Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

SEMINAR ON PROBABILITY

vol. 60

ホワイトノイズと関数解析

飛田 武幸

2002

確 率 論 セ ミ ナ ー

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

ホワイトノイズと関数解析

飛田 武幸
名城大学 理工学部

[目次]

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

まえがき

なぜホワイトノイズか

自然現象を数学的に扱おうとするとき, 決定論的なモデルを構成しようとするならば, ゆらぎ や ノイズ は無視してしまうか, またはそれらを除去しようと試みるであろう. ところが, 一歩高いレベルに立って, ゆらぐ複雑系について, それをありのままに記述しようと試みるときは, むしろ, ゆらぎとかノイズが積極的な役割を演ずることになる. しかも, 興味ある系ではゆらぎの影響が非線形になってしまうことが多い. そして, そこには新しい数学の芽生えが期待されるのである.

ところで, ゆらぎのような偶然量の最も基本的なものはガウス型の分布をしており, 時間・空間について一様な量で, しかもそれら各パラメータの点に対応して独立な量が現れるものとしてよい. こんな性質を持つものは, (ガウス型の) ホワイトノイズに他ならない. こうして, ゆらぎを伴う複雑系を扱おうとするとき, それらの多くは偶然量であるが背後にはいつもゆらぎの基本となるホワイトノイズがあって, その関数の具現化が我々の視野に入ってくるものと考えてよかろう.

ホワイトノイズ解析とその役割

我々が取り上げるゆらぐ現象はホワイトノイズの非線形な関数で表現されるものと理解するが, 多くの場合その関数は時間に依存する. そのような関数の持つ複雑な性質を解明するためには無限次元解析が必要となる. その上, 変数が偶然量すなわち確率変数の系であるためこの解析は通常の実解析または複素解析とは異なった様相を呈する. 標語的にいえば

“$1+1$ は 2 でなくて $\sqrt{2}$” となる.

Schrödinger の言葉を借りるならば, 独立な偶然量の和については $\sqrt{n}$ 法則があるということになろう.

このように, 我々の解析は自由度が無限であることと, 変数がランダムであるた

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

め従来の古典解析からは一段と飛躍したものであるということができる. さらに, 扱う関数は具体的な現象をモデルとすることが多い. その意味で自然界の中に具体的な実体をもっており, 自然現象の解明にも大きな役割を果たすものである.

その意味から, 数学が自然科学の中で確固たる地位を占めて, 科学の諸分野との密接な連携を保ちつつ, 時にはその中で中心的な役割を果たしながら, 他分野と歩調をあわせて, 大いに発展することが期待されていることはいうまでもない. それは勿論役立つ数学を強調しようとする狭い考えからではないし, また我々は数学を純粋数学と応用数学とに分類する気持も毛頭持ち合わせてはいない. 社会の中に適切な座り場を得て相応な働きをすること, それが数学に対してこれまで永いあいだ培われてきた立場のように思われる.

古典解析とどこが違うか?

一方で, 古典解析の中には確率解析に対する温故知新の教訓が潜んでいる. 勿論, ギャンブルの故事を確率論の歴史と考えるような立場での確率論や確率解析ではない. 我々が論じたい確率解析は関数空間の上に展開される無限次元解析を一つの手段とするものである.

確率過程論の内容を見てもわかるように, そこでは見本関数からなる関数空間において解析を行うという理解の上でみる古典解析との類似や, 毎時刻に分布を持つ偶然量が出現するが故におこる無限次元の空間の上の解析学という二つの意味があり, どちらも, それぞれの基本的性質と背景を持っている. このように, 我々は近代確率解析を発展させる上で古典関数解析から学ぶところが少なくない. 新旧の解析は違うどころか, 古典解析が一つの柱になっているといった方がよいと思う.

ここで述べる内容

このノートでは, これらのことを意識しつつ, まず第一に伝統的な確率解析の現代的発展としてのホワイトノイズ解析の概要を述べる. その後の成果を含める

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

とその内容は膨大なものとなり詳しく解説することは不可能であるが, せめて当面はこの解析への入門と若干の展望および情報理論への一つの展開を試みてみることで満足することにする.

入門のためとは言え, 実は次の三つのことがこのノートを起稿しようと思い立ったアイデイアである.

1. ホワイトノイズ解析は, ゆらぐ現象の数学的取り扱いに基本的な手段を提供してきた. そして無限次元解析の典型として大きく成長しその内容も豊富になってきた. それに呼応して, 確率論以外の諸分野 (量子力学や分子生物学また宇宙科学など) からの研究課題の提供が豊富になってきた. それらの話題や成果にたいしてこれまでは, ややもすれば ad hoc 的に出発点を改変したり, 対象が広がれば定義を一般化したりして, 理論の展開に努めてきたのが実状であった. 現時点においては, 新しく発展してきたホワイトノイズ解析の内容が, その所を得て, 適切に記述され, そして今後の議論がスムースに進展するように設定を新たにする時であると考える. それをここで実現したい. 結果として, この方面に興味を持たれる初心者にもとりつき易いものとなるであろう.

2. 今回新しく提案したい主要な内容は確率場の変分問題である. ここでも古典関数解析における変分法を視野に入れながらこの問題を我々の解析の中に取り込みたい. そのための一つの方法を提案したい. このような内容が将来の実り豊かな研究分野となることは疑の無いところである. また将来に対するいくらかの展望も試みたい. 変分が極めて有効なランダム-システムの解明方法であることは第三章で述べる.

3. 第三の目的は情報理論との融合であり, その方向への新しい展開である. Input-output スタイルの通信理論が確率情報の問題として扱われることは Shannon 以来よく知られたことである. この線に沿っての展開の他に, 例えば input が未知で何らかの channel を通過して手元に到達する信号には, 新しいモデリングの問題がおこるし, 多 (無限) channel の取り扱いには新しい工夫も必要となる.

可能な限り input のありかたを限定し未知の非線形な回路を見定めるために

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

は, そこに新しい解析の手法を模索しなければならなあい. そのための種々の試みがなされている.

例として, 素朴な表現が許されるならば次のような図式で説明されよう.

工学的な情報伝達機構がホワイトノイズ-input を許すとすれば次のような図式となる.

$$\begin{array}{c}\text{input} \rightarrow \text{channel} \rightarrow \text{output}\\ \uparrow \\ \text{noise}\end{array}$$

Fig.0.1

もし input が既知であるか, あるいは与えることができて channel のメカニズムのみが未知のときは, Wiener 展開の方法で, 同じホワイトノイズの input を利用して, いわゆる black box の同定問題を考えることができる ([18] Chapt.5 参照).

しかし, input も未知で, 観測値のみが得られた場合, そして情報源がランダム (多分ホワイトノイズであろう) であると仮定するならば, すなわち自然情報を情報源とするような場合では一般に

$$? \text{ input} \rightarrow \text{channel (nonlinear)} \rightarrow \text{observed data}$$

Fig.0.2

のような図式になる. この channel を同定したいならば, ランダムな input のあらゆる可能な非線型汎関数を取り上げ, それらの時間 · 空間的な推移もあわせて確率分布を調べ, そして観測値と比較してみるのが 一つの方法であろう. 我々の解析はそのための手段を与えている. それは医師による患者の診断にも例えられよう. 症状を聞いて, ありうる原因を絞り込んでいくのに似ている. 応用例として

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

は, ゆらぐ情報を受けて行動する微生物の運動の説明, 宇宙からのメッセージを受信してその原因となる情報源を解読することなどである.

[注意] このノートはテキストでもなく, 単なる解説書でもない. 研究者のための資料に, あるいはこの方面の研究者を志す初心者の方々のための学習の参考になればと思って書き下したものである. 記述の中には, 数学における通常の定理-証明形式のものの他に, 理論の背景となった事柄の説明やアイディアの起こり等の解説を併記して, 今後の発展に対する筆者の予想と願望などをも含めて述べたところが多い. 意のあるところを汲んで頂ければ幸いである.

思い立ってホワイトノイズ解析の理論を書物としてまとめるために書き始め, ようやく脱稿にこぎつけてから, 振りかえってみると意を尽くさなかった憾みが残る. 一方で, 内容を整理し, 文章を推敲する中に, この解析の持つ本質的な美しさに先導されて, 遅筆な筆者もつい励まされてペンを走らせる (ワープロを叩く) ことができたと思う. 今後の極まりない発展とともに, より一層 beautiful な理論になることを期待して, 今回は, ひとまずペンをおくことにする.

我々の標語は

Let us use White Noise.

である.

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

§0. はじめに

0.1. ここで 最初に取り上げたいのは, ゆらぎという概念である. "ゆらぎ" といえば, 人は偶然現象とか, デタラメな事象とか, あるいは不確実な変動などを想像するであろう. 何といっても決定論的なものとは程遠いものと考えられる. それが最も厳密さの要求される数学の対象となろうとは, 昔なら誰が想像することができたでろうか? ところが, 実際まさにそのとおり数学の対象になったのである. 数学のなかでも確率論や関数解析学の中に確固たる地位を得ていると言ったほうがよかろう. ここでは, その事情を "ゆらぎ"の解析という立場から説明していきたい.

ところで, ゆらぐ現象 は生物の反応や行動の中に, また気象の変化の中とか, いろいろな物理現象の背後に, その他自然界のいたる処で見いだされる. それどころか, 多かれ少なかれ, 何らかのゆらぎを伴わない自然現象を見つけることの方が難しいと言っても言い過ぎではない. ゆらぎがあるが故に生物的な現象になると言えるものも多い.

例えば, 分子レベルで微生物の機能やその行動を説明しようとしたとき, 背後にあるものとして, ゆらぎは基本的である. 環境のゆらぎもあれば, 生物自身のもつ内部的なゆらぎもあろう. 古典力学的な解釈だけでは到底説明できるものではない. 力学といえば, 量子の世界に入れば, その特徴の一つである不確定性は避けては通れまい. そこに非可換な世界が登場する. また, 古典物理学の中にも古くから扱われてきた偶然現象もたくさん見出すことができる. 刻々と変わっていくお天気とか, 太陽の黒点の数の消長, あるいは流体の中に見られる拡散現象など数限りない.

そのような偶然現象を制御したり, またその未来を予測したりすることは我々の夢であったし, それが実現に人々は努力してきたのである. すなわち, ゆらぐ現象を支配する偶然が従っている法則をみつけて, それを数学の対象としてきたのは他ならぬ確率論である. その中で解析的手法にウエイトを置き, 新たな手法を開拓して我々の夢を実現するために第一歩を踏み出そうとしたことはホワイトノ

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

イズ解析を創始しようとした重要な一つの動機であった.

いうまでもなく, 偶然現象の数学的モデルは確率論の研究対象である. 特に時間とともに変化する現象である確率過程 (時系列ともいう) の非線形な取り扱いにおいては, そこで要求される数理的手法としてこの解析が開発されたということもできる. 特にホワイトノイズを与えられた確率過程の innovation (新生過程 §1.4. 参照) として取り出し, もとの確率過程を innovation の汎関数として表すときの解析が, そこでは基本的な役割を演じている. このようにホワイトノイズ解析は確率論の中とは言いながら, 非線形問題の扱いで主役を演ずる変分法とか力学との交流など, 少しばかり (案外多いのかもしれない) はみ出したところにもその特色を見出すことができるのである.

さらに, ホワイトノイズ解析には近代解析学の重要な分野である無限次元解析学の一つの典型としての側面がある. もしガウス型のホワイトノイズに限定すれば, 無限次元回転群から生まれる無限次元の調和解析という著しい性格も持っている. そこにおいては, フーリエ解析あるいは一般に (古典) 調和解析との著しい類似を見ることができるし, またそこから一歩進んだ本質的な発展の方向があることに気づくであろう. ラプラシアンにこだわるのもその期待からである.

0.2. もう一つ大事なことは, まえがきでも強調したように我々の解析を通じて古典関数解析の重要性に対する見直しができたこと, したがって多くのアイディアを学ぶことができたことである. 前世紀の終わり頃から今世紀の半ばにかけて, 主としてヨーロッパで発展した重厚な解析学は, 現在の関数解析学の中によみがえり, 再び主役に生まれ変わろうとしている. すなわち, 今も古典解析学から学ぶところの大きさに驚くのである. 特に本稿でしばしば引用する V. Volterra や P. Lévy の関数解析を挙げることができる. さらに我々の解析が, 古典関数解析を rephrase したり, 他の分野の課題と取り組むことによって重要な概念に導かれたり, また新たなアイディアが得られることも少なくない. よく知られているように, 無限次元ベクトル空間にはルベーグ式の測度が存在しないこと, それにもかかわらずその空間の上で微積分を行わなければならないことの必要性, また

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

その具現化など, さらには力学との共存についてである. 驚くことに, 古典解析学の中に無限次元回転群の萌芽さえみることができるのである (Volterra, Lévy).

このような事実をふまえた結果は N. Wiener の古い仕事の中にも見ることができる. それらの成果は我々にとってはまさにホワイトノイズ解析への刺激剤ととらえることができる. こうして我々のホワイトノイズ解析の生い立ちは, 古典関数解析の流れを汲むとともに, 他の諸分野との接触の中にあったことが知られる.

上に述べたことをもう少し詳しく N. Wiener の仕事の中に見てみよう. 彼が 1923 年の論文 Differential space その他で, 今日でいう Wiener 空間を扱っているが, そこでは P. Lévy の 1922 年の書物で述べられた関数解析, すなわち $L^2[0,1]$ 上での解析特に無限次元球面上の解析の話題について討論したことを述べており, これから自然にブラウン運動 (ホワイトノイズといった方が適切かもしれない) に移行している . この例からも古典関数解析の思想が自然に確率解析にうけつがれている様子が知られる. また Wiener はこのすぐ後に, 1924 年の論文 The average value of a functional において汎関数の平均 (average) を論じているが当然そこにおける解析にはガウス測度, 実は Wiener measure あるいは本質的にはそれと同じことだが, white noise measure が登場していることを認識したい. そこではやはり R. Gâteaux や P. Lévy の結果が参照されていて, この時代においてすでに確率解析への息吹きが見られるのは興味深いことである.

少し後になって, Wiener は 1948 年に彼の創始した Cybernetics の理論に至る (文献 [61], [62] 参照). そこでは工学, 物理学, 生理学など多方面におけるランダム現象, あるいは通信などランダム系と見なされる事象から数学の課題を探索している. このことは我々に Wiener 空間を用いた数理科学の内容を示しているばかりではなく, 科学へのアプローチについての研究者の態度を教えているように思われる. その他, 応用についていえば, 前にも述べたように, 物理学特に量子力学は当然であるが, 最近は分子生物学の種々の方面で役立っていて, ゆらぎを伴う現象の解析には強力な手段となっている. そして, そこに生ずる課題は我々の解析に常に研究課題を提供しているのである.

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

その後も続いて P. Lévy, N. Wiener や I.M. Gel'fand また K. Ito 達の貢献により, この分野が数学として大きく発展する基礎が培われたのである. 我々は現代的な確率解析や無限次元解析の理論の源流をそこに位置づけることができるのである. そして, この分野が, 確率論, 解析学そしてその応用において, 実り多い方向であることは間違いないところである.

0.3. ここで, 我々の解析の興味深い, また意外にも思われる特色を述べておきたい. それは, 本稿ではまだ定義をしていないけれども, それから扱うホワイトノイズは実はごく身近に実在するものだということである. 実際それはブラウン運動から得られる. 1827 年にイギリスの植物学者ロバート-ブラウンが発見した水中に浮かぶ花粉の微粒子の不規則運動がブラウン運動であり, そのスピードが実はホワイトノイズのモデルである.

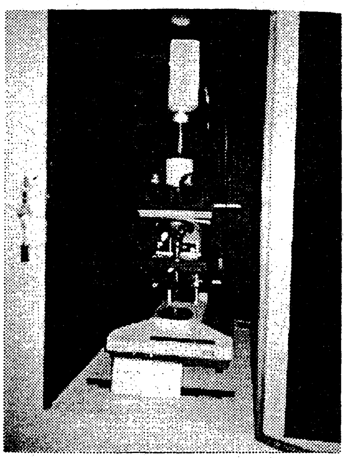
では何故ブラウン運動あるいはホワイトノイズが上記のような我々の目的を達成させる概念になっているのだろうか? 以下その直観的な説明を簡単に述べよう.

・ブラウン運動の数学的な (厳密な) 定義はあとまわしにして, モデルとなった水中の微粒子の素朴な行動を見てみよう. 多数の水の分子が微粒子に次々にはげしく衝突する. その統計の一例を示せば次のようである:

衝突回数 10^{20} 回/秒

水の分子 $10^{-8} \sim 10^{-7}$ cm

微粒子 直径約 10^{-4} cm.



科学館（名古屋市）で見るブラウン運動

Fig 0.3

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

この数値をみれば, 勿論この運動を決定論的なものとみなすことはできまい. 粒子の密度に例えられる確率の概念を導入して, はじめて記述できる現象である. それは典型的な偶然現象である. これを実感するには, この運動を顕微鏡を覗いてみるのが一番である. 例えば名古屋の科学館へ行けば, 液体の中を泳ぐ酸化チタンの粉末を 40 倍程度のありふれた顕微鏡で見せてもらえる.

ある時間区間の内での微粒子の "位置の変化" のみに着目すれば, その微粒子がはじめに存在していた位置やそれ以前の履歴とは独立であると考えてよい. このとき時間区間は微小間隔 (無限小区間) としてもよい. すなわち, 毎瞬間での微粒子の位置変化を見るとき, その瞬間以前のこととは独立である. 言い替えると, 毎瞬間に新しい独立な量が加わったものとしての位置の変化が現れる. ブラウン運動に対するこのような観点は重要で, 後に述べる確率過程の定義の仕方とか 0.1 節でも触れた innovation の概念に直接つながるものであることを注意する.

多数の粒子があるとして, それらの推移の統計的な分布はどうであろうか? 時間的にも空間的にもある種の連続性と一様性を仮定すれば, 問題の分布は時間と空間の関数であり, それは熱方程式を満たすことが理論的に示される. 特に各時点での分布はガウス分布である (A. Einstein, 1905). それは我々の観測によっても確かめられるところである. 微粒子の位置に着目したときがブラウン運動で, 瞬間的な推移すなわちスピードがホワイトノイズである.

ブラウン運動を $B(t)$ と書き, ホワイトノイズを $\dot{B}(t)$ と書くことが多い. ここで t は時刻を表す. 見かけ上はホワイトノイズは連続無限個の (infinitesimal な) 独立確率変数の列とみなされる.

0.4. 上で直観的に導入したホワイトノイズ $\dot{B}(t)$ は毎時間独立な偶然量を提供しているのでその量は "素子" とみなすことができる. だからそれを**確率素子** (John R. Klauder 教授との会話による. 英語では idealized elementary random variable と呼ぶことにしていたが, elementary は誤解を招く怖れがあるので, R. Hudson 教授のすすめで elemental に変えた. i.e.r.v. と略記することがある.) と言ってよ

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

かろう. そして, それは偶然量としての基本的な構造を内蔵しているものである. 要素還元主義を振りかざすまでもなく, この素子を基礎となる変数にとったときは, その関数を扱い, それら関数についての微積分の理論を構成するのは解析学の常道であろう. もっと大きく, 科学に関する大昔のギリシャの哲人の思想からすれば, 我々の立場は **Atomism** 或いは **Reductionism** に基づくものと言えるかもしれない. これを標語的に言えば

$$\boxed{\text{Reduction}} \longrightarrow \boxed{\text{Synthesis}} \longrightarrow \boxed{\text{Analysis}}$$

となる. Reduction にもどり, 各構成要素である elemental なものは $\dot{B}(t)$ のときのように infinitesimal なものでも, また普通の確率変数でも, もしそれらが基になるものなら**素子**と呼んで構わない. ただし, 各素子が微小区間 dt に対応していると理解することが大切である. ホワイトノイズはガウス型であり, また時間の推移に関して定常であるため最も基本的な (その意味はいろいろな立場から説明できるが) 素子である. これを基にして, 次のようなことを我々の研究目標にしたい.

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

「具体的な目標」

数学の対象となる具体的な内容は以下のようである.

1. 素子であるホワイトノイズ $\dot{B}(t)$ の汎関数として表すことができる偶然量のクラスの決定.

2. ホワイトノイズをそのような汎関数の変数系とみて, その変数系を基にして出発した解析, すなわち, ランダム量の関数を扱う微積分学の体系がホワイトノイズ解析であるが, 最近の目覚しい発展と新しい研究課題を得たことにより, その設定を一新すること.

3. その解析により, 数学における位置は自然に明らかにされるが, 同時に "ゆらぐ偶然現象" の解明にしたがって自然に求められる研究課題の探索および提言をすること.

4. さらに, ランダムな複雑系へのアプローチがある. 最も基本となる複雑系 (ブラウン運動, あるいはホワイトノイズ) を基礎にして, 一般のゆらぐ複雑系を表現し, その性質を解明する.

5. 量子力学, 分子生物学, 数理情報などとの interplay, そこから生まれる課題の発見など.

本論において, これらの目的に対する数学的なアプローチを試みる. その方針は, まず関数解析学としての体系を整えてその内容を豊富にすると同時に, ゆらぐ諸現象の中からホワイトノイズ解析の手法により解析できる課題を見い出し, 必要に応じて随所に新しい数学の内容も開発して, その課題の解決に取り組んでいくということである.

ここで, 我々のアプローチのポイント (実は長所であると強調したいところであるが) を述べておこう.

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

「特徴」

(1) 確率素子の考えの導入により解析学としての我々の理論の立場が明確になった. ランダム関数を扱うのに, その確率分布やモーメントだけでなく, それらを基本的なランダム量の関数として表現したい. そのための基本的なものが素子である.

(2) 真に無限次元の解析であり, 通常の位相のもとで有限次元的なものでは近似できない概念と手法とが重要な役割を果している.

(3) 素子を変数とする汎関数の解析性, またこの変数による微分や積分の演算等が定義され, さらにはラプラシアン等が導入できて, 確率解析の一つの体系が構築される.

(4) この体系の中で, 多様体をパラメータに持つホワイトノイズ汎関数の系, すなわち確率場について, 変分法による取扱いが有効となり, 確率場の従属性に関するより深く詳しい性質の解明が可能になった. そして, 自然に確率変分方程式の理論をも包括するような, 一層広いホワイトノイズ解析の理論体系を再構築することが必要となった.

(5) ホワイトノイズを基礎に置くことにより, その確率分布を見るとき, 自然に無限次元回転群が導入され, ここで提唱する解析が (無限次元) 調和解析としての側面を持つことになった. そのことにより, 本質的に無限次元であることの直観的でない, 厳密な表現ができることになった.

(6) 古典関数解析における諸結果 (特に J. Hadamard, V. Volterra, P. Lévy 達によるもの) のいくらかを現代化して我々の解析の中に取り込むことができた. そして, それらはホワイトノイズ解析の中で重要な役割を果たしている.

(7) 量子力学への応用が考え易くなり, さらに新しい展開も生まれてきた. 例えば量子ホワイトノイズ解析への移行, Feynman の path integral の新しい設定 (これは場の量子論にも発展する可能性をもっている), 不可逆過程の扱い, などである. さらに発展して, 量子計算の諸問題や量子情報理論への接近はホットな話題である.

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

(8) 量子ダイナミックスは従来より, また分子生物学は新たに参加した関連分野であるが, それらが提起するいくつかの課題へのアプローチが容易となった. したがって, そこからの研究課題も多くなり, ホワイトノイズ解析との間の本質的で, かつ美しい interplay が見られるようになった.
等である.

0.5. 以下本稿では, ホワイトノイズの超汎関数の概念が導入されて, ホワイトノイズ解析にとって飛躍の年となった1975年を出発点として, それ以後におけるこの解析の発展について, その概略を述べ, 上に強調した特徴に配慮した上で, 意義深いと思われる今後の研究課題についていくつかの提言を試みたい.

特に, 興味深そうな今後の研究課題としていうならば, 当然上記の (4)–(8) の線に沿った無限次元解析学としての確率解析についての諸問題があり, また近年認識を新たにすることができた場の量子論や量子情報理論さらには分子生物学などへの応用などである. 実は応用というよりは, それらの諸分野から生成される新分野というべきものであろう. それこそ我々の目指すところである.

研究の方法としては, 上の (6), (7) による他, 無限次元回転群を利用することにより, そこから生ずる (5) の調和解析としての理論体系を整えることがある. 同時にそれは我々に重要な無限次元解析としての視点を与えてくれるものである.

そのほか, 課題に応じて, 特に (8) からの問題提起に応じて研究手法を開拓していくことも重要である. その手法は数学の中にとどまらないことは当然である. 実り多き分野として, 物理学や分子生物学, さらに最近の宇宙科学にも注目すべきである.

ホワイトノイズ解析として論じようとする本稿の内容の基本的な部分はこれまで述べてきたように無限次元解析, 特に無限次元空間における調和解析の一環として位置づけられるべきものであり, いわゆる狭義の確率解析とは些か指向を異にしているものであることをお断りしておきたい.

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

第一章 基礎概念

§1. ブラウン運動とホワイトノイズ

我々の解析の基礎的な諸事実が容易に理解され受け入れられるためには, いくらかの初等確率論における基礎概念を説明しておく必要がある. この趣旨にそった解説を駆け足で行いたい. 本節では基礎的事項や主張は明確に述べるが, それらの証明は省略するか, あるいは簡略にしたり, または引用にとどめたりすることが多いので御了解いただきたい.

なお, ここでは本論に対する準備として必要であり, かつ一応体系が確立されている理論をまとめておくのが目的である. ただし, 従来の記述とくらべて, いくらか視点を新しくしたり, 提言を加えたり, また認識を新たにして述べているところも多い.

1.1. ブラウン運動, 加法過程, 確率過程

ブラウン運動は, 前に述べたように, 水中の微粒子の不規則な運動がはじめのモデルであった. 簡単のため, その運動の 1 次元への射影を考えよう. それを数学的に扱うための古典的な設定は次のようにすればよい.

定義. 確率空間 (Ω, P) 上の確率変数の系 $\{B(t) = B(t,\omega); t \geq 0\}$, ($\omega$ は省略することが多い) が次の条件を満たすとき, それをブラウン運動という.

1. それはガウス系である: すなわち, 任意の $t_1, t_2, \ldots, t_n$ について, 確率ベクトル $(B(t_1), B(t_2), \ldots, B(t_n))$ は多次元ガウス分布に従う,
2. $B(t) - B(s)$ は平均 0, 分散 $|t-s|$ である,
3. $B(0) = 0$.

ここで t は時刻を表すパラメータと理解し, t の動きに応じた $B(t)$ の行動に関する性質を調べよう. それを表すのに, 直観的な理解を助けるために時間や空間に関する日常語とともに表現することが多い.

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

上の1. 2. 3. の仮定のもとで, ほとんどすべての ω について, 見本関数 $B(t,\omega)$ は t の連続関数とみなすことができる. また $t \to \infty$ のとき絶対値において $\sqrt{t \log\log t}$ のオーダーであることが知られている. さらに $\{B(t)\}$ と $\{tB(1/t)\}$ とが同じ分布に従うこと, すなわち後者もまたブラウン運動であることが共分散を計算すればすぐにわかる. このことから, $B(t)$ の局所的性質が出る. $t=0$ の近くで $B(t)$ の見本関数は $\sqrt{t\log\log\frac{1}{t}}$ のオーダーである. 故に $t=0$ で微分不可能である. 微分できないことは増分の時間的一様性から任意の t においてもいえることである.

また, 仮定から $t>s$ のとき, 差 $B(t)-B(s)$ は系 $\{B(u), u \le s\}$ と独立になることがすぐに示される. すなわちブラウン運動 $B(t)$ は独立増分を持つ確率過程である. このような性質をもつ確率過程は**加法過程**と呼ばれる. この性質からブラウン運動はマルコフ過程であることがわかる. すなわち, $B(t)$ について, 時刻 s 以前における値が知られているとき, s 以後の時刻 t における $B(t)$ の条件つき確率分布は $B(s)$ のみに依存する. 式を用いて表せば

"任意に固定した $t>s$ と任意の x について

$$P(B(t) \le x/B(u), u \le s) = P(B(t) \le x/B(s))$$

となる".

加法過程のもう一つの重要な例はポワソン過程である. これを $Y(t,\omega)$ と書く. その分布は, 任意の正数 t と h に対して

$$P(Y(t+h)-Y(t)=k) = \frac{(\lambda h)^k}{k!}\exp[-\lambda h],$$

$$k=0,1,2,\ldots,\lambda>0,$$

である. この確率が t に無関係であることから, ポワソン過程は定常な独立増分を持つことがわかる.

一般の加法過程にもどり, それを $X(t), t \ge 0,$ と書く. もしそれが二条件

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

i) 確率連続である: 任意の s に対して

$$\lim_{t \to s} P(|X(t) - X(s)| > \varepsilon) = 0.$$

ii) 殆どすべての見本関数 $X(t,\omega)$ は第一種の不連続性のみをもつ. (よって右連続と仮定してよい.)
を満たすとき, それを**レビー過程**という.

レビー過程に対しては次のような Lévy-Ito の分解がよく知られている.

定理 1. $X(t,\omega)$, $t \geq 0$, を定常増分をもつレビー過程とするとき, それは

$$X(t,\omega) = m \cdot t + \sigma B(t,\omega) + \int \left(uY_{du}(t,\omega) - \frac{tu}{1+u^2} dn(u) \right),$$

ただし

$$\int \frac{u^2}{1+u^2}\, dn(u) < \infty,$$

と表される. ここに $\{Y_{du}(t,\omega)\}$ は独立なポワソン過程の系で du について測度になっている. (上の積分は形式的表現で詳しい定式化は K.Ito による. また [31] 7 章参照.)

すなわち, レビー過程はブラウン運動とジャンプの量が u であるポワソン過程の和とに分解されるのである.

この定理から, 加法過程は, したがって独立増分をもつ確率過程は, ブラウン運動とポワソン過程が基本になっていることがわかる.

では一般の確率過程 (stochastic process) はどう定義すれば (理解すれば) よいのだろうか? 本来の考えにもどってみよう.

まず Jacob Bernoulli の Ars Conjectandi [5] を挙げなければならない. 文字どおり art of conjecturing とでもいおうか. この書物の第 4 部の 2 章で著者はこの言葉を stochastice (ギリシャ語) と訳している. 英語ならば stochastics というところであろう. stochastic process というとき, 我々は Bernoulli の conjecturing

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

の思想に思いを致さなければなるまい. J. Bernoulli 以前に stochastic という言葉を使った人を寡聞にして筆者は知らない.

さて conjecturing を意訳すれば, 偶然現象の過去を知って未来を予測するのだが, いつの時点でも不確実な量すなわち偶然量が関与する, そういうシステムが stochastic process であろう. この思想は何人かの碩学によって直接・間接に継承されてきたようだが, P. Lévy は 1948 年の著書 [32] 第 2 章で確率過程という言葉の意味を明確にしている. すなわち, 毎瞬間に偶然量が関与する確率関数としている. この言葉では意を尽くさないが, いろいろと例をあげているのでいくらか真意を察することができる. 第 2 章全体が確率過程の概念の説明にあてられていることから, 著者の姿勢が覗われる. Lévy は 1953 年になって stochastic infinitesimal equation を提唱し (文献 [35]), 制限つきであるにもせよ, 幾分具体的な数学的表現をあてている. これについてはすぐ後の小節 1.4. で説明する.

1.2. ブラウン運動の特性

前小節で独立増分をもつ過程の基本的なものが二種類あることがわかった. ここではさらにブラウン運動がより重要であることを見る.

その理由をあげてみよう. ブラウン運動は

1) 線形構造を持つ. すなわちそれがガウス過程であるため, 平均と共分散関数のみでその構造が完全に決定される. ブラウン運動の場合平均は恒等的に 0, 共分散関数は $\min(t,s)$ である.

2) 見本関数 ω を固定して t の関数とみる) は一様にヘルダー連続性をもつ.

例えば, $0 \le t,\ s \le 1$, のとき, ほとんどすべての ω に対して

$$|B(t,\omega) - B(s,\omega)| \le \sqrt{c|t-s|\log\left(\frac{1}{|t-s|}\right)}, \quad c > 2.$$

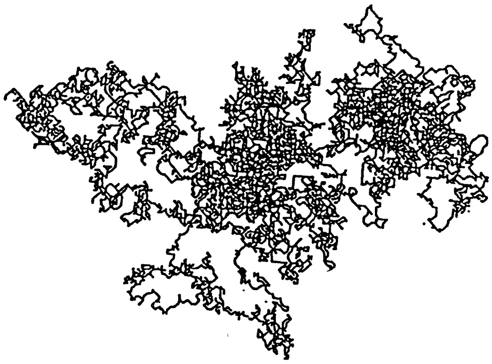
(より詳しい評価が知られている. T. Sirao 他による.)

3) N 次元ブラウン運動の殆どすべての見本関数について, 任意の時間区間での

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

グラフを見ると, 見本関数は幾何学的には 1 次元の図形でありながら, なるべく広い領域を支配していることが観察される. これについては, いろいろな角度から説明が試みられている (P. Lévy 他).

$N=2$



(竹中茂夫氏による)

Fig.1.1

このような性質は或る意味での最適性を表していると考えられる.

4) 殆どすべての見本関数の 2 次変分は有限である.

また

$$\Phi(\rho)=\rho^2\log\log(\frac{1}{\rho})$$

を用いて Hausdorff 次元に類似の測度を計算することができる (P. Lévy[34]).

5) 分散一定の条件の下では, ガウス型であるためブラウン運動は最大のエントロピーをもつ. さらに独立増分をもつことから, 情報理論的にみて最適なものといえる.

6) 1 次元ブラウン運動は次の図に示すような interpolation によっても構成できる. 図の点線は第 3 近似を表す.

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

$X_1 : N(0,1)$
$X_2 : N(0,\frac{1}{4})$
$X_3 : N(0,\frac{1}{8})$
$\cdots$

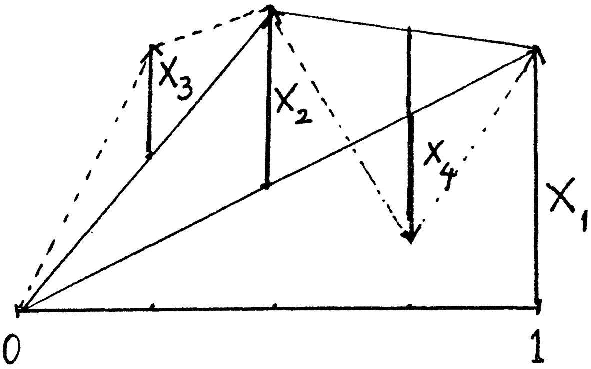


Fig 1.2

一般に第 n 近似 $B_n(t)$ があって, t と $t+2^{-n+1}=t'$ の値が決まっているとき $B_{n+1}(\frac{t+t'}{2})$ はふたつの独立変数の和 $\frac{1}{2}\{B_n(t)+B_n(t')\}+2^{-(n+1)/2}X$. ここで X は $N(0,1)$ 変数である. この $B_n(t)$ の極限がブラウン運動になるのである.

上記の interpolation による構成が意味を持つのは, 時間区間 $[0,1]$ の各場所で逐次'一様に' 近似の程度を上げていくことになるからである. 関数空間でみれば各座標が同様かつ一様に分裂して全体の次元を増していくのである. 極限は無限次元の場を与えるが, どの座標も平等に扱われていることが本質的である. これが, ひいては 真に無限次元的な Lévy ラプラシアンの定義につながることになるのである.

7) 次はパラメータ t, すなわち時間の動きについての考察である. 毎時刻に同等な割合でランダムネスが増加する. その際, 増加のありかたが一様であるとともに単一である. すなわち重複度が 1 である. これは $B(t)$ 達の張る空間が t の shift, dilation, reflection から生成される群の既約表現を与えていることと理解してよかろう. t の動きに応じた偶然量の変化の様子が最も標準的であるというブラウ

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

ン運動の性質から, それはランダムな複雑系を解析するときの基準量として採用される.

例えば, ガウス過程の表現, 複雑さの程度を量的に表すときの単位, 情報量の基準単位など, 多くの場合に主役として登場する. このような視点からの研究は, 今後整理され開拓されることであろう.

これまで述べてきたようなブラウン運動の性質は, 当然のことながら, その時間微分であるホワイトノイズにもそれに応じた性質として遺伝する. 特に optimality については注意したい. 我々の解析の応用においてその効果を発揮する.

1.3. 確率素子としてのホワイトノイズ

ブラウン運動 $B(t,\omega)$ の時間微分 $\dot{B}(t,\omega) = \frac{dB(t,\omega)}{dt}$ がホワイトノイズである. $B(t,\omega)$ は ω を固定して t の関数とみたとき微分不可能な関数であるため, $\dot{B}(t,\omega)$ は超関数としてとらえることにする. そのような理解のもとで, ブラウン運動が独立増分をもつことから $\{\dot{B}(t); t \geq 0\}$ は形式的にいって独立確率変数系とみなすことができる. この性質を "各点独立" という. 独立な変数系だから $t < 0$ のときの系も同様に構成して, それを付け加えることによりパラメータ t が全直線 $(-\infty, \infty)$ を動くときの独立確率変数系

$$\dot{B} = \{\dot{B}(t), -\infty < t < \infty\}$$

が得られる. 以後このような系 $\dot{B}$ を扱う. 直観的な意味でこの系がホワイトノイズである. また, 見本関数が t の超関数であるにもかかわらず t を指定したかのような記号 $\dot{B}(t)$ を用いるが, これは直観的考察を助けるために用いるものであって, 勿論厳密な定義が必要である. それは後に述べる.

1.4. Innovation, infinitesimal equation

ここで前節の 0.4 で紹介した確率素子 (idealized elemental random variables, しばしば i.e.r.v. と略記する) の概念及び上にでてきた独立変数系について更に説

明を加えたい. これを導入する理由は, それ自体が最も基本的な確率変数の系であることは説明を要しないが, さらにそれが重要なクラスの確率過程の innovation (新生過程) としてとらえられるからである. 後者の説明には Lévy の確率過程の定義の具体的な方法として提唱された stochastic infinitesimal equation について説明しなければならない. 確率過程 $X(t)$ の微小区間 $[t, t+dt)$ における変分を次の形式的な式で表現しよう.

$$\delta X(t) = \Phi(X(s); s \le t, Y(t), t, dt).$$

ここで Φ はランダムでない関数であり, $Y(t)$ が innovation をあらわす. それは考える微小区間 $[t, t+dt)$ において $X(t)$ が新たに獲得した (したがって t 以前の量とは独立な) 情報を過不足なく完全に記述しているものと理解される. もし上の式のような表現が得られたなら, 偶然量の系 $\{Y(t)\}$ とランダムでない関数 Φ によって $\{X(t)\}$ の確率論的な構造がきまると理解するのである.

さらに $X(t)$ が $\{Y(s), s \le t\}$ と初期値 X との関数によって

$$X(t) = \Psi(Y(s), s \le t, X, t)$$

のように表されるならば $X(t)$ の解析を含め, その研究に極めて有効であろう. このような構成的な立場からの確率過程の研究は一つの重要な方向である. 勿論これらの表現は形式的なものであるが, それら直観的な表現は我々に多くの指針を与えてくれる.

このようなアイディアについては, より一般のランダムな系を考えるにあたって, 再び第三章で触れるであろう.

またこれも形式的な主張となるが, $Y(t)$ を標準化しておき, t の進行につれて微小ランダム要素 $Y(t)\sqrt{dt}$ を逐次加えていった (積分した) 確率過程 (それは加法過程) は $\{X(t)\}$ と同じ情報を持つものと理解される. こうして, 従属性が最も単純であり, また基本的なものである加法過程を基礎において, それによって表現される確率過程の解析的取り扱いがはじまる. 時間的に一様な加法過程を, 形

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

式的に時間微分したものは各時点独立な定常超過程であり, ガウス型のものが最も重要で, それがここにいうホワイトノイズに他ならない. 上の場合, 各 t に対して $Y(t)$ が対応するのではなくて,

1. $Y(t)$ は微小時間間隔 dt 毎に与えられる

2. それらは独立である

ものと理解しなければならない. この事実はいろいろなところで確認すべき重要な事柄であり, このような系が登場するときは, ここで述べた趣旨のもとで議論や計算を進めなければならない. このような理解は第三章における確率場の取り扱いにおいても必要となる.

1.5. ホワイトノイズの定義

ここでまた, もとのブラウン運動に戻る. 見本関数毎に時間微分により超関数 $\dot{B}(t,\omega)$ が得られるので, テスト関数 ξ をとり (以下話を具体的にするため ξ は無限回微分可能で $|t| \to \infty$ のとき急減少する関数, すなわち シュワルツ空間 S の元としよう),

$$
\begin{aligned}
\dot{B}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \dot{B}(t,\omega)\xi(t)\,dt = <\dot{B},\xi> \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} B(t,\omega)\xi'(t)\,dt
\end{aligned}
$$

を考える. 上の最後の式は通常の積分であり, それによって他の式が定義される. $\dot{B}(\xi)$ は確率変数としては平均 0, 分散 $\|\xi\|^2 = \int \xi(t)^2 dt$ のガウス分布に従うものであり, ω を固定すれば S の位相で連続な ξ の線形汎関数である.

上で得られた系 $\{\dot{B}(t)\}$ が独立変数系であることは,

“ξ と η の台が互いに素ならば, $\dot{B}(\xi)$ と $\dot{B}(\eta)$ とが独立である”

と説明される. 台が互いに素であるとは $\xi(t)\eta(t) = 0$ を意味する.

我々の場合, ガウス型であることを用いると, さらに強い主張

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

“ξ と η が直交する：$\int \xi(t)\eta(t)dt = 0$ ならば $\dot{B}(\xi)$ と $\dot{B}(\eta)$ は独立である”が成り立つ.

ブラウン運動の増分の分布の時間的一様性から h を任意に固定したとき, 二つの infinitesimal な確率変数の系

$$\{\dot{B}(t); -\infty < t < \infty\} \text{ と } \{\dot{B}(t+h); -\infty < t < \infty\}$$

とは同じ分布に従う (定常超過程である). この意味での時間の推移についての定常性と各時点独立な性質とを併せると $\{\dot{B}(t)\}$ を (標準的な) 確率変数の素子とするにふさわしいことがわかる. 好都合なことに, それはガウス系である. そして, 逐次この素子にウエイト dt をおいて, 直線的に集めたものが元のブラウン運動になっているのである.

なお, 定常性についての定義は後に与えるが, これも今は上のような直観的な意味で理解しておくことにする.

定義 系 $\dot{B} = \{\dot{B}(t)\}$ を**ホワイトノイズ** という.

次にホワイトノイズ $\dot{B} = \{\dot{B}(t)\}$ の確率分布について述べよう. $\dot{B}$ は連続無限個の infinitesimal な確率変数の系だから, 見かけ上は連続無限次元空間 R^R 全体に広がった分布になりそうだが, 実は殆どすべての ω について, 見本関数 $\dot{B}(t,\omega)$ が t の関数とみて階数1の超関数であることに注意すれば (ブラウン運動の見本関数の連続性からわかる), $\dot{B}$ の分布は R^R よりもずっと狭い空間である超関数空間, 例えば S' (シュワルツの超関数空間) のある部分集合の上の確率測度であることがわかる. S' の筒集合から生成される完全加法的な集合族を B と書こう. 測度空間 (S', B, μ) をホワイトノイズ の分布, 或いは混乱の怖れがないかぎり, 単に**ホワイトノイズ**と呼ぶことも多い.

上の μ が $\dot{B}$ の分布であるとすれば, $\dot{B}(\xi)$ がガウス分布 $N(0, \|\xi\|^2)$ に従うことに注意して

$$E\{\exp[i\dot{B}(\xi)]\} = \int_{S'} \exp[i\langle x, \xi\rangle] d\mu(x)$$

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

$$= \exp\left[-\frac{\|\xi\|^2}{2}\right],$$

ここで $\|\cdot\|$ は $L^2(R^1)$-ノルム, が得られる. これが μ の特性汎関数である.

上の第2の式をみると, 測度のフーリエ変換の形をしている. 有限次元ユークリッド空間においては測度とそのフーリエ変換である特性関数とが一対一に対応することは S. Bochner の定理としてよく知られている. 我々の場合, 無限次元であるため特性 (汎) 関数の定義されている空間と測度を支えている空間との間にはギャップができるのである.

手順としては, 特性汎関数から出発して, 測度空間 $(S', \mathbf{B}, \mu)$ を直接に構成するのが本来の方法であるが, 実際その議論は Minlos, Sazonov 等による. ここで $\mathbf{B}$ は上に定めた S' の筒集合から生成される完全加法的集合族である.

定義より測度 μ に関して S' の殆どすべての元 x は B の見本関数と考えられる. したがって, x の複素数値汎関数 $\varphi(x)$ (超関数 x の関数だから汎関数と呼ぶ. ただし前後の関係から敢えて関数と言うこともある) は確率素子 $\{\dot{B}(t); -\infty < t < \infty\}$ を変数系とする汎関数を空間 S' 上で実現したものである. そのような汎関数のクラスで今後の議論の対象となるものについては, 選択の方法はいろいろ考えられるが, 基準となるものは何といっても次の複素ヒルベルト空間である. すなわち

$$\begin{aligned}(L^2) &= L^2(S', \mu)\\ &= \left\{\varphi(x); \|\varphi\|^2 = \int_{S'} |\varphi(x)|^2 d\mu(x) < \infty\right\}\end{aligned}$$

である. (L^2) の元 $\varphi(x)$ は素子の汎関数であると同時に, また確率空間 (S', μ) 上の確率変数で分散が有限なものである. φ を**ホワイトノイズ汎関数**と呼ぶ.

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

1.6. 積分表現

ホワイトノイズ汎関数は超関数 x の非線形な汎関数で, 一般には見やすい形にはなっていない. そこでわかりやすい表現が求められる. そのため次のような T-変換と S-変換とが導入された.

1) T-変換
(L^2) の元 φ に対して

$$(T\varphi)(\xi) = \int_{S'} \exp[i{<}x, \xi{>}]\varphi(x)\, d\mu(x),\ \xi \in S,$$

とする. これはフーリエ変換の類似と考えられるが, 実は同じ様にはいかない. 用いる測度がルベーグ式のものではないことも一つの原因である.

いま, μ の特性汎関数 $C(\xi)$ により核関数 $C(\xi - \eta)$ を定義すると, それを再生核とする再生核ヒルベルト空間 $\mathbf{F}$ が存在する.

定理 1. φ と $T\varphi$ とを対応させることにより (L^2) と $\mathbf{F}$ とはヒルベルト空間として同型になる.

証明. F は $C(\cdot - \eta), \eta \in E,$ によって生成される. また $\mathbf{F}$ の内積は

$$(f(\cdot), C(\cdot - \eta)) = f(\eta)$$

をみたす. 特に, $\varphi(x)$ を指数関数 $\exp[i{<}x, \xi{>}]$ としたとき

$$(T\varphi)(\eta) = C(\xi - \eta)$$

であること, および指数全体の作る algebra が (L^2) で dense であることから, 定理で示す対応が bijective となり, 実際それは同型対応になることがわかる.

この定理によりホワイトノイズ汎関数が C^∞ 関数を変数とする汎関数で表現されることがわかり, 扱い易くなったといえる. T-変換の有効さは他にもあって我々の解析において重要な役割を果している.

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

2) S-変換

形式的にいって T-変換がフーリエ変換の類似なら, 以下において定義する S-変換はラプラス変換の類似といってよかろう. それは次のような変換である. φ を (L^2) 汎関数とする.

$$(S\varphi)(\xi) = C(\xi)\int_{S'} \exp[<x,\xi>]\varphi(x)\,d\mu(x)$$

により $S\varphi$ を定義する. 右辺は実は

$$\int_{S'} \varphi(x+\xi)\,d\mu(x)$$

に等しい. なお, この $(S\varphi)(\xi)$ は, しばしば $U(\xi)$ と書いて φ に対応する U-functional と呼ぶことが多い.

これ等による表現を積分表現と呼ぶ理由は次節で明らかになる.

1.7. Fock space

ホワイトノイズ汎関数の解析を系統的に進めるにあたって, 基礎となるものは前小節で述べた U-functional による表現と, もう一つは (L^2) の直和分解に関する次の基本定理である.

基本定理 ヒルベルト空間 (L^2) は次の直和分解を許す.

$$(L^2) = \bigoplus H_n.$$

ここで, H_n は $<x,\xi>, \xi \in S$, の n 次エルミート多項式から生成される部分空間で, それらは互いに直交する.

証明. E^* の部分集合からなる族 B は確率変数 $<x,\xi>, \xi \in E$, を可測にする最小の完全加法族ではあるが, 実際それは $L^2(R)$ の完全正規直交系 (c.o.n.s.) $\{\xi_n\}$ をとり, 系 $\{<x,\xi_n>; n=1,2,\ldots\}$ を可測にする最小の完全加法族であるとしてよい. 実は, この系は確率空間 (S',B,μ) 上の標準ガウス分布に従う独立な確率変数の系になっている.

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

指数関数の系 $\{\exp[\alpha\langle x,\xi\rangle];\alpha\in C,\xi\in E\}$ により生成される algebra A は (L^2) で稠密である. ところで, 指数関数 $\exp[\alpha\langle x,\xi\rangle]$ はテイラー展開を許しその収束は (L^2) の位相についてである. すなわち, このような指数関数は $\langle x,\xi\rangle$, $\xi\in E$, の多項式で近似される. そのことは多項式の全体が (L^2) で稠密であることを意味する. さらに, $\langle x,\xi_n\rangle$, $n=1,2,\ldots,$ の多項式全体もそうである.

ここで $\langle x,\xi\rangle$ 達を変数とする**フーリエ-エルミート多項式**を定義しよう. それは次のような式で定義される:

$$c\prod H_{n_k}\Big(\frac{\langle x,\xi_k\rangle}{\sqrt{2}}\Big)\quad \text{有限積}$$

これらは互いに直交する. そのことは, 通常の1変数エルミート多項式は次数が異なればガウス測度に関して直交すること, および各 $\langle x,\xi_n\rangle$ は n が違えば独立となることから証明される.

このようなフーリエ-エルミート多項式のうち n 次のものだけをすべて集めて, それらの張る部分空間を H_n とする. また定数 (複素数) の全体を H_0 とする. 明らかに各 H_n は直交し, すべての n についての直和をとると, それは全空間 (L^2) と一致して基本定理に述べる直和分解が得られる. q.e.d.

部分空間 H_n の元は, N. Wiener の n 次 homogeneous chaos であり, K. Ito の n 次重複 Wiener 積分である. また, 後にのべるように, 固有値 n に属する number operator の固有空間でもある. このことからも知られるように, この直和分解は極めて重要な意味をもち, それだけに, いろいろな場面に登場する.

基本定理に述べた直和分解による空間は, 量子力学の用語を借用して Boson Fock space, あるいは単に **Fock space** と呼ばれる. 詳しくは文献 [18], [23], [28] などを参照. さらに, H_n は H_1 の n 重テンソル積 $\bigotimes^n H_1$ に対称化作用素 S を施したものといってよい. ただし S は

$$S(\varphi_1\otimes\cdots\otimes\varphi_n)=\frac{1}{n!}\sum_{\sigma}\varphi_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes\varphi_{\sigma(n)},\ \varphi\in H_1,\sigma\in G_n.$$

で定義され, σ は n 文字 $\{1,2,\ldots,n\}$ の置換, G_n は置換群を表す.

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

この S は $H_1^{\otimes n}$ から H_n への 直交射影となる.

ホワイトノイズ測度 μ の導入から Boson Fock space までの内容はすべて, ノルム $\| \|$ を $L^2(R^d)$-ノルムに代えれば, R^d パラメータのときもそのまま成り立つ. ただしこれまでの記号 $\dot{B}(t)$ は使えないが...

以下 $d = 1$ とする.

定理 (積分表現定理) S-変換は次の同型対応を与える:

$$H_n \cong \sqrt{n!}\,\widehat{L}^2(R^n)$$

$\hat{}$ は "symmetrization" を意味する.

証明. エルミート多項式

$$H_k\Big(\frac{<x,\eta>}{\sqrt{2}}\Big), \quad \|\eta\| = 1,\ k = 0, 1, 2, \ldots$$

の母関数の式

$$\sum_k (k\,!)^{-1} t^k \cdot H_k\Big(\frac{<x,\eta>}{\sqrt{2}}\Big) = \exp[\sqrt{2}t<x,\eta> - t^2]$$

の S-変換をとると, 右辺が $\exp[\sqrt{2}t(\eta,\xi)]$ になることを用いて, t についてのべき級数展開の項別比較すれば

$$SH_k\Big(\frac{<x,\eta>}{\sqrt{2}}\Big)(\xi) = 2^{k/2}(\eta,\xi)^k$$

がわかる.

系 $\{\eta_j\}$ が $L^2(R)$ の正規直交系とすれば, $\{<x,\eta_j>; j = 1, 2, \ldots\}$ は標準ガウス分布に従う独立な確率変数系となる. したがって一般のフーリエ-エルミート多項式の S-変換は上の計算のような単項式の積になり定理の結論が得られる. すなわち, 任意の $\varphi \in H_n$ に対して R^n 上の関数 F が存在して

$$(S\varphi)(\xi) = \int_{R^n} F(u)\xi^{n\otimes}(u)\,du^n.$$

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

このとき, 定理の主張するような同型対応を得るためには, 積分核 F を対称化する必要があることに注意しなければならない. q.e.d.

「註」積分表現の呼称は上のような S 変換の表現式からきたものである.

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

§2. 超汎関数，その I

本節から主題にはいる．最初は前節に紹介したホワイトノイズ汎関数の空間を拡張して, 超汎関数の空間を導入することである．そのための二つの方法を述べるが, それぞれが導入されたときのアイディアもあわせて説明したい．

2.1. 解説

第一の方法

R^1 パラメータの場合にもどるが, ホワイトノイズ汎関数 φ は形式的にいって, $\dot{B}(t)$ 達を変数とする関数であるという認識は本質的である．一般にいって, 変数が与えられたとき, 先ず最も基本的な関数のクラスを取り上げるのが自然であろう．その立場から我々は最初にそれら変数の **多項式** を考えようとした．例えば $\dot{B}(t)^2$ とか $\dot{B}(t)^n\dot{B}(s)^m$ などである．しかし $\dot{B}$ の見本関数は超関数であり, その'べき'や積のような非線形演算を直接汎関数に施すことは許されない．そこで思いついたのが「くりこみ」の手法であった．たとえば $\dot{B}(t)^2$ は t の関数としてみれば超関数の非線形な関数だから解析の話としては意味を持たない．しかし, それを修正して, 形式的な表現ではあるが

$$\dot{B}(t)^2 - \frac{1}{dt} = :\dot{B}(t)^2:$$

とする．ここで $(\frac{1}{dt})$ は $\dot{B}(t)^2$ の平均値 (それは無限大) である．このように無限大の平均値を除去する「くりこみ」の方法で修正しようとするのが元の考え方であった．このような操作を additive renormalization ということがある．そうしても勿論 (L^2) には属さないが, (L^2) を拡張したいわゆる超汎関数空間 $(L^2)^-$ の元としてとらえることができる．同様な考え方で, $\exp[c\int \dot{B}(t)^2\,dt]$ ($c=1/2$ を除く) の例では multiplication による renormalization (後出) が要求される．そうした後では, この汎関数はガウス核と考えられて後の解析で重要な役割を演ずることになる．

このような例を一般化し超汎関数のクラスの導入をより積極的に支持したもの

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

の一つはホワイトノイズ解析を Feynman の経路積分へ応用することであった. Feynman のオリジナルなアイデイアに従って, 我々はまず可能な経路を次式のように設定した:

$$y(t) = y_0(t) + \left(\frac{\hbar}{m}\right)^{1/2} B(t),\ 0 \le t \le 1.$$

ここで y_0 は Lagrangian

$$L(y, \dot{y}) = \frac{m}{2} y^2 - V(y)$$

によって一意的にきまる古典的な経路, B(t) はブラウン運動である. 係数 $(\frac{\hbar}{2m})^{1/2}$ の採用は次元解析及び H.Ezawa et al の定式化等が参考になった. 作用関数 $S(y) = \int L(y, \dot{y})\, dt$ の積分には $\dot{B}(t)^2$ が登場するし, グリーン関数の計算

$$G(t_0, t_1) = \Big< N \exp\Big[\frac{i}{\hbar} S(y)\Big] \cdot \int \exp\Big[\frac{1}{2} \dot{B}(s)^2\, ds\Big] \cdot \delta_0(B(t)) \Big>,$$

N は正規化定数, $<\ >$ は平均を表す記号

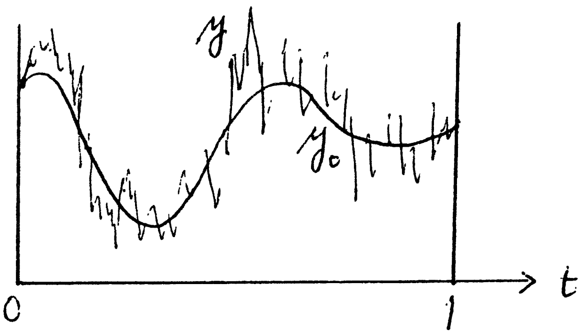


Fig. 1.3

における右辺中央の因数は flattening effect を表すが, そこにも $\dot{B}(s)^2$ が現れ適切な役割を果たしている. ところで, 上式右辺の δ 関数は時刻 1 において, 経路に対する pinning effect を表すもので, これも超汎関数である.

こうして物理的な現象を直接目に見える形で数学的に記述し, しかも従来の方法では得られなかった場合, たとえばある種の特異なポテンシャルを持つときや別な一般の場合にもグリーン関数 (propagator) を計算することができたのである. (Streit[18], [53], [54] 他参照)

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

経路積分はその他の例にも有効に用いられている.

また, 超汎関数は, 後に述べる微分演算などと共に, 最近では化学や生物における「ゆらぎ」の解析への特徴的な応用も数多く見つけられている ([39] 等).

第二の方法

有限次元空間 R^d 上のシュワルツ超関数の導入と類似の方法であり, 第一の方法よりスマートな方法と言えよう. S を C^∞ であって無限遠で急減少である関数の作るベクトル空間に高階の微分や積を連続にするような強い位相を入れた所謂シュワルツ空間とする. それを test 関数の空間として, Gel'fand triple

$$S \subset L^2(R^d) \subset S'$$

を構成することにより緩い超関数の空間 S' が定義できる. 上の構成において基礎となったヒルベルト空間 $L^2(R^d)$ をホワイトノイズ汎関数空間 (L^2) におきかえて, 一段と高い階層の Gel'fand triple:

$$(S) \subset (L^2) \subset (S)^*$$

を導入することにより超汎関数空間 $(S)^*$ を構成する. 詳しいことは 3 節で述べるが, アイディアは明快であり, 定義のための解説は不要であろう.

ここで, 重要な注意がある. それは次小節で詳しく説明するが超汎関数空間 $(L^2)^-$ を得るために我々は前節で述べた (L^2) の直和分解に登場した 'H_n **自身**' を拡張することである. 円周上の関数のフーリエ級数展開の類似で言えば, H_n は $\sin n\theta$ と $\cos n\theta$ を基底とする 2 次元空間にあたり, それら基底の係数について 2 乗の和の収束の代わりに緩増加なものとして円周上の超関数が得られる. 係数すなわちウエイトを利用するこの方法は, 直和分解を利用すれば直ちに我々の無限次元の場合にも適用されるが, それは容易な方法である.

それだけに留まらず, むしろ H_n が無限次元であることを積極的に利用した我々の方法, すなわち H_n 自身を, すでに導入した概念である確率素子に基礎を置く考

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

え方に従って,「くりこみ」の手法を導入したりして, 自然な方法で拡張することを見いだすことができた(1975年[18]など)のは本質的な進歩であったと思う.

この飛躍をよりどころにして, これから述べるようなホワイトノイズ解析のより深い展開をみることができたのである.

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

2.2. 超汎関数空間の構成, その I

このような拡張を実行するにはホワイトノイズ汎関数の積分表現を利用する. 詳細な説明は文献 [18], [22] に譲ることにするが, パラメータを R^1 にしたときのホワイトノイズ超汎関数導入の筋道は次のような diagram で示される.

Diagram

$$
\begin{aligned}
H_n^+ &\cong \sqrt{n!}\,\widehat{H}^{(n+1)/2}(R^n)\\
H_n &\cong \sqrt{n!}\,\widehat{L}^2(R^n)\\
H_n^- &\cong \sqrt{n!}\,\widehat{H}^{-(n+1)/2}(R^n)
\end{aligned}
\tag{1}
$$

ただし $\widehat{L}^2(R^n)$ は既出のように対称な関数からなる $L^2(R^n)$ の部分空間で, $H^m(R^n)$ は R^n 上の m 次ソボレフ空間であり, 山印は対称な関数からなる部分空間を意味する.

Diagram 中央の同型対応は前節で定義した S-変換によって得られる. 1.3 で与えた S 変換の式を復習しておこう.

$$
S:\ \varphi \to (S\varphi)(\xi) = \exp\Big[-\frac{\|\xi\|^2}{2}\Big] \int_{S'} \exp[<x,\xi>]\varphi(x)\,d\mu(x)
$$

$\varphi \in H_n$ に対して S-変換を施せば $\xi^{n\otimes}$ の連続な線形汎関数が得られ, その核は $L^2(R^n)$ の元である. その核を対応させて Diagram 中央の同型対応を得る.

第 1 と第 3 の同型対応は, 先ず $L^2(R^n)$ を基礎の空間とし, Diagram の右側に縦に並んだ二つのソボレフ空間で挟まれたいわゆる Gel'fand triple を左側の対応に移して得られるものである. こうして定義した H_n が求める n 次超汎関数の空間である. このような拡張ができるのは H_n が無限次元であることが本質的な理由になっている. さらに, これら H_n の和をとるとき, 適当なウェイトをかける自由性が残されている. 後の定義, および 3.3 節でより一般に述べるように, 超汎関数空間の flexible な導入にはこの事実を用いる.

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

「註」 ここでソボレフ空間の次数の選び方 (R^n のときは $\frac{n+1}{2}$ 次) であることに注意したい. そのように選ぶ理由の第一は, その空間の関数が連続であること; 第二はトレース定理が成り立つことである. すなわち R^n から超平面 R^{n-1} への射影によって定義される関数の制限で

$$\text{projection}: \ H^{(n+1)/2}(R^n) \to H^{n/2}(R^{n-1})$$

が連続かつ surjective になっている (trace theorem 参照). これは次数が次元に対して consistency をみたしているというだけでなく, 後に (4.1. 節) で述べるように, 消滅作用素についての演算を扱うときに役立つ性質である. (文献 [37] Lions-Magenes vol.1, Chapt.1 参照).

定義.

i) 正の緩増加数列 $\{c_n\}$ を選び

$$(L^2)^+ = \bigoplus_n c_n H_n^+$$

として得られる空間 $(L^2)^+$ をテスト汎関数の空間という.
ii) テスト汎関数空間の共役空間 $(L^2)^-$ を (第1の定義による) 超汎関数空間という. ここで, 上の直和は, 代数和 $\sum H_n^+$ をノルム

$$\| \ \|_+ : \quad \|\varphi\|^2 = \sum c_n^2 \|\varphi\|_n^2, \quad \varphi \in H_n^+,$$

$\| \ \|_n$ は H_n^+ ノルム, で完備化したものである. こうして新しい Gel'fand triple

$$(L^2)^+ \subset (L^2) \subset (L^2)^-$$

が得られる.

命題 1. (L^2) の定義において, (2) で定めた数列 $\{c_n\}$ を, 指数関数 $\exp[<x,\xi>]$ がテスト関数になるように選べば S-変換は $(L^2)^-$ にまで拡張できる. その像の全体はもとの $(L^2)^-$ と同型になるように位相を入れることができる.

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

証明. S-変換の定義にもどれば明らかである.

2.3. 超汎関数の例

1. 多項式

$\dot{B}(t)$ のエルミート多項式は, 形式的には正のパラメータ σ をもつエルミート多項式 $H_n(x;\sigma^2)$ によって定義される. すなわち, 形式的に

$$H_n\Big(\dot{B}(t);\frac{1}{dt}\Big).$$

これを $:\dot{B}(t)^n:$ と書く. ただし, パラメータをもつエルミート多項式は次の母関数によって定義される.

$$\sum t^n H_n(x;\sigma^2) = \exp\Big[-\frac{\sigma^2 t^2}{2} + tx\Big].$$

$:\dot{B}(t)^n:$ の厳密な定義は S-変換によって定められる:

$$S(:\dot{B}(t)^n:)(\xi) = \xi(t)^n.$$

より一般に

$$S(:\dot{B}(t)^m\dot{B}(s)^n:)(\xi) = \xi(t)^m\xi(s)^n \qquad (t \neq s)$$

とする.

命題 2. $:1: = 1$ とすれば, 一般に次のことが成り立つ.

$$:\dot{B}(t): = \dot{B}(t),$$

$$\begin{aligned} :\dot{B}(t_1)\ldots\dot{B}(t_n): &= :\dot{B}(t_1)\ldots\dot{B}(t_{n-1}):\dot{B}(t_n) \\ &\quad -\Sigma_1^{n-1}\delta(t_n - t_i):\dot{B}(t_1)\ldots\cancel{\dot{B}(t_i)}\ldots\dot{B}(t_{n-1}):, \end{aligned}$$

ここで / は削除を意味する.

定義. 上のような : : で定義される積を Wick product と呼ぶ.

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

[註] 2.1. で述べた additive renormalization 参照.

2. Donsker's delta function

これは形式的には $\delta_a(B(t))$ で与えられ超汎関数であるが, やはり S-変換によって定義する. すなわち

$$(S\delta_a(B(t)))(\xi) = (2\pi)^{-1/2} \exp\Big[-\frac{1}{2t}\Big\{a - \int_0^t \xi(u)\,du\Big\}^2\Big],\ \xi \in S(R).$$

右辺の表現は δ 関数のフーリエ変換の公式を用いた. すなわち $\delta(u-a)$ のフーリエ変換が $(2\pi)^{1/2} \exp[ia\lambda]$ だから, そのフーリエ逆変換で元の φ 関数に戻して, 変数を $\dot{B}(t)$ に変えると求める式になる.

「注意」 ここでは変数はホワイトノイズではなくてブラウン運動 $B(t)$ である.

3. ガウス核

ガウス核は

$$\exp\Big[\frac{c}{1-2c}\int \xi(u)^2\,du\Big],\quad c \neq 1/2,$$

の逆 S-変換によって定義する. もとの関数は前節のはじめの解説に登場したもので, 形式的に書くと

$$\varphi_c = N \exp\Big[c\int \dot{B}(u)^2\,du\Big]$$

となる. N は規格化定数で無限小の因数である. それはテスト汎関数 1 と φ との内積が 1 となるように定められたと考えてよい. この N は積分区間に対して乗法的である. ([22]4A.) 当然 $\varphi_0 = 1$ とする.

「註」 因数 N は, φ が $\dot{B}(t)$ の通常の二次汎関数の指数関数であるとき (すなわち (L^2) 汎関数のとき) φ の平均が 1 になるよう定数を掛けて規格化しておき, 二次形式の核関数が次第に対角線上に凝集するときの規格化定数の極限が N だと思えばよい. これは multiplicative renormalization (乗法的くりこみ) の一種である.

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

このガウス核は随所に登場する重要な超汎関数の例である．それは正の超汎関数である．また, Lévy ラプラシアンの固有関数にもなっている．(L^2) 汎関数を係数として, $\{\varphi_c\}$ の一次関数全体を適当な位相で完備化すれば, ラプラシアンに関係した興味ある $(L^2)^-$ の部分空間が得られよう．課題の一つである．

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

§3. 超汎関数, その II

3.1. 空間 $(S), (S)^*$

実は前節の方法より一段とスマートなホワイトノイズ超汎関数の導入法がある. それは, ここに紹介する Kubo-Takenaka[25] による方法であり, 後に Potthoff-Streit により, その特徴づけまでも含めて議論が深められた. そのような超汎関数の導入は次のような方法で行われる.

パラメータ空間は R^d とする. 次の微分作用素

$$A' = -\Delta_d + |u|^2 + 1,\ u \in R^d,$$

を取り上げる. ただし Δ_d は d-次元ラプラシアンである. A' を $L^2(R^d)$ 上の自己共役作要素に拡張したものを A とする. テンソル積 $A^{\otimes n}$ は $L^2(R^{nd})$ 上に働く作要素であるが 2.2. 節の Diagram における同型対応を利用して, H_n 上の作用素ともみなすことができる. これを $\Gamma_n(A)$ と書く. 各 n についてこの操作を行い, それらの直和をとって (L^2) 上の自己共役な作用素 $\Gamma(A)$ が得られる. 実は, A から $\Gamma(A)$ への移行は量子力学における第 2 量子化の方法に他ならない.

$$(S)_p = \mathrm{Domain}(\Gamma(A^p))$$

とおく. そこでのノルム $\|\ \|_p$ は次のように定義する:

$$\|\varphi\|_p = \|\Gamma(A^p)\varphi\|,$$

ただし $\|\ \|$ は (L^2)-ノルムである. このヒルベルト-ノルムについて Domain は完備であるものとすれば, $(S)_p$ はヒルベルト空間になる. $\|\ \|$ を基準ノルムとしたときの $(S)_p$ の共役空間を $(S)_p{}^*$ と書くとまた Gel'fand triple

$$(S)_p \subset (L^2) \subset (S)_p^*$$

が得られる. さらに

$$\begin{aligned}(S) &= \mathrm{proj\,limit}(S)_p,\\ (S)^* &= \mathrm{ind\,limit}(S)_{-p},\end{aligned}$$

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

と定義すれば

$$(S) \subset \cdots \subset (S)_p \subset (S)_{p-1} \subset \cdots \subset (L^2)$$

$$(L^2) \subset \cdots \subset (S)_{-p+1} \subset (S)_{-p} \subset \cdots \subset (S)^*$$

となり, $(S)^*$ は (S) の共役空間となる. この $(S)^*$ が第 2 の定義によるホワイトノイズ超汎関数空間である.

空間 (S), $(S)^*$ の主要な性質を列挙しておこう. 以下この小節で述べる内容はすでに成書 (例えば [22], [28] など) に詳しく述べられているので, ここでは若干の説明を加えることにより証明に代えたい. なお, 今後は簡単のため $d = 1$ としよう.

命題 1. 次のことが成り立つ:

1) (S) は核型空間である.

2) 指数関数 $\exp[<x, \eta>]$, $\eta \in E$, は (S) に属する.

3) (S) は algebra である, すなわち積演算に関して閉じている.

4) 任意の $\varphi(x) \in (S)$ は x の連続関数となる version を持つ (I. Kubo).

略証.

1) は微分作用素 A の定義と, エルミート関数が A の固有関数であることに注意すれば容易に示される.

2), 3) も A の性質から証明される.

4) の証明はやや複雑となるので省略する.

命題 2. 次のことが成り立つ.

1) $(S)^*$ は H_n^- を含む.

2) δ-関数 $\delta_0(<x, \xi>)$, $\delta_0(B(t) - a)$ などは $(S)^*$ の元となる.

証明.

1) は 2.2. 節の diagram から容易にわかる.

2) はそれぞれの S-変換を見ればよい.

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

この他, 次節で見るように, $(S)^*$ はその上で微積分を行うのに大層好都合な空間である.

さらに, 次小節の定理 1 に述べるような特徴づけができるのは我々の理論体系においてホワイノイズ関数のクラスを $(S)^*$ にとっていることは大きな利点である (詳しい証明や解説は [22], [28] 参照).

前節にあげた $(L^2)^-$ 超汎関数の例はいづれも $(S)^*$ の元である.

命題 1 の 2) から S-変換の定義にもどれば容易に次のことが証明される.

命題 3. S-変換は $(S)^*$ にまで拡張される.

3.2. Characterization Theorem

定理 1. (Potthoff-Streit, 1991)

S 上の汎関数 $U(\xi)$ が $(S)^*$ の元の S-変換であるためには次の 2 性質を満たすことが必要十分である.

1. 任意の ξ, η に対して $f(\lambda) = U(\xi + \lambda\eta)$, $\lambda \in R^1$, は $z \in C$ の整関数 $f(z)$ に拡張できる.

2. 整関数 $f(z)$ は指数型で, その order は高々2 である. すなわち正定数 p, a, K が存在して

$$|f(z)| \leq K \exp\left[a|z|^2\|\eta\|_p^2\right].$$

証明はここでは省略する. 詳しくは, 文献 [23], [27] を参照.

この定理は単に超汎関数の特徴を表すだけでなく, $(S)^*$ 上に作用する演算がこの空間で閉じているかどうかをチェックするときの強力な手段となる.

テスト関数の空間 (S) についても特徴づけが与えられる.

定理 2. S 上の汎関数 $U(\xi)$ が (S) の元の S-変換であるための必要十分条件は

1. 任意の E の元 ξ, η に対して $U(t\xi + \eta)$, $t \in R^1$, が複素変数 z の整関数に拡張

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

される.

2. 正の定数 K, a, p が存在して

$$|U(\xi)| \leq K \exp\left[a\|\xi\|_{-p}^2\right]$$

である (order は高々2である). ただし, テスト関数 ξ は複数数値とする.

空間 $(S)^*$ 上では応用上の各種の問題が扱われており, 実り豊かな場が提供されている. 例えば Potthoff [46] の結果は興味深いものである. また, 確率偏微分方程式への応用として著しい成果を挙げている Oksendal のグループに注目したい. 同様な応用がこれから多く期待される. 空間 (S) についても同様である.

3.3. もっと一般の空間

以上のように, ホワイトノイズ解析では $(S)^*$ 上で議論することが多い. しかし, ある種の応用問題を扱うときは $(S)^*$ をさらに拡張してそこで議論することもある. その一つの例 (Kondratiev-Streit) を示そう.

超関数 x の線形汎関数の系 $<x,\xi>$, $\xi \in S$, の多項式のなすベクトル空間を P としよう. P の元 $\varphi(x)$ の Fock space における展開を $\varphi(x) = \sum_n \varphi_n(x)$ する. ノルム

$$\|\varphi\|_{p,\beta}^2 = \sum (n!)^\beta \|\Gamma(A_p)\varphi_n\|^2, \quad 1 \leq \beta < 2,$$

による P の完備化を $(S)_p$ とする.

$$(S)^\beta = \operatorname{proj}\lim_p (S)_p^\beta$$

および

$$(S)^+ = \operatorname{proj}\lim_{\beta\in[1,2)} (S)^\beta$$

をともにテスト汎関数の空間とし, それらの共役空間をそれぞれ $(S)^{-\beta}$, $(S)^-$ と書く. これらは, どちらもホワイトノイズ超汎関数空間とされるが, いづれも random drift を持つある種の偏微分方程式を具体的に解くため, その他の応用の

問題を扱うために導入された. これまでに出てきた諸空間の間には次の関係がある.

$$(S)^+ \subset (S)^\beta \subset (S) \subset (L^2) \subset (S)^* \subset (S)^{-\beta} \subset (S)^-.$$

この他, Kuo等による超汎関数のクラスの拡張がなされていてホワイトノイズ解析の応用範囲を大きく広げている (Cochran-Kuo-Sengupta, A new class of white noise generalized functions, Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics vol.1; no. 1. 参照).

[付記」超汎関数は, はじめは'くりこみ'といって, 目的に合うように, その都度適当な修正をして, 一般化された汎関数のクラスに取り込むために導入された概念であった. ところが, これまで述べてきたように, 正確な意味を持たせるために S-変換を通じて定義してみると, 今は, ごく自然にかつ系統的に取り込まれるべきものであったと認識できるのである. 我々の考えた'くりこみ'の結果は, 実はごく自然に discover されるのを待っていたものであった.

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

§4. 微分作用素, ラプラシアン

4.1. 微分

再び R^1 をパラメータ空間とする. $\dot{B}(t)$ が素子であり, ホワイトノイズ汎関数 $\varphi(x)$ の変数であることを思い出そう. そこで φ を $\varphi(\dot{B}(t), t \in R)$ とみて $\dot{B}(t)$ について偏微分するという演算を考えることは自然である. その厳密な定義でもまた S-変換を利用する.

いま $\varphi(x)$ をホワイトノイズ超汎関数とし, その S-変換を $U(\xi)$ とする. $U(\xi)$ が ξ について Fréchet 微分可能 (位相は E または $L^2(R^1)$ のものをとる) であるとき, その微分を $U'(\xi, t)$ とかく. もしその微分がある超汎関数 $\varphi'(x,t)$ の S-変換であれば, $\varphi(x)$ は $\dot{B}(t)$-微分可能であるといい, $\varphi'(x,t)$ を $\dot{B}(t)$-偏導汎関数と言う. 記号で示すと

$$\varphi'(x,t) = S^{-1}\left\{\frac{\delta}{\delta\xi(t)}(S\varphi)(\xi)\right\}(x).$$

この $\varphi'(x,t)$ を $\partial_t\varphi(x)$ と書くことが多い (Kubo-Takenaka [25] による):

$$\partial_t : \ \varphi(x) \ \to \varphi'(x,t).$$

例 1. $\varphi = \int f(u){:}\dot{B}(u)^n{:}\, du$ ならば,

$$(S\varphi)(\xi) = \int f(u)\xi(u)^n \, du$$

で, その Fréchet 微分は $nf(t)\xi(t)^{n-1}$ だから

$$\partial_t\varphi = nf(t){:}\dot{B}(t)^{n-1}{:}$$

となる.

例 2. 指数関数.

$\varphi(x) = {:}\exp[<x,\eta>]{:} = \exp[<x,\eta> - \frac{\|\eta\|^2}{2}]$

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

ならば, S-変換は $\exp[(\xi,\eta)]$ であり,

$$\partial_t\varphi(x) = \eta(t)\varphi(x)$$

となる.

例 3. $\varphi = :\dot{B}(u)^n:$ のとき, S-変換は $\xi(u)^n$ であり, Fréchet 微分は $n\xi(u)^{n-1}\delta(u-t)$ だから

$$\partial_t\varphi = n{:}\dot{B}(u)^{n-1}{:}\delta(u-t)$$

となることがわかる. この式の右辺は超汎関数ではなく, 単なる形式的な表現に過ぎない.

「注意」 特に $\varphi = :\dot{B}(t)^n:$ ならば, $\partial_t\varphi = n{:}\dot{B}(t)^{n-1}{:}(\frac{1}{dt})$ とでも書くしか仕方がないであろう. それにもかかわらず, $\frac{1}{dt}$ を用いるなどの形式的な表現は, 時間の進行を explicit に表現しながら解析を進めていく calculus, いわゆる causal calculus には極めて便利なものである.

次の命題は容易に証明される.

命題 1.

1) ∂_t の定義域は (S) を含む.

2) ∂_t は (S) から (S) への連続な線形写像である.

3) ∂_t は derivation である.

4) ∂_t は消滅作用素 (annihilation operator) である:

$$\partial_t: \ H_n^+ \to H_{n-1}^+.$$

証明. 1), 2), 4) は自明.

3) については, 指数関数のつくる algebga が (L^2) で dense であることから, 次のようなことを示せばよいことがわかる.

$$\varphi_1(x) = :\exp[<x,\eta_1>]:$$

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

および

$$\varphi_2(x) = :\exp[<x, \eta_2>]:$$

とする．両者の S-変換はそれぞれ $\exp[(\eta_1, \xi)]$ および $\exp[(\eta_2, \xi)]$ となる．Fréchet 微分はそれぞれ もとの汎関数を $\eta_1(t), \eta_2(t)$ 倍したものとなり，これから $\partial_t \varphi_j(x) = \eta_j(t)\varphi_j(x)$, $j = 1, 2$, がわかる．一方，

$$\varphi_1(x)\varphi_2(x) = :\exp[<x, \eta_1 + \eta_2>]: + e^{(\eta_1, \eta_2)}$$

だから

$$\partial_t(\varphi_1(x)\varphi_2(x)) = (\eta_1(t) + \eta_2(t))\varphi_1(x)\varphi_2(x).$$

これから

$$\partial_t(\varphi_1\varphi_2) = (\partial_t\varphi_1)\varphi_2 + \varphi_1(\partial_t\varphi_2)$$

が出る．はじめに述べた注意から上の公式は，積が ∂_t の定義域に属するようなのすべてに対して成り立つことがわかる．

また ∂_t をフーリエ・エルミート多項式に作用させたとき，エルミート多項式に関する公式から次数が一つ下がること，すなわち φ_n が n 次フーリエ・エルミート多項式なら

$$\partial_t\varphi_n = n\varphi_{n-1}$$

がわかり，4) が示される．q.e.d.

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

4.2. 生成作用素

微分作用素 ∂_t の共役作用素 ∂_t^* は次のようにして定義される.

任意の $\varphi \in (S)$ と $\psi \in (S)^*$ に対して, 定義より

$$<\partial_t \varphi, \psi> = <\varphi, \partial_t^* \psi>$$

が成り立つような $(S)^*$ 上の作用素 ∂_t^* が定まる.

命題 2.

1) ∂_t^* は $(S)^*$ 上の連続な線形写像である.

2) ∂_t^* は生成作用素 (creation operator) である.

$$\partial_t^* : \ H_n^- \to H_{n+1}^-.$$

汎関数に $\dot{B}(t)$ を掛ける演算 (multiplication) $m(t)$ は次式で与えられる:

$$m(t) = \partial_t + \partial_t^*.$$

また $(\dot{B}(t), \dot{B}(s))$-平面内の**回転**の生成作用素 $\gamma_{t,s}$ は有限次元の場合と同様に, 微分と $m(t)$ とにより

$$\gamma_{t,s} = m(t)\partial_s - m(s)\partial_t = \partial_t^* \partial_s - \partial_s^* \partial_t$$

と書ける. これはラプラシアンの特徴づけ等無限次元調和解析において基本的な役割を演じる. これも有限次元の場合と同様である.

また, ∂_t, ∂_t^*, $t \in R^1$, の多項式, 特に 2 次形式あるいはそれらの指数関数で表される作用素は我々の解析において重要な意味をもつ. 具体的な応用については Oosawa [44] などが参考になる.

以上の諸作用素は **量子確率論** と共通の基礎的な場を提供している. 例えば $m(t)$ が量子ホワイトノイズに対応する (組 $\{(\partial_t, \partial_t^*)\}$ を量子ホワイトノイズということもある) 等である. この方面の研究は最近飛躍的に進展しており, 特に

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

L. Accardi, N. Obata, M. Ohya 等による成果は我々の解析と深く関連し大きな影響を与えている.

消滅および生成作用素は次のように ならして (smear して) 用いられることがある.

$$\begin{aligned}\partial(\xi) &= \int \xi(t)\partial_t\, dt, \quad \xi \in E,\\ \partial^*(\xi) &= \int \xi(t)\partial_t^*\, dt.\end{aligned}$$

これらの定義は $\partial_t\varphi$ あるいは $\partial_t^*\varphi$ がそれぞれ t について連続なとき, それらと $\xi(t)$ との積を被積分関数とする Bochner 積分 ([54] 参照) によって与えられる.

命題 3. $\varphi \in \sum_n H_n^- \cap (S)^*$ とし, f を non-random な関数 ($\in E$) とする. このとき積分

$$\int f(u)\partial_u^*\varphi\, du$$

が定義され, 再び $(S)^*$ に属する.

「註」 上の積分は被積分関数はいわゆる non-anticipating 性を仮定する必要がない. このときの積分は "Hitsuda-Skorohod 積分" と呼ばれるが, より一般の確率積分と考えてよい. これによっても creation operator や確率積分の意味がよく理解されよう. なお, 命題 3 の積分の結果は H_{n+1}^- に属する.

4.3. ラプラシアン (その I)

無限次元解析学において, 有限次元と比較しながらラプラシアンを考えるには, いくつかの立場あるいは観点がある. また, その定義に応じて異なったラプラシアンが考えられるのも無限次元解析の特徴である. この場合, 有限次元の類似のみではないことに注意する. 真に無限次元的なものに特に注目したい.

(1) 初めは二次形式に対して, そのトレース (の 2 倍) を与えるものをラプラシアンと考える方法であろう. $f(u)$ は連続な関数として, 2 次の超汎関数

$$\int f(u){:}x(u)^2{:}\, du,$$

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

を考える. これに対してトレース

$$\int 2f(u)\,du$$

が定義される. ラプラシアンはこのトレースを与える作用素でありたい. そのようなものとして **Lévy ラプラシアン**

$$\Delta_L = \int \partial_u^2 \,(du)^2$$

がある. このような $(du)^2$ を使った表現は H.-H. Kuo によるが, この記法は便利である. これは形式的な表現のように見えるが, 実は十分説明可能なものである. このことも含めて更に次章で述べる.

また, 計算の都合で時間区間 T を有限区間に限定して,

$$\frac{1}{|T|}\int_T \partial_u^2 \,(du)^2$$

とする方法をとることもある. この線上での発展は K. Saito 等による. 例えば Cauchy 問題の解法, これを生成作用素とする確率過程を構成する話題等がある.

(2) 有限次元ラプラシアンの次元を無限大にしたときの極限.

フーリエ・エルミート多項式を考えたときと同じように, 座標系 $\{<x,\xi_n>\}$ をとる. $<x,\xi_n>$ 方向の微分は $\partial(\xi_n) = \partial_n$ である. 従って, それらの 2 乗の和 $\sum \partial_n^2$ をとることになるが, 実は有限次元的な汎関数に作用するとき以外は一般にそれは発散してしまう. そこで補正を加えて収束する作用素の級数

$$\sum\{{\partial_n}^2 - <x,\xi_n>\partial_n\}$$

によって Δ_∞ を定義する.

命題 4. $N = -\Delta_\infty$ は次の意味で number operator である:

$$N\varphi = n\varphi, \quad \varphi \in H_n.$$

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

証明. $\varphi \in H_n$ とする. それが n 次フーリエ・エルミート多項式であれば容易に上の式が出る. 作用する空間を H_n に限定すれば, その上で Δ_∞ は有界な作用素であり, やはり上式が成立する.

また, この結果から Δ_∞ の定義は c.o.n.s. のとりかたに無関係であることがわかる.

量子力学の言葉でいえば H_n は n 個の Boson 粒子が存在するような状態を表すベクトルのなす空間になっている. これは Boson Fock space の構成と consistent になっていることに注意する.

命題 5. $N = -\Delta_\infty$ は (L^2) において次の表現をもつ:

$$\Delta_\infty = -\int \partial_t^* \partial_t \, dt.$$

証明. H_n の元に作用させれば命題 1 の式と同じ結果が得られることから明らか.

(3) 調和関数に関する Mean value Theorem からの展開.

標題のアイデイアから自然に定まるラプラシアンは Volterra または Gross のラプラシアンとよばれるものである. これをそれぞれ Δ_V または Δ_G と書くが, それは次の式で与えられる.

$$\Delta_V = \int \partial_t^2 \, dt.$$

これは Volterra が彼の関数解析において扱ったものと本質的に同じものと考えてよい.

「註」 N. Wiener による mean value theorem からの展開 (Acta Szeged. 1927) を参照のこと.

以下において, 標題の趣旨に沿った展開で到達できるラプラシアンを導こう. $Y(t)$ を各要素が標準ガウス分布に従う i.e.r.v. の系とし, $a(t)$ を t の実数値関数

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

とする. 等式

$$\exp[a(t)Y(t)\partial_t]\varphi(x) = \varphi(x(\,\cdot\,) + a(t)\delta_t(\,\cdot\,)Y(t))$$

は S-変換によって正確に証明される.

「註」 上式の右辺の変数は, 一般の φ の定義域には存在していない. しかし多項式を含み (S) で dense な集合の上では well-defined となる. 自明な説明を省略して簡単に上のように記した.

同じように考えて

$$E_Y \exp[a(t)\partial_t Y(t)] = \exp\left[\frac{1}{2}a(t)^2\partial_t^2\right]$$

も示される. ただし E_Y は $\{Y(t)\}$ を確率変数とする確率空間において平均をとる演算をあらわす.

ここで, 形式的に $a(t) = \varepsilon\sqrt{dt}$ とおき, 両辺の無限積 $\prod_{dt}$ をとる. この無限積により上式の左辺は

$$E_Y\{\exp[\varepsilon\partial_t Y(t)\sqrt{dt}\,]\}$$

となり, それは

$$\exp\left[\frac{\varepsilon^2}{2}\partial_t\,dt\right] = \exp\left[\frac{\varepsilon^2}{2}\Delta_V\right]$$

に等しい. 一方それは

$$\prod_{dt}\varphi(x(\,\cdot\,) + \varepsilon\delta_t(\,\cdot\,)Y(t)\sqrt{dt}) = \varphi(x+\varepsilon y),$$

となる. ここで y はブラウン運動 $\int^t Y(s)\sqrt{ds}$ の軌跡である.

よって, もし φ が Δ_V の定義域にあれば容易に次の関係式を証明することができる.

$$\Delta_V\varphi(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{2}{\varepsilon^2}E\{\varphi(x+\varepsilon y) - \varphi(x)\}.$$

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

すなわち初等関数論における調和関数に対する Mean-value property に相当する事実が得られた.

上の事実からの発展として, 次のような被積分関数が operator-valued の場合の Wiener 積分を考えることができる. 新しくブラウン運動 $B(t)$ をとって

$$A = \int \partial_t \, dB(t) = \left(\int \partial_t \dot{B}(t) \, dt \right).$$

を定義する. その2乗の平均は

$$\begin{aligned} E(A^2) &= E\left\{ \int \partial_t \, dB(t) \cdot \int \partial_s \, dB(s) \right\} \\ &= \int \int \partial_t \partial_s \delta(t-s) \, dt \, ds = \Delta_V \end{aligned} \tag{2}$$

となり, Volterra ラプラシアンが得られた. これを形式的にいえば Volterra ラプラシアンの確率的な意味での平方根が得られたことになる:

$$A = \text{stoch.}\sqrt{\Delta_V}$$

(stoch. は in the stochastic sense の意味)

これは

$$E\{\dot{B}(t)\dot{B}(s)\} = \delta(t-s)$$

$$\therefore \dot{B}(t) = \text{stoch.}\sqrt{\delta_t}$$

とするのと同じ形式的な記述である.

こうして我々は Volterra (または Gross) ラプラシアンに対する一つの確率論的な説明を与えることができた.

なお $\cdot B(t)$ に関する上の式は, 実質的には既に P. Lévy が次の論文において示している事柄である.

"Sur une classe de courbes de l'espace de Hilbert et sur une équation intégrale non linéaire." Ann. Ecole Normale Supérier (1956), 121-156.

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

そこでは (II.2.4) 式において

$$\Phi(t) = \int_0^{t+0} \sqrt{\delta(u-t)}\, \xi_u \sqrt{du}$$

が $N(0,1)$ に従う各時点で独立な (正確には, 各 dt で独立な) 確率変数であることを示す. $\xi_u\sqrt{du}$ を $\dot{B}(u)\, du$ に置き換えれば我々と同じ理解に到達する.

(4) 球面上のラプラシアンは回転群による作用で不変な 2 次の微分作用素として定まる. 無限次元のときも類似の議論ができるが, 回転群については次章に述べるので, これに関連した話題もそこに譲ることにしたい ([16] 等).

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

第二章 回転群と調和解析

§5. 無限次元回転群

標語的に言えば, ホワイトノイズの確率分布 μ は半径が無限大の無限次元球面上の一様な確率測度である. その様子を正確に言うためには, 先ず無限次元回転を定義し, μ がそれによって不変であることを示す必要があるが, 実はそのことは容易に証明される. ついで μ の台が実質的に minimal な集合であることを証明しなければならない. この性質は, 無限次元回転群を μ の台になっている集合に作用する変換群とみたときの測度 μ のエルゴード性に他ならない. 実際このことは, 直観的にも, また後に述べるように厳密な意味でも説明できる事柄である.

5.1. 回転群 $O(S), O^*(S')$

本論に入る前に回転群に関するアイディアの歴史を少しふりかえってみたい. 勿論, 無限次元回転群全体について一度に述べることは, それが膨大な内容であるだけに, 到底及ぶところではないが, 群論的な性質を調べる事のほかに, 古典関数解析との関連を見るとか, 確率論的な内容を探索するなど, いろいろな研究面があり, それぞれ興味深いものがある.

ヒルベルト空間 $H = L^2[0,1]$ の点 x を H の座標系を用いて $x = (x_1, x_2, \ldots)$ と表し, さらに H 上の汎関数 $\varphi(x)$ を $\varphi(x_1, x_2, \ldots)$ と表現して解析を試みようとすれば, それには当然座標の順序あるいは座標の入れ替えが関係してくる. P. Lévy はいち早くこのことに着目し, 1922 年の関数解析の書物 (第 III 部 第 3 章) でも注意しているし, 1951 年の著書 (第 3 部) ではさらに詳しい記述がある. また V. Volterra も関数空間における積分作用素を用いたある種の直交変換 (積分変換) を functional rotation と名づけて積分方程式論と関連づけて論じている (1930) のは興味深い.

その他 Gel'fand をはじめロシアの科学者の研究も我々にとって参考となることが多いが, 特に diffeomorphisms のなす群の部分群で回転群に相当するものは,

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

ユニタリ表現の理論を通じて, 我々の解析にとって重要な事実を含んでいる. 特に次章で述べる確率場の取り扱いにおいては, パラメータの変換による場の変分の構成に対して一つの基本的な解析手段を与えるものとして重要視したい. また最近の T. Hirai, H. Shimomura 達による研究によって, ある種の diffeomorphisms のなす群のユニタリ表現に関する興味深い結果が得られているが, これが我々の方向にヒントを与えることが期待される.

その他, 無限次元回転群としては種々の定義があり, また多くの試みがなされているが, 後の議論からわかるように, 我々にとっては H. Yoshizawa による回転群の定義から出発して, ユニタリ表現の理論を借用するのが我々の目的に最もよく合致していると考えられる. 以下本稿ではその設定に従って話を進めることにしよう.

当面, 基礎となる核型空間を R^1 上の Schwartz 空間 S にとる. S 上に作用する線形変換 g は

1) S の同型写像であり,

2) 任意の $\xi \in S$ に対して, $\|g\xi\| = \|\xi\|$ が成り立つ

ならば, それを S の**回転**と言う. ここで $\| \ \|$ は $L^2(R^d)$-ノルムである.

S の回転の全体は群をなす. これを S の回転群と呼び $O(S)$ と書く. 我々の回転群は位相空間 S の変換よりなるので, S の位相を利用したコンパクト-開位相を導入するのが自然である. こうして $O(S)$ を位相群として扱う.

定義 上の位相群 $O(S)$ を S の**回転群** という.

この群はコンパクトにも局所コンパクトにもならないような大きな群である.

なお, Schwartz 空間 S と限らず, 一般の核型空間 E をとり, 同様に $O(E)$ を定義することができる. そのとき, E を限定しないで, 単に**無限次元回転群**と呼び O_∞ と書くこともある.

群 $O(S)$ の元 g に対して

$$<x, g\xi> = <g^*x, \xi>$$

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

によって S' 上の連続で線形な点変換 g^* が定まる．そのような変換 g^* の全体を $O^*(S')$ とする：

$$O^*(S') = \{g^*; g \in O(S)\}.$$

明らかに $O^*(S')$ は群をなす.

命題 1. 群 $O^*(S')$ は $O(S)$ と同型である.

証明.

$$(g^*)^{-1} = (g^{-1})^*$$

に注意しよう. 対応

$$g \to (g^*)^{-1}$$

は代数的かつ位相的に同型対応を与える.

定義 位相群

$$O^*(S')$$

を S' の回転群と呼ぶ.

5.2. $O^*(S')$ とその部分群の例

例 1. S の元で $L^2(R^d)$ の完全正規直交系 (c.o.n.s.) をなす $\{\eta_n\}$ をとり, 任意の S の元 ξ に対して

$$\xi_n = \langle \xi, \eta_n \rangle, \quad n = 1, 2, \ldots$$

とすれば, ξ が動くとき, $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ は n 次元ユークリッド・ベクトル空間 R^n を張る. 写像 P_n を

$$P_n : \xi \longrightarrow (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in R^n$$

とする. $P_n^{-1}(R^n) = E_n$ とおく. $O(S)$ の元で E_n では R^n の回転と同型で, $S^\perp$ では恒等写像であるものの全体は位相も含めて $SO(n)$ と同型になる. この群を G_n と書く.

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

これと相対的に, S' の元 x を, 次のようにして座標で表す. 上で取り上げた $L^2(R^d)$ の完全正規直交系 $\{\xi_n\}$ をとり

$$x_n = \langle x, \xi_n \rangle, \quad n = 1, 2, \ldots$$

とる. そこで n を固定してはじめの n 個の座標のみを回転する変換は $SO(n)$ と同型な $O(S')$ の部分群 G_n^* が得られるが, 当然それは G_n と同型である.

定義から明らかなように, このような部分群は許容される c.o.n.s. の選び方に依存することは注意すべきことがらである.

さらに, G_n の帰納極限である $G(\infty)$:

$$G(\infty) = \operatorname*{ind\,lim}_{n \to \infty} G_n$$

も $O(S)$ の部分群となる. $G(\infty)^*$ も同様に定義されて $O^*(S')$ の部分群になる.

例 2. S の shift $\{S_t\}$ は

$$(S_t\xi)(u) = \xi(u - t)$$

で定義される. 各 S_t は $O(S)$ の元で

$$S_t S_s = S_{t+s},$$

$$S_t \to 1 \text{ (恒等写像)}, \text{ as } t \to 0$$

となる. これは, shift $\{S_t\}$ が t について連続な 1-parameter 群であることを示している. また

$$S_t^* = T_t$$

とすれば, $\{S_t\}$ は $O(S)$ の, また T_t は $O^*(S')$ の, それぞれ連続な 1 径数部分群となる. 故に, T_t は測度空間 (S', μ) 上の flow (流れ) である. それは Kolmogoroff flow であることが知られている.

なお shift は 6.3. で述べる whisker の典型的な例であり, 最も重要なものである.

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

定理 1. ホワイトノイズ測度 μ は $O^*(S')$-不変である: 任意の $g \in O(S)$ に対して

$$g^* \cdot \mu = \mu.$$

ただし, $d(g^* \cdot \mu)(x) = d\mu(g * x)$ である.

証明. まず g^* が可測であることを注意しておく. それは S' の筒集合を別な筒集合に写すことから明らかである.

次に, $g^* \cdot \mu$ の特性汎関数を計算してみよう. 次の積分はどれも E^* 上のものである.

$$\begin{aligned}
\int \exp[i\langle x, \xi\rangle]\, dg^*\mu(x) &= \int \exp[i\langle g^{*-1} y, \xi\rangle]\, d\mu(y) \\
&= \int \exp[i\langle y, g^{-1}\xi\rangle]\, d\mu(y) \\
&= \exp\Big[-\frac{1}{2}\|g^{-1}\xi\|^2\Big] \\
&= C(\xi).
\end{aligned}$$

すなわち特性汎関数が不変であるから, 測度も g^* により不変に保たれることがわかる. q.e.d.

この性質の他に次のことがいえる.

定理 2. ホワイトノイズ測度 μ は $O^*(S')$-エルゴード的である.

説明. 実は, もっと強い主張がいえている. T_t が $O^*(S')$ の部分群であり, またそれは (S', μ) 上の Kolmogorov flow である (前述). これから, エルゴード性が出る.

Kolmogorov flow とは, 時刻 $t = 0$ までの事象で生成される完全加法族 $\mathbf{B}_0$ があって, これにすべての T_t を作用させて全体の完全加法族 $\mathbf{B}$ が生成される. かつ remote past $\bigcap T_t \mathbf{B}_0$ は自明な集合族となるものをいう. ($\mathbf{B}_0$ はいわゆる generator である.) これがいえるので当然エルゴード性は出る.

上の二つの定理から μ が無限次元球面上の一様な測度とみてよいことがわかる. (他にも種々の説明があるが.) そして μ の "台" は球面のような対称空間の

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

類似とみなされ (この場合, 標語的にいって半径は $\sqrt{\infty}$ である), 従って我々は自然に無限次元調和解析へと導かれるのである.

定理 1 から, 任意の t にたいして

$$U_t\varphi(x) = \varphi(T_t x), \quad \varphi \in (L^2),$$

で定義される作用素はユニタリであることがわかる. そして, $\{U_t; t \in R\}$ は t について連続な 1-パラメータ・ユニタリ群をなす. Stone の定理からスペクトル分解

$$U_t = \int \exp[i\lambda t]\, dE(\lambda)$$

が得られる. ここで, $\{E(\lambda)\}$ は単位の分解である.

Hellinger-Hahn の定理により, (L^2) は互いに直交する高々可算個の cyclic subspaces に分解される. しかもそれら subspaces を一列にならべて各々に付属するスペクトル測度が, 逐次直前のものに関して絶対連続であるようにすれば, この分解はユニタリ同値を除いて一意的である. このとき cyclic subspace の個数が $\{T_t, t \in R\}$ の重複度 (multiplicity) に他ならない.

一般に, 重複度が大きければ, それだけ時間の shift に関して複雑な空間といえる. このように偶然現象を表すランダムな関数の作る空間と, 時間発展のパラメータになる t があって, 重複度が計算されるときは, その大きさが複雑性を測る一つの尺度となる. この言葉を使えば次の命題 1 が示すように, 空間 H_n, $n > 1$, は H_1 にくらべてはるかに複雑である.

「註」 H_1 はブラウン運動の各変数 $B(t)$ をヒルベルト空間 $L^2(\Omega, P)$ の元とみて, それらが張る線型空間と一致する. この H_1 はパラメータ t の変換 shift, dilation, reflection の作る変換群の作用で不変であるばかりでなく, この群の既約ユニタリ表現がそこで与えられている. その意味でブラウン運動, したがってそれが張る空間 H_1 は複雑さを測る尺度ときの, 基本とするにふさわしい空間であることがわかる.

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

命題 1. Fock 空間において, $\{T_t\}$ の重複度は, H_1 では 1 であり, H_n, $n > 1$ では可算無限である. いづれの場合もスペクトル測度はルベーグ・タイプである.

証明は積分表現を用いて与えられる (飛田 [17] 参照). 証明の中で, 各 cycliuc subspace を生成する cyclic vector を f とするとき測度 $d\|E(\lambda)f\|^2$ がルベーグ測度に関して絶対連続であることがわかる. q.e.d.

5.3. Lévy 群

ここでも c.o.n.s.$\{\xi_n\}$ を固定しておく. 自然数 n の順列 π の density $d(\pi)$ を

$$d(\pi) = \limsup_{N\to\infty} N^{-1}\#\{n \le N; \pi(n) > N\}, \qquad (\# \text{ は個数を表す})$$

で定義する.

また $d(\pi) = 0$ であるような π について S の連続な線形変換 g_π を

$$g_\pi :\ \xi = \sum a_n\xi_n \to g_\pi\xi = \sum a_n\xi_{\pi(n)}$$

としよう.

いま

$$\mathcal{G} = \{g_\pi :\ d(\pi) = 0,\ g_\pi \in O(S)\}$$

とおけば $\mathcal{G}$ は $O(S)$ の部分群になる.

定義. $\mathcal{G}$ を **Lévy 群**という.

Lévy 群 $\mathcal{G}$ は例 1 のすぐあとで定義した $G(\infty)$ (それは有限次元回転群で近似できるものとみなせる) ではカバーできない, いわば真に無限次元的なものである. この事実は次の例 3 のあとの avarage power を用いた説明を参照すればわかる. あるいは文献 [17] 5 章参照のこと.

Lévy 群は離散的であるため, これと $G(\infty)$ とで生成される連続群に埋め込むことがある.

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

例 3. 自然数の順列 π は

$$\pi(2n-1)=2n,\ \ \pi(2n)=2n-1,\ n\geq 1,$$

で定義されるとき, それからきまる g_π は Lévy 群の元である.

この g_π が真に無限次元的であることを主張する根拠の一つとして, **average power** による方法がある. 変換 g_π の average power $ap(g_\pi)$ は c.o.n.s.$\{\xi_n\}$ を用いて

$$ap(g_\pi)=\limsup_{N\to\infty} N^{-1}\sum_1^N <x, g_\pi\xi_n-\xi_n>^2$$

で与えられる. この例では, 確かに $ap(g_\pi)$ は 0 ではない. 定義からわかるように, それは真に無限次元的であることを意味する. もし, g が G_n の元ならば, 明らかに average power は 0 になる.

例 4. 非負整数の順列 π は

$$\begin{aligned}\pi(2n-1) &= 2n+1, \quad n\geq 1,.\\ \pi(0) &= 1,\\ \pi(2n+2) &= 2n,\ \ n\geq 0,\end{aligned}$$

で定義されるとしよう. これは奇数を右側に, 偶数を左側に並べたとき, 全体の shift に相当する. 勿論, これからきまる g_π は Lévy 群の要素である.

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

§6. 無限次元調和解析

しばらくは, 時間のパラメータ t は1次元ユークリッド空間の中を動くものとしておく. すなわち t は時刻をあらわす.

6.1. $O(S)$ の性質

任意の $g \in O(S)$ に対して

$$(U_g\varphi)(x) = \varphi(g^*x), \ \varphi \in (L^2),$$

で定義される (L^2) 上の線形作用素 U_g は, 前節の定理1よりユニタリとなる. これから $\{U_g; g \in O(S)\}$ は無限次元回転群 $O(S)$ の (L^2) におけるユニタリ表現であることがわかる.

命題 1. 任意の $n(\geq 1)$ について, 群 $G(\infty)$ の, 空間 H_n におけるユニタリ表現は既約である.

証明. $L^2(R)$ の任意の完全正規直交系 $\{\xi_n\}$ をとり, $\{<x, \xi_n>\}$ を座標系とするとき, 初めの n 個の座標は群 $SO(n)$ により自由に変換される. これからきまるユニタリ表現を用いれば定理の結果が容易に導かれる.

このように, 調和解析の立場からは, 部分群 $G(\infty)$ は直和分解 $(L^2) = \bigoplus H_n$ における解析を導くのに十分な群として位置づけられている. すなわち, そこでの調和解析は有限次元解析におけるもの (概念も手法も含めて) で近似されうるということである.

「註」この結果はホワイトノイズ入力を許す非線形システムの同定に応用される. その方法はしばしば Wiener 展開の方法とよばれて, 適用される分野も広い. 前節 各 H_n $(n > 1)$ は可算個の cyclic subspace に分かれるが, それらおのおのにおいて, 線形的な方法で成分をきめることができて, それらを合わせれば全体として非線形構造が決定される. 数学的には, shift から導かれる flow が可算ルベー

グ・スペクトルを持つことの反映として説明される.

この方法の具体的な適用例としては, 網膜の働きの解明に成功した K. I. Naka [38–40] の結果が有名である. また, 時系列におけるある種の非線形予測の問題においても重要な役割を果たしている. 註終わり

6.2. ラプラシアン (そのII)

第一章4.3.で考えたラプラシアンを調和解析の立場から, いくらか詳しく考察しよう. 我々の無限次元調和解析では種々のラプラシアンを必要とし, それぞれ異なった役割を果たす. 本小節の立場から最初に登場するのは無限次元 Laplace-Beltrami 作用素 Δ_∞ である.

$\{\xi_n\}$ を $L^2(R)$ の c.o.n.s. とするときそれは, 4.3 節の記号を使って

$$\Delta_\infty = \sum_n \{\partial_n^2 - <x, \xi_n> \partial_n\} \tag{1}$$

で与えられた.

この Δ_∞ はまた次の様にも表される (4.3. 命題 5) :

$$\Delta_\infty = -\int \partial_t^* \partial_t \, dt. \tag{2}$$

これがラプラシアンと呼ぶにふさわしいことは, 有限次元の球面ラプラシアンの特徴づけと同様に説明されるのである (命題.2 など) .

そのため前章 4.2 で扱った積の作用素 m_t と回転の生成作用素 $\gamma_{s,t}$ とを復習しておこう.

$$\begin{aligned} m_t &= \partial_t + \partial_t^*, \\ \gamma_{ts} &= m_t \partial_s - m_s \partial_t \\ &= \partial_t \partial_s^* - \partial_s \partial_t^* \end{aligned}$$

この m_t の記号を使って上の (1) の連続パラメータによる類似を書けば, 和を

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

積分にかえて

$$\int \partial_t^2 - m_t\partial_t \ = \ \int (-\partial_t^*\partial_t)\, dt$$

となり (2) と一致する.

命題 2. Δ_∞ はすべての $\gamma_{t,s}$ と可換である.

証明.

$$[\partial_u^*, \partial_u, \gamma_{t,s}] = \partial_u^*\partial_s\delta(t-u) - \partial_u^*\partial_t\delta(s-u) - \partial_t^*\partial_u\delta(s-u) + \partial_s^*\partial_u\delta(t-u).$$

du による積分をして

$$[\Delta_\infty, \gamma_{t,s}] = \partial_t^*\partial_s - \partial_s^*\partial_t - \partial_t^*\partial_s + \partial_s^*\partial_t = 0.$$

「註」 Δ_∞ はこの命題 2 の性質, および作用素として負であること, 1 を 0 に移すこと等で特徴づけられる. ただし正の定数を除く. 次の命題の前半はこのことを反映する. 証明のアイディアは明快であるが, 計算はやや複雑であるので, それは省略する. (T. Hida [16] 参照)

命題 3. 群 $G(\infty)$ はラプラシアン Δ_∞ をきめ, H_n は Δ_∞ の固有値 $-n$ に属する固有空間である.

証明. 前半は上の註からくる. また後半の事実はは直接計算による.

Laplace Beltrami 作用素が, 有限次元回転群で近似できる群 $G(\infty)$ で決定されるという事実は, 言いかえると Δ_∞ が有限次元的なもので近似できる性格のものであることである. (なお, 命題 1 のあとに述べた注意もあわせて参考のこと.)

次に定義するのは Volterra (または Gross) ラプラシアン Δ_V である. それは次式で与えられる:

$$\Delta_V = \int \partial_t^2\, dt.$$

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

これと $\gamma_{t,s}$ との交換関係は下の命題で示す通りであり, ラプラシアンとしての大事な性質を具えていることがわかる. .

命題 4. $[\Delta_V, \gamma_{t,s}] = 0.$

証明には等式

$$[\partial_u^2, \gamma_{t,s}] = 2\partial_u(\partial_s\delta(u-t) - \partial_t\delta(u-s))$$

を u について積分すればよい.

次の話題は, 大まかにいって, Lévy 群には Lévy ラプラシアンが対応するということである. 適当な c.o.n.s. $\{\xi_n\}$ を固定する. それは適当な解析的表現をもとめるために, 制限をおくことがある. 第一章 4 節の記号 $\partial_n = \partial(\xi_n)$ を用いて再び $\sum_n \partial_n^2$ を取り上げる. 勿論それは一般に発散する. しかし Lévy 群に対応するラプラシアンを取り上げようとするならば各座標は平等でなければならない. その上収束性まで要求するとすれば, 必然的に次のような Lévy ラプラシアンに到達する.

$$\Delta_L = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_1^N \partial_n^2.$$

このラプラシアンは前節 5.3. の例 3, および例 4 の変換で不変であり, 定義域は超汎関数の空間になる.

「註」 Lévy 群と Lévy ラプラシアンとの対応はいろいろな形で示される. それらを詳しく研究することは極めて有意義な課題である. また, N.Obata による特徴づけは重要な意味をもち, 興味深い. また最近 Saito-Tsoi により, 定義域となる超汎関数のクラスを更に広げて Δ_L が self-adjoint になるようにできることがわかり, このラプラシアンがより意義深いものとなった.

この作用素は $(S)^*$ 上で有効に作用し (このことは後の 7.1. で説明する), そこでラプラシアンの役割を果している.

また, パラメータを $T = [0, 1]$ に制限したとき Δ_L は 4.3. で述べたように, 標

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

語的に次のようにも表される (H.-H. kuo):

$$\Delta_L = \int_T \partial_t^2 \, (dt)^2.$$

ここで上式の直観的な意味を説明しておきたい. 後に (小節 7.1.) でみるように, Lévy ラプラシアンは singularity をもつ超汎関数に作用するが, 上式に現れる $(dt)^2$ のうち一つの dt はその singularity から生ずる $1/dt$ を消す作用をし, 残りの dt は積分のために用いられる. こうして, このラプラシアンは超汎関数の空間に有効に作用し, 真に無限次元的な作用素であることがよくわかる.

なお, 上の積分を T の長さで割っておくと計算上好都合なことがある.

命題 5. φ が (L^2) の元ならば

$$\Delta_L \varphi = 0$$

である.

証明. 各 H_n の元の積分表現の核は通常の L^2-関数で, それを c.o.n.s. のテンソル積を用いて展開すれば, 核が singularity を持たないことから明らかである.

この Δ_L を生成作用素とする 1-パラメータ群は (S) 上に作用し, Fourier-Mehler 変換とも関連して調和解析の中で興味ある役割を果たしている (Saitô [48]).

このあたりで, これまで代表的に取り上げた三つのラプラシアンの特性を比較しておこう.

Δ_∞ は有限次元調和解析, あるいはその極限としての解析にかかわる作用素である.

Δ_V は mean value theorem を反映し, 調和解析によく貢献するものである.

Δ_L は真に無限次元的であり, 超汎関数にたいする責任をもっている.

その他注目すべき比較対照できる内容が考えられよう. 宿題としたい.

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

6.3. Whiskers

回転群 $O(S)$ にもどり, これまでとは異質で重要なもう一つの部分群に注目しよう. パラメータ空間は R^d とする. R^d の微分同型 ψ は次のように関数空間 S の線形変換 g_ψ を導く.

$$g_\psi:\ \xi(u) \to (g_\psi \xi)(u) = \xi(\psi(u))\sqrt{|\psi'(u)|},$$

ただし $\psi'(u)$ は Jacobian である.

この g_ψ は前に登場した部分群 $G(\infty)$ の元とは性格を異にし真に無限次元的な変換を導き, またパラメータ空間 R^d の幾何学的な構造に強く依存するという意味においても異っている. そして g_ψ のタイプの回転の全体からなる $O(S)$ の部分群の群論的構造は複雑である. しかし次のような 1-パラメータ部分群を取り上げれば取扱いの解析的手法が見いだされる.

系 $\{\psi_t; t \in R^1\}$ を R^d の微分同型のなす連続な 1-パラメータ群とする:

$$\psi_t \cdot \psi_s = \psi_{t+s},$$
$$\psi_t \to I(\text{恒等写像})(t \to 0).$$

それに応じて

$$(g_t \xi)(u) = \xi(\psi_t(u))\sqrt{|\psi_t'(u)|}$$

によって定義される $\{g_t; t \in R^1\}$ が $O(S)$ の 1-パラメータ部分群を構成するとき, それを **whisker** と呼ぶ.

「註」 whisker の語源は無限次元回転群を円を用いて図示したとき, 上のような 1-パラメータ部分群は単位元を通る弧で表され, ちょうど “ひげ” のように見えることから, このように呼ばれるようになった. (fig. 2.1 参照) これはパラメータ空間の点変換から導かれるもので, 正規直交系をとって定義するものとは本質的に異なるものである.

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

Whisker は個別に扱われたり, またいくつかの whiskers が生成する $O(S)$ の部分群が有限次元リー群となるときには, 調和解析の既知の理論を用いて, 我々の解析の内容を豊富にすることができる.

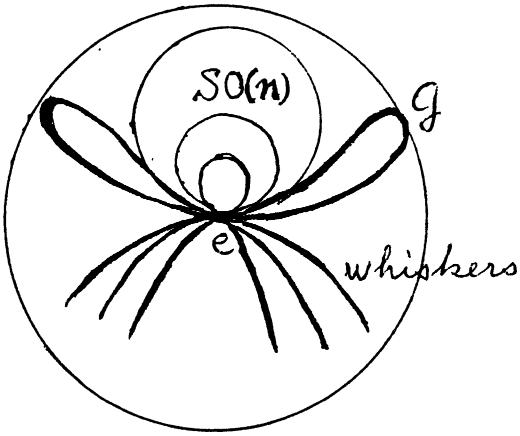


fig.2.1.

例 共形変換群 $C(d)$.

ここで考えようとする群 $C(d)$ は次の 4 種類の R^d の微分同型写像から導かれる.

1) shifts $S_t^i :\ u \to u - te_i$, e_i, $1 \leq i \leq d$, は座標ベクトル,
 ($d = 1$ のときは, すでに 5.2. 節で述べた.)

2) (isotropic) dilation $\tau_t :\ u \to ue^t$,

3) R^d の回転 $g \in SO(d)$,

4) 特殊共形変換 $\kappa_t^i :\ u \to wS_t^i wu$,
w は単位球面に関する反転.

この変換群 $C(d)$ を d-次元**共形変換群** (conformal group) と言う.

これら R^d の変換群 $C(d)$ に呼応し, 以下に述べるようにして, ふさわしい核型空間 D_O を構成し, 無限次元回転群 $O(D_0)$ の部分群としての共形変換群 $C(d)$ が定義される (混乱のない限りこの変換群も同じ共形変換群という名前で呼び, 同じ記号を使って表すことにする.)

ここで, 基礎となる核型空間はこれまでのような Schwartz 空間 S ではなくて, 次のような, R^d 上の関数からなる核型空間 D_0 が好都合である.

$$D_0 = \left\{\xi(u); \xi(u) \in C^\infty, \xi\Big(\frac{u}{|u|^2}\Big)|u|^{-(d+1)/2} \in C^\infty\right\}.$$

位相は微分作用素

$$(1+u_i^2)\frac{d}{du_i} + u_i$$

の積および任意べき が連続になるように導入する.

この空間は球面 S^d 上の C^∞-関数の作る空間と位相同型になる.

上記 1) - 4) から導かれる無限次元回転群 $O(D_0)$ の 1-パラメータ部分群として

1)shifts $S_t^i: \ \xi(u) \to \xi(S_t^i u)$,

2)dilation $\tau_t: \ \xi(u) \to \xi(ue^t)e^{td/2}$,

3) 回転 $g: \ \xi(u) \to \xi(gu), g \in SO(d)$,

4) 特殊共形変換 $\kappa_t^i: \ \xi(u) \to \xi(\kappa_t^i u)\sqrt{|J(\kappa_t^i u)|}$, J は Jacobian.

が対応する.

ここで空間 D_0 の選択が 4) の 1 パラメータ部分群は確かに $O(D_0)$ の部分群になっていること, および t について連続であることを保証していることに注意したい. 他の whisker については明らかであろう.

これらの 1-パラメータ群の生成作用素を 1), 2), 3), 4) の順に $s_i, \kappa_i, \tau, \gamma_{ij}$ と書けば, それらの具体的な形は次のようである. u を変数にとると

$$\begin{aligned}
s_i &= -\frac{\partial}{\partial u_i}, \\
\tau &= \Sigma u_i \frac{\partial}{\partial u_i} + \frac{d}{2}, \\
\gamma_{ij} &= u_i \frac{\partial}{\partial u_j} - u_j \frac{\partial}{\partial u_i}, \\
\kappa_i &= u_i^2 \frac{\partial}{\partial u_i} + u_i.
\end{aligned}$$

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

となる.

また, それらの交換関係は次の表に示す通りである.

$$[s_i, s_j] = [\kappa_i, \kappa_j] = [\tau, \gamma_{ij}] = 0,$$

$$[s_i, \tau] = s_i, [\kappa, \tau] = -\kappa, [\kappa, s] = 2\tau$$

$$[\gamma_{ij}, \gamma_{jk}] = \gamma_{ik} \quad i \neq k$$

$$[\gamma_{ij}, \gamma_{k\ell}] = 0, \quad i, j, k, \ell \text{ 異なる},$$

$$[\gamma_{ij}, \kappa_j] = \kappa_i,$$

$$[\gamma_{ij}, \kappa_k] = 0, \quad i, j, k \text{ 異なる},$$

$$[\gamma_{ij}, s_j] = s_i,$$

$$[\gamma_{ij}, s_k] = 0, \quad i, j, k \text{ 異なる},$$

命題 6. 共形変換群 $C(d)$ は $\frac{(d+1)(d+2)}{2}$ 次元リー群であり, それは位相群 $SO(d+1, 1)$ と局所同型である.

証明. この事実は次に表すようにリー環が同型になることから証明される. $SO(d+1, 1)$ のリー環は次のような表示をもつ'

$$\begin{aligned} L_{ij} &= x_i \frac{\partial}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad 1 \leq i \neq j \leq d+1, \\ K_j &= x_o \frac{\partial}{\partial x_j} + x_j \frac{\partial}{\partial x_o}, \quad 1 \leq j \leq d+1. \end{aligned}$$

それらの交換関係は

$$\begin{aligned} [K_i, K_j] &= L_{ij}, \\ [L_{ji}, K_i] &= K_j, \end{aligned}$$

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

$$[L_{ij}, L_{jk}] \;=\; L_{ik},$$

である．いま

$$\begin{aligned} s_j &= L_{j,d+1} + K_j, \\ \kappa_j &= -L_{j,d+1} + K_j, \\ \tau &= K_{d+1}. \\ \gamma_{ij} &= L_{ij}. \end{aligned}$$

または

$$\begin{aligned} L_{j,d+1} &= \frac{s_j - \kappa_j}{2} \\ K_j &= \frac{s_j + \kappa_j}{2}. \end{aligned}$$

とおくと, それらはすでに同じ記号で示した4種類の要素の交換関係とちょうど一致していることがわかる．すなわち群 $C(d)$ のリー環に同型である．

「註」 次ページの Fig.2.2. はリー環の構造を図で説明するものである．なお

$$A = \{\tau\},\ N = \{\kappa\}, K = \{s + \kappa, \gamma\}$$

とおくとき

$$C(d) = KAN$$

は岩沢分解となる．ただし, $\{\cdot\}$ は括弧内の要素で生成される Lie 部分群を表す．このように Lie 群の構成が確率論的な性質に反映するのを見るのは興味深いことである．

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

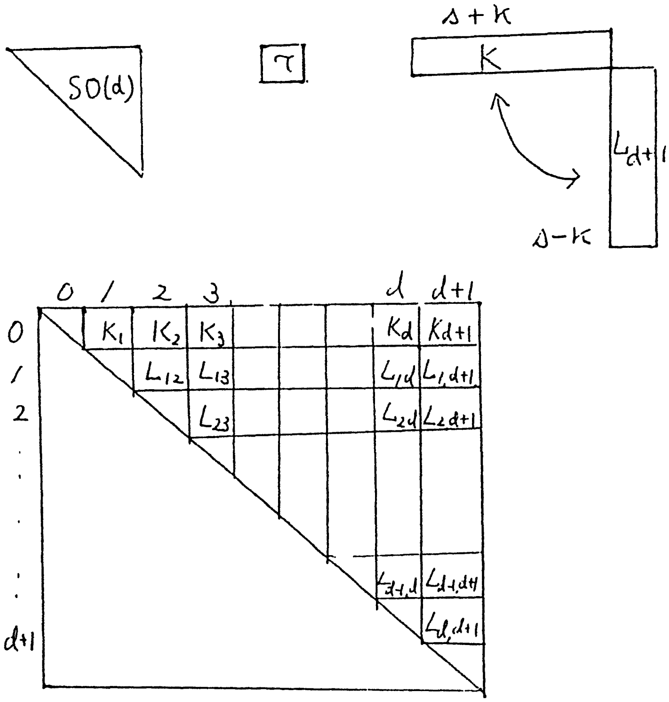


Fig.2.2.

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

この群は, ホワイトノイズ (あるいはブラウン運動) の確率論的な性質をよく記述している. 例えば, $d=1$ なら, それは Lévy のブラウン運動の射影不変性 ([18] Chapt. 5 参照) を回転群の立場から説明している. それはブラウン運動から導かれる固定端ブラウン運動を規格化した (分散が常に1であるようにした) ものの分布が上に述べた射影変換による変換で不変であることを示すものである. また, $d>1$ のときも, その一般化として, 多次元をパラメータにもつある種のホワイトノイズの線形汎関数の共形不変性が証明されている.

群 $C(d)$ のように, その要素がパラメータ空間 R^d の微分同型であるような変換群は次節で述べる確率場 $X(C)$ に対して許容される C の変換として与えられる. それは直ちに $O(S)$ の元に, そして対応するユニタリ作用素に結び付くので好都合である. また, 2次元の場合は正則関数の性質, すなわち正則関数による複素平面の変換が共形変換になるという事実が利用できて, 確率場の有効な解析手段が提供される.

ところが, 3次元あるいはそれ以上の次元のユークリッド空間では, 共形変換のなす群は, 適当な解析性を仮定すれば, 等長変換, 伸び (dilation), 単位円に関する反転 (inversion) だけから生成されることが知られている (Liouville の定理). すなわち上に述べた群となり物事は簡単になる.

なお, ユークリッド群と dilation とを併せた homothety 群の確率論的な作用について調べることも興味深いものであろう.

6.4. Functional rotations

V. Volterra はヒルベルト空間 $H=L^2([0,1])$ に作用する積分核によるある種の等長変換による H の回転を定義した. すなわち $f\in H$ にたいして $K[f]$ を

$$K:\ f\to K[f](s)=f(s)+\int_0^1 K(s,u)f(u)\,du$$

によって定義する. ここに $K(s,u)$ は (s,u) について2乗可積分とする. すなわち Hilbert-Schmidt 型の積分作用素になる. 上式は Fredholm 型の積分方程式論

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

で扱われる変換であり, 容易に知られるように, これが $H \to H$ の等長変換であるためには

$$K + K^* + K^*K = 0 \qquad (*)$$

となることが必要十分である.

こうして H の回転 K が定義される.

$K[f] = g$ とかくとき K の逆元は

$$g + K[g]$$

で与えられる. すなわち上式は元の f になる.

命題 7. $(I+K)^{-1} = I + K^*$

証明. 定義域に注意して $I+K$ が bijective であることから容易にわかる.

Kx は stochastic bilinear form

$$<K(t,\cdot), x(\cdot)> = (Kx)(t)$$

と理解すべきである. このような K からなる群を解析的に扱うためには $O(E)$ というよりは $O(H)$ としてみるべきであろう. すなわち, 設定をいくらか修正する必要があるが, それにしても興味深い群であるこは間違いない. たとえば, ホワイトノイズ測度 μ をこれと同等な (互いに絶対連続な) 測度に移す変換の集まりと考えること等である. この際 H の位相は E の位相とは異なることに注意したい.

「註」i) いわゆる Fredholm 変換は, このような functional rotation と functional dilation とからなることが知られている. (J. Delsarte)
ii) 本小節の内容の詳細は V. Volterra [58] に譲る.

特に K が対称核の場合には, Hilbert-Schmidt の展開定理により

$$K(s,u) = \sum_n \lambda_n \varphi_n(s)\varphi_n(u),$$

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

と展開される. ただし $\{\varphi_n\}$ は積分作用素 K の固有関数のなす正規直交系である. このとき条件 $(*)$ はすべての λ_n が 0 または -2 でなければならないことを示す. 特に 0 でない固有値, すなわち -2 の重複度は有限である.

このように, 我々の解析に適した R^d の変換群をとりあげ, それに対するラプラシアンのような作用素を導入することができたら, いわば確率場の調和解析に有効であるに違いない. また, 次章で扱う確率場において, パラメータ C の変形に用いる変換群に対しても同様なことが期待されるであろう.

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

第三章 確率場と変分

§7. 確率場

これまで我々が扱った確率変数の系は, パラメータが1次元ユークリッド空間の点であって, それは時刻を表すものと考えられ, その意味で, 確率過程とか時系列などと呼んできた. パラメータをより一般にして, 多次元 (無限次元の場合もある) 空間の中を動くとしたとき, ランダム性のありかたは極めて複雑になり (いわばランダムな**複雑系**となり), 興味深い確率論的な事実が見出される. 情報理論的にいえば, このときはパラメータの動きに応じて多量の情報を運ぶものといえる (小節 7.2. 参照) .

一方, 物理学や分子生物学などの現象の中に, そのようなランダムで非線形な複雑系が存在し, かつ基本的な役割を果たしていることが次第に明らかになってきた. ゆらぎを含んだこれらの現象の数学的な取り扱いにおいて, ホワイトノイズ解析が果たす役割は極めて重要である. ところで, 自然はそれぞれの固有な意味で optimal なことをしていると考えられる. そのような現象は時空を表す多次元のパラメータをもつ場として表されることが多い. そこでの問題は当然, 場を表す汎関数の停留値を求めることに帰着され, 変分法の理論を必要とする (後の例 2, 例 3 参照) . 本章はこれら諸事実の理解と認識を深めるための第一段階としたい.

7.1. 関数に依存する確率場

本章では関数 f または多様体 C をパラメータとする確率場を考える. 後者の場合でも, もし多様体 C が関数 f で表されるなら, ホワイトノイズ x の汎関数として $X(f,x) = X(f)$ のように表される確率変数の系を考えればよい. ただし, C に対して f の選び方は一意ではないことに注意する. とりあえず本節では, まず $X(f)$ と表される確率場を扱おう. さらに, この $X(f)$ を S-変換することにより, それは $U(f,\xi)$, $\xi \in E$, のように表現されるとしてよい. ここで E は十分滑らか

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

な関数のつくる $L^2(R^d)$ の部分空間でこれまでと同じく可算ヒルベルト核型空間とし, 以後これを基本空間にとることにする.

考える確率場をこのように表現したときは, その取り扱いを直ちにこれまでのような汎関数解析の話に持ち込むことができる.

汎関数 U の定義域をノルム空間 E 全体として, 扱う汎関数を $U(\xi)$ と書く. 変数の微小変化 $\delta\xi$ に対して U の変化は

$$\Delta U = \delta U(\xi) + o(\delta\xi)$$

と表され, しかも右辺の第一項は 空間 E の位相で $\delta\xi$ の連続な線形汎関数であるとする. このとき ξ と $\delta\xi$ の汎関数 $\delta U(\xi)$ を $U(\xi)$ の**変分**という.

変分が存在するとき, 仮定から E の共役空間 E^* の元 F が存在して

$$\delta U(\xi) = <F, \delta\xi>,$$

と書くことができる. ただし $<\cdot\,,\,\cdot>$ は空間 E とその共役空間 E^* を結ぶ基本 bilinear form である.

上式における関数 F が**汎関数微分**であり, それを $U'(\xi,\cdot)$ のように表すことがある.

一変数関数のときの類似から容易にわかるように, 汎関数が極値 (停留値ともいう) をとるとき, その汎関数微分は 0 になる.

次の結果はよく知られている.

命題 1. 関数 $F(x,y,z)$ は 3 つの実変数 x,y,z について C^1-クラスとする. このとき, 汎関数

$$U(\xi) = \int_a^b F(t,\xi,\xi')\,dt, \quad \xi \in E,$$

が ξ で極値をとるための必要条件は, そこで

$$F_\xi - \frac{d}{dt}F'_\xi = 0,$$

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

が成り立つことである.

定義. 上に得られた式を **Euler 方程式**という.

次の二つの例は, 変分原理から導かれる Euler 方程式によってきまる自然現象である.

例 1. 解析力学における最小作用の法則.

T を運動のエネルギーとし, U をポテンシャルとする. Lagrangian L は

$$L = T - U$$

で与えられ, 一般にそれは時刻 t に依存する: $L = L(t)$ の時間区間 $[0, t]$ における作用 $A(t)$ は積分

$$A(t) = \int_0^t L(s)\, ds$$

で与えられる.

自由度が 1 のとき, 一般に U は位置 q のみの関数で, T は q と速度 $\dot{q}$ の関数としてよい. そのとき, Euler 方程式は次のようになる (Lagrange の運動方程式):

$$T_q - U_q - \frac{d}{dt} T_{\dot{q}} = 0.$$

例 2. Logistic 曲線. Lotka-Volterra 方程式.

V. Volterra は 1939 年に (文献 [60]), ある種の生物集団の個体数の統計に関して, 変分法を用いて, その時間的推移を表す logistic 曲線を導く興味深い結果を報告している. その場合, 変数となる関数は個体数の時間積分である quantity of life である. 汎関数は vital action と呼ばれるものにとるが, それはエントロピーに束縛条件をつけたもので, アイディアは古典力学における最小作用の法則から運動方程式を導くのに似ている. それは情報理論の立場で次のように定式化される (Win Win Htay の設定による).

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

時刻 t における個体数を $N(t)$ とする.

$$X(t) = \int_0^t N(s)\,ds$$

が quantity of life である.

問題とする汎関数の記述にあたり, V.Volterra は, 理由があって, $N(t)$ 自身ではなくて関数 $X(t)$ を変数とする汎関数を考え, その変分を論じている. いま, $X(t)$, $0 \le t \le T$, の関数

$$\begin{aligned} F(X(t), X'(t)) &= F(t) \\ &= m_1 \frac{dX}{dt} \log \frac{dX}{dt} + m_2\Big(\varepsilon - \lambda \frac{dX}{dt}\Big) \log\Big(\varepsilon - \lambda \frac{dX}{dt}\Big) + KX \end{aligned}$$

を取り上げよう. これから定義される

$$P(X) = \int_0^T F(t)\,dt$$

を, V. Volterra に従って, 時間区間 $[0, T]$ における total vital action と呼ぶ.

汎関数 P の極値を与える $X(t)$ あるいは $N(t)$ は変分法によって, すなわち Euler 方程式を解くことによって求めることができる.

$$F(X, X') = m_1 X' \log X' + m_2(\varepsilon - \lambda X') \log(\varepsilon - \lambda X') + KX$$

だから Euler 方程式は

$$F_X - \frac{d}{dt} F_{X'} = 0$$

すなわち

$$K - \frac{d}{dt}\{m_1 \log X' + m_1 - m_2 \lambda \log(\varepsilon - \lambda X') - \lambda m_2\} = 0$$

故に

$$K - m_1 \frac{X''}{X'} - m_2 \lambda^2 \frac{X''}{\varepsilon - \lambda X'} = 0.$$

ここで

$$m_2 \lambda = m_1, \; K = m_1 \varepsilon$$

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

とすれば

$$X'' = X'(\varepsilon - \lambda X')$$

となる. $N(t)$ についての方程式になおしていわゆる logistic 方程式

$$\frac{dN}{dt} = N(\varepsilon - \lambda N).$$

が得られた. この常微分方程式の解は

$$N(t) = \varepsilon\Big\{\Big(\frac{\varepsilon}{N} - \lambda\Big)e^{-\varepsilon t} + \lambda\Big\}^{-1}, \quad N = N(0),$$

である.

解 $N(t)$ のグラフは Fig.3.1 に示すようになる.

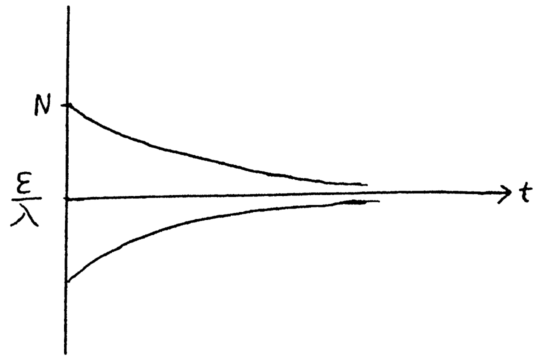


Fig.3.1

「註 1」 前述の P は free energy の類似と考えられる (久保泉氏のコメントによる).

「註 2」$N(t)$ は個体数を表す離散変数であり上のように微分を駆使するわけにはいかないが, 大きな数で, さらに理論のために理想化したものと考えることにする. $N(t)$, あるいは変数 $X(t)$ についてのもう一つの注意は当然のことながら, それらが常に正の値をとるということである. Euler 方程式を導くにあたり変数は線形空間を自由に動くとしているが今の場合は正という制限をつけている. しかし, $X(T)$ は局所的に Euler 方程式を導くのに必要なだけ変化させうるので問題

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

はない. (関連した一般の話としては Si Si の Volterra Center Lecture Note, no. 379, 1999 参照.)

話は時間的に少し遡るが, Volterra は同じような考え方で変分法により, いわゆる Lotka-Volterra 方程式を導いている. (V. Volterra [59] 参照). そこでは, 一般に n 個の種が互いに個体数の積に比例した相互作用をもって増殖する場合の方程式を変分法により導いている. $n=2$ のときは Prey と Predator の具体的な関係として理解し易いので, それを見てみよう. 再びエントロピーを登場させ, それと他の意味のつけられる量との和として Lagrangian 関数を導入し, 変分法により問題の方程式び到達している. Volterra のアイデイアを追ってみよう.

記号 $N(t)$ や $X(t)$ は前と同じ意味に用いる. Lagrangian 関数は

$$\begin{aligned} F(t) &= F(X(t), X'(t)) \\ &= \{-aX_1'\log X_1' - bX_2'\log X_2'\} + \frac{1}{2}\{X_1X_2' - X_2X_1'\} + \alpha\epsilon_1 X_1 - \beta\epsilon_2 X_2, \end{aligned}$$

但しすべての定数は正である.

logistic 曲線を得たときと同様に, $F(t)$ の第一の $\{\cdot\}$ はエントロピーと補正項に, 第二の $\{\cdot\}$ は定数を除き angular momentum に関連する. 補正項は条件つき変分の役割を果たすと考えれば, 時間区間 $[0,t]$ で考えたとき

$$P(X) = \int_0^t F(X, X')\,dt$$

の極値は,

$$\delta P(X) = \int_0^t \Big(a\frac{X_1''}{X_1'} + X_2' + \alpha\epsilon_1\Big)\delta X_1\,ds + \int_0^t \Big(b\frac{X_2''}{X_2'} - X_1' - \beta\epsilon_2\Big)\delta X_2\,ds = 0$$

から求まる. すなわち次の Lotka-Volterra 方程式が得られる.

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} &= (\epsilon_1 - a^{-1}N_2)N_1, \\ \frac{dN_2}{dt} &= (-\epsilon_2 + b^{-1}N_1)N_2. \end{aligned}$$

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

なお I. Prigogine [47] p.216 参照.

例 3 Ginzburg-Landau 方程式.

よく知られた Ginzburg-Landau 方程式もエネルギー汎関数の停留値を与えるものとして導かれる. (数理科学 1997 Nov. 森田善久氏の解説を参照されたい). なお, この話題については中根和昭氏に情報を頂いた. 同氏に感謝する.

例 4. 最大エントロピーをもつ分布.

R^d 上の確率分布が滑らかな密度関数をもつ場合を考え, その密度関数を $p(x)$, $x=(x_1,x_2,\ldots,x_d)\in R^d$, とかく:

$$p(x)\geq 0.$$

さらに自明な条件

$$\int p(x)dx^d=1.$$

を満たしている. このときエントロピー $H(p)$ は次式で与えられる:

$$H(p)=-\int p(x)\log p(x)\,dx^d.$$

共分散についての制約のもとで $H(p)$ を最大にする p を求めたい.

この量 $H(p)$ は R^d 上の平行移動に関して不変である. したがって分布の平均ベクトルは (その存在を仮定して) 0 としてよい.2 次のモーメントの存在を仮定し, 共分散行列 $V=(v_{ij})$ が決まっている場合を考えよう.

命題 1. 共分散行列が指定された分布 $p(x)$ のうちで $H(p)$ を最大にするものはガウス分布である.

証明の準備として Jensen の不等式から導かれる補題をあげておく.

補題 $p(x)$, $q(x)$ を共分散行列が V の分布の密度関数とするとき

$$H(p)\leq -\int p(x)\log q(x)\,dx^d.$$

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

ただし, $0\log 0 = 0$, $p > 0$ のとき $p\log 0 = -\infty$ と理解する.

もう一つの準備は, 平均ベクトル 0, 共分散行列 V のガウス分布 q のエントロピー $H(q)$ の計算である.

$$q(x) = (2\pi)^{-d/2}|V|^{-1/2}\exp[-\frac{1}{2}(V^{-1}x, x)]$$

だから, 簡単な計算で

$$H(q) = \frac{d}{2}\{\log(2\pi) + 1\} + \frac{1}{2}\log|V|$$

がわかる.

以上の準備のもとに, $p(x)$ が平均ベクトル 0 で共分散関数が指定された V である密度関数とし, また $q(x)$ を上のガウス分布の密度関数とするとき, 補題から次の不等式が得られる.

$$H(p) \leq \int p(x)\Big\{\frac{d}{2}\log(2\pi) + \frac{1}{2}\log|V| - \frac{1}{2}\sum r_{ij}x_i x_j\Big\}\, dx^d,$$

ただし, $V^{-1} = (r_{ij})$. この右辺は $H(q)$ に等しい. よって次の主張が証明された.

命題 2. p, q は同じ共分散をもつ確率密度関数で, 特に q はガウス型とすれば

$$H(p) \leq H(q).$$

この事実を情報理論的な立場でみると, パワー (分散) が一定という条件のもとでは, ガウス分布が最大の情報量を運ぶことがわかる. 一方, ノイズの立場からは, 最も妨害が大きく好ましくない場合になる.

注意 ここで扱う p は正値で積分が 1 という制約の下で変化しうるもので, 動く領域は線形空間ではない. 従って, 形式的に Euler 方程式を適用することはできないことに注意しなければならない.

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

参考 変分法の逆問題.

これまでの諸例では, 作用積分とか, 情報量などのような評価関数が与えられて方程式を導き出すのが主題であった. 逆に, 発展方程式のような場合に, 方程式から出発して, 評価関数なり Lagrangian なりを探し出すのも興味ある問題である. これについては, 最近の Bracken によるレポート [6] をあげておきたい.

2 階汎関数微分

一般の汎関数にもどる.

汎関数 $U(\xi)$ の 2 階変分 $\delta^2 U$ は δU の変分 (存在を仮定して) であり, 2 階汎関数微分は

$$\delta^2 U = \langle F, \delta\xi \otimes \delta\xi \rangle, \quad F \in (E \times E)^*,$$

における F で与えられる.

関数 F が対角線上を除き通常の関数であるとき, 対角線上の値を 0 に換えたものを $U''_{\xi\eta}(t,t')$ と書く. また F の対角線上の singularity が $U''_{\xi\xi}(t)\delta(t-t')$ と書けるとき, それを t の関数とみて単に $U''_{\xi\xi}(t)$ と書きなおす. 勿論, 二つの 2 階汎関数微分は ξ にも依存する汎関数である.

$U''_{\xi\eta}(t,t')$ と $U''_{\xi\xi}(t)$ をそれぞれ U の 2 階汎関数微分の **regular part** および **singular part** と呼ぶ.

古典関数解析の記号に従えば

$$\delta^2 U = \iint U''_{\xi\eta}(t,t')\delta\xi(t)\delta\xi(t')\,dt\,dt' + \int U''_{\xi\xi}(t)[\delta\xi(t)]^2\,dt$$

となる.

$\delta U = 0$ となる点で $\delta^2 U > 0$ ならば, そこで U は 極小, $\delta^2 U < 0$ なら極大であり, 有限次元のときと同様である.

ラプラシアンとの関連

ホワイトノイズ超汎関数に Lévy ラプラシアンを作用させるには, その S-変換

を U とするとき, その 2 階汎関数微分の singular part $U''_{\xi\xi}(t)$ の積分 (トレース) の逆 S-変換としても定義される. 一方, $F(t,t')$ のトレース が定義されるときは, その逆 S-変換は Volterra ラプラシアン Δ_V(あるいは Gross ラプラシアン Δ_G) を定義する. 勿論これらは既に第二章で扱ったものと一致する.

超汎関数 φ の S-変換を $U(\xi)$ とすると

$$S(\Delta_L\varphi)(\xi) = \int U''_{\xi\xi}(\xi,t)\,dt.$$

であることはすでにみた通りである. ここで $U''_{\xi\xi}(\xi,t)$ は $U(\xi)$ の 2 階変分の singular part を表す.

これから直ちに次の命題が示される.

命題 3. Lévy ラプラシアンは S-変換を通じて derivation として作用する.

「註」 "S-変換を通じて" は "Wick 積に関して" といってもよい.

上の命題の内容を詳しくいえば, 次のようになる. ホワイトノイズ超汎関数 φ, ψ の S-変換をそれぞれ U, V とし, $S\Delta_L S^{-1} = \tilde{\Delta}_L$ とおくとき

$$\tilde{\Delta}_L(U\cdot V) = \tilde{\Delta}_L U\cdot V + U\cdot\tilde{\Delta}_V$$

が成り立つ.

命題 3 の証明. 積 UV の 2 次変分は

$$\left[\int U''_{\xi\xi}(\xi,t)(\delta\xi(t))^2 dt + \iint U''_{\xi\xi}(\xi,t,s)\delta\xi(t)\delta\xi(s)\,dt\,ds\right]\cdot V(\xi) + I + II,$$

ここで項 I は上式の第一項の U と V を入れ替えた式であり, 項 II は U, V それぞれの 1 次変分の積である. Lévy ラプラシアンを求めるにあたり, 項 II は無視できる. 第一項からは [ ] 内の第一項のみが現れ V との積が残る. 同様にして項 I からは U と V とを入れ替えたものが残る. あわせて, derivation であることが示される.

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

7.2. 多様体 C に依存する確率場

多次元パラメータ t に依存したランダム現象を記述する実数値確率過程 $\{X = X(t); t \in R^d\}$ があって, t がある領域 C を動いて観測値 $X(C)$ が得られたとしよう. C が変形したときの $X(C)$ の変化をみることは, もとの確率過程 X の持つ複雑な従属性を知る上で重要な情報となる. C はあるクラス $\mathbf{C}$ を動くとして, 系 $X = \{X(C); C \in \mathbf{C}\}$ は一つの $X(t)$ から導かれるので consistent に定義されていることに注意する.

また別な形で確率場の現れる場合がある. "ゆらぎ" がホワイトノイズ x で表されるとして $X(C)$ は C を境界とする R^d の領域内で発生するゆらぎによってきまる確率変数とする:

$$X(C) = X(C, x) = \varphi(C, x).$$

こうして $\{X(C)\}$ は R^d の中を動くパラメータ C をもつホワイトノイズの汎関数の系となる.

その他, 力学, 特に場の量子論で多様体をパラメータにもつ確率場といして表現できる場面も多く見られ, 興味ある話題を提供している.

ここで確率場に対して少し情報理論的な考察を加えておきたい. 言うまでもなく, 通常の確率過程 $X(t)$ では時刻を表す t は直線 (それは 1 次元) 上の一点であり, $X(t)$ は t の動きに応じて動いている偶然現象の時間的な変化の様子を記述する. ところが, 例えばパラメータが t の代わりに曲線 C となり, それがあるクラス $\mathbf{C}$ を動くとしよう. C の次元は 1 であり, 一般に $\mathbf{C}$ は "無限次元" であることに注意したい. この事実から, C の動き (変形) によって $X(C)$ の表す (あるいは伝達する) 情報の量が破格に大きくなることが理解できよう. 観測データの取得法について参考になる事柄である.

また C の変形は C 上の各点に対して平等である. 確率場の場合 C の各点に (確率) 素子が attach されており, C の変形にあたっては, 素子はすべて平等な推移

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

の可能性をもつ ので, 真の無限次元の解析がそこに現れるのである. このことも確率場の変分の著しい特徴の一つである.

本論に入る前に, ここでの変分と C の汎関数を扱った古典関数解析の結果とのつながりを少しばかり見ておきたい. それは, 例えば C が 2 次元空間の中を動く滑らかな単一閉曲線 (contour とか loop と呼ぶ) の場合に見やすい.

古典解析学の流れの中で, contour C を変数とする関数の取り扱いはヨーロッパにおいて盛んに試みられていた. 1910 年代にこの方面で活躍した L. Tonelli の名をあげたい. 彼には, Hadamard や Volterra の影響が大きかったようであるが, 多数の論文 (Tonelli 全集 4 冊 1960 -) の中で変分に関するものは第 2 巻 (1961) に収められているし, その内容は 2 冊の分厚い書物

Fondamenti di Calcolo delle Variazioni. vol. 1, 2

として刊行された (1921-1923).

とかく, 直観的な記述に陥りがちな古典変分法の中で, 比較的明快な説明がつけられているのは, グリーン関数に関する Hadamard 方程式であろう. そこでのアイディアを理解するために, その内容の簡単な考察から始めよう.

$\mathbf{C}$ を平面上の滑らかな単一閉曲線 C, すなわち contour の系とし, C で囲まれた領域を (C) と書く. また, この領域に対するグリーン関数を $g(C,x,y)$ で表す. contour C の内側への微小な変換により $C+\delta C$ (標語的な記号) になったとしよう. このとき $g(C,x,y)$ の変分を $\delta g(C,x,y)$ で表せば次の定理が得られる. C の微小変化 δC を C 上の関数 $\delta(m)$, $m \in C$, で表す.

定理 1. グリーン関数 $g(C,x,y)$ の変分は

$$\delta g(C,x,y) = -\frac{1}{2\pi}\int_C \frac{\partial g(C,x,m)}{\partial n_m}\frac{\partial g(C,m,y)}{\partial n_m}\delta n(m)\,dm$$

をみたす.

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

証明に入る前に特殊な場合についての例をあげておく.

例 1. 系 **C** が円板のみからなるとき. グリーン関数は

$$g(C,x,y) = \log \frac{L}{R}\frac{r'}{r},$$

である. ここで, R は円の半径, L は中心から y までの距離, r は x と y との距離, また y' を円に関する y の鏡像とする. すなわち $|y|\cdot|y'| = R^2$ で, r' は x と y' との距離を表す.

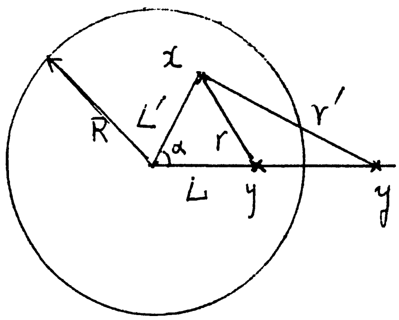


Fig.3.2

ここで, 初等平面幾何学の事実を使って, グリーン関数が x, y について対称であることが容易に確かめられる.

このとき円 C の変形は同心円的に拡大, 縮小するのみとしよう. 変分の計算では, δn の内向きを正にとれば, それは $-dR$ で表されるので次の式のようになる: L' を中心から x までの距離として,

$$\delta g(C,x,y) = \Big(\frac{1}{R} - 2R\frac{R^2 - LL'\cos\alpha}{r'^2L^2}\Big)\,dR,\ dR>0$$

また内向き法線方向の微分については

$$\Big\{\frac{\partial}{\partial n}g(C,x,y)\Big\}_{x=m} = \frac{1}{R}\frac{L^2-R^2}{R^2+L^2-2RL\cos\theta},\quad m\in C.$$

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

ここで $0 \leq \theta < 2\pi$ は円周のパラメータ表示である.

同様にして

$$\left\{\frac{\partial}{\partial n} g(C,x,y)\right\}_{y=m} = \frac{1}{R}\frac{l'^2 - R^2}{R^2 + L'^2 - 2RL'\cos(\alpha-\theta)}, \quad m \in C.$$

したがって Hadamard 方程式は

$$\begin{aligned}&\delta g(C,x,y)\\ = \ & -\frac{1}{2\pi R^2}\int_0^{2\pi} \frac{(L'^2-R^2)(L^2-R^2)}{(R^2+L'^2-2RL'\cos(\alpha-\theta))(R^2+L^2-2RL\cos\theta)} R\,d\theta\,dR\\ = \ & \left(\frac{1}{R} - 2R\frac{R^2 - LL'\cos\alpha}{r'^2L^2}\right) dR\end{aligned}$$

となる. この等式は直接計算によって確かめられるところである. こうして, 特別な場合に Hadamard 方程式が証明される.

定理の証明

古典解析的な大らかな証明を示す. それは調和関数の性質から導かれる. グリーン関数 $g(C,x,y)$ は

$$g = \log\frac{1}{r} - h, \quad h \text{は調和関数},$$

の形に表され, x または y が境界上の点に近づけば g は 0 になる.

曲線 C を含む領域 (C) において調和な関数 $u(x)$ は, その境界での値 $u(m)$, $m \in C$, によって

$$u(x) = \frac{1}{2\pi}\int_C u(m)\frac{\partial g(C,x,m)}{\partial n_m}\,ds$$

と書ける. すなわちグリーン関数を知ればディリクレ問題が解ける. この事実から定理の等式が示される. q.e.d.

上の例でわかるように, 変分の計算には C の動く系 $\mathbf{C}$ のみならず C の可能な変換のクラスを指定する必要がある. 許される変換の全体は群をなすとすれば好都合である. その群は必要なだけ大きく, また計算を困難にするほど大きすぎてもいけない.

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

一方で, 我々はホワイトノイズ解析に応用するのだから, 別な注意も必要となる. 実際, パラメータ空間 R^d の微分同型のなす変換群 M は確率素子の変換を導く. それが正確な意味をもつために次のような設定をする.

1) 適当な $\psi \in M$ により前節のように $g = g_\psi \in O(S)$ が得られたとする. この g により

$$\dot{B}(t) \to g^* \dot{B}(t),$$

あるいは, 一般に $x \in S'$ に対して

$$x \to g^* x.$$

という変換が定義される.

2) C 上の点をパラメータにもつホワイトノイズが定義可能であること. すなわち, C 上で定義されている超関数の空間にホワイトノイズ測度が導かれ, その確率測度が μ の周辺分布となっていることが要求される. そのための十分条件として, C が凸領域を囲むこと (2 次元なら卵形線, 3 次元なら卵形面) があげられる.

3) C の動かし方はパラメタ空間に作用する変換群 M で記述したい. これは後の 7.3. 節で述べる.

確率場 $X(C)$ が上記のように $X(C,x) = \varphi(C,x)$ として $(S)^*$ の元であり, さらに任意の $g \in G$ について

$$X(gC,x) = X(C,g^*x)$$

ならば, $X(C)$ は M-**定常**であると言う.

例 2. $d=1$ としよう. そのとき C は 0 次元, すなわち 1 点からなる. それを t と書こう. このとき, 次の式で与えられるガウス型定常過程 $X(t) = X(t,x)$, $x \in S'$, を考える.

$$X(t,x) = \langle F_t, x \rangle, \quad -\infty < t < \infty.$$

ここに, $F_t(u) = \psi_{(-\infty,t]}(u) \exp[-\lambda(t-u)]$, $\lambda > 0$, ψ は定義関数とする.

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

いま S_t を shift, $T_t = S_t$ とおくと,

$$<F_t, T_h x> = <F_{t+h}, x> = X(t+h, x).$$

すなわち, $X(t)$ は $M = \{\text{shifts}\}$ として M-定常である. ($d = 1$ で M が shift だけの場合は単に定常過程というのが普通である.)

またユニタリ表現 (§5) を用いるならば, $U_t\varphi(x) = \varphi(T_t x)$ として, $X(t) = U_t X(0)$ とも表される.

上の例における $X(t)$ はマルコフ過程でもあり, いわゆるランジュバン方程式

$$\frac{dX(t)}{dt} = -\lambda X(t) + x(t) \quad (x(t) = \dot{B}(t))$$

をみたす. この式はホワイトノイズ $x(t)(= \dot{B}(t))$ が $X(t)$ から直接求められることを示している. このとき $x(t)$ は $X(t)$ の新生過程 (innovation;[35], [51] 参照) になっている.

この事実の一般化と見られる P. Lévy の提唱した infinitesimal equation (1.4 節を参照)

$$\delta X(t) = \varphi(X(u); u \le t, Y_t, t, dt)$$

を思い出そう (次の 7.3. 節を比較 参照) を思い出そう. ここで, φ はランダムでない関数, Y_t は新生過程である. この式の確率場への一般化や対応する新生過程の求め方は重要な問題で今後の研究主題となるであろう. すなわち, パラメータの次元 d が 1 より大であるとき, 類似のアプローチを試み, 将来の方向を模索してみよう. その前に少し準備と考察が必要である.

7.3. 確率場の変分

確率場 $X(C)$ について, まずその変分を求める方法を明確にしておく.

アイディアはやはり古典関数解析の中に求めることとなる. すなわち, J. Hadamard によるグリーン関数の変分に対する Hadamard 方程式である. それは前小節 7.2.

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

で述べたように, グリーン関数 $g(C, x, y)$ において, C が少しばかり変形したときの $g(C, x, y)$ の微小変化をみるのが目的であった.

その方法にならって $X(C)$ の変分を見よう. そのために, 我々の立場からすれば, まず, C が動けるクラス $\mathcal{C}$ と同時に動かすための許容される変換のクラス(変換群) をきめる必要がある. いま $\mathbf{C} = \{C$: C は S^{d-1} と微分同型かつ卵形面 (ovaloid), ($d = 2$ なら卵形線 (oval))$\}$, とする. 時には $\mathbf{C}$ の部分族をとることがある. 例えば中心と半径を自由に選んだ円周の集合である. 例 1 では半径のみを動かしたが.

卵形面 (線) の仮定はその曲線をパラメータ空間とするホワイトノイズが定義できること, すなわちそれがホワイトノイズの周辺分布の定義が可能であることを保証する十分条件になっている (Lions-Magenes [37] 参照). 実は関数空間の Gel'fand triple が構成できるための十分条件ということである.

卵形面 C につては, C の各点で立てた外向き法線は互いに交差することはないし, それら法線は C の外側にとった卵形面 $C + \delta C$ と一度しかもただ一度だけ交わる. これは変分の具体的な計算をするときに好都合な性質である. なお, 法線の向きは, Green 関数の場合と反対に, 外向きを正とする. これは領域の外側を未来の方向と考えたいからである.

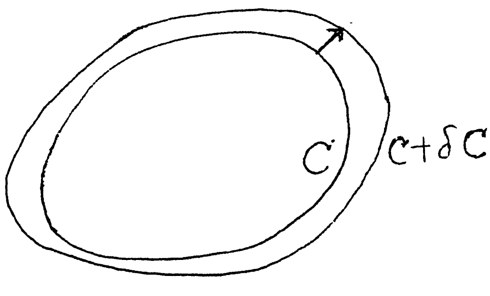


Fig. 3.3

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

変換群 M について

群 M は R^d の微分同型のなす位相変換群で

1. M の任意の元は C の 同型写像 (isomorphism) である,

2. M は C に推移的 (transitive) に作用する,

を仮定しよう.

また, 時には

3. $X(C)$ は M-定常である:

$$X(gC, x) = X(C, g^* x)$$

を仮定することもある.

これらの仮定は例 1 の一般化として, 回転群の作用によって C が動いたときの確率場の従属性の変化の記述を可能にするためにおくのである.

例 1. ガウス型確率場

$d = 2$ とする. このときは, 場は x の線形汎関数として表現することができる. いま

$$X(C, x) = \int_{(C)} F(u) x(u)\, du,$$

(C) は C で囲まれた領域 (以下しばしば, この記号を用いる), と書けるとしよう.

特に F が定数ならば, 任意の R^2 の運動 ψ に対して

$$X(\psi C, x) = X(C, g^* x), \quad g = g_\psi.$$

である. その意味での定常性がある.

例 2. マルチンゲール型確率場.

ホワイトノイズのパラメータは R^1 とする. (S) 上の作用素 $K(C)$:

$$K(C) = \iint k(u, v) \partial_u^* \partial_v^*\, du\, dv, \quad (u, v) \in R^2, \ k \text{ は連続関数},$$

により $X(C) = K(C) X_0$, $X_0 \in (S)^*$, を定義する.

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

またこの $K(C)$ を用いて確率場

$$Y(C) = \exp[K(C)]X_0$$

を定義することができる.

ここで Lévy の infinitesimal equation の確率場への拡張を考えよう. それは次のように表されることが期待される:

$$\delta X(C) = \Phi(X(C'); C' < C, Y(s), s \in C, C, \delta C).$$

但し, $C' < C$ は $(C') \subset (C)$ を意味し, $Y(s)$ は $X(C)$ の 新生過程である. この (形式的な) 式が確率場 $X(C)$ の構造を決定するものと考えられる. それは**確率変分方程式** (stochastic variational equation) といってよかろう.

前に注意したように, C と δC との間の距離 δn は外向きを正にとる. causality の記述を意識しているからである.

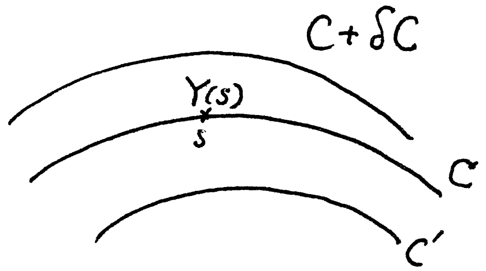


Fig.3.4

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

変分 $\delta X(C)$ を扱うにあたって, 前述のように

(1) 許容される C の変形の方法, すなわち変換群 M および

(2)C の解析的表現

が問題になる.

ここで (2) の C の変形法に関しては, 上に述べた変換群 M についての仮定 1. と 2. を充すような群 M を適当に選ぶことになる. 当面, C の動く空間 R^d の共形変換群, またはその部分群 に限定して話を進めることにしたい.

そうすれば, (1) の条件については, 卵形面は再び卵形面に移るので好都合となることを注意しよう.

また, (2) については, C が球面 S^{d-1} と微分同相であることからそれは球面上の解析的な関数 $\eta(\theta)$, $\theta \in S^{d-1}$, によって表現できる. 但し, 表現は一つの C に対しても一意的ではないから注意が必要である.

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

§8. いくつかの例

以下 (S) の値をとる確率場 $X(C)$, $C \in \mathbf{C}$, について変分 $\delta X(C) = \delta UgX(C)$, をかんがえる. ただし $UgX(C) = X(gC)$, $g \in M$ である. ここで, いくつかの典型的な確率変分方程式の例を扱う. 以下 M として $C(d)$ あるいは $C(d)$ の部分群をとる.

8.1. ランジュバン型

$\mathbf{C}$ は平面上の同心円のクラス, M は 2 次元共形変換群の部分群で dilation のみからなる群とする. 方程式

$$\delta X(C) = -X(C)\int_C k\delta n(s)\,ds + X_0\int_C v(s)\partial_s^*\delta n(s)\,ds, \quad (C) \subset (C_0)$$

を取り上げよう. ここで, k は定数 v は与えられた連続関数である.

関数 $\eta(s)$, $s \in S^1$, を C の解析的表示とする. 上の方程式に S-変換を施して $X(C)$ に対応した U-汎関数に対する方程式

$$\delta U(\eta)(\xi) = -U(\eta)(\xi)\int_C k\delta n(s)\,ds + U_0(\xi)\int_C v(s)\xi(s)\delta n(s)\,ds$$

が得られる. これを解くことは容易で, 解は

$$U(\eta)(\xi) = U_0\int_{(C)} \exp[-k\rho(C,u)]\,\xi(u)v(u)\,du$$

となる. もとの $X(C)$ に戻して解

$$X(C) = X_0\int_{(C)} \exp[-k\rho(C,u)]\partial_u^* v(u)du$$

が求められた. この際, C の変換には dilation と $SO(2)$ のみがもちいられた.

この例は Dirac [11] 1933 に示唆されて取り上げたものである.

[註] δU の式の右辺は第 2 項が分離され, 群 $C(2)$ の既約ユニタリ表現の性質から, ホワイトノイズが新生過程として取り出されることがわかる (K.-S. Lee による).

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

8.2. Volterra form の場合

$U(\eta) = U(\eta, \xi)$ についての変分が

$$\delta U(\eta) = \int f(\eta, U, s)\delta\eta(s)\, ds \quad \text{(Volterraform)}$$

と表される場合は, マルチンゲール型の場合を含むが, その可積分性の条件が知られている. それは f についての Lipschitz 条件と併せて次式で与えられる (Si Si [50]):

$$\frac{\delta f(\eta, U, s)}{\delta\eta(t)} + f(\eta, U, t) \cdot \frac{\partial f(\eta, U, s)}{\partial U} = \frac{\delta f(\eta, U, t)}{\delta\eta(s)} + f(\eta, U, s) \cdot \frac{\partial(\eta, U, t)}{\partial U}$$

8.3. 指数型の場合

$H(C)$ は ∂_u または ∂_u^* に関する 2 次形式とする ($d = 2$ のときは例 2).

$$X(C) = :\!\exp[iH(C)]\!:X, \qquad : \ : \text{は Wick 積},$$

ならば $X(C)$ は次の確率変分方程式をみたす:

$$\frac{\delta X(C)}{\delta C}(s) = i\frac{\delta H(C)}{\delta C}(s) \cdot X(C), \quad s \in C, \quad (C) \supset (C_0).$$

8.4. Innovation が求まる例

$X(C)$ が x の homogeneous な関数のとき, たとえば n 次とすれば, それは次のように表される:

$$X(C) = \int_{(C)^n} F(u){:}x^{n\otimes}(u){:}\, du^n.$$

またこの $X(C)$ は

$$X(C) = \int_{(C)} \cdots \int_{(C)} \partial_{u_1}^* \partial_{u_2}^* \dots \partial_{u_n}^* F(u_1, u_2, \dots, u_n)\, du^n$$

とも表される.

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

このような確率場については, 一般化された意味での innovation を求めることができる (Si Si). この際, 未来の値に対する本来の条件つき平均値の代わりに, 弱義のものでおきかえる. その理由は, ここで扱う確率変数系はもはやガウス型ではないので, 直交は独立を意味しないが, 用いる手法は直交射影の方法で innovation は広義のものとせざるを得ないということである. ただし, そこでは射影の他に非線形な演算も必要とする.

この例は, 入力信号が何かわからず, ただ出力のみが観測されるとき, すなわち自然情報を扱う場合に, 手さぐりで innovation を具体的に求める一つの方法を提起している.

確率変分の例はこの他科学の諸分野で広く登場し, 特にゆらぐ現象の解析に重要な役割を果しており, より一般的な理論が求められている. 数学にとってはそれらの例から意義のあるものを選び, より一般な議論の展開を指向することが大切であり, 応用の分野ではその有効な活用が望まれるところである.

8.5. Reversible field

1 次元パラメータの確率過程について, その可逆性あるいは不可逆性は一つの重要な特性である. 例えば, 有限時間区間における, いわゆる Brownian bridge は可逆的であり, 単純マルコフ性を持ち, さらに好都合なことにガウス型である. そのため "ゆらぎ"の典型として随所に登場している. 例えば Feynman の経路積分において, ゆらぐ量がこれで記述される. 単位時間区間をとって, Brownian bridge $X(t)$ を数式で記述してみよう.

$$X(t) = (1-t)\int_0^t \frac{1}{1-u}\dot{B}(u)\,du.$$

これは標準表現である. Covariance function を $\Gamma(t,s)$, t, $s \in [0,1]$, とすれば

$$\Gamma(t,s) = (t \wedge s)((1-t) \wedge (1-s)),$$

となり, いろいろな性質が見えてくる.

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

このような性質は確率場のときはどうなるであろうか？次の例によって，部分的な答に代えよう．

同心円 (原点が中心) のクラス $\mathbf{C}$ をとる．$r_0 \le r \le r_1$ としよう．半径 r の円周を C_r とかく．また (C_r) は C_r の囲む領域とする．

$$X(C_r) = \sqrt{(r_1^2 - r_0^2)}\sqrt{\frac{r_1^2 - r^2}{r^2 - r_0^2}} \int_{(C_r)-(C_{r_0})} \frac{1}{r_1^2 - |u|^2} x(u)\, du$$

で確率場 $X(C_r)$, $r \in [r_0, r_1]$, を定義する．ここで $x(u)$ は 2 次元パラメータのホワイトノイズである．

この $X(C_r)$ は r が r_0 から r_1 まで増加するとき，発展系としての可逆的なガウス型確率場である．可逆性は例えば次のようにして見ることができる．

ホワイトノイズの変換

$$x(u) \longrightarrow x'(u) = x\Big(\frac{r_0 r_1}{|u|^2} u\Big) \frac{r_0 r_1}{|u|^2}$$

によって新しい確率場 $\{X'(C_r)\}$ が得られる．このとき r の増減が元の場とは逆になる．この新しい場は $\{X(C_r)\}$ と同じ確率分布をもつことが証明できる．すなわち $X(C_r)$ は可逆的である．またマルコフ性も具えている．

これをより一般にして reflection positivity などを持つものが構成できれば場の量子論にも役立つことであろう．

8.6. 補足

本節で扱ったような変分問題をより一般で，かつ厳密な議論に乗せることは興味ある大きな問題である．そのため，Hadamard 方程式など，C が円の場合で，§7.2 の特別な場合 (例 2) を少し一般化するのも一つの方法である．例えば C を動かすのは共形変換とか homothetic な変換とかに限定して，具体的に計算できる場合に詳しく調べておくことも必要であろう．

また，確率論では，法線ベクトルの向きはグリーン関数の場合とは違って，causality の議論が重要なことを考慮すれば，外側を正にするのが自然であると考えられ

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

る. その他, 確率論の立場からの変分に関する諸問題には, それらの motivation からいっても, 古典解析学の場合とは異なった設定の必要なことがいくつか現れるであろう. 例えば, boundary value problem としては扱わないこととか, innovation approach が有力な手段を与えることなどである.

もう一つ補足したいことは, 古典解析学における L. Tonelli の業績についてである ([56], [57])). 曲線 C 上の積分を C の汎関数とみて, その解析を詳しく述べている. 教えられるところが多いように思われる.

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

§9. 終わりに

ここで, P. Lévy の innovation process を基礎とする確率場の構造の決定という本来のアイデイアにもどり, innovation (generalized innovation でもよい) の構成が可能であるような場の重要なクラスをなるべく広く決定する問題を取り上げ, その構成法の研究をすすめなければならない. そして今後 innovation を基に与えられた確率場の構成法を論じていきたい.

帯電した電磁場の問題, Langevin 型の場, 揺らぐ環境による生物の行動, 自然情報を背景とした宇宙からの信号の解析, 場の量子論への応用等, 確率場の問題として取り上げるべき興味深い事柄は限りなく自然界に存在している. それらかからの問題提起をうけて, またある意味での伝統的な解析学の体系の中に確かな存在を主張しうるように, 確率場の理論体系の構築が将来の大きな主流的な研究課題となるものと思われる.

もう一つ情報理論の立場からコメントしたいことがある. 前小節 7.2. のはじめに確率場では伝達できる情報量が多いと言ったが, 別な側面で確率過程のときに較べて, より複雑な系をなすと言いたい. 確率場 $X(C)$ の場合, 領域 (C) の増加によって方向づけをするならば, この場が作るヒルベルト空間において, 適当な射影の系としての単位作用素の分解が定義され, 重複度も定義される. この概念はガウス過程の表現の理論を体系化するにあたって取り入れられたものであるが (1960 年, [15] 参照) 今ここにより一般の確率変数の系の従属性のあり方を記述する一つの方法として再登場し, 我々の目的に対し本質的な役割を果たすものとして再認識されたことは興味深い. 一般に 確率場 $X(C)$ の場合, 本論でも強調したように発展方向についての多様性があり, その特性量としての重複度は可算無限である. 複雑系としての確率場の持つ意義を強調しておきたい.

さらに一つ重要な方向は自然情報に対するアプローチの開拓である. 例えば Cyg.X1 から送られてくる X 線のデータとか, 環境のゆらぎにくわえて内部的なゆらぎも原因となる微生物の運動など, 情報理論の立場からすれば, 情報源が未知であり, 観測データのみが知られるような場合が多くある. このような現象の

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

解明には, まずゆらぐ情報源の可能なものは何かを問うことから始めなければならない. 根源にはホワイトノイズがあるとしてよいならば幸である. その仮定が満たされたら我々の解析が適用されるであろう. その設定を可能にするためには, 観測データを ensemble としてとらえて, その特性汎関数を求めておくことが必要である. それは, エルゴード性を仮定して時間平均を使うことにより, データから計算できる. 等々我々に多くの楽しい夢を与えてくれる.

最後のコメントとして, 極微の世界のでのランダムな複雑系の研究へのアプローチがあるが, それに注目しようということである. そこでは当然量子力学が基本的な役割を演ずる. 一方, 量子確率論, 量子情報論の最近の発展は目覚しいものがある. その方向との unification の試みは数年前から高まり, これまで努力がなされてきた. 単に協力だけでなく, そこからの問題提起も枚挙に遑がない程で, 研究会も盛んである. 最近は量子計算 (機) を指向した共同研究も盛んになってきた.

このように, 現時点で我々に期待される課題は極めて多いことは確かであり, それらが刺激となってホワイトノイズ解析の内容も量子確率の課題も益々豊かなものとなった. 現在はそのその流れを積極的に推進しなければならない時である. そして, この方向こそ実り多き研究分野である.

研究を推進する有効な方法として数年来検討してきて, 1997 年になってようやく実現したのが両方向の研究発表の機関紙として International Journal の発行である: "Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics" World Scientific Pubishing Co. vol.1 は 1997 年発刊.

現在はその姉妹編として単行本のシリーズも計画されている. 読者諸賢のご協力を乞う次第である.

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

[文献]

[1] L. Accardi and M. Skeide, On the relation of the square of white noise and the finite difference algebra. Infinite Dimensional Aanalysis, Quantum Probability and Related Topics. 3, 2000, 185–189.

[2] L. Accardi, Y. G. Lu and I. V. Volovich, A white-noise approach to stochastic calculus. Acta Applicandae Math. 63, 2000, 3–25.

[3] L. Accardi et al, Selected Papers of Takeyuki Hida. World Scientific Pub. Co. 2001.

[4] 新井朝雄, 場の量子論の数学的方法入門, Lecture Note Series in Mathematics, Vol. 5 大阪大学大学院理学研究科数学教室, 1997.

[5] J. Bernoulli, Ars Conjectandi. 1713, Basel.

[6] P. Bracken, Determination of Lagrangians from equations of motion and commutator brackets. Acta Applicandae Math. 57, 1999, 83–103.

[7] D. M. Chung and U. C. Ji, Transformation groups on white noise functionals and their applications. Appl. Math. Optim. 37, 1998, 205–223.

[8] W. G. Cochran, H. -H. Kuo and A. Sengupta, A new class of white noise generalized functionals. Infinite Dimensional Anal. , Quantum Prob. and Related Topics, 1, 1998, 43–67.

[9] R. Courant, Dirichlet principle, conformal mapping, and minimal surfaces. Interscience Pub. 1950; Reprint Springer-Verlag 1977

[10] M. de Faria, T. Hida, L. Streit and H. Watanabe, Intersection local times as generalized white noise functionals. Acta Applicandae mathematicae 46 , 1997, 351–362.

[11] P. A. M. Dirac, The Lagrangian in Quaqntum mechanics. Phys. Z. USSR 3, 1933, 64–72.

[12] 江沢 洋, 新井朝雄, 場の量子論と統計力学, 日本評論社, 1988.

[13] J. Hadamard, Lecons sur le calcul des variations. Hermann, 1910.

[14] J. Hadamard, Sur le problème d'analyse relatif à l'équilibre des plaques élastiques encastrées. Mémoire couronne par l'Académie des Sciences (Prix Vaillant) Mém. Sav. Etrang. 33. 1907. Supplément: Existence de la fonction Γ pour le plan sectionne. 全集 vol. 2, 515–641.

[15] T. Hida, Caninical representations of Gaussian processes and their applications. Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, 33, 1960, 109–155.

[16] T. Hida, Note on the infinite dimensional Laplaqcian operator. Nagoya Math. J. 38, 1970, 13–19.

[17] 飛田武幸, ブラウン運動, 岩波書店, 1975. 英訳: T. Hida, Brownian motion. Springer-Verlag 1980.

[18] T. Hida, Analysis of Brownian functionals. Carleton Math. Notes #13, 1975.

[19] T. Hida ed. Mathematical Approach to Fluctuations. World Scientific Pub. Co. vol. 1, 1994 ; vol. 2, 1995.

[20] T. Hida, White Noise Analysis With Special Emphasis on Applications to Biology, T. Hida ed. Advanced Mathematical Approach to Biology. World Scientific Pub. Co. , 1997, 269–306.

[21] 飛田武幸, 櫃田倍之, ガウス過程, 紀伊国屋書店, 1976. 英訳: T. Hida and M. Hitsuda, Gaussian processes. American Math. Soc. 1993.

[22] T. Hida, H. -H. Kuo, J. Potthoff and L. Streit, White noise. — An infinite dimensional calculus. Kluwer Academic Pub. 1993.

[23] 黄志遠, 厳加安, 無窮維随机分析引論. 科学出版社, 北京, 1997.

[24] K. Itô, Multiple Wiener integral. J. Math. Soc. Japan. vol. 3, 1951, 157–169.

[25] I. Kubo and S. Takenaka, Calculus on Gaussian white noise. I–IV, Proc. Japan Acad, vol. 56, 1980–vol. 58, 1982.

[26] I. Kubo and Y. Yokoi, Generalized functions and functionals in fluctuation

analysis. Mathematical Approach to Fluctuations. vol. II, ed. T. Hida, 1995, 203–230.

[27] H. -H. Kuo, N. Obata and K. Saito, Lévy Laplacian of generalized functions on a nuclear space. J. Functional Analysis, 94, 1990, 74–92.

[28] H. -H. Kuo, White noise distribution theory. CRC Press. 1996.

[29] P. Lévy, Les équations integro-différentielles definissant des fonctions de lignes. Premiere These, 1911. 120 pages.

[30] P. Lévy, Sur la variation de la distribution de l'electricite sur un conducteur dont la surface se deforme. Bull. de la Societe Mathematique de France. 46, 1918, 35–68.

[31] P. Lévy, Théorie de l'addition des variables aléatoires. Gauthier-Villars, 1837.

[32] P. Lévy, Processus stochastiques et mouvement brownien. Gauthier-Villars. 1948.

[33] P. Lévy, Problèmes concrets d'analyse fonctionnelle. Gauthier-Villars, 1951 Lecons d'analyse fonctionnelle. Gauthier-Villars, 1922.

[34] P. Lévy, La mesure de Hausdorff de la courbe du mouvement brownien. Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari, 16, 1953, 1–37.

[35] P. Lévy, Random functions:General theory with special reference to Laplacian random functions. Univ. Calif. Press, Berkeley. 1953, see §2. 7.

[36] P. Lévy, Sur une classe de courbes de l'espace de Hilbert et sur une équation intégrale non linéaire. " Ann. Ecole Normale Supérier 73, 1956, 121–156.

[37] J. L . Lions and E. Magenes, Non-homogeneous boundary value problems and Applications. I, Springer-Verlag, 1972.

[38] K. -I. Naka, Functionmal organization of catfish retina. Journal of Neurophysiology, 40, 1977, 26–43.

[39] 中 研一, 白色雑音による網膜回路網の研究. 数理科学 1994, 12 月, 28–36.

[40] K. I. Naka and V. Bhanot, White-Noise Analysis in Retinal Physiology. T. Hida ed. Advanced Mathematical Approach to Biology. World scientific, Pub. Co. 1997, 109–267.

[41] T. Nakamura, Path space measure for Dirac and Schroedinger equations: Nonstandard analytical approach. J. Math. Phys. 38, 1997, 4052–4072.

[42] N. Obata, A characterization of the Lévy Laplacian 9n terms of infinite dimensional rotation groups. Nagoya Math. J. 118, 1990, 111–132.

[43] N. Obata, White noise calculus and Fock space. Lecture Notes in Math. #1577, Springer-Verlag. 1994.

[44] F. Oosawa, et al. Fluctuation in living cells: effect of field fluctuation and asymmetry of fluctuation. Springer Lecture Notes in Biomathematics no. 70. Stochastic methods in Biology. ed. Kimura, Kallianpur and Hida, 1987, 158–170.

[45] 大矢雅則, 渡辺 昇, 量子通信理論の基礎. 数理情報科学シリーズ, #17 牧野書店, 1998.

[46] J. Potthoff, White noise approach to parabolic stochastic partial differential equations. Stochastic Analysis and Applications in Physics. eds. A. I. Cardoso et al, Kluwer Academic Pub. 1994. 307–327.

[47] I. Prigogine and P. Glansdorff, Thermodynamic theory of structure, stability and fluctuations. Wiley-Interscience, 1971 邦訳: 構造・安定性・ゆらぎ, みすず書房, 1977.

[48] K. Saitô, A group generated by the Lévy Laplacian and the Fourier-Mehler transform. Stochastic analysis on infinite dimensional spaces. ed. H. Kunita and H. H. Kuo, Longman Sci. & Tech. 1994, 274–288.

[49] K. Saitô, A stochastic process generated by the Lévy Laplacian. Acta Applicandae Math. 63, 2000, 363–373.

[50] Si Si, Integrability condition for stochastic variational equation. Volterra Center Pub. N. 217, Univ. di Roma Tor Vergata, 1995.

[51] Si Si, Innovation of of some random fields. J. Korean Math. Soc. 35, 1998, 793–802.

[52] Si Si, Gaussian processes and Gaussian random fields. Quantum Information II, 2000, 195–204.

[53] L. Streit, White noise analysis in Quantum Physics, Pub. Univ. da Madeira, Funchal Portugal, 1993.

[54] L. Streit and T. Hida, Generalized Brownian functionals and the Feynman integral. Stochastic Processes and their Applications. 16, 1983, 55–69.

[55] L. T. Todorov, M. C. Mintchev and V. B. Petkova, Conformal invcariance in quantum field theory. Scuola Normale Superiore Pisa, 1978.

[56] L. Tonelli, Fondamenti di Calcolo delle Variazioni. Bologna Nicola Zanichelli Editore. vol. 1, 1921; vol. 2, 1923.

[57] L. Tonelli, Opere Scelte vol. 2. Calcolo delle variazioni. Edizioni Cremonese Roma 1961.

[58] V. Volterra, Theory of functionals and of integral and integro-differential equations. (Dover Pub. Inc. 1959.) First Spanish ed. , 1927.

[59] V. Volterra, Principes de biologie mathematique. Acta Biotheoretica (Leiden). vol. 3, part 1, 1937, 6–39.

[60] V. Volterra, Calculus of variations and the logistic curve. Human Biology vol. II, 1939, 173–178.

[61] N. Wiener, Differential-space. J. Math. and Physics. 2, 1923, 131–174.

[62] N. Wiener, The average value of a functional. Proc. London Math. Soc. 22, 1924, 454–467.

[63] N. Wiener, Laplacians and continuous linear functionals. Acta Sci. Math. (Szeged) 3, 1927, 7–16.

[64] N. Wiener, Cybernetics, or Control and Communication in the Animal and the Machine. John Wiley & Sons. 1948. 邦訳：サイバネティックス 岩波書店,

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

1962.

[65] N. Wiener, Nonlinear problems in random theory. Technology Press of MIT, 1958.

[66] Win Win Htay, Optimalities for the Volterra's functional on prey-predator. Preprint. 1996.

[67] A. Yoshikawa, Mean-values and mean-convolution products. Preprint. 1995.

[68] 吉田耕作, 位相解析 I, 1951, 岩波書店.

[69] K. Yosida, Functional analysis. Springer-Verlag, 6th. ed. 1980.

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

「あとがき」

確率論セミナーのメンバーが相はかり Seminar on Probability の刊行を計画し, 渡辺 毅 氏の労作が vol. 1 として出版されたのは 1959 年のことであった. それから 40 余年の歳月を経て, 今ここにそのシリーズの歴史を閉じようとしている. 図らずもこの巻が実質的にその殿をつとめることとなった. 創刊の企画に加わった者の一人として感慨無量である. このシリーズの果たした役割は今後も論ぜられるであろうが, 誰よりもこれら出版物に導かれた該当者は著者達自身 (とその近傍) であったし, また成果を書き記すことに意義があったと思う. 紙質とは裏腹に, 我々メンバーにとっては貴重な資料であった. 出版に関してお世話頂いた多くの方々に深く感謝したい.

「謝辞」

本書の原稿を Tex スタイルのものに直し, 種々の注意をしてくださった愛知県立大学の Si Si 助教授にお礼申し上げます.

またコメントを頂いた斉藤公明氏, および名城大学「学術フロンテイア」のメンバー各位に感謝いたします.

さらに, 本冊子の編集・印刷にお世話を頂きました確率論セミナー事務局の皆様に厚くお礼申仕上げ, また筆者の遅筆を深くお詫び申しあげます.

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

索引 (alphabet 順)

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114

Sem. on Probab.
Vol.60 2002年
P1-114