. Math. Mech. 9 (1960), 639-651.

(82) Geiringer. "On a limit theorem leading to a compound Poisson distribution", Math. Z. 72 (1959-60), 229-234.

83) Gelfand, I. M. "Generalized random processes", Dokl. Akad. Nauk. SSSR 100 (1955), 853-856.

84) Getoor, R. K. "Markov operators and their associated semi-groups", Pacific J. Math. 9 (1959), 449-472.

85) ______ , "First passage times for symmetric stable processes in Space", Trans. Amer. Math. Soc. 101 (1961), 75-90.

86) ______ , "Infinitely divisible probabilities on the hyperbolic plane", Pacific J. Math. 11. (1961), 1287-1308.

87) ______ , "The asymptotic distribution of the number of zero free intervals of a stable process", Trans. Amer. Math. Soc. 106 (1963), 127-138.

88) Ghurye, S. G. "A remark on stable laws", Skand. Aktuarietidskr. 1958, 68-70 (1959)

89) Gnedenko, B. V. "On the theory of growth of homogeneous random processes with independent increments". Akad. Nauk. Ukrain 10 (1948), 60-82.

(90) ________ , "On the role of the maximal summand in the summation of independent random variables", Ukrain Mat. Z. 5. (1953), 291-298.

(91) ________ , "Limit theorems of probability theory", Proc. Internat. Congress Math. 1958, pp. 518-528 (1960)

(92) Gnedenko, B. V.; Kolmogorov, A. N. "Limit distributions for sums of independent random variables", Moscow-Leningrad (1949) (English translation by K. L. Chung, Cambridge, Mass (1954))

(93) Gnedenko, B. V.; Korolyuk, V. S. "Some remarks on the theory of domains of attraction of stable distributions", Popövidi Akad. Nauk. Ukrain, RSR (1950), 275-278.

(94) Good. I. J. "The real stable characteristic functions and chaotic acceleration", J. Roy. Statist. Soc. Ser. B 23 (1961), 180-183.

(95) Haight, Frank A. "The generalized Poisson distribution", Ann. Inst. Statist. Math. Tokyo 11 (1959), 101-105.

(96) Halikov. M. K. "A local theorem for sums of independent random vectors", Izv. Akad.

Nauk USSR. Ser. Fiz.-Mat. (1958), NO. 2, 95-105.

(97) Hida, T. "On some asymptotic properties of Poisson process", Nagoya Math. J. 6 (1953), 29-36.

(98) Hunt, G. "Semi-groups of measures on Lie groups", Trans. Amer. Math. Soc. 81 (1956), 264-293.

(99) ________ , "Some theorems concerning Brownian motion", Trans. Amer. Math. Soc. 81 (1956), 294-319.

(100) ________ , "Markoff processes and potentials I, II, III" Illinois J. Math. 1 (1957), 44-93, 316-369; 2 (1958), 151-213.

(101)Ibragimov, I. A. "A theorem in the theory of infinitely divisible laws", Peoriya Veroyatn.; Primen, 1 (1956), 485-489.

(102)Ibragimov, I. A.; Ceruin, K. E. "On the unimodality of stable laws", Teor. Veroyatnost,; Primenen, 4 (1959), 453-456.

(103)池田，国田，野本，飛田，渡辺（毅）， "Paul Lévyの業績", Sem. on Prob. 9 (1961)

(104)Ikeda, N.; Watanabe, S. "On some relations between the harmonic measure and the Lévy measure for a certain class of Markov processes", J. Math. Kyoto Univ. 2 (1962), 79-95.

(105) Ito, K. "On stochastic processes (I)", Jap. J. Math. 18 (1942), 261-301.

(106) ________ , "Brownian motion in a Lie group", Proc. Japan. Acad. 26 NO. 8, (1950-, 4-10.

(107) ________ , " 確率論 ", 岩波現代数学, 14 (1953).

(108) ________ , "Spectral type of the shift transformation of differential processes with stationary increments", Trans. Amer. Math. Soc. 81 (1956), 253-263.

(109) ________ , " 確率過程 。(I)", 岩波講座現代応用数学。 (1957)

(110) ________ , "Subordination について", 数理科学研究第二班報告，第六号.(1959), 44-54.

(111) ________ , "On stochastic processes", Tata Inst. Lecture Note. (1961).

(112) Ito, S. "Brownian motions in a topological group and in its covering group", Rend. Circ. Mat. Palermo. (2) 1, (1952), 40-48.

(113) Janossy, L.; Renyi, A.; Aczel, J. "On composed Poisson distributions I", Acta. Math. Acad.

Sci. Hunger 1 (1950-, 209-224.

(114) Kac, M; "On distributions of certain Wiener functionals", Trans. Amer. Math. Soc. 65 (1949), 1-13.

(115) ________ , "On some connections between probability theory and differential and integral equations", Proc. 2nd Berkeley Symp. (1951), 189-215.

(116) ________ , "Toeplitz matrices, translation kernels and a related problem in probability theory", Duke Math. J. 21 (1954), 501-509.

(117) ________ , "Some remarks on stable processes", Inst. Statist. Univ. Paris 6 (1957), 303-306.

(118) ________ , "Some remarks on stable processes with independent increments", Probabiliy and statistics: The Harald Cramer volume (1959) 130-138.

(119) Kac. M.; Murdock, W. L.; Szegö, G. "On eiven-values of certain Hermitian forms", J. Rational Mech. Anal. 2 (1953), 767-800.

(120) Kac. M.; Pollard, H. "The distribution of the maximum of partial sums of independent random variables", Canad, J. Math. 2 (1950), 375-384.

(121) Karpelevic, F. I; Tutubalin, V. N.; Sur, M. G. "Limit theorems for compositions of distributions in the Lobacevskii plane and space", Theor. Veroyatnost. i Primenen. 4 (1959), 432-436.

(122) 河田龍夫，"フーリエ解析と確率論" 中文館 (1947)

(123) Kawata, T.; Udagawa, M. "A property of Poisson process", Rep. Statist. Appl. Res. Union Jap. Sci. Eng. 1 (1951), 10-15.

(124) Kemeny, J. G. "A probability limit theorem requiring no moments", Proc. Amer. Math. Soc. 10 (1959), 607-612.

(125) Kesten, H. "On a theorem of Spitzer and Stone and random walks with absorbing barriers", Illinois J. Math. 5 (1961), 246-266.

(126) ________ , "Random walks with absorbing barriers and Toeplitz forms", Illinois J. Math. 5 (1961), 267-290.

(127) ________ , "Positivity intervals of a stable process", J. Math. Mech. (to appear)

(128) Khintchin, A. "Asymptotische Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung", Erg. Math.

Springer, Berlin, (1933).

(129) ———— , "Zwei Sätze über stochastische Prozesse mit stabilen Verteilungen", Mat. Sbornik. 45 (1938), 577-584 (Russian German summary)

(130) ———— , "Sur la croissance locale des processus stochastique homogènes a acroissements independants", Izvestia Akad. Nauk. SSSR. Ser. Math. (1939), 487-508.

(131) Kimme, E. G. "On the convergence of sequences of stochastic processes", Trans. Amer. Math. Soc. 84 (1957), 208-229.

(132) ———— , Some equivalence conditions for the uniform convergence in distribution of sequences of stochastic processes, Trans. Amer. Math. Soc. 95 (1960), 495-515.

(133) Kloss, B. M. "Limiting distribution of sums of independent random variables taking values from a bicompact group", Dokl. Akad. Nauk. SSSR. 109 (1956), 453-455.

(134) Kolmogoroff, A. N. "Sulla forma generale di un processo stocastico omogeneo", Rend. Accad. d. Lincei, s. 6, t. 15, (1932), 805-808; 866-869.

(135) ________ , "On the Skorohod convergence", Teori. Veroyath. i Primen. 1 (1956), 239-247.

(136) ________ , "Deux théoremes asymptotiques uniformes pour des sommes des variables aleatoires", Teori. Veroyatn. i Primen. 1 (1956), 426-436.

(137) Kozin, F. "A limit theorem for processes with stationary independent increments", Proc. Amer. Math. Soc. 8 (1957), 960-963.

(138) 口沢清典，"確率論に於ける極限定理"，中文館(1950)

(139) Kunisawa, K; Maruyama, G. "Some properties of infinitely divisible laws", Rep. Statist. Appl. Res. Union. Jap. Sci. Eng. 1 (1951), 22-27.

(140) Laha, R. G. "On a class of unimodal distribution", Proc. Amer. Math. Soc. 12 (1961), 181-184.

(141) Lamperti, J. "Semi-stable stochastic processes" Trans. Amer. Math. Soc. 104 (1962), 62-78.

(142) Lebedinceva, O. K. "On limiting distributions for normalized sums of independent random quantities", Dopovidi Akad. Nauk. Ukrain. RSR, (1955), 12-15. (Ukrainian, Russian Summary)

(143) Lévy, P. "Sur les intégrales dont les éléments sont des variables aléatoires indépendantes", Annali Scuola norm. Pisa, s. 2, t. 3, (1934), 337-366; 4, (1935), 217-218.

(144) ________ , "Théorie de l'addition des variables aléatoires", Paris, Gauthier-Villars, (1937).

(145) ________ , "Sur certains processus stochastiques homogènes", Compositio Math. 7 (1939), 283-339.

(146) ________ , "Processus stochastiques et mouvement Brownian", Paris, Gauthier-Villars, (1948).

(147) ________ , "Trois théorèmes de calcul des probabilités", C. R. Acad. Sci. 238 (1954), 2283-2286.

(148) Linnik, Yu. V. "On stable probability laws with exponent less than one", Dokl. Akad. Nauk SSSR, 94 (1954), 619-621.

(149) ________ , "On the composition of Gaussian and Poissonian probability laws", Dokl. Akad. Nauk SSSR, 114 (1957), 21-24.

(150) ________ , "On factorizing the composition of a Gaussian and a Poissonian law", Teor. Veroyatnost. i Primenen. 2 (1957), 34-59.

(151) ________ , "Some theorems on the factorization of infinitely divisible laws", Dokl. Akad. Nauk SSSR 116 (1957), 549-851.

(152) ________ , "On the factorization of infinitely divisible laws", Dokl. Akad. Nauk SSSR 116 (1957), 735-737.

(153) ________ , "General theorems on the factorization of infinitely divisible laws", Teor. Veroyatnost. i Primenen. I, 3, (1958) 3-40; II, 4, (1959), 55-85; III, 4, (1959), 150-171.

(154) ________ , "On " α-factorizations" of infinitel divisible probability laws", Vestnik Leningrad Univ. 14 (1959), No. 1. 14-23.

(155) ________ , "Decompositions of probability laws", Izdat, Leningrad. Univ. Leningrad, 1960, 263pp.

(156) ________ , "New limit theorems for sums of independent random variables", Dokl. Akad. Nauk SSSR 133 (1960), 1291-1293.

(157) ________ , "On the probability of large deviations for the sums of independent variables", Proc. 4th Berkeley Symp. (1961) 289-306.

(158) ________ , "Limit theorems for the sums of independent variables taking into account the large deviations. I", Teor. Verojatnost. i Primenen. 6 (1961), 145-163.

(159) Lipschutz, M. "On strong bounds for sums of independent random variables which tend to a stable distribution", Trans. Amer. Math. Soc. 81 (1956), 135-154.

(160) Loève, M., "Probability theory", 2nd ed. D. Van Nostrand Co. New York. (1960).

(161) Lukacs, E. "Recent developments in the theory of characteristic functions", Proc. 4th Berkeley Symp. (1961) 307-335

(162) Mandelbrot, Benoit. "Variables et processus stôchastiques de Pareto-Lévy, et la répartition des revenus", C. R. Acad. Aci. Paris 249 (1959), 613-615. 2153-2155.

(163) ________ , "Processus stochastiques à loi stable positive, permanents, markoviens, stationaires (non additifs)", C. R. Acad. Sci. Paris 250 (1960), 451-453.

(164) Martynov. A. V. "On local infinite divisibility of Markoff processes", Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.) 113 (1957) 752-755.

(165) 丸山，十時"確率過程の収束に関する位相解析的方法", Sem. on Prob. 4 (1960).

(166) Maslov, K. V. "Some limit theorems in the theory of probability", Teor. Verojatnost, i Primenen 5 (1960), 54-83.

(167) Maslov, K. V.; Povzner, A. Ya, "On infinitesimal operators of a class of Markov processes", Teor. Veroyatnost. i Primenen. 3 (1958), 70-83.

(168) McKean, H. P. "Sample functions of stable processes", Ann. Math. 61 (1955), 564-579.

(169) Medgyessy, P. "Partial differential equations for stable density functions and their applications", Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl, 1 (1956), 489-518

(170) ________ , "Partial integro-differential equations for stable density functions and their applications", Publ. Math. Debrecen 5 (1958), 288-293

(171) ———— , "Decomposition of superpositions of distribution functions", Akademiai Kiado, Budapest, (1961), 227pp.

(172) Minlos, R. A. "Continuation of a generalized random process to a completely additive measure", Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S) 119 (1958), 439-442.

(173) Mitalanskas, A. A. "Uber den lokalen Grenzwertsatz für die stabilen Grenzverteilungen," (Russian German summary) Teor. Verojatnost. i Primenen 7 (1962), 185-190.

(174) Nelson, E. "A functional calculus using singular Laplace integrals", Trans. Amer. Math. Soc. 88 (1958), 400-413.

(175) Nelson, E.; Varberg, D. "Expectations of functionals on a stochastic process", Ann. Math. Statist. 31 (1960), 574-578.

(176) Neveu, J. "Une generalisation des processus a accroissements positifs independants, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 25 (1961), 36-61.

(177) Nisida, T. "On the inverse function of Poisson process", Math. Japonicae 2, (1952), 135-142.

(178) ________ , "On some probability distributions concerning Poisson process", Math. Japonicae 3, (1953), 7-12.

(179) Obretenov, A. "A property characterizing the Canchy distribution", (Bulgarian) Fiz. Mat. Spis. Bulgar. Akad. Nauk. 4 (37) (1961), 40-43

(180) Ovseevic, I. A.; Yaglom, A. M. "Monotonic transfer processes in homogeneous long lines", Izv. Akad. Nauk SSSR Ord. Tehn. Nauk (1954), No. 7. 13-20.

(181) Pakshirajan. R. P. "On the maximum partial sums of sequences of independent random variables. Teor. Veroyatnost. i Primenen. 4 (1959), 398-404.

(182) Perrin, F. "Etude mathematique du mouvement brownien de rotation", Ann. Ec. Norm. Sup. s. 3, t. 45, (1928), 1-51.

(183) Petrov, V. V. "On a class of limit theorems for independent random variables", Teor. Veroyatnost. i Primenen. 4 (1959), 224-228.

(184) Philipson, C. "The theory of confluent hypergeometric functions and its application to compound Poisson processes", Skand. Aktuarietidsky. 1960, 136-162 (1961).

(185) Pollard, H. "The representation of exp $(-x^{\lambda})$ as a Laplace integral", Bull. Amer. Math. Soc. 52 (1946), 908-910.

(186) Polya, G. "On the zeros of an integral function represented by Fourier's integral", Messenger of Math. 52 (1923), 185-188.

(187) Polya, G.; Szego, G. "Über den transfiniten Durchmesser (Kapazitätskonstante) von ebenen und räumlichen Punktmengen", J. Reine Angew. Math. 165 (1931), 4-49.

(188) Prekopa, A. "On composed Poisson distributions. IV, Remarks on the theory of differential processes", Acta Math. Acad. Sci. Hunger. 3 (1952), 317-325 (1953).

(189) ______ , "On the compound poisson distribution", Acta. Sci. Math. Szeged 18 (1957), 23-28.

(190) Prokhorov, Yu. V. "Probability distributions in function spaces", Usp. Mat. Nauk. 8 (1953), 165-167.

(191) ________ , "Convergence of random processes and limit theorems in probability theory", Teor. Veroyatnost. i Primenen. 1 (1956), 177-238.

(192) ________ , "Strong stability of sums and infinitely divisible laws", Teor. Veroyatnost. i Primenen. 3 (1958), 153-165

(193) ________ , "An extremal problem in probability theory", Teor. Veroyatnost i Primenen. 4 (1959), 211-214.

(194) Pyke, R. "The supremum and infimum of the Poisson process", Ann. Math. Statist. 30 (1959), 568-576.

(195) ________ , "On centering infinitely divisible processes", Ann. Math. statist. 31 (1960), 797-800.

(196) Raý, D. "Stable processes with an absorbing barrier", Trans. Amer. Math. Soc. 89 (1958), 16-24.

(197) Renyi, A. "On some problems concerning

Poisson processes", Publ. Math. Debrecen 2, (1951), 66-73.

(198) ———— , "On composed Poisson distributions II", Acta Math. Acad. Sci. Hunger. 2 (1951), 83-98.

(199) ———— , "A characterization of Poisson processes", Magyar Tud. Akad. Mat. Kutato Int. Kozl, 1 (1956), 519-527 (1957)

(200) ———— , "On the central limit theorem for the sum of a random number of independent random variables", Acta Math. Avad. Sci. Hungar. 11 (1960), 97-102.

(201) Riesz, M. "Intégrales de Riemann-Liouville et potentiels", Acta. Sci. Math. Szeged. 9 (1938), 1-42; 116-118.

(202) ———— , "L 'intégrale de Riemann-Liouville et le probleme de Cauchy", Acta Math. 81 (1949), 1-222.

(203) Rvacova, K. L. "Domains of attraction of many dimensional stable distributions", Dopovidi Akad. Nauk Ukrain. RSR (1950) 179-181.

(204) ———— , "A many dimensional local theorem for stable limit distributions", Dopovidi

Akad. Nauk Ukrain. RSR (1950), 183-189.

(205) Sankaranarayanan, G. "Some asymptotic properties of Poisson process, Tohoku Math. J. (2) 10 (1958), 60-68.

(206) Shapiro, J. M. "A condition for the existence of moments of infinitely divisible distributions", Canadian J. Math. 8 (1956), 69-71.

(207) ________ , "Sums of powers of independent random variables", Ann. Math. Statist. 29 (1958), 515-522

(208) ________ , "Sums of small powers of independent random variables", Ann. Math. Statist. 31 (1960), 222-224.

(209) Sinay, Ya. G. "On the distribution of the first positive sum for the sequence of independent random variables", Teor. Veroyatnost. i Primenen. 2 (1957), 126-135.

(210) Sirao, T. "On some asymptotic properties concerning homogeneous differential processes", Nagoya Math. J. 6 (1953), 95-107.

(211) Skorohod. A. V. "On a theorem concerning stable distributions", Uspehi Mat. Nauk 9 (1954), No. 2 (60), 189-190.

(212) ———— , "Asymptotic formulas for stable distribution laws", Dokl. Akad. Nauk. SSSR 98 (1954), 731-734.

(213) ———— , "On the limiting transition from a sequence of sums of independent random quantities to a homogeneous random process with independent increments", Dokl. Akad. Nauk SSSR 104 (1955), 364-367.

(214) ———— , "Limit theorems for stochastic processes", Teor. Veroyatnost. i Primenen 1 (1956), 289-319.

(215) ———— , "Limit theorems for stochastic processes with independent increments", Teor. Veroyatnost. i Primenen, 2 (1957), 145-177.

(216) ———— , "On the differentiability of measures which correspond to stochastic processes, I. Processes with independent increments", Teor. Veroyanost. i Primenen 2 (1957), 417-443.

(217) ———— , "Limit theorems for Markov processes", Teor. Veroyanost. i Primenen. 3 (1958), 217-264.

(218) ———— , "A limit theorem for independent random vatiables", Dokl. Akad. Nauk SSSR 133 (1960), 34-35

(219) Spitzer, F. "A combinatorial lemma and its application to probability theory", Trans. Amer. Math. Soc. 82 (1956), 323-339.

(220) ________ , "On interval recurrent sums of independent random variables", Proc. Amer. Math. Soc. 7 (1956), 164-171.

(221) ________ , "Some theorems concerning 2-dimensional Brownian motion", Trans. Amer. Math. Soc. 87 (1958), 187-197.

(222) ________ , "Some probability limit theorems", Bull. Amer. Math. Soc. 65 (1959), 117-119.

(223) ________ , "A Tauberian theorem and its probability interpretation", Trans. Amer. Math. Soc. 94 (1960), 150-169.

(224) Takeuchi, J. "On the sample path of the symmetric stable processes in space", to appear.

(225) Sem. on Prob. 13 (1962).

(226) Tortrat, A. "Classes de measures singulieres sur la droite, convolutions indinies de

Wintner et lois indéfiniment divisibles",
J. Math. Pures Appl. (9) 39 (1960), 231-273.

(227) Tutubalin, V. N. "Invariant random measures on the sphere", Teor. Veroyatnost. i Primenen 6 (1961), 125-130.

(228) Udagawa, M. "On some limit theorems for the sums of identically distributed independent random variables", Kōdai Math. Sem. Rep. 8 (1956), 85-92.

(229) Urbanik, K. "Stochastic processes whose sample functions are distributions", Teor. Veroyatnost. i Primenen, 1 (1956), 146-149.

(230) ———— , "The values at the fixed moment of generalized stochastic processes", Sci. Sinica 7 (1958), 1-9

(231) ———— , "Generalized stochastic processes", Studia Math. 16 (1958), 268-334.

(232) ———— , "Generalized stochastic processes with independent values", Proc. 4th Berkeley Sympos. (1961) 569-580.

(233) Watanabe, S. "On stable processes with boundary conditions", J. Math. Soc. Jap. 14 (1962), 170-198.

(234) 渡辺　毅，"加法過程"，現代統計学大辞典，東洋経済新報社
(1962)，73-78
(235) Wendel, J. G. "Spitzer's formula: a short proof", Proc. Amer. Math. Soc. 9 (1958), 905-908
(236) Widom, H. "On the eigenvalues of certain Hermitian operators", Trans. Amer. Math. Soc. 88 (1958), 491-522.
(237) ———— , "Stable processes and integral equations", Trans. Amer. Math. Soc. 98 (1961), 430-449.
(238) ———— , "A two-sided absorption problem", Proc. Amer. Math. Soc. 12 (1961), 862-869.
(239) Wintner, A. "The singularities of Cauchy's distributions", Duke Math. J. 8 (1941), 678-681.
(240) ———— , "Cauchy's stable distributions and an "explicit formula" of Mellin", Amer. J. Math. 78 (1956), 819-861.
(241) ———— , "Indefinitely divisible symmetric laws and normal stratifications", Pull. Inst. Statist. Univ. Paris 6 (1957), 327-336.

(242) ———— , "Stable distributions and the transforms of Stieltjes and Le Roy", Boll. Un. Mat. Ital. (3) 13 (1958), 24-33

(243) ———— , "On Heaviside's and Mittag-Leffler's generalizations of the exponential function, the symmetric stable distributions of Cauchy-Lévy, and a property of the Γ-function", J. Math. Pures. Appl. (9) 38 (1959), 165-182.

(244) Woll, J. "Homogeneous stochastic processes", Pacific J. Math. 9 (1959), 293-325.

(245) Yosida, K. "On a class of infinitesimal generators and the integration problem of evolution equations", Proc. 4th Berkeley Sympos. (1961), 623-633.

(246) Zolotarev. V. M. "Expression of the density of a stable distribution with exponent greater than one by means of a frequency with exponent $1/\alpha$. Dokl. Akad. Nauk. SSSR 98 (1954), 735-738.

(247) ———— , "On analytic properties of stable distribution laws", Vestnik Leningrad Univ. 11 (1956), No. 1, 49-52.

(248) ———— , "Mellin-Stieltjes transformations in probability theory", Teor. Veroyatnost. i Primenen. 2 (1957), 444-469

(249) ———— , "Distribution of the Superposition of infinitely divisible processes", Teor. Verojatnost i Primenen 3 (1958), 197-200.

(250) ———— , "A duality relation in the class of infinitely divisible laws", Trudy Mat. Inst. Steklov. 64 (1961), 52-60.

(251) ———— , "On the asymptotic behavior of a class of infinitely divisible laws", Teor Verojatnost. i Primenen 6 (1961), 330-334.

(252) 数学 13 (1961)

(253) "Recent Soviet contributions to mathematics", The Macmillan Company. New York. (1962).

(254) Gelfand. I. M., — Bilenkin. N. Ya. Some applications of harmonic analysis. Completed Hilber Spaces (超函数シリーズ第4巻)

(255) Ito. K; On stochastic differential equations, Memoirs of Amer. Math. Soc. No. 4 (1951)

(256) Skorohod. A. V; Reseaches on Stochastic processes (Russian) (Kiev Univ. Press) (1961)

(257) Cameron, R. H. — Martin W. P. Transformation of Wiener integrals under translations. Ann. Math. (2) 45 (1944)