C 1　Prediction

目　　次

凡　　例

1. 本文を章・節に分け，$\boxed{1}$（1章）$\boxed{1.1}$（1章1節）のように番号をつける。
2. 引用文献：例えば *Wiener*[65] は末尾文献表で[65]番の *Wiener* の文献を指す。
3. 参考は →で示す。
4. 文中の<u>（アンダーライン）</u>のあるものは，その項又はその場所で定義或は基本的説明が述べられていることを示し索引に出る。
5. 主な記号

E'：局所凸線型位相空間Eの共役空間

$\mathbb{B}=\mathbb{B}(E')$：$E'$上の筒集合を含む最小のボレル集合体

$\mathbb{B}_t$：$\{X;((X,\varphi_1),\cdots,(X,\varphi_n))\in B^n;\ Supp(\varphi_i)\subset(-\infty,t]\}$ の生成するボレル集合体.

$(E',\mathbb{B},P)=(\Omega,\mathbb{B},P)$：確率空間.

τ_t：E上の推移変換；$(\tau_t\varphi)(s)=\varphi(s-t)$.

T_t：τ_t から *induce* されるE'上の推移変換；$(T_tX,\varphi)=(X,\tau_t\varphi)$.

U_t：$\tau_t(T_t)$から *induce* されるユニタリー作用素；$U_tX(\varphi)=(T_tX,\varphi)=(X,\tau_t\varphi)$

$X(\varphi)=(X,\varphi),\ X\in E',\ \varphi\in E$：一般の確率過程（$E$で定義された線型汎函数）.

$C(\varphi)=\int_{E'}e^{i(X,\varphi)}P(dX)$：特性汎函数。

$\dot{B}$：白色雑音（ブラウン運動の微分に相等する）.

$Z(S)$：術復測度.　$\dot{Z}$：$Z(S)$の微分に相等する定常過程.

$\mu(S)=E|Z(S)|^2$：スペクトル測度.

L：$\{f(X),\ X\in E';\ \mathbb{B}\text{-可測},\ \int_{E'}|f(X)|^2P(dX)<\infty\}$ の張る*Hilbert*空間

L_t：$\mathbb{B}_t$-可測なLの元全体.

M：$\{X(\varphi);\ \varphi\in E\}$の張る$L$の部分空間.

M_t：$\{X(\varphi);\ \varphi\in E,\ Supp(\varphi)\subset(-\infty,t]\}$ の張るLの部分空間.

$L^*,\ H_t^*,\ etc$：1と直交するL，H_t，etc の元の全体.

$X(t;\varphi)$：時刻tまでのXを知ったときの$X(\varphi)$の予報量.

$X(0;t)$：時刻0までのXを知ったときの$X(t)$の予報量.

$\sigma^2(t;\varphi)=E|X(\varphi)-X(t;\varphi)|^2$；$\sigma^2(0;t)=E|X(t)-X(0;t)|^2$：予測誤差.

$\mathbb{X},\mathbb{\Gamma},etc$：多次元定常過程の場合には，$X$，$\Gamma$（共分散函数），$etc$は *vector* 又は *matrix* となるのでこのように書く。

◎ 研究の歴史　省略

Ⅰ 定義と準備

1.0 序

偶然に支配されつつ時間と共に変化する量をある時刻まで観察したとき，後の時刻における状態を予測する問題の確率論的な取扱いは，A. N. Kolmogorov, N. Wienerやその他多くの人々によって古くから予測（prediction）の理論として研究されてきた．これは定常過程の研究の中でも重要な位置を占める分野であって，電気工学を始め各方面へ応用されてきた．これまでは主として線型予測（linear prediction）に関する研究であったが，近年より誤差を小さくして予測しようとして線型予測より詳しい各種の予測の方法，所謂非線型予測（nonlinear prediction）が考えられるようになった．線型予測の場合，対象となるものは弱定常過程若しくは弱定常超過程と呼ばれているものであるが，より詳しい予測を考えるためには，定常過程のより精密な構造を知ることが必要になり，又その研究の段階で弱定常過程と弱定常超過程とを別個に扱うことに不便を感ずるようになってきた．

以上の理由からできるだけ一般的な定常過程の定義をし，予測の問題が何であるかを明らかにして後，後章のための基礎的な準備をするのが本章の目的である．

1.1 定常過程の定義

Rを実数，Cを複素数の全体とし，両者を区別する必要のないときはそれ等をKで表わす．時間を表わすパラメーターの空間としては，実数加群又はその部分群を考えることにしてその空間をTとかく．

EをK^Tの部分集合を元とする局所凸線型位相空間とし，その共役空間をE'で表わす．Eの元をφで表わし，Eで定義された線型汎函数を$X(\varphi)$又は(X, φ)，とかく（すなわち$X \in E'$）．

B^nをK^nのボレル集合とするとき，$\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n \in E$に対して

$$\left\{ X ;\ \left\{ (X, \varphi_1),\ (X, \varphi_2), \cdots, (X, \varphi_n) \right\} \in B^n \right\}$$

(C1-2)

で定義される E' の部分集合を筒集合(cylinder set)とよぶ。

$\mathbb{A}$を筒集合から生成される集合体とし，$\mathbb{B}$或は$\mathbb{B}(E')$を$\mathbb{A}$を含む最小のボレル集合体とする．ボレル集合体は$\mathbb{B}$だけでなく，例えばE上の任意の有界連続函数を可測にする最小のボレル集合体$\widetilde{\mathbb{B}}$やE'の閉集合から生成される位相的ボレル集合体$\hat{\mathbb{B}}$等が考えられる。Pは$\mathbb{B}$を含むボレル集合体$\mathbb{B}^*$上で定義された$P(E')=1$なる測度，すなわち確率，とする。$(E', \mathbb{B}^*, P)$は確率空間である。当面$\mathbb{B}^*=\mathbb{B}$を考えれば十分であるので以後$\mathbb{B}$のみを用いる。$(E', \mathbb{B}, P)$を表わすのに，$E'=\Omega$とおいて$(\Omega, \mathbb{B}, P)$とし，Ωの元をω，(ω, φ)を$X(\varphi, \omega)$，$\varphi \in E$，とかくことがある。

次に定常性を定義する。まずEの元 $\varphi=(\varphi(t);\ t\in T)$ に対し

$$(\tau_t \varphi)(s) = \varphi(s-t)$$

により τ_t を定義すると

$$\tau_t \tau_s = \tau_s \tau_t = \tau_{t+s}$$

$$\tau_0 = I \quad \text{（恒等写像）}$$

を満足する。この $\{\tau_t;\ t\in T\}$ から

$$(T_t X, \varphi) = (X, \tau_t \varphi), \quad t \in T$$

によって E' から E' の上への1対1写像が定義されるが $\{\tau_t\}$ の性質から$\{T_t\}$は可換な1助変数群(one parameter group)になる。もし $T_t X$ が $\mathbb{B}(T)\times\mathbb{B}$可測であるとき $\{T_t\}$ を推移変換(shift operator)という。但し，$\mathbb{B}(T)$は通常のTのボレル集合体である。

上で考えた確率空間$(\Omega, \mathbb{B}, P)$について

定義1　すべての T_t が保測変換(measure preserving transformation)であるとき，すなわち

1) $A\in\mathbb{B}$ ならば $T_t A \in \mathbb{B}$ で

2) $P(T_t A) = P(A)$

であるとき，$(\Omega, \mathbb{B}, P)$ を定常過程(stationary process)と呼び，ω（又は $X\in E'$）を見本過程(sample function)又は道(path)と呼ぶ。

定常過程を表わすのに$(\Omega, \mathbb{B}, P)$の他に $X(\varphi, \omega)$，$\varphi\in E$，$\omega\in\Omega$，或は混同する惧れのないときは簡単に $X(\varphi)$とか X で表わすことがある。

（本節については → 定常過程）

以上できるだけ統一的な定義をという意図から定常過程の定義をしたが，ここで，従来多くの書物で採用されている定義を述べて比較したい。まず強定常過程

については，

確率過程（stochastic process）（→確率過程） $X(t,\omega)$, $t\in T$, $\omega\in\Omega$ $(\mathbb{B}, P)$ が条件

"任意の n と任意の $(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ に対して

$\{X(t_1+h,\omega), X(t_2+h,\omega), \cdots, X(t_n+h,\omega)\}$ の分布が h に無関係"

をみたすとき<u>強定常過程</u>（strictly stationary process）という。

この意味での強定常過程があるとき，可測な写像

$$\Omega \ni \omega \longrightarrow X(\cdot, \omega) \in K^T$$

によって $\mathbb{B}(K^T)$（K^T の筒集合から生成されるボレル集合体)の上の測度 $\widetilde{P}$ が導かれる。これは coordinate representation と呼ばれるものであって，$X(\cdot, \omega)$ は見本過程又は道と呼ばれる．上の定義における強定常性は本来確率空間（K^T, $\mathbb{B}(K^T)$, $\widetilde{P}$）に対する要求である．推移変換 T_t を

$$(T_t X)(s) = X(t+s)$$

によって定義すれば定常性は

$$\widetilde{P}(T_t E) = \widetilde{P}(E), \quad E \in \mathbb{B}(K^T)$$

なる要請であると言い換えることができる。

このように上の強定常性の定義をみるとき，定義1において特に $E' = K^T$ 従って，E は $(K^T)_0 = \{\varphi = (\varphi(t), t\in T)$；有限個の t を除き $\varphi(t)=0\}$ を通常の位相で考えたものといえる。但し，定義1では $\{T_t\}$ について $T_t X$ が $\mathbb{B}(T)\times\mathbb{B}$ 可測であることを前提としているが，それは後の Hilbert 空間を用いた解析を容易ならしめるための仮定である．

見本過程が通常の函数である定常過程を<u>函数型の定常過程</u>といい $X(t)$ ともかくことにする．

次に強定常超過程についてみよう。$\mathcal{D}$ を Schwartz のコンパクトな台をもつ無限回可微分函数の空間，$(\Omega, \mathbb{B}, P)$ を確率空間とする．そのとき

"$\varphi \in \mathcal{D} \longrightarrow X(\varphi) = X(\varphi, \omega)$

(C1-4)

なる写像があって，條件

1) 殆んどすべてのωに対して　$X(\varphi,\omega)\in\mathcal{D}'$

2) すべての $\varphi\in\mathcal{D}$ に対して $X(\varphi,\omega)$ が $(\Omega,\mathbb{B},P)$ 上の確率変数

3) 任意のnと任意の $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n$ に対し

$$\{X(\tau_h\varphi_1),\ X(\tau_h\varphi_2),\ \cdots,\ X(\tau_h\varphi_n)\}\ \text{の分布が}h\text{に無関係''}$$

をみたすとき<u>強定常超過程</u>(*strictly stationary random distribution*)という．但し，τ_h は前と同様に

$$(\tau_h\varphi)(t)=\varphi(t-h)$$

をあらわす。

強定常過程の場合 K^T に T_t で不変な測度が入っていると考えたのと同じく，この場合も強定常超過程は超函数の空間 $\mathcal{D}'$ の $\mathcal{B}(\mathcal{D}')$ の上に推移変換で不変な測度が入っているものと考えてよい。 $\mathcal{D}$ の代りに $\mathcal{S}$ (Schwartz の急減少無限回可微分函数の空間)としても同様なことがいえる。

今後定常過程の定義としては　定義1. を採用する。$(E',\mathbb{B},P)$ において特にPの台が通常の函数であるような場合——従来の意味で強定常過程の場合——には従来通り $X(t,\omega)$ といった記号をも用いることにする。

1.2　<u>特性汎函数</u>

定常過程 $(E',\mathbb{B},P)$ があるとき $e^{i(X,\varphi)}$　$(i=\sqrt{-1})$ はP可測になり $|e^{i(X,\varphi)}|=1$ だから

$$C(\varphi)=C(\varphi,P)=\int_{E'}e^{i(X,\varphi)}P(dX)$$

が定義される。これを $(E',\mathbb{B},P)$ の或はPの<u>特性汎函数</u>(*characteristic functional*)という。$C(\varphi)$ は

1) *non-negative definite*，すなわち任意のnと任意の $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n\in E$，任意の複素数 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ に対して

$$\sum_{j,k}\xi_j\bar{\xi}_k\,C(\varphi_j-\varphi_k)\geqq 0,$$

2) $C(0)=1$

3) $\varphi_n \to 0$ (Eにおいて)ならば $C(\varphi_n) \longrightarrow 1$

なる性質をもっている．以上の性質を導くには必ずしも定常性を必要としない。定常過程の場合には，さらに

4) $$C(\tau_h \varphi) = C(\varphi)$$

がなりたつが，これは定常性の言い換えに他ならない。上の性質 1)，2)，3)は有限次元の確率分布の特性函数の持つ性質の拡張と考えられる．この逆の問題，すなわち 1)，2)，3) を満足する E 上の汎函数 $C(\varphi)$ はある測度の特性汎函数であるかということについては次の結果が知られている。

定理 1 [A] E が核型空间(*nuclear space*)ならば 1)，2)，3) をみたす $C(\varphi)$ は E' の測度の特性汎函数である(*Minlos* [14] 参照)。

[B] E が核型空间の *inductive limit* の場合にも 1), 2), 3) をみたす $C(\varphi)$ は E' の測度の特性汎函数になる(*Gelfand-Vilenkin* [14])．

以上の結果は有限次元確率分布の特性函数についての S. *Bochner* の定理の拡張に他ならない(→特性函数)。[A]，[B] において定まる E' 上の測度は勿論一意である．

白色雑音(*white noise*) $\dot{B}$ は $E=\mathcal{S}$ として特性汎函数

$$C_{\dot{B}}(\varphi) = e^{-\frac{1}{2}\int \varphi(t)^2 dt}$$

に対応するものである．実際 $C_{\dot{B}}$ は前述の條件 1)，2)，3)をみたしており，$\mathcal{S}$ は *nuclear space* であるから上の [A] によって $\mathcal{S}'$ 上の測度が一意に定まるが，$C_{\dot{B}}$ の形からそれは 4) の定常性をみたすことは明らかである．すなわち白色雑音は定常過程である(→ *Brown* 運動 ③)．$E=\mathcal{S}$ としても同様なことが言える([B]による)。

また $E=\mathcal{S}$ として次の汎函数を考える。

$$C_{\dot{Z}}(\varphi) = exp\left\{\int \psi_z(\varphi(t))\,dt\right\}$$

但し，ψ_z は $Z(t)$ を時間的に一様な *Lévy* 過程とするとき，$Z(t)-Z(0)$ の特性函数が $exp\{t\psi_z\}$ となるような函数である．これも条件 1)，2)，3)

(C1-6)

をみたし，$\mathcal{S}'$ 上の測度が対応している。これは白色雑音の一般化であり，Lévy 過程 $Z(t)$ の微分と考えられる。これも定常過程であり $\dot{Z}$ とかく。これらは予測の問題を定常過程の表現を用いて解く場合に，表現を構成する基礎にされる定常過程である（図　参照）。それらが定常過程の中で基本的なものとされている理由の１つは次のような従属性についての単純な性質をもっていることがあげられる。

φ の台を $Supp(\varphi)$ とかくとき，$C_{\dot{Z}}$ についていえば

$$Supp(\varphi_1) \cap Supp(\varphi_2) = \phi \text{ ならば } \quad C_{\dot{Z}}(\varphi_1 + \varphi_2) = C_{\dot{Z}}(\varphi_1) \cdot C_{\dot{Z}}(\varphi_2)$$

すなわち $\dot{Z}(\varphi_1)$ と $\dot{Z}(\varphi_2)$ は独立である。このような性質は各点独立と呼ばれる。

各点独立な定常過程のより一般なクラスとしては，$E = \mathcal{S}$ として

$$C(\varphi) = exp\left\{\int \alpha(\varphi(t), \varphi'(t), \cdots, \varphi^{(n)}(t))\, dt\right\}$$

$$\alpha \text{ は } R^{n+1} \text{ の連続函数で } \alpha(0, 0, \cdots, 0) = 0$$

が positive definite であるとき，$C(\varphi)$ に対応する $\mathcal{S}'$ の上の測度，すなわち定常過程がある。

1.3　予測の問題

予測の問題の対象とされる定常過程は，本稿では E として $\mathcal{S}$ 或は $\mathcal{D}$ としたものを主として扱う。以後断らない限り“E は $\mathcal{S}$ か $\mathcal{D}$ を指す”ものとする。$X(t)$ とかける函数型の定常過程も，殆んどすべての見本過程が $\mathcal{S}'$ 或は $\mathcal{D}'$ に属するならば，

$$X(\varphi) = \int X(t)\varphi(t)\, dt$$

として，この制限の下に取扱い得る。この他 T が離散型の場合も扱うが，その都度注意することにする。

定常過程（E', $\mathbb{B}$, P）があるとき

$$\mathbb{B}_t = \left[\left\{X; ((X, \varphi_1), (X, \varphi_2), \cdots, (X\varphi_n)) \in B^n\right\}, Supp(\varphi_i) \subset (-\infty, t],\right.$$
$$\left. i = 1, 2, \cdots, n\right]$$

の生成するボレル集合体

により $\mathbb{B}_t$, $t \in T$ を定義する．明らかにすべての $\mathbb{B}_t$ を含む最小のボレル集合体は $\mathbb{B}$ に一致する．$\boxed{1.0}$ で直観的に述べた予測の問題は，$X(\varphi)$ に対して $\mathbb{B}_t$ 可測な元で，これを近似する"最良"のもの $X(t;\varphi)$ を求める問題であるということができる。

このとき問題となるのは，

i) 最良という意味を明確にすること，換言すれば誤差を測る方法を定めることが第1である。予測の問題が扱われた初期の段階からこの誤差を測る尺度に2乗平均が採用されてきたが，ここでもそれを用いる。

$$(1.1) \qquad E|X(\varphi)-X(t;\varphi)|^2=\sigma^2(t;\varphi), \quad E\text{はP測度による平均をあらわす}$$

とかくとき $\sigma^2(t;\varphi)$ のことを<u>予測誤差</u>（*prediction error*）という。誤差をみる方法としてはこれ以外にもいろいろ考えられるが，一つの方法に対してその誤差を最小にする $X(t;\varphi)$ を求める方法が対応する。上のような誤差を考えることが有利な理由として著しいものは *Hilbert* 空間の理論が適用できることである．しかし，$X(\varphi)$ についてはすべての φ について二次のモーメントの存在を仮定しなければならない．"以後扱う定常過程についてはいつも

$$(1.2) \qquad E|X(\varphi)|^2<\infty$$

を仮定する"。

また定常性から，平均については

$$E(X(\varphi))=m\int\varphi(t)\,dt, \qquad m\text{は}\varphi\text{に無関係な定数}$$

としてよい（*Gelfand-Vilenkin* [14]）が，"以後扱う範囲内では $m=0$ としても本質的な興味は失われないから

$$(1.3) \qquad E(X(\varphi))=0, \qquad \varphi\in E,$$

を仮定する"。

ii) 次に問題となるのは，$X(t;\varphi)$ をどのような範囲からえらぶかということである．$\mathbb{B}_t$ 可測な元全体の中から求めることが望ましいが，それは困難なことが多い．誤差を上のように定めると，$\mathbb{B}_t$ 可測な元の作るある種の *Hilbert* 空間の元から捜すことが便利でもあり，又それで満足できる場合が多い。そのた

め各種の Hilbert 空間についての準備をする。

E' 上の函数で $\mathbb{B}$ 可測，かつ P 測度について二乗可積分なものの全体 L を考える。L に属する二つの函数 $f(X)$，$f'(X)$，$X \in E'$ は

$$P(X\ ;\ f(X) \neq f'(X)) = 0$$

のとき両者を同一視する。$f,\ g \in L$ なら

$$(f, g) = \int f(X)\,\overline{g(X)}\,P(dX), \qquad \|f\| = \sqrt{(f, f)}$$

により内積，ノルムが定義され，L は Hilbert 空間になる。L の元で特に $\mathbb{B}_t$ 可測なものの全体は L の部分空間をなす。これを L_t とかく。他と区別するため測度を指定する必要のあるときは P を明示して $L(P)$，$L_t(P)$ なる記号を用いる。

1 と直交する $L(L_t)$ の元全部も亦 $L(L_t)$ の部分空間になる。それを L^* (L_t^*) とかく。仮定 (1.3) から $L^*(L^*_t)$ は $L(L_t)$ と一致する。

予測誤差 $\sigma^2(t;\varphi)$ を最小にするような $X(t;\varphi)$ を最良予報量（best predictor）とよぶが，それは $\mathbb{B}_t$ 可測な元であることに注意すれば，$X(\varphi)$ の L_t，従って (1.3) の仮定から L_t^* への射影であることがわかる。すなわち，L_t への射影作用素を P_{L_t} であらわして

$$X(t;\varphi) = P_{L_t} X(\varphi) \tag{1.4}$$

であるということができる。

一方，$X(\varphi)$ の條件つき平均値 $E(X(\varphi)/\mathbb{B}_t)$ は L_t に属し，かつ任意の $f \in L_t$ に対して

$$(X(\varphi) - E(X(\varphi)/\mathbb{B}_t),\ f) = (X(\varphi), f) - (E(X(\varphi)/\mathbb{B}_t),\ f)$$

$$= (X(\varphi),\ f) - \int_{E'} E(X(\varphi)\bar{f}\,/\,\mathbb{B}_t)\,dP = 0$$

だから

$$E(X(\varphi)/\mathbb{B}_t) = P_{L_t} X(\varphi) \tag{1.5}$$

がなりたつ。

次に　$H = \{e^{iX(\varphi)};\ \varphi \in E\}$ の張る L の部分空間

$H_t = \{e^{iX(\varphi)} ;\ \varphi \in E, Supp(\varphi) \subset (-\infty, t]\}$ の張るLの部分空間，

H^*, H_t^* 等の記号は前と同じく，1と直交する部分空間を表わすものとする。
を考える．Pについての仮定(1.2)から $X(\varphi) \in H$ である．H_t の元はすべて $\mathcal{B}_t$ 可測であるから，H の元で $\sigma^2(t, \varphi)$ を最小にするもの $X(t;\varphi)$ は，L で考えたのと同様に

$$X(t;\varphi) = P_{H_t} X(\varphi)$$

でなければならない。このとき一般には $H = L$, $H_t = L_t$ 従つて L_t を H_t にかえて(1.5)が期待される。

さらに範囲を狭くして

$M = \{X(\varphi) ;\ \varphi \in E\}$ の張るLの部分空間

$M_t = \{X(\varphi) ;\ \varphi \in E,\ Supp(\varphi) \subset (-\infty, t]\}$ の張るLの部分空間

とする．M, M_t 等は定数は含まない．Mの中から $X(t;\varphi)$ を求める場合も

$$X(t, \varphi) = P_{M_t} X(\varphi)$$

となる．

仮定(1.2)と(1.3)から上で考えた$Hilbert$ 空間M, L 等について次の関係がなりたつ。

$$M \subset L^*.$$

$$M_t \subset L_t^*, \qquad t \in T.$$

後者から最良予報量を求める場合，Lで考えるとき最も詳しく，Mにおいては粗い予測を考えることになる．従つてLで考えるのが最も好ましいが，Mにおける方が，より簡単な計算で最良予報量が求まり，系統的な結果が得られている．HにおいてもLにおいてもMにおける程の結果はまだ得られていない．

なお，M以外にも各種の中間的な$Hilbert$ 空間が考えられてよいであろう。

Mにおいて予測の問題を考えるとき，線型予測(*linear prediction*)，然らざるとき非線型予測(*nonlinear prediction*)という。

(C1-10)

本節では各種の $Hilbert$ 空間を考えたが，いくつかの定常過程を同時に考えるとき対応する $Hilbert$ 空間を区別する必要のあるときは $path$ の記号を添えて，例えば $H(X)$ とか $M_t(Y)$ といった記号を用いることにする。

2 線型予測（一次元の場合）

2.1 弱定常過程

一般に定常過程 $(E', \mathbb{B}, P)$ があるとき，(1.2) を仮定すれば

$$m(\varphi) = E(X(\varphi))$$

$$B(\varphi, \psi) = E\{(X(\varphi) - m(\varphi)) \cdot \overline{(X(\psi) - m(\psi))}\}$$

が存在するが，それらは定常性により

$$(2.1) \quad \begin{cases} m(\varphi) = m(\tau_h \varphi) \\ B(\varphi, \psi) = B(\tau_h \varphi, \tau_h \psi) \end{cases}$$

を満足する。線型予測は M で考えるため，測度 P というよりは，M の構造のみが必要になる。M は，$m(\varphi)$, $B(\varphi, \psi)$ によってその構造が定まる。従って m, B のみに着目すればよい。いま

定義2　$(E', \mathbb{B}, P)$ において P が (1.2) と (2.1) を満足するとき，弱定常過程（*weakly stationary process*）という。

によって弱定常過程を定義すれば線型予測は弱定常過程の（線型）予測を考えることと言ってよく，本章の議論はすべて弱定常過程と考えてよい。

弱定常過程についても全体を通じての仮定 (1.3) を仮定する。従って B のみに着目すればよいことになる。$E = \mathcal{D}$ としたときの弱定常過程は $E = \mathcal{S}$ の場合に拡張され同じ議論ができるので，しばらく $E = \mathcal{D}$ の場合を考える。

定理 2.A　上の B に対して

$$(2.2) \quad B(\varphi, \psi) = \rho(\varphi * \tilde{\psi}), \qquad \tilde{\psi}(t) = \overline{\psi(-t)}$$

となる $\rho \in \mathcal{D}'$ が唯一つ存在する。

この ρ は P の共分散超函数（*covariance distribution*）とよばれるが，この ρ に対し $\mathbb{B}(R)$ の上の測度 μ が存在して

$$(2.3) \quad \rho(\varphi) = \int \hat{\varphi}(\lambda)\, d\mu(\lambda), \qquad \hat{\varphi}(\lambda) = \int e^{i\lambda t} \varphi(t)\, dt$$

と表わすことができる。さらに μ については適当な自然数 k が存在して

(2.4)
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mu(\lambda)}{(1+\lambda^2)^k} < \infty$$

となる．$k=0$ の場合が函数型の定常過程になる． μ は X のスペクトル測度 (spectral measure)と呼ばれる。

μ を $\mathbb{B}(R)$ 上の測度とする．平均 0 の確率変数からなる Hilbert 空間 $L^2(\Omega)$ があって，μ 測度有限な $S \in \mathbb{B}(R)$ に対し $Z(S) \in L^2(\Omega)$ が対応して次の條件を満足するとき Z を μ に対応する彷徨測度(random measure)という。

i） $S_1 \cap S_2 = \phi$ ならば $E(Z(S_1) \cdot \overline{Z(S_2)}) = 0$

ii） $E(|Z(S)|^2) = \mu(S)$.

彷徨測度 Z があるとき，μ について二乗可積分な任意の $f(\lambda)$ に対し

$$\int f(\lambda)\, dZ(\lambda) \qquad (\text{Bochner積分})$$

が定義される。

定理 2.B　上の (2.3) に対応して，$Z(S) \in M$ なる μ に対応する彷徨測度が存在して $X(\varphi)$ は

(2.5)
$$X(\varphi) = \int \hat{\varphi}(\lambda)\, dZ(\lambda)$$

と表わすことができる.

（以上　Gelfand [13], K. Itô [30]）.

特に函数型の $X(t)$ によって

$$X(\varphi) = \int X(t)\, \varphi(t)\, dt$$

となっている場合には上の結果は

(2.3′)
$$\Gamma(h) = E(X(t+h)\, \overline{X(t)}) = \int e^{ih\lambda}\, d\mu(\lambda) \qquad (\text{Khintchine})$$

(2.4′)
$$\int d\mu(\lambda) < \infty$$

(2.5′)
$$X(t) = \int e^{it\lambda}\, dZ(\lambda) \qquad (\text{Kolmogorov})$$

とスペクトル分解ができる．このとき $\Gamma(h)$ は共分散函数(covariance function)又は<u>自己共変量</u>とよばれる。

Tが離散型のとき，代表的にTが整数全体の場合を取り扱い，$T=\{n\}$とすると

(2.3″) $\quad \Gamma(n)=E(X(m+n)\cdot\overline{X(m)})=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{2\pi i n\lambda}\, d\mu(\lambda)$

(2.4″) $\quad \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} d\mu(\lambda)<\infty$

(2.5″) $\quad X(n)=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{2\pi i n\lambda}\, dZ(\lambda)$

となる．この場合 μ は $\mathbb{B}([-\frac{1}{2},\frac{1}{2}])$ 上で定義される測度である．

［注］ 測度 μ の台がTによって異るのは次のように考えられる．すなわち，(2.5′)は$Stone$の定理によって直接求められるが，これはTが局所コンパクト可換群の場合へ拡張できる．そのときはTの指標群を$\hat{T}$とすると μ は $\hat{T}$ 上の測度になることが反映している．$e^{i\lambda t}$は指標 $\chi\in\hat{T}$ のtにおける値 $\chi(t)=\langle t,\chi\rangle$ である．$e^{2\pi i n\lambda}$ についても同様である．

$\boxed{2.2}$ <u>定常過程の分解と表現</u>

A）本章で考える弱定常過程は後に述べる（→$\boxed{2.4}$）理由によって，定常過程の中で $X(t)$，$t\in T$ とかけるものを詳しく扱っておけばよいことがわかる。そのために $X(t)$ について予測の問題を考えるための準備をする。

$$U_t:\ X(0)\longrightarrow X(t)$$

により U_t を定義すれば，それは M 上のユニタリー作用素を生成する。これを改めて U_t とかけば $\{U_t;\ t\in T\}$ は 1助変数群になる。定常過程の場合は T_tX の $\mathbb{B}(T)\times\mathbb{B}$ 可測性から

(2.6) $\quad U_t X(\varphi)=X(\tau_t\varphi)$

によって定まる U_t はtについて連続な M 上のユニタリー作用素の作る1助変数群になる。弱定常過程のときも U_t の連続性は仮定している。従って$Stone$の定理より U_t は

$$U_t = \int e^{it\lambda}\, d\widetilde{E}(\lambda) \tag{2.7}$$

とスペクトル分解される．(2.5′) は $U_t X(0)$ のかきかえである．

$\{Z(S);\ \mu(S) < \infty\}$ の張る closed linear manifold を $M(Z)$ とかくと

$$M(Z) = M\ (= M(X)) \tag{2.8}$$

となることが (2.5′) の構成から直ちに得られる。

$L^2(\mu)$ を μ について二乗可積分函数の作る Hilbert 空間とするとき，M と $L^2(\mu)$ との間には次の同型対応がつく

$$L^2(\mu) \ni f \longleftrightarrow \int f(\lambda)\, dZ(\lambda) \quad \in M(Z) = M\ . \tag{2.9}$$

そのとき

$$U_t \int f(\lambda)\, dZ(\lambda) = \int f(\lambda)\, e^{i\lambda t} dZ(\lambda), \tag{2.10}$$

記号的に　$T_t\, dZ(\lambda) = e^{i\lambda t} dZ(\lambda)$,

がなりたつ．

いま $X(t)$ とは別に $Y(t)$, $t \in T$ があって，條件

i)　$M(Y) \subset M(X)$,

ii)　任意の h に対し　$(X(t+h),\ Y(t))$　が t に無関係

をみたすとき，$Y(t)$ は $X(t)$ と定常的に関連 (stationary correlated) しているという。$Y(t)$ が $X(t)$ と定常的に関連しているならば (2.9)より $f \in L^2(\mu)$ が存在して

$$Y(0) = \int f(\lambda)\ dZ(\lambda)\ .$$

任意の h に対して

$$\begin{aligned}(X(t+h),\ Y(t)) = (X(h),\ Y(0)) &= (U_t X(h),\ Y(t)) \\ &= (X(h),\ U_{-t} Y(t))\end{aligned}$$

だから　$Y(0) = U_{-t} Y(t)$．　故に $Y(t)$ は次のように表わされる．

(2.11) $$Y(t) = U_t Y(0) = \int e^{i\lambda t} f(\lambda)\, dZ(\lambda)$$

従って $Y(t)$ 自身が弱定常過程である。

M_1 を M の部分空間（closed linear manifold をいう），M_2 を M_1 の直交補空間；$M = M_1 \oplus M_2$（直和）とする。また M_i への射影を P_{M_i}，$i = 1, 2$，とすれば $M = U_t M_1 \oplus U_t M_2$ より，任意の M の元 F に対し

(2.12) $$U_t P_{M_i} F = P_{U_t M_i}(U_t F) \qquad i = 1, 2,$$

がなりたつ。

また，もし M_1 が U_t に対し不変な部分空間なら $(P_{M_1} X(t), X(s)) = (U_h P_{M_1} X(t), U_h X(s)) = (P_{M_1} X(t+h), X(s+h))$ より $Y(t) \equiv P_{M_1} X(t)$ は $X(t)$ と定常的に関連し，$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} f(\lambda)\, dZ(\lambda)$ とかける。$(X(t) - P_{M_1} X(t),\ P_{M_1} X(t)) = 0$ が任意の t に対してなりたつから

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\, \overline{f(\lambda)}\, (1 - f(\lambda))\, d\mu(\lambda) \equiv 0 .$$

従って f はあるボレル集合 A の定義函数 $\chi_A(\lambda)$ に等しい。故に

(2.13) $$P_{M_1} X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_A(\lambda)\, e^{i\lambda t}\, dZ(\lambda)$$

と表わされる。上記（2.13）の右辺の形に書かれるものを $X(t)$ の成分過程とよぶ。

測度 μ の Jordan 分解における絶対連続部分を μ_1，残りを $\tilde{\mu}$ とすれば，ルベーグ測度 0 のボレル集合 S が存在して $\tilde{\mu}(S^c) = 0$．これに対して二つの互に直交する成分過程

$$X_1(t) = \int e^{i\lambda t} (1 - \chi_S(\lambda))\, dZ(\lambda)$$

$$\tilde{X}(t) = \int e^{i\lambda t}\, \chi_S(\lambda)\, dZ(\lambda),$$

$$X(t) = X_1(t) + \tilde{X}(t),$$

が得られる。さらに $\tilde{\mu}$ が純粋不連続な部分 μ_2 と連続で特異な部分 μ_3 とにわ

かれ，それに応じて，互に直交し，又 $X_1(t)$ とも直交する弱定常過程 $X_2(t)$ と $X_3(t)$ が存在して

$$\tilde{X}(t) = X_2(t) + X_3(t)$$

と表わされ $X_i(t)$ のスペクトル測度が μ_j, $j=1,2,3$, になっている．上のように $X(t)$ を $X_1(t)$, $X_2(t)$, $X_3(t)$ の和として表わすことを Lebesgue 分解という．

この分解の各成分は

$$X_j(t) = \int e^{i\lambda t} dZ_j(\lambda) \quad , \quad E|dZ_j(\lambda)|^2 = \mu_j(d\lambda)$$

と表わされる．各 μ_j の台を Λ_j とかく．上の S は $\Lambda_2 \cup \Lambda_3$ に等しい．μ_2 の台 Λ_2 は $\{E(\lambda);\ -\infty < \lambda < +\infty\}$ の点スペクトルであり Λ_2 が λ_k, $k=1, 2, \cdots$ からなるとすれば，$Z_k = Z(\{\lambda_k\}) = [\tilde{E}(\lambda_k) - \tilde{E}(\lambda_k - 0)]X(0)$ は，$E|Z_k|^2 = \mu(\{k\})$ なる M の直交系である．

(2.14) $$X_2(t) = \sum_{\lambda_k \in \Lambda_2} e^{i\lambda_k t} Z_k$$

となる．これから $X_2(t)$ は $\{Z_k;\ \lambda_k \in \Lambda_2\}$ の如何なる真の部分集合をとってもそれらの一次結合の極限として表わされないことを示す．故に

(2.15) $M_t(X_2) = M(\{Z_k\})$ ($= Z_k$, $\lambda_k \in \Lambda_2$, の張る M の部分空間)

で $M_t(X_2)$ は t について不変で上式の右辺に等しい．

$X_3(t)$ については，$X_3[t;h] = X_3(t) - P_{M_{t-h}(X_3)} X_3(t)$ とおくとき (2.9)により $f \in L^2(\mu_3)$ が存在して

$$X_3[t;h] = \int f(\lambda)\, dZ_3(\lambda)$$

とかける．$E|X_3[t;h]|^2 = \int |f(\lambda)|^2 d\mu_3(\lambda) = \int_{\Lambda_3} |f(\lambda)|^2 d\mu(\lambda)$. ところが $X[s,h]$ と $X[t,h]$ は $s-t>h$ なら直交することから $|f(\lambda)|^2 d\mu_3(\lambda)$ は $d\mu_1$ に関し絶対連続なことがわかり $E|X_3[t;h]|^2 = 0$ がでる．故に $X_3(t) = P_{M_{t-h}(X_3)} X_3(t)$ となり

(2.16) $M_t(X_3)$ は t について不変

をうる（K. Karhunen [35]）．

$M_{-\infty} = \bigcap_t M_t$,　$M_\infty = M$　なる記号を用いることにすれば

<u>定義 3.</u>　$X(t)$ は

i)　$M_\infty = M_{-\infty}$ （従って $= M_t,\ t \in T$）のとき <u>M-決定的</u>（M-deterministic）

ii)　$M_{-\infty} = \{0\}$　のとき <u>M-純非決定</u>（M-purely non-deterministic）

と呼ばれる．

上の $X_2(t)$，$X_3(t)$ はいずれも M-決定的な定常過程であるが $X_1(t)$ は一般に M-決定的とも M-非決定的とも限らない。

B）弱定常過程 $X(t)$，$t \in T$，について

$$X_d(t) = P_{M_{-\infty}} X(t),$$

$$X_p(t) = X(t) - X_d(t)$$

とおけば次のことがなりたつ。

$$(2.17)\quad \begin{cases} \text{i)}\quad X_d(t) \text{ は M-決定的で，} X_p(t) \text{ は M-純非決定的である} \\ \text{ii)}\quad \text{任意の } t,\ s \text{ について } M_t(X_d) \perp M_t(X_p) \quad \text{（直交）で} \\ \qquad M_t = M_t(X_d) \oplus M_t(X_p), \quad -\infty \leqq t \leqq \infty \\ \text{iii)}\quad P_{M_s} X(t) = X_d(t) + P_{M_s(X_p)} X_p(t), \qquad (s < t) \end{cases}$$

このような $X(t)$ の分解を <u>Wold 分解</u>とよぶ。

このとき $h > 0$ に対し

$$X_p[t, h] = X(t) - P_{M_{t-h}} X(t) = X_p(t) - P_{M_{t-h}(X_p)} X_p(t)$$

をみることにより，(2.16) を導いたときの説明と同様にして $X_d(t)$ のスペクトル測度が絶対連続になることがわかる。

C）ルベーグ測度に対応する直交測度 ξ があるとき $C \in L^2(R)$ に対し

$$(2.18)\qquad X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} C(t-u)\, d\xi(u)$$

は弱定常過程になる。　逆に連続な弱定常過程があって，(2.18) のようにかけ

るとき，これをXの移動平均表現（*moving average representation*）といい，$(C, d\xi)$ とかく。ルベーグ測度 m に対応する彷徨測度は *homogeneous* な彷徨測度であると言われる。

いま ξ^* を *homogeneous* な彷徨測度とするとき，そのフーリエ変換を

$$(2.19) \qquad \xi(S) = \int \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_S e^{i\lambda t} dt \right\} d\hat{\xi}(\lambda), \qquad m(S) < \infty$$

で定義すれば，ξ はまた *homogeneous* な彷徨測度で

$$(2.20) \qquad \hat{\xi}(S) = \int \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_S e^{-i\lambda t} d\lambda \right\} d\xi(t)$$

がなりたつ．これから

$$(2.21) \qquad M(\xi) = M(\hat{\xi})$$

である．また $f \in L^2(R)$ のフーリエ変換 $\hat{f}$: $\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(t) e^{-i\lambda t} dt$，に対し

$$\int f(t) d\xi(t) = \int \hat{f}(\lambda) d\hat{\xi}(\lambda) \qquad (Parseval の等式)$$

がなりたつ。

上の関係から，$X(t)$ が移動平均表現をもつための必要かつ十分な条件は，$X(t)$ のスペクトル測度が絶対連続なことであるという結果が得られる。実際 $X(t)$ が (2.18) のように表わされたとすれば（C のフーリエ変換を $\hat{C}$ と書く）

$$X(t) = \int e^{i\lambda t} \hat{C}(\lambda) d\hat{\xi}(\lambda),$$

$$\mu(d\lambda) = |\hat{C}(\lambda)|^2 d\lambda$$

である．逆に $\mu(d\lambda) = \gamma(\lambda) d\lambda$ ならば実数値函数 $\theta(\lambda)$ を任意にとり

$$\hat{C}(\lambda) = \sqrt{\gamma(\lambda)}\, e^{i\theta(\lambda)},$$

および，$S_0 = \{\lambda ;\ \gamma(\lambda) = 0\}$ の特性函数 $\chi_{S_0}(\lambda)$ に対し $X(t)$ の (2.5′) の表現における Z と直交する任意の *homogeneous* な彷徨測度 ξ_0 をとり

$$(2.22) \qquad d\hat{\xi}(\lambda) = (1 - \chi_{S_0}(\lambda)) \frac{dZ(\lambda)}{\sqrt{\gamma(\lambda)}} e^{-i\theta(\lambda)} + \chi_{S_0}(\lambda) d\xi_0(\lambda)$$

とおけば $\hat{\xi}$ は *homogeneous* な彷徨測度で

$$\hat{C}(\lambda) d\hat{\xi}(\lambda) = Z(d\lambda)$$

である．$\hat{C}$ 及び $\hat{\xi}$ のフーリエ変換をそれぞれ C, ξ として $(C, d\xi)$ が $X(t)$ の移動平均表現になる。

Paley-Wiener [53]，Hille-Tamarkin によれば，$0 \leqq G(\lambda) \in L^p(R)$ $(1 \leq p < \infty)$ なるとき，G の Fourier 変換 g が半直線 $(-\infty, 0)$ 上で 0 になるための必要かつ十分な条件は

$$\int \frac{|\log G(\lambda)|}{1+\lambda^2} d\lambda < \infty$$

である．これを用いて

<u>定理3.</u>　$X(t)$ が $C(t)=0$，$t \leq 0$，なる C を用いて移動平均表現できるための必要かつ十分な條件は，スペクトル測度 μ が絶対連続で，その密度 $\gamma(\lambda)$ が

$$\int \frac{|\log \gamma(\lambda)|}{1+\lambda^2} d\lambda < \infty \tag{2.23}$$

をみたすことである。このとき $X(t)$ は M-純非決定的である．

が証明できる．これは $\sqrt{\gamma(\lambda)}$ を上の G に適用して，

$$\begin{cases} \varphi(z) = C e^{-i\alpha z} \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^k \prod_{z_k \neq -i} \frac{z-z_\nu}{z-\bar{z}_\nu} \cdot \frac{|z_\nu+i|}{z_\nu+i} \cdot \frac{|z_\nu-i|}{z_\nu-i} h(z) k(z) \\ h(z) = \exp\left\{-\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \log G(\lambda) \frac{1+\lambda z}{\lambda - z} \frac{d\lambda}{1+\lambda^2}\right\} \\ k(z) = \exp\left\{\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+\lambda z}{\lambda - z} \sigma(d\lambda)\right. \end{cases} \tag{2.24}$$

但し　$|C| = 1$，　$\alpha \geqq 0$，　$\sigma(\lambda) \uparrow (\lambda \uparrow \infty)$

とかける　$\varphi(z)$ の境界値

$$\hat{C}(\lambda) = \lim_{y \uparrow 0} \varphi(\lambda + iy) = \sqrt{\gamma(\lambda)}\, e^{i\theta(\lambda)}$$

のフーリエ変換 $C(t)$ が所要の函数 C のすべてを与える。

定理3が成立するとき homogeneous な彷徨測度 ξ が存在して

$$X(t) = \int_{-\infty}^{t} C(t-u)\, d\xi(u) \tag{2.25}$$

とかけて，$M(X) = M(\xi)$ が成りたつ。任意の t に対して $M_t(X) \subseteq M_t(\xi)$，$M_{-\infty}(\xi) = \{0\}$ より定理の最後の主張がでる。(2.25) のような表わし方は C

のとり方に自由性があるだけに，若し存在すれば，幾通りもの方法がある．特別な場合として　$X(t)$　が（2.25)のように表わされて

(2.26)　任意の t に対して　$M_t(X) = M_t(\xi)$

なるとき　$(C, d\xi)$ を　$X(t)$　の<u>標準表現</u>（canonical representation）といい，C を表現の<u>標準核</u>（canonical kernel）という．

X の二つの標準表現（C_j, $d\xi_j$），$j = 1, 2$　があるとき標準核の間には，適当な定数 α が存在して　$g_1 = e^{i\alpha} g_2$ となる．さらに詳しくいえば，標準核 $C(t)$ は

$$\hat{C}(\lambda) = \lim_{\mu \uparrow 0} exp\left\{ -\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+tz}{t-z} \cdot \frac{\log\sqrt{\gamma(t)}}{1+t^2}\, dt + i\alpha \right\},$$

$z = \lambda + i\mu$,　　α は任意の常数

のフーリエ変換として表わされる．それに対応して彷徨測度 $d\xi$ は（2.22）によって定まる $d\xi^*$（このとき S_0 は空集合としてよい）の Fourier 変換になる．

［注］　$\alpha = 0$ に対しては　$\overline{\hat{C}(\lambda)} = \hat{C}(-\lambda)$，従って $C(t)$ は実数値をとる函数である．

$X(t)$ のスペクトル測度を Jordan 分解し，その絶対連続な成分を $\mu_1(d\lambda) = \gamma(\lambda)\, d\lambda$　とする．$X(t)$ が　M-決定的でないための条件は，γ が (2.23) を満足することである．このとき μ_2，μ_3 の台を S とするとき　$X(t)$　の Wold 分解は

$$X_d(t) = \int_S e^{i\lambda t}\, dZ(\lambda),$$

$$X_p(t) = \int_{S^c} e^{i\lambda t}\, dZ(\lambda)$$

で与えられる．

また，$X(t)$ が　$X^{(1)}(t)$　と　$X^{(2)}(t)$　の和で，$X^{(j)}(t)$，$j = 1, 2$，が何れも　$X(t)$　と定常的に関連し，$X^{(1)}(t)$ は決定的であり，$X^{(2)}(t)$ は純非決定的でかつ　$X^{(1)}(t)$　と　$X^{(2)}(t)$　が互に直交する場合には

$$X(t) = X^{(1)}(t) + X^{(2)}(t)$$

は　$X^{(1)}(t) = X_d(t)$，$X^{(2)}(t) = X_p(t)$　とする Wold 分解に他ならない．

T が離散型の場合の函数型の弱定常過程 $X(n)$ についても上と全く類似した結果がなりたつ.

定理 3″　X_n が, 直交系 $\{\xi_\nu\}$ を用いて

$$(2.25'') \qquad X(n) = \sum_{\nu \leq n} C_{n-\nu}\, \xi_\nu \quad , \qquad \sum_0^\infty |C_n|^2 < \infty$$

と表わされるための必要かつ十分な条件は, スペクトル測度が絶対連続でその密度函数 $\gamma(\lambda)$ が

$$(2.23'') \qquad \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \log \gamma(\lambda)\, d\lambda > -\infty$$

をみたすことである.

このとき

$$(2.26'') \qquad \text{任意の } n \text{ に対して} \quad M_n(X) = M_n(\xi)$$

がみたされるならば (C_n, ξ_n) を標準表現と呼ぶ。 そのような $\{C_n\}$ に対する一意性も $X(t)$ のときと同様である。そして

$$\gamma(\lambda) = \left| \sum_0^\infty C_n e^{-2\pi i n\lambda} \right|^2 \qquad a.e.$$

がなりたつ。

$\boxed{2.3}$ 最良予報量 (函数型の場合)

本節では弱定常過程 $X(t)$, $t \in T$, について最良予報量を求める線型予測の問題を取扱う. すでに $\boxed{1.3}$ で述べたように予測誤差を最小にする最良予報量は射影 (1.4) で与えられる. 今扱っているのは弱定常過程で函数型の $X(t)$ の場合 (t についての連続性も仮定して) であるから, M_t の元で $X(s)$, $s > t$, を近似する, すなわち $X(s)$ の M_t への射影を求めることになる. これを求める方法は, 弱定常性から $s-t$ のみに依存し t 自身には関係しない. 従つて, 以後簡単のため $X(t)$, $t > 0$, の M_0 への射影

$$X(0;t) = P_{M_0} X(t)$$

を求めることにする。一般の場合には (2.12) の関係を用いればよい。

A)　$X(t)$ が M-決定的なとき．　若し $X(t)$ のスペクトル測度が絶対連続な成分を含まないときは(2.15) 及び (2.16) により M_t は t について不変である。故に任意の $X(t)$ は $M_0\,(=M_t)$ に含まれ $X(t)$ 自身が最良予報量になる。

絶対連続なスペクトル測度 $\gamma(\lambda)\,d\lambda$ をもつ場合でも

$$\int \frac{|\log \gamma(\lambda)|}{1+\lambda^2}\,d\lambda = \infty \tag{2.27}$$

なら $X(t)$ は M-決定的である（前節の末尾及び Karhunen [35] Satz 6)．すなわち M_t が不変だから $X(t)$ が M_0 に属しそれ自身が最良予報量である。

$X(t)$ を Lebesgue 分解し $X(t)=X_1(t)+X_2(t)+X_3(t)$ で $X_1(t)$ に対するスペクトル測度が (2.27) のとき，各 $X_j(t)$ が M-決定的だから $X(t)$ が M-決定的でやはり $X(t)$ 自身が最良予報量である。

B)　$X(t)$ が M-純非決定的なとき．　このとき $X(t)$ のスペクトル測度は特異な成分を含み得ない。そしてその密度函数 $\gamma(\lambda)$ は (2.23) を満足しなければならない。故に定理3により (2.25) の形の移動平均表現が存在する．しかもこのとき C を適当にとると，

$$X(t)=\int_{-\infty}^{t} C(t-u)\,d\xi(u), \qquad (C,\,d\xi) \text{ は標準表現}$$

となるように表現できるから，$M_t(X)=M_t(\xi)$ なる性質を用いて $X(t)$ の最良予報量 $X(0\,;t)$ は次のようにして求まる。

$$X(0\,;t)=P_{M_0(X)}X(t)=P_{M_0(\xi)}X(t)=\int_{-\infty}^{0} C(t-u)\,d\xi(u) \tag{2.28}$$

である。このとき予測誤差 $\sigma^2(0\,;t)$ は次式で与えられる。

$$E\,|X(t)-X(0,t)|^2=\int_0^t C(t-u)^2\,du=\int_0^t C(u)^2\,du \tag{2.29}$$

C)　上の A), B) に含まれない一般の場合は，$X(t)$ のスペクトル測度の Jordan 分解 $\mu=\mu_1+\mu_2+\mu_3$ で $\mu_1(d\lambda)=\gamma(\lambda)\,d\lambda$ の密度函数 $\gamma(\lambda)$ が (2.23) をみたし $\mu_2+\mu_3 \neq 0$ のときである。

Lebesgue 分解により $X(t)=X_1(t)+X_2(t)+X_3(t)$ とかけば前節の結果より $X_p(t)=X_1(t)$　$X_d(t)=X_2(t)+X_3(t)$ として Wold 分解をうる．従って (2.17) の iii) によって $P_{M_0(X)}X(t)=P_{M_0(X_p)}X_p(t)+X_d(t)$ となり

上の A)，B)の場合に帰着される。

離散型のパラメータのとき，標準表現によって（2.25″）のように表わされているならば

$$X(0;n)=P_{M_0(X)}X(n)=\sum_{\nu\leq 0}C_{n-\nu}\xi_\nu \tag{2.28″}$$

従って

$$\sigma^2(0;n)=\sum_{k=0}^{n-1}|C_k|^2 . \tag{2.29″}$$

特に $n=1$ のときは

$$\sigma^2(0;1)=|C_0|^2=e^{\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\log\gamma(\lambda)d\lambda}$$

となる（Doob [10]）。

このような最良予報量や，予測誤差の計算は Toeplitz form を用いても計算される（Grenander-Szegö [19]）。

また $\sigma^2(0;n)$ はスペクトル測度を用いて次のように表わされる（Maruyama [43]，Kolmogorov）。

$$\Gamma(n)=\int_{-\pi}^{\pi}e^{in\lambda}d\mu(\lambda) , \qquad \mu'(\lambda)=\gamma(\lambda)$$

とするとき，

$$\sigma(0;n)=2\pi(1+b_1^2+\cdots+b_n^2)e^{\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\log\gamma(\lambda)d\lambda}$$

但し b_k は

$$\log\gamma(\lambda)\sim a_0+a_1\cos\lambda+a_2\cos 2\lambda+\cdots$$

$$\exp\left\{\frac{1}{2}(a_1r+a_2r^2+\cdots)\right\}=1+b_1r+b_2r^2+\cdots$$

によって決定される。

2.4 最良予報量（一般の場合）

この節では，函数型でない一般の弱定常過程 $X(\varphi)$ の場合，すなわち（2.4）の k が 0 でない場合の最良予報量を求める。その求め方を函数型の場合（前節）

に帰着させるため M_t をかえないような適当なXの変換を行なう。Eとしては$\mathcal{S}$をとる。$\mathcal{S}(a)$は

$$\mathcal{S}(a) = \{\varphi ;\ \varphi \in \mathcal{S},\ \ supp(\varphi) \subset (-\infty, a]\}$$

とする．Xに対して(2.4)によって自然数 k が定まる。いま $e(t)$ は

$$e(t) = \begin{cases} e^t , & t \leq 0 , \\ 0 , & t > 0 \end{cases}$$

で定義される函数とし，$e_k(t) = (e * e * \cdots * e)(t)$（$k$回の convolution）とおけば

$$\varphi \in \mathcal{S}(a) \text{ なら } e_k * \varphi \in \mathcal{S}(a) \subset \mathcal{S}$$

である．$Y(\varphi)$を

$$Y(\varphi) = X(e_k * \varphi)$$

で定義すれば，Yも⽰弱定常過程になる．ところが，Xが(2.5)で表わされるとすれば，

$$Y(\varphi) = \int (\widehat{e_k * \varphi})(\lambda)\, dZ(\lambda) = \int \frac{\hat{\varphi}(\lambda)}{(1+i\lambda)^k}\, dZ(\lambda)$$

となり　Yのスペクトル測度は　$d\mu(\lambda)/(1+\lambda^2)^k$　（$d\mu(\lambda)$ はXのスペクトル測度）で(2.4)からそれは有界な測度になる．すなわち $Y(\varphi)$ は函数型の定常過程になる．また上の構成より，任意のtに対し

$$M_t(Y) \subset M_t(X)$$

がなりたつ．　一方　$D = \dfrac{d}{dt}$　とおけば

$$DY(\varphi) = (-1)\, Y(D\varphi) = \int (i\lambda)\, \hat{\varphi}(\lambda)\, dZ(\lambda)$$

従って

$$(1+D)^k\, Y(\varphi) = \int \hat{\varphi}(\lambda)\cdot(1+i\lambda)^k \cdot \frac{Z(d\lambda)}{(1+i\lambda)^k} = X(\varphi) .$$

ところが　Dの定義から　$\varphi \in \mathcal{S}(t)$ なら $D^\nu Y(\varphi) \in M_t(Y)$，$\nu = 1, 2, \cdots$
故に　$X(\varphi) \in M_t(Y)$．すなわち $M_t(Y) \supset M_t(X)$ がわかり，結局

<u>定理4</u>　任意のtに対して

$$M_t(X) = M_t(Y) \tag{2.30}$$

が成り立つ.

前節によれば $Y(t)$ の Wold 分解は

$$Y(t) = Y_d(t) + Y_p(t)$$

$$Y_d(t) = \int_S \frac{e^{i\lambda t}}{(1+i\lambda)^k}\, dZ(\lambda) \qquad \text{(M-決定的)}$$

$$Y_p(t) = \int_{S^c} \frac{e^{i\lambda t}}{(1+i\lambda)^k}\, dZ(\lambda) \qquad \text{(M-純非決定的)}$$

である. (2.30) は各 $M_t(X_d)$ と $M_t(Y_d)$, $M_t(X_p)$ と $M_t(Y_p)$ についてなりたち, それぞれ同じ記号 M_t^d, M_t^p であらわせば

$$M_t(X) = M_t(Y) = M_t^d \oplus M_t^p \tag{2.31}$$

と直和分解できる. かくして Y の Wold 分解から X の Wold 分解が得られる.

X が決定的でないことは, Y が決定的でないことと同値で, それは

$$\int \frac{\left| \log \dfrac{\gamma(\lambda)}{(1+\lambda^2)^k} \right|}{1+\lambda^2}\, d\lambda < \infty$$

すなわち (2.23) と同値である.

最良予報量は (2.31) の分解を用いて

$$X(t;\varphi) = X_d(\varphi) + P_{M_t^p} X_p(\varphi)$$

である. 若し (2.23) がなりたてば

$$\frac{\hat{C}(\lambda)}{(1+i\lambda)^k} = \lim_{\mu \downarrow 0} \exp\left\{ -\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+tz}{t-z} \frac{\log \sqrt{\dfrac{1}{(1+t^2)^k}}}{1+t^2}\, dt + i\beta \right\}$$

$$(z = \lambda + i\mu)$$

とおくと

$$C_Y(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} \frac{\hat{C}(\lambda)}{(1+i\lambda)^k}\, d\lambda$$

は $(-\infty, 0]$ で 0 になり $C_Y(t)$ は $Y_p(t)$ の標準表現の核になる. $Y_p(t)$ に対

(C1-26)

し homogeneous な彷徨測度 $d\zeta$ が存在し

$$Y_p(t)=\int_{S^c} e^{i\lambda t}\ \frac{dZ(\lambda)}{(1+i\lambda)^k}=\int_{-\infty}^{t} C_Y(t-s)\,d\zeta(s)$$

と表現できる（標準表現）．これを用いて

$$X_p(\varphi)=(1+D)^k Y_p(\varphi)=\int_{-\infty}^{\infty} d\zeta(s)\int_{-\infty}^{\infty} C_Y(t-s)\,(1-D)^k\varphi(t)\,dt$$

$$=\int_{-\infty}^{t} d\zeta(s)\int_{-\infty}^{\infty} C_Y(u-s)\,(1-D)^k\varphi(u)\,du$$

$$+\int_{t}^{\infty} d\zeta(s)\int_{-\infty}^{\infty} C_Y(u-s)\,(1-D)^k\varphi(u)\,du$$

よって，$X_p(\varphi)$ の最良予報量は

$$X_p(t;\varphi)=\int_{-\infty}^{t} d\zeta(s)\int_{-\infty}^{\infty} C_Y(u-s)\,(1-D)^k\varphi(u)\,du$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t} d\zeta(s)\int_{-\infty}^{\infty}\hat{C}\,(\lambda)\,\hat{\varphi}(\lambda)\,e^{-i\lambda s}\,d\lambda$$

故に

(2.28′) $$X(t;\varphi)=X_d(\varphi)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t} d\zeta(s)\int_{-\infty}^{\infty}\hat{C}\,(\lambda)\hat{\varphi}(\lambda)e^{-i\lambda s}\,d\lambda$$

(2.29′) $$\sigma^2(t;\varphi)=E\,|\,X(\varphi)-X(t;\varphi)|^2$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{t}^{\infty}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\hat{C}\,(\lambda)\,\hat{\varphi}(\lambda)\,e^{-i\lambda s}\,d\lambda\right|^2 ds$$

が得られる．

（以上 Rozanov [60] 及び Maruyama による）。

2.5 特殊なスペクトル測度の場合

これまで最良予報量を求める一般的な方法を論じてきたが，ここではスペクトル測度が特殊な場合について予報量を求める具体的な方法について述べる。

ここで扱う定常過程はすべて函数型の（平均連続な）弱定常過程 $X(t)$，$-\infty<t<\infty$，である。

$$X(t)=\int e^{it\lambda}\,dZ(\lambda)\,,\qquad \Gamma(h)=\int e^{ih\lambda}\,d\mu(\lambda)$$

とする。

i) μ_2をスペクトル測度 μ の純粋不連続な成分とし，その台を $\Lambda_2=\{\lambda_n\}$ とする。Λ_2に属する任意の λ_nに対して

$$(2.32) \qquad \underset{T\to\infty}{l.i.m.}\ \frac{1}{T}\int_{-T}^{0} X(t)\, e^{-i\lambda_n t}\, dt = Z(\{\lambda_n\})$$

がなりたつ（Doob [10] XI章）。従って $X(t)$ の成分過程 $X_2(t)=\sum_n e^{i\lambda_n t} Z(\{\lambda_n\})$ の部分は $X(t)$ に対し（2.32）のような作用素（しかも $X(t)$, $t\leq 0$, のみに対する線型作用素）を施すことによって得られる。しかも

$$\int |\Gamma(t)|\, dt < \infty$$

ならば（2.32）の極限は確率1で存在する。すなわち1つの見本過程の観測値からそれに対するすべての $Z(\{\lambda_n\})$, $\lambda_n\in\Lambda_2$, が定まるし $X_1(t)$, $t>0$, は完全に予報できる。

離散パラメータのときも全く同様である。

ii) 次は古くから（Wold [69], Doob [9] 等） 考えられている<u>有理スペクトル密度</u>の場合である。すなわち μ は絶対連続で，その密度函数 $\gamma(\lambda)$ が

$$(2.33) \qquad \gamma(\lambda) = \left|\frac{Q(i\lambda)}{P(i\lambda)}\right|^2, \qquad P,\ Q \text{ は多項式}$$

のときである。$\gamma(\lambda)$ は可積分だから Qの次数 < Pの次数（$=N$とおく）であり，また（2.23）をみたすから M-純非決定的な場合である。従って標準表現（C, $d\xi$）が存在するが，標準核Cは Q/P が下半面で極も零点ももたないようにとったとき（（2.33）がなりたつような P, Q のとり方には自由性が残る）それを $\boxed{2.2}$ における $\hat{C}$ として得られる。実際 $P(i\lambda)=\prod_{k=1}^{N}(i\lambda+\lambda_k)$ としたとき $C(t-u)$, $u\leq t$, は $\sum_{k=1}^{N} a_k e^{-\lambda_k(t-u)}$ といった形をしている。但し $\lambda_k>0$.

特に $Q(=const.)=d$ のときを考える。スペクトル測度の形から $DX(t)$, …, $D^{N-1}X(t)$ （Dは前節の意味）も赤函数型の定常過程である。$e^{-\lambda_k t}De^{\lambda_k t}$, $k=1, 2, \cdots, N-1$ を逐次 $X(t)$ に作用させると，

$$X^{[N-1]}(t) = e^{-\lambda_N t}\int_{-\infty}^{t} e^{\lambda_N u}\, d\xi(u)$$

をうる．$e^{\lambda_N t}X^{[N-1]}(t)$ は直交過程であり，又 D が局所的な作用素であることに注意すれば

$$(2.34)\qquad M_{t,s}(\xi) = M_{t,s}(X) \cap M_{t,s}(\xi),$$

但し，$M_{t,s}(X) = \{X(\tau);\ s \leqq \tau \leqq t\}$ の張る部分空間

ξ についても同様

が任意の $t > s$ に対して成りたつ。いま $A_t = e^{-\lambda_N t} D e^{\lambda_N t} \cdot e^{-\lambda_{N-1} t} D e^{\lambda_{N-1} t} \cdots e^{-\lambda_1 t} D e^{\lambda_1 t}$ とおけば，

$$A_t X(\varphi) = \dot{\xi}(\varphi), \qquad \dot{\xi}(\varphi) = \int \varphi(t)\, d\xi(t)$$

となり *Langevin* 方程式の拡張が得られる。*Langevin* 方程式 $dX(t) = -\lambda X(t)dt + \alpha dB(t)$ の場合には ξ を *Brown* 運動に代えて，$X(t)$ は

$$X(t) = \alpha \int^t e^{-\lambda(t-u)} dB(u), \qquad \lambda > 0$$

と表わされ *Ornstein-Uhlenbeck* の *Brown* 運動（一 *Brown* 運動）になる（*Doob*[9] 参照）。

上の A_t が局所的な作用素であることは（2.34）の性質に反映している。

次に $Q \neq const.$ のときは $Y(t)$ と Q から定まる微分作用素 $\widetilde{A}_t$（定数係数）が存在して Y のスペクトル測度は $|\alpha'/P(i\lambda)|^2$（同じ P を用いる）かつ，

$$\widetilde{A}_t Y(t) = X(t)$$

となっている。そうすれば

$$A_t X(\varphi) = \widetilde{A}_t \xi(\varphi)$$

このとき X から ξ を求める作用素は局所的ではなく（2.34）は成りたたない。

何れの場合も $X(t)$ から $d\xi(t)$ を求める方法が具体的に知られた．その ξ を用いて，$C(t-u)$ による線型変換によって予報量は

$$X(0;t) = \int^0 C(t-u)\, d\xi(u)$$

と表わせる（[23] §III.2）． この一般化として微分作用素 A_t の代りに *Rie-*

mann-Liouville の意味でのα次の微分作用素にした場合，或は$\gamma(\lambda)$をΓ-函数の比とした場合等を考えるときも，やや具体的な予報量の構成が知られる．

2.6 非定常の場合

予測の問題の対象となるのは定常過程とは限らない．非定常の場合を扱ったものとしては，次の H. Cramér の結果（[6], [8]他）および P. Lévy の正規過程の表現に関する一連の研究の一応用（[40] 他および [23] 参照）としての予測の問題がある．前者は定常過程のスペクトル表現を非定常の場合に拡張したものであり，後者は標準表現の拡張に相当する表現を用いた予報量の構成である．

この節では函数型の平均連続な確率過程 $X(t)$, $t \geqq 0$, 或は $-\infty < t < \infty$, 又は $X(n)$, $-\infty < n < \infty$, を扱う．平均を0とすることも従前通りである．

i) $X(n)$は

$$X(n) = \int_0^{2\pi} e^{inu}\, dZ(u)$$

$$E(Z(u)) = 0, \quad E(Z(u)\cdot\overline{Z(v)}) = F(u,v), \quad 0 \leqq u, v \leqq 2\pi,$$

と表現されているとする．但し$Z(u)$はノルムの意味で右連続，$F(u,v)$は有界変分函数であると仮定する．このようなものは *harmonizable* であると呼ばれる．また F をスペクトル函数という．共分散函数 Γ は

$$\Gamma(m,n) = E(X(m)\cdot\overline{X(n)}) = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(mu-nv)}\, dF(u,v)$$

と表わされる．Fは Jordan 分解と類似して

$$F = F_1 + F_2 + F_3$$

と分解される．絶対連続な成分 $F_1(u,v)$ を

$$F_1(u,v) = \int_0^u\int_0^v f_1(s,t)\, ds\, dt$$

とかく．

$$G(u) \equiv \int_0^u\int_0^{2\pi} |dF(s,t)|$$

とおくと，これは殆んど到るところ導函数 $G'(u)$ をもつ。若し

$$\int_0^{2\pi} \log G'(u)\, du = -\infty$$

ならば，$X(n)$ は決定的，すなわち任意の n に対して $M_n(X) = M_{-\infty}(X)$ である。ここに $M_n(X)$，$M_{-\infty}(X)$ 等は定常過程の場合と同様に定義する。

F_1 の密度函数 f_1 が正方形 $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ の上で二乗可積分なとき，決定的でないための十分條件を与えることができる。すなわち f_1 が固有函数 $\{\varphi_p\}$ により

$$f_1(u, v) = \sum_{p=1}^{\infty} \mu_p \varphi_p(u) \overline{\varphi_p(v)}$$

と展開できて，しかもある p と m とが存在して

$$\varphi_p(u) \sim \sum_{q \geqq n} b_{pq} e^{-iqu} \quad , \qquad \sum_q |b_{pq}|^2 < \infty ,$$

となるならば，X は決定的ではない（[8] Part II）が知られている。

ii）正規過程の場合．　正規過程 $X(t)$，$t \geqq 0$，が Wiener 積分（→Brown 運動）により

$$X(t) = \int_0^t F(t, u)\, dB(u) \tag{2.35}$$

と表わされ，任意の $t > s$ に対して

$$E(X(t) / \mathcal{B}_s(X)) = \int_0^s F(t, u)\, dB(u) \tag{2.36}$$

がなりたつとき（$F(t, u)$，dB）を標準表現 F を標準核といい，特に

$$M_t(X) = M_t(B)$$

のとき真の標準表現という（P. Lévy [40]）．定常過程の場合は，標準表現と真の標準表現とは同等である．

今 $M(X)$ が可分な Hilbert 空間とする．

$$M_{t+} = \bigcap_n M_{t+\frac{1}{n}}$$

とすれば，M_{t+} は $M(X)$ の（閉）部分空間だから射影 $E(t)$ が対応している．もし

$$\bigcap_t M_t(X) = \{0\}$$

がみたされれば $E(t)$ は単位の分解になる．そのときは $M(X)$ において

(2.37)　　$E(t)$ の重複度が 1

が真の標準表現が存在するための必要かつ十分な條件になる．

標準表現が存在すれば (2.36) が最良予報量 $X(s;t)$ を与え　予測誤差 $\sigma^2(s;t)$ は

$$\sigma^2(s;t) = \int_s^t F(t,u)^2\,du$$

となる．

ここまでは dB を一般の *homogeneous* な彷徨測度としても同じであるが，正規過程としたときの特徴は $X(t)$ を

$$X(t) = \int_0^s F(t,u)\,dB(u) + \int_s^t F(t,u)\,dB(u)$$

と分解したとき右辺の二項は互に“独立”になることである．故に

$$P_{M_s(X)}X(t) = P_{L_s^*(X)}X(t) = \int_0^s F(t,u)\,dB(u)\,.$$

このことは線型予測と非線型予測とが一致することを示している．

特殊の場合については，$\boxed{2.7}$ の有理スペクトルの場合に相当するものとして，具体的な予報量の構成ができる．すなわち標準核 $F(t,u)$ が十分滑らかな

$$F(t,u) = \sum_{i=1}^{N} f_i(t)\,g_i(u)^{(*)}\ ,\qquad u \le t$$

とかけているときスペクトル測度が $\left|Q(i\lambda)/P(i\lambda)\right|^2 d\lambda$ の場合に当り，$Q = const$ に相当するものは

$$F(t,t) = \sum_{i=1}^{N} f_i^{(k)}(t)\,g_i(t) \equiv 0\ ,\qquad k = 1, 2, \cdots, N-2$$

のときである．但し，前節の A_t，$\widetilde{A}_t$ は定数係数の微分作用素であるのに反して，今は変数係数の場合である．

(*) このような核は *Goursat* 核とよばれる．

2.7 内挿と濾過

i) 函数型の弱定常過程について，パラメーター空間のある区間を除いた部分 T_1 で X の値が知られたとき $X(t)$，$t \notin T_1$，を $M_{T_1}(X) = \{X(s);\ s \in T_1\}$ の張る $M(X)$ の部分空間の元で最良近似することを内挿 (*interpolation*) 又は補間という．予測の場合と同様に"最良"は，差の分散（それを内挿誤差という）が最小となる意味にとる．

離散型のパラメーターをもつ $X(n)$ について，$T_1 = \{n;\ n \neq 0\}$ としたとき，すなわち $X(0)$ を $\widetilde{X}_n(0) = \sum_{\substack{k \neq 0 \\ |k| \le n}} a_k^n X(k)$ で近似する場合 Kolmogorov による次の結果がある．

$$\sigma^2 = \lim_{n \to \infty} E\left|X(0) - \sum_{0<|k|\le n} a_k^n X(k)\right|^2$$

が存在して，$X(n)$ の共分散函数を $\Gamma(n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda} d\mu(\lambda)$, $\mu' = \gamma$ とするとき σ^2 は

$$\sigma^2 = \left(\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{\gamma(\lambda)} d\lambda\right)^{-1} \tag{2.38}$$

である。

ii) これも予測の問題そのものではないが，類似の方法で扱われ，内容の上でも関係が深い濾過 (*filter*) の問題について簡単にふれる。これは，通信などで雑音の混った信号から，必要な成分を分離する問題からおこった (Wiener [63], Blanc-Lapierre-Fortet [3]オ8章等参照)．函数型の弱定常過程 $X(t)$ が

$$X(t) = \int e^{it\lambda} dZ(\lambda) = S(t) + N(t)$$

（S は信号に，N は雑音に相当する．）と表わされているとする。ここに $S(t)$ と $N(t)$ は，平均 0 の弱定常過程で互に直交；すなわち任意の t，s に対し $E(S(t) \cdot \overline{N(s)}) = 0$ なるものとし，$X(t)$，$S(t)$，$N(t)$ のスペクトル測度はいずれも絶対連続で，その密度函数をそれぞれ $\gamma_X(\lambda)$，$\gamma_S(\lambda)$，$\gamma_N(\lambda)$ とする．そのとき

$$\gamma_X(\lambda) = \gamma_S(\lambda) + \gamma_N(\lambda) .$$

このとき濾過の問題は $M_t(X)$ の元で $S(t+\tau)$，$\tau > 0$，を最良近似するも

のである。そのような元を $\widetilde{S}(t;\tau)$ とかけば

$$(2.39) \qquad \widetilde{S}(t;\tau) = P_{M_t(X)}\, S(t+\tau)$$

である。そのときの誤差 $E|S(t+\tau)-\widetilde{S}(t;\tau)|^2=\sigma_\tau^2$ （t に無関係）については

$$(2.40) \qquad \sigma_\tau^2 = E|S(t+\tau)|^2 - E|\widetilde{S}(t;\tau)|^2$$

がなりたつ。また $\widetilde{S}(t;\tau)\in M_t(X)\subset M(X)$ だから

$$\widetilde{S}(t;\tau) = \int e^{it\lambda}\,\Phi_\tau(\lambda)\,dZ(\lambda)$$

とかける。従って濾過の問題は 任意の $s\geqq 0$ に対し

$$(2.41) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{is\lambda}\left[e^{i\tau\lambda}\gamma_S(\lambda)-\Phi_\tau(\lambda)\,\gamma_X(\lambda)\right]d\lambda = 0$$

をみたす $L^2(\gamma_X(\lambda)\,d\lambda)$ の元 $\Phi_\tau(\lambda)$ を求めることになる。このような Φ_τ は濾過の <u>spectral characteristic</u> と呼ばれる。

このとき σ_τ^2 は次のように表わされる。

$$(2.40') \qquad \sigma_\tau^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\gamma_S(\lambda)\,d\lambda - \int_{-\infty}^{\infty}|\Phi_\tau(\lambda)|^2\,\gamma_X(\lambda)\,d\lambda\ .$$

問題を少しかえて，すべての $X(t)$, $t\in T$, が知られたとき固定された時点 t での $S(t)$ を近似することを考える。そのときは $\Phi_0(\lambda)$ が具体的にスペクトル測度から定まる。求める $S(t)$ の近似値 $\widetilde{S}(t)$ は

$$(2.42) \qquad \widetilde{S}(t) = P_{M(X)}\,S(t)$$

であり，従って（2.41）の代りに

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{is\lambda}\left[\gamma_S(\lambda)-\Phi_0(\lambda)\,\gamma_X(\lambda)\right]d\lambda = 0\ , \quad -\infty < s < \infty$$

から Φ_0 を求めたらよい。すなわち

$$\Phi_0(\lambda) = \frac{\gamma_S(\lambda)}{\gamma_X(\lambda)} = \frac{\gamma_S(\lambda)}{\gamma_S(\lambda)+\gamma_N(\lambda)}$$

で $\sigma_0^2 = E|S(t)-\widetilde{S}(t)|^2$ は

$$\sigma_0^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\gamma_S(\lambda)\,\gamma_N(\lambda)}{\gamma_S(\lambda)+\gamma_N(\lambda)}\,d\lambda$$

(C1-34)

となる。

[注] $X(t)=S(t)+N(t)$, $S(t)$ と $N(s)$ は直交，とかけても一般には

$$M(X)\neq M(S)\oplus M(N). \qquad ((2.41)参照)$$

なお，スペクトル密度函数が有理函数の場合に詳しい結果が *Yaglom* [74] に述べられている。また，応用も含めて，*Wiener* [63]，*Blanc-Lapierre; Fortet* [3] 参照。

3　線型予測（多次元の場合）

本章では多次元弱定常過程の線型予測について述べる。

3.1　多次元弱定常過程

本章で扱う多次元定常過程は，次のように表わされるような $\mathbb{X}(t)$, $t \in T$, に限る。

$$\mathbb{X}(t) = (X_1(t),\ X_2(t),\ \cdots,\ X_q(t))$$

と表わされて

i）各 $X_i(t)$ は同じ確率空間（Ω, $\mathbb{B}$, P）上で定義された $E(X_i(t)) \equiv 0$ なる函数型の弱定常過程で，t について平均連続

ii）任意の i と j に対し，$X_i(t)$ と $X_j(t)$ とは定常的に関連する．

なる條件をみたす。

今後，本章では，このような $\mathbb{X}(t)$ を単に<u>q 次元弱定常過程</u>と呼ぶことにする。

$\Gamma_{ij}(t, s) = E(X_i(t)\overline{X_j(s)})$ とするとき條件 ii）から $\Gamma_{ij}(t, s)$ は $(t-s)$ のみの函数になる。これを亦 $\Gamma_{ij}(t-s)$ とかく。行列 $\mathbb{\Gamma}(h) = (\Gamma_{ij}(h))$ を<u>共分散行列</u>（covariance matrix）と呼ぶ．

q 次元弱定常過程についての予測の問題は（1次元の）弱定常過程の場合と全く同様に考えられる．すなわち $\{\mathbb{X}(\tau);\ \tau \le t\}$ が知られたとき $\mathbb{X}(t+h)$, $h > 0$, をよりよく近似する問題といえる．誤差についても1次元のときと同様に，適当な Hilbert 空間のノルムで測ることにするが，1次元の場合とくらべてやや事情が複雑になるところがあるので，それについて若干の準備をする．

$$L = \{\mathbb{X} = \mathbb{X}(\omega) = (X_1(\omega),\ X_2(\omega),\ \cdots,\ X_q(\omega))\ ;\ \text{各 } X_j \text{ は } \mathbb{B} \text{ 可測 } P \text{ について2乗可積分}\}$$

とすれば，L は

$$(3.1)\qquad (\!(\mathbb{X},\mathbb{Y})\!) = \sum_{i=1}^{q}\int_{\Omega} X_i(\omega)\overline{Y_i(\omega)}\,dP(\omega) = \sum_i E(X_i\cdot Y_i),$$

$$\mathbb{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_q),\quad \mathbb{Y}=(Y_1,Y_2,\cdots,Y_q).$$

$$\|\mathbb{X}\| = (\!(\mathbb{X},\mathbb{X})\!)^{1/2}.$$

を内積及びノルム，とすることにより *Hilbert* 空間になる。

$\mathbb{X},\mathbb{Y}\in L$ のとき *grammian* を $(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ とかく。すなわち

$$(\mathbb{X},\mathbb{Y}) = \left(\int_{\Omega} X_i(\omega)\overline{Y_j(\omega)}\,dP(\omega)\right),\qquad (q\text{ 次行列})$$

とする．$(\mathbb{X},\mathbb{Y})=0$（0-行列）のとき $\mathbb{X}$ と $\mathbb{Y}$ は直交（*orthogonal*）といい $\mathbb{X}\perp\mathbb{Y}$ とかく。

q 次元弱定常過程 $\mathbb{X}(t)$ があるとき $M_t(\mathbb{X})$, $M(\mathbb{X})$を

(3.2)
$$\begin{cases} M_t(\mathbb{X})(=M_t) = q\text{次行列を係数として}\{\mathbb{X}(s);\ s\le t\}\text{によって張られる}L\text{の closed linear manifold} \\ M(\mathbb{X})(=M) = q\text{次行列を係数として}\ \mathbb{X}(s),\ s\in T,\ \text{によって張られる}L\text{の closed linear manifold}\end{cases}$$

によって定義する。

Lの元 $\mathbb{Y}$ の $M_t(\mathbb{X})$ 或は $M(\mathbb{X})$ 等への射影は第２章と同じく $P_{M_t(\mathbb{X})}\mathbb{Y}$ 或は $P_{M(\mathbb{X})}\mathbb{Y}$ 等で表わす．一般の部分空間 M についても同じ記号 P_M を用いる。

次に $\mathbb{A},\mathbb{B}$ を q 次エルミット行列とするとき，$\mathbb{A}-\mathbb{B}$ が非負エルミット行列ならば

$$\mathbb{A} > \mathbb{B}$$

と定義すれば q 次エルミット行列の集合に半順序がはいる。そして，$\mathbb{Y}$ を L の部分空間Mの任意の元とするとき，任意の $\mathbb{X}\in L$ に対して

$$(\mathbb{X}-P_M\mathbb{X},\ \mathbb{X}-P_M\mathbb{X}) < (\mathbb{X}-\mathbb{Y},\ \mathbb{X}-\mathbb{Y})$$

となる．そのとき

$$\|\mathbb{X}-P_M\mathbb{X}\| \le \|\mathbb{X}-\mathbb{Y}\|$$

である．これによって予測の誤差を測る基準にする。

以上の準備の下にq次元弱定常過程の線型予測の問題を正確に述べることがで

きる．

“ $\mathbb{X}(t+h)$ に対し $M_t(\mathbb{X})$ の元 $\mathbb{X}(t;\,t+h)$ で，任意の $\mathbb{Y}\in M_t(\mathbb{X})$ に対して

$$(3.3)\quad (\mathbb{X}(t+h)-\mathbb{X}(t;t+h),\ \mathbb{X}(t+h)-\mathbb{X}(t;t+h)) < (\mathbb{X}(t+h)-\mathbb{Y},\ \mathbb{X}(t+h)-\mathbb{Y})$$

なるものを求めること” であるといえる。この $\mathbb{X}(t;t+h)$ を $\mathbb{X}(t+h)$ の最良予報量（best predictor）という。そして，上式の左辺を誤差行列（error matrix）といい $\mathbb{G}(t;\,t+h)$ で表わす。

$$(3.4)\qquad \mathbb{G}(t;\,t+h)=\big(\mathbb{X}(t+h)-\mathbb{X}(t;t+h),\ \mathbb{X}(t+h)-\mathbb{X}(t;\,t+h)\big)$$

明らかに（3.3）をみたす $\mathbb{X}(t;\,t+h)$ としては $P_{M_t(\mathbb{X})}\mathbb{X}(t+h)$ をとればよいことになるから $\mathbb{X}(t)$ に対する線型予測の問題は次のように整理できる。弱定常性のため $t=0$ のときを考えれば良く，h を t におきかえると

(1) $P_{M_0(\mathbb{X})}\mathbb{X}(t)=\mathbb{X}(0;t)$ の具体的な形をできるだけ計算し易い方法で求める

(2) 誤差行列 $\mathbb{G}(0;t)\fallingdotseq\mathbb{G}(t)$ を求める

これらの問題に対する解法は一次元の場合（線型予測）と類似であるが，行列が可換でないため複雑さが生ずる．

$\boxed{3.2}$ 多次元弱定常過程の分解

ここで紹介するのは T が離散型の場合のみで主として Wiener 及び Masani [46],[49],[67],[68] に従って述べる．前節の予測の問題（1）の目的のため一次元の場合と同様に Hilbert 空間 $M(\mathbb{X})$ の分解や $X(n)$ の表現を考える．扱う定常過程を $\mathbb{X}(n)$ とかく．$M_n(\mathbb{X})$，$-\infty<n<+\infty$，について，

$$\text{任意の } n \text{ に対し}\quad M_n(\mathbb{X})=\bigcap_n M_n(\mathbb{X})=M_{-\infty}(\mathbb{X})$$

のとき $\mathbb{X}(n)$ を M-決定的（M-deterministic）であるといい，然らざるとき M-非決定的（M-non-deterministic）であるという．後者は定常性により

$$\text{任意の } n \text{ に対し}\quad \mathbb{X}(n)\notin M_{n-1}(\mathbb{X})$$

と同等である．

$\mathbb{X}(n)$ が M-非決定的なとき

$$(3.5) \qquad g_n = \mathbb{X}(n) - P_{M_{n-1}(\mathbb{X})}\mathbb{X}(n)$$

とすれば $g_n \perp \mathbb{X}(n-k)$, $k=1,2,\cdots$, で g_nは 0 ベクトルでない。また

$$(g_m, g_n) = \delta_{m,n}(g_0, g_0)$$

である．このとき $(g_n, g_n) = (\mathbb{X}(n), g_n)$ でそれは誤差行列 $\mathbb{G}(1)$ に等しい。これを lag 1 の誤差行列という。M-非決定的なら $\mathbb{G}(1)$ は 0 行列でない。今後 $\mathbb{G}(1)$ を単に $\mathbb{G}$ とかく。

$\mathbb{G}$ の階数を ρ とする $\rho = q$ のとき $\mathbb{X}(n)$ は *full rank* であるという。

$M_{m,n}(g)$ を g_k, $k=m+1, m+2, \cdots, n$, の張る L の部分空間とするとき $M_m(\mathbb{X})$ の任意の元と $M_{m,n}(g)$ の任意の元とは直交する．記号的に

$$(3.6) \qquad M_m(\mathbb{X}) \perp M_{m,n}(g)$$

とかく。そして，次式がなりたつ。

$$(3.7) \qquad M_n = M_m \oplus M_{m,n}(g) \qquad (\text{直和}).$$

$\mathbb{X}(n)$ についても一次元の場合の Wold 分解に相当する事実がなりたつ．いま $\mathbb{X}(n)$ が M-非決定的で $M_n(g)$ を g_k, $k \leq n$, の張る L の部分空間とするとき

$$(3.8) \qquad \mathbb{U}(n) = P_{M_n(g)}\mathbb{X}(n), \qquad \mathbb{V}(n) = P_{M_{-\infty}(\mathbb{X})}\mathbb{X}(n)$$

とすれば

$$(3.9) \qquad \mathbb{X}(n) = \mathbb{U}(n) + \mathbb{V}(n), \qquad \mathbb{U}(n) \perp \mathbb{V}(n)$$

$$(3.10) \qquad \mathbb{U}(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} \mathbb{A}_{n-k}\, g_k$$

と表わされる．ここに $\mathbb{A}_k$ は

$$\mathbb{A}_k\mathbb{G} = (\mathbb{U}(0), g_{-k}) = (\mathbb{X}(0), g_{-k})$$

$$\mathbb{A}_0\mathbb{G} = \mathbb{G} = \mathbb{G}\mathbb{A}_0^{*}$$

をみたす q 次行列である。(3.10) を，或は $(\mathbb{A}_{n-k}, \mathcal{g}_k)$ を $\mathbb{U}(n)$ の<u>移動平均表現</u>という。さらに

$$M_n(\mathbb{V}) = M_{-\infty}(\mathbb{X}) , \tag{3.11}$$

すなわち $\mathbb{V}(n)$ は M-決定的である。特に $\mathbb{X}(n)$ が full rank であるときは $\sqrt{\mathbb{G}^{-1}}\ \mathcal{g}_n = \mathbb{h}_n$ とすることにより，(3.10) の代りに

$$\mathbb{U}(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} \mathbb{C}_{n-k}\, \mathbb{h}_k , \quad \mathbb{C}_0 = \sqrt{\mathbb{G}} , \quad \mathbb{C}_k = (\mathbb{X}(0), \mathbb{h}_{-k}) \tag{3.10'}$$

とすることができる。上のような分解を<u>Wold-Zasuhin 分解</u>という。

次に前節で定義した共分散行列 $\Gamma(n)$ のスペクトル分解をし，スペクトル測度が，どのように $\mathbb{X}(n)$ の線型的構造に関係するかをみよう。

$$\Gamma_{i,j}(n) = \int_0^{2\pi} e^{-in\lambda}\, d\mu_{ij}(\lambda)$$

とかける。$\mu(\lambda) = (\mu_{ij}(\lambda))$ (q 次行列) を $\mathbb{X}(n)$ の<u>スペクトル行列</u>という。

Wold-Zasuhin 分解に対応してスペクトル行列も次のように分解される。μ_u，μ_v をそれぞれ $\mathbb{U}(n)$，$\mathbb{V}(n)$ に対応するスペクトル行列とすれば

$$\mu = \mu_u + \mu_v \tag{3.12}$$

(3.13) $\begin{cases} \mu_u \text{は } q^2 \text{ 次元 Lebesgue 測度に関し絶対連続で密度行列を} \\ \mu'_u \text{ とするとき} \\ \qquad \mu'_u(e^{i\theta}) = \Phi(e^{i\theta}) \cdot \Phi^*(e^{i\theta}) , \end{cases}$

$$\text{但し}\quad \Phi(e^{i\theta}) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{A}_k \sqrt{\mathbb{G}}\, e^{ik\theta} .$$

がなりたつ。この μ' は<u>スペクトル密度行列</u>とよばれる。

さらに $\mathbb{X}(n)$ が full rank であれば次の対応がある。

$$\mu = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3$$

を Lebesgue 分解 ($\boxed{2.2}$ 参照，μ_1 は絶対連続，μ_2 は純粋不連続，μ_3 は特異) とするとき

(3.14) $\quad \mu_u = \mu_1 \;; \qquad \mu_v = \mu_2 + \mu_3 \;.$

若し，$X(n)$について

(3.15) $\quad M_{-\infty}(X) = \{0\}$

がなりたつならば $X(n)$ は M-純非決定的（M-purely non-deterministic又は regular）というが，これは次の各条件と同等である。

(a) $X(n)$は移動平均表現をもつ。すなわち $(\varphi_m, \varphi_n) = \delta_{m,n}(\varphi_0, \varphi_0)$ なる $\varphi_n \in M(X)$ が存在して

$$X(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} A_{n-k}\, \varphi_k$$

とかける。

(b) $\quad P_{M_{-n}(X)}\, X(0) \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty)$.

$X(n)$ が M-純非決定的であることと，full rank であることは，スペクトル行列により次のように特徴づけられる。μ_1 の密度行列 $(=\mu_u')$ を $\gamma(\lambda)$ とかくとき，$X(n)$ が full rank であることと

(3.16) $\quad \int_0^{2\pi} \left| \log \Delta \gamma(e^{i\theta}) \right| d\theta < \infty \;, \qquad \Delta\gamma$ は γ の行列式

とは同等である。この條件がみたされれば

(3.17)' $\quad \Delta G = \exp\left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \Delta \gamma(e^{i\theta})\, d\theta \right]$

となる。

また $X(n)$が M-純非決定的であることと，(a) とは同等であるがそれは (3.13) と同等にもなる。

さらに $X(n)$が full rank でかつ M-純非決定的であることと

$\mu = \mu_1$ かつ (3.16) がなりたつ

ことと同等である。

この最後の主張に，Wold-Zasuhin 分解を考慮すれば，次の結果をうる。すなわち $\gamma(e^{i\theta})$ を $[0, 2\pi]$ 上の q 次非負エルミット行列で $\gamma \in \mathbb{L}^1$ (γ の各元が $[0, 2\pi]$ 上の L^p に属する函数であるとき $\gamma \in \mathbb{L}^p$ とかく) かつ

$\log \Delta \mathfrak{f} \in L^1$ であることと，$\mathbb{L}^2$ に属する Φ が存在して

$$\int_0^{2\pi} \Phi(e^{i\theta}) e^{in\theta} d\theta = 0 \qquad n = -1, -2, \cdots ,$$

$$\mathfrak{f}(e^{i\theta}) = \Phi(e^{i\theta}) \Phi^*(e^{i\theta}), \quad a.e.$$

となることと同等である。$\mathfrak{f}$ をスペクトル密度行列とするとき上の Φ は generating function とよばれる。

前に M-決定性を定義したが，それよりも弱く，過去と未来の両方からみて決定的でないものとして minimal なる概念を導入する。$M'_n(\mathbb{X})$ を $\{\mathbb{X}(k);\ k \neq n\}$ の張る $M(\mathbb{X})$ の部分空間とする。このときある n が存在して（従ってすべての n について）

(3.18) $\qquad \mathbb{X}(n) \notin M'_n(\mathbb{X})$

をみたすとき $\mathbb{X}(n)$ は minimal であるという。

若し $\mathfrak{f}$ が逆行列をもち $\mathfrak{f}^{-1} \in \mathbb{L}^1$ であるための必要十分条件は $\varphi_n = \mathbb{X}(n) - P_{M'_n(\mathbb{X})} \mathbb{X}(n)$ とするとき $\Delta(\varphi_n, \varphi_n) > 0$ なることであり，そのとき $\mathbb{X}(n)$ は minimal になる。さらに $\mathfrak{f}^{-1}$ は q 次元弱定常過 $(\varphi_n, \varphi_n)^{-1} \varphi_n$ のスペクトル密度行列となり

(3.19) $\qquad (\varphi_0, \varphi_0) = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{ \mathfrak{f}(e^{i\theta}) \}^{-1} d\theta \right)^{-1}$

となる。

3.3 最良予報量の構成

前節の準備の下に最良予報量の構成を考える。

$\mathbb{X}(n)$ を M-純非決定的かつ full rank とする。μ を $\mathbb{X}(n)$ のスペクトル行列とする。

$$\mathbb{L}^2_\mu = \{ \Psi ;\ \Psi \mu' \Psi^* \in \mathbb{L}^1 \}$$

とすれば $\mathbb{L}^2_\mu$ は内積 $(\!(\ ,\ )\!)_\mu$ を

$$(\!(\Phi, \Psi)\!)_\mu = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tau(\Phi(\theta) \mu'(\theta) \Psi^*(\theta))\, d\theta, \qquad (\tau \text{ は trace を表わす}),$$

として Hilbert 空間になる。

$M(\mathbb{X})$ と $\mathbb{L}^2_\mu$ とは次の対応で同型になる。

$$S: \quad \mathbb{X}(k) \longleftrightarrow e^{-ik\theta}\,\mathbb{I} \qquad (\mathbb{I}\text{は単位行列})$$

Sは内積をかえないから$\mathbb{L}^2_\mu$と$M(\mathbb{X})$との同型対応に拡張できる。

$\{\mathbb{h}_n\}$ を (3.10′)で用いたもの, Φを generating function とする。$\mathbb{h}_n$と

$$\mathbb{X}(0;n) = P_{M_0(\mathbb{X})}\,\mathbb{X}(n)$$

はSによって次のように対応がつけられる。

$$\mathbb{h}_n \longleftrightarrow e^{-in\theta}\,\Phi^{-1}$$

$$(3.20) \qquad \mathbb{X}(0;n) \longleftrightarrow [e^{-in\theta}\Phi(e^{i\theta})]_{0+}\,\Phi^{-1}(e^{i\theta})$$

(但し, 記号 $[\Psi(e^{i\theta})]_{0+}$ はΨのフーリエ展開を $\sum_{-\infty}^{\infty}\mathbb{A}_n e^{in\theta}$ としたとき $\sum_{0}^{\infty}\mathbb{A}_n e^{in\theta}$ を表わす. $[\ \ ]_+$ は $n=0$ も省く)。

かくして $\mathbb{X}(0;n)$を求めることは(3.20)により $\mathbb{L}^2_\mu$においてΦを知ることになり, 併せて誤差行列$\mathbb{G}$を知れば予測の問題が知られることになる。

M-純非決定的かつ full rank の定常過程 $\mathbb{X}(n)$のスペクトル行列の密度行列$\mathbb{f}$が条件

$$(A) \qquad \begin{cases} \mathbb{f}^{-1} \in \mathbb{L}^1 \\ \mathbb{f}(e^{i\theta}) \text{ の最大, 最小個有値をそれぞれ } \mu(e^{i\theta}),\ \lambda(e^{i\theta}) \text{ とするとき } \dfrac{\mu}{\lambda} \in L^1 \end{cases}$$

をみたすとき, $\mathbb{f}$は次のように分解できる。

$$r_1(e^{i\theta}) = \frac{1}{2}\left(\lambda(e^{i\theta}) + \mu(e^{i\theta})\right), \quad \mathbb{M}(e^{i\theta}) = \frac{1}{r_1(e^{i\theta})}\,\mathbb{f}(e^{i\theta}) - \mathbb{I}$$

とおくとき

$$(a) \qquad \mathbb{f} = r_1(\mathbb{I} + \mathbb{M}) \qquad a.e.$$

$$(b) \qquad \sup_{\mathbb{X}\neq 0}\frac{|\mathbb{M}(e^{i\theta})\mathbb{X}|}{|\mathbb{X}|} \leq 1 \quad \text{かつ} \quad \sup_{\mathbb{X}\neq 0}\frac{|\mathbb{M}(e^{i\theta})\mathbb{X}|}{|\mathbb{X}|} < 1 \qquad a.e.$$

（$|\mathbb{X}|$ は $\sqrt{\sum_{i=1}^{q}|X_i|^2}$ すなわち Euclid の距離）

(c)　$\mathbb{I}+\mathbb{M}$,　$(\mathbb{I}+\mathbb{M})^{-1} \in \mathbb{L}^1$.

(d)　r_1 ,　$r_1^{-1} \in L^1$.

これにより前節の末尾の結果から $\mathbb{I}+\mathbb{M}$ は M-純非決定的，full rank，minimal な定常過程のスペクトル密度行列となる。また (d) より r_1 は 1 次元 M-純非決定的，minimal な定常過程のスペクトル密度函数になる。

條件 (A) は，例えば $\mathfrak{F}$，$\mathfrak{F}^{-1} \in \mathbb{L}^2$ のときは満たされる。

上の $\mathfrak{F}$ の分解に対応して，$\mathfrak{F}$，$\mathbb{I}+\mathbb{M}$，r_1 の generating function をそれぞれ Φ，$\widetilde{\Phi}$，Φ_1 とし，lag 1 の誤差行列を $\mathbb{G}$，$\widetilde{\mathbb{G}}$，G（G は正数）とするとき

i)　$\Phi = \Phi_1 \widetilde{\Phi}$

ii)　$\mathbb{G} \doteq G \cdot \widetilde{\mathbb{G}}$.

となる．i) から $\mathbb{X}(n)$ の予報量 $\mathbb{X}(0;n)$ を求めることは，本質的には $\widetilde{\Phi}$ を求めることになることがわかる。その $\widetilde{\Phi}$ は，

$$\Psi = \mathbb{I}-(\mathbb{M}(e^{i\theta}))_+ + \{\mathbb{M}(e^{i\theta})_+ \mathbb{M}(e^{i\theta})\}_+ - [\{\mathbb{M}(e^{i\theta})_+ \mathbb{M}(e^{i\theta})\}_+ \mathbb{M}(e^{i\theta})]_+ + \cdots$$

とするとき

$$\widetilde{\mathbb{G}} = \Psi(\mathbb{I}+\mathbb{M})\Psi^*$$

$$\widetilde{\Phi} = \Psi^{-1}\sqrt{\widetilde{\mathbb{G}}} \ .$$

かくして $\widetilde{\Phi}$ が求まった。同時に誤差行列も得られたことになる。

[注] 多次元定常過程の線型予測は，この他多くの人々が取扱っている．H. Cramér [7]，[8] では連続パラメーターの場合に及んでいるが，そのときは $E(t) = P_{M_t(\mathbb{X})}$ のスペクトル重複度が問題になる。又文献 [21]，[58]，[54]，[55] 等々はこの問題に関した論文である。

[4] 非線型予測

[4.1] 非線型予測の問題

これまで [2] 及び [3] において取扱った最良予報量の求め方は何れも Hilbert 空間 M において，ウニタリ作用素 U_t のスペクトル分解を用いたものである。

しかし [1] で述べたように，$X(\varphi)$ の最良予報量 $X(t;\varphi)$ は本来 L_t への射影として定められるのが望ましく，これまでのものは，正規過程（→ [2.6] ii)）とか，スペクトル測度が特殊なもの（後出）に対する予測を考えるには十分であるけれども，一般の定常過程に対しては，予報量を求める範囲を狭く M_t に制限した予測であるため，これよりよい予報量が考えられる．M における場合は，スペクトル重複度が 1 であるという事情から，計算の方法も簡単であったが，L における場合即ち非線型予測については，線型予測のようなまとまった体系はできていない。

後に述べるように，個々の場合にそれぞれの方法で予報量の求め方が考えられている。本節では，線型予測の方法の類似として，考えられる非線型予測の求め方としてどのような方向が考えられるかをみよう．

$T=(-\infty,\infty)$ とする定常過程 $(\mathcal{S}',\mathcal{B},P)$ に対して Hilbert 空間 L および保測変換 $\{T_t\}$ から，(2.6) のようにしてウニタリ作用素の 1 助変数群 $\{U_t\}$ が定まり

$$U_t=\int e^{it\lambda}\,d\widetilde{E}(\lambda)$$

とスペクトル分解される．そして L^* は Hellinger-Hahn-Stone の定理によって次のように分解される．本章でも全体を通じての仮定 (1.2)，(1.3) をおく．

定理 5　$\{\Lambda_n\}$ と ρ とが存在して

$$\text{(4.1)}\quad\begin{cases}\text{i)}\ T\supset\Lambda_n\supset\Lambda_{n+1}, & n=1,2,\cdots\\ \qquad\rho\ \text{は}\ \Lambda_1\ \text{上の測度} & \\ \text{ii)}\ L\simeq\sum_{n=1}^{\infty}\oplus L^2(\Lambda_n,\rho) & (\simeq\text{同型})\end{cases}$$

この同型対応は

$$L \in F \longleftrightarrow f = \{f_n(\Lambda)\}, \quad f_n \in L^2(\Lambda_n, \rho).$$

iii) $U_t F \longleftrightarrow \{e^{it\lambda} f_n(\lambda)\}$.

$\tilde{m}(\lambda)$ を $\lambda \in \Lambda_n$ なる Λ_n の個数とするとき $\{\rho, \tilde{m}(\lambda)\}$ を $\{U_t\}$ のスペクトル測度と呼ぶ．特に $\tilde{m}(\lambda) \equiv \infty$ で ρ が Lebesgue 測度のとき，それは σ-Lebesgue であるという．

上の分解は L に直交彷徨測度の系 $\{Z_n(\lambda)\}$ が存在し

$$(Z_n(\Lambda^{(1)}), \quad Z_m(\Lambda^2)) = 0, \quad n \neq m,$$

であり，かつ ii) に対して

(4.2) $\quad L^* \ni F$ なら $\quad F = \sum_n \int_{\Lambda_n} f_n(\lambda)\, dZ_n(\lambda) \qquad f_n \in L^2(\Lambda_n, \rho)$

$$U_t F = \sum_n \int_{\Lambda_n} e^{it\lambda} f_n(\lambda)\, dZ_n(\lambda)$$

(4.3) $\quad L^* = \sum \oplus M(Z_n)$

となる（$\boxed{2}$ (2.8)〜(2.10) と比較）．

線型予測の場合に M-純非決定的なら，移動平均表現を用いると具体的に予報量が構成されたように，この場合も表現による方法が考えられる．そのため

定義 3′ $\quad L^*_{-\infty} = \bigcap_t L^*_t$ とかくと

$$L^*_{-\infty} = \{0\}$$

のとき $(\mathcal{S}', \mathbb{B}, P)$ は L-純非決定的（L-purely non-deterministic），任意の t に対して

$$L^*_t = \bigcap_t L^*_t$$

のとき L-決定的（L-deterministic）という．

定義 3′ の L-純非決定的の條件がみたされるとき L^* の元の L^*_t への射影

$$E(t) = P_{L^*_t}$$

は単位の分解になる．従って定理 5 と同様に Hellinger-Hahn の定理により直交彷徨測度の系 $\{\xi_n\}$ が存在して

(4.4) $\quad L^* = \sum \oplus M(\xi_n)$

(C1-46)

$$(4.5)\qquad M(\xi_n) \simeq L^2(\Delta_n, \rho), \quad T \supset \Delta_n \supset \Delta_{n+1}$$

$$L^* \ni F, \quad F = \sum_n \int g_n(u)\, d\xi_n(u), \quad g_n \in L^2(\Delta_n, \rho),$$

ならば

$$(4.6)\qquad E(t)F = \sum_n \int^t g_n(u)\, d\xi_n(u)$$

となる．特に $F = X(\varphi)$ のとき，(4.6)は（非線型）最良予報量を与えている．

一般に定常過程（$\mathcal{S}'$, $\mathcal{B}$, P）或は特性汎函数が与えられたとき，それからそのスペクトル測度が定まる．それを用いて L-純非決定的な条件及び(4.4)の分解を求め，$F = X(\varphi)$ として(4.6)により，予報量を求めるといった段階が線型予測の理論の拡張の一つの方法と考えられる．

4.2 予報量の求め方の例

前節にも述べたように，非線型予報量を求める系統的な結果として述べることはできないので，これまでに考えられている二，三の例について述べる．

i) まず，白色雑音 $\dot{B}$ によって真の標準表現（→定常過程及び西尾[51]，[52]）が与えられている場合を考える．$X(\varphi)$ が重複ウィーナー積分（→ Brown運動 ③ ）によって

$$(4.7)\qquad X(\varphi) = \sum_n \int \cdots \int (f_n * \varphi)(u_1, \cdots, u_n)\, dB(u_1) \cdots dB(u_n)$$

と表わされ　Xの推移変換が $\dot{B}$ のそれによって導かれて

$$(4.8)\qquad L_t^*(X) = L_t^*(\dot{B})$$

となっている場合を考える．(4.8)からXは L-純非決定的である．このとき X及び $\dot{B}$ に対応して　前節のように定義される　$L^*(X) = L^*(\dot{B})$ における両者の射影作用素 $E(t)$ は一致する．従って最良予報量 $X(t;\varphi)$ は

$$(4.9)\qquad E(t)X(\varphi) = \sum_n \int^t \cdots \int (f_n * \varphi)(u_1, \cdots, u_n)\, dB(u_1) \cdots dB(u_n)$$

によって求められる．

定常過程のどのようなクラスが(4.7)，(4.8)をみたすか，すなわち，$\dot{B}$による真の標準表現が存在するか，また，そのとき(4.9)を具体的に求めるため X

から $\dot{B}$ を構成する方法，さらに f_n を求める方法等は特殊な場合にしか求まっていない。（Nisio[51], 西尾[52]）.

この方法について二，三の注意をつけ加える。

白色雑音による真の標準表現が存在する場合はそれを利用して上のように予報量が求まった。予報量を求める目的のためのみならば，もう少し弱い條件でもよい。ここではスペクトル測度が σ-Lebesgue であるような定常過程 $X(\varphi)$ のみを扱うことにする。そうすれば dZ_n も $d\xi_n$ も homogeneous にできる。そのとき L-純非決定的という仮定の下で L^* における二つの射影 $\widetilde{E}(\lambda)$, $E(t)$ が定義され２種類の分解が作られるが，L^* は (4.3) と (4.4) における $M(Z_n)$ と $M(\xi_n)$ について

$$(4.10) \qquad M(Z_n) = M(\xi_n)$$

となるように分解することができる。

そのとき (4.10) から

$$X(\varphi) = \sum X_n(\varphi), \qquad X_n(\varphi) \in M(Z_n)$$

とかけば，上の議論と [1] §4 を参照し g_n が存在して

$$(4.11) \qquad X_n(\varphi) = \int (g_n * \varphi)(s)\, d\xi_n(s), \quad X(t,\varphi) = \sum_n \int^t (g_n * \varphi)(s)\, d\xi_n(s)$$

となる。

一般には

$$(4.12) \qquad E\left|X(\varphi) - P_{L_t^*} X(\varphi)\right|^2 \leqq E\left|X(\varphi) - P_{M_t} X(\varphi)\right|^2$$

である。しかし，正規過程のときのように，これが等号になる場合がある。等号になるための必要條件としては (4.12) の $X_n(\varphi)$ がすべて同じ共分散汎函数をもつことがあげられる。また，函数型の定常過程で白色雑音による標準表現が存在し，

$$X(t) = \sum \alpha^n \int^t \int^{t_1} \int^{t_{n-1}} g(t-t_1) g(t_1 - t_2) \cdots g(t_{n-1} - t_n)\, dB(t_1) \cdots dB(t_n)$$

とかけている場合 (4.12) の等号が成立つ。但し，g は線型表現の場合の標準核とする。

ii) 離散型のパラメーターをもつ 定常過程 $X(n)$ については, $X(n)$ の多項式を用いた非線型予報量の構成が Masani-Wiener [48] で扱われている.

Pについて次の仮定をおく. 任意の q に対し

(4.13) $(X(n_1), X(n_2), \cdots, X(n_q))$ の分布の台は R^q のコンパクトな区間 J^q に含まれる

このとき $X(\nu)$, $\nu \leqq 0$, の多項式 $X(\nu_1)^{k_1} \cdot X(\nu_2)^{k_2} \cdot \cdots \cdot X(\nu_r)^{k_r}$, $r = 1, 2, \cdots$, $k_i = 0, 1, 2, \cdots$, $\nu_i \leqq 0$, の全体の張る closed linear manifold は $L_0(X)$ と一致する。

従って

(4.14) $X(0; n) = l.i.m.\ \ Q_n(X(0), X(-1), \cdots, X(-m_n))$, $m_n \geq 0$.

Q_n は多項式, 係数は $\{X(n)\}$ の同時分布から計算される。

iii) $X(t)$ が平均 0, 分散有限な古典的拡散過程で, 生成作用素が

$$\mathfrak{G} = a(x) \frac{d^2}{dx^2} + b(x) \frac{d}{dx}$$

の場合は Balakrishnan [2] に扱われている.

状態空間は $[\alpha, \beta]$ ($(-\infty, \infty)$ のときも許す) とする. マルコフ性により

$$E(X(t)/\mathbb{B}_0) = E(X(t)/X(0))$$

だから

(4.15) $u(t, x) = E(X(t)/X(0) = x)$

とすると $u(t, x)$ の具体形をきめることが, $u(t, X(0)) = X(0; t)$ として, 予報量の構成法をきめることになる. 従って

(4.16) $$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} u = \mathfrak{G} u \\ u(0, x) = x \end{cases}$$

の解が $u(t, x)$ に他ならない。但し

(a) $[\alpha, \beta]$ が無限区間であれば $u(0, x) = x$ が有界でない

(b) (4.16) の解が一意的になるか

等に注意が必要である。

4.3 種々の注意

最後に，予測の問題で当然述べられなければならないことでこれまでに触れ得なかった事柄を列記する。

i）第一は定常過程がエルゴード的（*ergodic*）であるときにおこる注意である。Wiener [61]，[63] 等或は Masani-Wiener [49] 等に述べてあるように，一つの見本過程を観測して，それから共分散函数或は高次のモーメント等予測に必要な諸量を求めて最良予報量を構成することが望ましい。詳細は省略する。

ii）次の注意は *Hilbert* 空間論的方法で扱えない場合についてである。例えば，線型過程(*)とよばれるものの中で，時間的に一様な *Lévy* 過程によって

$$X(t,\omega)=\int_{-\infty}^{t} C(t-u)\,dZ(u,\omega)$$

と表わされる定常過程について考えると（右辺の積分の定義は [28] 参照），$X(t)$ の分散が存在し $C(t-u)$ が標準核であれば線型予測の方法で最良予報量が求まる。しかし，$C(t-u)$ が標準核でないときも，正規過程でないとき

$$L_t(X) = L_t(Z)$$

となりうることがある。そのときは C が有理函数のフーリエ変換になっている場合で $X(t,\omega)$ の見本過程に適当な線型的な変換を施して（非線型）予報量が求まる（[24]，[41] 参照）。

iii）この他，パラメーター空間 T が多次元（離散型）の場合の弱定常過程について Helson-Lowdenslager [22] に予測（内挿）の問題が取扱われている。また $T=R^n$ のときにも白色雑音についての研究（Lévy 他，[26] §7 参照）或はパラメーターを多次元にしたときの定常過程と考えられる等方向乱流（Ito [33]）或は Yaglom [70] 等の研究があるし，予測の問題については Chiang Tse-Pei [4] に詳しい。

(*) 厳密な定義は省略する。

(C1-50)

又，Furstenberg [12] では，非線型予測に対する基本的な考え方は條件付確率分布であるとする観点に立っているように思われる([48] §8 による)。

あ と が き

このノート作成に際し

　　2 は 丸 山 儀 四 郎

　　3 は 西 尾 真 喜 子

両氏に内容をまとめた資料を頂き，他の各章は

　　定常過程資料　No. 1, 2, 3, 5

を参考にし飛田がまとめた。又，これに載せるべき内容の検討については，確率論セミナー定常過程グループの会合で協議されたものを基準にしたが，執筆の都合上や執筆者の準備不足もあって，1及び2では若干変更した部分もある．この点グループの方々のお許しを頂きたい。

また，池田信行，西尾真喜子両氏にはいろいろ相談に応じて頂いた。最終原稿の作成に当って瀬口常民氏に協力して頂いたことを付記する。

文　　　献

[1] Baragangadharan, K. *The prediction theory of stationary random distributions*. Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, A. 33 (Math.) (1960), 243-256.

[2] Balakrishnan, A.V. *Prediction theory for Markov processes*. Pacific J. Math. 11(1961), 1171-1182.

[3] Blanc-Lapierre, A.; Fortet, R. *Théorie des fonctions aléatoires*. Masson & Cie, Paris. 1953.

[4] Chiang Tse-Pei. *Extrapolation of a homogeneous random field with continuous parameter*. Teor. Veroyatnost. i Primenen. 2(1957), 60-91.

[5] Cramér, H. *Remarques sur le problème de prédiction pour certaines classes de processus stochastiques*. Centre Nat. Rech. Sci. 87(1959). Le calcul des probabilités et ses applications. 103-112.

[6] ―――――. *On the linear prediction problem for certain stochastic processes*. Ark. Mat. 4(1960), 45-53.

[7] ―――――. *On the structure of purely non-deterministic stochastic processes*. Ark. Mat. 4(1961), 249-266.

[8] ―――――. *On some classes of nonstationary stochastic processes*. Proc. 4th Berkeley Symp. (1961) Vol. II, 57-78.

[9] Doob, J.L. *The elementary Gaussian processes*. Ann. Math. Statist. 15(1944), 229-282.

[10] ―――――. *Stochastic processes*. Wiley, New York. 1952.

[11] ―――――. *Time series and harmonic analysis*. Proc. 1st Berkeley Symp. (1949), 303-344.

[12] Furstenberg, H. *Stationary processes and prediction theory*. Princeton Univ. Press. 1960.

[13] Gelfand, I.M. *Generalized stochastic process*. Dokl. Akad. Nauk, SSSR. 100(1955), 853-856.

[14] Гельфанд, И. М.; Виленкин, Н. Я. *Обобщенные функции*. Вып. 4. 1961.

[15] Gelfand, I. M.; Jaglom, A. M. *Über die Berechnung der Menge an Information über eine zufällige Funktion, die in einer anderen zufälligen Funktion enthalten ist*. Arbeiten zur Informationstheorie II. (1958), 7-56.

[16] Gladishev, E. G. *On multidimensional stationary random processes*. Teor. Veroyatnost. i Primenen. 3 (1958), 458-462.

[17] Grenander, U. *Some non-linear problems in probability theory*. H. Cramér Volume (Probability and Statistics). Wiley, New-York. (1959), 108-129.

[18] ――――――.; Rosenblatt, M. *Statistical analysis of stationary time series*. Wiley, New York. 1957.

[19] ――――――.; Szegö, G. *Toeplitz forms and their applications*. Univ. Calif. Press. 1958.

[20] Hanner, O. *Deterministic and non-deterministic stationary random processes*. Ark. Mat. 2 (1950), 161-177.

[21] Helson, N.; Lawdenslager, D. *Vector valued processes*. Proc. 4th Berkeley Symp. (1961) Vol. II, 203-212.

[22] ――――.; ――――――. *Prediction theory and Fourier series in several variables*. Acta Math. 99 (1958), 165-202.

[23] 飛田武幸. *Gaussian process* の表現とその応用. Semi. on Prob. Vol. 7 (1961).

[24] Hida, T.; Ikeda, N. *Note on linear processes*. J. Math. Kyoto Univ. 1 (1961), 75-86.

[25] 池田; 飛田; 吉沢. *Flow* の理論 (上). Semi. on Prob. Vol. 12 (1962).

[26] 池田; 国田; 野本; 飛田; 渡辺 (毅). *Paul Lévy* の業績. Semi. on Prob. Vol. 9 (1961).

[27] Itô, K. *Multiple Wiener integral*. J. Math. Soc. Japan. 3 (1951), 157-169.

[28] ――――. *Stochastic differential equations*. Mem. Amer.

Math. Soc. 4 (1951).

[29] 伊藤清. 確率論. 岩波, 東京. 1953.

[30] Itô, K. *Stationary random distributions*. Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, A. 28 (Math.) (1953), 209-223.

[31] ———. *Spectral type of the shift transformation of differential processes with stationary increments*. Trans. Amer. Math. Soc. 81 (1956), 253-263.

[32] 伊藤清. 確率過程 *I*. 岩波講座 現代応用数学. 1957.

[33] Itô, K. *Isotropic random current*. Proc. 3rd Berkeley Symp. (1956) Vol. II, 125-132.

[34] Karhunen, K. *Zur Interpolation von stationären zufälliger Funktionen*. Ann. Acad. Sci. Fennicae, A I. 142 (1952).

[35] ———. *Über die Struktur stationärer zufälliger Funktionen*. Ark. Mat. 1 (1950), 141-160.

[36] Kolmogorov, A. N. *Stationary sequences in Hilbert space*. Byulleten' Moskov, Gos. Univ. (Mat.) 2 (1941), No. 6. 1-40.

[37] ———. *Interpolation and extrapolation of stationary random sequences*. Izv. Akad. Nauk SSSR. 5 (1941), 3-14.

[38] Lévy, P. *Théorie de l'additions des variables aléatoires*. Gauthier-Villars, Paris. 1937.

[39] ———. *Random functions: General theory with special refference to Laplacian random functions*. Univ. Calif. Publ. Statist. 1 (1953), 331-390.

[40] ———. *A special problem of Brownian motion, and a general theory of Gaussian random functions*. Proc. 3rd Berkeley Symp. (1956) Vol. II, 133-175.

[41] ———. *Fonctions aléatoires à corrélation linéaire*. Illinois J. Math. 1 (1957), 217-258.

[42] ———. *Esquisse d'une théorie de la multiplication des variables aléatoires*. Ann. Sci. Ecole Norm. Super. 76 (1959), 59-82.

[43] Maruyama, G. *The harmonic analysis of stationary stochastic processes.* Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. A. 4 (1949), 45-106.

[44] Masani, P. *Sur la fonction génératrice d'une processus stochastique vectoriel.* C.R. Acad. Sci. Paris. 249 (1959), 360-362.

[45] ————. *Cramér's theorem on monotone matrix-valued functions and the Wold decomposition.* H. Cramér Volume (Probability and Statistics). Wiley, New York. (1959), 175-189.

[46] ————. *The prediction theory of multivariate stochastic processes, III.* Acta Math. 104 (1960), 142-162.

[47] ————. *Shift invariant spaces and prediction theory.* Acta Math. 107 (1962), 275-290.

[48] ————.; Wiener, N. *Non-linear prediction.* H. Cramér Volume (Probability and Statistics). Wiley, New York. (1959), 190-212.

[49] Masani, P.; Wiener, N. *On bivariate stationary processes and the factorization of matrix-valued functions.* Teor. Veroyatnost. i Primenen. 4 (1959), 322-331.

[50] Nisio, M. *On polynomial approximation for strictly stationary processes.* J. Math. Soc. Japan. 12 (1960), 207-226.

[51] ————. *Remark on the canonical representation of strictly stationary processes.* J. Math. Kyoto Univ. 1 (1961), 129 146.

[52] 西尾真喜子. *Wiener* 積分と強定常過程の表現. Semi. on Prob. Vol. 10 (1961).

[53] Paley, R.E.A.C.; Wiener, N. *Fourier transforms in the complex domain.* Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. Vol. 19 (1934).

[54] Rosenblatt, M. *A multi-dimensional prediction problem.* Ark. Mat. 3 (1954-8), 407-424.

[55] ————. *The multidimensional prediction problem.* Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 43 (1957), 898-992.

[56] ————. *Stationary processes as shifts of functi-*

ons of independent random variables. J. Math. Mech. 8(1959), 665-681.

[57] Rosenblatt, M. *Stationary Markov chains and independent random variables*. J. Math. Mech. 9(1960), 945-949.

[58] Rozanov, Yu. A. *The spectral theory of multi-dimensional stationary stochastic processes with discrete time*. Uspehi Mat. Nauk. 13(1958), 93-142.

[59] ————. *Spectral properties of multivariate stationary processes and boundary properties of analytic matrices*. Teor. Veroyatnost. i Primenen. 5(1960), 399-414.

[60] ————. *On the extrapolation of random distribution*. Teor. Veroyatnost. i Primenen. 4(1959), 465-471.

[61] Wiener, N. *Generalized harmonic analysis*. Acta Math. 55(1930), 117-258.

[62] ————. *The homogeneous chaos*. Amer. J. Math. 60(1938), 897-936.

[63] ————. *Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series*. The Technology Press of M.I.T. and Wiley, New York. 1949.

[64] ————. *Comprehensive view of prediction theory*. Proc. International Congr. Math. (1950) Vol. II, 308-321.

[65] ————. *Nonlinear problems in random theory*. The Technology Press of M.I.T. and Wiley, New York. 1958.

[66] ————. *Nonlinear prediction and dynamics*. Proc. 3rd Berkeley Symp. (1956) Vol. III, 247-252.

[67] ————.; Masani, P. *The prediction theory of multivariate stochastic processes I*. Acta Math. 98(1957), 111-150.

[68] ————.; ————. ———————————— *II*. Acta Math. 99(1958), 93-137.

[69] Wold, H. *A study in the analysis of stationary time series, 2nd ed.* Stockholm. 1954.

[70] Yaglom, A.M. *Certain types of random fields in n-dimen-*

sional space similar to stationary stochastic processes. Teor. Veroyatnost. i Primenen. 2(1957), 292-338.

[71] Yaglom, A.M. *Zur Problem der linearen Interpolation stationärer zufälliger Folgen und Prozesse*. Uspehi Mat. Nauk. 4(1949), 173-178.

[72] ―――――. *Extrapolation, interpolation et filtrage des processus aléatoires stationaires à densité spectrale rationelle*. Trudy Moskov Mat. 4(1955), 333-

[73] ―――――. *Correlation theory of processes with random stationary n th order increments*. Amer.Math. Soc. Translations. 2(8) (1958), 87-141.

[74] ―――――. *Einführung in die Theorie der stationärer Zufallsfunktionen*. Akademie-Verlag, Berlin. 1959.

[75] Zasuhin, V. *On the theory of multidimensional stationary random processes*. Dokl. Akad. Nauk. SSSR. 33(1941), 435.

[76] 定常過程．日本数学会昭和３７年度秋季統計数学分科会シンポジウム．1962．

索　　引