B.1. Brown運動 [上]

凡　　例

1° 本文を章、節に分け 1 （1章），1.1 （1章1節）のように番号をつけた

2° 式の番号は各節ごとに変えた．例えば、(1.1) は1節1式をあらわし．他の節で引用するときはその前に章の番号をつけ、(2.1.1)（2章1節1式）とした。

3° A，B，……，　A₁，A₂……等は定理に相当する。

4° ⟶ 参照の記号

（⟶(1.1.1)）式（1.1.1）を参照

（⟶P. Lévy [111]）巻末の文献番号 [111] の P. Lévy の著書参照

Cauchy 過程（⟶ 加法過程）手引「加法過程」の項について参照

5° アンダーラインのあるものの多くは、その項、又はその場所に定義あるいは基本的な説明が述べられていることを示し、索引に出る

6° ※の印は、その部分の事実を文献より証明を確認出来ないままに述べたこと

を示す。

7° 記号

記　号	説　明
$\overline{R^d} = R^d \cup \{\partial\}$	R^dの1点∂によるコンパクト化空間
∂D	Dの境界
$\mathbb{B}(A)$	集合A上のBorel集合体．Aが位相空間のときは、Aの位相的Borel集合体
$\mathbb{C}(A)$	位相空間Aで定義された有界実数値連続函数の全体
$Sup(f)$、$Sup(\mu)$	函数f，測度μの台

$\mathbb{C}_0(A) = \mathbb{C}(A) \cap \{f : Sup(f)$ コンパクト$\}$

$\Delta = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$　R^dの Laplacian，$d=1$ のときは $\frac{d^2}{dx^2}$ をあらわす．

Brown 運動 (brownian motion, mouvement brownien)

0 研究の歴史 略

1 構成と定義

1.0 Brown 運動の確率論的模型を構成し、これを研究することは、N. Wiener によって創められ、その後 A. Khintchin, A. N. Kolmogorov, P. Lévy 及びその他多くの人達によって精細な研究が進められた。N. Wiener は極めて技巧的な方法によって、簡単な確率空間の上に Brown 運動を構成している。P. Lévy の構成方法も N. Wiener と同じような仕方で、いずれも正規型確率変数の独立な系からつくられる級数の極限としてこれを組立てている。N. Wiener のは Brown 運動の Fourier 式展開であり、P. Lévy は折れ線によって内挿し、これを近似する方法をとっている。この章では、両者の構成方法を述べた後、A. N. Kolmogorov の定理によって、連続函数の空間に一挙に Wiener 測度を導き、構成的に Brown 運動を定義する。

1.1 N. Wiener の構成

$\Omega=[0,1)$ の Borel 集合体を $\mathbb{B}(\Omega)$ とし、その上の古典的 Borel 測度 P から得られる確率空間を $(\Omega, \mathbb{B}(\Omega), P)$ とする。$\Omega \ni \omega$ の2進法展開 $\omega=\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n(\omega)/2^n$ の第 n 桁 ε_n はこの確率空間上の確率変数で $\underline{\underline{C}}=[\varepsilon_n;\ 1 \leqq n < +\infty]$ は $P(\varepsilon_n=0)=P(\varepsilon_n=1)=\frac{1}{2}$ なる独立系、―― Coin tossing game 対称な Bernoulli 列 ―― である。

$$Z_{01}=\varepsilon_1,\quad Z_{02}=\varepsilon_2,\quad Z_{03}=\varepsilon_4,\quad Z_{04}=\varepsilon_7 \cdots\cdots\cdots$$
$$Z_{11}=\varepsilon_3,\quad Z_{12}=\varepsilon_5,\quad Z_{13}=\varepsilon_8,\ \cdots\cdots$$
$$Z_{21}=\varepsilon_6,\quad Z_{22}=\varepsilon_9,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$S_n=\sum_{k=1}^{\infty} Z_{nk}/2^k \qquad n=0, 1, 2, \cdots\cdots$$

$$X_n=(-2\log S_{2n})^{\frac{1}{2}} \cos(2\pi S_{2n+1}) \qquad n=0, 1, 2, \cdots\cdots$$

とおく。

$\underline{\underline{C}}_n=[Z_{nk};\ 1 \leqq k < +\infty]$ は coin tossing game $\underline{\underline{C}}$ の部分系

であるから、S_nは $[0,1)$ 上に一様分布をし $C_n \cap C_m = \phi$ $(n \neq m)$ より $[S_n;\ 0 \leqq n < +\infty]$ は独立系でありこれより $[X_n;\ 0 \leqq n < +\infty]$ は各X_nが標準正規分布に従う独立系となっている。このとき

$$(1.1)\quad B(t,\omega) = \frac{t}{\sqrt{\pi}} X_0(\omega) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin kt}{k} X_k(\omega) \quad 0 \leqq t$$

と定義すると、右辺の級数は殆んどすべての ω に対して、$t \in [0, \pi]$ について一様収束し、$[B(t,\omega);\ 0 \leqq t \leqq \pi]$ は次の性質をもつ。

(a) 殆んどすべての $\omega \in \Omega$ に対して $B(t,\omega)$ は $[0,\pi]$ 上のtの函数として連続である。

(b) $[B(t,\omega);\ 0 \leqq t \leqq \pi]$ は正規型変数系（——）でその平均値ベクトル及び分散行列は

$$E[B(t,\omega)] = 0, \quad E[B(t,\omega)B(s,\omega)] = s \wedge t$$

を充している。

この確率過程（——）　$[B(t,\omega);\ 0 \leqq t \leqq \pi]$ を Wiener 過程（Wiener process）又は N. Wiener の Brown 運動（N. Wiener's Brownian motion）と云う。

1.2　P. Lévy の構成

N. Wiener の構成における一様分布をする独立系 $[S_n;\ 1 \leqq n < +\infty]$ と標準正規分布の分布函数 $\Phi(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ から $\xi(\omega) = \Phi^{-1}(S_n(\omega))$（$\Phi^{-1}$ はΦの逆函数）として得られる $[\xi_n;\ 1 \leqq n < +\infty]$ も又独立な正規型変数系である。

$$g_1(\omega) = \xi_1(\omega)$$

$$g_{\frac{1}{2}}(\omega) = \xi_2(\omega)$$

$$g_{\frac{1}{4}}(\omega) = \xi_3(\omega), \quad g_{\frac{3}{4}}(\omega) = \xi_4(\omega),$$

$$g_{\frac{1}{8}}(\omega) = \xi_5(\omega), g_{\frac{3}{8}}(\omega) = \xi_6(\omega), g_{\frac{5}{8}}(\omega) = \xi_7(\omega), g_{\frac{7}{8}}(\omega) = \xi_8(\omega),$$

$$\cdots\cdots$$

と定義すると $[g_{k2^{-n}};\ 0 \leqq k \leqq 2^n \quad n = 0, 1, 2, \cdots]$ は独立な正規型変数

系である。これと、三角形函数（triangle functions）$f_{k2^{-n}}$

$$f_1(t) = t \qquad 0 \leqq t \leqq 1$$

$$\begin{aligned} f_{k2^{-n}}(t) &= 2^n\left[t-(k-1)2^{-n}\right] & (k-1)2^{-n} \leqq t \leqq k2^{-n} \\ &= 2^n\left[(k+1)2^{-n}-t\right] & k2^{-n} \leqq t \leqq (k+1)2^{-n} \\ &= 0 & \text{その他} \end{aligned}$$

にたいし、$0 \leqq k \leqq 2^n$　$n = 0, 1, 2, \cdots\cdots$

を用いて

$$(2.1)\quad B_m(t,\omega) = f_1(t)g_1(\omega) + \sum_{n \leqq m} 2^{-\frac{1}{2}(n+1)} \sum_{k=1,3,\cdots 2^n-1} f_{k2^{-n}}(t)\, g_{k2^{-n}}(\omega) \qquad 0 \leqq t \leqq 1$$

と定義すると、$B_m(t,\omega)$ は $[0,1]$ 上の t の連続函数で、$m \uparrow +\infty$ のとき、殆んどすべての ω に対して $B_m(t,\omega)$ は $t \in [0,1]$ について一様な極限 $B_{+\infty}(t,\omega)$ をもつ。

このようにして得られた確率過程 $[B_{+\infty}(t,\omega)\,;\, 0 \leqq t \leqq 1]$ は $t \in [0,1]$ に対して $\boxed{1.1}$ の性質 (a) (b) をもっている。

$\boxed{1.3}$　Brown 運動の逆過程

$\boxed{1.1}$ の性質 (a), (b) については次のような関係がある。

$\boxed{A}$ 確率空間 $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), P)$ で定義された可分確率過程（→確率過程）$[x(t,\omega)\,;\, a < t < b]$ が正規型変数系で $E[x(t,\omega)] = 0$, $E[x(s,\omega)x(t,\omega)] = s \wedge t$ を充ているならば、殆んどすべての ω に対して $x(t,\omega)$ は t の連続函数であり、この確率過程は時間的に一様な加法過程であつて、$x(t,\omega) - x(s,\omega)$ $(t > s)$ の分布は平均 $m(t-s)$ 分散 $\sigma^2(t-s)$ (m, σ^2 は定数) なる正規分布をする。

逆に、

$\boxed{B}$　確率過程 $[x(t,\omega)\,;\, a < t < b]$ が時間的に一様な加法過程で、殆んどすべての ω について $x(t,\omega)$ が t の連続函数ならば、$x(t,\omega) - x(s,\omega)$ $(s < t)$ は平均 $m(t-s)$, 分散 $\sigma^2(t-s)$ なる正規分布をしている。

この定理 [A] と正規型変数系の存在定理（→確率過程）より、平均値ベク

トルを演算的に0,共分散行列 $v(s,t)=s\wedge t$ を与えて時間区間$(-\infty+\infty)$上の確率過程$[B(t,w);-\infty<t<\infty]$を構成し、$\boxed{1.1}$ の性質(a)(b)をもつようにすることが出来る。これも又 Brown 運動と云われ、$\tilde{B}(t,w)=B(-t,w)$ とおいたとき、$[\tilde{B}(t,w);-\infty<t<+\infty]$ は又Brown運動であって、もとのBrown運動の逆過程(reversed process)と呼ばれる。

$\boxed{1.4}$ 射影不変性 (projective invariance)

$[B(t,w);-\infty<t<\infty]$ をBrown運動とし、$-\infty<t_0\neq t_1<+\infty$ なる t_0, t_1 をとり、t は t_0 と t_1 との間にあるものとする。この範囲で $B(t_0)$, $B(t_1)$ を線型補間して得られる $\frac{1}{t_1-t_0}[(t_1-t)B(t_0)+(t-t_0)B(t_1)]$ を標準化して

$$X(t;t_0,t_1)=\sqrt{\frac{t_1-t_0}{(t_1-t)(t-t_0)}}\;\frac{(t_1-t)(B(t)-B(t_0))-(t-t_0)(B(t_1)-B(t))}{t_1-t_0}$$

とおくと、$X(t;t_0,t_1)=X(t;t_1,t_0)$ である。t_0, t_1 のいずれか一方が $\pm\infty$ のときには

$$X(t;t_0,+\infty)=\frac{B(t)-B(t_0)}{\sqrt{t-t_0}}=X(t;+\infty,t_0)$$

$$X(t;-\infty,t_1)=\frac{B(t)-B(t_1)}{\sqrt{t_1-t}}=X(t;t_1,-\infty)$$

と定義すると、

$\boxed{A}$ $[X(t,w)=X(t;t_0,t_1);\ t_0\leqq t\leqq t_1]$ は正規型変数系で、その平均値ベクトル、共分散行列は

$$E[X(t,w)]=0,\quad E[X(t,w)X(s,w)]=(s\wedge t,\ s\vee t,\ t_0\wedge t_1,\ t_0\vee t_1)^{\frac{1}{2}}$$

ここに、$(a,b,c,d)=\frac{a-c}{a-d}\Big/\frac{b-c}{b-d}$ (非調和比)

である。(P. Lévy)

非調和比は射影変換で不変であり 正規型変数系はその平均値ベクトルと共分散行列で定まるから

$\boxed{B}$ (P. Lévy の射影不変性の定理) $[X(t;t_0,t_1);\ t_0\leqq t\leqq t_1]$ の分布は t の射影変換で不変である。すなわち、$t'=\varphi(t)$をt_0とt_1の間を$t_0'=\varphi(t_0)$と$t_1'=\varphi(t_1)$の間え写す射影変換とするとき、2つの系 $[X(t;t_0,t_1);\ t_0\leqq t\leqq t_1]$

$\{X(\varphi(t); t_0', t_1'); t_0 \leqq t \leqq t_1\}$ は同じ分布に従ふ。(P. Lévy)

特にBrown 運動 $[B(t, w); 0 \leqq t < +\infty]$ において $B(0, w) \equiv 0$であれば、$\varphi(t) = 1/t$ は$0 < t < +\infty$ を$+\infty > t > 0$に写す射影変換であるから、$\left[\frac{B(t, w)}{\sqrt{t}}; 0 < t < +\infty\right]$ と $\left[B\left(\frac{1}{t}, w\right)\sqrt{t}; 0 < t < +\infty\right]$ は同じ分布をしている。この性質は Brown 運動の研究でしばしば用いられる。

$\boxed{1.5}$. Brown 運動の定義

一般に時間区間が$0 \leqq t < +\infty$ なる Brown 運動について考える場合が多い。この§ではそのようなものを以下の各章で便利なような形に構成的に定義する。

Wを$[0, +\infty)$で定義された実数値連続函数 w の全体とし、w の $t \in [0, +\infty)$ 座標を$w(t)$ 又は $x(t, w)$ であらわし、w、$x(0, w)$を道(Path)と云う。$x(t, w)$を$x_t(w)$と分くこともある。

Wの筒集合(→ 確率分布)Aから生成される Borel 集合体を $B(W)$とし、

$$E = \{w; (w(t_1), w(t_2), \cdots w(t_n)) \in B_n\}$$

$$0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n, \quad B_n \in B(R^n)$$

なる筒集合Eに対して、

$$P^{(a)}_{t_1, t_2 - t_n}(E) = \int_{B_n} g(t_1, a, a_1)\, g(t_2 - t_1, a_1, a_2) \cdots g(t_n - t_{n-1}, a_{n-1}, a_n)\, da_1\, da_2 \cdots da_n$$

と定義する。但し

$$(5.1)\quad g(t, a, b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{1}{2}(a-b)^2} \quad t > 0, \quad a, b \in R',$$

とおく。

$$(5.2)\quad g(t+s, a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t, a, c)\, g(s, c, b)\, dc, \quad s, t > 0,$$

であるから $P^{(a)}_{t_1, t_2 \cdots t_n}(E)$ はEのあらわし方に無関係に定まるので、これを単に$P_a(E)$ と書くことが出来る。P_aはA上の初等的確率分布(→ 確率分布)となっている。こゝで、<u>A. N. Kolmogorovの定理</u> (i) P を(W, A) 上の初等的確率測度とし、(ii) 上のEのような形の筒集合で、$B_n \in$

$\mathbb{B}(R^n)$を動かして出来る$\mathbb{W}$の Borel 集合体 $\mathbb{B}_{t_1}$ ……t_n 上では確率測度で(iii) 定数 $\lambda_1>0$, $\lambda_2\geqq 1$, 及び $\lambda_3>0$ が存在して

$$E\left[\,|w(t)-w(s)|^{\lambda_1}\right] \leqq \lambda_3 |s-t|^{\lambda_2} \quad (s,\ t>0)$$

となっているならば P は $\mathbb{B}(\mathbb{W})$ 上の確率測度に拡張出来る。を用いると

$$E_a\left(|w(t)-w(s)|^4\right)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(t-s,a,x)(x-a)^4 dx = 3(t-s)^4$$

であるから $\lambda_1=4$, $\lambda_2=2$、$\lambda_3=3$ として條件(iii) が成り立ち P_aを$\mathbb{B}(\mathbb{W})$上の確率測度に拡張出来る。

[$x(t,\ w)$; $0\leqq t<+\infty$] は確率空間 [$\mathbb{W}$, $\mathbb{B}(\mathbb{W})$, P_a] 上で定義された時間的に一様な加法過程で道 $x(u,\ w)$ は連続であるが,

$$P_a(w;\ w(0)=a)=P_0(w;\ w(0)=0)=\lim_{n\uparrow+\infty}\lim_{t\downarrow 0} P_0(w;\ |w(t)|<\tfrac{1}{n})$$
$$=\lim_{n\uparrow+\infty}\lim_{t\downarrow 0} 2\int_0^{n^{-1}t^{-\frac{1}{2}}} g(1,\ 0,\ y)\ dy = 1$$

から [$x(t,\ w)$; $0\leqq t<+\infty$] 又は [$\mathbb{W}$, $\mathbb{B}(\mathbb{W})$, P_a] をaから出発するBrown 運動 (Brownian motion starting from a) 又は標準 Brown 運動 (standard Brownian motion) と云う。特に0から出発するBrown 運動が $\boxed{1.1}$ $\boxed{1.2}$ で構成したWiener 過程である。

[$\mathbb{W}$, $\mathbb{B}(\mathbb{W})$, P_a] を Wiener 空間 (Wiener space), P_a を Wiener 測度 (Wiener measure) と云うことがある。

各点から出発する Brown 運動すなわち Wiener 測度の系 $\underline{B}=$[$\mathbb{W}$, $\mathbb{B}(\mathbb{W})$, P_a, $a\in R^1$] を1次元Brown 運動 (one-dimensional Brownian motion) と云う。

1次元 Brown 運動の d個の直積 (――確率分布) を d次元Brown運動と呼ぶ。

すなわち, [$\mathbb{W}_i$ $\mathbb{B}(\mathbb{W}_i)$ P_{a_i} $a_i\in R^1$] ($i=1,2,\cdots,d$) をd箇の1次元Brown運動とし,

$$\mathbb{W}=\mathbb{W}_1\times\cdots\cdots\times\mathbb{W}_d,\quad \mathbb{B}(\mathbb{W})=\prod_{i=1}^{d}\otimes\,\mathbb{B}(\mathbb{W}_i),\ (\text{直積Borel集合体})$$

$$P_a=\prod_{i=1}^{d}\otimes\ P_{a_i}\quad (\text{直積測度})\quad a=(a_1,\ a_2\cdots\cdot a_d)\in R^d$$

としたとき, [$\mathbb{W}$, $\mathbb{B}(\mathbb{W})$, P_a $a\in R^d$] がd次元 Brown 運動である. この

とき道 $w=(w_1 \cdots\cdots w_d)$ 又は $x(\cdot\, w)=(x_1(\cdot\, w), \cdots ; x_d(\cdot w))$ は $[0+\infty)$ で定義され R^d の値をとる連続函数である.

$\boxed{1.6}$ Donsker の原理 (Donsker's principle)

$\mathbb{W}_R$ を $\{0, 1, 2, \cdots\}$ で定義され、$\{0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$ の値をとる函数 w_R の全体とし その $n \in \{0, 1, 2 \cdots\}$ 座標を $w_R(n)$ 又は $R(n, w_R)$ で表わす.

$\mathbb{W}_R$ の筒集合 $E=\{w_R ; \ w_R(n)=k\}$ に対して, $Q_l(E)=\binom{n}{f(n, k, l)} 2^{-n}$ と

と定める.

ここに、

$$f(n, k, l)=\frac{n}{2}+\frac{1}{2}(k-l), \quad \binom{n}{j}=\frac{n!}{j!(n-j)!} \quad j=0, 1, \cdots\cdots n$$

$$=0 \qquad その他$$

Q_l (E) は矛盾なく定義されて, $\mathbb{W}_R$ の筒集合から生成される Borel 集合体 $\mathcal{B}(\mathbb{W}_R)$ 上の確率分布に拡張出来る。 $\mathbb{R}=[\mathbb{W}_R, \mathcal{B}(\mathbb{W}_R), Q_l, l=0, \pm 1, \pm 2 \cdots\cdots]$ を (対称な) random walk ((symmetric) random walk) と呼ぶ。

$[\mathbb{W}, \mathcal{B}(\mathbb{W}), P_0]$ を Wiener 過程とする. $w_R \in \mathbb{W}_R$ とし R^2 の点 ($k 2^{-n}$, $2^{-n/2} w_R(k)$) ($k=0, 1, 2, \cdots$) を線分で結んで出来る連続函数を $w \in \mathbb{W}$ とし、w_R に w を対応させる写像を π_n とする。π_n によって $\mathcal{B}(\mathbb{W})$ 上の分布 P_n を $P_n(B)=\qquad(\pi_n^{-1}(B))$ ($B \in \mathcal{B}(\mathbb{W})$) と定義する. 次に $\mathbb{W} \ni w_1, w_2$ の距離 $\rho(w_1, w_2)$ を

$$\rho(w_1, w_2)=\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \frac{\max_{0 \leqq t \leqq m}|w_1(t)-w_2(t)|}{1+\max_{0 \leqq t \leqq m}|w_1(t)-w_2(t)|}$$

で定め, $\mathbb{W}$ における ρ ―位相に関して、Wiener 測度 (P_0) 0 の集合を除いて連続な実数値函数の全体を $\mathcal{C}_0(\mathbb{W})$ とすると、次の Donsker の原理が成り立つ。

$f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{W})$ で $a \in R^1$ が 1 次元分布 $P_0(w ; f(w) \leqq a)$ の連続点ならば,

$\lim_{n \to +\infty} P_n(w ; f(w) \leqq a)=P_0(w ; f(w) \leqq a)$ である.

(Donsker)

1.7 Brown 運動の近似 (I)

$[W, \mathcal{B}(W), P_a, a \in R^1]$ を1次元 Brown 運動とし、$f \in C(R^1)$ から

$$u(t,a) = E_a[f(x(t,w))] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(b)\, g(t,a,b)\, db$$ をつくると (1.5)

より、これは初期値問題

$$(7.1) \cdot \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} u(t,a) = \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial^2}{\partial a^2} u(t,a) & t>0 \quad a \in R^1 \\ u(0+,a) = f(a) \end{cases}$$

の unique な解である。この解は次のように randam walk $[W_R, \mathcal{B}(W_R), Q_\ell \ \ \ell=0, \pm 0, \pm 2, \cdots\cdots]$ から近似することが出来る。すなわち、$f \in C(R^1)$ に対して

$$u_n(t,a) = E_{[\sqrt{n}\, a]}[f(n^{-\frac{1}{2}} R([nt], w_R)]$$

とおけば、$\lim_{n\to\infty} u_n(t,a) = u(t,a)$ が存在して (7.1) の解となっている。

1.8 Brown 運動の近似 (II)

F.B.Knight は Wiener 過程の道を、状態空間及び時間変数の尺度を適当に変換した randam walk の道の広義一様収束な極限として近似した。(F.B Knight [108]) こゝではその方法を述べる。

$\alpha_k = 2^{-2k}$, $\beta_k = 2^{-k}$, ($k=0, 1, 2, \cdots\cdots$) とし、W_k を $\{n\alpha_k ; n=0,1,2,\cdots\cdots\}$ で定義され、$\{m\beta_k ; m=0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$ なる値をとる函数 w_k のうち、$w_k(0)=0$, $w_k((n+1)\alpha_k) = w_k(n\alpha_k) - \beta_k$ 又は $w_k(n\alpha_k)+\beta_k$ となるようなものの全体とする。このとき

$$W_k \subseteq \prod_{i=0}^{\infty} \{m\beta_k ; -i \leq m \leq i\}$$ であり、右辺は弱位相でコンパクト空間となるから、それより W_k に導びかれる相対位相に関する W_k 上の位相的 Borel 集合体を $\mathcal{B}(W_k)$ とする

$$E = \{ w_k ; \ w_k(0)=0, \ w_k(\alpha_k) = \varepsilon_1 \beta_k, \ w_k(2\alpha_k) = (\varepsilon_1+\varepsilon_2)\beta_k,$$

$$\cdots\cdots\cdots w_k(n\alpha_k) = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots\cdots + \varepsilon_n)\beta_k \}$$

$$\varepsilon_i = \pm 1 \ \ (i=1,2,\cdots\cdots n)$$

なる $E \in \mathcal{B}(W_k)$ については、$Q_k(E)=2^{-n}$ と定義することにより、Q_k は $\mathcal{B}(W_k)$ 上の確率測度にまで拡張することが出来る。$R_k=[W_k, \mathcal{B}(W_k), Q_k]$ を（0から出発する）random walk と云う。$k=0$ のときには［1.6］で定義した random walk である。w_k を R_k の道（R_k-Path）と呼ぶ。次に

$$\sigma(w_k)=\min\{n\,;\ w_k(n)\in\{-\beta_{k-1}\ \ \beta_{k-1}\}\}\quad k=1,2,\cdots\cdots$$

とおき、

$$\sigma_1(w_k)=\sigma(w_k),\ \tau_1(w_k)=\min\{n\,;\ w_k(n+\sigma_1(w_k))\in\{w_k(\sigma_1(w_k))-\beta_{k-1},\ w_k(\sigma_1(w_k))+\beta_{k-1}\}\}$$

$$\sigma_2(w_k)=\sigma_1(w_k)+\tau_1(w_k),$$

$$\tau_2(w_k)=\min\{n\,;\ w_k(n+\sigma_2(w_k))\in\{w_k(\sigma_2(w_k))-\beta_{k-1},\ w_k(\sigma_2(w_k))+\beta_{k-1}\}\}$$

$$\sigma_3(w_k)=\sigma_2(w_k)+\tau_2(w_k),\cdots\cdots$$

と定義し、

$$A_k=\{w_k\,;\ \text{すべての}n\text{について}\ \sigma_n(w_k)<+\infty\}$$

とおくと $Q_k(A_k)=1$ である。W_k から W_{k-1} への写像 M_k を

$$w_k\in A_k\ \text{ならば}\ (M_k w_k)(n\alpha_{k-1})=w_k(\sigma_n(w_k)\alpha_{k-1})$$

$$k\geqq 1$$

$$w_k\notin A_k\ \text{ならば}\ (M_k w_k)(n\alpha_{k-1})=n\beta_{k-1}$$

と定める。次に $W_\infty\subseteq\prod_{k=0}^{\infty}W_k$ で

$$w_\infty=(w_0\ w_1, w_2,\cdots\cdot)\ \ w_{k-1}=M_k w_k\quad k\geqq 1$$

なる形の要素からなる部分集合をとり、これから W_k への射影を $f_{k\infty}(w_\infty)=w_k$ とする。そうして、

$$\mathcal{B}_k^*=f_{k\infty}^{-1}(\mathcal{B}(W_k)),\quad \mathcal{B}^*=\bigcup_{k\geq 0}\ \mathcal{B}_k^*$$

とおいて、$E^*\in\mathcal{B}_k^*$ に対しては $Q^*(E^*)=Q_k(f_{k\infty}(E^*))$

とおくと矛盾なく定義され、Q^* は有限加法族 $\mathcal{B}^*$ 上の初等的確率測度となる。W_k の位相及び写像 M_k の定義より、M_k は W_k から W_{k-1} への連続写像であり、又 $E\in\mathcal{B}(W_k)$ ならば、$Q_k(E)=\sup\{Q_k(C)\,;\ C$ は E を含むコンパクト集合$\}$ となっていることがわかるので S.Bochner の定理（S.Bochner[10]）によって Q^* は $\mathcal{B}^*$ から生成される W_∞ の Borel 集合体 $\mathcal{B}(W_\infty)$ 上の確率測度 Q_∞ に拡張することが出来る。この確率空間 $[W_\infty, \mathcal{B}(W_\infty), Q_\infty]$ を確率空間の列

$$\{[W_k, \mathcal{B}(W_k), Q_k],\ M_{k+1}\,;\ k=0,1,2,\cdots\cdots\}$$

の射影極限（projective limit）と云う。

R_kの道w_kから連続パラメーターの函数$\tilde{w}_k$を

$$\tilde{w}_k(t) = w_k(n\alpha_k), \quad n\alpha_k \leqq t < (n+1)\alpha_k$$

によって定め、その全体を$\tilde{W}_k$とする．$[W_k, \mathbb{B}(W_k), Q_k]$から自然に導びかれる確率空間$[\tilde{W}_k, \mathbb{B}(\tilde{W}_k), \tilde{Q}_k]$と写像$\tilde{M}_k$；$\tilde{W}_k \longrightarrow \tilde{W}_{k-1}$ $(k \geqq 1)$とから、今述べた離散的な場合にならって、その射影極限$[\tilde{W}_\infty, \mathbb{B}(\tilde{W}_\infty), \tilde{Q}_\infty]$を構成する．このときF.B.Knightにより．

$\boxed{A}$ 各$T>0$に対して殆んどすべての$\tilde{w}_\infty = (\tilde{w}_0, \tilde{w}_1, \cdots\cdots)$は$0 \leqq t \leqq T$に関して一様なCauchy列である。

そこで、$\tilde{w}_\infty = (\tilde{w}_0, \tilde{w}_1, \cdots\cdots) \in \tilde{W}_\infty$に対して

$$\begin{aligned}\tilde{x}(t, w_\infty) &= \lim_{k\to\infty} \tilde{w}_k(t) \quad \text{この極限が存在するとき、} \\ &= 0 \quad\quad\quad\quad\quad\; \text{存在しないとき}\end{aligned}$$

と定義すると

$\boxed{B}$ $\{\tilde{x}(t, \tilde{w}_\infty)\,;\, 0 \leqq t < +\infty\}$はWiener過程の一つの変形（version ⟶ 確率過程）である。

このような構成方法をF.B.Knightは極限構成（limit construction）と呼んでいる。S.Bochnerの定理を基礎にした極限構成はWiener過程を含む広いクラスの確率過程の構成にも用いることが出来る．F.B.Knight $\boxed{108}$．H.Tatoki $\boxed{179}$ 等を参照

$\boxed{1.9}$ Brown運動の一つの特徴づけ

B.П.CKuтnoбuч $\boxed{175}$はLévy過程（⟶加法過程）のうち．次のようなものとしてBrown運動をcharacterizした．

[A] $[x(t\,w)\,;\,0 \leqq t \leqq 1\,P]$は独立増分を持ったLévy過程とする．$a(t), b(t) \in \mathbb{C}([0\,1])$が

$\int_0^1 [a(t)\,b(t)]^2 dt \neq 0$ ならば $Y = \int_0^1 a(t)\,dx(t)$, $Z = \int_0^1 b(t)\,dx(t)$ は互に独立である．しかも$\int_0^1 \frac{a^2(t)}{b^2(t)}dt$, $\int_0^1 \frac{b^2(t)}{a^2(t)}\,dt$の中少くとも一方が存在する．とすれば$[x(t\,w)\,;\,0 \leqq t \leqq 1,\,P]$はBrown運動の１つの変形である．

尚同種の定理がinfinite linear formsについても証明される。

2　基礎的性質

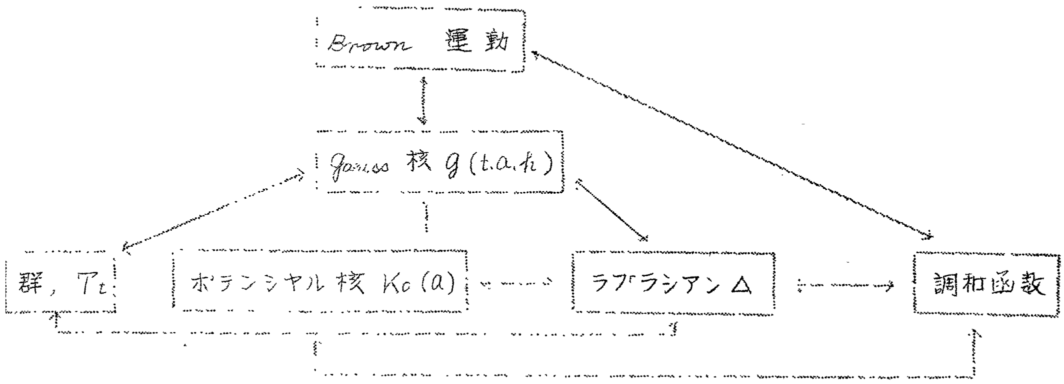
── ポテンシャル論との関係 ──

2.0

1.5 で Brown 運動は連続函数の空間における Wiener 測度の系に他ならないことを述べたが、この測度に関係してあらわれる量を、Brown 運動の一つの現象形態としてとらえ、関係する解析学の諸分野 ── 熱方程式論、調和函数論等 ── との相互関係の基本的なことがらについて述べる。

このような見方をすることにより古典的なポテンシャル論で Markov 性が本質で、その反映として種々の関係が出て来ていることが解る。

その相互関係の見取図を示すと、



このような考え方をとると Yosida-Hille の半群の理論が重要な役割を果たす。

2.1　半群 (Semi-group), Green 作用素 (Green Operator), 生成作用素 (Generator)

[W, $\mathbb{B}(W)$, P_a, $a \in R^d$] を d 次元 Brown 運動とする。

(1.1)　$P(t, a, B) = E_a[\chi_B(x(t, w))]$　　$t \geq 0$, $a \in R^d$, $B \in \mathbb{B}(R^d)$

とおけば

(1.2)　$P(t, a, B) = \int_B g(t, a, b)\, db$,　$g(t, a, b) = (2\pi t)^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{1}{2t}\|a-b\|^2}$

で，$P(t, a, B)$ は次の性質をもつ。

(P_1)　t, a を固定したとき，$P(t, a, \cdot)$ は $\mathbb{B}(R^d)$ 上の確率測度である

(P_2)　$B \in \mathbb{B}(R^d)$ を固定したとき，$(t, a) \in (0, +\infty) \times R^d$ の連続函数である。

(P_3) Kalmogorov－Chapmann の方程式

$$P(t+s, a, B) = \int_{R^d} P(t, a, db)\ P(s, b, B) \qquad t, s \geqq 0$$

を充す。

(P_4) $f \in \mathbb{C}(\overline{R^d})$ ならば $\int_{R^d} f(b) P(t, a, db)$ は a に関して一様連続である。

(P_5) $f \in \mathbb{C}(\overline{R^d})$ ならば $\int_{R^d} f(b) P(t, a, db)$ は $t \downarrow 0$ のとき $f(a)$ は a に関して一様に収束する。

$P(t, a, B)$ を Brown 運動の推移確率（transition probability）という。ここで

$$(1.2)\left\{\begin{array}{lll} P(t, a, \{\partial\}) = 0 & , & t \geqq 0,\quad a \in R^d \\ P(t, \partial, \{\partial\}) = 1 & , & t \geqq 0 \\ P(t, \partial, B) = 0 & , & t \geqq 0,\quad B \in \mathbb{B}(R^d) \end{array}\right.$$

とおき，更に $f \in \mathbb{C}(\overline{R^d})$ に対して

$$(1.3)\quad T_t f(a) = \int_{\overline{R^d}} f(b) P(t, a, db), \quad t \geqq 0, \quad a \in \overline{R^d}$$

と定義すると，$\{T_t\,;\, t \geqq 0\}$ は次の性質をもつ。

(T_1)　T_t は $\mathbb{C}(\overline{R^d}) \longrightarrow \mathbb{C}(\overline{R^d})$ なる非負線型作用素で

$$\| T_t \| = 1$$

(T_2)　$\| T_t f - T_s f \| \longrightarrow 0 \ (t \to s,\ s \geqq 0)$ 但し，$T_0 = I$ 恒等作用素

(T_3) 半群の性質（Semi－group property）$T_t T_s = T_{t+s}$.　$t, s \geqq 0$

この $\{T_t : t \geqq 0\}$ を Brown 運動に対応する半群（Semigroup）という。次に

$$\mathfrak{D}(\mathcal{G}) = \left\{ f;\ f \in \mathbb{C}(\overline{R^d}),\ \lim_{t \downarrow 0} \frac{T_t f - f}{t} \text{ が強収束の意味で存在する} \right\}$$

とおき，任意の $u \in \mathfrak{D}(\mathcal{G})$ に対して

$$(1.4)\quad \mathcal{G} u = \lim_{t \downarrow 0} \frac{T_t f - f}{t} \ (\text{強})$$

と定義し，これを半群 $\{T_t\,;\, t \geqq 0\}$ の生成作用素（generator），$\mathfrak{D}(\mathcal{G})$ を $\mathcal{G}$ の定義域（domain）という。

T_t の Laplace 変換をとって，

$$(1.5)\quad G_\alpha f(a) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} T_t f(a)\, dt = E_a\left(\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} f(x(t, w))\, dt \right)$$

$\alpha > 0, \quad a \in \overline{R^d}, \quad f \in \mathbb{C}(\overline{R^d})$

とおくと，(T_1)〜(T_3) に対応して

(G_1)　G_α は $\mathbb{C}(\overline{R^d}) \longrightarrow \mathbb{C}(\overline{R^d})$ なる非負線型作用素で

$\|G_\alpha\| = 1/\alpha$

(G_2)　$\|\alpha G_\alpha f - f\| \longrightarrow 0 \quad (\alpha \to +\infty)$

(G_3)　レゾルベント方程式 (resolvent equation)

$G_\alpha f - G_\beta f + (\alpha - \beta) G_\alpha G_\beta f = 0 \quad \alpha, \beta > 0$

が成り立つ。$\{G_\alpha ; \alpha > 0\}$ を Brown 運動の半群 $\{T_t : t \geqq 0\}$ に対応するレゾルベント (resolvent)，G_α を green 作用素 (green operation) と云う。

このとき，

$\mathcal{R}_\alpha = \{G_\alpha f ; f \in \mathbb{C}(\overline{R^d})\}$

とおくと，(G_3) より R_α は α に無関係であり，その共通の範囲 (range) を $\mathcal{R}$ とすると，半群の一般論より，$\mathcal{R} = \mathcal{D}(\mathcal{G})$ で，これは $\mathbb{C}(\overline{R^d})$ で稠密な線型部分空間となっており，$\mathcal{G}$ は閉作用素である。もし $u = G_\alpha f$ ならば $\mathcal{G}u = \alpha u - f$ である。

次に

$$(1.6)\quad K_\alpha(a) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}(2\pi t)^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{1}{2t}\|a\|^2} dt \qquad \alpha \geqq 0$$

とおき，これを α 次の green 函数 (green function of α-th order) と云う。($\alpha = 0$ のときには $+\infty$ となることがある。) K_α は具体的には，例えば

$$K_\alpha(a) = K_\alpha(\|a\|)$$

$$K_\alpha(a) = \frac{1}{2\sqrt{2\alpha}} e^{-\sqrt{2\alpha}|a|} \qquad (d=1) \quad \alpha > 0$$

$$K_\alpha(a-b) = (2\pi)^{-d/2}\left(\frac{\sqrt{2\alpha}}{\|b-a\|}\right)^{d/2-1} \mathbb{K}_{d/2-1}\left(\sqrt{2\alpha}\,\|b-a\|\right)$$

$$K_0(a) = \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}-1\right)}{4\pi^{d/2}} \|a\|^{2-d} \quad (d \geqq 3)$$

である。但し $\mathbb{K}_\nu$ は Kelvin の函数である。green 函数 K_α を用いると，green 作用素 G_α は，

$$(1.7)\quad G_\alpha f(a) \begin{cases} = 2\int_{R^d} K_\alpha(a-b) f(b)\, db & a \in R^d \\ = f(\partial)/\alpha & a = \partial \end{cases} \qquad \alpha > 0$$

と書くことが出来る。

次に $\mathcal{G}$ 及び $\mathcal{D}(\mathcal{G})$ を具体的に決定することを考える。

$f \in \mathbb{C}^2(R^d) \cap \mathbb{C}(\overline{R^d})$ とし，$u = G_\alpha f$，$v(t,a) = T_t f(a)$ とおけば，

v は

$$(1.8)\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\Delta v \\ v(t,\partial) = f(\partial) \quad v(0+\ a) = f(a) \qquad a \in R^d \end{cases}$$

を充し，u はこの方程式を Laplace 変換した

$$(1.9)\begin{cases} (\alpha - \dfrac{1}{2}\Delta)u = f \\ u(\partial) = \dfrac{1}{\alpha} f(\partial) \quad , \quad \| \alpha u - f \| \longrightarrow 0 \ (\alpha \to +\infty) \end{cases}$$

の解となっている。(1.9) の解は $\mathbb{C}^2(R^d) \cap \mathbb{C}(\overline{R^d})$ で一意的であるから，

$$\widetilde{\mathcal{D}} = G_\alpha(\mathbb{C}^2(R^d) \cap \mathbb{C}(\overline{R^d}))$$

とすると，$\widetilde{\mathcal{D}} \subseteq \mathbb{C}^2(R^d) \cap \mathbb{C}(\overline{R^d})$ に注意すれば

$\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{G})$ で，$u \in \widetilde{\mathcal{D}}$ に対しては

$$\begin{aligned} \mathcal{G}u(a) &= \frac{1}{2}\Delta u(a) \qquad && a \in R^d \\ &= 0 && a = \partial \end{aligned}$$

であることがわかる．このように Brown 運動の生成作用素 $\mathcal{G}$ は $\mathcal{D}(\mathcal{G})$ で稠密な集合 $\widetilde{\mathcal{D}}$ 上では $\frac{1}{2}\Delta$ と一致しているが，更に次のことが示される。

$d=1$ のとき，

$$(1.10)\quad \mathcal{D}^* = \{u;\ u \in \mathbb{C}(\overline{R^1}),\ u'' \text{ が存在して，} u'' \in \mathbb{C}(\overline{R^1}),\ \lim_{a \to \partial} u''(a) = 0\}$$

とおくと，$\frac{1}{2}\Delta = \frac{1}{2}\frac{d^2}{da^2}$ は $\mathcal{D}^*$ 上では閉作用素であり且つ

$$(1.11)\quad \mathcal{D}^* = \mathcal{D}(\mathcal{G})$$

$d \geqq 2$ のとき，

$$(1.12)\quad \mathcal{D}^* = \{u;\ u \in \mathbb{C}(\overline{R^d}),\ u \in \mathbb{C}^2(\overline{R^d}),\ \lim_{a \to \partial} \Delta u(a) = 0\}$$

とすると $\frac{1}{2}\Delta$ は $\mathcal{D}^*$ 上では閉作用素ではない。そこで，$u \in \mathcal{D}^*$ に対して

$$(1.13)\quad \begin{aligned} Au(a) &= \frac{1}{2}\Delta u(a) \qquad && a \in R^d \\ &= 0 && a = \partial \end{aligned}$$

と定義すれば，$\mathbb{C}(\overline{R^d})$ の中での A の最小閉拡大 $\overline{\Delta}$ が存在して，その定義域を $\mathcal{D}(\overline{\Delta})$ とすると，

$$(1.14)\quad \mathcal{D}(\overline{\Delta}) = \mathcal{D}(\mathcal{G}) \text{ 且つ } \mathcal{G}u = \frac{1}{2}\overline{\Delta}u$$ である。

$\boxed{2.2}$ 強Markov性(strong Markov property)とポテンシャル論

wをBrown運動の道とし、$t \geqq 0$に対して連続函数w_t^- w_t^+をそれぞれ $w_t^-(s)=w(t\wedge s)$, $w_t^+(s)=w(t+s)$と定義し、w_t^-を<u>stopped path</u>, w_t^+を<u>shifted path</u>と呼ぶ。wにw_t^-, (w_t^+)を対応させる写像は($W, \mathbb{B}(W)$)から($W, \mathbb{B}(W)$)えの可測写像であるから、$\{w\in W; w_t^-\in E\}$ ($E\in\mathbb{B}(W)$)は$\mathbb{B}(W)$に属する。このような集合から生成される$\mathbb{B}(W)$の部分Borel集合体を$\mathbb{B}_t=\mathbb{B}_t(W)$とかく。

<u>Markov時間</u>(Markov time) Wから$[0, +\infty]$えの写像$\sigma=\sigma(w)$が任意の$t>0$に対して、$\{w; \sigma(w)\geqq t\}\in\mathbb{B}_t$のとき(Brown運動のpathに対する)Markov時間であるという。 Markov時間の例

$\sigma(w)\equiv t$,

σ_n; $n\geqq 1$がすべてMarkov時間ならば$\sigma_n \uparrow (\downarrow) \sigma$もMarkov時間である。

σ_1, σ_2がMarkov時間ならば、$\sigma_1\wedge\sigma_2$, $\sigma_1\vee\sigma_2$, $\sigma_1(w)+\sigma_2(w^+_{\sigma_1(w)})$はいづれもMarkov時間である。$A\subset R^d$を任意の集合とし、

$$\sigma(w)=\sigma_A(w)=\begin{cases}\inf\{t;\ w(t)\in A\} & t<+\infty\ \text{が存在するとき}\\ +\infty & \text{存在しないとき}\end{cases}$$

と定義して、σ_Aを集合Aへの<u>最小通過時間</u>(first passage time)と云う。σ_AはAが開集合又は(道の連続性により)Aが閉集合のときには、Markov時間である。

Markov時間をσとし、$\mathbb{B}_\sigma=\mathbb{B}_\sigma(W)$を$\{w; w_\sigma^-\in E\}$ ($E\in\mathbb{B}(W)$)なるすべてBorel集合から生成される$\mathbb{B}(W)$の部分Borel集合体とする。($\sigma(w)=+\infty$のときには$w_{\sigma(w)}^-$は$\overline{R^d}$につけ加えたextraな点∞の値をとらせる。) $\mathbb{B}_{\sigma+}=\bigcap_{n>1}\mathbb{B}_{\sigma+\frac{1}{n}}$とおく。そのとき、<u>強Markov性</u>(strong Markov property): 任意のMarkov時間σと、$B_1\in\mathbb{B}_{\sigma+}$, $B_2\in\mathbb{B}(W)$に対して

$$(2.1)\quad P_a\{w;\ w\in B_1,\ w_\sigma^+\in B_2,\ \sigma(w)<+\infty\}$$
$$= E_a\{P_{x(\sigma(w)w)}(B_2);\ \sigma(w)<+\infty,\ w\in B_1\}$$

又は之と同値な関係式

任意の有界$\mathbb{B}_{\sigma+}$可測函数$f(w)$と、有界$\mathbb{B}(W)$可測函数$g(w)$に対して

(2.2) $E_a\{f(w)g(w_\sigma^+);\ \sigma(w)<+\infty\}=E_a\{f(w)E_{x(\sigma(w),w)}(g(w));$

$\sigma(w)<+\infty\}$ が成り立つ。この性質を強 Markov 性という。

(——→ Markov 過程)

強 Markov 性と同時に，次の

first passage time relation

Aが開集合又は閉集合で，$P_a(\sigma_A<+\infty)=1$ ならば，任意の $f\in \mathbb{B}(\overline{R^d})$ に対して

(2.3) $T_tf(a)=E_a\{f(x(t,w));\ t<\sigma_A(w)\}+\int_{[0,t)\times A} T_{t-s}f(b)P_a(\sigma_A(w)\in ds,\ x(\sigma_A(w),w)\in db).$

が成立する。

Dynkin の公式 (Dynkin's formula)

任意の Markov 時間 σ と任意の $u\in\mathfrak{D}(\mathcal{G})$ に対して

(2.4) $$u(a)=E_a\left\{\int_0^{\sigma(w)}e^{-\alpha t}\left(\alpha-\frac{1}{2}\Delta\right)u(x(t,w))dt\right\}$$
$$+E_a\left\{e^{-\alpha\sigma(w)}u(x(\sigma(w),w));\ \sigma(w)<+\infty\right\}$$

であり，特に $E_a(\sigma)<+\infty$ のときは

(2.5) $$u(a)=-E_a\left\{\int_0^{\sigma(w)}\left(\frac{1}{2}\Delta\right)u(x(t,w))dt\right\}+E_a\{u(x(\sigma(w),w))\}$$

となる。これを Dynkin の公式という。

今 $u(a)=-\exp\left[-\frac{\|a\|^2}{2r^2}\right]\in\mathfrak{D}(\mathcal{G})$ とすると，$\min_{\|a\|\leqq r}\mathcal{G}u(a)=\varepsilon_0>0$ であるから，$\tau_n(w)=\sigma_{U^c}(w)\wedge n$ $(U=\{a,\ \|a\|<r\})$ に対して Dynkin の公式 (2.5) を用いると，$\varepsilon_0E_0(\tau_n)\leqq 2\|u\|$ となり，これから $E_0(\sigma_{U^c})\leqq 2\|u\|/\varepsilon_0<+\infty$ すなわち，Brown 運動の道はその出発点から，それを含む任意の有界領域を有限時間で出て行くことのみならずこのようなとき (2.5) 式が使えることが解る。

強 Markov 性の反映は解析学特に Potential に非常に多くの所に見ることが出来る，例えば典型的なものとして，掃散の原理 (principle of balayage) がある．それはこの Dynkin の公式と密接な関係がある。

掃散の原理。$d\geqq 3$ のとき compact support の measure μ が存在

し，relative compact な open set G を任意にとったとき support が $\bar{G}$に含まれるcompact support measure $\tilde{\mu}$ が存在して

$$\int_{R^d} G_0(x,y)\mu(dy) = \int_{R^d} G_0(x,y)\tilde{\mu}(dy), \qquad x\in G$$

でしかもR^d全体では $\int_{R^d} G_0(x,y)\mu(dy) \geqq \int_{R^d} G_0(x,y)\tilde{\mu}(dy)$ となる。

この証明はDynkinの公式の場合と類似的に強Markov 性を用いるとよい。またd=d，2 のときもそれぞれ修正した結果がある。

またこれらに関連して最大値の原理，完全最大値の原理等が成立つ。（G.A.Hunt［65］をみよ。） 更にこれらのことは一般にMarkov 過程に対応するPotential kernelの特徴づけに関連している。

古典的Dirichlet 問題（classical Dirichlet problem）

有界領域Dとその境界 ∂D 上の連続函数 f が与えられたとき、次の条件を充す函数 $u\in\mathbb{C}(\bar{D})$ があれば，それをDにおける境界値 f の古典的 Dirichlet 問題の解と云う。

1）　$\Delta u(a)=0$　　　　$a\in D$の 内部

2）　$\displaystyle\lim_{b\in D\text{の内部}\ b\to a} u(b)=f(a)$　　　　$a\in\partial D$

もし，この解 $u(a)=u(a;f,D)$ が存在するならば、それは確率論的な解（stochastic solution）として，次の形で与えられる。

（2.6）　$u(a)=E_a\{f(x(\sigma_{\partial D}(w),w))\}$

任意の連続函数 $f\in\mathbb{C}(\partial D)$ に対して古典的な解が存在する場合には，解は

（2.7）　$u(a)=\displaystyle\int_{\partial D} f(b)h^D(a,db)$

なる形に書けることが知られているが、∂D 上の測度 $h^D(a,db)$ は確率論的には

（2.8）　$h^D(a,db)=P_a(x(\sigma_{\partial D}(w),w)\in db)$

と書くことが出来る，これは Brown 運動の $db\subset\partial D$ への到達確率（hitting probability）と呼ばれ、この場合には古典的な調和測度（harmonic measure）と一致する。

$D_1\subset D_2$ なる有界領域に対して，強 Markov 性により，

（2.9）　$h^{D_2}(a,B)=\displaystyle\int_{\partial D_1} h^{D_1}(a,db)h^{D_2}(b,B)$，　$a\in D_1$，$B\in\mathcal{B}(\partial D_2)$

が成立する。($\longrightarrow$ $\boxed{5.8}$)

<u>green 函数</u>(green's function)

$d \geqq 3$ の場合には、$\boxed{2.1}$ で述べたように0次の green 函数 $K_0(a)$ が存在し、

$$(2.12) \quad K_0(a) = \frac{\Gamma(\frac{d}{2}-1)}{4\pi^{d/2}} \|a\|^{2-d} \qquad (d \geqq 3)$$

である。$d=2$ の場合には

$$K(\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty} e^{-(\alpha\eta+\frac{1}{\eta})}\frac{d\eta}{\eta} = \frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{\alpha} + \gamma + o(1) \quad (\alpha \downarrow 0)$$

γ; Euler の定数

$d=1$ の場合には $K_\alpha(a) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} e^{-\sqrt{2\alpha}|a|}$ となっていることから, $K_\alpha(a)$ の<u>有限部分</u>(finite part)として $K_0(a)$ を次のように定義する。

$$(2.13) \quad K_0(a) = \lim_{\alpha\downarrow 0}[K_\alpha(a) - K_\alpha(a_0)] = \frac{1}{2\pi}\log\|a\|^{-1}, \ \|a_0\|=1, \ (d=2)$$

$$(2.14) \quad K_0(a) = \lim [K_\alpha(a) - K_\alpha(0)] = -|a|/2, \qquad (d=1)$$

次元 d の如何に不拘ず,(2.12),(2.13) 及び (2.14)で 定義された函数 $K_0(a)$ を Brown 運動の green 函数と呼ぶことにする。このとき $K_0(a)$ は

$$(2.15) \quad \Delta K_0(a) = 0 \quad (a \neq 0)$$

を充している。又 K_0 を核(kernel)とするポテンシャルをすべてニュートン・ポテンシャル(Newton potential)と云うことにする。(普通は $d=2$ のときは対数ポテンシャルといい, $d=1$ は余り考えない)。

<u>領域の green 函数</u>(green's function in a domain)

D を R^d の与えられた領域とする。$D\times D$ 上の函数 $G(a.b) = K_0(a-b) + H(a.b)$ で次の条件を充すものが存在するとき、D を <u>green 領域</u>(greenian domain)と云う。

1) $G(a.b) \geq 0$, で $a \neq b$ ならば $G(a.b) < +\infty$

2) $G(a,b) = G(b,a)$

3) $K_0(\cdot)$ は green 函数

4) $\Delta_a H(a\,b) = \Delta_b H(a.b) = 0$

D が green 領域ならば、上の4つの性質 1) ~ 4) を充す函数 G のうち最小(minimal)なものが存在する。これを G^D と書き、D の green 函数と呼ぶ。

D が green 領域であるかどうかは、D 内の minimal process ($\longrightarrow$ $\boxed{5.1}$)

の滞在時間に関係する。

$(a, b) \in D \times D$ とすると

$$P_a(x(t,w) \in db) \geqq P_a(x(t,w) \in db, \sigma_{\partial D}(w) > t)$$

であるから

$$2g^D(t, a, db) = P_a(x(t,w) \in db, \sigma_{\partial D}(w) > t)$$

$(\longrightarrow \boxed{5.1})$

と定義すれば、db に関して絶対連続であり、

$$(2.16) \quad 2g^D(t, a, b)\, db = P_a(x(t,w) \in db, \sigma_{\partial D}(w) > t)$$
$$(a, b) \in D \times D \quad t > 0$$

とかける。このとき

$$(2.17) \quad \int_0^{+\infty} g^D(t, a, b)\, dt = \begin{cases} G^D(a, b) & D: \text{green 領域のとき} \\ +\infty & \text{そうでないとき} \end{cases}$$

である。(Hunt)

(2.12) より $d \geqq 3$ ならば R^d は green 領域で、その green 函数は $G^{R^d}(a,b) = K_0(a-b)$ である。その他、$D = (r_1, r_2)$ $(d=1)$ $D = \{a;\ \|a-a_0\| < r\}$ $(d \geqq 2)$ はいずれも green 領域で、その green 函数は、それぞれ

$$(2.18) \quad G^{(r_1,r_2)}(a, b) = \frac{(a-r_1)(r_2-b)}{r_2-r_1} \qquad a<b$$

$$= \frac{(b-r_1)(r_2-a)}{r_2-r_1} \qquad a \geqq b$$

$$(2.19) \quad G^D(a,b) = \frac{1}{4\pi_{d-2}}\left[\frac{1}{\|a-b\|^{d-2}} - \frac{r^{d-2}}{\|a-a_0\|^{d-2}} ; \frac{1}{\|b-a'\|^{d-2}}\right] \qquad d \geqq 3$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\log\frac{1}{\|a-b\|} - \log\frac{1}{\|b-a'\|} - \log\frac{r}{\|a-a_0\|}\right] \qquad d=2$$

但し

$$a' = a_0 + \frac{r^2}{\|a-a_0\|}(a-a_0)$$

で与えられる。

$\boxed{2.3}$ excessive function

green 領域 D で定義された非負函数 u が

1) 少くとも D の1点で有限である。

2) $E_a\{u(x(t,w));\, t<\sigma_{\partial b}(w)\} \uparrow u(a) \quad (t\downarrow 0.)$

を充すとき、excessive function であると云う。

一方全じく green 領域 D で定義された非負函数 u が

1) 少くとも D 内の 1 点で有限である.

2) 下半連続, $\lim_{b\to a} u(b) = u(a) \quad (a\in D)$ である。

3) $\int_{\partial B} u(b)\,db \leqq u(a) \quad a\in D,\quad D\supseteqq B=\{b;\|b-a\|<\varepsilon\}$

を充すとき. 優調和函数 (Superharmonic function) であるという。

excessive function に対して次の性質が成り立つ。

[A] u が excessive であるための必要充分條件は u が優調和なことである。
(Hunt, Dynkin)

[B] (Riesz 分解) D を green 領域. G^D をその Green 函数とする。u が D で excessive ならば

$$(3.1) \qquad u(a) = \int_D G^D(a,b)\,de^u(b) + v(a)$$

と一意的に分解出来る。ここに v は u より小さな調和函数のうち最大なものである。

測度 de^u を u の Riesz 測度 (Riesz's measure) (3.1) の右辺を u の Riesz 分解 (Riesz's decomposition) と云う。

excessive function の例

(1°) green 領域 D の非負測度 $e(db)$ をとり、そのポテンシャルを

$$u(a) = \int_D G^D(a,b)\,de(b)$$

とする。u が D 内のある 1 点で有限であれば、u は excessive であり、de は u の Riesz 測度となっている。

(2°) green 領域 D で非負な函数 u が

$$\widetilde{\mathcal{G}}u(a) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} 2^{-1} n\,\varepsilon^{-2}\left[\int_{\partial B_\varepsilon} u(b)\,db - u(a)\right] \quad B_\varepsilon=\{b;\|b-a\|<\varepsilon\}$$

とおいたとき. $0 \geqq \widetilde{\mathcal{G}}u \in \mathbb{C}(D)$ ならば u は D で excessive であり. Dynkin の公式より $\widetilde{\mathcal{G}}u = \mathcal{G}u$ である。

[C]　任意の$u \in \mathcal{D}(\mathcal{G})$と$a \in R^d$に対して，$a$を含むある green 領域Dをとれば、Dで excessive なu_1 u_2が存在して、

$$u(a) = u_1(a) - u_2(a) \qquad a \in D$$

とかけ、u_iに対する Riesz 測度をde^{u_i}とするとそれはDのとり方に無関係になるように定めることが出来，$de^u = de^{u_1} - de^{u_2}$　とおけば

$$\mathcal{G}u(a) = \frac{1}{2}\overline{\Delta}u(a) = -\frac{d\,e^u(a)}{2da} \qquad a \in D$$

とかける。

このde^{u_i}は$u(a) = 2\int G^D(a,b)\,\mathcal{G}u(b)\,db$とあらわしたときの測度$\mathcal{G}u(b)\,db$の Jordan 分解における、正及び負の部分である。

2.4　Space-time Brownian 運動

Brawn 運動と Newton ポテンシヤルの関係について述べて来たが、それと"熱ポテンシヤル"(heat potential)についてもこれまでと同様なことが、J. L. Doob 等によって確率論的立場から系統的に研究されている。こゝでは今迄と類似の点についてその要点を述べる。

$R^{d+1} \ni z = (a_1 a_2 \cdots\cdots a_d, S)$のとき　$S = ord(z)$とかき、$ord(z_1) < ord(z_2)$ならばz_1はz_2より下にあると云う。ord が同じ点の全体を水平(horizontal)であると云う。開区間(a,b)で連続な函数を$(j=1\ 2, \cdots\cdots d)$とし

$$x_j = f_j(S) \quad a \leqq S \leqq b \quad j = 1\ 2, \cdots\cdots d$$

で定まる$R^d \times [-\infty +\infty)$の曲線を ord が b なる点を始点とし、ord が a なる点を終点とする下向きの曲線(downward directed carve)と呼ぶ。$a = -\infty$であってもよい。次にDを開集合とし$z \in \partial D$とするとき、zが、zを除いてDの中にある下向き曲線の終点であれば，zは上から accessible (accessible from above)と云い，又$D' \subset D$であって、D'に始点をもち、Dの中にある下向き曲線の終点がDの点をつくすとき，D'はDを scan するという。

座標平面に平行な超平面で囲まれたd+1次元の長方形を standard rectangle，2つの水平な超平面で囲まれた無限開領域を standard strip と云い，standard rectangle の clased upper bounding face を upper boundary，その残りの境界の開核を lower bourdary と云う。

Space-time の Brown 運動

$[W, \mathbb{B}(W)\ P_a, a \in R^d]$をd次元の Broun 運動とする。

$S=[-\infty,\alpha]$ $(-\infty<\alpha<+\infty)$とし、$\widetilde{W}$を$[0,+\infty]$で定義され、$\overline{R^d}\times S$の値をとる次の形の函数の全体とする。

$$(4.1)\quad \widetilde{w}(s)=(w(s)\ t-s),\ t\in S,\ 0\leqq s<+\infty$$
$$=(\partial,-\infty)\qquad s=+\infty \text{ 又は } t=-\infty$$

$\widetilde{W}$の筒集合から生成されるBorel集合体を$\mathbb{B}(\widetilde{W})$とし、Wiener測度$\mathbb{P}_a$から自然な仕方でこの上の測度$\widetilde{\mathbb{P}}_{(a.t)}$を次のように定義する。

$$(4.2)\quad \widetilde{\mathbb{P}}_{(a.t)}(B)=\mathbb{P}_a(w;\ \widetilde{w}=(w.\ t-\cdot),\ \widetilde{w}\in B)\quad B\in\mathbb{B}(\widetilde{W})$$

$[\widetilde{W},\ \mathbb{B}(\widetilde{W}),\ \widetilde{\mathbb{P}}_{(a.t)}\ (a.t)\in\overline{R^d}\times S]$を<u>d次元space-time Braun運動</u>という。この道$\widetilde{w}$は$\overline{R}^d\times S$の下向き曲線である。(4.2)より

$$(4.3)\quad \widetilde{\mathbb{P}}_{(at)}(\widetilde{w};\ \widetilde{w}\in E)=\chi_{E_2}(t-s)\int_{E_1}(2\pi s)^{-\frac{d}{2}}e^{-\frac{1}{2s}\|a-b\|^2}db$$

但し$E_1\in\mathbb{B}(\overline{R^d})$, $E_2\in\mathbb{B}(S)$, $E=E_1\times E_2\ \in\mathbb{B}(\overline{R^d}\times S)$であるから、これを$\mathbb{P}(s,(at),E)$とおけば、$\mathbb{P}(s,(at),\cdot)$は$\mathbb{B}(\overline{R}^d\times S)$上の確率測度に拡張することが出来る。これを<u>space-time Brown運動の推移確率</u>と呼ぶ。

$\boxed{2.1}$と同様に$f\in\mathbb{C}(\overline{R^d}\times S)$に対して

$$(4.4)\quad \widetilde{T}_tf(a.s)=\int_{R^d}f(b,s-t)\frac{1}{(2\pi t)^{d/2}}e^{-\frac{\|a-b\|^2}{2}}dt$$

と定めれば、$\boxed{2.1}$におけるBroun運動の半群$\{T_t;t\geqq 0\}$と同様な性質$(T_1)\sim(T_3)$をもち、その生成作用素$\widetilde{\mathcal{G}}$と定義域$\mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{G}})$が定まる。これらに関しては前と全様に強Markov性, Dynkinの公式等が成立し、$u\in\mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{G}})$に対しては、

$$(4.5)\quad \widetilde{\mathcal{G}}u(a\,s)=\left(\frac{1}{2}\Delta-\frac{\partial}{\partial s}\right)u(a.s)\quad (a\,s)\in R^d\times(-\infty,\alpha)\text{ となる。}$$

又Green函数は

$$(4.6)\quad \widetilde{K}_0(a,s)=\frac{1}{(2\pi s)^{d/2}}e^{-\frac{\|a\|^2}{2}}\qquad s>0\qquad (d\geqq 1)$$
$$=0\qquad\qquad s\leqq 0$$

であり、これを核とするポテンシャルを<u>熱ポテンシャル</u>(heat potential)と呼ぶ。

次にLaplacian $\Delta=2\mathcal{G}$に対応する調和, 劣調和, 優調和に対応する、$\widetilde{\mathcal{G}}$に附随する概念は、次のような parabolic, subparabolic, superparabolic

という形で導入することが出来る。

Dを$R^d\times(-\infty,\alpha)$の開集合とし，$u$はそこで定義された函数とする。

$u\in C^2(D)$で

(4.7) $\quad \dfrac{\partial u}{\partial s}(z)\dfrac{1}{2}\Delta u(z)=0 \qquad z\in D$

のとき、uはDで<u>parabolic</u>であるといい、uが

1) $-\infty\leqq \quad <+\infty$ で，Dを Scan するDの部分集合上では有限値をとる。

2) uは上半連続，$\overline{\lim\limits_{z\to z_0}}\, u(z)=u(z_0)$ である。

3) RをDのstandard rectangleで$\overline{R}\subseteq D$とする。vが$\overline{R}$で定義された連続函数で、Rでprabolic且つRのlawer boundaryで $v\geqq u$ ならばR上で$v\geqq u$である。

のとき、uはDで<u>sub purabolic</u> と云う。$-u$が subparabolic なときuは <u>super parabolic</u>と呼ぶ

excessive function u も $\boxed{2.3}$ と全様に定義出来る。

(⟶ Markov 過程)

Dでparabolic なuは次のように<u>parabolic 測度</u>(parabolic measure)によって積分表示をすることが出来る，Rを$\overline{R}\subset D$なる standard rectangle とし，ZをRの点又はRの lawer baundary Cに属さない境界点とする，そのとき$u(z)$はC上に連続な密度をもつある測度のC上の平均としてあらわされ、その密度はZで0で，Zより下では lawer baundary fuce の縁を除いて>0である。この測度をZにおける parabolic 測度という。逆にfをC上の函数で、fはRの任意点におけるRに関する parabolic 測度に関して可積分ならば，その点におけるRの parabolic 測度によるfの積分はRで parabolic である。

$\boxed{2.5}$ エネルギー原理(energy principle)と <u>subordination</u>

$\{T_t;t\geqq 0\}$ をd次元Braun 運動に対応する半群とする。これをα次の安定過程(stable process)(⟶加法過程)で subordinate (⟶加法過程，Markov 過程)して得られるMarkov 過程の半群$\{\widetilde{T}_t^{(\alpha)}, t>0\}$は

(5.1) $\quad \widetilde{T}_t^{(\alpha)}f(a)=\displaystyle\int_{R^d}f(b)\,\widetilde{P}_\alpha(t,a,db)$

$$(5.2)\quad \tilde{P}_\alpha(t,a,db)=\tilde{p}_\alpha(t,a,b)\,db=\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^{+\infty}\frac{1}{(2\pi\sigma)^{\frac{d}{2}}}e^{-\frac{\|a-b\|^2}{2\sigma}}\frac{d\sigma}{\sigma^{\alpha+1}}\,db$$

であり、

$$(5.3)\quad \int_0^{+\infty}\tilde{p}_\alpha(t,0,a)\,dt=K^{(\alpha)}(a)=\Gamma\left(\frac{d-\alpha}{2}\right)\left[2^\alpha\pi\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]^{-1}\|a\|^{\alpha-d}$$

但し　$d=1$ ならば $0<\alpha<1$
　　　$d=2$ ならば $0<\alpha<2$
　　　$d=3$ ならば $0<\alpha\leqq 2$

とする。

(5.3) の $K^{(\alpha)}(a)$ は Riesz ポテンシャルの核である。
$d=1$ のときは $0<\alpha<1$, $d\geqq 2$ のときは $0<\alpha<2$ としておけば、
$K^{(\alpha)}(a)$ は半群 $\{\tilde{P}_t^{(\alpha)};\, t>0\}$ の

$$\mathcal{G}u(a)=\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^{+\infty}(\tilde{P}_\tau u-u)(a)\frac{d\tau}{\tau^{1+\alpha}}$$

の 0 次の Green 函数である。

以下 $d\geqq 3$ とし、$0<\alpha+\beta\leqq 1$, $0<\alpha,\beta<1$ とする。

α 次の非減少安定過程 $[\xi(t);\, t\geqq 0]$ に対して $\xi(t)$ の分布函数 $F_t^{(\alpha)}(d\tau)$ は $f_t^{(\alpha)}(\tau)\,d\tau$ なる形で

$$\gamma^{(\alpha)}(\tau)=\int_0^{+\infty}f_t^{(\alpha)}(\tau)\,d\tau<+\infty$$

である。そうして $\gamma^{(\alpha)}(t)$ の Laplace 変換は

$$\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}\gamma^{(\alpha)}(t)\,dt=\lambda^{-\alpha}$$

となるから $\gamma^{(\alpha+\beta)}(\tau)=\gamma^{(\alpha)}*\gamma^{(\beta)}(\tau)$ となって

$$\int_{R^d}K^{(\alpha)}(a-c)K^{(\beta)}(c-b)\,dc=\int_0^{+\infty}\gamma^{(\alpha)}*\gamma^{(\beta)}(\tau)\,g(\tau,a,b)\,d\tau$$

$$=\int_0^{+\infty}\gamma^{(\alpha+\beta)}(\tau)\,g(\tau,a,b)\,d\tau=K^{(\alpha+\beta)}(a-b)$$

すなわち、

$$(5.4)\quad K^{(\alpha+\beta)}(a-b)=\int_{R^d}K^{(\alpha)}(a-c)K^{(\beta)}(c-b)\,dc,\quad \begin{array}{l}0<\alpha+\beta\leqq 1\\ 0<\alpha,\ \beta<1\end{array}$$

を得る。

今 R^d の（符号のついた）測度 μ に対して、

$\displaystyle\int_{R^d\times R^d}K_0(a-b)\mu(da)\mu(db)$ が確定のとき $I(\mu)$ とかき μ のエネルギー（energy of μ）と呼ぶ

(5.4) で $\alpha=\beta=1/2$ とし $K^{(1)}=K_0$ に注意すれば

$$I(\mu-\nu)=\int_{R^d}\left(\int_{R^d}K^{(\frac{1}{2})}(a-c)(\mu-\nu)(da)\right)^2dc\geqq 0$$

であるから、古典的によく知られた結果

エネルギー原理　$d\geqq 3$ とする。 $I(\mu-\nu)\geqq 0$ であり、且つ $I(\mu-\nu)=0$ となるのは $\mu=\nu$ のときに限る。

が得られる。

$d=1$ 又は 2 のときには $\mu(R^d)=\nu(R^d)$ なる条件の下で全様な結果が得られる。

§$\boxed{3}$. Brown運動から導かれるflow

$\boxed{3.0}$ 第2章では、Markov 過程(→)としてのBrown運動の基礎的性質について述べたが、本章では、これを稍々異なった方向から眺めて、道の空間Wで定義された推移変換の群、すなわちflowについて、そのmetrical な性質を述べる。このflowはBrown運動から自然な仕方である Hilbert 空間を定義すると、その上のユニタリー群をひきおこし、一つのユニタリー表現が得られる。表現空間の適当な直和分解をおこなうことにより、そのスペクトル測度の性質、および他の分解によりあらわれるWiener, Itoの多重Wiener積分の性質を述べる。これらはBrown運動と同じmetrical type の確実過程の研究の基礎になる(→ 定常過程)

$\boxed{3.1}$ Brown運動から導びかれるflow

時間区間$(-\infty, +\infty)$上のBrown運動$[W, \mathbb{B}(W), P]$を考える。Wは$(-\infty, +\infty)$で定義された実数値連続函数wの全体としておいてよい。(→ $\boxed{1.3}$) $w(t) = B(t, w)$とかき、閉区間$I=[a, b]$に対して$B(I) = B(I, w) = B(b, w) - B(a, w)$とおく。

$\mathcal{J}$を有限区間Iの全体とすると$\boxed{1.3}$の定義から$[B(I); I\in\mathcal{J}]$は

(1.1) $B(I)$は平均0、分散$|I|$(IのLebesgue測度)の正規分布に従い、

(1.2) $E(B(I)B(J)) = |I\cap J|$

を満たす正規型変数系である.

正規分布の特性より

(1.3) $I\cap J = \phi$ならば$B(I)$と$B(J)$は互に独立で

$$B(I+J) = B(I) + B(J).$$

となっている

Wの点変換τ_t $(-\infty < t < +\infty)$を

(1.4) $(\tau_t w)(s) = w(t+s)$

と定義するとτ_tは$W\to W$なる1対1変換で

$$(1.5)\begin{cases}\tau_t^{-1} = \tau_{-t}, \quad \tau_0 = 1 \quad \text{恒等変換}\\ \tau_s\tau_t = \tau_{s+t}\end{cases}$$

となり、1助変数群(one parameter group)である。

τ_t Wの推移変換(shift operator)という。

推移変換τ_tは保測変換(equi-measure transformation measure preserving transformation) である。

すなわち

1) $E\in\mathbb{B}(\varpi)$ ならば $\tau_t^{-1}E\in\mathbb{B}(\varpi)$ (可測性)で

2) $P(\tau_t^{-1}E)=P(E)$ (保測性)

となっている。

この保測変換群 $\{\tau_t ; -\infty<t<+\infty\}$ を Brown 運動からみちびかれた flow という

いま $\mathbb{B}_0$ として $[B(I); I\subset(-\infty, 0]]$ を可測にする最小の Borel 集合体をとれば、

3) $\mathbb{B}_0$ は $\mathbb{B}(W)$ の部分 Borel 集合体になり

$\tau_t\mathbb{B}_0=\mathbb{B}_t$ とおくと $t<t'$ ならば $\mathbb{B}_t\subseteq\mathbb{B}_{t'}$ である。

4) $\bigwedge_{t=-\infty}^{+\infty}\mathbb{B}_t=\underline{2}$ ($\underline{2}$ は測度 0 又は 1 のみの集合よりなる Borel 集合体)

5) $\bigvee_{t=-\infty}^{+\infty}\mathbb{B}_t=\mathbb{B}_0$ (lattice sum).

をみたすという意味で、所謂 Kolmogorov flow になっている。

この事実は(.1.3)の加法性($B(I)$の正規性にはよらない)が用いれるので、(1.1)の正規分布を Poisson 分布にかえ(1.3)を仮定しても同じようなことがいえる。 また Kolmogorov の flow になる例としては、このように加法過程からみちびかれる flow とは限らず Ornstein-Uhlenbeck の Brown 運動(→$\boxed{9.5}$)$[U(t,\varpi); -\infty<+\infty]$ に対して τ_t を $(\tau_t U(0,\varpi))(s)=U(t+s,\varpi)$, $\mathbb{B}_0$ を $[U(t,\varpi); -\infty<t\leqq 0]$ を可測にする最小の Borel 集合体としてなりたつ.

$\boxed{3.2}$ スペクトルの型 (Spectral type)

$\Omega(\mathbb{B}, P)$ を確率空間とし $\mathbb{B}\ni E, F$ に対して

(2.1) $d(E,F)=P(E\ominus F)$ ($\ominus$ は 対称差)

なる 距離を入れると, $\mathbb{B}$ は完備な距離空間となる。

特に

$\mathbb{B}(\varpi)$ は距離 d に関して可分完備である。

次に $H(x)=\{x(w); E|x(w)|^2<+\infty\}$ ($x(w)$ は $(\varpi, \mathbb{B}(\varpi), P)$ 上の確率変数)とおけば、$\|x\|=E|x(w)|^2$ をノルムとして Hilbert 空間をつくる。今述べたことより $H(x)$ は可分で(実は同値), I の両端が有理数なる B(I) の有理係数の

多項式の全体$\mathcal{P}$は $H(x)$ で稠密である。次に

(2、1.) $(U_t x)(w)=x(\tau_t w)$ $\quad x\in H(X)$

と定義すると、τ_t は保測変換であるから $\{U_t;-\infty<t<+\infty\}$ はユニタリー群となる。$P\in\mathcal{P}$ に対して U_tP が連続なことより $\{U_t;-\infty<t<+\infty\}$ は $t=0$ で連続であることがわかる。

一般に Hilbert 空間 H と單位の分解 $\{E(\lambda);-\infty<\lambda<+\infty\}$ があって

$H=\sum\oplus H_u$ (直和)

とかけ、各 H_u は $E(\lambda)$ の multiplicity が 1 である。

すなわち H_u の要素 x_u があって H_u が $\{\Delta E x_u;\Delta(-\infty+\infty)\}$ の張る閉部分空間となっており、測度 $dP_u(\lambda)=\|dE(\lambda)x_u\|^2$ が Lebesgue 測度と同等(互に絶対連続)であるときスペクトルの型(spectral type)は $\aleph_0$-multiple Lebesgue 又は σ-Lebesgue という。

U_t のスペクトル分解を $U_t=\int e^{i\lambda t}dE(\lambda)$ とすると [A] $M(x)=H(x)\ominus\{1\}$ ($\{1\}$ は定数のつくる 1 次元部分空間)において U_t のスペクトルは σ-Lebesgue である。又 U_t は混合型(mixing type):

$x,y\in H(x)$ ならば $\lim_{t\to+\infty}(U_t x,y)=(x,1)(y,1)$

である。

[A] より flow $\{\tau_t;-\infty<t<+\infty\}$ は エルゴード的(Ergodic) すなわち τ_t 不変な $E\in\mathcal{B}(W)$ は $P(E)=0$ 又は 1 である。ことがひちびかれる。

$\boxed{3、3}$ Wiener 積分, 白色雑音(white noise)

$H(x)$ の中で $\{B(I);I\in\mathcal{J}\}$ の張る閉部分空間を $\mathcal{M}(x)$ とおく。$\mathcal{B}^1$ を Lebesgue 測度有限な1次元 Borel 集合の全体とすれば，$E \in \mathbb{B}^*$ に対して，$B(I)$ ($I \in \mathfrak{I}$) の極限操作で $B(E) \in \mathcal{M}(X)$ なる確率変数を定めることが出来る。

〔A〕 $[B(E);\ E \in \mathbb{B}^*]$ は次の性質をもつ

1) 正規型変数系で，平均値ベクトルは0，共分散行列は，$E(B(E)\cdot B(F)) = |E \cap F|$ である。

2) $E_1, E_2 \cdots E_n \in \mathbb{B}^*$ が互に素ならば，$[B(E_i);\ 1 \leq i \leq n]$ は，独立系で，

(3.1) $B(\sum_{i=1}^{n} E_i) = \sum_{i=1}^{n} B(E_i)$ (a.e)

3) $E_i \in \mathbb{B}^*$ ($1 \leq i < +\infty$) が互に素で，$\sum_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathbb{B}^*$ ならば

(3.2) $B(\sum_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} B(E_i)$ (a.e)

である

この系 $[B(E);\ E \in \mathbb{B}^*]$ を（Brown 運動からみちびかれる直線上の）Wiener の正規偶然測度（gaussian random measure of Wiener）という。

Wiener 積分　$E \in \mathbb{B}^*$ に対して

(3.1) $B(E) = B(E, w) = \int \chi_E(t)\, dB(t)$ とかき，単函数 $f(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i}(t)$ ($E_i \in \mathbb{B}^*$) に対して，

(3.2) $I(f) = I(f, w) = \sum_{i=1}^{n} a_i B(E_i) = \int f(t)\, dB(t)$

とおいて，f の Wiener 積分とよぶ。これは〔A〕2)から f の表現方法に無関係に定まる。一般の $f \in L^2(R^1)$ に拡張するには，$\|f_n - f\| \to 0$ なる単函数列 $\{f_n\}$ をとって

(3.3) $I(f)\ I(f, w) = \operatorname*{l.i.m}_{n \to \infty} I(f_n)$

とする，この右辺の極限の存在は $I(f_n)$ が平均0，分散 $\|f_n\|^2$ なる正規分布に従うことゝ，単函数に対する Wiener 積分の加法性から出る。

又この値は列のとり方に関係しない。

$I(f)$ も又 $f \in L^2(R^1)$ の Wiener 積分という。

〔B〕 $[I(f);\ f \in L^2(R^1)]$ は次の性質をもつ。

1) 正規型変数系で平均値ベクトルは，0，共分散行列は $E(I(f)I(g)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t)dt$ である。

2) $[I(f);\ f \in L^2(R^1)]$ の張る部分空間は $\mathcal{M}(X)$ に一致し，写像 $I: L^2(R^1) \to \mathcal{M}(X)$ は線型連続写像 e である。すなわち

$f, g \in L^2(R^1)$，α, β 一定数ならば $I(\alpha f + \beta g) = \alpha I(f) + \beta I(g)$，

$f_n \to f$ ($L^2(R^1)$) ならば $I(f_n) \to I(f)$ ($\mathcal{M}(X)$) である。

白色雑音（White noise）(𝒮) を L、Schwartzの急減少函数の空間とする。ところが (𝒮) は separable, countably Hilbertian, nuclear space と考えることが出来る。従つて (𝒮) 上の正定符号汎函数

(3、4) $C_{\dot{B}}(\varphi)=\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi^2(t)\,dt\right\}$, $\varphi\in(\mathcal{S})$

は

(3.5) $C_{\dot{B}}(\varphi)=\int_{(\mathcal{S}^*)} e^{i(x,\varphi)}\, d\mu(x)$

なる関係をみたす (𝒮) の dual space $(\mathcal{S}^*)$ の Borel cylinder set を含む最小の Borel algebra $\mathbb{B}(\mathcal{S}^*)$ 上の unique な measure μ が (Minlos の定理[202]により定まる。

この確率空間 $[(\mathcal{S}^*), \mathbb{B}(\mathcal{S}^*), \mu(\cdot)]$ を白色雑音という。これは上の Broun 運動より構成出来る。すなわち 上の $I(\varphi)=\dot{B}(\varphi)$, $\varphi\in\mathcal{S}$, とおけば

$[\dot{B}(\varphi),\ \varphi\in(\mathcal{S})]$

は、白色雑音の１つの version になっている。

白色雑音は gausion measure で これは 共分散汎函数 (covariance functional) により uniquee に定まる，この場合は

$$B(\varphi,\psi)=E(\dot{B}(\varphi)\dot{B}(\psi))=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\psi(t)\,dt,\quad \varphi,\psi\in(\mathcal{S})$$

となる。

(3、6), $B(\varphi,\psi)=B(\tau_h\varphi,\tau_h\psi)$, $\tau_h\varphi(t)=\varphi(t-h)$, $\varphi,\psi\in(\mathcal{S})$

(3 7), $E(e^{i\sum z_j\dot{B}(\varphi_j)})=E(e^{i\sum z_j\dot{B}(\tau_h\varphi_j)})$

となるので，白色雑音は 強定常超過程 (→ 定常過程) である。

また

(3.8) $\mathrm{Supp}(\varphi)\cap\mathrm{supp}(\psi)=\phi$ ならば，$\dot{B}(\varphi)$ と $\dot{B}(\psi)$ は独立である。

この性質は各点独立と呼ばれる

L^2 の直交変換 O でつぎの條件をみたすものを (𝒮) の回転 (rotation) という。

(i) O は (𝒮) を (𝒮) の上に map する.

(ii) O は (𝒮) の上の homeomorphism

である。

このような 回転全体は群を作る。それを O(𝒮) とする。

OとO^{*}をidentifyすることにより，$O(\mathcal{S})$は$\mathcal{S}^{+}$のontoなtransformation groupとみることが出来る。$(\mathcal{S}^{+})$の測度μは任意のBorel set Aに対して

$$\mu(OA)=\mu(A)\ , \qquad O\in O(\mathcal{S})$$

のとき回転に関し不変（rotaton invariant）という，

いま　$C_B^{v}(\varphi)=\exp\{-\frac{v}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi^2(t)\,dt\}$　に対応する白色雑音の測度を$\mu c(\cdot)$とする。そのときつぎのことが成立つ。

$(\mathcal{S}^{+})$のmeasureμが回転に関し不変であるための必要且つ十分な条件はつぎの関係をみたす実数$\alpha\geqq 0$と$(0,\infty)$上のsummableな測度$m(v)$が存在することがある：

任意の$(\mathcal{S}^{*})$の中のBorel set Aに対し

$$\mu(A)=\int_{0<v<+\infty}\mu_v(A)\,m(dv)+\alpha\delta(A)\ ,$$

こゝでδは$(\mathcal{S}^{*})$の点におけるDiracの測度，

(Y、Umemura [185] 参照

$\boxed{3、4}$　$C_B(\varphi)$に対応する再生核の空間

前にのべたように、白色雑音に対応する特性汎函数

(4.1)　　$C_B(\varphi)=\exp\{-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi^2(t)\,dt\}$

は　$C_B(\varphi-\psi)$を$(\varphi,\psi)\in(\mathcal{S})\times(\mathcal{S})$の函数

と見るとき正定符号であるから、$(\mathcal{S})$上の汎函数を要素とするHilbert空間$\mathcal{F}_B$を構成して、$C_B(\varphi-\psi)$をその再生核（reproducing kernel）にすることが出来る。

すなわち$\mathcal{F}_B$での内積を$\langle\ \rangle$であらわせば

(4.2)　$\langle f(\cdot)\ C_B(\cdot-\psi)\rangle=f(\psi)\quad f\in\mathcal{F}_B$

である。

一方 $\{e^{i\dot{B}(\varphi)};\ \varphi\in(\mathcal{S})\}$ の張る閉部分空間 $L^2(\dot{B})$ は、$\dot{B}(\varphi)$ がすべての次数のモーメントをもつことから、多項式 $P_1\cdots P_n$ に対して、$P_1(\dot{B}(\varphi_1))\cdots P_n(\dot{B}(\varphi_n))\in L^2(\dot{B})$ となり $L^2(\dot{B})=H(x)$ が導びかれる。

対応S

$$S:\ L^2(\dot{B})\ni\sum_j a_j e^{i\dot{B}(\varphi_j)}\to\sum_j a_j C_{\dot{B}}(\cdot-\varphi_j)\in\mathfrak{F}_{\dot{B}}$$

は $L^2(\dot{B})\to\mathfrak{F}_{\dot{B}}$ なる線型且つ1対1の等距離写像として拡張出来る。このとき、例えば

$$(4.3)\begin{cases} S(1)=C_{\dot{B}}(\cdot-0) \\ S(\dot{B}(\varphi))=\left(i\int\varphi(t)\cdot(t)\,dt\right)C_{\dot{B}}(\cdot) \\ S(\dot{B}(\varphi)\dot{B}(\varphi))=\left(-\int\varphi(t)\cdot(t)\,dt\int\varphi(s)\cdot(s)\,ds+\int\varphi(t)\,dt\right)C_{\dot{B}}(\cdot) \\ S(\dot{B}(\varphi)^n)=H_n\left(i\int\varphi(t)\cdot(t)\,dt\right)C_{\dot{B}}(\cdot)\quad\left(\int\varphi^2(t)\,dt=1\right) \end{cases}$$

ただし H_n は n次 Hermit 多項式である。

こゝで

(4.4) $H_t(\dot{B})=\{e^{i\dot{B}(\varphi)};\ \sup(\varphi)\subset(-\infty,t]\}$ の張る閉部分空間

(4.5) $S(H_t(\dot{B})\ominus\{1\})=\mathfrak{F}_t(\dot{B})$

と定義すれば

$$(4.6)\begin{cases} \bigcup_t\mathfrak{F}_t(\dot{B})\ (\equiv\mathfrak{F}(\dot{B}))=\mathfrak{F}_{\dot{B}}\ominus\{C_{\dot{B}}(\cdot)\} \\ \bigcap_t\mathfrak{F}_t(\dot{B})=\{0\} \end{cases}$$

$$(4.7)\begin{cases} \bigcap_{t<s}H_s(\dot{B})=H_t(\dot{B}) \qquad \bigcap_{t<s}\mathfrak{F}_s(\dot{B})=\mathfrak{F}_t(\dot{B}) \\ \bigcup_{s<t}H_s(\dot{B})=H_t(\dot{B}) \qquad \bigcup_{s<t}\mathfrak{F}_s(\dot{B})=\mathfrak{F}_t(\dot{B}) \end{cases}$$

となる。

$\{\mathfrak{F}_t(\dot{B});\ -\infty<t<+\infty\}$ から単位の分解 $\{E(t);\ -\infty<t<+\infty\}$ をつくれば(4.7)より点スペクトルをもたない。

そこで Hellinger-Hahn の定理を用いると $\mathfrak{F}(\dot{B})$ に高々可算個の元 $\{f^{(n)}\}$ が存在して

(4.8) $\mathfrak{F}(\dot{B})=\sum_n\oplus\mathfrak{F}(f^{(n)})$ （直和）

(4.9) $\|dE(t)f^{(n)}\|^2=d\sigma_n(t)$ とおくと $d\sigma_{n+1}$ は $d\sigma_n$ に関して絶対連続である。

典型的な $\{f^{(n)}\}$ の組として次のようなものがとれる。

$\varphi_0\in(\mathcal{S})$ を $\varphi_0(t)>0$ $(-\infty<t<+\infty)$ で $\int\varphi_0^2(t)\,dt=1$ なる函数となる。

(4.10) $f^{(n)}(\cdot)=\left(\int\varphi_0(t)\cdot(t)\,dt\right)^n C_{\dot{B}}(\cdot)$ 　　$n=1,2\cdots$

(4.11) $d\sigma_n(t) = \mathrm{const} \times \left(\int_{-\infty}^{t} \varphi_0^2(s)ds\right)^{n-1} \varphi_0(t)^2 dt$ $\quad n = 1, 2 \cdots$

そして、$f \in \mathfrak{H}(f^{(n)})$ ならは　対称函数　$G_n \in L^2(R^n)$

が存在して

(4.12) $f(\cdot) = \int \cdots \int_{R^n} G_n(t_1, \cdots, t_n) \cdot (t_1) \cdots \cdot (t_n) dt_1 \cdots t_n\, C_{\dot{B}}(\cdot)$

とかけ

(4.13) $\mathfrak{F}_{\dot{B}} = \{C_{\dot{B}}(\cdot)\} \oplus \sum_{n \geq 1} \mathfrak{H}(f^{(n)})$

である．

このとき $S^{-1}(f)$ は次に述べる K.Itô の多重 Wiener 積分である．

$\boxed{3.5}$ 多重 Wiener 積分 (multiple Wiener integral)

R^p上の平方可積分函数の全体を $L_p^2 = L^2(R^p)$ と書く。

$f \in L_p^2$ に対して

(5.1) $I_p(f) = \int \cdots \int f(t_1, \cdots, t_p)\, dB(t_1) \cdots dB(t_p)$

なる形の Wiener の正規彷徨測度による p 重積分を定義したいのであるが、この積分の特徴を象徴的に云えば

$\begin{cases} t_1 \cdots t_p \text{ がすべて異なれば } dB(t_1) \cdots dB(t_p) \text{ は普通の積} \\ t_1 \cdots t_p \text{ の中に同じものがあればこの積は } 0 \text{ である.} \end{cases}$ 厳密には次のようにして定義される。

$E_1 \cdots E_p$ が互に共通点のない $\mathbb{B}^*$ の元であるとき，　$E = E_1 \times \cdots \times E_p$ なる形の集合の特性函数を考え．そのようなものゝ複素1次結合であらわされる函数 f のを <u>special elementary function</u> という。

今 f が

$f(t_1 \cdots t_p) = \sum a_{i_1} \cdots_{i_p} \chi_{E_2}(t_1) \cdots \chi_{E_p}(t_p)$

の時に

(5.2) $I_p(f) = \sum a_{i_1} \cdots a_{i_p} B(E_{i_1}) \cdots B(E_{i_p})$ とおく。f が定数のときは．$I_0(f) = f$ と定める。　これは加法性より f の表現の仕方にはよらない。　次に special elementary function の全体が L^2_p で稠密なこと (5.2) の I_p がこのような函数に対しては、つぎの〔A〕の 1)　2) を充すことより、Wiener 積分のときと同様にして $f \in L^2_p$ に対しても $I_p(f)$ を定義することが出来る。

<u>多重 Wiener 積分の性質</u>

[A]

1) $I_p(af+bg) = aI_p(f) + bI_p(g)$　　a、b；複素定数

2) $I_p(f) = I_p(\tilde{f})$

こゝで　$\tilde{f}(t_1 \cdots t_p) = \frac{1}{p!}\sum_{(\pi)} f(t_{\pi_1} \cdots t_{\pi_p})$

$\pi = (\pi_1 \cdots \pi_p)$ は $(1 2 \cdots p)$ のすべての順列を動く

3) $E(I_p(f)\overline{I_p(g)}) = p!(\tilde{f}, \tilde{g})$　(　) は L^2_p の内積

特に

$$E|I_p(f)|^2 \leqq p!\,\|\tilde{f}\| \leqq p!\,\|f\|$$

4) $p \neq q$　ならば $E(I_p(f) I_q(g)) = 0$

今　$\varphi = \varphi(t_1 \cdots t_p) \in L^2_p$,　$\psi = \psi(t) \in L^2_1$　ならは

$(\varphi\psi)(t_1 \cdots t_p\, t) = \varphi(t_1 \cdots t_p)\psi(t) \in L^2_{p+1}$

$(\varphi \underset{(k)}{\times} \psi)(t_1 \cdots t_{k-1}, t_{k+1} \cdots t_p) = \int \varphi(t_1 \cdots t_p)\psi(t_k)\,dm(t_k)$

$\in L^2_{p-1}$　であつて

(5.3)　$I_p(\varphi) I_1(\psi) = I_{p+1}(\varphi\cdot\psi) + \sum_{k=1}^{p} I_{p-1}(\varphi \underset{(k)}{\times} \psi)$

$H(\dot{B})$ を $\{B(E);\ E \in \mathbb{B}^*\}$ を可測にする最小の Borel 集合体とし、それについて可測且つ二次平均有限なもの丶全体とする。　$H(\dot{B})$の元を L_2ー 汎函数と呼ぶ。

(5.3) と $1, x, x^2, \cdots$ が $L^2(R', e^{-x^2}dx)$ の中で完備であることより、

[B] (展開定理)　$H(\dot{B})$　の任意の L_2ー 汎函数ξは

(5.4)　$\xi = \sum_{p=0}^{\infty} I_p(f_p) = \sum_{p\geq 0}^{\infty} I_p(\tilde{f}_p)$

の形に直交展開される。　こゝに f_p は次の意味で一意的である。

$$\sum_{p=0}^{\infty} I_p(f_p) = \sum_{p=0}^{\infty} I_p(g_p) \text{ ならは } \tilde{f}_p = \tilde{g}_p$$

次に $\varphi \in L^2_1$　$\|\varphi\| = 1$　なる実数値函数をとり

(5.5)　$\begin{cases} F_p = \int \cdots \int \varphi(t_1) \cdots \varphi(t_p)\, dB(t_1) \cdots dB(t_p) & p = 1, 2, \cdots \\ F_0 \equiv 1 \end{cases}$

とおくと

(5.6)　$F_p = 2^{-\frac{p}{2}} H_p(2^{-\frac{1}{2}} F_1)$　　H_p；p　次の　Hermit多項式はもつと一般に

$\varphi_1 \cdots \varphi_K$　を　L^2_1 の正規直交実数函系とすると

$$\int\cdots\int \varphi_1(t_1)\cdots\varphi_1(t_{1p_1})\ \varphi_2(t_{21})\cdots\varphi_2(t_{2p_2})\cdots\varphi_k(t_{k1})\cdots\varphi_k(t_{kp_k})\cdots$$

$$\cdots\cdots dB(t_{kp_k}) = \prod_{i=1}^{k} 2^{\frac{p_i}{2}} H_{p_i}(2^{-\frac{1}{2}}\int\varphi_i(t)\,dB(t))$$

がみちびかれる。

この関係を利用し展開定　[B]を用いると、次の Cameron-Martin の得た展開定理の一般化が得られる。

[C] (Cametron-Martin の展開定　)

$\varphi_\alpha(t)$ $(\alpha\in A)$ を L_1^2 の中の完全正規直交実函数系とすると、

(5.8) $\varphi_{\alpha_1}(t_1)\cdots\cdots\varphi_{\alpha_p}(t_p)$ $\alpha_1,\cdots,\alpha_p\in A$

は L_p^2 の中の完全正規直交系となる。そのとき、

(5.9) $$I_p(f) = \sum a_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_p} I_p(\varphi_{\alpha_1}(t_1)\cdots\varphi_{\alpha_p}(t_p))$$

$$= \sum_s \sum_{\substack{p_1+\cdots+p_s=p\\ \beta_1\cdots\beta_s\in A}} b\begin{pmatrix} p_1\cdots p_s\\ \beta_1\cdots\beta_s\end{pmatrix} 2^{-\frac{p}{2}} \prod_{i=1}^{s} H_{p_i}(2^{-\frac{1}{2}}\int\varphi_{\beta_i}(t)\,dB(t))$$

(5.10) $\xi\in H(\dot{B})$ ならば

$$\xi = \sum_p \sum_s \sum_{\substack{p_1+\cdots+p_s=p\\ \beta_1\cdots\beta_s\in A}} b\begin{pmatrix} p_1\cdots p_s\\ \beta_1\cdots\beta_s\end{pmatrix} \prod_{i=1}^{s} H_{p_i}(2^{-\frac{1}{2}}\int\varphi_{\beta_i}(t)\,dB(t))$$

こゝに $a_{\alpha_1\cdots\alpha_p}$ は f の (5.8) に対する Fourier 係数、

$b\begin{pmatrix} p_1\cdots p_s\\ \beta_1\cdots\beta_s\end{pmatrix}$ は $\alpha_1\cdots\alpha_p$ の中 β_i に等しいものが p_i 個 $(i=1,2,\cdots s)$ あるような $\alpha_1\cdots\alpha_p$ に対する $a_{\alpha_1\cdots\alpha_p}$ の和である。

これらと $\boxed{3.4}$ の結果はつぎのような対応関係にある。(4.12) の写像Sによる逆像が丁度 dB による n重 Wiener 積分 $\int_{R^n}\cdots\int G_n(t_1,\cdots,t_n)\,dB(t)\cdots dB(t_n)$ になつており、(4.13) は展開定理[B] に対応している。$\mathcal{F}_{\dot{B}}$ は函数空間でしかも $H(\dot{B})$ の元の平均的な量になつている。従つて $H(\dot{B})$ におけるよりも $\mathcal{F}_{\dot{B}}$ で各種の演算を考えた方が都合のよいことが多い。又 Wiener 彷徨測度 dB による p重 Wiener 積分は、Wiener 積分によつて

$$I_p(f) = \int\cdots\int\cdots f(t_1\cdots t_p)\,dB(t_1)\cdots dB(t_p)$$

(5.11) $$= p!\int_{-\infty}^{+\infty}\Big(\int_{-\infty}^{t_p}\Big(\cdots\int_{-\infty}^{t_3}\Big(\int_{-\infty}^{t_2} f(t_1\cdots t_p)\,dB(t_{p-1})\Big)\,dB(t_p)$$ とかける。

つぎに complex なものを定義する。

複素多重Wiener　積分（Complex multiple Wiener integral）

複素確率変数の系〔$M(E,\varpi)$；$E\in \mathbb{B}^+$〕は、任意の正整数nと任意の複素数$c_1 \cdots c_n$と任意の$E_1 \cdots E_n \in \mathbb{B}^+$に対して

(5.12)　$E\left[e^{iRe\left(\sum_{i=1}^{n} c_i M(E_i)\right)}\right] = exp\left[-\frac{1}{4}\sum_{ij=1}^{n} c_i \bar{c}_j m(E_i \cap E_j)\right]$

を充すとき、複素正規彷徨測度という。但しmは Lebesgue measure とする。

〔A〕

1)　$P(|M(E)|<+\infty) = 1$　$E\in \mathbb{B}^+$

2) $E_1 \cdots E_n \in \mathbb{B}$が互に素ならば$\{M(E_i)\ ;1\leq i\leq n\}$は独立で、$M\left(\sum_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} M(E_i)$　(a.e)

3)　$E_1 \cdots E_n \cdots \in \mathbb{B}^*(T)$が互に素で$\sum_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathbb{B}^+(T)$ならば$M\left(\sum_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} M(E_i)$　(a.c)

4)　$X(E) = Re\,M(E)$（実部）　$Y(E) = \mathcal{I}m\,M(E)$（虚部）とおけば〔$X(E)$；$E\in \mathbb{B}^+(T)$〕と〔$Y(E)$；$E\in \mathbb{B}^+(T)$〕は互に独立な正規　測度である。

複素多重Wiener積分の定義

絶対平方可積分なもの丶全体をL^2_pとする。L^2_{p+q}は$L^2(R^p, R^q)$と同型であるから　これをL^2_{pq}とかく。前と同様に

$f = f(t_1 \cdots t_p\ s_1 \cdots s_q) \in L^2_{pq}$　に対して

(5.13)　$I_{pq}(f) = \int \cdots \int f(t_1 \cdots t_p\ s_1 \cdots s_q)\, dM(t_1) \cdots dM(t_p)\, d\overline{M(s_1)} \cdots d\overline{M(s_q)}$　なる型の積分を定義して、これを複素多重Wiener積分という。

$I_{pq}(f)$の定義はL^2_{pq}の special elementary function $f(t_1 \cdots t_p\ s_1 \cdots s_q) = \sum a_{i_1 \cdots i_p j_1 \cdots j_q} \chi_{E_{i_1}}(t_1) \cdots \chi_{E_{i_p}}(t_p) \chi_{E_{j_1}}(s_1) \cdots \chi_{E_{j_q}}(t_q)$ に対しては

(5.14)　$I_{pq}(f) = \sum a_{i_1 \cdots i_p j_1 \cdots j_q} M(E_{i_1}) \cdots M(E_{i_p}) \overline{M(E_{j_1})} \cdots \overline{M(E_{j_q})}$

と定義して、一般の$f\in L^2_{pq}$に拡張することは前と同様である。（$I_{00}(c) = c$と定める。c定数）

複素多重Wiener 積分の性質

〔D〕

1)　$I_{pq}(f) = I_{pq}(\tilde{f})$

ここに $\tilde{f}(t_1 \cdots t_p\ s_1 \cdots s_q) = \frac{1}{p!q!} \sum_{(i)(j)} f(t_{i_1} \cdots t_{i_1} \cdots t_{i_p}\ s_{j_1} \cdots s_{j_q})$

$(i) = (i_1 \cdots i_p)$ 　　$(j) = (j_1 \cdots j_q)$ は $(12 \cdots p)$ $(12 \cdots q)$ のすべての順列を動く

2) $I_{pq}(\alpha f + \beta g) = \alpha I_{pq}(f) + \beta I_{pq}(g)$ 　　$p + q \neq 0$

3) $E(I_{pq}(f)) = 0$, $E(I_{pq}(f)\overline{I_{pq}(g)}) = \quad p!q!(\tilde{f}, \tilde{g})$

特に $E|I_{pq}(f)|^2 = p!q!\|\tilde{f}\|^2 \leq p!q!\|f\|^2$

4) $(pq) \neq (r,s)$ ならば $E(I_{pq}(f)\overline{I_{rs}(g)}) = 0$

(E) (展開定理) $H(M)$ の任意の L_2 ー 汎函数 ξ は

$$\xi = \sum_{p,q \geq 0} I_{pq}(f_{pq}) = \sum_{p,q \geq 0} I_{pq}(\tilde{f}_{pq})$$

と直交展開せられ、この展開は次の意味で一意的である.

$$\sum_{pq} I_{pq}(f_{pq}) = \sum_{pq} I_{pq}(g_{pq}) \text{ ならば } f_{pq} = g_{pq}$$

複素変数の *Hermit* 多項式 を

$$(5.15) \quad H_{pq}(x, \bar{x}) = \sum_{n=0}^{\min(p,q)} (-1)^n \frac{p!q!}{n!(p-n)!(q-n)!} x^{p-n}\bar{x}^{q-n}$$

と定義すると $\{H_{pq}(x, \bar{x})\}$ は $L^2(R^2, e^{-|x|^2}dx)$ における完全正規直交系となり, (4.26) に対応して

(5.16) 　$\varphi_1 \cdots \varphi_K$ を L^2_{10} の直交系とすると

$$\int \cdots \int \prod_{i=1}^{K} \varphi_i(t_{i1}) \cdots \varphi_i(t_{ip_i}) \overline{\varphi_i(s_{i1})} \cdots \overline{\varphi_i(s_{iq_i})}\ dM(t_{11}) \cdots dM(t_{Kp_K})$$

$$\overline{dM(s_{11})} \cdots \overline{dM(s_{Kq_K})} = \prod_{i=1}^{K} H_{p_i q_i}\left(\int \varphi_i(t)dM(t), \overline{\int \varphi_i(t)dM(t)}\right)$$

これと(E)より(C)に相当するものとして

(F) 　$H(M)$ の L_2 ー 汎函数 ξ は

$$(5.17) \quad \xi = \sum_{pq} \sum_{s} \sum_{\substack{p_1 + \cdots + p_s = p \\ q_1 + \cdots + q_s = q \\ \alpha_1 \cdots \alpha_s \in A}} C\begin{pmatrix} p_1 q_1 \cdots p_s q_s \\ \alpha_1 \cdots \alpha_s \end{pmatrix} \prod_{i=1}^{s} H_{p_i q_i}\left(\int \varphi_{\alpha_i}(t)dM(t), \overline{\int \varphi_{\alpha_i}(t)dM(t)}\right)$$

と展開出来る。

3.6 　確率積分 (*stochastic integral*)

Brown 運動を拡散過程の構成に用いることは、S. *Bernstein* [5], P. *Lévy* [119] 等により考えられた。P. *Lévy* は1次元拡散過程 $x(t)$ の dt における

変化 $dX(t)$ は Brown 運動 $B(t)$ の dt の間の変化 $dB(t)$ の平均的なずれ dt にその場所に応じた係数 $a(X(t))$, $b(X(t))$ をそれぞれかけ併せて加えたものと考え、

$$dX(t)=a(X(t))dt+b(X(t))dB(t)$$

と考えようとする。これを瞬間瞬間について加える，すなわち積分して $X(t)$ を

$$X(t)=X(0)+\int_0^t a(X(S))dS+\int_0^t b(X(S))dB(S)$$

なる積分方程式の解として構成しようとしている。右辺オ3項は $B(S)$ が有界変動でないのでこれを正当化する必要がある。K. Ito〔76〕〔85〕は Wiener 積分を拡張、精密化して確率積分を定義し，これに数学的な定式化を与えた。

〔1°〕 確率積分

$\{B(t,w);0\leqq t<+\infty\}$ を1次元 Brwn 運動とする

$T=[a\,b]\subset[0,+\infty)$ とし，S を次の条件を充す $f(t,w)$ の全体とする。

(6.1) $f(tw)$ は (tw) 可測

(6.2) 殆んどすべての w に対して $\int_a^b f(tw)^2dt<+\infty$

(6.3) 任意の $a\leqq t\leqq b$ に約して $[f(S\cdot w):a\leqq S\leqq t;\ B(SW)-B(aw)$ $a\leqq S\leqq t]$ は $[B(Sw)-B(tw);\ t\leqq S\leqq b]$ と独立

このとき $f\in S$ に対して，次のような性質をみたす Brown 運動 $B(tW)$ に関する確率積分 $I(tW;f)=\int_a^t f(SW)dB(SW)$ が定義される。

(I.1) (連続性) $I(tw;f)$ は殆んどすべての w に対して，t に関して連続

(I.2) (加法性) $f_1,f_2\in S$, ならば殆んどすべての w に対し，

$$I(tw;C_1f_1+C_2f_2)=C_1I(tw;f_1)+C_2I(t,w;f_2)$$

(I.3) $\overline{W}_1\ (\in\mathbb{B}(\overline{W}))$ の上で $f_1(tw)=f_2(tw)$ $a\leqq t\leqq b$, $w\in\overline{W}_1$ ならば殆んど確実に $I(t,w;f_1)=I(t,w;f_2)$ $w\in\overline{W}_1$, $a\leqq t\leqq b$

(I.4) $\int_a^b E.(f^2(tw))dt<+\infty$ ならば

$$E.\{I(t,w;f)\}=0\quad E.\{(I(t,w;f))^2\}=\int_a^t E.(f^2(Sw))dS$$

$$C^2P.\{\sup_{a\leqq t\leqq b}|I(t,w;\sigma)|>C\}\leqq\int_a^b E.\{f^2(SW)\}dS$$

(I.5) $f_n\in S$ が殆んどすべての (tw) に対して f に収束し，さらに $|f_n|\leqq f_0\in S$ とする。その上に $(f_1,f_2\cdots)$ のすべての $\mathbb{B}$−可測、

函数が（6.3）をみたすならば

$$I(t,w;f_n)\xrightarrow[n\to\infty]{} I(t,w;f)$$ （確率収束）

（I.6）　$a\leqq s<t<u\leqq b$ ならば

$$\int_s^t f(\tau w)\,dB(\tau w)+\int_t^u f(\tau w)\,dB(\tau w)=\int_s^u f(\tau w)\,dB(\tau w)$$

なるように $\int_s^u f(\tau w)\,dB(\tau w)$ を定義出来る。

（6.4）$\xi(w)$ を $[B(tw)-B(aw);\ a\leqq t\leqq b]$ と独立，且つ任意の $a\leqq t\leqq b$ に対して、$f(tw)$ が $[B(sw)-B(aw);\ a\leqq s\leqq t]$ と $\xi(w)$ のB可測函数である。

として（6.1），（6.2）（6.4）をみたすものの全体を S' としても、確率積分

$$\int_c^t f(sw)\,dB(sw)\qquad f\in S'$$

を定義して、（I.1）～（I.6）が成り立つように出来る。

［2°］ 確率微分　（stochastic differential）

$[B(tw);\ 0\leqq t<+\infty]$ を1次元 Brown 運動，ξ を（6.4）をみたす確率変数とする。

$[a(tw);\ 0\leqq t<+\infty]$ $[b(tw);\ 0\leqq t<+\infty]$ $[x(tw);\ 0\leqq t<+\infty]$ はいづれも、任意の $0\leqq a<b<+\infty$ に対して［1°］の条件（6.1），（6.4）および

（6.5）　$\int_0^b |a(tw)|\,dt<+\infty,\ \int_a^b |b(tw)|^2\,dt<+\infty$

をみたす確率過程とする。

$a\leqq t\leqq s\leqq b$ に対して

（6.6）　$x(sw)-x(tw)=\int_t^s a(\tau w)\,d\tau+\int_t^s b(\tau w)\,dB(\tau w)$ （a.e.）

となるとき，

（6.7）　$dx(t)=a(t)\,dt\ b(t)\,dB(t)$

とかき $dx(t)$ を $x(t)$ の確率微分という。

更に $[B(tw);\ 0\leqq t<+\infty]$ を d 次元 Brown 運動とし，

$B(tw)=(B^i(tw);\ 1\leqq i\leqq d)$

とおく。このとき上の $a(t)$ $b(t)$ $x(t)$ として

$a(t)=(a^i(t);\ 1\leqq i\leqq n)$，$b(t)=(b^i_j(t);\ 1\leqq i\leqq n,\ 1\leqq j\leqq d)$

$x(t)=(x^i(t);\ 1\leqq i\leqq n)$

なるものをとり，$a^i(t)$、$b^i_j(t)$, $X^i(t)$が $B(t)$ に関して前と同じ条件をみたしているものとする。

[A]　$X(t,w)$は

(6.8)　$dX^i(t,w)=a^i(t,w)dt+\sum_{j=1}^{d} b^i_j(t,w)\,dB^j(t,w)$　$i=1,2\cdots n$,
$a \leqq t \leqq b$

をみたすとする。すべての道 $[X(t,w)\,;\,a \leqq t<b]$ を含む R^n の開集合 G で定義された $t\times(x^1\cdots x^n)\in[a\,b]\times G$ の連続函数 $f(t,x^1\cdots x^n)$ は，

$$f_0(t\,x^1\cdots x^n)\equiv\frac{\partial f}{\partial t}(t\,x^1\cdots x^n)$$

$$f_i(t\,x^1\cdots x^n)\equiv\frac{\partial f}{\partial x_i}(t\,x^1\cdots x^n)\qquad 1\leqq i\leqq n$$

$$f_{ij}(t\,x^1\cdots x^n)\equiv\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(t\,x^1\cdots x^n)\qquad 1\leqq i,j\leqq n$$

が存在し，且つ連続であるとする。　このとき

$y(t,w)=f(t,X(t,w))=f(t,X^1(t,w),\cdots,X^n(t,w))$ とおけば $y(t,w)$ は，

(6.10)
$$dy(t,w)=\Big\{f_0(t,X(t,w))+\sum_{i=1}^{n}f_i(t,X(t,w))\,a^i(t,w)$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j,k=1}^{n}f_{ij}(t,X(t,w))\,b^i_k(t,w)\,b^j_k(t,w)\Big\}dt$$
$$+\sum_{j=1}^{d}\sum_{i=1}^{n}f_i(t\,X(t,w))\,b^i_j(t,w)\,dB^j(t,w)$$

をみたす。

(→ K. Itô [75] [77] [85])

[3°]　<u>確率微分方程式</u>(stochastic differential equation)

ξは Brown 運動 $[B(t)\,;\,a\leqq t\leqq b]$ と独立とする。

<u>確率微分方程式</u>

(6.11)　$dX^i(t,w)=a^i(t,X(t,w))\,dt+\sum_{j=1}^{d}b^i_j(t,X(t,w))\,dB^j(t,w)$

$i=1,2\cdots d$

$X(t,w)=(X^1(t,w),\cdots,X^d(t,w))$

を初期条件

(6.12)　$X^i(a,w)=\xi^i(w)$　　$\xi(w)=(\xi^1(w),\cdots,\xi^d(w))$

の下にとくことを考える。

<u>これは確率積分方程式</u>

(6.13) $$x^i(t,w) = \xi^i(w) + \int_a^t a^i(\tau, x(\tau,w))\,d\tau + \sum_j \int_a^t b^i_j(\tau, x(\tau,w))\,dB^j(\tau,w)$$

$$a \leqq t \leqq b$$

を考えるのと同等である

[B] $a^i(t,x)$ $b^i_j(t,x)$ が

(6.14) $$\sum_i |a^i(t,x) - a^i(t,y)|^2 \leqq A\|x-y\|^2$$

$$\sum_{ij} |b^i_j(t,x) - b^i_j(t,y)|^2 \leqq B\|x-y\|^2$$

なる定数A、Bが存在し、

(6.15) 各 $x \in R^d$ に対して $a^i(t,x)$, $b^i_j(t,y)$ は t について連続.

(6.16) $\sum_i |a^i(t,x)|^2 \leqq A_1$, $\sum_{ij} |b^i_j(t,x)|^2 \leqq B_1$

(6.17) $E.(|\xi^i(w)|^2) \leqq C$ $\quad i = 1, 2 \cdots d$

をみたすならば

(6.13) は唯一つの解をもつ。

$a^i(t,x)$, $b^i_j(t,x)$ が t を含まないならば, $[x(t,w) ; a \leqq t \leqq b]$ は時間的に一様な R^d 上の拡散過程で、その生成作用素Aは, コンパクトな台をもつ C^2－級 の 函数 f に対しては

(6.18) $$Af(x) = \sum_{i=1}^d a^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} f(x) + \frac{1}{2} \sum_{ijk} b^i_k(x) b^j_k(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x)$$

となる。たゞし $x = (x^1 \cdots x^d) \in R^d$

4 道の連続性

4、0 連続函数の空間の上に定義された Wiener 測度の台としての、Brown 運動の道の全体は連続函数のうちでも更に特殊な性質をもつている。このことは、次ぐ及び6章でも述べるが、この章では、その連続性に関係した性質についてかく。

道の連続性を詳しく評価するための道具は、解析学の方からは一般に用意されてはいなかつたが、Bernoulli 列との関連で、重複対数の理論(⟶極限定理)として $t\uparrow+\infty$ のときの道の行動が古くから A. Khintchin, A.N. Kolmogorov; P. Lévy I. Petrovsky 等によつて研究されて来た。これらの研究を射影不変性の定理(⟶ 1.1.4)により翻訳すれば、実は $t=0$ の近くでの道の振巾を評価していることになり、局所連続性に関する研究と見做すことが出来る。また道の一様連続性の評価は最初 P. Lévy によつて1次元 Brown 運動について考えられたが、最近、Chung Erdös の定理(⟶極限定理)を使つて統一的な方法て、多次元の場合もふくめて取扱うことが Siro 等により可能となつた。

4、1 道の変動(variation of path)

(a,b) を $[0,+\infty)$ の区間とし、$\{t_j;\ j\geqq 0\}$ を $[a,b]$ の中にある点列とする。その始めの $n+1$ 個をとつて、大きさの順にならべたものを $t_0^{(n)}<t_1^{(n)}<\cdots<t_n^{(n)}$ とし、d 次元 Brown 運動に対して

$$S_n(w)=\sum_{j=1}^{n}\|x(t_j^{(n)},w)-x(t_{j-1}^{(n)},w)\|^2$$

とおく。$\delta_n=\max\limits_{0\leq j\leq n}(t_j^{(n)}-t_{j-1}^{(n)})$ とすれば、

$\delta_n\to 0$ のとき S_n は $b-a$ に自乗平均収束し、且つ概収束する。(P. Lévy)

$[a,b]$ 上で道 w が一様連続なことから $\rho_n(w)=\max\limits_{1\leq j\leq n}\|x(t_j^{(n)},w)-x(t_{j-1}^{(n)},w)\|$ は、$\delta_n\to 0$ のとき 0 に概収束する。従つて上の P. Lévy の結果から、

$\sum\limits_{j=1}^{n}\|x(t_j^{(n)},w)-x(t_j^{(n)},w)\|\geqq\dfrac{S_n(w)}{\rho_n(w)}\longrightarrow+\infty\quad(\delta_n\to 0)$ となり、殆んどすべての道 w は $[a\ b]$ で有界変分の函数でないから、Brown 運動の道は長さをも

たない。

$\boxed{4\ 2}$ 道の局所連続性（local continuity of paths）

$[W, \mathbb{B}(W), P_a, a \in R^d]$ を d 次元 Brown 運動とする。

$[t_0, +\infty)$ $(t_0>0)$ で定義された正の単調増大函数 $\varphi(t)$ に対して、上級（upper class），下級（lawer class）の概念を次のように定義する。

(2.1) $E_\varphi(w) = \{t ; \|X(t, w)\| > \sqrt{t}\,\varphi(\frac{1}{t})\}$

とおいて

(2.2) $P_0(\inf_{t \in E_\varphi(w)} t > 0) = 1 \quad (=0)$

のとき φ は、上級 $\mathcal{U}_d^0$（下級 $\mathcal{L}_d^0$）に属すると云う。0－1 法則より (2.2) の左辺は 1 又は 0 のいずれかになるから、任意の非負単調増大函数は必らず $\mathcal{U}_d^0$ 又は $\mathcal{L}_d^0$ のいずれかに属するが、有界函数は下級に属するので $\varphi(t) \uparrow +\infty$ $(t \uparrow +\infty)$ なる φ のみが問題になる。$\mathcal{U}_d^0$，$\mathcal{L}_d^0$ に属する φ については定義から

(2.3) $\varphi \in \mathcal{U}_d^0$ ならば $P_0(\overline{\lim_{t\to 0}} \frac{\|X(t,w)\|}{\sqrt{t}\,\varphi(\frac{1}{t})} \leqq 1) = 1$

(2.4) $\varphi\, \mathcal{L}_d^0$ ならば $P_0(\overline{\lim_{t\to 0}} \frac{\|X(t,w)\|}{\sqrt{t}\,\varphi(\frac{1}{t})} \geqq 1) = 1$ である。φ が上級，下級のいずれに属するかの判定条件として、

$\boxed{A_1}$ （原点に関する Kolmogorov の判定条件）$\varphi \in \mathcal{U}_d^0$ $\{\in \mathcal{L}_d^0\}$ なるための必要十分条件は

(2.5) $\int_{t_0}^{+\infty} \frac{1}{t}\,\varphi^d(t)\,e^{-\frac{1}{2}\varphi^2(t)}\,dt < +\infty \quad (=+\infty)$

である。（A. N. Kolmogorov）

[A_2]

(2.6) $$\varphi(t) = \{2\log_{(2)} t + (d+2)\log_{(3)} t + 2\log_{(4)} t + \cdots\cdots + 2\log_{(n-1)} t + (2+\delta)\log_{(n)} t\}^{\frac{1}{2}}$$

は $\delta > 0$ のとき $\mathcal{U}_d^0$ に属し、$\delta \leqq 0$ のとき $\mathcal{L}_d^0$ に属する。

ただし $\log_{(n)} t = \underbrace{\log\log\cdots\cdots\log t}_{n\text{ 個}}$ である。

[A_2] と (2.3) (2.4) から

[A_3] (2.7) $P_0(\overline{\lim_{t\to 0}} \frac{\|X(t,w)\|}{\sqrt{2t\log\log\frac{1}{t}}} = 1) = 1$ （A. Khintchin）

これは Bernoulli 列に関する重複対数の理論から出たもので，その意味では $t\to+\infty$ のときの状態に関するものが考えられるが，射影不変性の定理により $t=0$ の近くの状態に翻訳すれば [A3]の形になる。[A1] [A2] はその精密化となっている。

[A2], [A3] を重複対数（Theorems of iterated logarithm）の定理と云う。

いま (t,a) から出発する一次元 Space-time Brourinion motin (→ 2.2.4) $\{Z(S),\ S\geq 0,\ P(t,a)\}$ を考える。このとき $G\subset R^2$ を open set とする。

$$\sigma_G=\inf\{S;\ S>0,\ Z(S)\in G\}$$

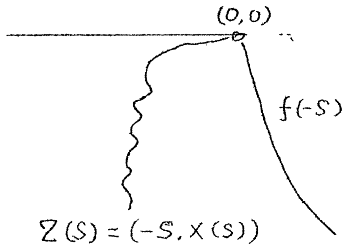
とおけば Blumenthal の 0-1 law により

$$P(t,a)(\sigma_G>0)=0 \text{ または } 1$$

である。$(t,a)\in G$ が Space-time Brounion motion に関し irregular とは

$$P(t,a)(\sigma_G>0)=1$$

となることで反対の場合 regular という。



いま右図の f の右側を領域 G とする。$f\in C((0,\square))$ で，$f\in\uparrow$，$t^{-\frac{1}{2}}f\in\downarrow$ とするとき，上の Kalwogorov の判定条件によれば

$$\int_{0+}^{1} t^{-3/2} f e^{-f^2/2t}\,dt \lesseqgtr +\infty$$

に應じ $O=(0,0)$ は regulon あるいは irregular になる。

この意味で space-tuie Brounian moti と Kalwogorov の判定条件の関係は，后でのべる (→ 5.5) の　　運動と Wiener の判定の関係と同じ対応関係にある。

定理 [A1] [A2] A u [A3] は $\overline{\lim_{t\to 0}}\ \|X(t,w)\|/\sqrt{t}\,\varphi(\frac{1}{t})$ に関して述べられたものであるが，$\underline{\lim_{t\to 0}}\ \|X(t,w)\|/\sqrt{t}\,\varphi(\frac{1}{t})$ に関しても類似の結果がある。これを述べるために再び次のような上級，下級の概念を導入する。

十分大きな t に対して定義された正の函数 $\varphi(t)$ に対して

(B1へ46)

$$(2.8)\quad F_\varphi(w)=\{t\,;\,\|x(t,w)\|\leqq\sqrt{t}\,\varphi(\tfrac{1}{t})\}$$

とおいて

$$P_0(\inf_{t\in F_\varphi(w)} t>0)=0\ (=1)$$

のとき φ は上級 $\mathbb{U}_d^o$（下級 $\mathbb{L}_d^o$）に属するという。1次元 Brown 運動では殆んどすべての道が $t\to 0$ のとき0を無限回通過するからこの定義が意味をもつのは $d\geqq 2$ の場合である。

この場合には定義から直ちに

$$(2.10)\quad \varphi(t)\in\mathbb{U}_d^o \text{ ならば } P_0\Big(\varlimsup_{t\to 0}\frac{\|x(t,w)\|}{\sqrt{t}\,\varphi(\frac{1}{t})}\leqq 1\Big)=1$$

$$(d\geqq 2)$$

$$(2.11)\quad \varphi(t)\in\mathbb{L}_d^o \text{ ならば } P_0\Big(\varliminf_{t\to 0}\frac{\|x(t,w)\|}{\sqrt{t}\,\varphi(\frac{1}{t})}\geqq 1\Big)=1$$

が導びかれる。［A_1］に対応するものとして，

［A_4］ $d\geqq 3$ のとき正の単調減少函数 $\varphi(t)$ が $\mathbb{U}_d^o$（$\mathbb{L}_d^o$）に属するための必要十分条件は

$$(2.12)\quad \int_{t_0}^{+\infty}\frac{1}{t}\varphi^{d-2}(t)\,dt=+\infty\ (<+\infty)$$

である。ただし $t_0\,(>0)$ は $\varphi(t)$ の定義域の任意の値でよい。（A. Dvoretzky & P Erdös）

この定理の系として

［A_5］ $d\geqq 3$ のとき

$$(2.13)\quad \varphi(t)=\frac{1}{(-\log t)^{\frac{1+\delta}{d-2}}}$$

は $\delta\leqq 0$ のとき $\mathbb{U}_d^o$ に，$\delta>0$ のとき $\mathbb{L}_d^o$ に属する。

［A_6］ $d\geqq 3$ のとき，任意の $\delta>0$ に対し

$$(2.14)\quad P_0\Big(\varliminf_{t\to 0}\frac{\|x(t,w)\|(\log\frac{1}{t})^{\frac{1+\delta}{d-2}}}{\sqrt{t}}=+\infty\Big)=1$$

$$(2.15)\quad P_0\Big(\varliminf_{t\to 0}\frac{\|x(t,w)\|(\log\frac{1}{t})^{\frac{1-\delta}{d-2}}}{\sqrt{t}}=0\Big)=1$$

が成りたつ。

2次元Brown運に関する同様な結果は

$\boxed{A_7}$ 正の単調減少函数 $\varphi(t)$ が $\mathbb{U}_2^\circ$ ($\mathbb{L}_2^\circ$)に属するための必要十分条件は

$$(2.16)\quad \int_{t_0}^{+\infty} \frac{1}{t|\log\varphi(t)|}\,dt = +\infty\ (<+\infty)$$

である。ただし $t_0(>0)$ は $\varphi(t)$ の定義域の任意の値でよい。(F. Spitzer)

この系として

$\boxed{A}$ 任意の $\delta>0$ に対して

$$(2.17)\quad \varphi(t) = \frac{1}{t^\delta} \in \mathbb{U}_2^\circ,$$

$$(2.18)\quad \varphi(t) = \frac{1}{t(\log t)^\delta} \in \mathbb{L}_2^\circ$$

である。

$\boxed{A_9}$ 任意の $\delta>0$ に対し

$$(2.19)\quad P_0\left(\lim_{t\to 0} \frac{\|X(t,w)\|}{t^{\frac{1}{2}+\delta}} = 0\right) = 1$$

$$(2.20)\quad P_0\left(\overline{\lim_{t\to 0}} \frac{\|X(t,w)\|}{t^{\frac{1}{2}} + \log\frac{1}{t}} \geqq 1\right) = 1$$

がなたつ。

以上述べた $[A_1]\sim[A_9]$ の結果は $\sigma(w)$ が Markov 時間のときには $X(t,w)$ の代りに $X(t+\sigma(w),w)-X(\sigma(w),w)$ とおきかえれば　そのまゝなりたつ。ただしこの場合には $t\to 0$ の代りにも $t\downarrow 0$ と書くべきである。). 従つて特に $\sigma(w)\equiv t_0\ (>0)$ の場合には勿論なりたつ。一方 $[X(t_0+s,w)-X(t_0,w);\ 0\leqq s\leqq t_0]$ と $[X(t_0-s,w)-X(t_0,w);\ 0\leqq s\leqq t_0]$ の従う確率法則が同じであることに注意すれば、$[A_1]\sim[A_9]$ の結果は $X(t,w)$ の代りに $X(t,w)-X(t_0,w)$, t の代りに $|t-t_0|$ と書きかえることにより、そのまゝなりたつ。このような書きかえをしたときの、これら一連の定理を局所連続性の定理 (Theorem of local continuity) という。

また射影不変性の定理によれば、定理 $[A_1]\sim[A_9]$ の結果は $\varphi(\frac{1}{t})$ $\varphi(\frac{1}{t})$ の代りに $\varphi(t)$、$\varphi(t)$ と書き、$t\to 0$ の代りに $t\to+\infty$ と書けばそのまゝなりたつ。

特に (2.14) は

(B1~48)

(2.21) $P_0\left(\lim_{t\to+\infty}\frac{\|X(t,w)\|(\log t)^{\frac{1+\delta}{d-2}}}{\sqrt{t}}=+\infty\right)=1$ $(d\geqq 3)$

となり、次の定理が導びかれる。

$\boxed{A_{10}}$ $d\geqq 3$ のとき、殆んどすべての道 w に対して $X(t,w)\to\partial$ $(t\to+\infty)$ 非再帰性)

また(2.19)は、

(2.22) $P_0\left(\lim_{t\to+\infty}\frac{\|X(t,w)\|t^{\delta}}{\sqrt{t}}=0\right)=1$

となり $\delta>\frac{1}{2}$ の場合を考えれば

$\boxed{A_{11}}$ 2次元 Brown 運動の道は殆んどすべて $t\to+\infty$ のとき出発点の注意の近傍に何回でも戻り得る。(再帰性)

P.Lévy $\boxed{128}$ は これまでに述べたものとは異なった次の重複対数の法則を得ている。

$[X(t,w);0\leqq t<+\infty\ P_a\ a\in R^d]$ $(d\geqq 2)$ を Brown 運動とし、$A(t)=A(t,w)=X(t,w)$ とかく。

$k_1,k_2,\cdots,k_p>0$, $\sum_{i=1}^{p}k_i=1$, $K_k=\sum_{i=1}^{k}k_i$ $(k=1,2,\cdots;P)$

とし、

$L(t)=L(t,w)=\sum_{k=1}^{P}\|A(K_{k-1}t,w)-A(K_k t,w)\|$

$L_p(t)=\max_{K_1\cdots K_{p-1}}L(t)=$ 折線 $OA(\theta_1)A(\theta_2)\cdots A(\theta_p)$ $0\leqq\theta_1\leqq\theta_2\cdots\cdots\leqq\theta_p\leqq 1$ の長さの max　O:原点

とおくと

$P_0\left(\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{L(t)}{\sqrt{2t\log\log t}}=1\right)=1$

$P_0\left(\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{L_p(t)}{\sqrt{2t\log\log t}}=1.\right)=1$

(P.Lévy)

$\boxed{\text{注意}}$ これらは P.Lévy [128] の結果の1例でその他類似の形の重複対数の法則が数多く彼独とくの形で示されている。しかしこれらは他では充分こまかにしらべられていないように思える。

$\boxed{4.3}$ 一様連続性 (uniform continuity)

Brown 運動の道が連続なことから、t が注意の有界区間にあるときは、それ

が一様連続であるが、t が $[0,+\infty)$ の上にあるときには殆んどすべての道は一様連続にはならない。(P. Lévy)。こゝでは t が $[0\,1]$ にあるときの道の一様連続性の詳しい評価について述べる。

$\varphi(t)$ を $t>0$ で定義された連続函数で $\lim_{t\to 0}\varphi(t)=0$ なるものとする。函数 $f(t)$ が条件

(3.1) $\varepsilon>0$ が存在して $|t-t'|<\varepsilon$ ならば

$$|f(t)-f(t')|<\varphi(|t-t'|)$$

を充たすとき $f(t)$ は $\varphi(t)$ に関する <u>Lipschitz の条件</u> (Lipschitz condition) をみたすという.

次に $\boxed{\mathcal{S}.2}$ と類似の形式で上級、下級の概念を定義する。

Γ の函数 $\varphi(t)$ に対し $\Phi(t)=\varphi(\frac{1}{t})\sqrt{t}$ とおくとき $\{x(t,\omega);\ 0\leqq t\leqq 1\}$ が $\varphi(t)$ に関する Lipschitz の条件を充す確率が 1 のとき $\varphi(t)$ は ($x(t,\omega)$ の一様連続性に関する) 上級 $\mathcal{U}^u_d$ に属するといゝ, 確率が 0 のとき下級 $\mathcal{L}^u_d$ に属するという。

この定義から

(3.2) $\varphi(t)\in\mathcal{U}^u_d$ ならば $P_0\left(\limsup_{\substack{\varepsilon\to 0\ 0\leqq s,t\leqq 1\\ |t-s|<\varepsilon}}\dfrac{\|x(t,\omega)-x(s,\omega)\|}{\sqrt{|t-s|}\,\varphi(\frac{1}{|t-s|})}\leqq 1\right)=1$

(3.3) $\varphi(t)\in\mathcal{L}^u_d$ ならば $P_0\left(\liminf_{\substack{\varepsilon\to 0\ 0\leqq s,t\leqq\\ |t-s|<\varepsilon}}\dfrac{\|x(t,\omega)-x(s,\omega)\|}{\sqrt{|t-s|}\,\varphi(\frac{1}{|t-s|})}\geqq 1\right)=1$

が導びかれる。さらに

[A$_1$] Γ の単調増大函数 $\varphi(t)$ が $\mathcal{U}^u_d$ ($\mathcal{L}^u_d$) に属するための必要十分条件は

(3.4) $\int_{t_0}^{+\infty}\varphi^{d+2}(t)\,e^{-\frac{1}{2}\varphi^2(t)}dt<+\infty\ (=+\infty)$

である。ただし $t_0\,(>0)$ は $\varphi(t)$ の定義域内の任意の点でよい (K. L. Chung-P. Erdös-T. Sirao)

この系として

[A$_2$]

(3.5) $\varphi(t)=\left\{2\log t+(d+4)\log_{(2)}t+2\log_{(3)}t+\cdots\cdots+2\log_{(n-1)}t+(2+\delta)\log_{(n)}t\right\}^{1/2}$

は $\delta>0$ のとき $\mathcal{U}^u_d$ に, $\delta\leqq 0$ のとき $\mathcal{L}^u_d$ に属する。

が導びかれ, これから

$$(3.6)\quad P_0\left(\lim_{\substack{|t-s|\to 0\\ 0\leqq s\leqq t\leqq 1}} \frac{\|X(t,w)-X(s,w)\|}{\sqrt{2|t-s|\log\frac{1}{|t-s|}}}=1\right)=1 \qquad (P.\ Lévy)$$

が得られる。

4.4 Kalmogorov の判定条件

$\varphi(t)$ を $[t_0,+\infty)$ $(t_0>0)$ で定義された非負単調非減少函数とし、1次元確率過程 $[Z(t,\varpi);\ 0\leqq t<+\infty]$ に関する上級，下級の概念を次のように定義する。

$$(4.1)\quad E_\varphi(\varpi)=\{t;\ Z(t,\varpi)>\sqrt{t}\,\varphi(t)\}$$

とおいて

$$(4.2)\quad P(E_\varphi(\varpi)\text{が有界})=1$$

のとき $\varphi(t)$ は上級 $\mathcal{U}^\infty$ に属するといい，(4.2)の左辺が0のとき下級 $\mathcal{L}^\infty$ に属するという。そして $\mathcal{U}^\infty$ に属する函数を上級函数，$\mathcal{L}^\infty$ に属する函数を下級函数という。$Z(t,\varpi)$ として1次元 Broun 運動 $[X(t,w);\ 0\leqq t<+\infty]$ をとって考える。0−1 法則よりすべての単調非減少函数は必ず $\mathcal{U}^\infty$ 又は $\mathcal{L}^\infty$ に属する。そして

A　1次元 Broun 運動に関して $\varphi(t)$ が $\mathcal{U}^\infty$（又は $\mathcal{L}^\infty$）に属するための必要十分条件は

$$(4.3)\quad \int_{t_0}^{+\infty}\varphi(t)\,e^{-\frac{1}{2}\varphi^2(t)}\,dt<+\infty\ (=+\infty)\quad \text{である}$$

この定理は Bernoulli 列に関して Kolmogorov が与えた判定条件であり、A も又（$+\infty$ に関する）Kolmogorov の判定条件と呼ばれる。

上級函数，下級函数の判定を 4.3 のように積分の収束発散により判定出来る確率過程を Kalmagorov の判定条件に従う確率過程といい，これに関して、

問題　マルチンゲール過程（→ マルチンゲール）$[Z(t,\varpi);\ 0\leqq t<+\infty]$ にいかなる条件を附加すれば Kulmogorov の判定条件に従うか。を P. Lévy の問題という。

勿論 Kolmogorov の判定条件に従う確率過程が必ずしも、マルチンゲール過程でないことは．反射壁の Brown 運動→ 5.5 が Kalmogorov の判定条件に従うことから明らかである。

又 $\{Z(t,\varpi);\ 0\leqq t<+\infty\}$ が Kalmogorov の判定条件に従うとすれば

$t \to +\infty$ のとき $(2\log t)^{\frac{1}{2}}$ と同程度の大きさで発散する函数 $\varphi(t)$ のみが問題となる。従って (4.3) に代入してみれば、$\varphi(t)$ と $\varphi(t) \pm \frac{c}{\varphi(t)}$ $(c>0)$ は、$\{Z(t,\varpi)\,;\,0 \leqq t < +\infty\}$ に関し同じ級に属する。このことに注意すれば $\{Z(t,\varpi)\,;\,0 \leqq t < +\infty\}$ が Kolmogorov の判定条件に従えば $\{Z(t,\varpi)+u\,;\,0 \leqq t < +\infty\}$ も仝様である。こゝに $u = u(\varpi)$ は、時間 t に関係しない確率変数である。

5　Brown運動の精細な性質

5.0　この章ではR^dのBrown運動の性質の中，オ2章でのべた基本的なものの反映を種々の側面からしらべる．

これらの中いくつかのことは、解析学の結果と深い関係のあることが知られている．尚境界条件のこと及び道の長さに関するような性質はそれぞれ7章，6章でみることにする．

5.1　（吸収壁の場合の推移確率の展開定理（expansion theorem）による表現）

$[W, \mathbb{B}(W), P_a \ \ a\in\overline{R^d}]$をd次元Brown運動としDを$R^d$の有界領域とする。Dにextraな点∞をつけ加えて，

$$x^D(t,w) = x(t,w) \qquad t<\sigma_{\partial D}(W)\text{ のとき}$$
$$= \infty \qquad t\geqq\sigma_{\partial D}(W)\text{ のとき}$$

として得られるMarkov過程$\{x^D(t,w):\ 0\leqq t<+\infty,\ P_a,\ a\in\overline{R^d}\}$をDの境界$\partial D$で殺したminimalな過程（Minimal process）と呼び，そのとき∂Dは吸収壁（absorbing barrier）であるという。

又$[x(t\wedge\sigma_{\partial D}(w)):\ 0\leqq t<\infty,\ P_a\ \ a\in\overline{R^d}]$をDの境界でStopした過程（stopped process）という。任意のB⊂Dに対し

$$(1.1)\quad P^D(t,a,B) = P_a(x^D(t,w)\in B)$$
$$= P_a(x(t,w)\in B,\ \sigma_{\partial D}(w)>t)$$

とおくと、これはminimalなBrown運動の推移確率である。$P^D(t,a,B)$はLebesgue測度dbに関して絶対連続で、その密度$P^D(t,a,b)$として$(t,a,b)\in(0,+\infty)\times(R^d-\partial D)\times(R^d-\partial D)$について連続で且つ$a,b$に関して対称なものをとることが出来る。更に$P^D(t,a,b)$は熱方程式

$$(1.2)\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial t}P^D(t,a,b)=\dfrac{1}{2}\Delta_a P^D(t,a,b) & t>0\quad (a,b)\in D\times D\\ P^D(t,a,b)=0 & t>0\quad a\in D,\ b\in\partial D\\ \lim\limits_{t\downarrow 0}\displaystyle\int_D f(b)P^D(t,a,b)\,db=f(a) & f\in\mathbb{C}(D),\quad a\in D\end{cases}$$

をみたす．

∂Dは有限個の点を除いて接平面が存在し，それが連続的に変わる程度に滑らかなものとする。そのとき

$$(1.3)\begin{cases}\frac{1}{2}\Delta\varphi(a)=-\lambda\varphi(a) & a\in D\\ \varphi(a)=0 & a\in\partial D\end{cases}$$

は高々可算個の固有値 $0<\lambda_1<\lambda_2\leqq\lambda_2\leqq\cdots$ をもち，λ_p に対応する固有函数を φ_p とすると，$\lambda_1>0$ は単純（simple）で φ_1 は D で定符号である。（従って φ_1 として D でつねに正であるものをとることが出来る）。$p\neq q$ ならば $\varphi_p\ \varphi_q$ は直交し $\int_D\varphi_p(a)\varphi_q(a)da=0$ であり，$P^D(t,a,b)$ はこの固有函数によって

$$(1.4)\quad P^D(t,a\,b)=\sum_{p\geqq1}a_p(a)\varphi_p(b)e^{-\lambda_p t}\qquad t>0\quad(a,b)\in D\times D$$

（右辺の収束は（t, a, b）について広義一様）

なる形に展開出来る。今

$$(1.5)\begin{cases}C_p=\int_D\varphi_p^2(b)db & (>0)\\ C'_p=\int_D\varphi_p(b)db\end{cases}$$

とおけば，$\boxed{1.4}$ は

$$(1.6)\quad P^D(t,a,b)=\sum_{p\geqq1}\frac{1}{C_p}\varphi_p(a)\varphi_p(b)e^{-\lambda_p t}\qquad t>0\quad(a\,b)\in D\times D$$

と a，b について対称な形に書きかえられる。

この両辺を b について D で積分して

$$(1.7)\quad P^D(t,a\,D)=P_a(\sigma_{\partial D}(w)>t)=\sum_{p\geqq1}\frac{C'_p}{C_p}\varphi_p(a)e^{-\lambda_p t}$$

が導びかれる（→G. Bouligand [11]．R. Sentzch [163]）

展開定理の例

$d=2\quad D=\{x;\ \|x\|<a\}$ のとき

$\varphi(x)=R(\rho)\Theta(\theta)\quad(x=re^{i\theta},\ \rho=\sqrt{2\pi}r)$ と変数分離すると（1.3）は

$$\begin{cases}\Theta''+\mu\Theta=0\\ \Theta(0)=\Theta(2\pi)=0\end{cases}\quad\text{及び}\quad\begin{cases}R''+\frac{1}{\rho}R'+(1+\frac{\mu}{\rho^2})R=0\\ R(\sqrt{2\lambda}a)=0\end{cases}$$

となるから，固有値 $\lambda_{m,p}=\xi^2_{m,p}/2a^2\ (m=0,1,2,\cdots\cdots,\ p=1,2,\cdots)$

固有函数 $\varphi_{m,p}(x)=J_m(\sqrt{2\lambda_{mp}}\,r)(a_{mp}\cos m\theta+b_{mp}\sin m\theta)$

$(x=re^{i\theta},\ m=0,1,2,\cdots,\ p=1,2,\cdots)$ が得られる。ここに a_{mp}, b_{mp} は定数で，ξ_{mp} は Bessel 函数 $J_m(x)$ の第 p 番目の根である。

$d=2\quad D=\{(x,y);\ 0<x<a,\ 0<y<b\}$ のとき

全様にして変数分離を行へば，固有値

$\lambda_{m,n}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\pi$，固有函数 $\varphi_{mn}(x\,y)=\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y$

$(m,n=1,2,\cdots)$ が得られる。

$d=3\qquad D=\{(x,y,z);\ x^2+y^2+z^2<a^2\}$ のとき

極座標 $x=r\sin\theta\cos\varphi,\ y=r\sin\theta\sin\varphi,\ z=r\cos\theta$ をいれると Laplacian

Δは

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\Lambda,\quad \Lambda=\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

とかけるから，前と同様に変数分離をして $\varphi(x,y,z)=R(r)Y(\theta,\varphi)$ とおくことにより，固有値 λ_{lp}は$\sqrt{\frac{1}{a}}J_{l+\frac{1}{2}}(\sqrt{2\lambda}a)=0$の根($p=1,2\cdots$)で固有函数は $\varphi_{l,mp}(x,y,z)=\sqrt{\frac{1}{r}}J_{l+\frac{1}{2}}(\sqrt{2\lambda_{lp}}\,r)Y_l^{(m)}(\theta,\varphi)$ ($l=0,1,2\cdots$, $m=0,\pm1,\cdots,\pm l$, $p=1,2,\cdots$)となる。これらの例で固有函数系はいづれも完全である。

5.2 通過時間(Passage time)とBrown運動のexcursion(P.Lévy[119]参照)

1次元Brown運動$[W,\mathbb{B}(W),P_a\ a\in R^1]$を考える

[1°] 標準Brown運動の通過時間

$\sigma_a(w)=\inf\{t\geq 0;\ x(t,w)=a\}$ とおくとこれは閉集合$\{a\}$への最小通過時間であるからMarkov時間である

[A1] 確率過程$[\sigma_a(w);\ 0\leqq a<+\infty, P_0]$はexponent $\frac{1}{2}$, rate $\sqrt{2}$ の片側安定過程(One sided stable process)である。すなわちこの確率過程は時間的に一様な加法過程で

(2.1) $P_0(\sigma_b-\sigma_a\leqq t)=P_0(\sigma_{b-a}\leqq t)=\int_0^t\frac{b-a}{\sqrt{2\pi s^3}}e^{-\frac{(b-a)^2}{2s}}ds\quad b\geqq a\ t\geq 0$

となる

この結果で$a=0$としてみれば

Andréの反射の原理(reflection principle of André)

$P_0(\sigma_a\leqq t)=2P_0(x(t,w)\geqq a)=2\int_a^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{x^2}{2t}}dx\quad t\geq 0\ a\geq 0$

が導かれて $P_a(\sigma_b<+\infty)=1$ であることもわかる。

又(2.1)からσ_aの分布のLaplace変換は$E_0(e^{-\alpha\sigma_a})=e^{-\sqrt{2\alpha}a}$となっている

次に

(2.2) $P_0(x(t,w)\in da,\ \max_{s\leq t} x(s,w)\in db)$
$=\left(\frac{2}{\pi t^3}\right)^{\frac{1}{2}}(2b-a)e^{-\frac{(2b-a)^2}{2t}}da\,db\quad t\geqq 0,\ 0\leqq b,\ b\geq a$ であり

(2.3) $m=m_t(w)=\sup\{s;\ x(s,w)=0\quad 0\leqq s\leqq t\}$ とおけば

[A2] $P_0(m(w)\leqq s)=\frac{1}{\pi}\int_0^{s/t}\frac{d\theta}{\sqrt{\theta(1-\theta)}}=\frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{\frac{s}{t}}\quad t\geq s\geq 0$

がなりたつ。(P.Lévy)

道wの0点を$\Xi(w)=\{t;\ x(t,w)=0\}$とする。

道が連続なことから，これは閉集合で$E_0(\mathrm{meas}(\Xi(\varepsilon)))$(meas; Lebesgue測度)$=\int_0^{+\infty}P_0(x(t,w)=0)dt=0$であるから，殆んどすべての道$w$の0点の

Lebesgue 測度は0であるが，

〔A3〕 殆んどすべての道wに関して，その0点$\Xi(w)$ は Cantor 集合（非可算な閉集合で孤立点をもたない位相次元0の集合）であり，その Lebesgue 測度は0である。（P. Lévy）

$\boxed{2°}$ 調和測度と Cauchy 過程（→ 加法過程）

すでに$\boxed{2.2}$で Brown 運動の到達確率が古典的調和測度と一致することを述べたが，ここでは特に超平面に関する調和測度を〔1°〕と$\boxed{2.5}$で用いた subordination の概念を用いて調べる

$[W, \mathbb{B}(W), P_a, a\in \bar{R}^d]$ をd次元 Brown 運動とし $H=H^{(d-1)}=\{a; a=(a^{(1)}\cdots a^{(d)}) \in R^d, a^{(1)}=0\}$ なる超平面について考える。

$x(t,w)=(x^{(1)}(t,w), x^{(2)}(t,w) \cdots\cdots x^{(d)}(t,w))$

としたとき，$x^{(1)}(0,w)=a^{(1)}$ であれば，

$\sigma(a^{(1)})=\sigma(w)=\inf\{t; x^{(1)}(t,w)=0\}$ とおく

〔A1〕から $\{\sigma(a^{(1)},w); 0\leqq a^{(1)}<+\infty, P_a \ a\in R^d\}$ は exponent 1/2 rate $\sqrt{2}$ の片側安定過程であり，$(d-1)$ 次元 Brown 運動 $[(x^{(2)}(t,w), \cdots x^{(d)}(t,w)); 0\leqq t<+\infty, P_a \ a\in \bar{R}^d]$ とは独立であるから，これを上の安定過程で subordinate することにより

〔A4〕 $d\geqq 2$ とする

$[(x^{(2)}(\sigma(a^{(1)}), w)\cdots x^{(d)}(\sigma(a^{(1)})w)); 0\leqq a^{(1)}<+\infty, P_a, a=(a^{(1)} a^{(2)}\cdots a^{(d)})\in R^d]$ は $(d-1)$ 次元 Cauchy 過程すなわち時間的に一様な加法過程で $b=(0\ b^{(2)}\cdots b^{(d)})\in H^{n-1}$, $a\in R^d$ とすれば

$P_a((x^{(2)}(\sigma(a^{(1)}, w))\cdots x^{(d)}(\sigma(a^{(1)})w))\in db)$

$$(2.4)\quad \begin{cases} (\frac{1}{\pi})^{\frac{d}{2}}(\frac{d}{2}-1)!\ \frac{a^{(1)}}{\|a-b\|^2} & : d \text{偶数} \\ (\frac{1}{\pi})^{\frac{d-1}{2}}(\frac{d}{2}-1)(\frac{d}{2}-2)\cdots\frac{1}{2}\cdot\ \frac{a^{(1)}}{\|a-b\|^2}; & d \text{奇数} \end{cases}$$

となる

(2.4) の右辺は$d=2, 3$のときにはそれぞれ半平面，半空間の調和測度である

$\boxed{3°}$ 1次元 Brown 運動の excursion（→ P. Lévy〔119〕, K. Itô-H.P. Mckean〔89〕）

$[W, B(W), P_a \ a\in\bar{R}^d]$は1次元 Brown 運動とする。

道wの0点$\Xi(w)$ は閉集合であるから $\mathfrak{E}(w)=(0+\infty)-\Xi(w)$は高々可算個の開区間 $\mathfrak{E}^{(\theta)}(w)$の和となっている。これに次のようにして番号をつける。

1

1/2, 3/2, 2,

1/4, 3/4, 5/4, 7/4, 9/4, 11/4, 3,

なるリストをとつてこのリストの中$\Xi(w)$ 又は$\bigcup_{m<n} \mathfrak{E}^{(m)}(w)$ に含まれない最初の数を含む区間を$\mathfrak{E}^{(n)}(w)$ とする。そして

$t \in \mathfrak{E}^{(n)}(w)$ のとき $\mathfrak{E}_n(t,w) = x(t,w)$

と定義し $\mathfrak{E}_n(t,w)$ をn番のexcursion と呼ぶ。

更に$t \in \mathfrak{E}^{(n)}(w)$に対して

$$e_n(t,w) = \begin{cases} -1 & x(t,w) > 0 \text{ のとき} \\ +1 & x(t,w) < 0 \text{ のとき} \end{cases} \qquad (t \in \mathfrak{E}^{(n)}(w))$$

$$p_1^{(n)}(w) = \inf_{t \in \mathfrak{E}^{(n)}(w)} t \qquad p_2^{(n)}(w) = \sup_{t \in \mathfrak{E}^{(n)}(w)} t$$

$$\hat{e}_n(t,w) = \frac{|x(t|\mathfrak{E}^{(n)}(w)| + p_1^{(n)}(w))|}{\sqrt{|\mathfrak{E}^{(n)}(w)|}}, \qquad 0 \leqq t \leqq 1$$

ここに$|\mathfrak{E}^{(n)}(w)|$は区間 $\mathfrak{E}^{(n)}(w)$のLebesgue 測度をあらわす。

と定義する。これらについて

[A5]

(a) $\{[\hat{\mathfrak{E}}_k(t);\, 0 \leqq t \leqq 1],\ 1 \leqq k < +\infty\}$ は独立系で各$\hat{e}_k$ は同じ分布法則に従う。しかも$[\hat{\mathfrak{E}}_n(t,w);\, 0 \leqq t \leqq 1]$ はMarkov 性をもち

$$(2.5) \qquad P_0(\hat{\mathfrak{E}}_1(t,w) \in db) = h(0,0,t,b)\,db = \frac{2e^{-b^2/2t(1-t)}}{\sqrt{2\pi t^3(1-t)^3}}\, b^2\, db \qquad 0 < t < 1$$

ここに

$$P_0(\hat{\mathfrak{E}}_1(t,w) \in db / \hat{\mathfrak{E}}_1(s,w) = a) = h(s,a,t;b)\,db$$

$$(2.6) = \frac{e^{-(b-a)^2/2(t-s)} - e^{-(b+a)^2/2(t-s)}}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \left(\frac{1-s}{1-t}\right)^{3/2} \frac{b\,e^{-b^2/2(1-t)}}{a\,e^{-a^2/2(1-s)}}\, db \qquad 0 < s < t$$

である

(b) $\{e_k;\ k \geqq 1\}$ は Cointossing game である.

(c) $\Xi(w)$, $\{[\hat{\mathfrak{E}}_k(t);\, 0 \leqq t \leqq 1],\ 1 \leqq k < +\infty\}$ $[e_n(w);\, n \geqq 1]$ は互に独立である

次に$n_t(w)$ をつぎの形で定義する: $t \in \mathfrak{E}^{(n)}(w)$ のとき$n_t(w) = n$,

(84~58)

(d) $P_0(|x(t,w)|\in db / \mathcal{P}_1 = u\ \ \mathcal{P}_2 = v) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{v-u}{(t-u)(v-t)}\right)^{\frac{3}{2}} b^2 e^{-\frac{(v-u)b^2}{2(t-u)(v-t)}} db$

$u<t<v$

(e) $P_0(\mathcal{P}_{1(nt)}\in du,\ \mathcal{P}_{2(nt)}\in dv) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{u(v-u)^3}}\ du\ dv \quad 0<u<t<v$

(f) $P_0(\mathcal{P}_{1(nt)}<u<v<\mathcal{P}_{2(nt)}) = \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{\frac{u}{v}} \quad 0<u<t<v$

(g) $P_0(|x(t,w)|\in db,\ \mathcal{P}_{1(nt)}\in du,\ \mathcal{P}_{2(nt)}'\in dv)$

$= \frac{b^2}{\sqrt{2\pi^3(t-u)^3(v-t)^3 u}} e^{-\frac{(v-u)b^2}{2(t-u)(v-t)}} db \quad 0<u<t<v$

(h) $P_0(\mathcal{P}_{1(nt)}\in du,\ |x(t,w)|\in db = \frac{b}{\pi\sqrt{u(t-u)^3}} e^{-\frac{-b^2}{2(t-u)}} db$

$0<u<t,\ b>0$

がなりたつ。

次にd次元Brown運動を考え，その第1座標のBrown運動$x^{(1)}(t,w)$から今と同様にして$\underline{\xi}^{(n)}(w)$，$t_1^{(n)}(w)$ $t_1'^{(n)}(w)$ 等を定義する。そうすると、

$a\in H^{d-1}$，$0<u<+\infty$ に対して

$P_{a_0}(x(t_{1(nt)}(w),w)\in da,\ t_{(nt)}(w)\in du,\ x(t,w)\in db)$

$= \left(\frac{1}{2\pi u}\right)^{\frac{d}{2}} e^{-\frac{\|a_0-a\|^2}{2u}} \frac{b^{(1)}}{\sqrt{2\pi(t-u)^3}} e^{-\frac{(b^{(1)})^2}{2(t-u)}} du$

$\times \frac{1}{2\pi(t-u)}^{\frac{d-1}{2}} e^{\frac{-\sum_{i=2}^{d}(a^{(i)}-b^{(i)})^2}{2(t-u)}} \quad db,\ da^{(1)}-----da^{(d)}$ となる。

(4') 1次元反射壁のBrown運動(reflecting barrier Brownian motion)

$[W,\ \mathbb{B}(W),\ P_a\ \ a\in\bar{R}^1]$を1次元Brown運動とし、

$m(t)=m(t,w)=\min_{\zeta_0(w)\leq s\leq t} x(s,w)$，　$M(t)=M(t,w)=\max_{\zeta_0(w)\leq s\leq t} x(s,w)$，$t\geqq\zeta_0(w)$

$Y_0(t)=Y_0(t,w)=|x(t,w)|$，

$Y_1(t)=Y_1(t,w)=\begin{cases} x(t,w) & t<\zeta_0(w) \\ M(t,w)-x(t,w), & t\geqq\zeta_0(w)\end{cases}$

$Y_2(t)=Y_2(t,w)=\begin{cases} x(t,w) & t<\sigma_0(w) \\ x(t,w)-m(t,w) & t\geqq\zeta_0(w)\end{cases}$

$\underline{\xi}(t)=\underline{\xi}(t,w)=\int_0^t \chi_{(0+\infty)}(x(s,w))\,ds$

$Y_3(t)=Y_3(t,w)=x(\underline{\xi}^{-1}(t,w)w)$　($\underline{\xi}^{-1}$は$\underline{\xi}$の逆函数)

とおき4つの確率過程

$\mathbb{D}_i=[Y_i(t);\ 0\leqq t<+\infty,\ P_a\ \ a\geqq 0]$　$i=0,1,2,3$　を考える

[A6] D_i($i=0,1,2,3$)はいづれも同じ拡散過程(→拡散過程)(*diffusion process*)で対応する半郡は

$'P_t f(a)=\int_0^{+\infty} g^+(t,a,b)f(b)db.\qquad f\in\Phi([0+\infty])$

で与えられ、その*Yosida-Hille*の生成作用素$\mathcal{G}^+$と定義域$\mathcal{D}(\mathcal{G}^+)$は

$\mathcal{D}(\mathcal{G}^+)=C^2([0,+\infty])\cap\{u;\ u^+(0)=0\}$

$v\in\mathcal{D}(\mathcal{G}^+)$に対して$\mathcal{G}^+u(a)=\frac{1}{2}\frac{d^2}{da^2}u(a)\quad a>0$ で与えられる。

たゞし $g^+(t,a,b)=g(t,-a,b)+g(t,a,b)$, $t>0\ a,b\geqq 0$

で$u^+(0)$は$u(a)$の$a=0$における右微分である。

このような拡散過程を$[0+\infty]$上の反射壁のBrown運動と云う。

この結果を用いると、1次元Brown運動の零点等の関係が明らかになる。

P. Lévy はこのような関係をしばしば用いた。

[5.3] 逆正弦法則

逆正弦法則は初等的な場合として、*random walk*で成り立つ。

こゝではP. Lévyに従つてBrown運動に関する次の2つの逆正弦法則をあげる(→[5.2] [A2], [A5]の(5))

[A] $P_0\left(\int_0^t \chi_{(0+\infty)}(x(s,\omega))ds\leqq \alpha t\right)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\alpha}\frac{d\ell}{\sqrt{\ell(1-\ell)}}=\frac{2}{\pi}\arcsin\theta$

[B] $P_0\left(ta\leqq\int_0^t \chi_{(0+\infty)}(x(s,\omega))ds\leqq bt\ /\ x(t,\omega)=0\right)=b-a$

$t>0,\quad 0\leqq a\leqq b\leqq 1$

証明の基本的筋道は、M. Kac の定理に負うもので一般性のあるものである。

[5.4] *local time*と Brown運動の *additive functional*

この概念は1次元Brown運動の道の詳細な研究のため"*mesure du voisinage*"としてP. Lévyが導入し、(いく通りかの(同値な)定義が与えられた。

一方P. Lévyは2次元Brown運動の等角写像不変性(→[5.1])の証明のために*stochastic clock*の考えを導入しており、そのために*additive functional*をもちいている。

その後この二つの概念とP. Lévyの方法はW. Fellerの1次元拡散過程の結果を確率論的な方法で発展させるために、K. Itô-H.P. McKeanによりそれらを結合させて用いれた。続いてポテンシャル論の確率論的な理解のために*excessive function*と関連して、一般のMarkov過程についての*additive functional*の研究が行われた。

(K.Ito−H.P.Mckean (89), H.P.Mckean−H.Tanaka (146) V.A.Volkonsky (188) 参照).

この章では正の additive functional に限定し一般のものは才6節で述べる。

$\{W, \mathbb{B}(w), P_a, a \in R^d\}$ は d 次元 Brown 運動とする.

$\xi(t)=\xi(t,w)$ $t \geqq 0$ が次の条件をみたすとき連続な additive functional という.

(4.1) $\xi(t,w)$ は任意の $t \geqq 0$ に対して $\mathbb{B}_t$ 可測である.

(4.2) $\xi(t,w)$ は t の連続函数である。

(4.3) $\xi(t,w)=\xi(s,w)+\xi(t-s, w_s^{-\prime})$ $t \geqq s$

特に

(4.4) $0=\xi(0,w) \leqq \xi(t,w) < +\infty$

のとき連続な正の additive functional (continuous positive additive functional) であるという.

$\xi(t,w)$ を連続で正の additive functional とする.

D を R^d の有界領域として

$$p_\alpha(\cdot)=E.\{e^{-\alpha \xi(\sigma_{\partial D}(w),w)}\} \quad \alpha>0$$

と定義し、更に D を Green 領域にとつて、その Green 函数を G^D とする。

このとき順次

(a) $\xi_\alpha(t,w)=\int_0^{t \wedge \sigma_{\partial D}(w)} p_\alpha(x(s,w))\,\xi(ds,w)$ $t \geqq 0$

とおけば

$E_0(\xi_\alpha(\sigma_{\partial D}(w),w)) < +\infty$ で $\xi_\alpha(t,w) \uparrow \xi(t,w)$ $(\alpha \downarrow 0)$ である.

(b) $1-p_\alpha$ はある非負測度 αe_α のポテンシャルで

$1-p_\alpha(\cdot)=\alpha E.\{\xi(\sigma_{\partial D}(w),w)\}=\alpha\int_D G^D(\cdot,b)\,de_\alpha(b)$ となる

(c) f が Borel 函数ならば

$E.(\int_0^{\sigma_{\partial D}(w)} f(x(s,w))\,\xi_\alpha(ds,w))=\int_D G^D(\cdot,b)f(b)\,de_\alpha(b)$

(d) $p_\alpha^{-1}(b)\,e_\alpha(db)=e(db)$ とおくと. $e(db)$ は α と D に無関係に一意的に定まる。

が導びかれる.

これらのことから

(A_1) 連続な正の additive functional $\xi(t,w)$ に対して、次の関係を充たすような非負測度 de が一意的に定まる。

任意の有界な green 領域に対して

(41) $1-P_\alpha(\cdot)=\alpha\int_D G^D(\cdot,b)\,de(b)$

こゝに G^D は D の green 函数で $P_\alpha(\cdot)=E_\cdot(e^{-\alpha\xi(\delta_{\partial D}(w),w)})$

この測度 de を $\xi(t,w)$ に associate された測度という。

$\boxed{A_2}$ D で有界な同じ平均

$$P(\cdot)(\xi(\delta_{\partial D}(w),w))=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\varepsilon}(1-P_\varepsilon(\cdot))=\int G^D(\cdot,b)\,de(b)$$

をもつ二つの連続な正の additive functional は $t\leqq\delta_{\partial D}(w)$ までは一致する。又 associate した測度が同一ならば、二つの連続な正の additive functional は同じである。

次に測度 de が滑らか(Smooth)とは、de が次の条件をみたすことである。

各有界集合 D に対して閉集合 B_n $(n\geqq 1)$ の増大列がとれて $B_n\uparrow D$ であり、e の B_n 上での測度 e/B_n は有界なポテンシャル $\int_{B_n}G^D de\leqq n$ をもち

$$P_\cdot\{x(t,w)\in B_n,\ t<\min(S;x(S,w)\notin D),\ n\uparrow+\infty\}=1$$

が成り立つ

$\boxed{A_3}$ 滑らかな非負測度 de が次の条件をみたすとき、それを associate 測度とする連続な正の additive functional が存在する。

(i) D が有界な green 領域であれば、ポテンシャル

$$P(\cdot)=\int_D G^D(\cdot,b)\,de(b)$$

は有界である

(ii) エネルギー $\int_{D\times D}G^D(a,b)\,de(a)\,de(b)$ は有限である。

特に1次元 Brown 運動のときには、任意の一点 $a\in R^1$ においた点測度 $\delta_a(\cdot)$ が [A_3] の条件を充している。$\delta_a(\cdot)$ を associate 測度とする連続な正の additive functional を特に $t(t,a,w)$ とかき、これを点 a における local time という。1次元 Brown 運動の任意の additive functional はこの local time をもちいて、次のようにあらわすことが出来る。

$\boxed{A_4}$ 1次元 Brown 運動の任意の連続な正の additive functional を $\xi(t,w)$, それに associate された測度を de とすれば

$$\xi(t,w)=\int_{-\infty}^{+\infty}t(t,a,w)\,de(a)$$

である。

local time に関しては次のような性質が知られており、それをもって

local timeの定義とすることの出来るものもある。特に〔A_0〕—〔A_{12}〕はP. Lévy〔119〕に主張されたものだが、ここにのべる形はK. Itô—H.P. Mckean〔89〕による。

$\boxed{A_5}$ $P_0\left(\frac{1}{2}\mathfrak{t}(t,a,w)=\max[x(t,w)-a,\ 0]-\max[-a,0]-\int_{\substack{s\leqq t\\ x(s,w)>a}} x(ds,w)\right)=1$

$\boxed{A_6}$ $P_0\left(\overline{\lim_{|b-a|=\delta\downarrow 0}}\frac{|\mathfrak{t}(t,a,w)-\mathfrak{t}(t,b,w)|}{\sqrt{2\delta\log 1/\delta}}\leqq 2\sqrt{\max_{c\in R^1}\mathfrak{t}(t,c,w)}\right)=1$

(H. Trotter)

これより $\mathfrak{t}(t,a,w)$ はaについて連続である。

$\boxed{A_7}$ $P_0\left(\lim_{(x,y)\downarrow a}\frac{\int_0^t \chi_{(x,y)}(x(s,w))ds}{2(y-x)}=\mathfrak{t}(t,a,w),\ a\in R^1\right)=1$

$\boxed{A_8}$ $\mathfrak{t}^-(t,w)=\max_{s\leqq t} x(s,w)$ とおけば

$P_0\{\lim_{\varepsilon\downarrow 0}[\sqrt{\frac{\pi\varepsilon}{2}}\times(\mathfrak{t}^-(s,w);\ s\leqq t$,を構成する区間でその長さが$\varepsilon$以上のものの数$]=\mathfrak{t}^-(t,w)\ t\geqq 0]=1$

$\boxed{5.2}$ (4)で定義した$Y_1(t,w)$をとり、その0点を$\mathfrak{Z}(w)=\{t;\ Y_1(t,w)=0\}$とおくと、$\mathfrak{t}(t,w)=\mathfrak{t}(t,0,w)$は$\mathfrak{Z}(w)$の上のみで増加し、その外では変化しない。

$\boxed{5.2}$ の(A_6)よりD_0 D_1は同じ拡散過程であるから$\mathfrak{Z}(w)=\{t;|x(t,w)|=0\}$の上のみで増加し、その外では平坦な$\mathfrak{Z}^-(w)$に対応する$\mathfrak{t}^-(t,w)$に相当する$\mathfrak{t}^+(t,w)$が存在する。P. Lévyは$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\mathfrak{t}^+(t,w)$を*mesure du voisinage*と名づけた。この$\mathfrak{t}^+(t,w)$は次のようにして定まる。

$\boxed{A_9}$ $P_0(\lim_{\varepsilon\downarrow 0}[\sqrt{\frac{\pi\varepsilon}{2}}\times[0,t]$に含まれる区間$\mathfrak{Z}^{(n)}(w)$のうちでその長さが$\varepsilon$より大きいものの数$]=\mathfrak{t}^+(t,w),\ t\geqq 0)=1$

あるいは

$\boxed{A_{10}}$ $P_0(\lim_{\varepsilon\downarrow 0}[\sqrt{\frac{\pi}{2\varepsilon}}\times[0,t]$に含まれる区間$\mathfrak{Z}^{(n)}(w)$のうちでその長さが$\varepsilon$より小さいものの総和$]=\mathfrak{t}^+(t,w)\ t\geqq 0)=1$

$\boxed{A_{11}}$ $P_0(2\mathfrak{t}(t,0,w)=\mathfrak{t}^+(t,w)\ t\geqq 0)=0$

$\boxed{A_{12}}$ $d_n(t,w)$を0から2^{-n}へ$\{x(s,w);\ s<t\}$が切る回数とすれば

$P_0(\lim_{n\uparrow+\infty}2^{-n}d_n(t,w)=\mathfrak{t}(t,0,w),\ t\geqq 0)=1$

5.5 Hausdorff の$\frac{1}{2}$ー次元測度としてのt^{+}

1次元Brown運動の0点$\Xi(w)$はLebesgue測度0のCantor集合であることは 2.1 〔1°〕の〔A_3〕で述べた。A.S. BisicovitchとS.J. Taylorは$\Xi(w)$のHausdorff次元(Hausdorff dimension)が$\geqq\frac{1}{2}$なることを示し、更にS.T Taylorはそれが$\leqq\frac{1}{2}$なることを証明した。〔89〕では 5.4 で述べたP. Lévyのmesure vaisinage $\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,t^{+}(t.w)$が$\frac{1}{2}$- Hausdroff測度であることを示し、この事実を示した。

すなわち

$$k\Xi_n(w)=[(k-1)2^{-n},\ k2^{-n}]\cap\Xi(w)\qquad k\geqq 1$$

$$|k\Xi_n(w)|=k\Xi_n(w)\text{ の直径}$$

とおくと

A　$P_0\left(\lim_{n\uparrow\infty}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{k2^{-n}\leqq t}|k\Xi_n(w)|^{\frac{1}{2}}=t^{+}(t,w),\ t\geqq 0\right)=1$

がなりたち，これから

〔B〕　$P_0(\text{Hausdorff }\dim(\Xi(w))=\frac{1}{2})=1$

が導びかれる。

5.6 一般のadditive functional (→E.B Dynkin[43], A.B. Skorohod[172])

5.4 で定義した連続なadditive functionalを$\xi(t,w)$とし，正の条件(5.44)は仮定しない。

勝手な$V\in C(\bar{R}^d)$に対して

(6.1)　$\xi(t,w)=\int_0^t V(x(s,w))ds$

とおけば，$\xi(t,w)$は必ずしも正でないものの例である。〔43〕はこのようなクラスの典型として次の結果を示している

A. fを$\mathbb{B}(R^d)$可測なR^dー値函数とし，

$$\sup_{a\in R^d}f^2(a)<+\infty$$

とする。確率積分

(6.2)　$\xi(t,w)=\int_0^t f(x(u,w))\,dx(u,w)$

で与えられる$\xi(t,w)$は連続なadditive functionalである

B. 〔A〕の条件を充すfと$\mathbb{B}(R^d)$可測なVに対して

(6.3)　$\alpha(t,w)=\exp\left[-\int_0^t V(x(u,w))du-\int_0^t f(x(u,w))\,dx(u,w)\right]$

とおく。このmultiplicative function(→Markov過程)は

$V\geqq\frac{1}{2}f^2$ならば

(6.4)　$E_a(\alpha(t,w))\leqq 1$

(B1〜64)

$V = \frac{1}{2}y^2$ ならば

(6.5) $E_a(\alpha(t,w)) = 1$

である

[A]の連続な additive functional が additive functional の中で示す位置についてA.B Skorohod [172] の結果がある。この結果は $\boxed{5.4}$ で述べたH. TanakaやA.D. Wentzel の結果($\boxed{5.4}$ (A_2))に密接な関係がある。またこのことは確率積分が古典的拡散過程を構成する中間的方法として用いられて来たのが、additive functionalのクラス全体を決める最終的方法として出て来たことになる。

次の条件をおく

(*) 任意の$C>0$, $\varepsilon>0$, $\delta>0$ に対して

Tが存在し

$T>0$.

$t \leqq T$, $\|a\| \leqq C$に対して $P_a(|\xi(t,w)|>\varepsilon)<\delta$

[C] $\xi(t,w)$を(*)を充す連続な additive functional とする。そのときV, Uで

Vはコンパクトなところで有界

UはR^dで定義され, R^d の値をとり, 且つ任意の$C>0$に対して

$$\int_{\|a\| \leqq C} |U(a)|^2 da < +\infty$$

なるものが存在し,

(6.6) $\xi(t,w) = V(x(t,w)) - V(x(0,w)) + \int_0^t U(x(s,w))\,dx(s,w)$

とかける。

もし, $\xi(t,w)$が別のV_1, U_1 によつて(6.6)の表現をもつているならば、殆んどすべてのaに対して

$\Delta(V-V_1)(a) = 0$ $U(a) - U_1(a) = -\mathrm{grad}(V-V_1)(a)$

である。

$\boxed{5.7}$ Ergode定理 (Ergodic theorem) (G.Maruyama-H.Tanaka [143] P. Lévy [121]

再帰的定常 Markov 過程に関する一般的な条件の下で Kariaupur-Rabbin 型のErgode定理がなりたつが、1又は2次元Brown 運動は $\boxed{5.10}$ で述べるように再帰的であり, Lebesgue 測度を不変測度とするので、その

特殊な場合として、

[A] $\{W, \mathbb{B}(W), P_a \ a \in \bar{R}^d\}$ $(d=1,2)$ をBrown 運動とする。

$f, g \in L^1(R^d)$ で $\int_{R^d} g(a)da \neq 0$ ならば，任意の $a \in R^d$ に対して

$$P_a\left\{\lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t f(x(s,w))ds}{\int_0^t g(x(s,w))ds} = \frac{\int f(a)da}{\int g(a)da}\right\} = 1$$

これをKarianpur－Robbins型のErgode 定理という。

一方〔121〕は領域Dのminimal なBrown 運動すなわち非再帰なものについて別な型のErgode 定理を得ている。彼は $\boxed{5.1}$ で述べた展開定理の結果を用いてこれを証明し，$\boxed{6.2}$ の道のHausdorff測度に関する結果の証明にそれを用いている。次の〔B〕での記号は $\boxed{5.1}$ のものと同じとする。

〔B〕

(7.1) $\lim_{t\to+\infty} P_a(x(t,w) \in B / \sigma_{\partial D}(w) > t) = \int_B \frac{1}{c_1} \varphi_1(b)db \quad a \in D \ B \in \mathbb{B}(D)$

(7.2) $\lim_{t-s\to+\infty} P_a(x(t,w) \in B / \sigma_{\partial D}(w) > t) = \int_B \frac{1}{c_1} \varphi_1^2(b)db$ 〃

(7.3) $\lim_{t\to+\infty} E_a\left(\frac{1}{t}\int_0^t \chi_B(x(s,w))ds / \sigma_{\partial D}(w) > t\right) = \int_B \frac{1}{c_1}\varphi_1^2(b)db$ 〃

且つ

Bへの平均滞在時間 $\frac{1}{t}\int_0^t \chi_B(x(s,w))ds$ の $(\sigma_{\partial D} > t)$ に対する条件付確率は $\int_B \frac{1}{c_1}\varphi^2(b)db$ に確率収束する。

このことにより，D内の球でminimal なBrown運動の道のいかなる点をも含まないものが存在する確率は $t\to+\infty$ のとき0に収束する。

$\boxed{5.8}$ 到達確率(hitting probability) 平衡分布(equilibrium distribution)，容量(capacity)．

d次元Brown運動を考える。

Dをgreen領域，G^D をそのgreen函数，BをDのコンパクト集合又は $\bar{B} \subset D$ なる閉集合とし、道が∂D に到達するより先にBに到達する確率

$$P_B(a) = P_a(\sigma_B(w) < \sigma_{\partial D}(w))$$

をBへの到達確率という。

このとき

[A] $P_B(a)$ は∂B上に分布するある非負測度 de_B のポテンシャル

$$P_B(a) = \int G^D(a,b)\,de_B(b)$$

であり，更に次の条件をみたす。

1) Bがコンパクトならば，非負測度eのポテンシャル $\int G^D de$ で ≤ 1 なるもののうちで最大である。

2) Bが開集合ならば非負測度eと$\bar{A}\subset B$なるAに対して，$\int_A G^D de$ が$\leqq 1$なるポテンシアルより大なるもののうち最小である。

この分布de_Bを（Dに関する）B上の平衡分布、$C^{(d)}(B)=C(B)=\int_B de_B$ をBの（ニュートン）容量という。容量は次の性質をもつ。

(A₂) (a) $C(A)\leqq C(B)$ $A\subseteq B$ (b) $C(A\cup B)+C(A\cap B)\leqq C(A)+C(B)$

(c) $C(B)\leqq C(\partial B)=C(\bar{B})$

(d) Bがコンパクトならば $C(B)=\inf_{\substack{A:\text{開集合}\\ A\supset B}} C(A)$

Bが開集合ならば $C(B)=\sup_{\substack{A:\text{コンパクト}\\ A\subset B}} C(A)$

(e) $D=R^d$ $(d\geqq 3)$ でmが$|m|=1$なるユークリッドの運動(Euclidean motion)又は$|m|\geqq 0$なるmagnification であれば
$C(mB)=|m|^{d-2}C(B)$

G Choquetは(b)と類似の次の式を示した。$A,B,\cdots,B_n\subset D$，$\underline{\ell}$は$\{1,2,\cdots n\}$の部分集合で$|\underline{\ell}|$でその要素の数をあらわすとき，$B_{\underline{\ell}}=\bigcup_{\ell\in\underline{\ell}}B_\ell$
とおけば

$$0\leqq P_a(\sigma_{A\cup B_\ell}<\sigma_{\partial D},\ \ell\leqq n\quad \sigma_A<\sigma_{\partial D})$$

$$=P_a(\sigma_{A\cup B_\ell}<\sigma_{\partial D},\ \ell\leqq n)-P_a(\sigma_A<\sigma_{\partial D})$$

$$=-\sum_{m\leqq n}(-1)^m\sum_{|\underline{\ell}|=m}P_a(\sigma_{A\cup B_{\underline{\ell}}}<\sigma_{\partial D})-P_a(\sigma_A<\sigma_{\partial D})$$

$$=-\sum_{m\leqq n}(-1)^m\sum_{|\underline{\ell}|=m}P_{A\cup B_{\underline{\ell}}}(a)-P_A(a)$$

より

$$0\leqq -\sum_{m\leqq n}(-1)^m\sum_{|\underline{\ell}|=m}C(A\cup B_{\underline{\ell}})-C(A)$$

がみちびかれる。

(A₃) (Kakutaniのテスト) $d=2$とする。コンパクト集合Bに対して

$P_a(\sigma_B<+\infty)=1\ (=0)$ になるための必要十分条件は、

$$\ell(B)=\exp\Big(\sup_{\substack{e\geqq 0\\ e(B)=1}}\int_{B\times B}\log|a-b|\,de(a)\,de(b)\Big)>0\quad(=0)$$

となることである（K. Kakutani）。

この$\ell(B)$を対数容量 (logarithmic capacity) という。この結果からR^2のコンパクト集合の対数容量が正であれば、強Markov性からBrown

運動の道はこれを無限回訪れ、逆にそのような性質をもつコンパクト集合の対数容量は正であることがしられる。

Kakutani のこの結果はJ.L.Doob〔29〕によって(1)Bが外容量0ならば、

$$P_a(\sigma_B<+\infty)=0$$

でBが正の内容量を持てば

$$P_a(\sigma_B<+\infty)=1$$

の形にひろげられた

次にBをgreen 領域Dのコンパクト集合とするとBの平衡分布は gauss の2次形式

$$\underline{\underline{G}}(e)=\frac{1}{2}\int_{B\times B}G^D(a,b)\,de(a)\,de(b)-e(B)$$

を最小にする分布である。そして、Bの容量に関する次の性質をKelvin の原理（Kelvin's principle）という

Bがコンパクトならば

$$C(B)^{-1}=\inf_{\substack{e\geq 0\\ e(B)=1}}\int_{B\times B}G^D(a,b)\,de(a)\,de(b)$$

であり，$C(B)>0$ ならば $e=C(B)^{-1}\times e_B$ 以外に対しては、

$$\int_{B\times B}G^D(a,b)\,de(a)\,de(b)>C(B)^{-1}$$ である。

ただし

ただし　$e(B)=1$ とする

5.9 Wienerテスト(Wiener's test)とDirichlet問題

2.2 で古典的Dirichlet問題の解が存在するときは、それが確率論的解として与えられることを述べた。そのような解が存在するかどうかを示すのがWienerテストである。こゝでは、K.Ito－H.P.McKean[89]によって、それを確率論的な形で述べる。

$d \geqq 2$とし、R^dのコンパクト集合Bに対して$\sigma_B(w) = \inf\{t;\ x(t,w) \in B\}$とおくと、$\{w;\ \sigma_B(w)=0\} \in \mathbb{B}_0 = \bigcap_{t>0} \mathbb{B}_t$であるからBlumenthalの0－1法則より$P.(\sigma_B=0)$は0又は1である。そのいずれであるかを判定する次の定理をWienerテストという

Wienerテスト　$a \in \partial B$とすると.

$$P_a(\sigma_B=0)=\begin{cases}0\\1\end{cases} \iff \sum_{k\geqq 1} k\,C(B_k)\begin{cases}<+\infty\\=+\infty\end{cases} \qquad (d=2)$$

$$\sum_{k\geqq 1} 2^{k(d-2)}C(B_k)\begin{cases}<+\infty\\=+\infty\end{cases} \qquad (d\geqq 3)$$

たゞし、$C(\cdot)$は面$\{b;\ \|b-a\|=r\}$に関する容量をあらはし、$r \geqq \frac{1}{2}$で2次元のときは$r<+\infty$とする。又B_kは

$$B_k=\{b;\ 2^{-(k+1)} \leqq \|b-a\| \leqq 2^{-k}\} \cap B$$

として定義されるコンパクト集合である。

これから次のPoincaréテスト(Poincaré's test)が導びかれる。

Poincaréテスト、R^3のコンパクト集合Bの境界点aは，Bがaを頂点とする円錐体をその内部に含むならば，$P_a(\sigma_B=0)=1$である。

今$R^d(d \geqq 2)$の有界領域をDとし，$a \in \partial D$に対し$P_a(\sigma_{R^d-D}>0)=1$であればaをDに対して非正則(irregular)そうでないときaをDに対して正則(regular)であるという。

WienerテストはDの境界点が正則であるか、非正則であるかの判定条件であり、それは確率的には、その境界点から出発したBrown運動が直ちにDに到達するか否かできまる。

Wienerテストの応用として次のことが考えられる。$d \geqq 3$とし、Qをaを集積点とする集合とし、$\underline{Q}$を$\{t;\ x(t,w) \in Q\}$が$+\infty$を集積点にも

つWの要素とする。

$$Q_k=\{b;\ 2^{k-1}\leqq \|b\|\leqq 2^k\}\cap Q$$

とおけば

$$P_a(\underline{\underline{Q}})=\begin{cases}0\\1\end{cases}\iff \sum_{k\geqq 1}2^{k(d-2)}c(Q_k)\begin{cases}<+\infty\\+\infty\end{cases}$$

である。

次に，上で確率論的に定義した，正則、非正則なる概念を用いれば $\boxed{2.2}$ で述べた Dirichlet 問題の解の存在に関してよく知られている次の結果に対して、確率論的な証明を与えることが出来る。

有界領域Dの境界∂D上に与えられた連続函数をfとし，fを境界函数とするDに関する Dirichlet 問題の確率論的解を

$$(9.1)\qquad u(a)=u(a;f,b)=E_a\{f(x(\sigma_{\partial D}(w),w)\}\qquad a\in D$$

とすれば

1) $\Delta u(a)=0\qquad a\in D$

2) $a_0\in\partial D$ が正則点であれば $\lim\limits_{\substack{a\to a\\ a\in D}} u(a)=f(a_0)$

であり、1), 2) を充す解は一意的に定まる。

そして $\boxed{2.2}$ の (2.8) で定義された∂D上の測度 $h^D(a,db)=E_a(x(\sigma_{\partial D}(w),w)\in db)\ (a\in b)$ はaからみた∂Dの調和測度であることが示される。

更に Dirichlet 問題は Brelot 其の他によりつぎのような形まで拡げて考えられた。簡単のため2次元で考える　Dを任意の領域でその補集合が正の外容量をもつとする。fは∂D上の　可測函数で調和函数に関し絶対積分とするとき、確率論的解

$$u(a)=E_a\{f(x(\sigma_{D'}W))\}=\int_{\partial D}f(b)h^D(a,db)$$

に対し，J, Doob [29] はこの解に対するつぎのような確率論考察を与えている。

$u(a)$ は殆んどすべての brown 運動の path の上で，
境界への極限 $f(b)$を持つ

(B.1〜70)

調和測度の例

$d=2$，　D：単位円板とする

$a=re^{i\theta}$ $(0\leqq r<1)$，$b=e^{i\varphi}$ とおけば，$h^D(a, db)$は

Poisson 核（Poisson kernel）

$$(9.2)\quad h^D(a, b)=\frac{1}{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2}$$

によって

$$(9.3)\quad h^D(a, db)=h^D(a, b)\,d\varphi$$

とかける。

$d=3$、　D：単位球とする。

$$(9.4)\quad a=(r\sin\theta\cos\varphi,\ r\sin\theta\sin\varphi,\ r\cos\theta)\quad(0\leqq r<1)$$

$$b=(\sin\Theta\cos\Phi,\ \sin\Theta\sin\Phi,\ \cos\Theta)$$

とし、γを

$$\cos\gamma=\cos\Theta\cos\theta+\cos\Theta\cos\theta\cos(\Phi-\varphi)$$

とおけば

$$(9.5)\quad h^D(a, b)=\frac{1}{4\pi}\frac{1-r^2}{(1-2r\cos\gamma+r^2)^{3/2}}$$

によって

$$(9.6)\quad h^D(a, db)=h^D(a, b)\sin\Theta\,d\Theta\,d\Phi$$ とかける

$\boxed{5.10}$ 再帰性（ recurrence property ）

D_1, D_2 を a_0 を中心にもち、半径 r_1, r_2 $(r_2>r_1)$ なる同心球とする。∂D_1 で 1、∂D_2 で 0 なる境界値を与えて Dirichlet 問題をとけば，Bouvard Poincaie テストより

$$(10.1)\quad P_a(\sigma_{\partial D_1}(w)<\sigma_{\partial D_2}(w))=\begin{cases}\dfrac{r_0^{-d+2}-r_2^{-d+2}}{r_1^{-d+2}-r_2^{-d+2}} & d\geqq 3\\[2mm] \dfrac{\log 1/r-\log 1/r_2}{\log 1/r_1-\log 1/r_2} & d=2\\[2mm] \dfrac{r_2-r}{r_2-r_1} & d=1\end{cases}$$

$$r=\|a-a_0\|$$

が解である。 $r_2\uparrow+\infty$ とすると，

$$(10.2)\quad P_a(\sigma_{\partial D_1}<+\infty)=\left(\frac{r_1}{r}\right)^{d-2}\qquad d\geqq 3\qquad r>r_1$$

$$=1\qquad\qquad d\leqq 2$$

今、任意の開集合 U に対して $P_a(\sigma_U<+\infty)=1$ ならば 再帰的（ recurrent ）そうでないとき非再帰的（ non-recurrent ）である。と定義すれば（10.2）は 1 又は 2 次元 Brawn 運動は再帰的、3 次元以上の Broun 運動は非再帰的であることをあらわす。

従って d 次元 Broun 運動（$d\geqq 3$）は充分大きな時間の后には指定されたコンパクト集合を出て行くが、その速さは空間の次元 d に関係することが、S. Watanabe によって示された。

D を原点を中心とする半径 r_0 の閉球とし，D を出て行く最後の時間を

$$\gamma_D(w)=\sup\{t;\ x(t,w)\in D\}$$

とおくと

$$(10.3)\quad P_a(\gamma_D(w)\in dt)=\int_D\left(\frac{1}{2\pi t}\right)^{\frac{d}{2}}e^{-\frac{\|b\|^2}{2}}\mu_D(db)\cdot dt$$

$$=\left(\frac{1}{2\pi t}\right)^{\frac{d}{2}}e^{-\frac{r_0^2}{2t}}r_0^{d-2}(d-2)\Omega_{d-1}\qquad d\geqq 3$$

ここに

μ_D はDの平衡分布, $\Omega_d=\frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})}$

これより

(10.4) $E_0\left[(\tau_D w)^\alpha\right]\begin{cases}<+\infty & \alpha<\frac{d}{2}-1\\ =+\infty & \alpha\geqq\frac{d}{2}-1\end{cases}$

が得られる。(S, Watanabe)

5.11 等角写像不変性 (conformality invariance)

P. Lévy は brown 運動がある意味で等角写像により不変であることを示した。(→ P, Lévy [112] [119]), この事実は彼の stochastic clock の考えを用いて次のような形で示される。

$\{W, \mathbb{B}(W), P_a\ a\in R^2\}$ を2次元 Brown 運動とし、Dを単位円Bで定義された正則函数 φ ($\varphi'\neq 0$) によるBの像領域とする。

$$\underline{S}(t,w)=\int_0^t|\varphi'(x(s,w))|^{-1}ds \qquad t\ \sigma_{\partial B}(w)$$

とおいて、D内の拡散過程を

$$\{\varphi(x(\underline{S}^{-1}(t,w),w));\ 0\leqq t\leqq\underline{S}(\sigma_{\partial B});\ P_a,\ a\in B\}$$

と定義すれば, これはDの minimal な Brown 運動

$\{x(t,w);\ 0\leqq t<\sigma_{\partial D}(w),\ P_a,\ a\in D\}$

と同じものである。(第8章参照)。

これを(2次元) Brown 運動の等角写像不変性という。

5.12 Martin 境界 (Martin boundary)

(→ Markov 連鎖、Markov 過程)

DをRd ($d=2$、3) の単位円とすれば, 境界値 f に対する Dirichlet 問題の解とは (5.9.1) (5.9.2) (5.9.3) より

(12.1) $u(a)=\int_{\partial D}f(b)\,k^D(a,b)\,db \qquad k^D(a,b)$: Poisson核 と積分表 が出来る。更に一般な領域Dで境界まで連続性を仮定しないD内の正の調和函数のすべてに対してこのような表現定理を求める問題は最初 R.S Martin [135] によって論ぜられ,このような考え方は解析学の方でも最近

考察されているが確率論でもP. Watanabe〔190〕, G. A. Hunt〔67〕
L. Doob〔35〕で 確率論的立場から離散的状態空間の場合に考えられ、最近、
T. Watanabe-H. KunitaによってBrown運動を含む一般な場合にその
方法が拡げられている。

ここでは、簡単のためR^3で考える。ここでのべるMartinの方法は直接
Brown運動を用いていないがそれには適当な修正をすることによりBrown
運動の形で書ける

Dを連結したgreen領域G^Dをそのgreen函数とし、$a_0 \in D$を固定して

$$(12.2)\quad K(a,b)=K^D(a,b)=G^D(a,b)/G^D(a_0,b) \qquad b\neq a_0$$
$$=0 \qquad b=a_0,\ a\neq a_0$$
$$=1 \qquad a=a_0=b$$

とおく。

Dの内部に集積しない点列$\{b_n\}$に沿って$K(a,b_n)$がD内のある調和
函数に収束するとき，$\{b_n\}$を基本列（fundamental sequence）と
云い、同じ極限函数を与える基本列は同値と定義する。

この同値類の1つはDのideal境界要素を1つ定める．そのような類の
全体を∂bとかき、$\cup \partial b=M$とおく。$\eta \in \partial D$に対して

$$(12.3)\quad K(a\eta)=\lim_{n\to\infty} K(a,b_n) \qquad \eta\in\partial D \quad a\in D$$ と定義すること
が出来る。$\{b_n\}$はηに属する基本列である。

次にDに完全に含まれる中心a_0の球をΓとし、

$$(12.4)\qquad \rho(\eta,\eta')=\int_\Gamma \frac{|K(a,\eta)-K(a,\eta')|}{1+|K(a,\eta)-K(a,\eta')|}\,da \qquad \eta,\eta'\in M$$

とおく。（$a=\eta$又はa'のときには積分は便宜的に定める）

このとき

$\boxed{A}$ ρはMの距離で，Mはρに関して完備、コンパクトな距離空間である。
そのDにおける相対位相は，Dのもとの位相と一致し、DはMの開集合である。

位相空間MをMartin空間（martin space），$\partial D=M-D$をmartin境界
（Martin boundary）という。

$\{b_n\}$を$\eta\in\partial D$を定める基本列とすれば，b_nはηにρ一収束している。
$\rho(b_n\eta)\to 0\ (n\to+\infty)$　又(12.3)で定義した$K(a,\eta)$は$\eta\neq a$に対
してMでρ一連続で、FがDでコンパクト，Gが$M-F$でρ一閉集合であれ

ば $(a, y) \in F \times G$ について一様連続である。

u を D で非負優調和、E を D の相対閉集合とする。そのとき、D で定義された u_E^* で次の関係を充すものが唯一つ存在する。

1） u_E^* は D で優調和

2） E 上容量 0 の集合を除いて $u_E^* = u$、

3） $D-E$ ではつぎの境界函数 $\phi(a; E, u)$ を持った調和函数と一致する。

$$\phi(a; E, u) = \begin{cases} u(a) & a \in D \text{の中の } D-E \text{ の境界} \\ 0 & a \in D \text{の境界の中の } D-E \text{ の境界} \end{cases}$$

次に M の任意の集合 G に対して

$[G] = D \cap \{G \text{の} \rho\text{一閉包}\}$ とおき、D 内の非負調和函数を u とし上の u^* から，∂D の閉集合 A に対して

(11.5) $u_A(a) = \inf u^*_{G}(a)$

$A \subset G$；閉集合

と定義する。そのとき、A 上の測度 $d\mu_A$ が存在し、

(11.6) $u_A(a) = \int_A K(a, y)\, d\mu_A(y) \qquad a \in D$

$\mu_A(A) = u_A(a_0)$

となる。このことから、次の表現定理

〔B〕 D 内の非負調和函数 u に対して ∂D 上の測度 $d\mu$ が存在して

(11.7) $u(a) = \int_{\partial D} K(a, y)\, d\mu(y) \qquad a \in D$

$\mu(\partial D) = u(a_0)$

と表現出来る。

一意的な表現を求めるため minimal な境界点を用いる。

D で非負調和な u が、minimal であるとは、任意の非負調和な v で $0 \leqq v \leqq u$ をみたすものがあれば、v は u の定数倍になっていることである。

$y \in \partial D$ に対して $K_{\{y\}}(a_0, y)$ を考えると、これは 0 又は 1 であり、$K(\cdot, y)$ は 1 のときに限って minimal である。$K(\cdot\, y)$ が minimal なとき、y を minimal な境界点といい，その全体を $(\partial D)_1$ 残りを $(\partial D)_0$ とかく。$(\partial D)_0$ は ϕ か閉か又は F_σ 集合である。

(12.7) の測度 μ は $\mu((\partial D)_0) = 0$ のとき，canonical と云い、そのとき

の表現(10.7)を canonical 表現という。(ab)。≠φ なる例はあるが、[B] の精密化として

[C] すべての非負調和函数 u は canonical な表現をもち、且つ canonical 測度は u から一意的に定まる。

ことが示される。

[5.13] Space-time Brown 運動の excessive function 第2章で supper parabolic と(Brown 運動に関する)excessive の関係をのべたが、E.B. Dynkin [46] の一般的な定理によれば supper parabolic と(space-time Brown 運動に関する)excessive の関係を与えるものとして つぎの事実が成立つ。

D を finite open set とする。f をある有界可測で、D の各 compact 部分集合 B と任意の a に対し

$$E_a\{f(x(\sigma_B));\ \sigma_B < \sigma_{D^c}\} \leq f(a)$$

$$E_a\{f(x_t);\ t < \sigma_{D^c}\} \to f(a) \qquad (t \downarrow 0)$$

とする。そのとき、f は(Space-time Brown 運動に関し)excessive である。

6 道の特殊な性質

6.0 この章では才4章で述べたBrown運動の道の連続性以外の特殊な性質のうち、主として、そのR^dの中の集合としての性質について述べる。これ等の特性はP. Lévyの研究に端を発し、その後S. Kakutani, P. Erdös, A. Dvoretzky S T Taylor 等によつて発展させられたものである。以下，特にことわらなければ、2次元以上のBrown運動について考えるものとする。

6.1 道の重複点

[1°] 角谷の定理（→ 5.7 [A_3]）— a_0, a_1 を$R^d(d\geqq 2)$の2点とし、$a_0=a$ であつてもよいものとする。そのとき，a_0から出発したBrown運動の殆んどすべての道 $x(\cdot,w)$ はaを通過しない。すなわち，

$P_{a_0}(w;$ ある $t>0$ に対して $x(t,w)=a)=0$

である。この結果はもつと一般な形で成り立つ。今 $C_e^{(d)}(A)$, $C_i^{(d)}(A)$ で $A\subset R^d$ の外容量，内容量をあらわすことにすると，$C_e^{(d)}(A)=0$ $(d\geqq 2)$ ならば，R^dのいかなる点aから出発した道もAを通過しない。

$P_a(w;$ ある $t>0$ に対して $x(t,w)\in A)=0 \quad a\in R^d$

又$C_i^{(2)}(A)>0$ならば、aから出発した殆んどすべての道は、どんな大きい時間を経たのちも、Aを無限回訪問する。

$P_a(w;$ 任意の $t>0$ に対して $x(s,w_t^+)\in A$ なる $s>0$ が無限個存在する$)=1$ （S. Kakutani）

これらの性質から、$d\geqq 3$ のときには，非再帰的（→ 5.8 ）なことより，R^dの集合としての道wは疎であり，$d=2$ のときには，その再帰性（→ 5.5.8）より，到るところ稠密であることが導びかれる。

しかし，いづれの場合でも，そのLebesgue測度は0である。（P. Lévy）

[2°] 重複点

道wに対してk個の時点 $0\leqq t_1<t_2<\cdots<t_k<+\infty$ が存在し，$a=w(t_1)=\cdots\cdots=w(t_k)$となるとき、点$a$を$w$の$k$重点（$k$-ple point）という。道の$k$重点については次の結果が知られている。

$d=2$ のとき，殆んどすべての道は任意のkに対してk重点をもつ。（Kakutani-Dvoretzky-Erdös） $d=3$ のとき，殆んどすべての道は3重点をもたな

いが２重点をもつ。(Dvoretzky - Erdös, - Kakutani - Taylor) d≧のとき殆んどすべての道は２重点をもたない。(P. Lévy, Kakutani, Dvoretzky, Erdös)

これらの事実を証明する途中で、道の一部の容量に関する次のことが導びかれる。

$d=2,3$ のとき, $P_a(w; C^{(d)}(w(\tau); s \leqq \tau \leqq t) > 0) = 1$

$d=4$ のとき, $P_a(w; C^{(4)}(w(\tau); s \leqq \tau \leqq t) = 0) = 1$

＊ $\boxed{6.2}$ 道の Hausdorff 測度 (Hausdorff measure)

$\boxed{6.1}$ では道の Lebesgue 測度が 0 となることを述べたが、これをもっと、こまかい測度で測れば意味のある有限値の得られることが P. Lévy によって示された。その測度は次のような Hausdorff 測度である。

$\Phi(\rho)$ を0の右近傍で定義された増加する連続函数で $\Phi(0+)=0$ なるものとする。Eを R^d の集合とし、十分小さな $\varepsilon>0$ に対して半径 ρ_ν が ε 以下の球 Ω_ν によるEの可算被覆の全体を $\mathfrak{U}(E,\varepsilon)$ とし

$$m_\varepsilon(E) = \inf_{\mathfrak{U}(E,\varepsilon)} \sum_{\nu=1}^{\infty} \Phi(\rho_\nu), \qquad m^*(E) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} m_\varepsilon(E)$$

として得られる Carathéodory の外測度 m^* から みちびかれる測度 m を Hausdorff の Φ－測度 (Φ - measure of Hausdorff) という。

次に $E=\Gamma$ が R^d 内の連続曲線であるときのみを考え、Γ を互に素な孤 γ_ν に分割し、各 γ_ν を半径 $\rho_\nu \leqq \varepsilon$ なる球で被覆することにより、m と同様な仕方でみちびかれる測度を μ とする。更に Γ として Brown 運動の道の一部分 $(w(\tau);\ s \leqq \tau \leqq t)$ をとり, γ_ν として τ が

$[k2^{-k},(k+1)2^{-k})$ $(k=0,1,2\cdots)$ なる型の区間を動くときに得られるものにとって、μ と同様にして得られる測度を $\bar{\mu}$ とすれば;

$$\bar{\mu}((w(\tau);\ s \leqq \tau \leqq t)) \geqq \mu((w(\tau);\ s \leqq \tau \leqq t)) \geqq m((w(\tau);\ s \leqq \tau \leqq t))$$

である。 この測度に関して,

$\Phi(\rho) = \rho^2 \log\log 1/\rho$ とおけば;

$$P_0\{w; \bar{\mu}((w(\tau);\ 0 \leqq \tau \leqq t)) = \mu((w(\tau);\ 0 \leqq \tau \leqq t)) = k_1 t\} = 1$$

ただし, k_1 は Bessel 函数 $J_{\frac{d}{2}-1}$ $(d \geqq 2)$ の最小の正根を ξ_1 としたとき $k_1 = \xi_1^2/2$ なる定数である。

又 $\Phi(\rho) = o(\rho^2 \log\log 1/\rho)$ $(\rho \downarrow 0)$ とすれば

$$P_0\{w;\, m(\{w(\tau);\, 0 \leqq \tau \leqq t\}) = 0\} = 1$$

となる。（P. Lévy）

勿論　$\Phi(\rho)=\rho^2$であれば　このことがなりたつ。

$\boxed{6.3}$ skew product

Brown運動はつぎのように２つの成分にわけて考えるといろいろの性質が解る。

[1°] Skew product

$[W, \mathbb{B}(W), P_a,\ a\in R^{d+1}]$ を $(d+1)$ 次元 Brown 運動とし，$r(t,w)=\|x(t,w)\|$ とおくと，

[A] $[r(t,w);\ 0\leqq t<+\infty\ P_a\ a\in R^{d+1}]$ は $[0,+\infty]$ 上の1次元拡散過程でその生成作用素 $\mathcal{G}$ および定義域は

(3.1) $\mathcal{G} = \frac{1}{2}\left[\frac{d^2}{dr^2}+\frac{d}{r}\cdot\frac{d}{dr}\right]\quad r>0$

$$\mathcal{D}(\mathcal{G})=\{u;\ \mathcal{G}u\in C([0,+\infty]),\ \lim_{r\downarrow 0} r^d u'(r)=0\}\cap C([0+\infty])$$

となる．

この拡散過程を Bessel 過程（Bessel process）という。

$(d+1)$ 次元 Brown 運動を，その半径成分としての Bessel 過程と，角成分としてのある拡散過程とから構成することを K. Ito-H.P. McKean に従って述べる。

R^{d+1} の点 $a=(a^{(1)},\cdots a^{(d+1)})$ を極座標 $(r,\theta_1\cdots\theta_d)$ で あらわし，

$$a^{(1)}=r\cos\theta_1,\quad a^{(i)}=r\cos\theta_i\prod_{j=1}^{i-1}\sin\theta_j\ (i=2,3,\cdots,d)$$

$$a^{(d+1)}=r\prod_{j=1}^{d}\sin\theta_j$$

$$0\leqq r<+\infty,\quad 0\leqq\theta_i\leqq\pi\ (i=1,2,\cdots,d-1),\quad 0\leqq\theta_d<2\pi$$

$$r^2=\sum_{j=1}^{d+1}a^{(j)2}$$

とおくと，Laplacian $\Delta=\sum_{j=1}^{d+1}\frac{\partial^2}{\partial a^{(j)2}}$ は

(3.2) $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{d}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\Lambda$

$$(3.3)\quad \Lambda=\frac{1}{2}(\sin\theta_1)^{1-d}\frac{\partial}{\partial\theta_1}(\sin\theta_1)^{d-1}\frac{\partial}{\partial\theta_1}$$
$$+(\sin\theta_1)^{-2}(\sin\theta_2)^{2-d}\frac{\partial}{\partial\theta_3}(\sin\theta_2)^{d-2}\frac{\partial}{\partial\theta_2}$$
$$+(\sin\theta_1\sin\theta_2)^{-2}(\sin\theta_3)^{3-d}\frac{\partial}{\partial\theta_3}(\sin\theta_3)^{d-3}\frac{\partial}{\partial\theta_3}$$
$$+\cdots\cdots$$
$$+(\sin\theta_1\cdot\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{d-1})^{-2}\frac{\partial^2}{\partial\theta_d^2}$$

となり，Λは R^{d+1} の単位球面 $S^d=\{a;\|a\|=1\}$ 上の楕円型微分作用素である。S^d 上には，これを Hille-Yosida の意味の生成作用素とする $C(S^d)\to C(S^d)$ なる強連続な半群があって，それに対応する推移確率 $p^{(1)}(t,\theta,B)$ ($\theta\in S^d$, $B\in\mathbb{B}(S^d)$)と S^d 上の拡散過程 $[\theta(t,w);0\leqq t<+\infty]$が存在する。

この推移確率 $p^{(1)}(t,\theta,B)$は $(t,\theta,\varphi)\in(0,+\infty)\times S^d\times S^d$ について連続な（S^d 上の一様な測度に関する）密度 $p^{(1)}(t,\theta,\varphi)$ をもっている。

$d=1$ のとき，$[\theta(t,w);0\leqq t<+\infty]$ を円周上の Brown 運動といい，

$$(3.4)\quad p^{(1)}(t,\theta,\varphi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(\theta-\varphi+2n\pi)^2}{2t}}=\frac{1}{2\pi}\sum_{|n|\geq 0}e^{-\frac{n^2}{2}t}e^{in(\varphi-\theta)}$$
$$0\leqq\theta,\varphi<2\pi$$

$d=2$ のとき$[\theta(t,w);0\leqq t<+\infty]$ を球面上の Brown 運動といい

$$(3.5)\quad p^{(1)}(t,(\theta,\varphi),(\theta',\varphi'))=\sum_{n\geq 0}\sum_{-n\leqq m\leqq n}e^{-n(n+1)t}Y_n^{(m)}(\theta,\varphi)Y_n^{(m)}(\theta',\varphi')$$

である。

第1章と同様に $[0,+\infty)$ で定義され S^d の値をとる連続函数 $w^{(1)}$ の全体を $W^{(1)}$ とし，その筒集合 $\mathbb{B}(W^{(1)})$ の上に，推移確率 $p^{(1)}(t,\theta,B)$を用いて確率測度 $P_\theta^{(1)}$ を定義することが出来る。

$[W^{(1)}\ \mathbb{B}(W^{(1)}),\ P_\theta^{(1)},\ \theta\in S^d]$ を S^d 上の Brown 運動 という。次にこれと同様にして Bessel 過程 $[W^{(2)}\ \mathbb{B}(W^{(2)})\ P_r^{(2)},\ r\in[0,+\infty]]$ が定義出来る。

[B] 両者の直積

$[W^{(1)}\times W^{(2)},\ \mathbb{B}(W^{(1)})\otimes\mathbb{B}(W^{(2)}),\ P_\theta^{(1)}\otimes P_r^{(2)}\ \ (\theta,r)\in S^d\times[0,+\infty]]$
をつくり，$w\in(w^{(1)},w^{(2)})\in W^{(1)}\times W^{(2)}$ に対して

$r(t,w)=w^{(1)}(t)$, $\theta(t,w)=w^{(2)}(t)$ とおき,

$$(3.5)\qquad \underset{=}{S}(t,w)=\int_0^t r^{-2}(s,w)\,ds$$

$$\underset{=}{\tilde{\theta}}(t,w)=\theta(\underset{=}{S}(t,w),w)$$

とすると

(3.6) $[(r(t,w),\ \tilde{\theta}(t,w);\ 0\leqq t<+\infty\ P_\theta^{(1)}\otimes P_r^{(2)},\ (a,r)\in S^d\times[0,+\infty]]$ は $(d+1)$ 次元 Brown 運動の1つの変形である。(K.Ito-H.P.MCKean これを Brown 運動の skew product による構成という。

[2°] skew product の応用

skew product による構成を用いれば、次の Spitzer 及び P.Lévy の結果を容易に導びくことが出来る。

[C] $[X(t,w);\ 0\leqq t<+\infty\ P_a\ a\in R^2]$ を二次元 Brown 運動とし, $X(t,w)=(r(t,w);\theta(t,w))$ とする。$\theta(a,w)$ の $0\leqq a\leqq t$ における全代数和を $\varphi(t,w)$ とすれば

$$\lim_{t\uparrow+\infty} P_{(r,0)}(\varphi(t,w)/\log t\leqq a)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{a}\frac{db}{1+b^2}\quad (r>0) \text{ である。(Spitzer)}$$

[D] 任意の $M>0$, $t>0$ に対して

$P_{(0\,0)}(w;$ ある $0<s\leqq t$ に対して $|\varphi(s,w)|>M)=1$ である。(P.Lévy)

すなわち, 1点から出発した道は、どんな小さな時間のうちにも、その点のまわりを無限回まわる。

* $\boxed{6.4}$ Stochastic area

$[X(t,w);\ 0\leqq t<+\infty,\ P_a\ a\in R^2]$ を2次元 Brown 運動とし, $X(t,w)=(X^{(1)}(t,w),\ X^{(2)}(t,w))$ とおく。　時刻 t までの道 $(w(a\ \ 0\leqq a\leqq t)$ と その弦 $\overline{w(0)w(t)}$ との囲む(符号のついた)面積は普通の意味では存在しないので, これを確率積分

$$(4.1)\qquad S(t,w)=\frac{1}{2}\int_0^t[X_1(s,w)\,dX_2(s,w)-X_2(s,w)\,dX_1(s,w)]$$

と定義する。

(81~82)

Brown 運動の一様性から $S(t)$ の分布は $tS(1)$ の分布と同じであり，$S(1)$の分布法則は密度が $\frac{1}{ch\,\pi x}$，特性函数は $E_0(e^{iz S(1w)}) = \frac{1}{ch\,z/2}$ となる（P. Lévy）

索　引