B 1 Brown 運動 [下]

目　　次

凡　　例

1° 本文を章，節に分け $\boxed{1}$（1章），$\boxed{1.1}$（1章1節）のように番号をつけた．

2° 式の番号は各節ごとに変えた．例えば（1.1）は1節1式をあらわし，他の節で引用するときはその前に章の番号をつけ，（2.1.1）（2章1節1式）とした．

3° $\boxed{A}$　$\boxed{B}$，……　$\boxed{A_1}$　$\boxed{A_2}$……等は定理に相当する．

4° ⟶ 参照の記号

（⟶（1.1.1））式（1.1.1）を参照

（⟶ P. Lévy [Ⅲ]）巻末の文献番号［Ⅲ］の P. Lévy の著書参照

Cauchy過程（⟶ 加法過程）手引「加法過程」の項について参照

5° アンダーラインのあるものの多くは，その項，又はその場所に定義あるいは基本的な説明が述べられていることを示し，索引に出る

6° ※の印は，その部分の事実を文献より証明を確認出来ないままに述べたことを示す。

7° 記号

記　号	説　　明
$\overline{R}^d = R^d \vee \{\partial\}$	R^d の1点 ∂ によるコンパクト化空間
∂D	Dの境界
$\mathbb{B}(A)$	集合A上の Borel 集合体，Aが位相空間のときはAの位相的 Borel 集合体
$\mathbb{C}(A)$	位相空間Aで定義された有界実数値連続函数の全体
$Sup(f)$, $Sup(\mu)$	函数 f，測度 μ の台

$\mathbb{C}_0(A) = \mathbb{C}(A) \cap \{f : sup(f) \text{コンパクト}\}$

$\Delta = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$　R^d の Laplacian，$d=1$ のときは $\frac{d^2}{dx^2}$ をあらわす．

$\boxed{7}$ 境界条件 (boundary condition)

$\boxed{7.0}$ R^d の領域内の Brown 運動を考え，その境界条件について述べる．この問題は微分方程式の立場からは古くより論じられているが，ここでは正の半群を特徴づける条件として境界条件をとらえる立場から問題を考える．これは確率論的にいえば，拡散過程の道の境界における行動を規定する条件を考えることになる。

このような研究は最近 W. Feller の一連の論文 A.D.Wentzell[194], T. Ueno[182], [183], [184] によって発展させられている。

$\boxed{7.1}$ Feller-Ueno の表現

まず存在を仮定する。この章を通じて R^d の領域 D は次の条件 (A.1.1)～(A.1.5) をみたすとする．

(A.1.1)　R^d の有界領域 D はつぎの条件をみたす．

任意の $\alpha \geqq 0$ に対して

(1.1)
$$\left(\alpha - \frac{1}{2}\Delta\right) u(a) = 0 \qquad a \in D$$
$$u(a) = f(a) \qquad a \in \partial D$$

は任意の $f \in C(\partial D)$ に対して解をもつ。

この仮定のもとでは，(1.1) の解は

$$u(a) \equiv h_\alpha f(a) = \int_{\partial D} h_\alpha(a,b) f(b)\, \mu(db)$$ とかける。

但し $E_a(e^{-\alpha \sigma_{\partial D}};\ x(\sigma_{\partial D}) \in E) = \int_E h_\alpha(a,b)\, \mu(db)$.

(A.1.2)　$M = [W, \mathbb{B}(W), P_a, a \in \overline{D}]$ は $C(\overline{D}) \to C(\overline{D})$ なる強連続な半群をもった拡散過程でつぎの性質をもつ。

1°) $[x(t,w) : 0 \leqq t < \sigma_{\partial D}(w),\ \ P_a, a \in \overline{D}]$ は D における minimal な Brown 運動になっている。

2°) T_t に対応する推移確率 $P(t, a, E)$ は

$$P(t, a, E) = \int_E p(t, a, b)\, m(db) \qquad E \in \mathbb{B}(\overline{D})$$

なる $(a, b) \in \overline{D} \times \overline{D}$ について連続な密度をもち，しかも $m(\overline{D}) < +\infty$

3°) 測度 $m(db)$ は不変測度である。

4°) $P_a(\sigma_{\partial D}\in du,\ x(\sigma_{\partial D})\in db)=q(u,a,b)\,du\,d\mu(b)$ とする.

(A.1.3) $m(\partial D)=0$

(A.1.4) $T_t^*f(a)=\int_{\bar{D}}p(t,b,a)f(b)m(db) \qquad f\in \mathbb{C}(\bar{D})$

とおけば $\{T_t^*: t\geqq 0\}$ は $\mathbb{C}(\bar{D})\to\mathbb{C}(\bar{D})$ な強連続な半群で対応する Markov 過程 $M^*=[W,\ \mathbb{B}(W),\ P_a^*,\ a\in\bar{D}]$ は (A.1.2) の 1°) 及び

$\int_{U_\varepsilon(a)^c\cap\bar{D}}p(t,b,a)m(db)=o(t) \quad t\downarrow 0$ をみたす。ここに $U_\varepsilon(a)=\{b;\ \|a-b\|<\varepsilon\}$

(A.1.2), (A.1.4) より,

$$P_a^*(\sigma_{\partial D}\in du,\ x(\sigma_{\partial D})\in db)=q(u,a,b)\,du\,\mu(db)$$

(A.1.5) 任意の $u\in\mathbb{C}(\bar{D})$ に対して

$$\int_{\bar{D}}h_\alpha(a,\cdot)\,u(a)m(da)\in\mathbb{C}(\partial D)$$

とする.

つぎの記号を導入する.

$$\varphi:\ x(\cdot,w)\to x(-\cdot,w)=x^*(\cdot,w)$$
$$\varphi(W)=W^*,\qquad \varphi(\mathbb{B})=\mathbb{B}^*$$
$$B\in\mathbb{B}^* \text{ に対し } \tilde{P}_a^*(B)=P_a(\varphi^{-1}(B))$$

とおくと, $[W^*,\ \mathbb{B}^*,\ \tilde{P}_a^*,\ a\in\bar{D}]$ は M^* と同じ推移確率を持った拡散過程である。但し, 時間は $(-\infty, 0]$ の間で定義されている。

$x(\cdot,w)$ の ∂D 上にある時点を $\underline{\underline{Z}}=\{t;\ x(t,w)\in\partial D\}$ とすると $\underline{\underline{Z}}$ は閉集合で, $\boxed{5.3}$ excursion のときと同じようにして $[0,+\infty)-\underline{\underline{Z}}=\bigcup_{n\geqq 1}\underline{\underline{\varepsilon}}^{(n)}$ なる開区間 $\underline{\underline{\varepsilon}}^{(n)}=(T_1^{(n)},\ T_2^{(n)})$ を定めることが出来る. (A.1.3)から $P_a\{(\underline{\underline{Z}}$ の Lebesgue 測度$)=0\}=1$ となっている. つぎに

$$t\in\underline{\underline{\varepsilon}}^{(n)} \text{ ならば } n_t(w)=n,$$

$$\tilde{P}^*(\cdot)=\int_D\tilde{P}_a^*(\cdot)\,m(da)$$

とおく. このとき $\boxed{5.3}$ の excursion の場合と同じように, P. Lévy の考え方にならい,

[A] (<u>last visiting time relation</u>)

$u<t$ のとき,

$$P_x\{x(T^{(1)}_{n_t(w)})\in da,\ T^{(1)}_{n_t(w)}\in du,\ x(t)\in dy\}$$
$$=p(u,x,a)\,q(t-u,y,a)\,\mu(da)\,du\,m(dy)$$

これより

[B]（Feller-Ueno の表現） 任意の $f\in\mathbb{C}(\overline{D})$ に対して．

$$G_\alpha f(x)=G^\circ_\alpha f(x)+\int_{\partial D}h_\alpha(x,a)\mu(da)\int_{\partial D}g_\alpha(a,b)\mu(db)\int_D h_\alpha(b,y)f(y)\,m(dy)$$

ここで

$$g_\alpha(a,b)=\int_0^{+\infty}e^{-\alpha t}\,p(t,a,b)\,dt$$

$$G^\circ_\alpha f(a)=E_a\left\{\int_0^{\sigma_{\partial D}}e^{-\alpha t}f(x_t)\,dt\right\}$$

とする．

$\boxed{7.2}$ 境界上の process の系

（A.2.1） 任意の $\alpha>0$ に対し

$$\int_{\partial D}g_\alpha(\cdot,b)f(b)\mu(db)\equiv K^\alpha f(\cdot)\in\mathbb{C}(\partial D)\qquad f\in\mathbb{C}(\partial D)$$

を仮定すると，

[A] 任意に固定した $\alpha>0$ に対して，K^α は G. Hunt [65, II] の complete maximum principle（→ Markov 過程）をみたす。

記号

$$h_\alpha f(x)=\int_{\partial D}h_\alpha(x,b)f(b)\mu(db),\qquad h_\circ f(a)=hf(a)$$
$$U_\alpha f(b)=\alpha\int_{\partial D}h_\alpha(x,b)hf(x)\,m(dx)$$
$$q_u f(y)=\int_{\partial D}q(u,y,b)f(b)\mu(db)$$
$$A_u(b,b')=\int_{\overline{D}}q(v,y,b)\,q(u-v,y,b')\,m(dy)\qquad 0<v<u$$
$$A_u f(b)=\int_{\partial D}A_u(b,b')f(b')\mu(db')$$

を導入する。

[B]

1） $A_u f(b)$ は見かけ上は v に関係するが実際は v に無関係

2） $U_\alpha f(b)=\int_0^{+\infty}(1-e^{-\alpha u})A_u f(b)\,du$，

3） $K^\alpha f-K^\beta f+K^\alpha(U_\alpha-U_\beta)K^\beta f=0\qquad \alpha,\beta>0,\quad f\in\mathbb{C}(\partial D)$

4） K^α; $\mathbb{C}(\partial D)\to\mathcal{R}=K^\alpha(\mathbb{C}(\partial D))$ は $\mathbb{C}(\partial D)$ で稠密で α に無関係．しかもこ

の写像は1対1である。

5) ある写像 $Q: \mathcal{R} \to \mathbb{C}(\partial D)$ が存在して $-(K^{\alpha})^{-1} = Q - U_{\alpha}$ 且つ Q は閉作用素である。

6) $f \in \mathbb{C}(\partial D)$ ならば $\lim_{\alpha \to +\infty} K^{\alpha} f = 0$

$f \in \mathcal{R}$ ならば $\lim_{\alpha \to +\infty} K^{\alpha} U_{\alpha} f = f$, $\lim_{\alpha \to +\infty} U_{\alpha} K^{\alpha} f = f$ （いずれも強収束）

7) $1 \in \mathcal{R}$ 且つ $Q1 \equiv 0$

この K^{α} に対して

[C] つぎの関係をみたす $\mathbb{C}(\partial D) \to \mathbb{C}(\partial D)$ なる強連続な半群 $\{T_t^{\alpha};\ t \geqq 0\}$ $(\alpha \geqq 0)$ が存在する。

1) $\alpha > 0$ に対して，$K^{\alpha} = \int_0^{+\infty} T_t^{\alpha} dt \Leftrightarrow T_t^{\alpha}$ の生成作用素 $= Q - U_{\alpha}$

2) $\lim_{\alpha \downarrow 0} T_t^{\alpha}$ が存在してこれを T_t とおけば，T_t の生成作用素 $\equiv Q$

3) $K_{\lambda}^{\alpha} = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T_t^{\alpha} dt \qquad \alpha \geqq 0, \quad \lambda > 0$

とおけば

$K_{\lambda}^{\alpha}(\mathbb{C}(\partial D)) = \mathcal{R}$ で

$K_{\lambda}^{\alpha} f - K_{\lambda}^{\beta} f + K_{\lambda}^{\alpha}(U_{\alpha} - U_{\beta}) K_{\lambda}^{\beta} f = 0 \qquad \alpha, \beta \geqq 0,\ \lambda > 0,\ f \in \mathbb{C}(\partial D)$

となる。

このようにして得られた半群 T_t^{α} の系 $[T_t^{\alpha};\ \alpha \geqq 0]$ を <u>M に対応する境界 ∂D 上の半群の系</u>，それらに対応する Markov 過程 M^{α} の系 $[M^{\alpha}: \alpha \geqq 0]$ を <u>M に対応する境界 ∂D 上の Markov 過程</u>という。

$\boxed{7.3}$ 境界條件

上のことを使って境界條件を定義するため，Feller の *normal derivative analogue* を

$$[h_{\alpha}, f](b) \equiv \int_D h_{\alpha}(y, b) f(y)\, m(dy), \qquad \alpha \geqq 0$$

として定義する．このとき任意の $f \in \mathbb{C}(\partial D)$ に対し，

$$[h, \mathfrak{G} G_{\alpha}^{0} f](b) \equiv [h_0, \mathfrak{G} G_{\alpha}^{0} f](b) = [h_{\alpha}, f](b) \in \mathbb{C}(\partial D),$$

となる．但し $\mathfrak{G}$ は M の生成作用素で $\mathcal{D}(\mathfrak{G})$ はその定義域とする。

[A] 1) 任意の $u \in \mathcal{D}(\mathfrak{G})$ に対して $[h, \mathfrak{G}u](b)$ が存在して

(3.1) $\quad Qu(b) - [h, \mathfrak{G}u](b) = 0 \quad , \quad b \in \partial D$

2) $f \in \mathcal{C}(\partial D)$ に対して

(3.2) $\quad (\alpha - \mathfrak{G})u(x) = f(x) \qquad x \in D$

$\qquad\quad Qu(b) - [h, \mathfrak{G}u](b) = 0 \qquad b \in \partial D$

の解が存在すれば，それは一意的である。

(3.1) を M に対応する境界条件という。

このような境界条件の書き方は W. Feller [52] によって最初示された。T. Ueno [182], [183], [184] の方法は本質的にこれと同じである。

7.4 Space-time の境界上の process

7.2 では T. Ueno [182] で導入された境界上の process の系の一般的構造を示した。つぎにこの系はある1つの process の Laplace 変換として得られることを示す。(これは可算状態空間のとき Neveu [204] の F-process にあたる。)

$I = [0, +\infty]$ とする。$\mathcal{C}_0(I \times \partial D) \to \mathcal{C}_0(I \times \partial D)$ なる強連続な正の半群 $\{F_t; t \geq 0\}$ が存在し，つぎの條件をみたす．ただし

$\mathcal{C}_0(I \times \partial D) = \{u;\ u \in \mathcal{C}(I \times \partial D),\ u(+\infty, b) \equiv 0\}$ とおく。

1) $f \in \mathcal{C}(\partial D)$ に対し，

(4.1) $\quad T_t^\alpha f(b) = F_t(e^{-\alpha \cdot} f(\cdot))(0, b) \qquad \alpha \geqq 0$

2) $\{F_t; t \geqslant 0\}$ に対応する推移確率を $F(t; (u,b), E)$ とすれば，$E_2 \subset \partial D$ に対し

$$F(t, (u,b), [v_1, v_2] \times E_2) = 0 \qquad u > v_2,$$
$$= F(t, (0,b), [v_1 - u, v_2 - u] \times E_2) \qquad u < v_2.$$

この半群 $[F_t; t \geqslant 0]$ に対応する Markov 過程を M に対応する境界 ∂D 上の space-time の Markov 過程という．このことと今まで述べたこととの対応は

境界條件 $\longleftrightarrow$ ∂D の Markov 過程の系 $\longleftrightarrow$ ∂D の space-time の Markov 過程

7.5 M に対応する境界上の space-time Markov 過程の確率論的な構成

excessive function と additive functional の一般論より M に対

応する連続な正の *additive functional* $\underline{\underline{s}}(t, w)$ が存在して

$$K^{\alpha}1(b) = E_b\left\{\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} d\underline{\underline{s}}(t, w)\right\} \qquad b \in \partial D$$

とかけ，$\alpha > 0$ を固定すると

$$(5.1) \qquad K^{\alpha}f(b) = E_b\left\{\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} f(x(t, w))\, d\underline{\underline{s}}(t, w)\right\} \quad b \in \partial D, \ f: \text{有界} Borel \text{函数}$$

ところが，この形より，(5.1) はすべての $\alpha > 0$ に対してなりたつ．次に $f \in \mathcal{C}(\partial D)$，$\underline{\underline{s}}^{-1}(t, w)$ を $\underline{\underline{s}}(t, w)$ の逆函数とすれば，

$$K^{\alpha}f(b) = E_b\left\{\int_0^{+\infty} e^{-\alpha \underline{\underline{s}}^{-1}(t,w)} f(x(\underline{\underline{s}}^{-1}(t, w)))\, dt\right\}$$

となる．

$$\tilde{T}_t^{(\alpha)}f(b) = E_b\left\{e^{-\alpha \underline{\underline{s}}^{-1}(t,w)} f(x(\underline{\underline{s}}^{-1}(t, w)))\right\}$$

とおけば，$\tilde{T}_t^{(\alpha)}$ は t について右連続な半群で，

$$K_{\lambda}^{\alpha} f(b) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\, \tilde{T}_t^{(\alpha)} f(b)\, dt$$

であるから，

$$\begin{aligned} T_t^{(\alpha)} f &= \tilde{T}_t^{(\alpha)} f \qquad f \in \mathcal{C}(\partial D) \\ &= E_{\cdot}\left\{e^{-\alpha \underline{\underline{s}}^{-1}(t,w)} f(x(\underline{\underline{s}}^{-1}(t, w)))\right\} \end{aligned}$$

となり，

$$F(t, (0, b), \ \times E) = P_b\left\{\underline{\underline{s}}^{-1}(t, w) \in S, \ x(\underline{\underline{s}}^{-1}(t, w)) \in E\right\}$$

がみちびかれ，次の結果が得られる．

[A] $[(u + \underline{\underline{s}}^{-1}(t, w), \ x(\underline{\underline{s}}^{-1}(t, w), w)); \ t \geqq 0, \ P_b, \ b \in D]$ は半群 $\{F_t f(u, b); \ t \geqq 0\}$ に対応する *Markov* 過程である．

7.6 Wentzell の境界条件をみたす Brown 運動

7.1 ～ 7.5 で *process* の存在と適当な正則条件の下で，境界条件の書き方，それに関連する種々の量の解析的及び確率論的意味を述べた．これらの結果は *process* の存在証明や構成に一つの指針を与える．T. Ueno [182]，[183] に示された A. D. Wentzell [194] によって導かれた境界条件の候補者に対する拡散の存在証明はこれらの方向の 1 つの結果である．また Wentzell [194] 自身も特殊な場合に存在証明を行なっている．ここでは，7.1 ～ 7.5 の場合を含むや

や一般な場合に適当な正則条件の下に process の存在について述べる。

Dを単位円板とし，$\bar{D}=D\cup\partial D$． $x=re^{i\theta}$の代りに $x=(r,\theta)$ とかくことがある．

$$L:\ Lu(1,\theta)=\frac{\partial}{\partial n}u(1,\theta)+\alpha(\theta)\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}u(1,\theta)+\beta(\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}u(1,\theta)-\gamma(\theta)u(1,\theta)$$

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\in\mathcal{C}^3(\partial D),\qquad \alpha,\beta,\gamma\equiv 0$$

$$\mathcal{D}(L)=\{u;\ u\in\mathcal{C}(\bar{D}),\quad Lu(1,\theta)\in\mathcal{C}(\partial D)\}$$

とする．仮定から $\mathcal{C}^2(\partial D)\subset\mathcal{D}(L)$ である．

いま

$$\mathcal{D}(Lh_0)=\{u;\ L(h_0u')(\cdot)\in\mathcal{C}(\partial D),\quad u\in\mathcal{C}(\partial D)\}$$

とすると，$\mathcal{C}^3(\partial D)\subset\mathcal{D}(Lh_0)$ で，任意の $u\in\mathcal{C}^3(\partial D)$ に対して

$$Lh_0u(1,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[h(1,\varphi)-u(1,\theta)-(\varphi-\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}u(1,\theta))\frac{1}{1-\cos(\theta-\varphi)}d\varphi$$

(6.1)

$$+\alpha(\theta)\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}u(1,\theta)+\beta(\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}u(1,\theta)-\gamma(\theta)u(1,\theta)$$

となっている．そうすると，例えば K. Sato [160] 等により，

上の仮定のもとで Lh_0 は最小閉拡大 Q をもち，Qは $\mathcal{C}(\partial D)\to\mathcal{C}(\partial D)$ なる強連続な正の半群 $\{H_t;\ t\geqq 0\}$ の生成作用素になっている。しかも $\|H_t\|\leqq 1$．

つぎに

$$U_\alpha(\theta,\theta')=\alpha\int_D h_\alpha(x,(1,\theta))\,h_\alpha(x,(1,\theta'))\,dx$$

とおけば

$$U_\alpha f(\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}U_\alpha(\theta,\theta')f(\theta')d\theta'\equiv\int_{\partial D}U_\alpha(\theta,\theta')f(\theta')\mu(d\theta')$$

は $\mathcal{C}(\partial D)\to\mathcal{C}(\partial D)$ なる非負有界な線型作用素である．さらに

$$\tilde{U}_\alpha f(\theta)=U_\alpha f(\theta)+\alpha\delta(\theta)f(\theta)\qquad 0\leqq\delta(\theta)\in\mathcal{C}^3(\partial D),$$

とおけば，一般論より（例えば K. Sato [160]）$Q-\tilde{U}_\alpha$ は $\mathcal{C}(\partial D)\to\mathcal{C}(\partial D)$ なる強連続な正の半群 $\{H_t^\alpha;\ t\geqq 0\}$ の生成作用素で，$\mathcal{D}(\tilde{U}_\alpha)=\mathcal{D}(Q)$ となっている．Yosida-Hille の一般論より $\lambda>0$ に対して

$$(\lambda-(\theta-\tilde{U}_\alpha))^{-1}\equiv K_\lambda^\alpha;\quad \mathcal{C}(\partial D)\to\mathcal{D}(Q)$$

が定義可能であり，しかも

(B1-94)

$$K_\lambda^\alpha f - K_\lambda^\beta f + K_\lambda^\alpha(\tilde{U}_\alpha - \tilde{U}_\beta)K_\lambda^\beta f = 0$$

(6.2)

$$K_\lambda^\alpha f - K_\lambda^\beta f + K_\lambda^\beta(\tilde{U}_\alpha - \tilde{U}_\beta)K_\lambda^\alpha f = 0$$

が成り立つ。更に

(6.3)　任意の $\alpha > 0$ に対して

$$K^\alpha \equiv K_{0+}^\alpha$$

が定義可能となる。そして

(6.4) $$\lim_{\alpha \uparrow +\infty} \| K^\alpha \cdot 1 \| = 0$$

そこで任意の $f \in \mathbb{C}(\bar{D})$ に対して

$$BG_\alpha^0 f(1,\theta) \equiv \delta(\theta) f(1,\theta) + [h_\alpha, f](\theta)$$

$$[h_\alpha, f](\theta) = \int_D h_\alpha(x,(1,\theta)) f(x)\,dx$$

とし，

$$G_\alpha f(x) = G_\alpha^0 f(x) + h_\alpha K^\alpha B G_\alpha^0 f(x)$$

と定義すると

[A]　$\{G_\alpha ; \alpha > 0\}$ は次の条件をみたすレゾルベントである。

1) $G_\alpha ;\ \mathbb{C}(\bar{D}) \to \mathbb{C}(\bar{D})$,

2) $G_\alpha \geqq 0.\quad \|G_\alpha\| \leqq \frac{1}{\alpha}$

3) 任意の $f \in \mathbb{C}(\bar{D})$ に対して

$$\|\alpha G_\alpha f - f\| \to 0 \quad (\alpha \uparrow +\infty)$$

4) $G_\alpha - G_\beta + (\alpha - \beta) G_\alpha G_\beta = 0$

がみちびかれる。

[B]　このレゾルベントに対応する生成作用素 $\mathfrak{G}$ の定義域 $\mathcal{D}(\mathfrak{G})$ は

$$\mathcal{D} \equiv \{u;\ u \in \mathbb{C}(\bar{D}),\ \bar{\Delta} u \in \mathbb{C}(\bar{D}),\ [u]_{\partial D} \in \mathcal{D}(Q),$$
$$Qu(1,\theta) - \frac{1}{2}\delta(\theta)\lim_{r \uparrow 1} \bar{\Delta} u(1,\theta) - [h_0, \tfrac{1}{2}\bar{\Delta} u](\theta) = 0\}$$

と一致する．但し $[u]_{\partial D}$ は u を ∂D に制限して考えることを意味する．
（$\mathfrak{A}$は局所作用素になっていることに注意．）

これから

$$[C]\quad \widetilde{\mathscr{D}}\equiv\{u;\ u\in C^3(\bar{D}),\ \left(\frac{\partial}{\partial n}+\alpha(\theta)\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\beta(\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}-\gamma(\theta)\right)u(1,\theta)$$

$$-\delta(\theta)\lim_{r\uparrow 1}\frac{1}{2}\Delta u(r,\theta)=0\}$$

とおくと，$\widetilde{\mathscr{D}}\subseteq\mathscr{D}(\mathfrak{G})$ となる．
ことがみちびかれる．

$\boxed{7.7}$ 領域における反射壁の Brown 運動

$\boxed{7.6}$ で述べたもののうち，最も典型的なものは $\alpha\equiv\beta\equiv\gamma\equiv\delta\equiv 0$ のときで，通常反射壁の Brown 運動と云われている．そのようなもののうち，典型的なものを列記する．

[1°]　$\bar{D}=[0\,1]$ 区間における反射壁の Brown 運動

$\mathbb{D}=[W,\ \mathbb{B}(W),\ P_a,\ a\in\bar{D}]$ を $\bar{D}$ 上の 1 次元拡散過程とする．

1)　$\mathfrak{G}u(a)=\frac{1}{2}\frac{d^2}{da^2}u(a)$

2)　$\mathscr{D}(\mathfrak{G})=\{u;\ u\in C^2(\bar{D}),\ \frac{d^+}{da}u(0)=0,\ \frac{d^-}{da}u(1)=0\}$

のとき，$\mathbb{D}$ を $[0,1]$ 上における反射壁の Brown 運動という．$\frac{d^+}{da}$，$\left(\frac{d^-}{da}\right)$ は右（左）微分とする．

これに対して，

$$P(t,a,E)=\int_E p(t,a,b)\,db,$$

$$p(t,a,b)=\sum_{-\infty}^{+\infty}e^{-(b-a-\alpha'_n)^2/2t}+\sum_{-\infty}^{\infty}e^{-(b+a-\alpha''_n)^2/2t},\quad \alpha'_n=2n,\ \alpha''_n=2(1-n)$$

$$h_0(a,1)=a,\quad h_0(a,0)=1-a,$$

$$[h_0,\ \mathfrak{G}u](1)=\frac{1}{2}\left(-\frac{d^-}{da}u(1)-(u(1)-u(0))\right)$$

$$[h_0,\ \mathfrak{G}u](0)=\frac{1}{2}\left(\frac{d^+}{da}u(0)+(u(1)-u(0))\right)$$

$$Qu(1)=-\frac{1}{2}(u(1)-u(0))\ \text{より，}$$

$$Qu(1)-[h_0\,\mathcal{G}u](1)=0 \Leftrightarrow \frac{d^-}{da}u(1)=0,\quad Qu(0)-[h_0,\mathcal{G}u](0)=0 \Leftrightarrow \frac{d^+}{da}u(0)=0$$

[2°] 単位円板$\bar{D}$上の反射壁の Brown 運動

$\mathbb{D}=[W,\ \mathbb{B}(W),\ P_a,\ a\in\bar{D}]$ を$\bar{D}$上の2次元拡散過程とする.

1) $\mathcal{D}(\mathcal{G})\supset C^2(\bar{D})\cap\{u;\ \frac{\partial}{\partial n}u(b)=0,\ b\in\partial D\}\equiv\tilde{C}^2(\bar{D})$

2) $\mathcal{G}/\tilde{C}^2(D)=\frac{1}{2}\Delta$ (contraction)

のとき, $\mathbb{D}$を単位円板$\bar{D}$上の反射壁の Brown 運動という.

これに対して

$$P(t,a,E)=\int_E p(t,a,b)\,db,$$

$$p(t,a,b)=\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{p=1}^{+\infty}e^{-\lambda_{mp}t}\varphi_{mp}(a)\varphi_{mp}(b)$$

$\lambda_{mp}=\xi^2_{mp}/2$, ξ_{mp} は Bessel 函数 J_m に対し, $\frac{\partial}{\partial x}J_m(x)=0$ の p 番目の正根,

$$\varphi_{mp}(x)=J_m(\sqrt{2\lambda_{mp}}\,r)(a_{mp}\cos m\theta+b_{mp}\sin m\theta),\quad x=re^{i\theta},$$
$$m=0,1,2,\cdots,\quad p=1,2,\cdots$$

ここで a_{mp}, b_{mp} は $\frac{1}{\pi}\int_{\bar{D}}\varphi^2_{mp}(x)\,dx=1$ となるような定数.

又 Q は推移確率の密度函数が

$$\frac{1}{\pi}\ \frac{1-e^{-2t}}{1-2e^{-t}\cos(\theta-\theta')+e^{-2t}}$$

となるような, ∂D 上の Cauchy 過程(Poisson kernel の過程)の生成作用素になる([206] 参照)。

境界条件, $Qu(1,\theta)-\frac{1}{2}[h_0\bar{\Delta}u](\theta)=0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial n}u(1,\theta)=0$

[3°] 単位球$\bar{D}$の反射壁の Brown 運動

$\mathbb{D}=[W,\ \mathbb{B}W),\ P_a,\ a\in\bar{D}]$ を単位球$\bar{D}$上の3次元拡散過程とする.

1) $\mathcal{D}(\mathcal{G})\supset C^2(\bar{D})\cap\{u;\ \frac{\partial}{\partial n}u(b)=0,\ b\in\partial D\}\equiv\tilde{C}^2(D)$

2) $\mathcal{G}/\tilde{C}^2(D)=\frac{1}{2}\Delta$

のとき，$\mathbb{D}$を単位球上の反射壁のBrown運動という。

[4°]　[1°]の[0,1]上の反射壁のBrown運動のn個の直積を立方体の反射壁のBrown運動という．

[5°]　n次元半空間の反射壁のBrown運動

n次元上半空間 $D\cup\partial D$ の一点 $\{\partial\}$ コンパクト化を $\overline{D}=D\cup\partial D\cup\{\partial\}$ とする。

$\mathbb{D}=[W, \mathbb{B}(W), P_a, a\in\overline{D}]$ を$\overline{D}$上のn次元拡散過程とする．

1) $\mathcal{D}(\mathcal{G})\supset\mathbb{C}^2(\overline{D})\cap\{u;\frac{\partial}{\partial n}u(b)=0,\ b\in\partial D,\ u(\partial)=0\}\equiv\widetilde{\mathbb{C}}^2(\overline{D})$

2) $\mathcal{G}/_{\widetilde{\mathbb{C}}^2(\overline{D})}=\frac{1}{2}\Delta$

のとき；$\mathbb{D}$をn次元上半空間$\overline{D}$上の反射壁のBrown運動という。

これは $\boxed{5.2}$ の半直線上の反射壁のBrown運動と(n-1)次元Brown運動の直積として得られる（T. Ueno[183]）。

Qは推移確率が

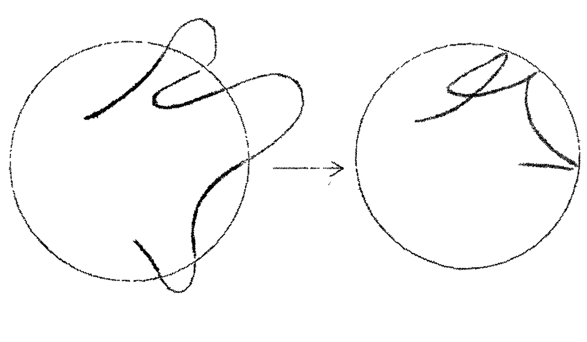
$$\frac{1}{\pi}\ \frac{t}{1-2t(a-b)+t^2}$$

なる ∂D 上の Cauchy 過程の生成作用素である。

以上 [2°][3°][4°] の場合は$\boxed{7.1}$～$\boxed{7.5}$の条件をみたしている。

$\boxed{7.8}$ 確率論的考察

[1°] Dを単位円板とし，2次元Brown運動がDを動いている部分を考える．道のえがくグラフが gap のないようにそれをまわしてつぎあわせたものが，$\boxed{7.7}$ [2°]の反射壁のBrown運動となっている。



というのは，$x(t,w)=(r(t,w),\ \theta(t,w))$ とし，動径部分 $r(t)$ が時間 t までに $[0,1]$ 区間に滞在する時間を $\underline{\underline{s}}(t,w)$ とすると $[r(\underline{\underline{s}}^{-1}(t,w));\ 0\leqq t<+\infty,\ P_{(r,\theta)}]$ は $r=1$ に反射壁をもつ Bessel 過程で，生成作用素 $\mathbb{B}$ は

$$(8.1)\qquad \underline{\underline{B}}=\frac{1}{2}\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)\qquad 0\leqq r<1$$

かつ

$$\frac{d^-}{dr}u(1)=0\qquad\qquad u\in\mathcal{D}(\underline{\underline{B}})$$

である．また

$$\left[\theta\left(\int_0^t r(\underline{\underline{s}}^{-1}(u,w))^{-2}ds,\ w\right),\ 0\leqq t<+\infty,\ P_{(r,\theta)}\right]$$

は Brown 運動の道が D にあるかぎり通常の円周上の Brown 運動となっている。以上のことと skew product（→ $\boxed{6.3}$ ）の方法に注意すれば上述のことが得られる。

[2°]　２次元拡散過程で，生成作用素が

$$\mathcal{G}_{/C^2(\bar{R}^2)}=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\Delta & r<1\\[2ex] \left(\dfrac{r^4}{2}\right)\Delta & r\geqq 1\end{cases}$$

なるものを，単位円外に出た部分については反転 $r\to\frac{1}{r}$ によってその内部に写したものを考えれば，これもまた反射壁の Brown 運動である。この事実は等角写像で調和という性質が不変であることから得られる。

[3°]　$[0,1]$ 上の Bessel 過程を $[W_1,\ \mathbb{B}(W_1),\ P_r^{(1)},\ r\in[0,1]]$ で，生成作用素は (8.1) で与えられ，かつ境界条件

$$p_2\frac{d^-}{dr}u(1)+p_3(\underline{\underline{B}}u)(1)=0,\quad u\in\mathcal{D}(\underline{\underline{B}}),\quad p_2,p_3\geqq 0,\quad p_2+p_3=1$$

をみたすものを考える。$w_1(t)=r(t,w_1)$ とおき，$r=1$ における $r(t,w_1)$ の local time を $\underline{\underline{t}}(t,w_1)$ とする。但し $p_2=0$ のときは $\underline{\underline{t}}=(t-\sigma_1(w_1))\vee 0$ とする。

これとは独立な単位円周上の Brown 運動 $[W_2,\ \mathbb{B}(W_2),\ P_\theta^{(2)},\ \theta\in[-\pi\ \pi]]$ をとり，

$$[(r(t,w_1),\ \theta(\int_0^t r^{-2}(s)\,ds+\widetilde{p}_3\underline{\underline{t}}(t,w_2)+\widetilde{p}_2\underline{\underline{t}}(t));\ 0\leqq t<+\infty,\ P_r^{(1)}\times P_\theta^{(2)}]$$

とすると，これは$\overline{D}$上の拡散過程で，$\mathcal{G}/_{\mathbb{C}^2(\overline{D})}=\frac{1}{2}\Delta$ となっており，しかも充分なめらかなfに対しては $u=G_\alpha f$ が Wentzell の境界条件

$$p_2\frac{\partial^-}{\partial r}u(1,\theta)+p_3(\mathcal{G}u)(1,\theta)=\widetilde{p}_2\frac{\partial u}{\partial\theta}(1,\theta)+\widetilde{p}_3\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}u(1,\theta),$$

をみたす．但し $\widetilde{p}_2$，$\widetilde{p}_3$ はある定数で $\widetilde{p}_3\geqq 0$ ．

この構成から，Wentzellの境界條件にあらわされる各項と*process* の道の行動の関係がわかる。これは定数係数の境界条件であるが，変数係数の場合も確率微分方程式を用いて類似の構成が出来る。

7.9 Neumann問題

5.9 で*Dirichlet*問題の確率論的考察を行なったが，*Neumann*問題についても同様に確率論の立場から考えることが出来る。この問題は N.Ikeda [70]，S.Ito [205] によって考えられた。

$[W,\mathcal{B}(W),P_x,x\in\overline{D}]$ を単位円板$\overline{D}$上の Wentzell の境界条件をみたす *Brown* 運動で，

$$\gamma(x)\equiv 0,\qquad \delta(x)\equiv 1$$

となるものとする．

このとき，Qに対応する半群 $\{H_t;\ t\geqq 0\}$ には *conservative* な *Markov* 過程が対応し，その推移確率 $Q(t,\theta,d\theta')$ が Doeblin の条件をみたすことから∂Dの測度 $\gamma(d\theta)$ が存在し

$$(9.1)\qquad \lim_{t\uparrow+\infty}\|H_tf-\int_{\partial D}f(1,\theta)\,\gamma(d\theta)\|=0\qquad f\in\mathbb{C}(\partial D)$$

で，しかも収束は指数次の速さとなる．これより

[A]　$f\in\mathbb{C}(\partial D)$ が

$$(9.2)\qquad \int_{\partial D}f(\theta)\,\gamma(d\theta)=0$$

をみたすならば，

$$(9.3)\qquad \lim_{\alpha\downarrow 0}K^\alpha f=K^{0+}f$$

が存在し，$K^{0+}f\in\mathcal{D}(Q)$ で，

(9.4) $$QK^{o+}f = -f$$

である。

いま特に $\alpha(\theta)=\beta(\theta)=0$ の場合を考えると $\boxed{7.7}$ でみたように

$$H_t f(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\,\frac{1-e^{-2t}}{1+e^{-2t}-2e^{-t}\cos(\theta-\xi)}\,d\xi$$

であるから，

(9.5) $$Qg = \frac{\partial}{\partial n}\,h_0 g$$

となる。以上のことより

[B] $\alpha(\theta)=\beta(\theta)=0$ のとき $\int_{\partial D} f(1,\theta)\,d\theta = 0$ をみたす任意の連続函数 $f(1,\theta)\in \mathcal{C}(\partial D)$ に対して

$$u(r,\theta) = h_0 K^{o+} f(r,\theta)$$

が定義可能で

$$\Delta u(r,\theta) = 0 \qquad (r,\theta)\in D$$
$$\frac{\partial}{\partial n} u(1,\theta) = -f(1,\theta) \qquad (1,\theta)\in \partial D$$

である。

この考察から *Neumann* 問題は帯溜のある反射壁の *Brown* 運動に対応することが解かる。

しかも附帯条件

(9.6) $$\int_{\partial D} f(1,\theta)\,d\theta = 0$$

の確率論的意味は (9.2) であり，このような条件は *Neumann* 問題のみならず再帰的 *Markov* 過程に対応する境界問題には常にあらわれる。

なお，上の方法は

$$(\alpha - \tfrac{1}{2}\Delta)u = 0 \qquad \alpha > 0$$
$$u = f$$

という型のものと

$$(\beta - Q)u = f \qquad \beta > 0$$

という (9.6)型の条件の必要ない境界値問題の解を用いて (9.6) 型の条件の必要な問題を解くことになっている。

[8] Wiener測度の変換で出来る測度

[8.0] この章では Wiener測度の変換で出来る測度の型と，その変換の性質について述べる．このような変換により一見したところ違った型と思える問題の中に一つの統一性を見つけるというのは確率論的方法の一つの特徴である．

[8.1] Random time change（Volkonsky [186]，H. P. McKean-H. Tanaka [146] 参照）

この考え方は P. Lévy によって Brown 運動の等角写像によって得られる運動が又同じ到達確率を持っている事実の説明に用いられた（→ P. Lévy [112]）。その考えは K. Ito-N. P. McKean [89] により1次元拡散過程についての W. Feller の結果の確率論的な研究のために系統的に発展させられた。

この章の Brown 運動以外の確率過程については，それに対応するものに"～"をつけておく。

w, $x(t)$, σ, P_a, 等は $\tilde{w}$, $\tilde{x}(t)$, $\tilde{\sigma}$, $\tilde{P}_a$ 等．

$\mathbb{D}=[W, \mathbb{B}(W), P_a, a\in\bar{R}^d]$ を d 次元 Brown 運動，

$\tilde{\mathbb{D}}=[\tilde{W}, \tilde{\mathbb{B}}(\tilde{W}), \tilde{P}_a, a\in\bar{R}^d]$ を R^d 上の拡散過程とする。

$\tilde{\mathbb{D}}$ は，任意の有界開集合 D に対して

$$\tilde{P}_a(\tilde{x}(\tilde{\sigma}_{\partial D})\in db)=P_a(x(\sigma_{\partial D})\in db)=h^D(a, db),\quad a\in D,\ db\subset\partial D \tag{1.1}$$

のとき，Brownian hitting probability を持った拡散過程と云われる。

1次元の古典的拡散過程の生成作用素 $\mathcal{G}$ の定義域を $\mathcal{D}(\mathcal{G})$ とすると，$\mathbb{C}^2(\bar{R}^d)$ を含み

$$\mathcal{G}u(a)=A(a)\frac{d}{da}u(a)+\frac{B(a)}{2}\frac{d^2}{da^2}u(a),\qquad u\in\mathbb{C}^2(\bar{R}^1) \tag{1.2}$$

とかけ

$$c(a)=\int^a\frac{2A(\xi)}{B(\xi)}d\xi,\quad ds(a)=e^{-c(a)}da,\quad dm(a)=\frac{2}{B(a)}e^{c(a)}da$$

とおけば，(1.2)はフロベニュースの形：

$$\mathcal{G}u(a)=\frac{d}{dm(a)}\frac{d}{ds(a)}u(a) \tag{1.3}$$

の形に書きかえられることはよく知られている（→拡散過程）。更に一次元拡散

過程については正則区間で，その生成作用素がつねに(1.3)の形に書けることが知られている．

(1.3)で $s(-\infty)=-\infty$， $s(+\infty)=+\infty$ であれば，aによる尺度を $s(a)$ による尺度になおすことにより，

$$(1.4) \qquad \mathcal{G}\, u(a) = \frac{d}{dm(a)} \frac{d}{da} u(a)$$

の形に変換出来(1.1)に相当することも容易に知られる．従って1次元のときは *Brownian hitting probability* を持った拡散過程は相当に広い *sub-class* を作っていることが解る．しかし，2次元以上のときにはその事情が相当違う。

Dを有界 *Green* 領域，G^D をその *Green* 函数とし

$$(1.5) \qquad \tilde{p}_\alpha(a) = \tilde{E}_a(e^{-\alpha\tilde{\sigma}_{\partial D}}) \;, \qquad \alpha > 0$$

とおく．$\boxed{5.4}$ に類似の結果

αとDに無関係な *smooth* な測度 $e(db)$ が存在して

$$(1.6) \qquad 1-\tilde{p}_\alpha(a) = \alpha\int_D G^D(a,b)\, \tilde{p}_\alpha(b)\, e(db)$$

となる。

測度 $e(db)$ を *Brownian hitting probability* を持った拡散過程 $\tilde{D}$ の <u>*speed measure*</u> という。

(1.6)の解 $\tilde{p}_\alpha$ は一意的であるので，*speed measure* が同じであれば $\tilde{p}_\alpha$ は一致し，このことより，同じ *Green* 作用素が構成出来る。すなわち，

[A] 同じ *speed measure* をもつ2つの *Brownian hitting probability* の拡散過程は同じものである。

ことがみちびかれる。

次に E.B. Dynkin [46] に従って，

<u>aの細近傍</u>

有界開集合Dの点をa，*Brown* 運動に関するD上の *excessive function* をpとし，

$$\{ b;\ b \in D,\ |p(b)-p(a)| < 1/n \}$$

をaの細近傍という．これを近傍系として得られる位相を <u>H. Cartan</u> の細位

相(*fine topology*)という。

1次元の場合は *excessive function* は *concave*, 連続になるので細位相は普通の位相と一致する。

$R^d \supset B$ を細開集合, $a \in B$ とすれば, aから出発したBrown 運動の殆んどすべての道はある正の時間だけBに滞在する(E.B.Dynkin)。

又 *Brownian hitting probability* を持った拡散過程の *speed measure* e は細近傍の上では正の測度をもっている. 今このeに対応するBrown運動の *additive functional* を $\underset{=}{s}(t, w)$ とすると(→ 5.4), 任意の $0<s<t$ に対して

$$P_a(\underset{=}{s}(s) < \underset{=}{s}(t)) = 1$$

であることが示される。このことより除外したBrown 運動の道について修正して $\underset{=}{s}(t, w)$ としては, 次の條件を充すようなものがとれる。

1) $0 \leqq s(0) \leqq s(t\pm) = \underset{=}{s}(t) < +\infty$

2) $\underset{=}{s}(t) = \underset{=}{s}(s) + \underset{=}{s}(t-s,\ w_s^+),\qquad t \geqq s,$

3) $\underset{=}{s}(s) < \underset{=}{s}(t)\quad,\quad s<t$

次に w^* なる道を

$$w^*(t) = x(\underset{=}{s}^{-1}(t, w),\ w)$$

と定義し,

$$(1.7)\qquad \widetilde{P}_a(\widetilde{B}) = P_a(w^* \in \widetilde{B})$$

とおくと,

[B] $\widetilde{\mathbb{D}} = [\widetilde{W},\ \widetilde{\mathbb{B}}(\widetilde{W}),\ \widetilde{P}_a, a \in \overline{R}^d]$ は *speed measure* e を持った *Brownian hitting* の拡散過程である。

すなわち, $\widetilde{\mathbb{D}}$ はその *speed measure* e に対応する連続な正の *additive functional* でBrown運動を *time change* してみちびかれる。

$\widetilde{\mathbb{D}}$ の *Green* 作用素を $\widetilde{G}_\alpha$ とすると, $\widetilde{G}_\alpha$ は細位相で連続な有界函数を同じようなものに写すが, $\overset{\circ}{C}(\overline{R}^d)$ に関しては一般にはこのことはなりたたない。

[C] $\widetilde{G}_\alpha$ が $C(\overline{R}^d)$ を $C(\overline{R}^d)$ にうつすための必要十分條件はすべてのDに対して

$$\widetilde{p}(a) = \widetilde{E}_a(\widetilde{\sigma}_{\partial D}) = \int_D G^D(a, b)\ e(db)$$

がDで連続で $a \to a_0 \in \partial D$ のとき $p(a) \to 0$ となることである。

(B1-104)

8.2 Random killing

8.1 では *hitting probability* を Brown 運動と同じにして，その *speed* だけを変えた運動について述べたが，ここでは Brown 運動をする"粒子"を *random* に殺して得られる運動について述べる。この方法は物理の Feynman の方法にヒントを得て，M. Kac が考えた。

（仮定） 測度 $k(da)$ はつぎの条件をみたすとする。

任意の有界な D に対して

$$\int_D G^D(a,b)\,k(db)$$

は D の内部で連続で $a\to\partial D$ のとき 0 に収束する。

測度 $k(da)$ が上の仮定を充すとし，これに対応する Brown 運動の連続な *additive functional* を $\mathfrak{s}(t,w)$ とする。

つぎに道の空間 W に新しい座標 $0\leqq\sigma_\infty<+\infty$ をつけ加え，$P_a(\cdot)$ をつぎの法則で $\mathbb{B}(W)\times\mathbb{B}([0,+\infty))$ に拡張する。

$$(2.1)\qquad P_a(\sigma_\infty>t\,/\,\mathbb{B}(W))=e^{-\mathfrak{s}(t,w)},\qquad t\geqq 0\ .$$

一方 $\overline{R}^d$ に *extra* な点 ∞ を孤立点としてつけ加え $[0,+\infty)$ で定義された $\overline{R}^d\cup\{\infty\}$ の値をとる函数 $\mathring{w}$ で

$$\begin{aligned}\mathring{w}(t)&=w(t)\quad, &&t<\delta_\infty(w)\\ &=\infty\quad, &&t\geqq\sigma_\infty(w)\end{aligned}$$

なるものを考える。

[A] $\widetilde{\mathbb{D}}=[\mathring{w}(t);\ t\geqq 0,\ P_a,\ a\in\overline{R}^d\cup\{\infty\}]$ は拡散過程で，その生成作用素を $\widetilde{\mathfrak{g}}$ とすれば，$u\in\mathfrak{D}(\widetilde{\mathfrak{g}})$ は優調和な $u_1, u_2\geqq 0$ により $u=u_1-u_2$ とかけ，

$$(2.2)\qquad \widetilde{\mathfrak{g}}u(a)=-\frac{e^u(da)-u(a)k(da)}{da}\quad,\qquad a\in R^d$$

となる。ここに $e^u(da)$ は u_i に対応する Riesz 測度を $e^{u_i}(da)$ とするとき，$e^u(da)=e^{u_1}(da)-e^{u_2}(da)$ と定義する。

$\widetilde{\mathbb{D}}$ の推移確率は

$$\widetilde{P}(t,a,E)=E_a\{x(t,w)\in E;\ e^{-\mathfrak{s}(t,w)}\}$$

によって与えられるので

$$\widetilde{T}_t f(a) = E_a\{f(x(t,w))e^{-\underset{=}{s}(t,w)}\} \quad , \quad f \in \mathcal{C}(\overline{R}^d)$$

とおくと,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \widetilde{\mathcal{G}}\right)\widetilde{T}_t u(a) = 0 \quad , \quad u \in \mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{G}})$$

となって, $k(da)$ は熱伝導の a における吸収率になっている。

（仮定）は $k(da) = k(a)da$ で $k(\cdot)$ が有界 Borel 函数のときにはみたされている。

$\boxed{8.3}$ Random time change (K.Ito-H.P.McKean [89], G.A.Hunt [65] 参照) —— creation ——

$\boxed{8.2}$ で吸収の問題について Brown 運動を用いた模型を与えた。ここでは逆に増殖に関する模型を考える。

事情を簡単にするため 1 次元の時のみ考える。

この準備のため, まず $\boxed{8.2}$ でのべた仮定をみたす測度 $k(da)$ と Brown 運動 $\underset{=}{B} = [W, \mathcal{B}, P_a, a \in \overline{R}']$ および $k(da)$ に対応する continuous additive functional $\underset{=}{s}(t,w)$ を考える。$\underset{=}{B}$ を $\underset{=}{s}(t,w)$ により killing したとき得られる killing time を $\underset{=}{m}^{(1)}$ とし, つぎに $\{x(t, w^+_{\underset{=}{m}^{(1)}});\ 0 \leq t < +\infty\}$ を $\underset{=}{s}(t, w^+_{\underset{=}{m}^{(1)}})$ により killing したとき得られる killing time を $\underset{=}{m}^{(2)}$ とする。以下逐次 $\underset{=}{m}^{(n)}$ とする。

また

$$\ell_n(w) = x(\underset{=}{m}^{(1)} + \cdots + \underset{=}{m}^{(n)},\ w)$$

とおく。

[A]
$$P_a\{\underset{=}{m}^{(1)} + \cdots + \underset{=}{m}^{(n)} \in dt,\ \ \ell_n(w) \in d\ell\}$$
$$= E_a\left\{e^{-\underset{=}{s}(t)}\frac{(\underset{=}{s}(t))^{n-1}}{(n-1)!}\ \underset{=}{s}(dt);\ \ x(t) \in d\ell\right\} \quad , \quad n \geq 1,$$

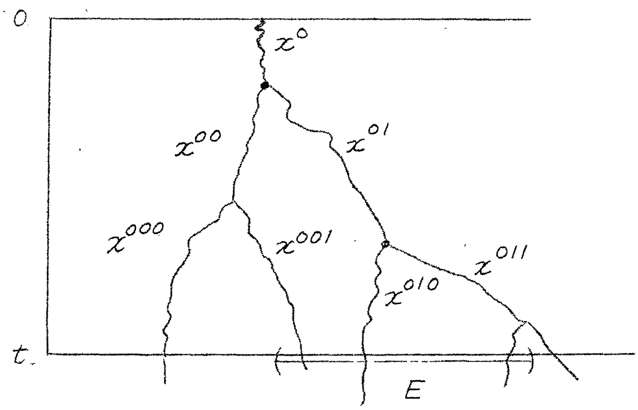
が成立つ。このことから

$$P_a\{\underset{=}{m}^{(1)} + \cdots + \underset{=}{m}^{(n)} \uparrow +\infty\} = 1$$

である。

また, いまつぎのような process を定義する。

(B.I-10b)



1) Brown 運動 $\underline{\underline{B}}^0=[W^0,\ \mathcal{B}^0,\ P_a^{(0)},\ a\in\bar{R}^1]$ を $\underline{\underline{S}}(t,w^0)$ で killing した時間を $\underline{\underline{m}}^0$ とする。

2) 時間 $\underline{\underline{m}}_0$ で $x^0(\underline{\underline{m}}^0-)$ で $\underline{\underline{B}}^0$ は Brown 運動 $\underline{\underline{B}}^{00}$ と B^{01} との2つに上図のように分れる。$\underline{\underline{B}}^{00}$ と $\underline{\underline{B}}^{01}$ はお互に独立で $\underline{\underline{B}}^0$ とは $x^0(\underline{\underline{m}}_0-)$ のみに関係するものとする。その各々の $\underline{\underline{S}}(t,w^{0i})$ による killing time を $\underline{\underline{m}}^{0i}$ とする。

3) 以下同様にして，時間 $\underline{\underline{m}}^{0i_1i_2\cdots i_{n-1}}$ で Brown 運動 $\underline{\underline{B}}^{0i_1\cdots i_{n-1}}$（但し，$i_1,\ i_2,\cdots,\ i_{n-1}=0$ または 1）は2つの Brown 運動

$$\underline{\underline{B}}^{0i_1\cdots i_{n-1}0} \quad と \quad \underline{\underline{B}}^{0i_1\cdots i_{n-1}1}$$

の2つに分れる．お互は独立で $B^{0i_1\cdots i_{n-1}}$ とは $x^{0i_1i_2\cdots i_{n-1}}(m^0+\cdots+$ $+m^{0i_1i_2\cdots i_{n-1}}-)$ のみに関する。

このようにして定義されてくるような path になり得るようなものを $\tilde{w}: t\to\tilde{w}(t)$ とする．$\tilde{w}$ の全体を $\tilde{W}$ として，$\tilde{W}$ の中の測度で上のようにして得られるものを $\tilde{P}_a$ とする。

このとき，時間 t における path が E に入っている Brown 運動の数を $n(t,E)$ とする：すなわち

$$n(t,E)=\sum_{n=1}^{+\infty}\ \sum_{i_1,\cdots,i_n=0\text{又は}1}\chi_E(x^{0i_1\cdots i_n}(t,w))$$

とする．ここで $\tilde{P}_a(n(t,R^1)<+\infty)=1$ のときは

$$[B]\qquad \tilde{E}_a(n(t,db))=E_a(e^{\underline{\underline{S}}(t,w)};\ x(t,w)\in db)$$

$$= E_a(e^{\xi(t,w)} / x(t,w) = b)\ g(t,a,b)$$
$$(\equiv e(t,a,b))$$

となる．この証明は[A]の結果を用いる。

従って，いま $f \in \mathcal{C}(\overline{R}')$ に対し

$$u(t,a) = \int_{R'} f(b)\, e(t,a,b)\, db$$

とおけば

[C] $t_1 = \sup(t;\ u < +\infty)$ とするとき

(C.1) $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \tilde{\mathcal{G}} u$

(C.2) $u \geqq 0$

(C.3) $u(0+,\cdot) = f(\cdot)$

但し $\tilde{\mathcal{G}} u = \dfrac{e^u(da) - k(da)\,u(a)}{da}$

ここで $e^u(da)$ は $\boxed{8.2}$ の(2.2)式の $e^u(da)$ と同じ *measure*。

この証明は *random killing* のときと本質的に同じ。

を考えると(C.1)～(C.3)は $t < t_1$ に対し，上の $u(t,a)$ がその解になる。しかし，このような解は任意の t に対しては成立しないことが

$$k(da) = |a|^\gamma da, \quad (\gamma > 0)$$

についてしらべられている。

[D] (K. Ito-H. P. McKean)

(1) $\gamma < 2$ の時は $e(t,a,b) < +\infty$， 及び $\int_{-\infty}^{\infty} e(t,a,b)\,db < +\infty$，
$t > 0$

(2) $\gamma = 2$ の時は

$$e(t,a,b) \ \substack{< \\ =}\ +\infty, \qquad t \ \substack{< \\ \geqq}\ \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e(t,a,b)\,db \ \substack{< \\ =}\ +\infty, \qquad t \ \substack{< \\ \geqq}\ \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

(3) $\gamma > 2$ の時は

$$e(t,a,b) = +\infty, \qquad t > 0$$

$\boxed{8.4}$ Signed additive functional による変換

Brown 運動の測度があるとき，新たに測度を作る一つの方法が確率微分方程式を解く問題として G. Maruyama [141] 等により考えられて来た。

1 次元のそれらの方法は E. B. Dynkin [43]，I. V. Girsanov [61]，M. Motoo [150] 等で多次元の場合に拡張された．ここでは M. Motoo に従ってこの問題についての結果を述べる。

$[W, \mathbb{B}(W), P_a, a \in \overline{R}^d]$ を d 次元 Brown 運動とする。

$$\mathbb{b}(x) = (b^1(x), \cdots, b^d(x)),\ b^i(x) \in \mathbb{C}(\overline{R}^1)$$

$$J_x(t, w) = J_x(t, w, \mathbb{b}) = \sum_{i=1}^{d} \int_0^t b^i(x_s(w))\, dx^i(s)$$

$$K(t, w) = K(t, w, \mathbb{b}) = \frac{1}{2}\int_0^t (\sum_{i=1}^{d} b^i(x_s(w)))^2 ds$$

$$I_x(t, w) = I_x(t, w, \mathbb{b}) = J_x(t, w, \mathbb{b}) + K(t, w, \mathbb{b})$$

$$F_x(t, w) = F_x(t, w, \mathbb{b}) = exp\{I_x(t, w, \mathbb{b})\}$$

とおく．確率微分の一般論より（→ $\boxed{3.6}$ ）

(4.1) $\quad dF(t, w) = F(t, w) \sum_i b^i(x(t, w))\, dx^i(t)$

(4.2) $\quad 0 < s < t$，f が Borel 可測ならば

$$E_x\{F_x(s+t, w) f(x(s+t)) / \mathbb{B}_s\} = F_x(s, w) E_{x(s)}\{F_{x(s)}(t, w) f(x(t))\}$$

となる。

ここで $\mathbb{B}_t$ 上の測度の系 $\widetilde{P}_{x,t}$ を次式で定義する．

(4.3) $\quad \widetilde{P}_{x,t}(B) = \int_B F_x(t, w)\, dP_x(w), \quad B \in \mathbb{B}_t$

$\boxed{5}$で述べたことより，

$\widetilde{P}_{x,t} \geqq 0$，$\widetilde{P}_{x,t}(W) = 1$ が成立し，更に任意の $s < t$，$B \in \mathbb{B}_s$ に対し，

$$\widetilde{P}_{x,s}(B) = \widetilde{P}_{x,t}(B)$$

となる。

[A] つぎの関係をみたす唯一つの Markov 過程 $\widetilde{D} = [W, \mathbb{B}, \widetilde{P}_x, x \in \overline{R}^d]$ が存在する：任意の $B \in \mathbb{B}_t$ に対し

(4.4) $\quad \widetilde{P}_x(B)=E_x\{F_x(t,w);\ B\}=\widetilde{P}_{x;t}(B)$

しかし $\mathcal{B}_t$ に制約すれば P_x と $\widetilde{P}_x$ とはお互に絶対連続である．

$\widetilde{D}$ の半群を $\widetilde{P}_t$ とすれば

[B] $\widetilde{T}_t$ は $\mathbb{C}(\overline{R}^d)\to\mathbb{C}(\overline{R}^d)$ 且つ強連続で

1) $f\in\mathbb{C}(\overline{R}^d)$ $f\geqq 0$ ならば $\widetilde{T}_t f\geqq 0$

2) $\widetilde{T}_t 1=1$

3) $\widetilde{T}_{t+s}=\widetilde{T}_t\widetilde{T}_s$

となる．

[B]より Yosida-Hille の意味の生成作用素 $\widetilde{\mathcal{G}}$ が定義可能になる．その定義域を $\mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{G}})$ とする。

[C] $f\in\mathbb{C}^2(\overline{R}^d)$ とすれば

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{t}(\widetilde{T}_t f(x)-f(x))=\Big(\frac{1}{2}\sum_i\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}+\sum_i b^i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)f(x)$$

$$x=(x_1\cdots x_d)\in R^d$$

である。

いま $\quad K_r=K_r(x)=\{y;\ \sum_{i=1}^{d}|y_i-x_i|<r\}$

ω: ∂K_r の体積

$d\omega$: ∂K_r の体積要素

$$S_r f(x)=\frac{d}{r^2}\Big\{\int_{\partial K_r}\frac{1}{\omega_i}(f(\xi)+\Sigma(\xi_i-x_i)b^i(x)\,d\omega-f(x)\Big\}$$

とおき，もし $\lim_{r\downarrow 0}S_r f(x)$ が存在すれば

$$Sf(x)=\lim_{r\downarrow 0}S_r f(x)$$

と定義する。

[D] $b(x)$ が任意の $x\in R^d$ に対して

$$|b^i(x)-b^i(y)|\leqq L_x\sqrt{\Sigma|y_i-x_i|^2}$$

をみたす L_x が存在するという Lipschitz の条件をみたせば

$$\mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{G}})=\mathbb{C}(\overline{R}^d)\cap\{f;\ Sf \text{ が存在し，} Sf\in\mathbb{C}(\overline{R}^d)\}$$

(B1-110)

で，任意の $f\in\mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{G}})$ に対し

$$\mathcal{S}f=\widetilde{\mathcal{G}}f$$

となる。

上の結果より，$\widetilde{D}$ は Brown 運動について成立つたつぎの性質をもつ。

1°) $d=1$ のときは局所重複対数の法則が成り立つ．また $d\geqq 2$ のときはそれの拡張がなりたつ（→ 図）。

2°) F が R^d のコンパクト集合であれば，

$$\widetilde{P}_x\,(\text{ある } t>0 \text{ に対して } x(t)\in F)>0$$

なるための必十条件は F の容量が正なることである（→ $\boxed{6.1}$）。

3°) $d=2,3$ のときは，$\widetilde{D}$ の道は確率 1 で無限箇の２重点をもつ。

$d\geqq 4$ のときは確率 1 で２重点をもたない（→ $\boxed{6.1}$）。

以上の結果は確率微分方程式の解の一つの構成法に相当するものであるが，このような解の逐次近似による方法として K. Ito [76] の確率積分の方法がある（→ $\boxed{3.6}$）。

$\boxed{8.5}$ Wiener空間における変数の変換

[1°] 廻転による変換

$[W, \mathbb{B}(W), P_a, a\in R^2]$ を２次元 Brown 運動とする。

$W\ni w=(w_1, w_2)$ に $\widetilde{w}=(\widetilde{w}_1, \widetilde{w}_2)$ を対応させる可測写像 R を任意の θ に対して，

$$(5.1)\qquad R:\begin{cases}\widetilde{w}_1(t)-\widetilde{w}_1(0)=(w_1(t)-w_1(0))\cos\theta-(w_2(t)-w_2(0))\sin\theta\\ \widetilde{w}_2(t)-\widetilde{w}_2(0)=(w_1(t)-w_1(0))\sin\theta+(w_2(t)-w_2(0))\cos\theta\end{cases}$$

と定義する．

Wiener 測度 P_a は廻転 R で不変である．すなわち

[A] W 上の P_a 可積分函数 $f(w)$ に対して

$$(5.2)\qquad \int_W f(w)\,dP_a(w)=\int_W f(Rw)\,dP_a(w)$$

(5.2) はもっと一般な次の変換 R に対してもなりたつ。

$\theta(t)$ を任意の有限区間で有界変動とし，

$$(5.3)\qquad R:\begin{cases}\widetilde{w}_1(t)-\widetilde{w}_1(0)=\int_0^t\cos\theta(s)\,dw_1(s)-\int_0^t\sin\theta(s)\,dw_2(s)\\ \widetilde{w}_2(t)-\widetilde{w}_2(0)=\int_0^t\sin\theta(s)\,dw_1(s)+\int_0^t\sin\theta(s)\,dw_2(s)\end{cases}$$

として(5.2)がなりたつ。

[2°] <u>Translation</u> <u>による変換</u>

$w_0 \in W$ に対して

$$(5.4) \qquad T_{w_0} w = w + w_0$$

と定義し，T_{w_0} を W の <u>translation</u> という．

[B] w_0 が絶対連続で，任意有限区間で有界変動とし，更に $w_0'(\cdot) \in L^2([0,1])$ ならば，T_{w_0} は可測変換で $\mathbb{B}_t$ 可測な可積分函数 $f(w)$ に対して

$$(5.5) \qquad \int_W f(w_t^-)\, dP_a(w) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^t (w_0'(s))^2 ds\right\} \int_W f((T_{w_0} w)_t^-) \exp\left\{-\int_0^t w_0'(s) dw(s)\right\} dP_a(w)$$

がなりたつ。

上の条件をみたすような w_0 は $\boxed{4.1}$ から殆んど存在しないが，実際，T_{w_0} は殆んどすべての $w_0 \in W$ に対して非可測な変換であることが示される．更に次の定理がなりたつ。

$E \in \mathbb{B}_t$ とするとき，次のような表現は存在しない。

$$(5.6) \qquad P_0(E) = \int_E f(w)\, dQ(w)$$

ここで，Q は $\mathbb{B}_t$ 上の σ-finite な translation に関して不変な測度で，f は $\mathbb{B}_t$ 可測で，Q と f は E に無関係である．

f が $\mathbb{B}_t$ 可測非負なとき，任意の $E \in \mathbb{B}(W)$ に対して

$$Q(E) = \int_E f(w)\, dP_0(w)$$

とおく．もし $T_w E \in \mathbb{B}_t$ のとき $Q(E) = Q(T_w E)$ ならば $Q \equiv 0$ である。

[3°] <u>一次変換</u>

$I = [0,t] \times [0,t]$ とし，I で定義された函数 $K(s,u)$ が次の条件をみたすとする。

1) $K(s,u)$ は I で連続

2) 殆んどすべての u に対して $\frac{\partial}{\partial s} K(s,u)$ が存在し，I 上殆んどすべての (s,u) に対し $\frac{\partial}{\partial s} K(s,u) = H(s,u)$ なる可測函数が存在し，$H(s,u)$ は各 u に関して，s について有界変動で，

$$\int_0^t \sup_{0 \leqq s \leqq t} |H(s,u)|\, du < +\infty, \quad \int_0^t \operatorname*{Var}_{0 \leqq s \leqq t} [H(s,u)]\, du < +\infty$$

[C] Kが上の条件をみたすとき,

$$T: \ w \to \widetilde{w}(s) = w(s) + \int_0^t K(s,u)\, w(u)\, du$$

とおけば, $\mathbb{B}_t$ 可測可積分函数 f に対して

$$(5.7) \qquad \int_W f(w_t^-)\, dP_a(w) = |D| \int_W f((T_w)_t^-)\, exp\left(-\frac{1}{2}\, \Phi(w)\right) dP_a(w)$$

である. ここに

$$D = 1 + \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu!} \int_0^t \cdots \int_0^t \begin{vmatrix} K_1(s_1, s_1) \cdots K(s_1, s_\mu) \\ \text{-------------} \\ K(s_\mu, s_1) \cdots K(s_\mu, s_\mu) \end{vmatrix} ds_1 \cdots ds_\mu$$

$$\Phi(w) = \int_0^t \left(\int_0^t \frac{\partial}{\partial s} K(s,u)\, w(u)\, du\right)^2 ds + 2\int_0^t \left(\int_0^t \frac{\partial}{\partial s} K(s,u)\, w(u)\, du\right) dw(s)$$

とする.

[4°] 一般な非線型変換

Wを $\boxed{1.6}$ で定義した距離による位相空間と考え, Sをその閉且つ凸な集合とする. $I=[o,t]$ とするとき $S \times I$ 上の函数 $\Lambda(w,s)$が“滑めらかな変分”をもつとは, 第一変分 $\delta\Lambda(w,s) = \left[\frac{\partial}{\partial v}\Lambda(w+v\widetilde{w}, s)\right]_{v=0}$ がすべての $(w, s, \widetilde{w}) \in W \times S \times W_t$ ($W_t = \{w_t^-;\ w \in W\}$) に対して存在し, $\delta\Lambda(w, s, \widetilde{w}) = \int_0^t K(w, s, u)\, \widetilde{w}(u)\, du$ $(w, s, \widetilde{w}) \in S \times I \times W_t$ とあらわされることとする。ここで変分の核 $K(w,s,u)$ は (w,s,u) について連続とする.

定理を述べるために, 変換の可測を保存する次の条件を仮定する。

1) $\Lambda(w,s)$ は $W_t \times I$ で定義された滑めらかな変分をもつ函数とし, $K(w,s,u)$ $(w,s,u) \in W_t \times I \times I$ を対応する核とする.

2) w_0 が存在して $\Lambda(w_0, s)$ は $s \in I$ に関して連続

3) w_0 が存在して, $\Lambda_S(w_0, s)$ が存在し, $s \in I$ に関して連続且つ有界変動

4) $K(w, o, u) = o$, $(w, u) \in W_t \times I$

5) 任意の $(w,s) \in W \times I$ に対して, $\left\{\int_0^t (K(w,s,u))^2 du\right\}^{\frac{1}{2}} \leqq \lambda < t^{-\frac{1}{2}}$

6) $K_S(w,s,u)$ が存在して $(w,s,u) \in W_t \times I \times I$ に関し連続

7) $K_S(w,s,u)$ は $(w,u) \in W_t \times I$ を固定するとき s に関して有界変動

8) $\sup\limits_{u \in I} \operatorname*{Var}\limits_{s \in I}[K_S(w,s,u)]$, $\max\limits_{(s,u) \in I \times I} |K_S(w,s,u)|$ は $w \in W_t$ の有界集合上

では有界である。

[D]　Λ，Kが上の条件をみたすとき，

$$T:\ w \to \tilde{w} = w + \Lambda(w, \cdot)$$

とおけば，$\mathcal{B}_t$可測可積分函数fに対して，次の等式が一方が存在すれば他方も存在してなりたつ。

$$(5.8)\qquad \int_W f(w_t^-)\,dP_a(w) = \int_W f((Tw)_t^-)\exp\left\{-\int_0^t\left(\frac{\partial}{\partial s}\Lambda(w,s)\right)dw(s) - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{2}\int_0^t\left(\frac{\partial}{\partial s}\Lambda(w,s)\right)^2 ds\ \right|D(w)|\,dP_a(w)$$

ここに

$$D(w) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\int_0^t\cdots\int_0^t \begin{vmatrix} K(w,s_1,s_1) & \cdots & K(w,s_1,s_k) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ K(w,s_k,s_1) & \cdots & K(w,s_k,s_k) \end{vmatrix} ds_1\cdots ds_k$$

9 一般のBrown運動

9.0 Brown 運動の一般化は，その状態空間，時間パラメータの2方向に沿って考えられる．

状態空間のみを一般化する場合には，時間的にも空間的にも一様な拡散過程を一般の Brown運動という。時間パラメータを一般化する場合には，道が連続な正規型変数系を一般のパラメータの Brown運動という．パラメータの一般化は，例えば時間，場所，気圧等に依存する偶然現象の模型化として実際的な意味が考えられる。

9.1 Riemann 空間上の Brown 運動

Sを可符号，連続な Riemann 空間とする．S上の拡散過程 $\mathbb{D}=[W, \mathbb{B}(W), \mathbb{P}_x, x\in S]$ の推移確率を $P(t,x,E)$，S の等長変換全体のつくる群をGとする．GがS上で可遷的であるとき，任意の$g\in G$ に対して $P(t,x,E)=P(t, gx, gE)$であれば，$\mathbb{D}$をS上の Brown運動という。Gが適当な条件をみたしているときには，S上にBrown運動を構成することが出来る．

例

1. S：単位円周の場合

$G=\{e^{i\theta};\ -\infty<\theta<+\infty\}$ で，$P(t,x,E)$ の密度函数が存在し，

$$p(t,\theta,\varphi)=\sum_{|n|\geqq 0}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{n^2}{2}t}e^{in(\theta-\varphi)}$$

2. S：3次元の球面の場合

Gは3次元の廻転群で

$$p(t,(\theta,\varphi),(\theta',\varphi'))=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}e^{-n(n+1)t}Y_n^{(m)}(\theta,\varphi)Y_n^{(m)}(\theta',\varphi')$$

$Y_\theta^{(m)}$ は球面調和函数である（→ K. Yosida [199]）。

3. S：Labachevsky 平面の場合（→ 9.3 ）．

Sの基本テンソルを a_{ij} とし，Sが多様体として C^∞ で $a_{ij}\in C^\infty(S)$ 且つ狭義正定符号としておく．そのとき，S上の Laplace-Beltrami の微分作用素は

$$\Delta=\frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{a}\ a^{ij}\frac{\partial}{\partial x^j}\right)=a^{ij}\frac{\partial^2}{\partial x^i\partial x^j}+\frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{a}\,a^{ij})\frac{\partial}{\partial x^j}$$

ここに $a=\det(a_{ij})$，a^{ij} は a_{ij} の反変成分

で，上の例 1，2 のとき，生成作用素はこれの特殊な場合で，$C^2(S)$ の上では，

$$\Delta = \frac{d^2}{d\theta^2}, \quad \Delta = \Lambda = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$ となる。

9.2 Green空間上のBrown運動

S を d 次元位相多様体とする．$D_i \subset S$ $(i=1,2)$ は R^d の開球 $\widetilde{D}_i$ と同相とし，$\varphi_i : D_i \to \widetilde{D}_i$ をその同相写像とする．$D_1 \cap D_2 \neq \phi$ のとき，

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1};\ \widetilde{D}_1 \cap \widetilde{D}_2 \to \widetilde{D}_1 \cap \widetilde{D}_2$$

が等距離写像ならば，S を d 次元 Green 空間（d − dimensional Greenian space）という。

R^d の開球と同相な S の開集合を座標近傍という．定義より，Green 空間には自然な仕方で R^d の距離，“Lebesgue 測度 da” 等がみちびかれる．

[1°] 定義

S に extra な点 ∞ を孤立点としてつけ加え $\widetilde{S} = S \cup \{\infty\}$ とおく．$S \cup \{\infty\}$ 上の拡散過程 $\mathbb{D} = [W, \mathbb{B}(W), P_\xi, \xi \in \widetilde{S}]$ が次の条件をみたすならば，$\mathbb{D}$ を Green 空間 S 上の Brown 運動という。

(B_1) $\mathbb{D}$ は強 Markov 過程である。

(B_2) 任意の座標近傍 D に対して

$$P_\xi(\sigma_{\partial D}(w^+_{\sigma_D}) < +\infty / \sigma_D(w) < +\infty) = 1 \qquad \xi \in S$$

(B_3) D を開球 $\widetilde{D}$ と同相な座標近傍とし $\varphi : D \to \widetilde{D}$ を同相写像とすれば，

$$[\varphi(z(t,w);\ 0 \leqq t < +\infty] \qquad z(tw) = w(t)$$

は $\widetilde{D}$ の minimal な Brown 運動である。

普通の Brown 運動を局所的に接続して行く方法により，任意の Green 空間に対して，その上の Brown 運動が唯一つ存在することが示される。(J. L. Doob [32])．

例

1°) S が R^d の連結領域のときは $\sigma_{+\infty} = \sigma_{\partial D}$ である。

$\boxed{6.1}$ から，S が有界ならば $P_\xi(\sigma_{+\infty} < +\infty) = 1$，$d > 2$ で $R^d - S$ の容量が >0 又は $=0$ に従つて $0 < P_\xi(\sigma_{+\infty} < +\infty) < 1$ 又は $P_\xi(\sigma_{+\infty} = +\infty) = 1$ となる。

2°) R^d の開集合 S_0 の被覆空間 S は Green 空間と考えられる。$S_0 = R^2 -$

{原点}とすると，対数函数の Riemann 面 S_1，$S_0=R^2-\{2点\}$ に対しては楕円モジュラー函数の Riemann 面 S_2 がそのような例である。S_i 上の Brown 運動に対しては $P_\xi(\sigma_{+\infty}<+\infty)=1$ であるが，S_1 のときは道はそこで稠密，S_2 のときは疎な集合となる。

[2°] 道の性質

次の Green 空間 S 上の Brown 運動に関する普通の Brown 運動類似の性質をあげる（J.L.Doob [32]）。

(a) S がコンパクトでない Green 空間のときは，S のコンパクトな閉包をもつ任意の開集合 D に対して

$$P_\xi(\sigma_{\partial D}<+\infty)=1 \qquad \xi\in D$$

Green 空間 S は，その上で定義された劣調和函数で上に有界なものが，すべて定数となるとき，null boundary をもつといい，そうでないとき positive boundary をもつという。

(b) S を $d(\geqq 2)$ 次元 Green 空間とする。S 上の Brown 運動の殆んどすべての道に対して

$\sigma_{+\infty}(w)<+\infty$ なるものに対しては $\{w(s);\ 0\leqq s<\sigma_{+\infty}(w)\}$，

$\sigma_{+\infty}(w)=+\infty$ なるものに対しては $\{w(s);\ 0\leqq s\leqq t\}$ $(t>0)$

なる集合をとれば，いずれも S で疎である。

(c) S が null boundary をもつならば

(i) $P_\xi(\sigma_{+\infty}=+\infty)=1$

(ii) 殆んどすべての w に対して，$\{w(s);\ 0\leqq w(s)<+\infty\}$ は S で稠密である。

(iii) 閉集合 A が正の容量をもつならば $U_A(\xi)=P_\xi(\sigma_{+\infty}(w)$ に任意に近い時刻 t で $w(t)\in A)$（S で調和）とおけば $U_A\equiv 1$ となる。

(d) S を $d(\geqq 2)$ 次元 Green 空間で連結且つ positive boundary をもつとする。

(i) 殆んどすべての道 w に対して $\{w(s);\ 0\leqq s<\sigma_{+\infty}(w)\}$ は S で疎，且つ

$$\lim_{t\uparrow\sigma_{+\infty}(w)} w(t)=\infty$$

(ii) A がコンパクトならば $U_A\equiv 0$

(iii) A がコンパクトのとき

$$\tilde{\sigma}_A(w)=\inf\{t;\ t>0,\ \ z(t,w)\in A\}$$
$$u_A(\xi)=P_\xi(\tilde{\sigma}_A<+\infty)\quad(S\text{ で優調和},\quad -A\text{ で調和})$$

とおくと，$S-A$ のある開成分のうち，閉包がコンパクトでないものの上で $u_A<1$ となる．

(e)　Sが positive boundary をもち，Aがそのコンパクト集合のとき，

$$\tau_A(w) = \sup\{t;\ z(t,w) \in A\}$$

とおくと，$E_\xi(\tau_A)$ は $\xi \in A$ の有界函数となる．

[3°]　Green 函数

Green 空間S上の Brown 運動の推移確率を

$$P(t,\xi,E) = E_\xi(\chi_E(z(t,w)))$$

とすると，$(\xi,\eta) \in S \times S$ について連続な密度 $p(t,\xi,\eta)$ をもち，ξ，η について対称であることが領域の minimal な Brown 運動の場合と同様に示される．

このとき，

$$G(\xi,\eta) = \int_0^{+\infty} p(t,\xi,\eta)\,dt$$

とおくと，

GはSの Green 函数で，次のようなものとして特徴づけられる．

DをSの座標近傍とし，Dを R^d の開領域と見なし，G^Dを $\boxed{2.2}$ で定義したDの Green函数とする．すなわち

$$G^D(\xi,\eta) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(\frac{d}{2}-1)}{4\pi^{d/2}} \|\xi-\eta\|^{2-d}, & d \geqq 3 \\ \dfrac{1}{\pi} \log \|\xi-\eta\|^{-1}, & d = 2 \end{cases} \qquad \xi,\eta \in D$$

このとき，$d \geqq 2$に対して，Gは次の性質をもつものとしてS上に唯一つ定まる．

1)　$G(\cdot,\eta)$はηの各近傍の外では有界である．

2)　$G(\cdot,\eta)$はSで優調和，$S-\{\eta\}$で調和である．

3)　$G(\cdot,\eta)-G^D(\cdot,\eta)$ はηで適当に定義することによりηの近傍で調和になる．

4)　$P_\xi\{\lim_{t\uparrow\sigma_{+\infty}(w)} G(z(t,w),\eta) = 0 \,/\, \sigma_{+\infty}(w) = +\infty\} = 1$

Dirichlet 問題，Potential論等が R^d の Green 領域の場合の拡張として考えられている．これについては，J. L. Doob [32] を参照．又 space-time

のBrown運動も $\boxed{2.4}$ と同様にしてみちびかれる.

なおRiemann面の型とその上のBrown運動については J. L. Doob[34], S. Kakutani[97], [98] を参照。

$\boxed{9.3}$ Lobachevsky 平面上のBrown運動

[1°] Lobachevsky平面（又はHyperbolic plane）

単位円 $D=\{z=x+iy\ ;\ |z|<1\}$ に

$$ds^2 = 4\,\frac{1}{(1-|z|^2)^2}\,(dx^2+dy^2)$$

なるRiemann計量をあたえた空間をLobachevsky平面という.

2点 $z_1,\ z_2\in D$ を結ぶ測地線は $z_1,\ z_2$ をとおり $|z|=1$ と直交する円で, 測地線にそってはかった距離-Hyperbolic distance-$\rho(z_1,\ z_2)$は

$$\tanh\frac{\rho}{2} = \frac{|z_1-z_2|}{|1-\bar{z}_1 z_2|}$$

で与えられる。

点 $z\in D$ の双曲的極座標（hyperbolic polar coordinate）は (ρ,θ)。ここに

$$\rho=\rho(0,z)=2\tanh^{-1}|z| \quad , \qquad 0\leqq\rho<+\infty$$
$$\theta=\arg z \quad , \qquad 0\leqq\theta<2\pi$$

$D\to D$の変換で距離ρを不変に保つものの全体をGとすると, $g\in G$ は

$$gz\equiv w=e^{i\theta}\,\frac{z-z_0}{z-\bar{z}_0 z} \quad , \qquad 0\leqq\theta<2\pi,\quad z_0\in D$$

なる一次変換で与えられる. Gを運動群という。$z\to w$なる写像を

$$r_\theta z\equiv w=e^{i\theta}z, \qquad n_{z_0}z\equiv w=\frac{z-z_0}{z-\bar{z}_0 z}$$

と定義すると,

$$g=r_\theta\, n_{z_0}$$

と分解出来る. そのとき,

$$R=\{r_\theta\ ;\ 0\leqq\theta<2\pi\},\quad N=\{n_{z_0}\ ;\ z_0\in D\}$$

はGの部分群で, $G=R\cdot N$, $R\cap N=\{\text{単位元}\}$となる.

Rの元をrotation, Nの元をtranslationという.

[2°] Lobachevsky平面上のBrown運動

Lobachevsky平面D上のconcervativeなMarkov過程で

1) 道は連続

2) G-不変，すなわち，すべての$g\in G$に対して，推移確率が$P(t,z,E)=P(t,gz,gE)$をみたす，

ものが（定数の違いをのぞいて）一意的に定まる。これを<u>Lobachevsky平面上のBrown運動</u>という．

この事実を示す方法は種々あるが，V. N. Tutubalin[207]，R. Getoor[60]の結果を用いることが出来る．

第1種Legendre函数$P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(x)$に対し

$$\varphi_t(\lambda)=\int_D P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\cosh\rho(z))P(t,o,dz)\qquad \rho(z)=\rho(o,z)=2\tanh^{-1}|z|$$

とおくと，G-不変なMarkov過程については，$\varphi_{t+s}(\lambda)=\varphi_t(\lambda)\varphi_s(\lambda)$となる。このような$\varphi_t(\lambda)$はV. N. Tutubalin，R. Getoorの結果から

$$\varphi_t(\lambda)=e^{-t\psi(\lambda)}$$

$$\psi(\lambda)=c\left(\frac{1}{4}+\lambda^2\right)+\int_{0+}^{+\infty}[1-P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\cosh\rho)]\,n(d\rho)$$

$$c\geqq 0,\qquad \int_1^\infty n(d\rho)+\int_{0+}^1\rho^2 n(d\rho)<+\infty$$

とかける．条件 1) のもとにLévy測度$n(d\rho)\equiv 0$，となり

(3.1) $$\varphi_t(\lambda)=e^{-c(\frac{1}{4}+\lambda^2)t}$$

逆に，これに対応するG-不変なprocessは唯一つ存在し，$c\Delta$

(3.2) $$\Delta=\left(\frac{1-|z|^2}{2}\right)^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$$ ：D上のLaplace-Beltramiの微分作用素

を生成作用素とする拡散過程で，単位円Dの吸収壁Brown運動$z(t,w)$から

$$\tilde{z}(t,w)=z(S^{-1}(t,w),w)$$

$$S(t,w)=\int_0^t\frac{2}{c}\frac{du}{(1-|z(u,w)|^2)^2}$$

として得られる．

$c=1$のとき，

$$P(t,o,dz)=P(t,\rho(z))\frac{4}{(1-|z|^2)^2}\,dxdy$$

(B1-120)

$$(3.3)\qquad p(t,\rho)=\frac{e^{-\frac{t}{4}}}{(2\pi t)^{3/2}}\int_{\rho}^{+\infty}\frac{\xi e^{-\xi^2/4t}}{(\cosh\xi-\cosh\rho)^{\frac{1}{2}}}\,d\xi$$

(F.I.Karpelevich-V.N.Tutubalin-M.G.Schour[103], R.Getoor[60])

となる.

[3°] 道の一性質

単位円のBrown運動をtime changeして得られたことから，道の図形的な性質は単位円吸収壁Brown運動と全く同じである．ただ境界 $|z|=1$ へ到達するのに無限の時間がかかるのでconcervativeになる．又あきらかにtransientであるが，Euclid空間の場合に比べて，その度合が非常に強い。

KをDのコンパクト集合，θ_Kを最後にKをはなれる時間とするとき，

$$E_0(e^{\lambda\theta_K})\begin{cases}<+\infty, & \lambda\leqq\frac{1}{4}\\ =+\infty, & \lambda>\frac{1}{4}\end{cases}$$

（今，Dのcurvatureが -1 のときであるが，curvatureを $-k$ とするときは $\lambda\leqq\frac{1}{4}\sqrt{k}$ となる）。

このことは，Kが円板

$$K=\{z;\ \rho(z)<r\}\quad,\quad r>0$$

についてみればよい。一般に

$$P_x(\theta_K\in dt)=\int_{\partial K}p(t,x,y)\mu_K(dy)\cdot dt$$

（μ_KはKの平衡分布）がなりたつから，今の場合 $\mu_K(dy)$ = 定数 $\times\,\partial K$ 上の一様な測度 になることに注意して(3.3)を用いると

$$E_0(e^{\lambda\theta_K})=const\times\int_0^{+\infty}\frac{e^{\lambda t}e^{-\frac{t}{4}}}{t^{\frac{3}{2}}}\,dt\int_r^{+\infty}\frac{se^{-\frac{s^2}{4t}}}{(\cosh s-\cosh r)^{\frac{1}{2}}}\,ds$$

$$<+\infty\quad,\quad\lambda\leqq\frac{1}{4}$$

$$=+\infty\quad,\quad\lambda>\frac{1}{4}$$

この事実は，Lobachevsky平面ではΔのスペクトルが真に負で切れる（今の場合 $-\frac{1}{4}$）という解析的事実に対応し，Lobachevsky平面では円板の面積が半径と共に指数的に増加するという空間の性質の反映である.

なお，E.B.Dynkin[47]はnegativeなcurvatureをもったある対称空間Eを考え，そこにおけるLaplace-Beltrami作用素Aおよび，それを生

成作用素とする $Brown$ 運動に対してつぎの問題を考えた。

$$(A-C)f=0 \qquad C\text{は函数}$$

に対応する $Green$ 函数を具体的に構成しその極限の状態をしらべ，それらを基礎に Martinにならって，上の方程式の非負な解をすべて表わすことを考えている．上の式は必ずしも正でなく空間 E の特性に応じて負の値より大きいときは non-$trivial$ な解をもつ．このような特徴は $negative\ curvature$ をもっていることと深い関係がある。

9.4 多次元パラメータの $Brown$ 運動

[1°] 定義

$(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), P)$ を基礎の確率空間とし，R^N の点をパラメータにもつ確率変数の系 $[x(a,\bar{\omega});\ a\in R^N]$ は次の3条件をみたすとき，N次元パラメータの $Brown$ 運動という。

(4.1) $[x(a);\ a\in R^N]$ は正規型変数系で

$$E(x(a))=0 \qquad a\in R^N$$

(4.2) $\Gamma(a,b)\equiv E(x(a)x(b))=\frac{1}{2}[\|a\|+\|b\|-\|b-a\|]$

(4.3) $P(x(0,\bar{\omega})=0)=1$,　　0：原点

この存在は (4.2) の $\Gamma(a,b)$ が非負定符号なことと，正規型変数系の存在定理よりみちびかれる。

定義から $Brown$ 運動はパラメータ a に関する回転によって不変であり，$a_0\in R^N$ を固定すれば $[x(a)-x(a_0);\ a\in R^N]$ は R^N の原点を a_0 にかえて $Brown$ 運動となる。また R^N の原点を通る直線を L とすると $[x(a);\ a\in L]$ はすでに定義した1次元 $Brown$ 運動となる。

(4.2) より

$$E[(x(c)-x(d))(x(a)-x(b))]=\frac{1}{2}[\|b-c\|+\|a-d\|-\|a-c\|-\|b-d\|]$$

であるから，

a,b を定点とするとき，$x(c)-x(d)$ と $x(a)-x(b)$ が互に独立なための必要十分条件は，c,d が a,b を焦点とする回転二葉双曲面の同じ $sheet$ 上にあることである。

がみちびかれる．この結果は通常の $Brown$ 運動のような加法性に相当する性質を考えるのが困難なことをあらわす。

$[A_1]$（射影不変性）　a^* を R^N の単位球に関する a の反転とすれば

(B1-122)

$$x^*(a) = \begin{cases} \|a\| x(a^*) , & a \neq 0 \\ 0 , & a = 0 \end{cases}$$

とおくとき $[x^*(a);\ a \in R^N]$ も又 Brown 運動である.

[2°] 連続性

$[A_2]$ $[x(a);\ a \in R^N]$ を Brown 運動とすれば, 殆んどすべての $\bar{\omega}$ に対して $x(a, \bar{\omega})$ は a の連続函数である.

更にそのくわしい連続性については, 1 次元の場合と類似の性質が P. Lévy 以来よく知られている. 図と同様に上級, 下級の概念を次のように定義する.

十分大きな t に対して定義された正の函数 $\varphi(t)$ に対して

$$E_\varphi(\bar{\omega}) = \left\{ a;\ x(a, \bar{\omega}) > \|a\|^{\frac{1}{2}} \varphi\left(\frac{1}{\|a\|}\right) \right\} \tag{4.4}$$

とおくとき,

$$P(E_\varphi(\bar{\omega}) \text{ の閉包が } 0 \text{ を含む}) = 0 \ (=1) \tag{4.5}$$

のとき, φ は上級 $\mathfrak{U}_N^0$ (下級 $\mathfrak{L}_N^0$) に属するという. この定義は $N=1$ のときには $\boxed{4.2}$ と全く同じものである.

$[A_3]$ (局所連続性) 正の単調増大函数 φ が $\mathfrak{U}_N^0$ ($\mathfrak{L}_N^0$) に属するための必要十分条件は

$$\int_{t_0}^{+\infty} \frac{1}{t} \varphi^{2N-1}(t)\, e^{-\frac{1}{2}\varphi^2(t)} dt < +\infty \ (=+\infty) \tag{4.6}$$

である. ただし $t_0 (>0)$ は φ の定義域内の一点である (T. Sirao [164]).

従って

$[A_4]$ $\varphi(t) = \left\{ 2\log_{(2)} t + (2N+1)\log_{(3)} t + 2\log_{(4)} t + \cdots + 2\log_{(n-1)} t + (2+\delta)\log_{(n)} t \right\}^{\frac{1}{2}}$

は $\delta > 0$ のとき $\mathfrak{U}_N^0$ に属し, $\delta \leqq 0$ のとき $\mathfrak{L}_N^0$ に属する。

$[A_4]$ と定義から

$[A_5]$ $$P\left(\overline{\lim_{a \to 0}} \frac{x(a, \bar{\omega})}{\sqrt{2\|a\| \log\log \frac{1}{\|a\|}}} = 1 \right) = 1$$

がみちびかれる。

射影不変性の定理 $[A_1]$ を適用すれば, $[A_3] \sim [A_5]$ は $a \to +\infty$ のときの $x(a)$ の性質をあらわす。

次に十分大きな t に対して定義された正の函数 $\psi(t)$ に対して, $\varphi(t) = \psi(\frac{1}{t})\sqrt{t}$

とおき，$[x(a,\bar{\omega});\ \|a\|\leqq 1]$ が $\varphi(t)$ に関する Lipschitz の条件(3.3.1)をみたす確率が1のとき $\psi(t)$ は上級 $\mathfrak{U}_N^u$ に属するといい，確率が0のとき下級 $\mathfrak{L}_N^u$ に属するという。

$[A_6]$ (一様連続性)　正の単調増大函数 $\psi(t)$ が $\mathfrak{U}_N^u$ ($\mathfrak{L}_N^u$) に属するための必要十分条件は

$$(4.7)\qquad \int_{t_0}^{+\infty} t^{N-1}\psi^{4N-1}(t)\,e^{-\frac{1}{2}\psi^2(t)}\,dt<+\infty \qquad (=+\infty)$$

である．$t_0\,(>0)$ は ψ の定義域内の一点とする。(T. Sirao).

これから

$$[A_7]\qquad \psi(t)=\left\{2N\log t+(4N+1)\log_{(2)}t+2\log_{(3)}t+\cdots+2\log_{(n-1)}t+(2+\delta)\log_{(n)}t\right\}^{\frac{1}{2}}$$

は $\delta>0$ のとき $\mathfrak{U}_N^u$ に属し，$\delta\leqq 0$ のとき $\mathfrak{L}_N^u$ に属する。

$$[A_8]\qquad P\Big(\lim_{\substack{\|a-b\|\to 0\\ \|a\|,\|b\|\leqq 1}}\frac{|x(a,\bar{\omega})-x(b,\bar{\omega})|}{\sqrt{2N\|a-b\|\log\frac{1}{\|a-b\|}}}=1\Big)=1$$

がなりたつ。

[3°]　白色雑音 (white noise) (→ N. N. Tchentsov [178], H. P. McKean [203], P. Lévy [132])

$\boxed{3.3}$ で述べた正規彷徨測度と類似のものを多次元パラメータの Brown 運動からみちびき，それを用いて Brown 運動の性質をしらべる。ここでは主として H. P. McKean による方法(未発表)を述べる。(*)

S を R^N の単位球面，σ をその上の一様な測度で $\sigma(S)=1$ なるものとし，$\mathbb{B}^*$ を $\mathbb{B}([0,+\infty))$ の Lebesgue 測度有限なものの全体とする。このとき次の性質をみたす正規変数系 $[e(T\times A);\ T\in\mathbb{B}^*,\ A\in\mathbb{B}(S)]$ が存在する。

(4.8)　$E(e(T\times A))=0$

(4.9)　$E(e(T\times A)^2)=|T|\sigma(A)$，　$|T|$ は T の Lebesgue 測度

(4.10)　$e(T\times A)$ は T および A について完全加法的である

正規彷徨測度 $e(dt\times da)$, $t\in[0,+\infty)$, $a\in S$ を白色雑音 white noise とよぶ。これによる Wiener 積分を考えて，

(*)　McKean よりの私信による。

(4.11) $\quad \tilde{x}(a) = c(N)\displaystyle\int_{0\leqq t \leqq (a,b)} e(dt \times da)$

ただし，(a,b) は a, b の内積で，$c(N) = \sqrt{2(N-1)I_{N-2}}$ とおくと，

[A_{11}] [$\tilde{x}(a)$; $a \in R^N$] は Brown 運動である．

ことが示される．

次に $\tilde{x}(a)$ が球面調和函数を用いて展開出来ることを述べる．

$P_{\underline{n}}$, $\underline{n} = (n, e)$ を n 次の球函数とし，$P_{\underline{n}}$ の中，帯球函数であるものを P_n とかく。$P_n(b)$, $b \in S$ は単に $\cos\theta = (b, c)$, $c = (0, \cdots, 0, 1)$ のみの函数である．$P_n(c) = 1$ としておく。Hilbert 空間 $\mathfrak{H} = L^2(S, d\sigma)$ を考えると，

$$\mathfrak{H} = \sum_{n \geqq 0} \oplus \ \mathfrak{H}_n \quad (\text{直和})$$

と分解され，$\mathfrak{H}_n$ の base が $\{P_{\underline{n}}\}$ となっている．

[A_{12}]

(4.12) $\quad x_{\underline{n}}(t) = \displaystyle\int_S \tilde{x}(a) P_{\underline{n}}(b) d\sigma(b) \qquad b = \frac{a}{\|a\|} \in S \quad t = \|a\|$

とおくと，[$x_{\underline{n}}(t)$; $0 \leqq t < +\infty$] は互に独立な正規過程で，特に [$x_{\underline{0}}(t)$; $0 \leqq t < +\infty$] は Lévy の $M_N(t)$-過程といわれるものであり，

(4.13) $\quad \tilde{x}(a) = \displaystyle\sum_{\underline{n}} x_{\underline{n}}(t) P_{\underline{n}}(b)$

と展開出来る．

更に

(4.14) $\quad c_n\left(\dfrac{u}{t}\right) = \displaystyle\int_0^{\cos^{-1}\frac{u}{t}} P_n(\cos\theta) d\theta / 2I_{N-2}$

(4.15) $\quad e_{\underline{n}}(du) = \displaystyle\int_S P_{\underline{n}}(b) e(du \times db)$

とおけば，$e_{\underline{n}}(du)$ は Wiener の正規彷徨測度で，互に独立であり，

(4.16) $\quad x_{\underline{n}}(t) = \displaystyle\int_0^t c_n\left(\frac{u}{t}\right) e_{\underline{n}}(du)$

とあらわせる．

この証明の途中で

$\underline{n} = (n, e)$ のとき $|\underline{n}| = n$ とおけば，[$x_{\underline{n}}(t)$; $0 \leqq t < +\infty$] は $|\underline{n}| = n$ のとき同じ法則に従い

$$E(x_{\underline{n}}(t)x_{\underline{n}}(s)) = -\frac{1}{2}\int_S \sqrt{t^2+s^2-2ts\cos\theta}\quad P_n(\cos\theta)\,d\sigma(b)$$

$\cos\theta = (b, c)\quad n = |\underline{n}| > 0$ のとき

$$= \frac{1}{2}\left(t+s-\int_S \sqrt{t^2+s-2ts\cos\theta}\ d\sigma(b)\right)$$

$n = 0$ のとき

となっていることが示される。

(4.14) の $c_n(\frac{u}{t})$ は具体的には

$$N=2 \text{ のとき}\quad c_n\left(\frac{u}{t}\right) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}\cos^{-1}\left(\frac{u}{t}\right), & n=0 \\ \frac{1}{\pi}\frac{\sin(n\cos^{-1}(\frac{u}{t}))}{n}, & n>0 \end{cases}$$

$$N=3 \text{ のとき}\quad c_n\left(\frac{u}{t}\right) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(1-\frac{u}{t}\right), & n=0 \\ \frac{1}{2}(2n+1)^{-1}\left\{P_{n-1}\left(\frac{u}{t}\right)-P_{n+1}\left(\frac{u}{t}\right)\right\}, & n>0 \end{cases}$$

Tchentsov[178] では R^N の直線叢に Borel 集合体を考え，そこで彷徨測度 $e(dt\times db)$ を構成するという方法によっている。

[5°] 球面の場合

R^N の半径 d，中心 0 の球面を S，その上の一様な測度を $d\omega$ とする。

(4.17) $\quad d\omega(a) = d^{N-1}d\sigma(b)$, $b = a/\|a\|$, $d\sigma$ は [4°] で用いた測度

$d\omega$ に対応して正規彷徨測度 $[u(B);\ B\in\mathcal{B}(S)]$ が存在する。

$a, b\in S$ のとき $r(a,b)$ で a, b を通る大円の弧の長さをあらわし，$S(a) = \{p;\ r(a,p) \leqq \frac{\pi}{2}d\}$ とおく。

(4.18) $\quad x_1(a) = c_N u(S(a))$

と定義し，c_N を $E(x_1(a)^2) = \|a\|$ となるように定めると

(4.19) $\quad E((x_1(a)-x_1(c))(x_1(b)-x_1(c))) = \frac{1}{2}[r(a,c)+r(b,c)-r(a,b)]$

がなりたち，一つの正規型変数系が得られる。

$[x_1(a);\ a\in S]$ を球面 S をパラメータ空間とする Brown 運動という。

B1-126)

これが R^N をパラメータ空間とするBrown運動と本質的に相異なる点は次のような退化の現象にあらわれる．すなわち，

線分 $\overline{aa'}$, $\overline{bb'}$ が S の直径であれば

$$x_1(a)+x_1(a')=x_1(b)+x_1(b')\ (=cu(S))$$

これから

$$\mu\equiv\int_S x_1(a)\,d\omega(a)=\frac{c}{2}u(S)$$

が出る．いま

(4.20) $$x_0(a)=x_1(a)-\mu,\quad a\in S$$

とおけば，μ と $x_0(a)$ とは独立で，$x_0(a)$ は奇函数と類似の性質

(4.21) $$x_0(a)+x_0(a')=0$$

をもつ。さらに，$x_0(a)$ は

(4.22) $$x_0(a)=\frac{c}{\sqrt{2}}d^{\frac{2-N}{2}}\int_{S^+}\varepsilon_a(b)[du(b)-du(b')]/\sqrt{2}$$

とあらわされる。ここに S^+ は S の上半球，$\varepsilon_a(b)$ は $S(a)$ 上で 1，$S(a')$ 上で -1 となる函数である。

今特別の場合として，$N=2$ で S が単位円の場合について考える．S の点を $\theta\ (\mathrm{mod}\ 2\pi)$ であらわし，$[x(\theta);\ 0\leq\theta<2\pi]$ と $[y(\theta);\ 0\leq\theta<2\pi]$ は互に独立な S 上のBrown運動とし，

$$z(\theta)=x(\theta)+iy(\theta)$$

とおく．

$|\theta'-\theta|<\pi$ ならば $z(\theta')-z(\theta)$ は分散 $2|\theta'-\theta|$ の複素正規変数である．

$z(\theta)$ を上の $x_1(a)$ と見たとき，μ, $x_0(a)$ に相当するものは

$$\mu=\frac{1}{2}\{z(\theta)+z(\theta+\pi)\},\quad z_0(\theta)=\frac{1}{2}\{z(\theta)-z(\theta+\pi)\}$$

で $z_0(\theta)$ は周期 π の周期函数となる．これより $z_0(\theta)$ の Fourier 展開が出来て

(4.23) $$z_0(\theta)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2n+1}e^{i(2n+1)\theta}\zeta_n\quad(\text{概収束})\quad E|\zeta_n|^2=2$$

ここに $\{\zeta_n;\ n=0,\pm1,\cdots\}$ は独立系．

特に $z_0(\theta)$ の実部を $x_0(\theta)$ ととれば，

(4.24) $$x_0(\theta)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\{\xi_n\cos(2n+1)\theta+\eta_n\sin(2n+1)\theta\}$$

$\{\xi_n\}$, $\{\eta_n\}$は独立で各変数は標準正規分布をする。

なお，(4.23)は Wiener の複素Brown運動 $\tilde{z}(\theta)$ の展開

(4.25) $$\tilde{z}(\theta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\zeta_0\theta+\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}e^{in\theta}\zeta_n)$$

と類似の形式をもつが，$\tilde{z}(\theta)$ のようにMarkov 性はない。

以上 R^d 又はその中の球，球面等の点をパラメータとするBrown 運動について述べたが，その他 P. Lévy [133] では Hilbert 空间の点をパラメータとするBrown運動が取扱われている。

なお球面 S 上の点 c における接超平面 Π ($dim = N-1$)をつくり，Π 上の点 h と S の中心を結ぶ直線と S との交点を a としたとき，(4.19)の右辺は c を一定にし，S の半径を 0 に収束させれば Π での距離に収束する。従ってその極限も non-negative-definite になるので，これに対して Π の点をパラメーターにもつBrown運動が存在して [1°]で定義したものが得られるが，この変形で S の白色雑音 $du(a)$ がどうなるかは詳しい考察が必要とされる。これについては P. Lévy [208]を参照。

9.5 Ornstein-Uhlenbeck の Brown運動

N. Wiener の Brown運動 $B(t)$ は不規則な運動をするBrown粒子の位置をあらわす模型として定義されたものであるが，このような定式化では 四 からわかるように，$B(t)$ は t に関して殆んど確実に微分不可能であって，粒子の速度 $U(t)$ を $U(t)=\frac{d}{dt}B(t)$ として解析することが出来ない。

Ornstein, Uhlenbeckは他のBrown運動の模型を考え，粒子の速度に対して次のような定式化を与えた。

時間 0 から t までの间に粒子に与える水の分子運動の撃力を $M(t)$ とすると，$M(s)-M(t)$ はその力積となる。$M(t)$ の性質として考えられるのは，時間的に一様で連続且つ独立であり，等方向性をもつことである。このことから $M(s)-M(t)=\beta[B(s)-B(t)]$ と考えることが出来る。粒子の速度変化 $dU(t)$ は，粒子が水をおしのけて通過するために受ける摩擦力 $-\alpha U(t)dt$ とこの力積 $M(s)-M(t)$ によって

(B1-128)

$$dU(t)=-\alpha U(t)\,dt+dM(t)$$

すなわち

(5.1) $$d\bar{U}(t)=-\alpha\bar{U}(t)\,dt+\beta\,dB(t)$$

と考えられる。

(5.1) を数学的に取扱うためには，これを確率微分方程式と考えればよい。そのとき，解 $U(t)$ は

(5.2) $$U(t)=\beta\int_{-\infty}^{t}e^{-\alpha(t-u)}dB(u) \qquad (\text{Wiener積分})$$

で与えられる。

$[U(t);-\infty<t<+\infty]$ は <u>Ornstein-Uhlenbeck のBrown運動</u>と云われ，確率過程として次の性質をもつ。

1) $[U(t);-\infty<t<+\infty]$ は時間的に一様な Markov 過程で，その生成作用素 $\mathfrak{G}$ は

$$\mathfrak{G}=-\alpha a\frac{d}{da}+\frac{1}{2}\beta^2\frac{d^2}{da^2}$$

2) $U(t)$ は正規過程で

$$E(U(t))=0,\qquad E(U(t)U(s))=\frac{\beta^2}{2\alpha}e^{-\alpha|t-s|}=\frac{\beta^2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{it\lambda}}{\lambda^2+\alpha^2}d\lambda$$

となるから，強弱定常過程で

自己共変量：$\gamma(t)=E(U(t+s)U(s))=\beta^2/2\alpha\cdot e^{-\alpha|t|}$

スペクトル測度：$dF(\lambda)=\dfrac{\beta^2}{\pi}\dfrac{d\lambda}{\lambda^2+\alpha^2}$

である。

3) $U(t)$ は正規定常で $\gamma(t)\to 0$ $(|t|\to+\infty)$ であるから，$U(t)$ は<u>混合型 Ergode 性をもつ</u>.

従って，すべての道 $U(\cdot,\omega)$ に対して時間平均と期待値（空間平均）と一致する．特に

$$V_s\equiv\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}U(t)U(t+s)\,dt=\frac{\beta^2}{2\alpha}e^{-\alpha|s|} \qquad (a.c)$$

であるから，$s=0,\ 1$ として

$$V_0 = \frac{\beta^2}{2\alpha}, \qquad V_1 = \frac{\beta^2}{2\alpha} e^{-\alpha}$$

となる．これから物理定数 α, β を定めることが出来る。

又 Ornstein-Uhlenbeck の Brown 運動 $U(t)$ は $(-\infty \ +\infty)$ 上の通常の Brown 運動 $B(t)$ から

$$U(t) = e^{-t} B(2^{2t})$$

としても得られるので，その道の連続性，重複対数の法則等が $B(t)$ からみちびかれる。

追加及び訂正

追　加　（第6章）

t_0 が函数 $f(t)$ の大きさ $\delta(>0)$ の増加点であるとは，$f(t)$ は $t_0-\delta \leq t \leq t_0+\delta$ で定義されていて，

$$\max_{t_0-\delta \leq t \leq t_0} f(t) = f(t_0) = \min_{t_0 \leq t \leq t+\delta} f(t)$$

となっていることである。

t_0 が $f(t)$ の増加点とは，ある $\delta>0$ に対して δ の大きさの増加点になっていることである。

$x_t(\omega)$ を一次元 Brown 運動とするとき，

$$P_0(x_t(\omega) \text{ が少なくとも } 1 \text{ つの増加点を持つ}) = 1$$

がなりたつ。(Dovretzky-Erdös-Kakutani [40])。

訂　正

1° B1－33 下から1行目 (4.10) 式を

$$(4.10) \qquad f^{(1)}(\cdot) = \left(\int \varphi_0(t) \cdot (t)\, dt\right) c_{\dot{B}}(\cdot)$$

に訂正

2° B1-34 上から1行目，2行目を削除し，次にかえる。

次に $L^2(R^m)$ の対称函数 $\{\varphi_k^m\}$ $m \geq 2$, $k = 1, 2, \cdots$ が存在して

$$g_k^{(m)}(\cdot)=\int\cdots\int_{R^m}\varphi_k^m(t_1,\cdots,t_m)\cdot(t_1)\cdots\cdot(t_m)\,dt_1\cdots dt_m\,c_B^{\cdot}(\cdot) \tag{4.11}$$

とするとき $\mathfrak{H}(g_k^{(m)})$ は (k,m) が異なれば互に直交し $\mathfrak{H}(f^{(1)})$ とも直交で $\|dE(t)f^{(1)}\|^2$, $\|dE(t)g_k^{(m)}\|^2$ は Lebesgue 測度と同等になる。$f^{(1)}$ と $g_k^{(m)}$ を一列にならべて $f^{(n)}$ をうる。$f\in\sum_k\oplus\mathfrak{H}(g_k^{(m)})$ ならば対称函数 $G_n\in L^2(R^n)$.

あとがき

Brown 運動は，Markov 過程，加法過程，拡散過程および定常過程のいずれでもあるので，それに附随する諸概念や，いろいろな性質は，これらのものの一般論の中に位置づけられるものが多い。

しかし，これらの他項目が未だ書かれていないためと，説明の都合上，一般論に含まれるべき事項についても書かざるを得なかつたので，やや長くなった。

この項目では次の分担によってサブ・ノートをつくり責任者（野本）が手引の形にした．5章及び9章の一部については途中から渡辺信三氏に協力して戴いた。

執筆者

池田信行： $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3.3}$, $\boxed{5.2}\sim\boxed{5.6}$, $\boxed{5.8}\sim\boxed{5.13}$, $\boxed{6.3}$, $\boxed{7}$ $\boxed{8.1}\sim\boxed{8.4}$

飛田武幸： $\boxed{3.1}\sim\boxed{3.4}$, $\boxed{9.4}$

白尾恒吉： $\boxed{4}$, $\boxed{9.4}$

渡辺信三： $\boxed{5.10}$, $\boxed{9.3}$

野本久夫： $\boxed{1.3}$, $\boxed{1.4}$, $\boxed{1.8}$, $\boxed{3.5}$, $\boxed{3.6}$, $\boxed{5.1}$, $\boxed{5.7}$, $\boxed{6.1}$, $\boxed{6.2}$ $\boxed{6.4}$, $\boxed{8.5}$, $\boxed{9.1}$, $\boxed{9.2}$, $\boxed{9.5}$

なお，この項目を作成するにあたって，準備中の

K. Ito-H. P. McKean : Diffusion

の原稿を多く参考させて戴き，そこに始めてのべられる結果が沢山ある。又8章で

H. P. McKean（未発表）

の結果を田中洋氏の私信により利用させて戴いた。

文　献

[1] Anzai, H. *A remark on spectral measure of the flow of Brownian motion*. Osaka Math. J. 1 (1949), 95-97.

[2] Bachelier, L. *Calcul des probabilités*. Paris, Gauthier-Villars. (1912), 1-516.

[3] ――――――. *Les lois des grands nombres du calcul des probabilités*. Paris, Gauthier-Villars. (1937).

[4] Bearman, J. E. *Rotations in the product of two Wiener spaces*. Proc. Amer. Math. Soc. 3 (1952), 129-137.

[5] Bernstein, S. *Equations differentielles stochastiques*. Act. Sci. et Ind. 738 (1938).

[6] ――――――. *Principles de la théorie des équations différentielles stochastiques*. Trans. Math. Inst. Phys. Math. Stekloff. 5 (1933), 95-124.

[7] Besicovitch, A. S.-Taylor, S. J. *On the complementary intervals of a linear closed set of zero Lebesgue measure*. J. London Math. Soc. 29 (1954), 449-459.

[8] Besicovitch, A. S.-Ursell, N. D. *Sets of fractional dimensions V: On dimensional numbers of some continuous curve*. J. London Math. Soc. 12 (1937), 18-25.

[9] Blumenthal, R. M. *An extended Markov property*. Trans. Amer. Math. Soc. 85 (1957), 52-72.

[10] Bochner, S. *Harmonic analysis and the theory of probability*. Berkeley. (1955).

[11] Bouligand, G. Bull. Soc. Math. 42 (1914).

[12] Brelot, M. *Le problème de Dirichlet. Axiomatique et frontière de Martin*. J. Math. Pures. Appl. 35 (1956), 297-335.

[13] Brelot, M.-Choquet, G. *Espaces et lignes de Green*. Ann. Inst. Fourier. Grenoble. 3 (1952), 199-263.

[14] Brelot, M.-Choquet, G.-Deny, T. *Seminaire de théorie du*

potentiel. (1960-61).

[15] Cameron, R.H.-Fagen, R.E. *Non-linear transformations of Voltera type in Wiener space.* Trans. Amer. Math. Soc. 75 (1953), 552-575.

[16] Cameron, R.H.-Martin, W.P. *The Wiener measure of Hilbert's neighbourhood in the space of real continuous functions.* J. Math. Phys. M.I.T. 23 (1944), 195-209.

[17] ——————.-——————. *The transformation of Wiener integrals by non-linear transformations.* Trans. Amer. Math. Soc. 66 (1949), 253-258.

[18] ——————.-——————. *The behavior of measure and measurability under change of scale in Wiener space.* Bull. Amer. Math. Soc. 5 (1947), 130-137.

[19] ——————.-——————. *Transformations of Wiener integrals under a general class of linear transformations.* Trans. Amer. Math. Soc. 58 (1945), 184-219.

[20] ——————.-——————. *Transformations of Wiener integrals under transformations.* Ann. Math. (2) 45 (1944), 386-396.

[21] Cameron, R.H. *The translation pathology of Wiener space.* Duke Math. J. 21 (1954), 623-627.

[22] ——————. *A family of integrals serving to connect the Wiener and Feynman integrals.* J. Math. Phys. 39 (1960), 126-140.

[23] Cartan, H. *Sur les fondaments de la théorie du potentiel.*

[24] Choquet, G. *Theory of capacities.* Ann. Inst. Fourier. Grenoble. 5 (1953-4), 131-295.

[25] Chung, K.L.-Erdös, P. *On the application of the Borel-Cantelli's lemma.* Trans. Amer. Math. Soc. 72 (1952).

[26] Chung, K.L.-Erdös, P.-Sirao, T. *On the Lipschitz's condition for Brownian motion.* J. Math. Soc. Japane. 11 No. 4

(1959).

[27] Donsker, C.M.D. *An invariance principle for certain probability limit theorem.* Mem. Amer. Math. Soc. No. 8 (1951).

[28] Doob, J. L. *Stochastic processes.* New York, (1953).

[29] ————. *Semi-martingale and subharmonic functions.* Trans. Amer. Math. Soc. 77 (1954), 86-121.

[30] ————. *A probability approch to the heat equation.* Trans. Amer. Math. Soc. 80 (1956), 216-280.

[31] ————. *Probability methods applied to the first boundary value problem.* Proc. 3rd Berkeley Symp. (1955).

[32] ————. *Brownian motion on a Green space.* Theory of Prob. Appl. 2 (1957), 216-280.

[33] ————. *Conditional Brownian motion and the boundary limits of harmonic functions.* Bull. Soc. Math. Frane. 85 (1957), 431-458.

[34] ————. *Conformal invariant cluster value theory.*

[35] ————. *Discrete potential theory and boundaries.* J. Math. Mech. 8 (1959), 433-458.

[36] Duff, F. G. *Partial differential equations.* Tronto. (1956).

[37] Dvoretzky, A.- Erdös, P. *Some problem on random walk in space.* Proc. 2nd Berkeley Symp. (1950).

[38] Dvoretzky, A.- Erdös, P.- Kakutani, S. *Double points of paths of Brownian motion in n-space.* Acta Sci. Math. 12 (1950), 75-81.

[39] ————.- ————.- ————. *Multiple points of Brownian motion in the plane.* Bull. Res. Council. Israel. 3 (1954), 364-371.

[40] ————.- ————.- ————. *Non-increase everywhere of Brownian motion processes.* Proc. 4th Berkeley Symp. (1961).

[41] ————.- ————.- ————.- Taylor, S. *Triple*

points of Brownian paths in 3-space. Proc. Camb. Phil. Soc. 53 (1957), 856-862.

[42] Dynkin, E. B. *Infinitesimal operators of Markov processes.* Theor. Prob. Appl. 1 (1956), 38-59.

[43] ——————. *Additive functional of a Wiener process determined by stochastic integrals.* Theor. Prob. Appl. 5 (1960), 441-452.

——————. *Theory of Markov processes.* (英訳 Pergamon Press (1960)).

[44] ——————. *Transformations of Markov processes connected with additive functionals.* Proc. 4th Berkeley Symp. (1961), 117-142.

[45] ——————. *On some transformations of Markov processes.* Dokl. Acad. Nauk. 109 (1960).

[46] ——————. *Natural topology and excessive functions connected to Markov process.* Dokl. Acad. Nauk. SSSR. (1959), 17-19.

[47] ——————. *Non-negative eigenfunctions of Laplace-Beltrami's and Brownian motion in certain symmetric spaces.* Dokl. Acad. Nauk. 141 No. 2 (1961).

[48] Feller, W. *The law of the iterated logarithm for identically distributed random variables.* Ann. Math. 47 (1946), 631-638.

[49] ——————. *The general form of the so-called law of the iterated logarithm.* Trans. Amer. Math. Soc. 54 (1943), 373-402.

[50] ——————. *An introduction to probability theory and its applications*, Vol. 1. New York. (1950).

[51] ——————. *Boundaries induced by non-negative matrices.* Trans. Amer. Math. Soc. 83 (1956), 19-54.

[52] ——————. *On boundaries and lateral conditions for the Kolmogorov differential equations.* Ann. Math. 65 (1957), 527-570.

[53] Feller, W. *The parabolic differential equations and the associated semi-group of transformations.* Ann. Math. 55 (1952), 468-519.

[54] ————. *The general diffusion operator and positivity preserving semi-groups in one dimension.* Ann. Math. 60 (1954), 417-436.

[55] ————. *Diffusion processes in one dimension.* Trans. Amer. Math. Soc. 77 (1954).

[56] ————. *On second order differential operators.* Ann. Math. (1) 65 (1955), 90-105.

[57] ————. *Generalized second order differential operators and their lateral conditions.* Illinois J. Math. 1 (1957),

[58] ————. *On the intrinsic form for second order differential operators.* Illinois J. Math. 2 (1958), 1-18.

[59] Fortet, R. *Quelques travaux récents sur le mouvement brownien.* Ann. Inst. Henri Poincaré. 11 (1947), 438-442.

[60] Getoor, R.K. *Infinitely divisible probabilities on the hyperbolic plane.* Pacific J. (1962), 1287-1308.

[61] Girsanov, . *On transformation a certain class of stochastic processes by absolutely continuous substitution of measures.* Theor. Prob. Appl. 5 (1960), 314-330.

[62] Gorman, C.D. *Brownian motion of rotation.* Trans. Amer. Math. Soc. 87 (1958), 439-446.

[63] Hille, E.- Phillips, P.S. *Functional analysis and semi-groups.* Amer. Math. Soc. Coll. Publ. 31 (1957).

[64] Hunt, G. *Some theorems concerning Brownian motion.* Trans. Amer. Math. Soc. 81 (1956), 294-319.

[65] ————. *Markov processes and potentials* I; II; III. Illinois J. Math. 1 (1957), 44-93; 1 (1957), 316-369; 2 (1958), 151-213.

[66] ————. *Semi-groups of measures on Lie groups.* Trans. Amer. Math. Soc. 81 (1956), 264-293.

[67] Hunt, G. *Markov chains and Martin boundaries*. Illinois J. Math. 4 (1960), 313-340.

[68] Hopf, E. *Ergodentheorie*. Ergeb. Math. Springer. Berlin, (1937).

[69] 飛田武幸. *Gaussian process* の表現とその応用. Semi. on Prob. 7 (1961).

[70] Ikeda, N. *On the construction of two dimensional diffusion processes satisfying Wentzell's boundary conditions and its application to boundary value problems*. Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto Ser. A. 33 (1961), 368-427.

[71] 池田－上野－田中－佐藤. 多次元拡散過程の境界問題, 上; 下. Sem. on Prob. 5; 6, (1961).

[72] 池田－上野－田中－佐藤. 多次元拡散過程の境界問題. 数学. 13 (1961), 37-53.

[73] 池田－国田－野本－飛田－渡辺毅. *Paul Lévy* の業績. Sem. on Prob. 9 (1961).

[74] Ito, K. *Brownian motion in a Lie group*. Proc. Japan Acad. No. 8 (1950), 4-10.

[75] ———. *Stochastic differential equations in a differentiable manifold*. Nagoya Math. J. 1 (1950), 35-47.

[76] ———. *On stochastic differential equations*. Mem. Amer. Math. Soc. No. 4 (1951).

[77] ———. *On a formula concerning stochastic differentials*. Nagoya Math. J. 3 (1951), 55-65.

[78] ———. *Stochastic differential equations in a differentiable manifold* (2). Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto. Ser. A. 28 (Math.) (1953), 81-85.

[79] ———. *Multiple Wiener integral*. J. Math. Soc. Japan. 3 (1951), 157-169.

[80] ———. *Complex multiple Wiener integral*. Japan J. Math. 22 (1952).

[81] ———. *Spectral type of the shift transformation of di-*

fferential processes with stationary increments. Trans. Amer. Math. Soc. 81(1956), 253-263.

[82] Ito, K. *Isotropic random current.* Proc. 3rd Berkeley Symp. (1956), Vol. 2, 125-132.

[83] ———. *Wiener integral and Feynman integral.* Proc. 4th Berkeley Symp. (1961).

[84] ———. *Stochastic processes.* Tata Inst. Lecture Note.
伊藤清. *Stochastic integral* について. 数学. 1(1948).

[85] ———. 確率論. 岩波現代数学 14(1953).

[86] ———. 確率過程. 岩波応用数学講座 A13, I; II. (1957).

[87] ———. *Subordination* について. 数理科学2班報告才6号.

[88] ———. 重複 *Wiener* 積分について. 岩波. 北川編: 確率論と推計学の進歩. (1953).

[89] Ito, K.-McKean, H.P. *Diffusion* (to appear).

[90] 伊藤-吉沢-京大位相解析セミナーノート
. (池田-飛田-吉沢. *Flow* の理論(上). Semi. on Prob. 12(1962).).

[91] 伊藤-渡辺信三-福島. 拡散過程. Sem. on Prob. 3(1960).

[92] Kac, M. *On the distribution of certain Wiener integrals.* Trans. Amer. Math. Soc. (1949), 1-13.

[93] ———. *Random walk and the theory of Brownian motion.* Amer. Math. Monthly. 54(1947), 369-391.

[94] ———. *On some connections between probability theory and differential and integral equations.* Proc. 2nd Berkeley Symp. (1950), 189-215.

[95] Kakutani, S. *Two dimensional Brownian motion and harmonic functions.* Proc. Math. Inst. Osaka. 20(1944), 706-714.

[96] ———. *On Brownian motion in n-space.* Proc. Imp. Acad. Tokyo. vol. 20 (1944), 706-714.

[97] ———. *Random walk and the type of Riemann surfaces: Contribution to the theory of Riemann surfaces.* Ann. Math. Studies. No. 30 (1953), 95-101, Princeton.

[98] ———. *Two dimensional Brownian motion and the*

type problem of Riemann surfaces. Proc. Math. Inst. Osaka. 21 (1945), 138-140.

[99] Kakutani. S. *Spectral analysis of stationary Gaussian processes*. Proc. 4th Berkeley Symp. (1961).

[100] ————. *Determination of the spectrum of the flow of Brownian motion*. Proc. Nat. Acad. Sci. 36 (1950), 319-323.

[101] Kametani, S. *On Hausdorff's measure and generalized capacities with some of their applications to the theory of functions*. Jap. J. Math. 19 (1940), 217-257.

[102] Karhunen, K. *Über die Struktur stationären zufälige Funktionen*. Ark. Mat. 1 (1950), 144-160.

[103] Karpelevich, F. I.-Tutubalin, V. N.- Schour, M. G. *Limit theorems for the composition of distributions in the Lobachevsky's plane and space*. Theor. Prob. Appl. 4 (1959), 432-436.

[104] Kellog, O. D. *Foundations of potential theory*. Grundlehren der Math. Wissenschaften, 31. Berlin, (1929).

[105] Khintchin, A. *Asymptotische Gesetze der Wahrscheinlichkeits-rechnung*. Erg. Math. Springer, Berlin, (1933).

[106] Kolmogorov, A. N. *Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Math. Ann. 104 (1931), 415-458.

[107] ————. *Über das Gesetz des iterierten Logarithmus*. Math. Ann. 101 (1929).

[108] Knight, F. B. *Construction of diffusion processes by means of random walks*. Proc. 4th Berkeley Symp. (1961).

[109] 近藤亮司. *Markov 過程と potential*. Sem. on Prob. 11 (1962).

[110] Lévy, P. *Sur un théorèm de M. Khintchin*. Bull. Sci. Math. 53 (1931).

————. *L'addition des variables aléatoirs definies sur une circomference*. Bull. Soc. Math. France. 67 (1939), 1-41.

[111] ————. *Théorie de l'addition des variables aléatoires*. Gauthier Villars, Paris. (1937).

[112] Lévy, P. *Le mouvement brownien plan*. Amer. J. Math. 62(1940), 487-550.

[113] ———. *Intégrales stochastiques*. Ann. Univ. de Lyon. S.3. Sci. Sect. A. 4 (1941), 67-74.

[114] ———. *Un théorème d'invariance projective relativ au mouvement brownien*. Comm. Math. Helvetici. 16(1943), 242-248.

[115] ———. *Une propriété d'invariance projective dans le mouvement brownien*. C.R. Acad. Sci. Paris. 219(1943), 376-378.

[116] ———. *Dérivation et intégration aléatoirres et équations différentielles stochastiques*. C.R. Acad. Sci. Paris. 219 (1944), 602-603.

[117] ———. *Le mouvement brownien dépendant de plusieurs paramètres*. C.R. Acad. Sci. Paris. 220(1945), 420-422.

[118] ———. *Trois théorèmes sur le mouvement brownien*. Congrès de l'Assoc. franç. pour avanc des sciences, Paris. 1945. et Intermédiaire d'Recherches math. Supplément au fasc. 9 (1947), 124-126.

[119] ———. *Processus stochastiques et mouvement brownien* Gauthier-Villars, Paris. (1948).

[120] ———. *Sur l'aire comprise entre un arc de la courbe du mouvement brownien plan et sa corde*. C.R. Acad. Sci. Paris. 230 (1950), 432-434.

[121] ———. *Le measure de Hausdorff de la courbe du mouvement brownien*. Giorn. Ist. Ital. Attuari. 16(1953), 1-37.

[122] ———. *Le mouvement brownien a $n=2p+1$ paramètres I, II*. C.R. Acad. Sci. Paris. 239(1954), 1181-1183, 1584-1585.

[123] ———. *Le mouvement brownien*. Mem. Sci. Math. fasc 129. (1954).

[124] ———. *Rectification à un théoreme sur le mouvement brownien à p paramètre*. C.R. Acad. Sci. Paris. 238(1954),

2140-2141.

[125] Lévy, P. *Le mouvement brownien à n = 2p+1 paramètres III.* C.R.Acad. Sci. Paris. 240 (1955), 1043-1044.

[126] ————. *Propriété asymptotiques de la courbe du mouvement brownien à N dimension.* C.R. Acad. Sci. Paris. 241 (1955), 689-690.

[127] ————. *Le caractire universel de la courbe du mouvement brownien et la du logarithme itéré.* Rendi. Circalo Mat. Palermo. (2). 4 (1955), 337-366.

[128] ————. *Le caractère universel de la courbe du mouvement brounien et la loi du logarithme itéré.* Rend. Circalo Math. Palermo (2). 4 (1956), 337-366.

[129] ————. *Propriété asymptotique de la courbe de mouvement brownien á N dimensions.* C.R. Acad. Sci. Paris. 241 (1956), 689-690.

[130] ————. *Brownian motion depending on n parameters: the particular case n = 5.* Proc. Symp. in Appl. Math. Vol. 7 (1957), 1-20.

[131] ————. *Construction du processus du W. Feller et H.P. McKean en partant du mouvement brownien.* Probability and statistics (H. Cramér volume). Wiley, New York. (1959).

[132] ————. *Le mouvement brownien fonction d'un point de la sphère de Riemann.* Rendi. Circalo Math. Palermo. (2), 8 (1959), 1-14.

[133] ————. *Random functions: a Laplacian random function depending on a point of Hilbert space.* Univ. Calif. Publ. (1956).

[134] ————. *A special problem of Brownian motion and a general theory of Gaussian random functions.* Proc. 3rd Berkeley Symp. (1956), Vol. 2, 133-175.

[135] Martin, R.S. *Minimal positive harmonic functions.*

Trans. Amer. Math. Soc. 49 (1941), 137-172.

[136] 丸山儀四郎．確率論．共立現代数学講座, 1957.

[137] 丸山－田中．再帰定常 *Markov* 過程について．数学 13 (1961), 30-37.

[138] 丸山－十時．確率過程の収束に関する位相解析的方法．Sem. on Prob. 4 (1960).

[139] Maruyama, G. *On the transition probability functions of the Markov processes.* Nat. Sci. Rep. Ochanomizu Univ. 5 (1954), 10-20.

[141] ――――――. *Continuous Markov processes and stochastic equations.* Rend. Circ. Math. Palermo. 4 (1955), 1-43.

[142] ――――――. *Notes on Wiener integrals.* Kodai Math. Sem. Rep. 3 (1950), 41-44.

[143] Maruyama, G.-Tanaka, H. *Ergodic property of N-dimensional recurrent Markov processes.* Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A. 13 (1959), 157-172.

[144] McKean, H.P. *Elementary solution for certain parabolic differential equations.* Trans. Amer. Math. Soc. 82 (1956), 519-548.

[145] ――――――. *A Hölder condition for Brownian local time.* J. Math. Kyoto Univ. 1 (1962), 195-201.

[146] McKean, H.P.-Tanaka, H. *Additive functional of the Brownian paths.* Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto. Ser. A. 33 (1961), 479-506.

[147] Magnus, W.-Oberhettinger, F. *Formen und Sätzen für die Speziellen Funktionen der Mathematischen Physik.* Springer, 1948.

[148] Meyer, P.A. *Fonctionelles multiplicatives et additives de Markov.* Ann. Inst. Fourier. Grenable. 12 (1962), 125-230.

[149] Motoo, M. *Proof of the law of iterated logarithm through diffusion equation.* Ann. Inst. Stat. Math. 10 (1958-59), 21-28.

[150] ――――――. *Diffusion process corresponding to* $\frac{1}{2}\sum\frac{\partial^2}{\partial x^{i2}}+$

$\Sigma b^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. Ann. Inst. Stat. Math. 12 (1960-61), 37-61.

[151] Motoo, M. *Some properties of process corresponding to* $\frac{1}{2}\Sigma \frac{\partial^2}{\partial x^{i2}} + \Sigma b^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. (*to appear*)

[152] 西尾真喜子. *Wiener* 積分と強定常過程の表現. Sem. on Prob. 10 (1961).

[153] Paley, R.E.A.C.-Wiener, N. *Fourier transforms in the complex domain*. Colloq. Pubr. Amer. Math. Soc. 19 (1934).

[154] Perrin, F. *Etude mathématique du mouvement brownien de rotation*. Ann. Ec. Norm. Sup. 3e série. 45 (1928), 1-51.

[155] Petrowsky, I. *Über das Irrfahrtproblem*. Math. Ann. 109 (1933-34), 425-434.

[156] ――――――. *Zur ersten Randwertaufgabe der Wärmeleitungsgleichung*. Compositio. Math. 1 (1935), 383-419.

[157] Polya, G. *Über eine Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung betreffend die Irrfahrt im Strassennetz*. Math. Ann. 84 (1921), 149-160.

[158] ――――. *Sur la promenade au hasard dans un réseau de rues*. Actalités Sci. Hermann. 734 (1938), 25-44.

[159] Prohorov, Ya.V. *Convergence of random process and limit theorems in probability theory*. Theor. Prob. Appl. 1 No. 2, (1956).

[160] Sato, K. *Integration of the generalized Kolmogorov-Feller backward equations*. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. 9 (1961), 13-27.

[161] Sato, K.-Tanaka, H. *Local times on the boundary for multi-dimensional diffusion*.

[162] Schönberg, I.J. *Metric spaces and positive definite functions*. Trans. Amer. Math. Soc. 44 (1938), 522-536.

[163] Sentzch, R. J. de Crelle. 141 fasc 4.

[164] Sirao, T. *On the continuity of Brownian motion with a multidimensional parameter*. Nagoya Math. J. 16 (1960).

[165] 白尾恒吉. 確率論における強法則の精密化の一般論. Sem. on Prob. 2

(1960).

[166] Sirao, T.-Nisida, T. *On some asymptotic properties concerning Brownian motion.* Nagoya Math. J. 4(1952).

[167] Skorohord, A.V. *Limit theorems for Markov processes.* Theor. Prob. Appl. 3(1958).

[168] ――――――. *Limit theorems for stochastic processes.* Theor. Prob. Appl. 1(1956).

[169] Slutsky. *Qulche propositione relativa alla theoria della a funzioni aleatoire.* Giorn & A.H. 8(1937), 183-199.

[170] Spitzer, F. *Some theorems concerning 2-dimensional Brownian motion.* Trans. Amer. Math. Soc. 37(1958).

[171] Серегин, В. *Условых Непрерывности вероятностых процесов.* Theor. of Prob. Appl. 6(1961).

[172] Skarohod, A.V. *Аддитивные функционалы от процесса броуновского двитения.* Theor. Prob. Appl. 6(1961).

[173] 洲之内源一郎. Wiener 空间と調和解析. 北川編確率論及び推計学の進歩. 岩波(1953), 18-36.

[174] Sunouchi, G. *Harmonic analysis and Wiener integral.* Tohoku Math. J. 3(1951), 187-196.

[175] Скитовиz, В.П. *Об одной характеризации брауновекого двитени.* Theor. Prob. Appl. 1(1956), 361-364.

[176] Taylor, S.T. *The Hausdorff α-dimensional measure of Brownian paths in n-space.* Proc. Camblidge Phil. Soc. 49(1953), 31-39.

[177] ――――――. *The α-dimensional measure of the graph and the set of zeros of a Brownian path.* Proc. Camblidge Phil. Soc. 51(1955), 265-274.

[178] Tchentsov, N.N. *Le mouvement brownien à plusieurs paramèteres de P. Lévy et le bruit blanc généralisé.* Theor. Prob. Appl. 2(1957), 281-282.

[179] Totoki, H. *A method of construction of measures on function spaces and its applications to stochastic processes.*

Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A. 15 (1962).

[180] Trotter, H.F. *A property of Brownian motion paths.* Illinois J. Math. 2 (1958), 425-433.

———. *Convergence of semi-groups of operators.* Princeton Thesis. (1956).

[181] Tanaka, H. *Note on continuous additive functionals of 1-dimensional Brownian path.* (to appear).

[182] Ueno, T. *The diffusion satisfying Wentzell's boundary condition and the Markov process on the boundary, I.* Proc. Jap. Acad. 36 (1960), 533-538.

[183] ———. ———, *II.* Proc. Jap. Acad. 36 (1960), 625-629.

[184] ———. *The Brownian motion satisfying Wentzell's boundary condition.* Bull. International Statis. Instituto. Vol.38 Part 4. Tokyo, (1961).

[185] Umemura, Y. *Rotationary invariant measure in the dual space of a nuclear space.* Proc. Jap. Acad. 38 (1962).

[186] Volkonski, V. A. *Random substitution of time in strong Markov processes.* Theor. Prob. Appl. 3 (1958), 332-350.

[187] ———. *Additive functionals of Markov processes.* Dokl. Akad. Nauk. 127 (1959).

[188] ———. *Additive functionals of Markov processes.* Trudy Mosk. Mat. 9 (1960), 143-189.

[189] ———. *Continuous one-dimensional Markov processes and additive functionals derived for them.* Theor. Prob. Appl. 4 (1959), 208-211.

[190] Watanabe, T. *On the theory of Martin boundaries induced by countable Markov processes.* Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto. Ser A. 33 (1960).

[191] ———. *Some general properties of Markov processes.* J. Inst. Polytech. Osaka City Univ. 10 (1959), 9-29.

[192] 渡辺毅. 可附番空間の上の *Markov* 過程から導びかれる *Martin* 境界と

その応用. Sem. on Prob. 1 (1959).

[193] 渡辺寿夫. *Wiener* 空间における積分とその応用. Sem. on Prob. 8 (1961).

[194] Wentzell, A.D. *On lateral conditions for multi-dimensional diffusion processes.* Theor. Prob. Appl. 4 (1959), 172-185.

[195] ——————. *Неотрицательные аддитивные функционалы от Марковских процессов.* Dokl. Acad. Nauk. 137 (1961), 17-20.

[196] Wiener, N. *Differential space.* J. Math. Phys. M.I.T. 2 (1923), 131-174.

[197] ——————. *The Dirichlet problem.* J. Math. Phys. M.I.T. 3 (1924), 127-146.

[198] Yosida, K. *On the differentiability and the representation of one-parameter semi-group of linear operators.* J. Math. Soc. Japan. I (1948), 15-21.

[199] ——————. *Brownian motion on the surface of the 3-sphere.* Ann. Math. Statist. 20 (1949).

[200] 吉田耕作. *Riemann* 空间上の拡散方程式の積分について. 北川編確率論及び推計学の進歩. 岩波, (1953).

[201] Yosida, K. *Integration of Fokker-Planck's equation in a compact Riemann space.* Ark. Mat. 1 (1949).

[202] Minlos, R.A. *Generalized stochastic processes and their extension to measures.* Trudy. Moskow. Math. Obš. 8 (1959), 497-518.

[203] McKean, H.P. (未発表) (田中洋氏よりの私信による)

[204] Neveu, V.J. *Une generalisation des processus à accroissements positifs independants.* Abh. der Math. Sem., Hamburg (1960-61).

[205] Itô, S. *On Neymann problem for Laplace-Beltrami operators.* Proc. Jap. Acad. 37 (1961).

[206] Hostinsky, B. *Sur une équation fonctionnelle considerée par Chapmann et par Kolmogoroff.* Dokl. Acad. Nauk. SSSR. 2

(1934), 393-397.

[207] Tutubalin, V. N. Theor. Prob. Appl. 4 (1959), 467.

[208] Lévy, P. *Le mouvement brownien fonction d'un point de la sphère de Riemann.* Rend. del. Circolo. Math. di. Palermo, Ser II. 8 (1959), 1-14.

索　　　引

I

K

L

M

N

O

P

R

S

T

(B1-150)

U

W