Sem. on Probab.
Vol.58 1995年
P1-115

SEMINAR ON PROBABILITY

Vol. 58

Ising model における相転移／Loop 群上の確率解析
（確率論サマースクール講義録　1994 年 8 月　於 信州大学）

1995

確率論セミナー

Sem. on Probab.
Vol.58 1995年
P1-115

前書き

この講義録は、科研費総合（A）「確率論の総合的研究」（代表者　志賀徳造）によるシンポジウムの一環として、1994年8月3日～7日に信州大学教養部に於いて開かれた、確率論サマースクールの講義録である。確率論サマースクールは、代表者である志賀氏の強い要望により、確率論の今後の研究の方向を提示するようなテーマについて、集中講義形式で連続講演と討論を行うことを目的として企画された。研究分担者による打ち合わせのなかで、今回は、対数Sobolev不等式を共通の問題意識に内包する話題としてIsing modelにおける相転移、Loop群上の確率解析の２つのテーマが選ばれ、それぞれについて、２時間講演５コマずつが行われた。これらの講演を、聴講していた大学院生の人達にまとめてもらったものが、この講義録である。この講義録をSeminar on Probability Vol. 58として出版するにあたっての業務は、確率論セミナー出版局の税所康正氏が一任して下さった。お願いした講師、筆記者、講義題名は、下記の通りである。

樋口保成、吉田伸生　（筆記　篠田正人、古尾谷裕）
「Ising modelにおける解析的諸条件と相転移」
(Analytic conditions and phase transition for Ising models)

重川一郎　（筆記　貞末岳、日野正訓）
「ループ群上の確率解析」
(Stochastic analysis on a based loop group)

今後の参考のためこのサマースクールの運営に関して記しておくと、日本語と英語の案内を作って郵便やe-mailで広く参加を呼びかけたため、５３人（うち学生１５人）の参加があった。研究会の性格上、大学院生への旅費等の援助を積極的に行うよう配慮したが、この点は多少宣伝不足であったのかもしれない。実際、若手で運営されているヤングサマースクールと時期をずらしたにもかかわらず、予算の関係でこの両方には参加できなかった学生が何人もいたようである。記録的な暑さの中、信州大学も大変暑く、クーラーの効く広い部屋を確保するなど、会場面では信州大の井上和行氏に大変お世話になった。
スクールのなかでは、講演のほかに、自然発生的なセミナーを誘導すべく、初日に１人５～１０分ほどの時間で研究の紹介をしてもらう、顔見世なるものを企画した。ところが、研究紹介がなかなか１人１０分では収まらない上質問も飛び交うため、この顔見世は当初の目的から一人歩きし、３日に分けて行われる一つのイベントとなった。フォーマルな研究会では話せないような研究途中段階の裏話や、若手院生の研究している内容を聞くことができ、うれしい誤算であった。結果的にかなりタフなスケジュールとなり、自主的なセミナーの方はあまり行われなかったが、情報交換は個人レベルでかなり行われていた様子である。
代表者である志賀氏が、日本に於ける確率論研究の将来を憂い、活性化の試みとしてこのようなスクールを提案されてから実際に開催に至るまでには、実のところかなりな紆余曲

Sem. on Probab.
Vol.58 1995年
P1-115

折があった。スクールの内容にしてみても、一線の研究者を対象に、数理物理の話を依頼して今後のこの分野の研究方向に一石を投じるようなものにしようという意見もあれば、大学院生を対象にした、基本的テーマの講演をお願いしようという意見もあった。結局、多岐に分かれている現在の確率論研究の中で共通認識となりうるテーマについて、その専門家に講演をしてもらうという方向にまとまり、７０年代後半以降アクティブに研究がすすめられている対数 Sobolev 不等式がそのテーマとして選ばれた。講演者のカラーを存分に出していただけるよう、具体的な内容については特に希望は出さないこととした。このような趣旨のスクールのありかたについて、分担者内での話し合いのほかにも、機会あるごとにいろいろな人に意見を伺ってきた。勉強会的なスクールに対する否定的な意見を唱える人もいて、その中には、このようなスクールを行うことにより、ともすると閉鎖的な環境や、創造的な研究態度の欠如が生じかねないといった意見があった。これらは全くもっともな意見であり、今後こういった形のスクールを続けていくとき、常に気をつけねばならないことだと思う。しかし一方で、結局の所どのような環境ができるかは研究者個々人の自覚の問題であり、オーガナイズの側はあまりあれこれと研究会の在り方にこだわり過ぎず、フレキシビリティを持たせた運営を心がけておけばよいようにも思う。

最後に、お忙しい中講演を引き受けて下さった３人の講師の方々、講義録の筆記を担当して下さった大学院の方々、そして確率論セミナー出版局の税所 康正 氏に、感謝の意を表します。

１９９５年3月

研究分担者：　小倉 幸雄（佐賀大)、井上 和行（信州大)、小谷 真一（大阪大)、
長井 英生（名古屋大)、松本 裕行（岐阜大)、[文責] 熊谷　隆（大阪大)

Sem. on Probab.
Vol.58 1995年
P1-115

Analytic conditions and phase transition for Ising models

樋口 保成　　吉田 伸生

（記：　篠田 正人　　古尾谷 裕）

CONTENTS:

Sem. on Probab.
Vol.58 1995年
P1-115

はじめに

このノートは 1994 年の確率論サマースクール（於：信州大学）で筆者達が行った講義に基づいている。講義の目的は log-Sobolev 不等式と格子模型（ lattice spin system；典型的には Ising ferromagnet ）との関わりについて解説することであり、特に D. W. Stroock, 及び B. Zegarlinski による論文 [SZ, 92C] の紹介を主な内容とした。[SZ,92C] を講義内容の中心に選んだ理由は主に次の 2 つである；(1) 結果の意味が明快でしかも、解析学、数理物理両面から興味深いこと、(2) 今後 lattice spin system の研究を志す場合（筆者も含めて）の基本的素養になりうること。講義を準備するに際しては [SZ, 92C],[Sch,94],[LY,93],[MO,94A] 及び [DSh,85A]–[DSh, 87] の内容を検討した後、[SZ, 92C] を吉田が、[DSh,85A]–[DSh, 87] を樋口が解説することにした。また、講義では「初めて格子模型の講義を聴く人にでも全体像が把握出来る」ことを目標とし、同じ結論を導くにも出来るだけ平易で明快な方法を探すようにした。その結果、[SZ,92C] について言えば全体の約半分は original な証明とは異なっている。そうした意図がどの程度達成されたかは聴衆（あるいは本稿の読者）の判断を待つしかない。

先述通り本稿は 1994 年確率論サマースクールの講義録である。サマースクールの実務面でお世話になった 井上 和行、小倉 幸雄、熊谷 隆、小谷 真一、長井 英生、松本 裕行　の各氏に心からお礼申し上げます。また講義を筆記し、タイプして頂いた 篠田 正人、古尾谷 裕 の両氏には深く感謝致します。

１９９５年　2月

樋口 保成、　吉田 伸生

Sem. on Probab.
Vol.58 1995年
P1-115

1 Log-Sobolev 不等式の一般論

この節は、log-Sobolev 不等式に関する抽象論のうち、次節以降で必要となるものについての速習コースである。

$(X, \mathcal{F}, \mu)$ を確率空間, $(A, \mathrm{Dom}(A))$ を $L^2(\mu)$ 上の自己共役作用素とする. $f, g \in \mathrm{Dom}(A)$ に対して, $\mathcal{E}(f,g) := -\mu(fAg)$ (ただし, $\mu(\cdot) := \int_X \cdot\, d\mu$) と置き, 以下の条件を仮定する;

(A1) $\mathcal{E}(f,f) \geq 0$ for all $f \in \mathrm{Dom}(A)$, 言い換えれば
$\mathrm{Spec}(-A) := \{-A$ のスペクトル$\} \subset [0,\infty)$.

(A2) $\mathrm{Ker}(A) := \{f \in \mathrm{Dom}(A); Af = 0\} \supset \{$ 定数関数 $\}$.

(A3) $\{f,g\} \subset L^2(\mu)$ について

$$\left.\begin{array}{l} |f(x)| \leq |g(x)|, \ \ a.e.\text{-}\mu, \\ |f(x) - f(y)| \leq |g(x) - g(y)|, \ \ a.e.\text{-}\mu \otimes \mu \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathcal{E}(f,f) \leq \mathcal{E}(g,g). \quad (1)$$

但し 条件 (A3) 及び以下において $f \in L^2(\mu) \mapsto \mathcal{E}(f,f)$ の解釈は通例通りである; $f \in \mathrm{Dom}(\sqrt{-A})$ なら$\mathcal{E}(f,f) = \|\sqrt{-A}f\|^2_{L^2(\mu)}$, その他の f に対しては $\mathcal{E}(f,f) = \infty$. また (A3) において (1) は form core, 即ち $\mathrm{Dom}(\sqrt{-A})$ の graph-dense な subspace 上で成り立てば十分である。

条件 (A1) より A は $L^2(\mu)$ 上の強連続縮小半群 $(e^{tA})_{\geq 0}$ を生成するが、(A2) , (A3) はそれぞれ次の (A2') , (A3') と同値である ([D 89]);

(A2') $e^{tA}1 \equiv 1 \quad {}^\forall t \geq 0$.

(A3') $0 \leq {}^\forall f \leq 1,\ a.e.\text{-}\mu \Rightarrow 0 \leq e^{tA} f \leq 1, \quad a.e.\text{-}\mu, \quad {}^\forall t > 0$.

(A3') 及び対称性の帰結として $(e^{tA})_{t\geq 0}$ は全ての $1 \leq p \leq \infty$ について $L^p(\mu)$ 上の縮小半群となり、$p = \infty$ 以外では強連続である。また (A2') 及び対称性からわかるように、

$$\mu(e^{tA}f) = \mu(f), \quad {}^\forall t \geq 0,\ {}^\forall f \in L^1(\mu),$$

即ち μ は $(e^{tA})_{t\geq 0}$-不変測度である。

Sem. on Probab.
Vol.58 1995年
P1-115

Example 1.1 : 1次元 *Ornstein-Uhlenbeck operator* ;
$X = \mathbf{R}, \mu(dx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2})dx$, ($dx$ は Lebesgue measure) として，作用素 $A = \frac{d^2}{dx^2} - x\frac{d}{dx}$ を考える；正確にはまず $C_c^\infty(\mathbf{R})$ の上で考えておいて、その閉包をとる。今の場合は本質的自己共役性があるから Dom(A) について神経をとがらせるには及ばない。滑らかな関数 f に対して$\mathcal{E}(f,f) = \mu(|\nabla f|^2)$ となること（部分積分）などから (A1),(A2),(A3) が確かめられる。

Example 1.2 : *Two state Markov process* ;
$X = \{0,1\}$, $\mu = p\delta_0 + q\delta_1$, ($p > 0$, $q > 0$, $p+q = 1$) と置き，次の作用素を考える；

$$Af(x) = \begin{cases} q(f(1) - f(0)) & \text{if } x = 0, \\ p(f(0) - f(1)) & \text{if } x = 1. \end{cases}$$

このとき、簡単な計算で $\mathcal{E}(f,g) = pq(f(1) - f(0))(g(1) - g(0))$ がわかり、条件 (A1),(A2),(A3) が従う。

Definition 1.1 *Spectral gap constant* γ_{SG} を次で定義する.

$\gamma_{SG} := \inf\{\gamma > 0; (SG,\gamma)$が成立$\} \in [0, +\infty]$
但し (SG,γ) とは次の不等式を意味する；
$\mu(|f - \mu(f)|^2) \leq \gamma\mathcal{E}(f,f) \quad {}^\forall f \in L^2(\mu)$.

Lemma 1.1 $\gamma > 0$ に対して，次の3条件は同値；

(a) (SG,γ)

(b) $\|e^{tA}f - \mu(f)\|_{L^2(\mu)} \leq \|f - \mu(f)\|_{L^2(\mu)} e^{-t/\gamma}, \quad {}^\forall t > 0,\ {}^\forall f \in L^2(\mu)$.

(c) $\mathrm{Ker}(A) = \{$ 定数関数 $\}$, $\mathrm{Spec}(-A) \subset \{0\} \cup [\frac{1}{\gamma}, \infty)$.

Proof: A のスペクトル分解による。

Q.E.D.

Sem. on Probab.
Vol.58 1995年
P1-115

Spectral gap constant の例を挙よう。

Example 1.3 ; 1次元 *Ornstein-Ohlenbeck operator* (*Example 1.1* の続き)
正規化された Hermite 多項式 $h_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n!}} e^{\frac{x^2}{2}} \dfrac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}}$ $(n = 0, 1, \cdots)$ が $L^2(\mu)$ で完全正規直交系をなすことと, $-Ah_n = nh_n$ $(n = 0, 1, \cdots)$ となることから, $\mathrm{Spec}(-A) = \{0, 1, \cdots\}$. 従って $\gamma_{SG} = 1$.

Example 1.4 ; *Two state Markov process* (*Example 1.2* の続き)
A を 2×2 行列と考えて固有値を計算すると、$\mathrm{Spec}(-A) = \{0, 1\}$. 従って$\gamma_{SG} = 1$.

Definition 1.2 *Log -Sobolev constant* γ_{LS} を次で定義する ;

$$\gamma_{LS} := \inf\{\gamma > 0; (LS;\gamma)\text{が成立}\} \in [0, +\infty]$$

但し (LS,γ) とは次の不等式を意味する ;

$$(LS;\gamma) \qquad \mu(f^2 \log \frac{f^2}{\mu(f^2)}) \le 2\gamma \mathcal{E}(f, f) \quad {}^\forall f \in L^2(\mu).$$

Remark 1.1 $t \in [0, \infty) \mapsto t \log t$ が凸関数であることと, Jensen の不等式より

$$\text{LHS of } (LS;\gamma) = \mu[f^2 \log f^2] - \mu(f^2) \log \mu(f^2) \ge 0.$$

Theorem 1.1 $(LS;\gamma) \Rightarrow (SG;\gamma)$. 従って $\gamma_{SG} \le \gamma_{LS}$.

Proof: $(LS;\gamma)$ を仮定する。${}^\forall f \in L^\infty(\mu)$ に対して $\mu(|f - \mu(f)|^2) \le \gamma \mathcal{E}(f, f)$ が示せれば一般の $f \in L^2(\mu)$ でも近似で示せる (その際、(A3) を用いる) 。$\varphi_\delta = 1 + \delta(f - \mu(f))$, $(0 < \delta < \dfrac{1}{2\|f\|_\infty})$ とおくと, $(LS;\gamma)$ より

$$\mu\left(\varphi_\delta^2 \log \frac{\varphi_\delta^2}{\mu(\varphi_\delta^2)}\right) \le 2\gamma \mathcal{E}(\varphi_\delta, \varphi_\delta). \quad (*)$$

ここで log の Taylor-展開などを含むやや煩雑な計算の結果

$$\text{LHS}(*) = 2\delta^2 \mu(|f - \mu(f)|^2) + o(\delta^2) \quad (\delta \downarrow 0)$$

Sem. on Probab.
Vol.58 1995年
P1-115

が分かる。これと RHS$(*) = 2\gamma\mathcal{E}(f,f)\delta^2$ を併せて

$$\begin{aligned}\mu(|f-\mu(f)|^2) &= \lim_{\delta\to 0}\frac{1}{2\delta^2}(\mathrm{LHS})(*)\\ &\le \lim_{\delta\to 0}\frac{1}{2\delta^2}(\ \mathrm{RHS}\ )\ (*)\\ &= \gamma\mathcal{E}(f,f).\end{aligned}$$

Q.E.D.

Remark 1.2 γ_{SG} と γ_{LS} の関係について次も知られている（[DS,89], pp.245）。$\alpha > 0, \beta \ge 0$ について不等式：

$$\mu(f^2\log\frac{f^2}{\mu(f^2)}) \le 2\alpha\mathcal{E}(f,f) + 2\beta\mu(f^2), \quad {}^\forall f \in L^2(\mu)$$

仮定すると

$$\gamma_{LS} \le \alpha + (\beta+2)\gamma_{SG}. \tag{2}$$

しかし *(2)* に類することは全く一般には成立しない。実際、$\gamma_{SG} < \infty$ かつ $\gamma_{LS} = \infty$ という例が存在する（cf. Example 1.8）。

Log-Sobolev constant の例を挙げる.

Example 1.5 ；1次元 *Ornstein-Uhlenbeck operator*（cf. Example 1.1, 1.3）では $\gamma_{LS} = 1$.

PROOF: $\gamma_{LS} \le 1$ を示す。そうすれば Theorem 1.1 と $\gamma_{SG} = 1$ から，$\gamma_{LS} = 1$ となる。幾種類もの証明がありうるがここでは良く知られた半群の具体形；

$$e^{tA}f(x) = \int \mu(dy) f(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y) \tag{3}$$

を用いて次のように議論しよう。

Sem. on Probab.
Vol.58 1995年
P1-115

不等式 *(LS;1)* を示すが、その際 f として有界かつ連続な $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ で $0<\min f\le\max f<\infty$ なるものを考えれば十分である。まず $F_t := e^{tA}(f^2)$ として $f^2 = F_t|_{t=0}$, $\mu(f^2) = F_t|_{t=\infty}$ を補間する；

$$\begin{aligned}\mu\left(f^2\log\left(\frac{f^2}{\mu(f^2)}\right)\right) &= \mu(F_0\log F_0)-\mu(F_\infty\log F_\infty)\\ &= -\int_0^\infty \frac{d}{dt}\mu(F_t\log F_t)dt. \end{aligned} \tag{4}$$

また *(3)* を用いた簡単な計算で次がわかる；

$$|\nabla F_t|^2 \le 4e^{-2t}F_te^{tA}(|\nabla f|^2), \tag{5}$$

但し $\nabla = d/dx$. そこで

$$\begin{aligned}-\frac{d}{dt}\mu(F_t\log F_t) &= -\mu(AF_t\cdot\log F_t)-\mu(F_t\cdot\frac{AF_t}{F_t})\\ &= \mu(\nabla F_t\cdot\nabla\log F_t)-0\ \ (\text{部分積分による})\\ &= \mu\left(\frac{|\nabla F_t|^2}{F_t}\right)\\ &\le 4e^{-2t}\mu(|\nabla f|^2),\ \ ((5)\text{ による })\end{aligned}$$

となり、これと *(4)* を併せれば確かに $(LS;1)$ が出る。

Q.E.D.

Example 1.6 ；*Two state Markov process* (cf. Example 1.2, 1.4) では

$$\gamma_{LS} = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{\log q-\log p}{q-p}, & \text{if } p\ne q,\\ \\ 1, & \text{if } p=q=1/2.\end{cases} \tag{6}$$

従ってこの場合 $p=q=1/2$ なら $\gamma_{SG}=\gamma_{LS}$, それ以外なら$\gamma_{SG}<\gamma_{LS}$(cf. Example 1.4) . なお、*(6)* は大倉 弘之氏（京都工繊大）が計算機を駆使して発見された数値である。答が分かってしまえばそれを証明するのはそれほど難しくないが、答

Sem. on Probab.
Vol.58 1995年
P1-115

の見当をつけるのは容易ではない。

PROOF OF (6): *(6)* の右辺 $=: \gamma$ としよう。また簡単のため $p \leq q$ と仮定する。まず $(LS;\gamma)$ を示す。

$$(LS;\gamma) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} pa^2 \log a^2 + qb^2 \log b^2 \leq 2\gamma pq(a-b)^2, \\ {}^{\forall}(a,b) \in \mathbf{R}^2, pa^2 + qb^2 = 1. \end{cases}$$

であるが、これは更に $pa^2 = s$（従って $qb^2 = 1-s$ ）という変数変換で次と同値になる；

$$s \log \frac{s}{p} + (1-s) \log \frac{1-s}{q} \leq 2\gamma \left(\sqrt{qs} - \sqrt{p(1-s)} \right)^2 \quad {}^{\forall}s \in (0,1).$$

上式の左辺、右辺をそれぞれ $L(s)$, $R(s)$ とおいて $F(s) := R(s) - L(s)$ の増減を調べれば $F(s) \geq 0$ が分かり $(LS;\gamma)$ が結論される。$F(s)$ の増減を調べる部分は少し面倒だが、やれば出来ることなので興味ある読者は試みられたい。γ の最小性は $p \neq q$ の時は $L(q) = R(q) > 0$ から、また $p = q$ の時は $\gamma_{LS} \geq \gamma_{SG} = 1$ からわかる。

Q.E.D.

Definition 1.3 ${}^{\exists}\gamma > 0$ に対して，次の $(HC;\gamma)$ が成り立つ時，半群 $(e^{tA})_{t\geq 0}$ は *hypercontractive* であるという*:*

$(HC;\gamma)$ $p > 1, q \leq 1 + (p-1)\exp(\dfrac{2t}{\gamma}) \Rightarrow \|e^{tA}\|_{p\to q} \leq 1,$

但し $\|\cdot\|_{p\to q}$ は $L^p(\mu) \to L^q(\mu)$ の 作用素ノルムを表す。

Theorem 1.2 $\gamma > 0$ に対して次は同値；

(a) $(LS;\gamma)$

(b) $(HC;\gamma)$

(c) $(HC;\gamma)$ を $p = 2$ に制限した命題（ *i.e.*,$q \leq 1 + \exp(\dfrac{2t}{\gamma}) \Rightarrow \|e^{tA}\|_{2\to q} \leq 1.$ ）

PROOF: ここで述べるのは [DS,89],pp.242 に出ている証明の要約である。
$(b) \Rightarrow (c)$ 　明らか.

Sem. on Probab.
Vol.58 1995年
P1-115

次に $\mathcal{D} := \{f \in \mathrm{Dom}(A); \frac{1}{M} \leq f \leq M \quad (^\exists M > 0)\}$, $\mathcal{L}$ を $\mathcal{D}$ から生成される線型空間と置く.

$(a) \Rightarrow (b)$ $\quad f \in \mathcal{D}$ に対して $f_t := e^{tA}f, q(t) := 1+(p-1)\exp(\frac{2t}{\gamma}) \quad (p > 1, \gamma > 0)$ と置くと,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\|f_t\|_{q(t)} &\leq \|f_t\|_{q(t)}^{1-q(t)} \frac{q'(t)}{q^2(t)}\{\mu(f_t^{q(t)} \log \frac{f_t^{q(t)}}{\mu(f_t^{q(t)})}) - 2\gamma\mathcal{E}(f_t^{\frac{q(t)}{2}}, f_t^{\frac{q(t)}{2}})\} \\ &\leq 0 \qquad (\| \quad \|_r \text{は} L^r(\mu) \text{ノルム}). \end{aligned}$$

したがって,

$$\|f_t\|_{q(t)} \leq \|f\|_p.$$

$\mathcal{L}$ は $L^p(\mu)$ の中で稠密で, e^{tA} は L^p 上で連続だから $^\forall f \in L^q$ に対して $\|f_t\|_{q(t)} \leq \|f\|_p$ が成り立つ.

$(c) \Rightarrow (a)$ $\quad f \in \mathcal{D}$ に対して上と同様の記号を用いて $\|f_t\|_{q(t)} \leq \|f\|_2 (= \|f_0\|_{q(0)})$ より,

$$\begin{aligned} 0 &\geq \left.\frac{d}{dt}\|f_t\|_{q(t)}\right|_{t=0} \\ &= \|f\|_2^{-1}\frac{q'(0)}{q^2(0)}\{\mu(f^2 \log \frac{f^2}{\mu(f^2)}) - 2\gamma\mathcal{E}(f,f)\}. \end{aligned}$$

よって,

$$\mu(f^2 \log \frac{f^2}{\mu(f^2)}) \leq 2\gamma\mathcal{E}(f,f).$$

$^\forall f \in \mathrm{Dom}(\sqrt{-A})$ に対して関数列 $f_n \in \mathcal{L}$ を $f_n \rightarrow f a.e.\mu$ かつ $f_n \rightarrow f$ in A-Graph norm と成るように選んでこれる. $t \log t$ が $(0, +\infty)$ で下に有界だから左辺に Fatou の補題を適用すれば, 最後の等式が $^\forall f \in \mathrm{Dom}(\sqrt{-A})$ に対して成り立つ.

Q.E.D.

Theorem 1.3 $\quad \theta \in (0,1), p \leq 1 + \exp(\frac{2(1-\theta)t}{\gamma_{LS}})$ に対し,

$$\|e^{tA}f - \mu(f)\|_{L^p(\mu)} \leq \|f - \mu(f)\|_{L^2(\mu)} \exp(-\frac{\theta t}{\gamma_{SG}}) \quad ^\forall f \in L^2(\mu) \quad ^\forall t > 0.$$

Sem. on Probab.
Vol.58 1995年
P1-115

PROOF:

$$
\begin{aligned}
\|e^{tA}f-\mu(f)\|_{L^p(\mu)} &= \|e^{(1-\theta)tA}e^{\theta tA}(f-\mu(f))\|_{L^p(\mu)}\\
&\le \|e^{\theta tA}(f-\mu(f))\|_{L^2(\mu)}\\
&\le \exp(-\frac{t\theta}{\gamma_{SG}})\|f-\mu(f)\|_{L^2(\mu)},
\end{aligned}
$$

但し2行目への移行には Theorem 1.2, 3行目への移行には Lemma 1.1, Theorem 1.1 を用いた。

Q.E.D.

Remark 1.3 Theorem 1.3 によれば、$\gamma_{LS}<\infty$ から $\|e^{tA}f-\mu(f)\|_{L^p(\mu)}$ ($\forall p<\infty$) の t に関する指数的減衰がわかる。しかし $p=\infty$ で同じ結論をうることは一般には出来ない。実際、次のような例がある。1次元 Ornstein-Uhlenbeck 作用素は $\gamma_{LS}=1$ (Example 1.5) であるが $f(x)=\sin x$ とすると、f が奇関数だから $\mu(f)=0$. 一方、*(3)* 及びμ の Fourier 変換：$\int e^{itx}\mu(dx)=\exp-\frac{t^2}{2}$ より、

$$
\begin{aligned}
e^{tA}f(x) &= \int\mu(dy)\sin(e^{-t}x+\sqrt{1-e^{-2t}}y)\\
&= \mathrm{Im}\ \int\mu(dy)\exp\left(i(e^{-t}x+\sqrt{1-e^{-2t}}y)\right)\\
&= \mathrm{Im}\ \exp\left(ie^{-t}x-\frac{1-e^{-2t}}{2}\right)\\
&= \sin(e^{-t}x)\exp\left(-\frac{1-e^{-2t}}{2}\right).
\end{aligned}
$$

従って

$$
\|e^{tA}f-\mu(f)\|_{L^\infty(\mu)}=\exp(-\frac{1-e^{-2t}}{2})\ge\exp(-\frac{1}{2}).
$$

次に γ_{SG}, γ_{LS} の「直積不変性」について述べる。$(X_j,\mathcal{F}_j,\mu_j)$ $(j=1,2)$ を確率空間, A_jを (A1),(A2),(A3) を満たす $L^2(\mu_j)$ 上の自己共役作用素とする。このとき、$\mathrm{Dom}(A_1)\otimes\mathrm{Dom}(A_2)$ を定義域とする作用素 $A=A_1+A_2$ (正確には $A_1\otimes I+I\otimes A_2$) は $L^2(\mu_1\otimes\mu_2)$ で closable かつその閉包 $(A,\mathrm{Dom}(A))$ は自己共役かつ条件

(A1),(A2),(A3) を満たす ([RS,80, pp.300]) 。この A をここでは A_1, A_2 の直積作用素と呼び、$A = A_1 + A_2$ と書こう（やや語弊があるネーミングだが、2つの Markov 過程の積過程に対応するものである）。

Theorem 1.4 上で述べた直積作用素 $A = A_1 + A_2$ について

$$\gamma_{SG}(A) = \gamma_{SG}(A_1) \vee \gamma_{SG}(A_2). \tag{7}$$

更に、e^{tA_j} $(j = 1, 2)$ が積分核を持つと仮定する；

$$e^{tA_j} f(x) = \int f(x') e^{tA_j}(x, dx'), \quad j = 1, 2.$$

このとき

$$\gamma_{LS}(A) = \gamma_{LS}(A_1) \vee \gamma_{LS}(A_2). \tag{8}$$

PROOF: よく知られているように

$$\mathrm{Spec}(-A) = \{\lambda_1 + \lambda_2\,;\, \lambda_j \in \mathrm{Spec}(-A_j)\},$$

([RS,80, Theorem VIII.33]) 。これと Lemma 1.1 から (7) が従う。(8) について「$\geq$」の方は自明。実際 A に対する $(LS;\gamma)$ の test function f として $f(x, y) = f(x) \in L^2(\mu_1)$, $f(x, y) = f(y) \in L^2(\mu_2)$ をとればよい。「$\leq$」を言うには$\gamma = \gamma_{LS}(A_1) \vee \gamma_{LS}(A_2)$ とおいて $(e^{tA})_{t \geq 0}$ についての $(HC;\gamma)$ を示せばよい (cf. Theorem 1.2)。そこで $p > 1, q \leq 1 + (p-1)\exp(\frac{2t}{\gamma})$ としよう。

$$e^{tA} f(x, y) = \int e^{tA_1}(x, dx') \int e^{tA_2}(y, dy') f(x', y')$$

と書けることから、

$$\begin{aligned}
\|e^{tA} f\|^q_{L^q(\mu_1 \otimes \mu_2)} &= \int \mu_1(dx) \int \mu_2(dy) \left| \int e^{tA_1}(x, dx') \int e^{tA_2}(y, dy') f(x', y') \right|^q \\
&= \int \mu_1(dx) \left\| \int e^{tA_1}(x, dx') \int e^{tA_2}(y, dy') f(x', y') \right\|^q_{L^q(\mu_2(dy))} \\
&\leq \int \mu_1(dx) \left(\int e^{tA_1}(x, dx') \left\| \int e^{tA_2}(y, dy') f(x', y') \right\|_{L^q(\mu_2(dy))} \right)^q \\
&\leq \int \mu_1(dx) \left(\int e^{tA_1}(x, dx') \| f(x', y) \|_{L^p(\mu_2(dy))} \right)^q \\
&\leq \left(\Big\| \| f(x, y) \|_{L^p(\mu_2(dy))} \Big\|_{L^p(\mu_1(dx))} \right)^q \\
&= \| f \|^q_{L^p(\mu_1 \otimes \mu_2)},
\end{aligned}$$

Sem. on Probab.
Vol.58 1995年
P1-115

但し 4 行目への移行では $(e^{tA_2})_{t\geq 0}$ についての $(HC;\gamma)$ を 、5 行目への移行では $(e^{tA_1})_{t\geq 0}$ についての $(HC;\gamma)$ を 用いた。これで $(e^{tA})_{t\geq 0}$ についての $(HC;\gamma)$ が示せた。

Q.E.D.

Example 1.7 n 次元 *Ornstein-Uhlenbeck operator;*
$X = \mathbf{R}^n$, $\mu(dx) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\exp(-\dfrac{|x|^2}{2})dx$, ($dx$ は $\mathbf{R}^n$ 上の Lebesgue measure) と置く. このとき作用素 $A = \Delta - \sum_{j=1}^{n} x_j \dfrac{\partial}{\partial x_j}$ は 1 次元 Ornstein-Uhlenbeck operator (*cf.* Example 1.1,1.3,1.5) の n-直積となる. 従って Theorem 1.4 より $\gamma_{SG} = \gamma_{LS} = 1$. 同様に、無限次元（抽象 Wiener 空間上の Ornstein-Uhlenbeck operator ）でも $\gamma_{SG} = \gamma_{LS} = 1$ である。

Example 1.8 : 独立な n-粒子系；

$$X = \{0,1\}^n = \{\eta = (\eta(i))_{i=1}^n; \eta(i) = 0 \,\mathrm{or}\, 1\},$$
$$\mu = \bigotimes_1^n \{p\delta_0 + q\delta_1\}$$

として，次の作用素を考えよう；

$$Af(\eta) = \sum_{j=1}^{n} c_j(\eta)\{f(\eta^j) - f(\eta)\}$$

但し $c_j(\eta) = q(1-\eta(j)) + p\eta(j)$, また η^j は η の j-座標を入れ替えたものこれは Two state Markov process (Example 1.2) の n-直積なので $n = \infty$ を含めて γ_{SG}, γ_{LS} はそれぞれ *1* 粒子の場合 (Example 1.4, 1.6) と同じである。ここではむしろ j 毎に p, q を変化させた方が面白い例が出来る。$p = 1/j$, $q = 1-(1/j)$ としておいて $j = 1,2,\cdots$ について無限直積 A をとれば Theorem 1.4 より $\gamma_{SG}(A) = 1$ かつ $\gamma_{LS}(A) = \infty$ である。

Sem. on Probab.
Vol.58 1995年
P1-115

2 Lattice spin systems - Approach to the equilibrium

格子模型における log-Sobolev 不等式；歴史的背景

Log-Sobolev 不等式は hypercontractivity の微分形として L. Gross（[G,75]）によって導入されて以来多くの仕事を動機づけて来た。その結果 spectral gap との関係（Theorem 1.1）を含めた解析的一般論は今日までにかなり整理された。なかでもΓ_2-criterion として知られる log-Sobolev 不等式成立の為の十分条件（[BE,85]）はその多岐にわたる影響力という点で特筆すべきである。log-Sobolev-不等式は直積不変性（Theorem 1.4）と呼ばれる著しい性質を持つ；微分構造をもった確率空間で log-Sobolev 不等式が言えれば直ちにその可算直積空間での log-Sobolev 不等式が結論される。格子模型においては空間は各 spin の直積でありながら測度（Gibbs 測度）はもはや単純な直積測度ではない。そこで、格子模型でいつ log-Sobolev 不等式が成り立つか？ という疑問が生じるのは自然であり、またそれに答えることで非平衡状態から時間発展した配置が平衡状態に近づく速さについての情報が得られる。この問題への挑戦はまず Carlen-Stroock [CS,86] に続くいくらかの仕事（例えば [HS,87] の前半,[DS,90]）において試みられた。これらは Γ_2-criterion, あるいはその変形の無限次元への非自明な適用例として意義深い。しかしながら、格子模型における log-Sobolev 不等式の真価は Holley と Stroock の仕事 [HS,89] に至ってようやく発揮される。[HS,89] は 1 次元（$\mathbf{Z}$ 上の）stochastic Ising model が Gibbs state に指数的に収束することを示しているが、その際に用意されるべき混合条件を log-Sobolev constant の評価（その証明は [HS,87] の最終節）という形で提示してみせた。そこでは、1 次元という幾何的な特性から生じた混合性が低温においても生き残る事情が log-Sobolev 不等式を通じて明かにされたと言える。またそれに続く B. Zegarlinski の仕事は log-Sobolev 不等式の、より本質的な機構に踏み込むことで「Γ_2 時代の終焉」を告げた；彼は log-Sobolev 不等式と Doburushin-uniqueness condition との関係を指摘 ([Z,92]) する一方で 1 次元における log-Sobolev constant の有界性を巧妙な方法で証明した（[Z,90]）。[HS,89],[Z,90],[Z,92] を通じて開発された技術の統合により log-Sobolev 不等式と complete analiticity（このノートでは (DSM) 呼ぶ条件;[DSh,85A]–[DSh, 87]）の同値性が見いだされるに至る（[SZ,92A]–[SZ,92C]）。現

Sem. on Probab.
Vol.58 1995年
P1-115

在、これら Stroock と Zegalinski の共同研究は深化、発展される一方で新たな問題を動機づけている（[La,95], [MO,94A], [MO,94B], [MOS,94],[HY, 95]）。

以下、格子模型について説明した後で本稿で紹介する主結果（Theorem 2.1）を述べる。

$x, y \in \mathbf{Z}^d$に対して $d(x,y) = \max_{j=1,\cdots,d} |x_j - y_j|$ と置く．また，$F \subset\subset \mathbf{Z}^d$ は F が $\mathbf{Z}^d$ の有限集合であることを表すものとする．

$\Lambda \subset \mathbf{Z}^d$ 上の，スピン配置空間を$\Omega_\Lambda = \{\sigma = (\sigma(x))_{x\in\Lambda}; \sigma(x) = \pm 1\} = \{-1, 1\}^\Lambda$ で表し直積位相を入れておく。特に、$\Lambda = \mathbf{Z}^d$ の時 $\Omega_{\mathbf{Z}^d} = \Omega$ と書く。$\Lambda \subset \mathbf{Z}^d$に対して，$\mathcal{C}_\Lambda = \{f; \Omega \to \mathbf{R}; f$は$\Lambda$の座標のみに depend する$\}$, $\mathcal{C} = \bigcup_{\Lambda\subset\subset\mathbf{Z}^d} \mathcal{C}_\Lambda$とする．また、関数 $f : \Omega_\Lambda \to \mathbf{R}$ に対し $\|f\|$ は sup norm を表すものとする；

$$\|f\| = \sup_{\sigma\in\Omega_\Lambda} |f(\sigma)|.$$

Ω 上の関数の族

$$\Phi = \{\Phi_F \in \mathcal{C}_F; F \subset\subset \mathbf{Z}^d\}$$

が次を満たすとき、これを**相互作用** と呼ぶことにする；

(Φ1) :shift invariance ; $\Phi_{F+x} = \Phi_F \circ \theta_x$, $^\forall F \subset\subset \mathbf{Z}^d$, $^\forall x \in \mathbf{Z}^d$,
但し $\theta_x : \sigma \in \Omega \mapsto (\sigma(y-x))_{y\in\mathbf{Z}^d} \in \Omega$.

(Φ2) :finite range ; $r := \sup\{\mathrm{diam}(F); \Phi_F \neq 0\} < +\infty$

Remark 2.1 仮定 *(Φ1)* について；相互作用の空間一様性を保証するものである。実は、以下の議論に関する限り shift invariant でなくとも

$$\sup_x \sum_{F:F\ni x} \|\Phi_F\| < \infty$$

程度のことを仮定すれば十分である。その意味で本当は $\mathbf{Z}^d$ に拘る必要すらない。

Remark 2.2 仮定 *(Φ2)* について；以下の議論は range r が有限であることにかなり大きく依存しているが、この仮定を緩める努力も既になされている（[La,95]）。

以後 Φ を固定する. $\Lambda \subset\subset \mathbf{Z}^d$上のエネルギーを $U_\Lambda = \sum_{F\cap\Lambda\neq\emptyset} \Phi_F$と定義する.

Example 2.1 : *Ising ferromagnet* ;
相互作用として次のものを考える；

$$\Phi_F(\sigma) = \begin{cases} -\beta\sigma(x)\sigma(y) & F = \{x,y\}, |x-y|_{L^1} = 1 \\ -\beta h\sigma(x) & F = \{x\} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

(但し $|x-y|_{L^1} = \sum_{\nu=1}^{d}|x_\nu - y_\nu|$) この model では $\mathbf{Z}^d$ を強磁性体に見立て、$\beta > 0$ は温度の逆数を, $h \in \mathbf{R}$ は外部磁場を表している。また$-\beta\sigma(x)\sigma(y)$ はスピン間に符号を揃えようとする力が働くことを表している。このとき、

$$U_\Lambda(\sigma) = -\frac{\beta}{2}\sum_{\substack{x,y\in\Lambda \\ |x-y|_{L_1}=1}} \sigma(x)\sigma(y) - \beta\sum_{x\in\Lambda}\sigma(x)(h + \sum_{\substack{y\notin\Lambda \\ |x-y|_{L_1}=1}} \sigma(y)).$$

Definition 2.1 $\Lambda \subset\subset \mathbf{Z}^d$, $\eta \in \Omega$ を固定する。Ω_Λ 上の確率測度 $E^{\Lambda,\eta}$ であって1点 $\sigma_\Lambda \in \Omega_\Lambda$ の値が次で与えられるものを考える；

$$E^{\Lambda,\eta}(\sigma_\Lambda) = \frac{\exp(-U_\Lambda(\sigma_\Lambda \cdot \eta_{\Lambda^c}))}{Z^{\Lambda,\eta}} \quad (Z^{\Lambda,\eta}\text{は正規化定数}),$$

ただし, $\sigma_\Lambda \cdot \eta_{\Lambda^c} := \begin{cases} \sigma(x) & x \in \Lambda \\ \eta(x) & x \in \Lambda^c. \end{cases}$ これを Λ 上の *finite volume Gibbs state* と呼ぶ。またこのときの η を境界条件という。なお、$E^{\Lambda,\eta}$ を次の解釈で Ω 上の確率測度と見なすことも多い；

$$E^{\Lambda,\eta}(d\sigma) = E^{\Lambda,\eta}(d\sigma_\Lambda) \otimes \delta_{\eta_{\Lambda^c}}(d\sigma_{\Lambda^c}) \tag{9}$$

Lemma 2.1 次を満たす $c = c(\Phi) > 0$ が存在する；

$$\begin{cases} \exp(-c|\Lambda|) & \leq E^{\Lambda,\eta}(\sigma_\Lambda) \leq 1 \\ Z^{\Lambda,\eta} & \leq \exp(c|\Lambda|). \end{cases}$$

PROOF: (Φ2) より,

$$c_1(\Phi) = \sup_{\sigma\in\Omega}\{\sum_{F:F\ni 0}|\Phi_F|\} < +\infty$$

と置けば, (Φ1) より,

$$|U_\Lambda(\sigma)| \le \sum_{x\in\Lambda}\sum_{F:F\ni x}|\Phi_F| \le c_1(\Phi)|\Lambda|.$$

よって,

$$\begin{aligned} Z^{\Lambda,\eta} &\le |\Lambda|\exp(c_1|\Lambda|) \\ E^{\Lambda,\eta}(\sigma_\Lambda) &\ge |\Lambda|^{-1}\exp(-2c_1|\Lambda|) \end{aligned}$$

となる. したがって, c を適当にとれば補題が成り立つ.

Q.E.D.

Lemma 2.2 $\Lambda \subset \tilde{\Lambda} \subset\subset \mathbf{Z}^d$に対し,

$$E^{\tilde{\Lambda},\eta}f = \int_\Omega E^{\tilde{\Lambda},\eta}(d\omega)E^{\Lambda,\omega}f \quad {}^\forall f \in \mathcal{C} \quad , \quad (*)$$

(cf.(9)) . なお、上式 $(*)$ を $E^{\tilde{\Lambda}} = E^{\tilde{\Lambda}} \circ E^\Lambda$ の形に略記することもある。

PROOF: $f = 1_\sigma$と置いて, ${}^\forall\sigma \in \Omega$に対して $(*)$ が証明できればよい. $\sigma \ne \sigma_{\tilde{\Lambda}} \cdot \eta_{\tilde{\Lambda}^c} \left(:= \begin{cases} \sigma(x) & x \in \tilde{\Lambda} \\ \eta(x) & x \in \tilde{\Lambda}^c \end{cases} \right)$なら $(*)$ の両辺は0なので $\sigma = \sigma_{\tilde{\Lambda}} \cdot \eta_{\tilde{\Lambda}^c}$ と仮定する. $\omega = \omega_\Lambda \cdot \sigma_{\Lambda^c}$ の時,

$$\frac{\exp(-U_{\tilde{\Lambda}}(\omega))}{\exp(-U_\Lambda(\omega))} = \frac{\exp(-U_{\tilde{\Lambda}}(\sigma))}{\exp(-U_\Lambda(\sigma))}$$

と成る. これを使うと,

$$\int_\Omega E^{\tilde{\Lambda},\eta}(d\omega)E^{\Lambda,\omega}(1_\sigma) \quad = \quad \sum_{\omega=\omega_\Lambda\cdot\sigma_{\Lambda^c}} \frac{\exp(-U_{\tilde{\Lambda}}(\omega))}{Z^{\tilde{\Lambda},\eta}} \cdot \frac{\exp(-U_\Lambda(\sigma))}{Z^{\Lambda,\omega}}$$

Sem. on Probab.
Vol.58 1995年
P1-115

$$\begin{aligned}
&= \frac{\exp(-U_\Lambda(\sigma))}{Z^{\tilde\Lambda,\eta}} \cdot \frac{\sum_{\omega=\omega_\Lambda\cdot\sigma_{\Lambda^c}} \exp(-U_{\tilde\Lambda}(\omega))}{\sum_{\omega=\omega_\Lambda\cdot\sigma_{\Lambda^c}} \exp(-U_\Lambda(\omega))} \\
&= \frac{\exp(-U_{\tilde\Lambda}(\sigma))}{Z^{\tilde\Lambda,\eta}} \\
&= E^{\tilde\Lambda,\eta}(1_\sigma).
\end{aligned}$$

Q.E.D.

Definition 2.2 配置 $\sigma \in \Omega$ の x- 座標（ $x \in \mathbf{Z}^d$）の符号を変えることによって得られる新しい配置を σ^x と書くことにする。$A_x : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ を $A_x f = c_x \cdot \nabla_x f$ で定義する、但し

$$c_x(\sigma) = E^{\{x\},\sigma}(\sigma^x) = \frac{\exp(-U_{\{x\}}(\sigma^x))}{Z^{x,\sigma}}, \quad \nabla_x f(\sigma) = f(\sigma^x) - f(\sigma).$$

また, $\Lambda \subset\subset \mathbf{Z}^d, \eta \in \Omega$ に対し、作用素 $A^{\Lambda,\eta} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ 及び $T_t^{\Lambda,\eta} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ を次のように定義する;

$$A^{\Lambda,\eta} f(\sigma) := \sum_{x\in\Lambda} (A_x f)(\sigma_\Lambda \cdot \eta_{\Lambda^c})$$

$$T_t^{\Lambda,\eta} := e^{tA^{\Lambda,\eta}} \left(= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (A^{\Lambda,\eta})^k\right).$$

Remark 2.3 $A^{\Lambda,\eta}$ は Λ^c-座標を固定した上で、Λ 上の差分のみを施すので、実質的には $\mathcal{C}_\Lambda$ から $\mathcal{C}_\Lambda$ への作用素（ $2^{|\Lambda|} \times 2^{|\Lambda|}$-行列）である。従って、その半群 $T_t^{\Lambda,\eta}$ も行列としての指数関数と理解すればよい。

Lemma 2.3

(*i*) $\quad -E^{\Lambda,\eta}(f A^{\Lambda,\eta} g) = \frac{1}{2} \sum_{x\in\Lambda} E^{\Lambda,\eta}[c_x \nabla_x f \nabla_x g] \qquad {}^\forall\{f,g\} \subset \mathcal{C}_\Lambda.$

(*ii*) $\quad E^{\Lambda,\eta}$ は $(T_t^{\Lambda,\eta})_{t\geq 0}$-不変.

Remark 2.4 (*i*) より $A^{\Lambda,\eta}$ は $L^2(E^{\Lambda,\eta}) (\cong \mathcal{C}_\Lambda)$ 上の有界自己共役作用素であり, 第1節の条件（A1）,（A2）,（A3）を満たす。

Sem. on Probab.
Vol.58 1995年
P1-115

Proof: まず、測度 $c_x(\omega)E^{\Lambda,\eta}(d\omega)$ $(x \in \Lambda)$ が変換 $\omega \mapsto \omega^x$ についての不変測度であること；

$$\int_\Omega E^{\Lambda,\eta}(d\omega)c_x(\omega)h(\omega^x) = \int_\Omega E^{\Lambda,\eta}(d\omega)c_x(\omega)h(\omega), \quad {}^\forall f \in \mathcal{C}, \tag{10}$$

を示す。

$$\begin{aligned} & \int_\Omega E^{\{x\},\sigma}(d\omega)c_x(\omega)(h(\omega^x) - h(\omega)) \\ = \ & E^{\{x\},\sigma}(\sigma)c_x(\sigma)(h(\sigma^x) - h(\sigma)) + E^{\{x\},\sigma}(\sigma^x)c_x(\sigma^x)(h(\sigma) - h(\sigma^x)) \\ = \ & 0. \end{aligned}$$

上式両辺を $E^{\Lambda,\eta}(d\sigma)$ で積分し、(2.2) を使えば(10) を得る。(10) を $h(\omega) = f(\omega)[g(\omega^x) - g(\omega)]$ として用いることにより、

$$\begin{aligned} -E^{\Lambda,\eta}(fA_xg) &= -\int_\Omega E^{\Lambda,\eta}(d\omega)c_x(\omega)f(\omega)[g(\omega^x) - g(\omega)] \qquad (=: (I)) \\ &= -\int_\Omega E^{\Lambda,\eta}(d\omega)c_x(\omega)f(\omega^x)[g(\omega) - g(\omega^x)] \qquad (=: (II)) \\ &= \frac{1}{2}((I) + (II)) \\ &= \frac{1}{2}E^{\Lambda,\eta}(c_x\nabla_x f\nabla_x g). \end{aligned}$$

$x \in \Lambda$ について和をとれば (i) を得る。(ii) は (i) の帰結である。

Q.E.D.

Definition 2.3 $\Lambda \subset\subset \mathbf{Z}^d$ に対し、$\gamma_{SG}(\Lambda), \gamma_{LS}(\Lambda)$ を次のように定義する；

$$\gamma_{SG}(\Lambda) = \inf\{\gamma > 0; E^{\Lambda,\eta}(|f - E^{\Lambda,\eta}f|^2) \le \gamma\mathcal{E}^{\Lambda,\eta}(f,f), \quad {}^\forall f \in \mathcal{C}_\Lambda, \quad {}^\forall \eta \in \Omega\}$$
$$\gamma_{LS}(\Lambda) := \inf\{\gamma > 0; E^{\Lambda,\eta}(f^2 \log \frac{f^2}{E^{\Lambda,\eta}(f^2)}) \le 2\gamma\mathcal{E}^{\Lambda,\eta}(f,f), \quad {}^\forall f \in \mathcal{C}_\Lambda, \quad {}^\forall \eta \in \Omega\}.$$

この時，$\gamma_{SG}(\Lambda) \le \gamma_{LS}(\Lambda) \le \exp(c|\Lambda|)$ $\quad (c = c(\Phi))$ は容易にわかる。また，$d \ge 2$ で Λ が 1 辺 l の立方体なら$\gamma_{LS}(\Lambda) \le \exp(cl^{d-1})$ $\quad$ となる (例えば [Y 94])。

Sem. on Probab.
Vol.58 1995年
P1-115

また $\gamma_{EC}(\Lambda)$ を次で定義する；

$$\gamma_{EC}(\Lambda) = \inf\left\{\gamma > 0;\ \begin{array}{l} {}^{\forall} f \in \mathcal{C}_\Lambda,\ {}^{\exists} c(f) > 0,\ s.t. \\ \|T_t^{\Lambda,\eta} f - E^{\Lambda,\eta} f\| \leq c(f) \exp(-\dfrac{t}{\gamma}),\ {}^{\forall} t > 0,\ {}^{\forall}\eta \in \Omega \end{array}\right\},$$

Definition 2.4 次の条件を *Dobrushin-Shlosman mixing condition* といい, (DSM) と書くことにする.

$$\begin{cases} {}^{\exists} c_1 > 0, {}^{\exists} c_2 > 0 \qquad s.t. \\ \qquad \sup_\eta |E^{\Lambda,\eta^x} f - E^{\Lambda,\eta} f| \leq c_1 |||f||| \exp(-\dfrac{d(x, S_f)}{c_2}) \qquad {}^{\forall} f \in \mathcal{C},\ S_f \subset {}^{\forall}\Lambda,\ {}^{\forall} x \notin \Lambda. \end{cases}$$

但し $|||f||| := \sum_{x \in \mathbf{Z}^d} \|\nabla_x f\|$ また $S_f = \{x \in \mathbf{Z}^d;\ f$ が x-座標に依存$\}$. とする.

次の結果の証明（次章）が我々の目標である；

Theorem 2.1 以下は全て *(DSM)* と同値（[SZ 92C]）;

(SG) $\quad \sup_{\Lambda \subset\subset \mathbf{Z}^d} \gamma_{SG}(\Lambda) < \infty,$

(LS) $\quad \sup_{\Lambda \subset\subset \mathbf{Z}^d} \gamma_{LS}(\Lambda) < \infty,$

(EC) $\quad \sup_{\Lambda \subset\subset \mathbf{Z}^d} \gamma_{EC}(\Lambda) < \infty.$

Remark 2.5 具体的かつ非自明な場合に *(DSM)* を直接 check するのは不可能に近い。むしろ (LS) や (EC) についての既知の結果から Theorem 2.1 を通じて *(DSM)* の成立例を見いだすことが出来る場合が多い。以下、*(DSM)* の成立例を挙げる。

(i) $d = 1$; この場合、[Z,90] で *(LS)* が既知。なお、[Z,90] では一見、infinite volume Gibbs state (cf. Definition 4.3) に対する log-Sobolev 不等式のみを示しているかに見えるが実は *(LS)* まで示したことになる；相互作用の shift-invariance を仮定していないことに注意し、有限集合上に制限した相互作用に彼の結果を適用すればよい。

(ii) $\|\Phi\| := \sum_{F: F \ni 0} \|\Phi_F\|$ が十分小さいとき；この場合、(ε, M) -criterion（[Li, 85 Th.I.4.1]）により (UC) が check できる。従って Ising ferromagnet で β が十分小さければ *(DSM)* が成立する。

Sem. on Probab.
Vol.58 1995年
P1-115

(iii) 相互作用 $\Phi = (\Phi_F)_{F \subset\subset \mathbf{Z}^d}$, 及び $s_0 \in \{-1, +1\}$ を固定する。新たな相互作用 $\Phi^{(k)} = (\Phi_F^{(k)})$ を

$$\Phi_F^{(k)}(\sigma) = \begin{cases} \Phi_{\{x\}}(\sigma) - k & \sigma(x) = s_0,\ F = \{x\}, \\ \Phi_F(\sigma) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

で定義する。このとき $k \geq {}^{\exists}k_0(\Phi)$ で$\Phi^{(k)}$ について *(DSM)* が成立([DP,81])。

Sem. on Probab.
Vol.58 1995年
P1-115

3 Proof of Theorem 2.1

Theorem 2.1 の証明は次の手順で行う；

$$(SG) \Rightarrow (DSM) \Rightarrow (LS) \Rightarrow (EC) \Rightarrow (SG).$$

$(EC) \Rightarrow (SG)$ は自明にわかるのでその他の「$\Rightarrow$」を示せばよい。

<u>(SG) $\Longrightarrow$ (DSM)</u>

次のことを示す;

$$(SG) \Longrightarrow (Cov.) \begin{cases} {}^{\exists}c_1 > 0, {}^{\exists}c_2 > 0 \\ |Cov^{\Lambda,\eta}(f,g)| \le c_1 |||f||| \cdot |||g||| \exp(\dfrac{-d(S_f, S_g)}{c_2}) \\ {}^{\forall}\Lambda \subset\subset \mathbf{Z}^d, \quad {}^{\forall}\eta \in \Omega, \quad {}^{\forall}\{f,g\} \subset \mathcal{C}_\Lambda \end{cases}$$

ただし　$Cov^{\Lambda,\eta}(f,g) := E^{\Lambda,\eta}(f,g) - E^{\Lambda,\eta}f \cdot E^{\Lambda,\eta}g.$

Remark 3.1 $\{\Phi_F \equiv 0\} \Longrightarrow E^{\Lambda,\eta}(f,g) = E^{\Lambda,\eta}f \cdot E^{\Lambda,\eta}g \quad if \quad S_f \cap S_g \ne \phi.$

Remark 3.2 $(Cov.) \Longrightarrow (DSM)$ は以下のように導かれる; $g(\sigma) = \frac{dE^{\Lambda,\eta^x}}{dE^{\Lambda,\eta}}$ $({}^{\forall}x \notin \Lambda)$ とすると, $S_g \subset \Lambda \cap \{y : |x-y| \le r\}$ であるから $|||g(\sigma)||| \le c'$ (Λ と無関係な定数)。また $E^{\Lambda,\eta}(fg) = E^{\Lambda,\eta^x} f$ (特に $f \equiv 1$ のとき $E^{\Lambda,\eta}g = 1$) であるから

$$\begin{aligned} \text{LHS}(Cov.) &= |E^{\Lambda,\eta^x} f - E^{\Lambda,\eta} f| \\ \text{RHS}(Cov.) &\le c_1 |||f||| \times c' \exp(\frac{r}{c_2} - \frac{d(x, S_f)}{c_2}) \end{aligned}$$

$(d(S_f, S_g) + r \ge d(x, S_f)$ による$)$ $c'e^{r/c_2} = \text{const.}$ と見れば $(Cov.) \Longrightarrow (DSM)$ が言えたことになる.

以後, Λ, η を固定し、$T_t = T_t^{\Lambda,\eta}$ と書く。このとき

$$E^{\Lambda,\eta} f = \lim_{t\to\infty} T_t f(\sigma_\Lambda)$$
$$Cov^{\Lambda,\eta}(f,g) = \lim_{t\to\infty} (T_t(fg) - T_t f \cdot T_t g)$$

である.

Sem. on Probab.
Vol.58 1995年
P1-115

Lemma 3.1 $^\exists\gamma > 0, ^\exists K = K(\gamma) > 0 \quad s.t.$

$$||T_t(f,g) - T_t f \cdot T_t g|| \le K|||f||| \cdot |||g||| \exp(Kt - \frac{d(S_f, S_g)}{\gamma})$$
$$^\forall\{f,g\} \subset \mathcal{C}_\Lambda, \quad ^\forall t > 0.$$

PROOF:

$$\begin{aligned} F(t) &:= T_t(fg) - T_t f \cdot T_t g \\ G(t) &:= A(T_t f \cdot T_t g) - T_t f A(T_t g) - T_t g A(T_t f) \quad \text{とすると} \\ F'(t) &= AT_t fg - T_t f A(T_t g) - T_t g A(T_t f) \\ &= AF(t) + G(t) \quad \text{であって} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{このとき} \quad \frac{d}{ds}(T_{t-s}F(s)) &= T_{t-s}F'(s) - T_{t-s}(AF(s)) \\ &= T_{t-s}G(s) \\ \text{0 から t まで積分して} \quad F(t) &= \int_0^t T_{t-s}G(s)ds \\ \text{よって} \quad ||F(t)|| &= \int_0^t ||G(s)||ds \quad \text{となる.} \\ \text{ここで} \quad G(0)(\sigma) &= A(fg) - fAg - gAf \\ &= \sum_x c_x(\sigma)\{f(\sigma^x)g(\sigma^x) - f(\sigma)g(\sigma) \\ &\quad -f(\sigma)(g(\sigma^x) - g(\sigma)) - g(\sigma)(f(\sigma^x) - f(\sigma))\} \\ &= \sum_x c_x(\sigma)\nabla_x f \cdot \nabla_x g. \end{aligned}$$

$f \longrightarrow T_t f, g \longrightarrow T_t g$ とすれば

$$G(s) = \sum_x \underline{c_x(\sigma)\nabla_x(T_t f) \cdot \nabla_x(T_t g)}.$$

下線部を評価することで証明される. (以下 [Li 85,P40])

Lemma 3.2 $(SG) \Longrightarrow {}^\exists c_1 > 0, \quad {}^\exists c_2 > 0 \quad s.t.$

$$||T_t(fg) - T_t f \cdot T_t g||_{L^2(E^{\Lambda,\eta})} \le c_1|||f||| \cdot |||g||| \exp(-\frac{d(S_f, S_g)}{c_2}) \qquad (*)$$
$$^\forall\{f,g\} \subset \mathcal{C}_\Lambda, \quad ^\forall t > 0.$$

Sem. on Probab.
Vol.58 1995年
P1-115

特に,$t \to \infty$ とすれば $(Cov.)$ が得られる.

PROOF:
$(*)$ の両辺は $\left.\begin{array}{l} f \longmapsto f + \text{定数} \\ g \longmapsto g + \text{定数} \end{array}\right\}$ で不変. そこで,$^\exists\{\sigma_\Lambda, \sigma'_\Lambda\} \subset \Omega_\Lambda$ s.t. $f(\sigma_\Lambda) = g(\sigma'_\Lambda) = 0$ とできる.

$$\text{このとき}\left\{\begin{array}{r} ||f|| = \sup_\sigma |f(\sigma) - f(\sigma_\Lambda)| \le |||f||| \\ ||g|| \le |||g|||. \end{array}\right.$$

$$\begin{aligned} \text{また、} \quad & |f(\sigma)g(\sigma) - f(\sigma')g(\sigma')| \\ \le \; & |f(\sigma)g(\sigma) - f(\sigma)g(\sigma')| + |f(\sigma)g(\sigma') - f(\sigma')g(\sigma')| \\ \le \; & |f(\sigma)||g(\sigma) - g(\sigma')| + |g(\sigma')||f(\sigma) - f(\sigma')| \quad \text{より} \end{aligned}$$

$$|||fg||| \le 2|||f||| \cdot |||g|||.$$

以下, Lem. 3.1 を$\gamma = \sup_\Lambda \gamma_{SG}(\Lambda)$ として用いる.
さらに $\rho := d(S_f, S_g), c_2 = \gamma(1 + \gamma K), \tau > 0$ を $\frac{\tau}{\gamma} = \frac{\rho}{c_2}$ となるようにとる. $t \ge \tau$ のときを示す。

$$\begin{aligned} \mathrm{LHS}(*) \le \; & \underbrace{||T_t(fg) - T_\tau(fg)||_{L^2}}_{(I)} + \underbrace{||T_\tau(fg) - T_\tau f \cdot T_\tau g||_{L^2}}_{(II)} \\ & + \underbrace{||T_\tau f \cdot T_\tau g - T_t f \cdot T_t g||_{L^2}}_{(III)}. \end{aligned}$$

ここで, Lem. 1.1 を用いて

$$\begin{aligned} (I) \le \; & ||T_t(fg) - E^{\Lambda,\eta}(fg)||_{L^2} + ||T_\tau(fg) - E^{\Lambda,\eta}(fg)||_{L^2} \\ \le \; & \exp(-\frac{t}{\gamma})||fg - E^{\Lambda,\eta}(fg)||_{L^2} + \exp(-\frac{\tau}{\gamma})||fg - E^{\Lambda,\eta}(fg)||_{L^2} \\ \le \; & 2\exp(-\frac{\tau}{\gamma})|||fg||| \le 4|||f||| \cdot |||g||| \exp(-\frac{\rho}{c_2}). \end{aligned}$$

(III)も同様に

$$\begin{aligned} (III) \le \; & ||T_\tau f \cdot T_\tau g - T_\tau f \cdot T_t g||_{L^2} + ||T_\tau f \cdot T_t g - T_t f \cdot T_t g||_{L^2} \\ \le \; & \ldots \le 4|||f||| \cdot |||g||| \exp(-\frac{\rho}{c_2}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{また} \quad (II) \le \; & ||T_\tau(fg) - T_\tau f \cdot T_\tau g|| \\ \le \; & K|||f||| \cdot |||g||| \exp(K\tau - \frac{\rho}{\gamma}) = K|||f||| \cdot |||g||| \exp(-\frac{\rho}{c_2}). \end{aligned}$$

Sem. on Probab.
Vol.58 1995年
P1-115

上の３つを合わせて LHS$(*) \le (K+8)|||f|||\cdot|||g|||\exp(-\frac{\rho}{c_2})$. ここで $t\uparrow\infty$ として $(SG) \Longrightarrow (Cov.)$ が示された.

Q.E.D.

(LS) ⟹ (EC)

$\gamma_{LS}(:=\sup_\Lambda \gamma_{LS}) < \infty$ とするとき, $\gamma_{SG}(:=\sup_\Lambda \gamma_{SG}) \le \gamma_{LS} < \infty$. (EC) を示すため $f\in\mathcal{C}, \Lambda(\supset S_f):\text{fix}, S_f \subset \Lambda(t) \subset \Lambda$ ($\Lambda(t)$ は t について単調増大とする) と置く.

$$\begin{aligned}
\text{LHS}(*) &\le \underbrace{||T_t^{\Lambda,\eta}f - T_t^{\Lambda(t),\eta}f||}_{=:I_t} + \underbrace{||T_t^{\Lambda(t),\eta}f - E^{\Lambda(t),\eta}f||}_{=:J_t} \\
&\quad + \underbrace{|E^{\Lambda(t),\eta}f - E^{\Lambda,\eta}f|}_{=:K_t} \\
\text{ここで} K_t &= E^{\Lambda,\eta}(K_t^2)^{1/2} \\
&\le ||E^{\Lambda(t),\eta}f - T_t^{\Lambda(t),\eta}f||_{L^2(E^{\Lambda,\eta})} + ||T_t^{\Lambda(t),\eta}f - T_t^{\Lambda,\eta}f||_{L^2(E^{\Lambda,\eta})} \\
&\quad + ||T_t^{\Lambda,\eta}f - E^{\Lambda,\eta}f||_{L^2(E^{\Lambda,\eta})} \\
&\le J_t + I_t + |||f|||\exp(-\frac{t}{\gamma_{SG}}) \quad \text{であるから}
\end{aligned}$$

LHS$(*) \le 2(I_t+J_t) + |||f|||\exp(-\frac{t}{\gamma_{SG}})$.
以下,I_t, J_t を評価するための補題を準備する.

Lemma 3.3 $^\exists B = B(\Phi) > 0$ *s.t.* $f\in\mathcal{C}$, $S_f \subset \Gamma \subset \Lambda$ $(\subset\subset \mathbf{Z}^d)$ $\{x\in\Lambda : d(x,S_f) \le rN\} \subset \Gamma$ ならば

$$||T_t^{\Lambda,\eta}f - T_t^{\Gamma,\eta}f|| \le |||f|||(\frac{Bte}{N})^N e^{Bt} \quad (^\forall t > 0).$$

Proof:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}T_{t-s}^{\Gamma,\eta}T_s^{\Lambda,\eta}f &= T_{t-s}^{\Gamma,\eta}(A^{\Lambda,\eta} - A^{\Gamma,\eta})T_s^{\Lambda,\eta}f \quad \text{より} \\
T_t^{\Lambda,\eta}f - T_t^{\Gamma,\eta}f &= \int_0^t T_{t-s}^{\Gamma,\eta}(A^{\Lambda,\eta} - A^{\Gamma,\eta})T_s^{\Lambda,\eta}f ds.
\end{aligned}$$

よって

$$||T_t^{\Lambda,\eta}f - T_t^{\Gamma,\eta}f|| \le 2\int_0^t \sum_{x\notin\Gamma_N} ||\nabla_x T_s^{\Lambda,\eta}f||ds$$

ただし $\Gamma_N := \{x : d(x, S_f) \le rN\}$ とする. (以下 $T_t^{\Lambda,\eta} =: T_t$ とかく)

$$\begin{aligned} \text{ここで}\quad \frac{\partial}{\partial t}\nabla_x T_t f(\sigma) &= A\nabla_x T_t f(\sigma) + \sum_y (\nabla_x c_y(\sigma))\nabla_y T_t f(\sigma^x) \quad \text{より} \\ \nabla_x T_t f(\sigma) &= T_t \nabla_x f(\sigma) + \int_0^t \sum_y (\nabla_x c_y(\sigma))\nabla_y T_s f(\sigma^x) ds. \\ \text{よって}\quad \sum_{x\notin\Gamma_N} ||\nabla_x T_t f|| &\le \int_0^t \sum_y \sum_{x\notin\Gamma_N} ||\nabla_x c_y|| \cdot ||\nabla_y T_s f|| ds \\ &\le \int_0^t \sum_{y\notin\Gamma_{N-1}} \sum_x ||\nabla_x c_y|| \cdot ||\nabla_y T_s f|| ds \end{aligned}$$

ここで $^\exists c > 0$ s.t. $\sum_x ||\nabla_x c_y|| \le c$ かつ $|||T_t f||| \le |||f|||e^{ct}$ がとれて,

$$\sum_{x\notin\Gamma_N} ||\nabla_x T_t f|| \le c\int_0^t \sum_{x\notin\Gamma_{N-1}} ||\nabla_x T_s f|| ds$$

以下は N についての induction による.

Q.E.D.

Lemma 3.4 $^\exists c > 0$ *s.t.* $^\forall\Lambda \subset\subset \mathbf{Z}^d$, $^\forall\eta \in \Omega$, $^\forall f \in \mathcal{C}_\Lambda, {}^\forall t > 0$ に対し

(i) $||T_t^{\Lambda,\eta}f|| \le e^{\frac{c|\Lambda|}{p}}||f||_{L^p(E^{\Lambda,\eta})}$ $(1 \le p \le \infty)$

(ii) $^\forall\theta \in (0,1)$ で

$$||T_t^{\Lambda,\eta}f - E^{\Lambda,\eta}f|| \le |||f||| \exp\left(\frac{c|\Lambda|}{q_\theta(t)} - \frac{\theta(t-1)}{\gamma_{SG}(\Lambda)}\right)$$

ただし $q_\theta(t) = 1 + \exp(\frac{(1-\theta)(t-1)}{\gamma_{LS}(\Lambda)})$.

Sem. on Probab.
Vol.58 1995年
P1-115

PROOF: (*i*)

$$\begin{aligned} ||T_t f|| &\le ||f|| \quad \text{であり, また}\textbf{Lem.2.1}\text{より} \\ ||f||^p &\le e^{c|\Lambda|}||f^p||_{L^1(E^{\Lambda,\eta})}. \\ \text{よって}\quad ||f|| &\le (e^{c|\Lambda|}||f^p||_{L^1})^{1/p} = \exp(\frac{c|\Lambda|}{p})||f||_{L^p}. \end{aligned}$$

(*ii*) $t > 1$ のときに示す.

$$\begin{aligned} ||T_t^{\Lambda,\eta}f - E^{\Lambda,\eta}f|| &= ||T_t(f - E^{\Lambda,\eta}f)|| \\ &= ||T_1 \circ T_{t-1}(f - E^{\Lambda,\eta}f)|| \\ &\le ||T_{t-1}(f - E^{\Lambda,\eta}f)|| \\ &\le \exp(\frac{c|\Lambda|}{q_\theta(t)})||T_{t-1}(f - E^{\Lambda,\eta}f)||_{L^{q_\theta(t)}} \\ \textbf{Th.1.3}\text{より}\quad &\le \exp(\frac{c|\Lambda|}{q_\theta(t)} - \frac{\theta(t-1)}{\gamma_{SG}(\Lambda)})||f - E^{\Lambda,\eta}f||_{L^2(E^{\Lambda,\eta})} \\ &\le \exp(\frac{c|\Lambda|}{q_\theta(t)} - \frac{\theta(t-1)}{\gamma_{SG}(\Lambda)})|||f|||. \end{aligned}$$

Q.E.D.

Corollary.3.1 $f \in \mathcal{C}$, $\Lambda(t) \subset\subset \mathbf{Z}^d$ が $^\forall t > 0$ に対し次を満たすとする.

(a) $S_f \subset \Lambda(t)\ ^\forall t > 0$

(b) $^\exists N, D > 0$ s.t. $|\Lambda(t)| \le D(1 + t^N)$

このとき $^\forall\theta \in (0,1)$, $^\exists K = K(D, N, \theta) > 0$ s.t.

$$||T_t^{\Lambda(t),\eta}f - E^{\Lambda(t),\eta}f|| \le K|||f|||\exp(-\frac{\theta t}{\gamma_{SG}}) \ (^\forall t > 0, ^\forall\eta \in \Omega) \quad (*)$$

PROOF: $\varepsilon := \inf_\Lambda \gamma_{SG}(\Lambda)(> 0)$ とする。

$$\text{LHS}(*) \le |||f|||\exp(\frac{c|\Lambda(t)|}{q_\theta(t)} + \frac{\theta}{\gamma_{SG}} - \frac{\theta t}{\gamma_{SG}})$$

Sem. on Probab.
Vol.58 1995年
P1-115

$$\le |||f||| \exp\left(\frac{c|\Lambda(t)|}{q_\theta(t)} + \frac{1}{\varepsilon} - \frac{\theta t}{\gamma_{SG}}\right) \le K|||f||| \exp\left(-\frac{\theta t}{\gamma_{SG}}\right)$$

$$\sup_t \frac{c|\Lambda(t)|}{q_\theta(t)} \le \sup_t \frac{D(1+t^N)}{\exp\left(\frac{(1-\theta)(t-1)}{\gamma_{LS}}\right)} \le {}^\exists K(D,N,\theta))$$

Q.E.D.

以上の準備の下で $(LS) \Longrightarrow (EC)$ の証明を完成させる.

$\tilde{B} := e^2(1/\gamma_{SG} \vee B), \Lambda(t) := \{x \in \Lambda : d(x, S_f) \le \{(B+\tilde{B})t+1\}r\}$ とするとき, $\Gamma = \Lambda(t), N = [(B+\tilde{B})t]+1$ とすると Lem. 3.3 の条件を満たすので

$$I_t = ||T_t^{\Lambda,\eta} f - T_t^{\Lambda(t),\eta} f|| \le |||f|||\left(\frac{Bte}{N}\right)^N e^{Bt} \le \ldots \le |||f||| \exp\left(-\frac{t}{\gamma_{SG}}\right).$$

$$\begin{aligned} \text{また, } |\Lambda(t)| &\le \text{const.} \times |\{(B+\tilde{B})t+1\}r + diam(S_f)|^d \\ &\le \text{const.}' \times (1+t^d) \text{ であるから Cor.3.1 を適用できて,} \end{aligned}$$

${}^\forall\theta \in (0,1), {}^\exists K = K(\theta, S_f) > 0$

$$J_t = ||T_t^{\Lambda(t),\eta} f - E^{\Lambda(t),\eta} f|| \le K|||f||| \exp\left(-\frac{\theta t}{\gamma_{SG}}\right) \quad ({}^\forall t > 0).$$

$$\begin{aligned} \text{以上より} \quad ||T_t^{\Lambda,\eta} f - E^{\Lambda,\eta} f|| &\le 2(I_t + J_t) + |||f||| \exp\left(-\frac{t}{\gamma_{SG}}\right) \\ &\le (2+2K+1)|||f||| \exp\left(-\frac{t}{\gamma_{SG}}\right) \end{aligned}$$

となり, $(LS) \Longrightarrow (EC)$ が示された.

(DSM) $\Longrightarrow$ (LS)

この部分については [SZ,92C] 、[LY,93] の２種類の証明があるが、後者の方がより初等的である。ここでは [LY,93] の方法を若干見通しよく整理したものを述べる。

Sem. on Probab.
Vol.58 1995年
P1-115

なお、これが可能になったのは 杉浦 誠 氏（名古屋大）の協力のおかげである。この場を借りて感謝したい。

証明は簡単の為 2次元で述べるが一般化は容易である。次の記号を用意しよう；

$$H^{\Lambda,\eta}(f) = E^{\Lambda,\eta}(f^2 \log \frac{f^2}{E^{\Lambda,\eta} f^2})$$
$$\overline{\mathcal{E}}^{\Lambda,\eta}(f,f) = E^{\Lambda,\eta}(|\nabla_\Lambda f|^2)$$

但し $|\nabla_\Lambda f|^2 = \sum_{x\in\Lambda} |\nabla_x f|^2$. $\mathcal{E}^{\Lambda,\eta}(f,f) = \frac{1}{2} E^{\Lambda,\eta}(\sum_{x\in\Lambda} c_x |\nabla_x f|^2)$ と定義していたので

$$^\exists c = c(\Phi) > 0, \qquad \frac{1}{c}\mathcal{E}^{\Lambda,\eta}(f,f) \le \bar{\mathcal{E}}^{\Lambda,\eta}(f,f) \le 2\mathcal{E}^{\Lambda,\eta}(f,f).$$

従って

$$\overline{\gamma_{LS}}(\Lambda) = \bar{\mathcal{E}}^{\Lambda,\eta} \text{ に対する log -Sobolev constant,}$$
$$\alpha_{l,m} = \sup\{2\bar{\gamma}_{LS}(\Lambda) : \Lambda \subset [1,l] \times [1,m]\}$$

とするとするとき、

$$\sup_\Lambda \gamma_{LS}(\Lambda) < \infty \iff \sup_\Lambda \bar{\gamma}_{LS}(\Lambda) < \infty$$
$$\iff \sup_{l,m} \alpha_{l,m} < \infty \quad (\text{shift invariant による}).$$

$(DSM) \Longrightarrow (LS)$ において我々が最終的に示す補題は次である；

Lemma 3.5 $\Lambda \subset [1,2l] \times [1,m]$ $(l,m \in N^*$,
$l/2 \le m \le 2l), {}^\forall f \in \mathcal{C}_\Lambda$ に対し
$^\exists A = A(\Phi, c_1, c_2)$, $^\exists B = B(\Phi, c_1, c_2, k)$
$(c_1, c_2$ は DSM の const., $1 \le k \le [l/4])$ $s.t.$

$$\underline{(1 - Ae^{-l/A}) H^{\Lambda,\eta}(f)}_{(I)} \le \alpha_{l,m} E^{\Lambda,\eta}(|\nabla_{\Lambda_0} f|^2) + \underline{(B + \alpha_{l,m} A e^{-k/A}) \bar{\mathcal{E}}^{\Lambda,\eta}(f,f)}_{(II)}$$

ただし$\Lambda_0 = ([1,l] \times [1,m]) \cap \Lambda$.

Remark 3.3 **Lem.3.5** $\&(DSM) \Longrightarrow (LS)$ は以下のように導かれる.

Sem. on Probab.
Vol.58 1995年
P1-115

Lem.3.5 ,(DSM) を仮定するとき,

$$\exists K \geq 1, \exists C \geq 1 \quad \alpha_{2l,m} \leq \frac{2}{3}\alpha_{l,m} + C \quad (l, m \leq K, m/2 \leq l \leq 2m).$$

PROOF: **Lem.3.5** の左右を入れ替え $(\Lambda_0 \leftrightarrow \Lambda \setminus \Lambda_0)$ て考えると

$$(I) \leq \alpha_{l,m} E^{\Lambda,\eta}(|\nabla_{\Lambda\setminus\Lambda_0} f|^2) + (II).$$

kを $Ae^{-k/A} \leq 1/10$ となるようにとると, $[l/4] \geq k$ ならば $1 - Ae^{-l/A} \geq 9/10$ であるから

$$\begin{aligned}
\frac{9}{10}H^{\Lambda,\eta}(f) \leq (I) &= \frac{1}{2}((I) + (I)) \\
&\leq \frac{\alpha_{l,m}}{2}\underline{E^{\Lambda,\eta}(|\nabla_\Lambda f|^2 + |\nabla_{\Lambda\setminus\Lambda_0} f|^2)} + (II) \\
\text{—} = \bar{\mathcal{E}}^{\Lambda,\eta}(f,f) \quad \text{より} &\leq \{(\frac{1}{2} + Ae^{-k/A})\alpha_{l,m} + B\}\bar{\mathcal{E}}^{\Lambda,\eta}(f,f) \\
&\leq (\frac{3}{5}\alpha_{l,m} + B)\bar{\mathcal{E}}^{\Lambda,\eta}(f,f).
\end{aligned}$$

$$\text{ゆえに} \quad H^{\Lambda,\eta}(f) \leq (\frac{2}{3}\alpha_{l,m} + \frac{10}{9}B)\bar{\mathcal{E}}^{\Lambda,\eta}(f,f).$$

$$\gamma_{\bar{LS}}(\Lambda)\text{の最小性から} \quad 2\gamma_{\bar{LS}}(\Lambda) \leq \frac{2}{3}\alpha_{l,m} + C$$

$$\text{よって} \quad \alpha_{2l,m} \leq \frac{2}{3}\alpha_{l,m} + C.$$

Q.E.D.

$$\text{この不等式から} \quad \alpha_{2l,m} \leq \frac{2}{3}\alpha_{l,m} + C \leq \frac{2}{3}\alpha_{2l,m} + C.$$

よって $\sup_{l\geq K}\alpha_{l,l} \leq \sup_{l\geq K}\alpha_{2l,l} \leq 3C < \infty$ となり *(LS)* が成立する.

Sem. on Probab.
Vol.58 1995年
P1-115

以下,**Lem.3.5** の証明に入るが, ここでもまたいくつか準備と補題が必要となる.
以後の証明において,l, m, $0 < f \in \mathcal{C}_\Lambda$, 及び境界条件$\eta \in \Omega$を 固定する. $(\sigma \in \{\sigma \in \Omega | \sigma_{\Lambda^c} = \eta_{\Lambda^c}\} : \eta_{\Lambda^c}$は fixed)
$\Lambda \setminus \Lambda_0 = \{x_j\}_{j=1}^n$, $\Lambda_j = \Lambda_0 \cup \{x_1, x_2, \ldots, x_j\}$ とおく.$(\Lambda_0 \subset \Lambda_1 \subset \ldots \subset \Lambda_n = \Lambda.)$

$$\begin{aligned} f_j(\sigma) &:= E^{\Lambda_j,\sigma}(f^2)^{1/2} \quad \text{とすると,} \quad f_j \in \mathcal{C}_{\Lambda\setminus\Lambda_j} \quad \text{であり} \\ &= E^{\Lambda,\eta}[f^2|\mathcal{F}_j]^{1/2}(\sigma) \quad (\mathcal{F}_j := \sigma[\sigma(x) : x \in \Lambda \setminus \Lambda_j]) \\ &\quad (\textbf{Lem.2.2}, \quad \text{consistency}) \\ &\Longrightarrow (f_j^2, \mathcal{F}_j)_{j=1}^n : \quad \text{backward martingale w.r.t} \quad E^{\Lambda,\eta} \\ &\quad (j < k \Longrightarrow E^{\Lambda,\eta}[f_j^2|\mathcal{F}_k] = f_k^2) \quad \text{となる.} \end{aligned}$$

$H^{\Lambda,\eta}(f)$ の評価に入る.

Lemma 3.6

$$H^{\Lambda,\eta}(f) \leq \underline{\alpha_{l,m} E^{\Lambda,\eta}(|\nabla_{\Lambda_0} f|^2)}_{(I)} + \underline{\sum_{j=0}^{n-1} E^{\Lambda,\eta}[H^{\Lambda_{j+1},\cdot}(f_j)]}_{(II)} .$$

PROOF:

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= E^{\Lambda,\eta}(f^2 \log \frac{f^2}{f_n^2}) \\ &= \underline{E^{\Lambda,\eta}(f^2 \log \frac{f^2}{f_0^2})}_{(1)} + \underline{\sum_{j=1}^n E^{\Lambda,\eta}(f^2 \log \frac{f_{j-1}^2}{f_j^2})}_{(2)} \\ (1) &= E^{\Lambda,\eta} \circ H^{\Lambda_0}(f) \quad \Lambda_0 \subset [1,l] \times [1,m] \text{上で(LS)を適用すると} \\ &\leq \alpha_{l,m} E^{\Lambda,\eta} \circ E^{\Lambda_0}(|\nabla_{\Lambda_0} f|^2) = (I). \\ (2) &= \sum_{j=1}^n E^{\Lambda,\eta}(f_{j-1}^2 \log \frac{f_{j-1}^2}{f_j^2}) \\ &= \sum_{j=1}^n E^{\Lambda,\eta} \circ H^{\Lambda_j}(f_{j-1}) = (II). \end{aligned}$$

Q.E.D.

Sem. on Probab.
Vol.58 1995年
P1-115

Lemma 3.7 $^{\exists}c = c(\Phi) > 0 \quad s.t.$

$$H^{\Lambda_{j+1},\sigma}(f_j) \leq cE^{\Lambda_{j+1},\sigma}(|\nabla_{x_{j+1}} f_j|^2).$$

PROOF:

$$\text{LHS} = E^{\Lambda_{j+1},\sigma}[f_j^2 \log \frac{f_j^2}{E^{\Lambda_{j+1},\sigma}(f_j^2)}] \quad (*)$$

ここで次のことに注意.
$f_j(\sigma) = f(\sigma(x_{j+1})\,, \underline{\sigma(x_{j+2}), \ldots, \sigma(x_m)})$ であるが,—は $E^{\Lambda_{j+1},\sigma}$ の中では定数であるから, $(*)$ は1変数 $\sigma(x_{j+1})$ のみのlog-Sobolev ineq. となり, さらに $E^{\Lambda_{j+1},\sigma}[\sigma(x_{j+1}) = \pm 1]$ はΦ のみに依存する const. で上下から評価できるから, 題意を満たす $c(\Phi) > 0$ がとれる.

Q.E.D.

Lemma 3.8 $E^{\Lambda_j,\sigma}$ の境界条件のうち$\sigma(x_{j+1})$ の値を固定したもの；

$$E_{\pm}^{\Lambda_j,\sigma}(d\omega) := E^{\Lambda_j,\sigma}(d\omega_{\Lambda_j})\Big|_{\sigma(x_{j+1})\equiv\pm 1} \otimes \delta_{\sigma_{\Lambda_j^c}}(d\omega_{\Lambda_j^c})$$

を考え、$f_{j,\pm}(\sigma) = E_{\pm}^{\Lambda_j,\sigma}(f^2)^{1/2}$ とする。このとき、$^{\exists}c = c(\Phi) > 0 \quad s.t.$

$$E^{\Lambda,\eta}(|\nabla_{x_{j+1}} f_j|^2) \leq \underline{cE^{\Lambda,\eta}(|\nabla_{x_{j+1}} f|^2)}_{(I)} + \underline{cE^{\Lambda,\eta}(\frac{|f_j^2 - f_{j,+}^2|^2}{f_j^2})}_{(II)}.$$

PROOF:

$$f_j(\sigma) = (\int f(\omega_\Lambda \cdot \underline{\sigma_{\Lambda^c}}_{(1)})^2 \underline{E^{\Lambda,\sigma}}_{(2)}(d\omega_\Lambda))^{1/2}$$

の (1) のσについての差分 $\leq (I)$, (2) のσについての差分 $\leq (II)$ となる.

Q.E.D.

Sem. on Probab.
Vol.58 1995年
P1-115

以下,**Lem.3.9, Lem.3.10** で上の (II) を評価する.
その前に少し準備をする.

$$h_j(\sigma) := \frac{E_+^{\Lambda_j,\eta}(\sigma_{\Lambda_j})}{E^{\Lambda_j,\eta}(\sigma_{\Lambda_j})} \quad \text{とする.}$$

$$\begin{aligned} \text{このとき}\quad E_+^{\Lambda_j,\sigma}(d\omega) &= h_j(\omega_{\Lambda_j}\cdot\sigma_{\Lambda_j^c})E^{\Lambda_j,\sigma}(d\omega) \\ \text{よって}\quad f_{j,+}^2(\sigma) - f_j^2(\sigma) &= E_+^{\Lambda_j,\sigma}(f^2) - E^{\Lambda_j,\sigma}(f^2) \\ &= E^{\Lambda_j,\sigma}[(h_j-1)f_j^2] \quad \text{となる.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_{j,k}(\sigma) &:= \begin{cases} h_j(\sigma) & k=0 \\ E^{\Lambda_{j,k},\sigma}(h_j) & k\geq 1 \end{cases} \\ f_{j,k} &:= E^{\Lambda_{j,k}}(f^2)^{1/2} \end{aligned}$$

ただし $\Lambda_{j,k} := \{x\in\Lambda_j : |x-x_{j+1}|\leq k\}$ とする。 Kが十分大ならば、$\Lambda_{j,K}=\Lambda_j$となるから $h_{j,k}=E^{\Lambda_j}(h_j)=1$. よって

$$h_j - 1 = \sum_{k=0}^{K-1}(h_{j,k}-h_{j,k+1}) \quad \text{と書き直せる.そこで}$$

Lemma 3.9

$$^\exists c = c(\Phi, c_1, c_2) > 0 \quad s.t. \quad ||h_{j,k}-h_{j,k+1}|| \leq ce^{-k/c}.$$

PROOF:

$$\begin{aligned} & h_{j,k}(\sigma) - h_{j,k+1}(\sigma) \\ =\ & E^{\Lambda_{j,k},\sigma}(h_j) - E^{\Lambda_{j,k+1},\sigma}(h_j) \\ =\ & E^{\Lambda_{j,k},\sigma}(h_j) - E^{\Lambda_{j,k+1},\sigma}\circ E^{\Lambda_{j,k},\cdot}(h_j) \\ =\ & \int E^{\Lambda_{j,k+1},\sigma}(d\xi)\{E^{\Lambda_{j,k},\sigma}(h_j) - E^{\Lambda_{j,k},\xi}(h_j)\}. \end{aligned}$$

よって $||h_{j,k}-h_{j,k+1}|| \leq \sup_{\sigma,\xi}|E^{\Lambda_{j,k},\sigma}(h_j) - E^{\Lambda_{j,k},\xi}(h_j)| \quad (\sigma\equiv\xi \ \ on \ \ \Lambda_{j,k+1}^c)$

Sem. on Probab.
Vol.58 1995年
P1-115

ここで　$h_j \in \mathcal{C}_{B_r(x_{j+1})}$,　σ, ξ　は $B_k(x_{j+1})$ の外で動く $(B_r(x) := \{y : |x-y| \le r\})$ から, ここで (DSM) を用いて

$$\le ce^{-(k-r)/c_2} \le c' e^{-k/c_2}.$$

Q.E.D.

Lemma 3.10 $^\exists c = c(\Phi, c_1, c_2) > 0 \quad s.t.$

$$E^{\Lambda,\eta}\left(\frac{|f_{j,+}^2 - f_j^2|^2}{f_j^2}\right) \le c \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k/c} E^{\Lambda,\eta} \circ H^{\Lambda_{j,k+1},\cdot}(f).$$

PROOF:

$$\begin{aligned} |f_{j,+}^2 - f_j^2| &= |E^{\Lambda_j,\eta}[(h_j - 1)f_j^2]| \\ &\le \sum_{k=0}^{\infty} |E^{\Lambda_j,\eta}[(h_{j,k} - h_{j,k+1})f_j^2]| \\ &\le c' \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^2 \underbrace{E^{\Lambda_j,\eta}[(h_{j,k} - h_{j,k+1})f_j^2]^2}_{(I)}. \\ &\quad \text{(Schwarz の不等式)} \end{aligned}$$

ここで

$$E^{\Lambda_{j,k+1}}[(h_{j,k} - h_{j,k+1})f^2]^2 \le ce^{-k/c} f_{j,k+1}^2 H^{\Lambda_{j,k+1}}(f). \quad (*)$$

なぜならば,　$\mu := E^{\Lambda_{j,k+1}}$,　$d\nu := \frac{f^2}{\mu(f^2)} d\mu$,　$\varphi := h_{j,k} - h_{j,k+1}$　と書くとき

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{LHS}(*)}{(\mu(f^2))^2} = \mu[\varphi \frac{f^2}{\mu(f^2)}]^2 &= (\nu\varphi)^2 \\ &= (\nu\varphi - \mu\varphi)^2 \\ &\le ||\varphi||^2 ||\nu - \mu||_{var}^2 \end{aligned}$$

Sem. on Probab.
Vol.58 1995年
P1-115

$(||\cdot||_{var}$ は total variation norm)

ここで次の不等式 $\left(\begin{array}{l} 0 \le \psi \in L^1(m) \quad m : \text{prob.m}\ \text{に対し} \\ 2m(|\psi - 1|)^2 \le m(\psi \log \psi) \end{array}\right)$

を $\psi = d\nu/d\mu$ について適用すると

$$\begin{aligned}
&\le 2||\varphi||^2 \mu(\frac{d\nu}{d\mu}\log\frac{d\nu}{d\mu}) \\
&= 2||\varphi||^2 \frac{1}{\mu(f^2)}\mu(f^2 \log\frac{f^2}{\mu(f^2)}) \\
\text{すなわち}\quad \mathrm{LHS}(*) &\le 2||\varphi||^2 \mu(f^2)\mu(f^2\log\frac{f^2}{\mu(f^2)}) \\
&\le 2ce^{-k/c} f_{j,k+1}^2 H^{\Lambda_j,k+1}(f) \quad (\textbf{Lem.3.9}).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{よって}\quad (I) &= (E^{\Lambda_j,\eta} \circ E^{\Lambda_{j,k+1}}[(h_{j,k} - h_{j,k+1})f^2])^2 \\
&\le ce^{-k/c} E^{\Lambda_j,\eta}[f_{j,k+1}^2 H^{\Lambda_j,k+1}(f)] \\
&\le ce^{-k/c} f_j^2 E^{\Lambda_j,\eta} \circ H^{\Lambda_{j,k+1}}(f) \\
&\le c\frac{e^{-k/c'}}{(k+1)^2} f_j^2 E^{\Lambda_j,\eta} \circ H^{\Lambda_{j,k+1}}(f).
\end{aligned}$$

$$\frac{E^{\Lambda_j,\eta}[(h_j - 1)f_j^2]}{f_j^2} \le c\sum_{k=0}^{\infty} e^{-k/c} E^{\Lambda_j,\eta} \circ H^{\Lambda_j,k+1}(f).$$

この両辺に $E^{\Lambda,\eta}$ を施せばよい.

Q.E.D.

以上の補題をまとめると,

Lemma 3.11 $^\exists c = c(\Phi, c_1, c_2) > 0 \quad s.t.$

$$E^{\Lambda,\eta}[H^{\Lambda_{j+1},\cdot}(f)] \le cE^{\Lambda,\eta}(|\nabla_{x_{j+1}} f|^2) + c\sum_{k=0}^{\infty} e^{-k/c} E^{\Lambda,\eta}[H^{\Lambda_j,k,\cdot}(f)].$$

となる.

いよいよ **Lem.3.5** の証明に入る. まず

(i) $E^{\Lambda,\eta}[H^{\Lambda_{j,k},\cdot}(f)] \leq H^{\Lambda,\eta}(f)$.

PROOF:

$$\begin{aligned} E^{\Lambda,\eta}(f^2 \log f_{j,k}^2) &= E^{\Lambda,\eta}(f_{j,k}^2 \log f_{j,k}^2) \\ &\geq E^{\Lambda,\eta} f_{j,k}^2 \log E^{\Lambda,\eta} f_{j,k}^2 \\ &= E^{\Lambda,\eta} f^2 \log E^{\Lambda,\eta} f^2. \end{aligned}$$

よって $\mathrm{RHS} - \mathrm{LHS} = E^{\Lambda,\eta}(f^2 \log f_{j,k}^2) - E^{\Lambda,\eta}(f^2 \log E^{\Lambda,\eta} f^2) \geq 0.$

Q.E.D.

また

(ii) $E^{\Lambda,\eta}[H^{\Lambda_{j,k},\cdot}(f)] \leq \alpha_{\Lambda_{j,k}} E^{\Lambda,\eta}(|\nabla_{\Lambda_{j,k}} f|^2)$ である.

Lem.3.6, Lem.3.11 より

$$\begin{aligned} H^{\Lambda,\eta}(f) &\leq \alpha_{l,m} E^{\Lambda,\eta}(|\nabla_{\Lambda_0} f|^2) + \sum_{j=0}^{n-1} E^{\Lambda,\eta}[H^{\Lambda_{j+1},\cdot}(f_j)] \\ &\leq \alpha_{l,m} E^{\Lambda,\eta}(|\nabla_{\Lambda_0} f|^2) + c\bar{\mathcal{E}}^{\Lambda,\eta}(f,f) \\ &\quad \underbrace{+c\sum_{k=0}^{\infty} e^{-k/c} \sum_{j=0}^{n-1} E^{\Lambda,\eta}[H^{\Lambda_{j,k}}(f)]}_{(*)} \quad . \end{aligned}$$

$$(*) = \sum_{k=0}^{k_0-1} + \sum_{k=k_0}^{k_1-1} + \sum_{k=k_1}^{\infty} \quad (= (I) + (II) + (III))$$ と分ける.

ただし $k_0 \leq k_1 = [l/4]$ とする.

このとき

$(i) \quad {}^{\exists}B = B(\Phi, k_0) \quad s.t. \quad (I) \leq B\bar{\mathcal{E}}^{\Lambda,\eta}(f,f).$

PROOF:

$$\begin{aligned} (I) &\leq \sum_{k=0}^{k_0-1} e^{-k/c} \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{\Lambda_{j,k}} E^{\Lambda,\eta}(|\nabla_{\Lambda_{j,k}} f|^2) \\ &\leq \alpha_{2k_0+1,2k_0+1} \sum_{k=0}^{k_0-1} (2k_0+1)^2 E^{\Lambda,\eta}(|\nabla_\Lambda f|^2) \\ &= B\bar{\mathcal{E}}^{\Lambda,\eta}(f,f). \end{aligned}$$

$(ii) \quad {}^{\exists}A_1 = A_1(\Phi, c_1, c_2) > 0 \quad s.t. \quad (II) \leq \alpha_{l,m}\bar{\mathcal{E}}^{\Lambda,\eta}(f,f)A_1 e^{-k_0/A_1}.$

PROOF:

$$\begin{aligned} (II) &\leq \sum_{k=k_0}^{k_1-1} e^{-k/c} \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{l,m} E^{\Lambda,\eta}(|\nabla_{\Lambda_{j,k}} f|^2) \\ &\leq \alpha_{l,m} \sum_{k=k_0}^{k_1-1} e^{-k/c}(2k+1)^2 E^{\Lambda,\eta}(|\nabla_\Lambda f|^2) \\ &\leq \alpha_{l,m} A_1 e^{-k_0/c} \bar{\mathcal{E}}^{\Lambda,\eta}(f,f). \end{aligned}$$

$(iii) \quad (III) \leq A_2 e^{-l/A_2} H^{\Lambda,\eta}(f).$

PROOF:

$$\begin{aligned} (III) &\leq \sum_{k=k_1}^{\infty} e^{-k/c} \sum_{j=0}^{n-1} H^{\Lambda,\eta}(f) \\ &\leq 2l^2 H^{\Lambda,\eta}(f) \sum_{k=k_1}^{\infty} e^{-k/c} \qquad (n \leq l \cdot m \leq 2l^2) \\ &\leq A_2 e^{-l/A_2} H^{\Lambda,\eta}(f) \end{aligned}$$

$$\Big(\sum_{k=k_1}^{\infty} e^{-k/c} \leq \text{const.} \times e^{-k_1/c} \leq \text{const.}' \times e^{-l/4c}\Big).$$

以上によって **Lem.3.5** 及び $(DSM) \Longrightarrow (LS)$ の証明が完成された.

Sem. on Probab.
Vol.58 1995年
P1-115

4 Related topics

Completely Analytical Interactions ([DSh 85A] [DSh 87])

ここでは,(DSM) に相当する同値な四つの条件を挙げる. その準備として, 改めて定義を与える.

Interactions

$\mathcal{A} := \{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \qquad A_j \subset\subset \mathbf{Z}^d \quad$ (fixed)

$\Delta := \mathcal{A}$ の shifts $= \{A_j + x; 1 \le j \le k, x \in \mathbf{Z}^d\}$

$\mathcal{U} := \{\Phi = (\Phi_F)_{F \subset\subset \mathbf{Z}^d}; \quad \Phi_F = 0 \quad \text{if} \quad F \notin \Delta \quad , \quad$ translation invariant を持つ $\}$

$\tilde{\mathcal{U}^C} := \{\tilde{\Phi} = (\tilde{\Phi_F})_{F \subset\subset \mathbf{Z}^d}; \quad \tilde{\Phi}_F = 0 \quad \text{if} \quad F \notin \Delta \quad , \quad \tilde{\Phi}_F : \Omega_F \longrightarrow \mathbf{C}\}$

(trans.inv. は仮定しない)

$\Omega = \{-1, +1\}^{\mathbf{Z}^d}$ (二点集合の代わりに有限集合としてもよい)

$\tilde{\Phi} \in \tilde{\mathcal{U}^C}$ に対し $\sup_{\sigma, F} |\tilde{\Phi_F}(\sigma_F)| =: ||\Phi||$,

$r = r(\tilde{\Phi}) := \max\{diam(F) : \tilde{\Phi} \neq 0\}$ (range)

$V \subset\subset \mathbf{Z}^d, \omega \in \Omega, \tilde{\Phi} \in \tilde{\mathcal{U}^C}$ に対して

$$H_V^{\tilde{\Phi}}(\sigma_V|\omega) := \sum_{F: V \cap F \neq \phi} \tilde{\Phi}_F(\sigma_V \cdot \omega_{V^c}) \quad \text{(Hamiltonian)}$$

$$Z_V(\tilde{\Phi}|\omega) := \sum_{\sigma_V \in \Omega_V} \exp\{-H_V^{\tilde{\Phi}}(\sigma_V|\omega)\} \quad \text{(Partition function)}$$

とする.

$\Phi \in \mathcal{U}$ についての Condition I ~ IV を以下で述べる.

[Condition I] (analyticity property)

$\Phi \in \mathcal{U}$ が条件 I を満たす $(=: \Phi \in \mathcal{U}_{\mathrm{I}})$ とは

$^\exists \varepsilon > 0 \quad$ s.t. $^\forall V \subset\subset \mathbf{Z}^d$, $^\forall \omega \in \Omega$ に対し

$$Z_V(\tilde{\Phi}|\omega) \neq 0 \quad \text{if} \quad ||\tilde{\Phi} - \Phi|| \le \varepsilon$$

Sem. on Probab.
Vol.58 1995年
P1-115

が成り立つ時をいう.

[Condition II] (decay properties of semi-invariants)
$A_1, A_2, \ldots, A_n \in \Delta, \psi \in \mathcal{C}_{A_1}, \ldots, \psi_n \in \mathcal{C}_{A_n}$ に対し

$$\langle \psi_1^{;k_1}, \ldots, \psi_n^{;k_n} \rangle^{\omega}_{V,\tilde{\Phi}} := \frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n}}{\partial z_1^{k_1} \ldots \partial z_n^{k_n}} \log \langle \exp(z_1\psi_1 + \ldots + z_n\psi_n) \rangle^{\omega}_{V,\tilde{\Phi}} \Big|_{z_j=0(\forall j)}$$

(ここで $\tilde{\Phi}$ がreal のとき $\langle f \rangle^{\omega}_{V,\tilde{\Phi}} = E^{V,\omega}_{\tilde{\Phi}}(f)$)
とするとき,
$\Phi \in \mathcal{U}_{\mathrm{II}}$ とは, $^{\exists}c > 0, {}^{\exists}\varepsilon > 0, {}^{\exists}\alpha > 0$ がとれて
$^{\forall}V \subset\subset \mathbf{Z}^d, {}^{\forall}\omega \in \Omega, {}^{\forall}m \geq 1$, $\psi_1 \in \mathcal{C}_{A_1}, \ldots, \psi_m \in \mathcal{C}_{A_m}$ ($|\psi_j| \leq 1), A_j \in \Delta$ に対して, $||\tilde{\Phi} - \Phi|| < \varepsilon$ のとき

$$|\langle \psi_1^{;k_1}, \ldots, \psi_m^{;k_m} \rangle^{\omega}_{V,\tilde{\Phi}}| \leq k_1! \ldots k_m! c^{k_1+\ldots+k_m} (e^{-\alpha d'(A_1,\ldots,A_m)})$$

$$d'(A_1, \ldots, A_m) := \min\{|B| : A_1 \cup \ldots \cup A_m \cup B \text{が connected}\}$$

が成り立つことである.

[Condition III] (この条件を $(DSM)'$ と言う)
$V \subset\subset \mathbf{Z}^d$, $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_1(\Omega_V)$ に対し variation norm を

$$\mathrm{Var}(\mu_1, \mu_2) := \frac{1}{2} \sum_{\sigma_V} |\mu_1(\sigma_V) - \mu_2(\sigma_V)| \qquad \text{とかくとき}$$

$\Phi \in \mathcal{U}_{\mathrm{III}}$ とは
$^{\exists}K > 0, {}^{\exists}\gamma > 0$ s.t. $^{\forall}V \subset\subset \mathbf{Z}^d, {}^{\forall}\Lambda \subset V, {}^{\forall}x \notin V, {}^{\forall}\eta \in \Omega$ に対し

$$\mathrm{Var}(E^{V,\eta}_{\Phi}|_{\Omega_\Lambda}, E^{V,\eta^x}_{\Phi}|_{\Omega_\Lambda}) \leq K e^{-\gamma d(x,\Lambda)}. \tag{11}$$

となることである.

Remark 4.1 **Condition III** は *(DSM)* と同値。

[Condition IV] (cluster expansion)
$\Phi \in \mathcal{U}_{\mathrm{IV}}$ とは

Sem. on Probab.
Vol.58 1995年
P1-115

${}^\forall V \subset\subset \mathbf{Z}^d, \omega \in \Omega$に対し次の展開 (cluster expansion) が成り立つことである.

$$\log Z_V(\Phi|\omega) = \sum_{x\in V} g(x, V, \omega)$$

ただし,g は次の $(i), (ii)$ を満たす：

(i) $\quad g(x+y, V+y, \theta_y\omega) = g(x, V, \omega)$

(ii) $\quad {}^\exists c_1, c_2 > 0 \quad s.t. \quad {}^\forall x \in {}^\forall V_1 \cap V_2 \subset\subset \mathbf{Z}^d, {}^\forall\omega_1, \omega_2 \in \Omega$に対し

$$|g(x, V_1, \omega_1) - g(x, V_2, \omega_2)| \le c_1 \exp\{-c_2 d(x, (V_1 \triangle V_2) \cup \Gamma(\omega_1, \omega_2))\}$$

$$(\Gamma(\omega_1, \omega_2) := \{y \in \mathbf{Z}^d : \omega_1(y) \ne \omega_2(y)\})$$

Theorem 4.1 $\mathcal{U}_I \sim \mathcal{U}_{IV}$は *open sets になり,*
$O = (\Phi_F^0)_{F\subset\subset \mathbf{Z}^d}$を $\quad \Phi_F^0 \equiv 0 \quad ({}^\forall F \subset\subset \mathbf{Z}^d)$ とするとき,
各 $\mathcal{U}_I \sim \mathcal{U}_{IV}$の Oを含む連結成分は一致する.

この component に属する相互作用を *completely analytical potential* と呼ぶ。

Weak Mixing, $(DSM$-$\square)$

(DSM) より弱い条件として Weak Mixing と呼ばれるものがある.

Definition 4.1 次の条件を *Weak Mixing* と呼び (WM) と書こう；${}^\exists c_1, c_2 > 0 \quad s.t.$
${}^\forall V \subset\subset \mathbf{Z}^d, {}^\forall\omega_1, \omega_2 \in \Omega, {}^\forall\Lambda \subset V$に対し

$$|\,Var(E^{V,\omega_1}|_{\Omega_\Lambda}, E^{V,\omega_2}|_{\Omega_\Lambda})| \le c_1 \sum_{x\in\Lambda, y\in V^c} e^{-c_2|x-y|}.$$

この条件が *(DSM)* より弱いことは *(11)* との比較でわかる (cf. Remark 4.1)。

一方、 Remark 2.5 で「条件 (DSM) を直接 check するのは不可能に近い」と絶望的なコメントを述べたが、「不可能に近い」理由の一つが定義文中の「 $\forall\Lambda \subset\subset \mathbf{Z}^d$ 」である。これが「 $\forall$ cubeΛ 」ぐらいなら一抹の希望が涌いてくる。そこで,

Sem. on Probab.
Vol.58 1995年
P1-115

Definition 4.2 次の条件を *(DSM-□)* と書くことにする；

$$\begin{cases} {}^{\exists}c_1 > 0, {}^{\exists}c_2 > 0 \qquad s.t. \\ \qquad \sup_{\eta}|E^{\Lambda,\eta^x} f - E^{\Lambda,\eta} f| \le c_1 |||f||| \exp(-\frac{d(x,S_f)}{c_2}) \\ {}^{\forall}f \in \mathcal{C},\ S_f \subset {}^{\forall}\mathrm{cube}\Lambda,\ {}^{\forall}x \notin \Lambda. \end{cases}$$

ここで「$^{\forall}$cube Λ」につないだ一抹の希望はあながち気休めだけに留まらない；すぐ後でも述べるように $d=2$ では $(DSM$-□$)$ は Weak Mixing と同値である。また、一般に次が成立；

Theorem 4.2 以下は全て *(DSM-□)* と同値. ([MOS,94])

$(SG$-□$)$ $\sup_{\Lambda:\mathrm{cube}} \gamma_{SG}(\Lambda) < \infty.$

$(LS$-□$)$ $\sup_{\Lambda:\mathrm{cube}} \gamma_{LS}(\Lambda) < \infty.$

$(EC$-□$)$ $\sup_{\Lambda:\mathrm{cube}} \gamma_{EC}(\Lambda) < \infty.$

Remark 4.2 **(i)** $d=2$ では $(WM) \Leftrightarrow (DSM$-□$)$ が既知（[MOS,94]）であるがこの同値性は $d \ge 3$ ではもはや不成立と予想されている。

(ii) Ising ferromagnet で$\beta < \beta_c$ なら (WM) が成立（[Hi,93]）。

(iii) Ising ferromagnet でβ 十分大かつ $h > 0$ なら (WM) が成立（[MO,94A]）。

(iv) 2次元 Ising ferromagnet でβh が十分大きければ $(DSM$-□$)$、従って (WM) が成立（[MOS,90]）。

Infinite volume Gibbs states

ここまでは有限集合 $\Lambda \subset \mathbf{Z}^d$ 上の Gibbs state を考えてきたが, $\mathbf{Z}^d$ 全体の上の Gibbs state（形式的には $\lim_{\Lambda\uparrow\mathbf{Z}^d} E^{\Lambda}$）というものにも当然興味が持たれる.

Definition 4.3 $\mu \in \mathcal{M}_1(\Omega)$ が次を満たすとき *Gibbs state* であると言う；

$$\mu \circ E^{\Lambda} = \mu \quad for \quad {}^{\forall}\Lambda \subset\subset \mathbf{Z}^d$$

$$(i.e. \quad \int \mu(d\omega) E^{\Lambda,\omega}(f) = \int f d\mu \quad , {}^{\forall}f \in \mathcal{C}.)$$

Sem. on Probab.
Vol.58 1995年
P1-115

なおこの定義は Lemma 2.2($\tilde{\Lambda} \supset \Lambda \Rightarrow E^{\tilde{\Lambda}} \circ E^{\Lambda} = E^{\tilde{\Lambda}}$) に動機づけられたものであるが、そのような μ の存在や一意性は必ずしも自明ではない。次が既知 ([Li,85]);

(i) $\mathcal{G} := \{\text{Gibbs state}\} \neq \phi$; $\mathcal{M}_1(\Omega)$ が弱位相で compact なことと

$$\{E^{\Lambda,\eta} : \Lambda \uparrow \mathbf{Z}^d\}\text{の集積点} \subset \mathcal{G}$$

に注意すればわかる。

(ii) $d = 1$ または$\sum_{F:F\ni 0} \|\Phi_F\|$ が十分小さければ $\sharp\mathcal{G} = 1$.

Example 4.1 Ising ferromagnet (Example 2.1) では

$$
\begin{aligned}
{}^{\exists}\beta_c(d) > 0 \quad s.t. \qquad & (i) \quad h \neq 0 \quad or \quad 0 < \beta < \beta_c \quad \Longrightarrow \quad \sharp\mathcal{G} = 1. \\
& (ii) \quad h = 0, \beta_c < \beta \quad \Longrightarrow \quad \sharp\mathcal{G} \geq 2. \\
& (iii) \quad \beta = \beta_c, \quad d \neq 3 \quad \Longrightarrow \quad \sharp\mathcal{G} = 1. \quad ([\text{FFS } 92])
\end{aligned}
$$

配置の時間発展

Infinite volume の場合、作用素 $A : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ を次で定義する;

$$Af(\sigma) = \sum_{x\in\mathbf{Z}^d} (A_x f)(\sigma),$$

(cf. Definition 2.2)。このとき、

(i) A は $(C(\Omega), \|\cdot\|)$ で closable かつ closure は C_0-縮小半群 $(e^{tA})_{t\geq 0}$ を生成。

(ii) 任意の $\mu \in \mathcal{G}$ に対し,

$$\mathcal{E}_\mu(f,g) := -\mu(fAg) = \frac{1}{2}\sum_{x\in\mathbf{Z}^d} \mu(c_x \nabla_x f \nabla_x g),$$

これは Lemma 2.2 からわかる。

(iii) $\mu \in \mathcal{G}$ は $(e^{tA})_{t\geq 0}$ -不変。

このとき, 有限系における Theorem 2.1, あるいは Theorem 4.2の帰結として

Sem. on Probab.
Vol.58 1995年
P1-115

Theorem 4.3 (DSM) を仮定すれば（-$(DSM-\square)$ でも十分）$\mathcal{G}=\{\mu\}$ でありこの μ について、

(EC_μ) $\quad {}^\exists\gamma>0,\ {}^\exists C(\cdot):\mathcal{C}\to(0,\infty)$

$$||e^{tA}f-\mu(f)||\le C(f)e^{-t/\gamma}\qquad {}^\forall f\in\mathcal{C},\ {}^\forall t>0.$$

(SG_μ) $\quad {}^\exists\gamma>0$

$$\mu(|f-\mu f|^2)\le\gamma\mathcal{E}_\mu(f,f),\quad {}^\forall f\in\mathcal{C}.$$

(LS_μ) $\quad {}^\exists\gamma>0,$

$$\mu(f^2\log\frac{f^2}{\mu(f^2)})\le 2\gamma\mathcal{E}_\mu(f,f)\qquad {}^\forall f\in\mathcal{C}.$$

Remark 4.3 **(i)** Theorem 4.3 の条件である $(DSM\text{-}\square)$ の成立例は Remark 4.2 で既に述べた。d=2 では (WM) と $(DSM\text{-}\square)$ の同値性より、(WM) から Theorem 4.3 の結論が全て従う。

(ii) Ising ferromagnet においては条件 (EC_μ) は (WM) と同値である（[MO,94A]）。また、(EC_μ) は更に次の（見かけ上はるかに弱い）条件:

$$|e^{tA}\phi_0(+\mathbf{1})-e^{tA}\phi_0(-\mathbf{1})|=o(t^{-d}),\quad t\to\infty,$$

(但し $\phi_0(\sigma)=\sigma(0),\ \pm\mathbf{1}(x)\equiv\pm1$) とも同値であり、その証明の過程で $C(f)$ が (f に無関係な定数)$\times|||f|||$ にとれることもわかる（[AH,87]）。**(ii)** で述べたことは $c_x(\sigma)$ が attractive なら一般に成立する。

Sem. on Probab.
Vol.58 1995年
P1-115

5 References

[AH,87] Aizenmann,M.,Holley,R. : Rapid convergence to equilibrium of stochastic Ising models in the Dobrushin-Shlosmann regime,in Percolation Theory and infinite particle systems,H.Kesten(ed.), IMA volumes in Math.and Appl., Springer,1-11 (1987).

[Bas,85] Basuev,A.G. : Hamiltonian of the phase separation border and phase transitions of the first kind I,Theoretical and mathematical Phys,**64**,103-129 (1985).–English translation: 716-734

[BE,85] Bakry,D.,Emery,M: Diffusions hypercontractives,Séminaire on Probabilités XIX,Springer Lecture Notes in Mathematics **1123**, 177-206(1985).

[CS,86] Carlen E. A. and Stroock, D. W. : An application of the Bakry-Emery criterion to infinite dimensional diffusions Séminaire de Probabilités XX, Springer Lecture Notes in Mathmatics **1204**,341–347 (1986)

[D,89] Davies,E.B. : "Heat Kernels and Spectral Theory" , Cambridge Univ.Press (1989).

[DS,89] Deuschel,J.D.,Stroock,D.W. : ' 'Large Deviations", Academic Press, (1989).

[DS,90] Deuschel, J. D. and Stroock, D. W. : Hypercontractivity and spectral gap of symmetric diffusions with application to the stochastic Ising models, J. Funct. Anal. **92**, 30–48 (1990).

[DP,81] Dobrushin,R.L. and Pechrski, E. A. : Uniqueness conditions for finitely dependent random fields, in " Random fields" ed.by J. Fritz, J. L. Lebowitz and D.Szasz, North-Holland, 223–261, (1981).

[DSh,85A] Dobrushin,R.L.,Shlosman,S. : Completely analytical Gibbs fields, in ' 'Statistical Physics and Dynamical Systems" ed.by J.Fritz, A.Jaffe and D.Szasz, Birkhäuser (1985).

[**DSh,85B**] Dobrushin,R.L.,Shlosman,S. : Constructive criterion for the uniqueness of Gibbs field,in "Statistical Physics and Dynamical Systems" ed.by J.Fritz,A. Jaffe and D.Szasz, Birkhäuser (1985).

[**DSh,87**] Dobrushin,R.L.,Shlosman,S. : Completely analytical interactions: Constructive description,J.Stat.Phys.,**46**,983-1014 (1987).

[**FFS,92**] Fernandes,R.,Fröhlich,J.,Sokal,A. : Random walks,critical phenomena,and triviality in quantum field theory,Texts and Monographs in Physics,Springer-Verlag (1992)

[**G,75**]Gross, L. : Logarithmic Sobolev inequalities, Amer. J. Math. **97**, 1061–1083, (1975).

[**G,94**] Gross,L. : Logarithmic Sobolev inequalities and contractivity properties of semigroups,Springer Lecture Notes in Mathematics **1563** (1994).

[**Ha**] Handa,K. :「エントロピーを用いた非平衡測度の解析」, 1993 年日本数学会秋季学会統計数学分科会予稿集, 33-51.

[**Hi,93**] Higuchi,Y. : Coexistence of infinite (∗)-clusters II:-Ising percolation in two dimensions,Prob.Th.Rel.Fields **97**,1-33 (1993).

[**HY,95**] Higuchi,Y. and Yoshida, N.: Slow relaxation of 2-D stochastic Ising models with random and non-random boundary conditions, preprint, 1995.

[**HS,87**] Holley,R.,Stroock,D.W. : Logarithmic Sobolev inequality and stochastic Ising models,J.Stat.Phys.**46**,1159-1194 (1987).

[**HS,89**] Holley,R.,Stroock,D.W. : Uniform and L^2-convergence in one dimensional stochastic Ising models, Commun.Math.Phys. **123**,85-93 (1989).

[**La,95**] Laroche, E. :Hypercontractivuté pour des systemes de spins de portée infine, Prob. Th. Rel. Fields, **101**, 89–132 (1995)

[**Li,85**] Liggett,T.M. : "Interacting Particle Systems", Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-Tokyo (1985).

[**LY,93**] Lu,S.,Yau,H.T. : Spectral gap and logarithmic Sobolev inequality for Kawasaki and Glauber dynamics, Commun. Math. Phys.**156**, 399-433 (1993).

[**MO,94A**] Martinelli,F.,Olivieri,E. : Approach to equilibrium of Glauber dynamics in the one phase region I:Attractive case, Commun.Math.Phys. **161**,447-486 (1994).

[**MO,94B**] Martinelli,F.,Olivieri,E. : Approach to equilibrium of Glauber dynamics in the one phase region II:General case, Commun.Math.Phys. **161**,487-514 (1994).

[**MOS,90**] Martinelli,F., Olivieri,E., Scoppola, E. : Metastability and exponential approach to equilibrium for low temperature stochastic Ising models, J. Stat.Phys.**61**,1105–1119 (1990).

[**MOS,94**] Martinelli,F.,Olivieri,E,Schonmann,R. : For 2-D lattice spin systems weak mixing implies strong mixing, Commun.math.Phys.**165**, 33-48 (1994).

[**RS,80**] Reed,M.,Simon,B. : "Method of Modern Mathematical Physics I", Academic Press (1980).

[**Sch,94**] Schonmann,R.H. : Slow droplet-driven relaxation of stochastic Ising Models in the vicinity of the phase coexistence region,Commun. Math.Phys.**161**,1-49 (1994).

[**St,70**] Stein,E.M. : "Topics in Harmonic Analysis Related to Littlewood-Paley Theory",Princeton Univ.Press,Princeton (1970).

[**SZ,92A**] Stroock,D.W.,Zegarlinski,B. : The logarithmic Sobolev inequality for continuous spin systems on the lattice,J.Funct.Analy. **104**, 299-326 (1992).

Sem. on Probab.
Vol.58 1995年
P1-115

[**SZ,92B**] Stroock,D.W.,Zegarlinski,B. : The equivalence of the logarithmic Sobolev inequality and the Dobrushin-Schlosman mixing condition, Commun. Math. Phys. **144**, 303-323 (1992).

[**SZ,92C**] Stroock,D.W.,Zegarlinski,B. : The logarithmic Sobolev inequality for discrete spin systems on the lattice, Commun. Math. Phys. **149**, 175-193 (1992).

[**Y,94**] Yoshida,N. : On the growth of logarithmic Sobolev constants for finite volume Gibbs states,preprint (1994).

[**Z,90**] Zegarlinski,B. : Log-Sobolev inequalities for infinite one dimensional lattice systems,Commun.Math.Phys.**133**, 147-162 (1990).

[**Z,92**] Zegarlinski, B. : Doburushin uniqueness theorem and logarithmic Sobolev inequalities , J. Funct. Analy **105**, pp. 77–111 (1992).

Sem. on Probab.
Vol.58 1995年
P1-115

ループ群上の確率解析

重川 一郎

(記： 貞末 岳 ・ 日野 正訓)

CONTENTS

Sem. on Probab.
Vol.58 1995年
P1-115

0. はじめに

このノートにおいては Malliavin calculus の応用として，ループ群における確率解析について述べる．Malliavin 解析は Wiener 空間上の基本的な微積分として 1970 年代後半に P. Maliavin によって導入された．彼自身の目的は，Hörmander 型の微分作用素に対する準楕円性の問題に確率論的なアプローチを与えることであった．それ以後、D. Stroock や J.-M. Bismut, また日本においても渡辺信三氏や楠岡成雄氏を始めとする多くの研究者によって Malliavin 解析は深化拡充され，今日では確率解析において欠くことの出来ない道具となってきている．それとともに応用の範囲も準楕円性の問題だけにとどまらず，大きく広がっていった．基本解の漸近展開や，それを使っての指数定理の確率論的な証明などは特に著しいものである．

そうした中で、多様対の上の連続な道全体が作る空間や，あるいはループの空間が Malliavin 解析の対象としてその射程の中に入るようになってきた．特に多様体のなかでも Lie 群はその大域的な積の演算のため取り扱いが比較的容易である．実際，E. Getzler ([43]), P. Malliavin, M.-P. Malliavin, H. Airault ([72, 11, 73]) や L. Gross ([46]) などによって Lie 群上の道の空間やループ空間が議論され始めた．

このノートでは，そうした流れの中で，Lie 群上のループの空間における微分幾何を展開することが目的である．一つの大きな目標は，ループ群において de Rham-Hodge 理論（あるいは調和積分論と言うこともできるだろう）を打ち立てることである．しかし，これは現在緒についたばかりで完成にはほど遠い．そうした理論の完成に，このノートが少しでも役に立ってくれればと願っている．また読者の中からこの問題に立ち向かおうとする人が現れてくれれば，筆者にとって非常に嬉しいことである．

このノートは 1994 年に行なわれた信州大学での確率論サマースクールでの講義ノートを基に，若干の加筆をしたものである．サマースクールを企画された井上和行，小谷真一，長井英生，松本裕行，熊谷隆，小倉幸雄のみなさんに厚くお礼申し上げます．

最後に，サマースクールの折，丁寧にノートを取り，原稿を TEX でタイプして下さった大学院の学生の貞末岳さん，日野正訓さんにも厚くお礼申し上げます．このノートが完成しえたのは二人の努力のお陰です．

1995 年 1 月　　重川 一郎

Sem. on Probab.
Vol.58 1995年
P1-115

1. マルコフ半群の一般論

我々の主な興味はループ群であるがマルコフ半群が重要な役割を果すので，初めにその一般論を準備しておく．その方がまた応用の範囲も広がり，議論も簡潔なものとなる．

$(X, \mathcal{B}, m)$ を σ- 有限な測度空間，$\{T_t\}$ を $L^2 = L^2(m)$ 上のマルコフ的な強連続縮小半群とする．T_t がマルコフ的であるとは，$f \in L^2, 0 \le f \le 1$ なら $0 \le T_t f \le 1$ を満足することを言う．$\{T_t\}$ の生成作用素とレゾルベントをそれぞれ A 及び G_α, $\alpha > 0$ で表す．さらに次の条件を仮定する：

$$\int_X T_t f\, dm \le \int_X f\, dm, \quad f \in L^1 \cap L^2_+.$$

ここで $+$ は非負の関数を表す．この条件はもし $\{T_t\}$ が対称であるならば，マルコフ性から自動的に従う．またこの条件の下で，$\{T_t\}$ が L^1 の縮小半群になることも明らかだろう．

Riesz-Thorin の補間定理より $\{T_t\}$ は任意の $p \in [1, \infty]$ に対し L^p 上で縮小半群となる．正確には，$f \in L^2 \cap L^p$ に対して $T_t f \in L^2 \cap L^p$ であって

$$\|T_t f\|_p \le \|f\|_p$$

が成立し，従って T_t は L^p 上の有界線形作用素に一意的に拡張できるということである．但し $p = \infty$ の時は T_t は $\overline{L^2 \cap L^\infty}^{\|\cdot\|_\infty}$, すなわち $L^2 \cap L^\infty$ を $\|\cdot\|_\infty$ で完備化した空間の上でのみ (とりあえず) 定義されている．

$\{T_t^*\}$ を $\{T_t\}$ の双対半群とする．双対性から $\{T_t^*\}$ も同じ条件を満たすことが分かる．例えば $\{T_t^*\}$ はマルコフ的である．双対半群を用いれば，$T_t : L^\infty \to L^\infty$ は $T_t^* : L^1 \to L^1$ の双対作用素として定義できる．以後，$T_t : L^\infty \to L^\infty$ はこのように定義されているものとする．

次の補題は Hölder の不等式の一般化である．

補題 1.1. $p \in (1, \infty)$ に対して，q を p の共役指数，すなわち $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ なるものとする．すると $f \in L^p$ と $g \in L^q$ に対して

$$|T_t(fg)| \le T_t|fg| \le \{T_t|f|^p\}^{1/p}\{T_t|g|^q\}^{1/q} \tag{1.1}$$

が成り立つ．$p = 1$ の場合は，$f \in L^1$ と $g \in L^\infty$ に対して

$$|T_t(fg)| \le T_t|fg| \le (T_t|f|)\|g\|_\infty \tag{1.2}$$

が成り立つ．また，$1 \le p \le p' \le \infty$ に対し

$$\{T_t|f|^p\}^{1/p} \le \{T_t|f|^{p'}\}^{1/p'} \tag{1.3}$$

が $f \in L^p \cap L^{p'}$ に対して成り立つ．

証明 (1.1)の最初の不等式は $L^2 \cap L^\infty$ が L^1 で稠密であることとマルコフ性から従う．2番目の不等式を示す．$T_t|f|^p$ と $T_t|g|^q$ の version を固定する．不等式

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad a, b \ge 0$$

を用いると，$x \in \{T_t|f|^p = 0\}, n \in \mathbb{N}$ に対して

$$T_t|fg|(x) = T_t|nf(g/n)|(x) \le \frac{n^p T_t|f|^p(x)}{p} + \frac{T_t|g|^q(x)}{n^q q} \le \frac{T_t|g|^q(x)}{n^q q} \quad \text{a.e.}$$

が成立する．n は任意だから，

$$T_t|fg| = 0 \quad \text{a.e. on } \{T_t|f|^p = 0\}.$$

$\{T_t|g|^q = 0\}$ に関しても同様の式が成り立つので

$$T_t|fg| \le \{T_t|f|^p\}^{1/p}\{T_t|g|^q\}^{1/q} \quad \text{a.e. on } \{T_t|f|^p = 0 \text{ or } T_t|g|^q = 0\}$$

である．次に $x \in \{T_t|f|^p \ne 0,\ T_t|g|^q \ne 0\}$ に対し

$$\frac{|f|}{\{T_t|f|^p(x)\}^{1/p}} \cdot \frac{|g|}{\{T_t|g|^q(x)\}^{1/q}} \le \frac{|f|^p}{pT_t|f|^p(x)} + \frac{|g|^p}{qT_t|g|^q(x)}$$

であるから，

$$\frac{T_t|fg|(x)}{\{T_t|f|^p(x)\}^{1/p}\{T_t|g|^q(x)\}^{1/q}} \le \frac{T_t|f|^p(x)}{pT_t|f|^p(x)} + \frac{T_t|g|^p(x)}{qT_t|g|^q(x)} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

となり

$$T_t|fg|(x) \le \{T_t|f|^p(x)\}^{1/p}\{T_t|f|^p(x)\}^{1/q} \quad \text{a.e. on } \{T_t|f|^p \ne 0,\ T_t|g|^q \ne 0\}$$

を得る．これで (1.1) が示された．

(1.2) は容易．

(1.3) を示す．r を p'/p の共役指数とする．$0 \le g \le 1$ なる $g \in L^r$ をとると，(1.1) とマルコフ性より，

$$T_t(|f|^p g) \le \{T_t|f|^{p'}\}^{p/p'}\{T_t|g|^r\}^{1/r} \le \{T_t|f|^{p'}\}^{p/p'}$$

である．$g \uparrow 1$ とすることで (1.3) を得る． ■

次に，$\{T_t\}$ が L^p 上の作用素として強連続であることを示す．

命題 1.2. $\{T_t\}$, $\{T_t^*\}$ は任意の $p \in [1, \infty)$ に対して L^p 上強連続な半群となる．

証明 まず $p = 1$ の場合に示す．f を L^1_+ の元とする．ここで + は非負の関数であることを表す．補題 1.1 より

$$|T_t\sqrt{f}|^2 \le T_t f$$

ゆえ

$$\|T_t\sqrt{f}\|_2^2 \le \|T_t f\|_1 \le \|f\|_1 = \|\sqrt{f}\|_2^2$$

となる．$\{T_t\}$ は L^2 上強連続であるから $\lim_{t\to 0}\|T_t\sqrt{f}\|_2 = \|\sqrt{f}\|_2$ である．上のこととあわせて

$$\lim_{t\to 0}\|T_t f\|_1 = \|f\|_1 \tag{1.4}$$

を得る．$f \in L^1_+ \cap L^2_+$ を任意にとる．0 に収束する任意の数列 t_n に対して，その部分列 t_{n_k} で $T_{t_{n_k}} f \to f$ a.e. となるものが存在する．(1.4) とあわせて

$$\lim_{k\to\infty}\|T_{t_{n_k}} f \ - f\|_1 = 0$$

を得る (証明は，例えば [52, Theorem (13.47)] 参照)．このことから

$$\lim_{t\to 0}\|T_t f \ - f\|_1 = 0 \tag{1.5}$$

が従う．$f \in L^1$ に対しても(1.5)が従うことを見るのは容易である．

一般の $p \in (1,\infty)$ に対しては，p より大なる r をとり，α を $p = \alpha + (1-\alpha)r$ となるようにとると，Hölder の不等式から

$$\begin{aligned}\|T_t f \ - f\|_p^p &= \||T_t f - f|^p\|_1 \\ &\le \||T_t f - f|^\alpha\|_{1/\alpha}\||T_t f - f|^{(1-\alpha)r}\|_{1/(1-\alpha)} \\ &= \|T_t f - f\|_1^\alpha \|T_t f - f\|_r^{(1-\alpha)r}\end{aligned} \tag{1.6}$$

を得る．(1.5)と L^r での縮小性から強連続性が従う． ■

A についての基本的な事実について述べておく．A は L^p 上での作用素であることを強調したいときには A_p の様にかくことにする．また A_p の定義域を $\mathrm{Dom}(A_p)$ と表す．$\mathrm{Dom}(A_p)$ は L^p の部分空間であるが，A_p のグラフノルムで位相が入っているものとする．以下いちいち断らないが Dom には，常に自然な位相が入っている．

補題 1.3.

(1) $G_\alpha(L^1 \cap L^\infty) \subseteq \bigcap_{1\le p<\infty} \mathrm{Dom}(A_p)$ であり，$G_\alpha(L^1 \cap L^\infty)$ は α に依らない集合で，任意の $p \in [1,\infty)$ に対し L^p で稠密である．

(2) $1 \le p < \infty$, $f \in L^p$ に対し

$$\langle f, \alpha G_\alpha^* h - h\rangle = \langle g, G_\alpha^* h\rangle \quad {}^\forall h \in L^1 \cap L^\infty$$

を満たす $g \in L^p$ が存在すれば，$f \in \mathrm{Dom}(A_p)$ であり $A_p f = g$ が成り立つ．

(3) $1 \le p < \infty$, $f \in L^p$ に対し

$$\langle f, A^* h\rangle = \langle g, h\rangle \quad {}^\forall h \in G_\alpha^*(L^1 \cap L^\infty)$$

を満たす $g \in L^p$ が存在すれば，$f \in \mathrm{Dom}(A_p)$ であり $A_p f = g$ が成り立つ．

(4) $1 \le p, q < \infty$ に対して，$u \in \mathrm{Dom}(A_p) \cap \mathrm{Dom}(A_q)$ なら $A_p u = A_q u$ が従う．

(5) $1 \le p, q < \infty$ に対して，$u \in \mathrm{Dom}(A_p) \cap L^q$ かつ $A_p u \in L^q$ なら $u \in \mathrm{Dom}(A_q)$.

Sem. on Probab.
Vol.58 1995年
P1-115

(6) $q, q' \in (1,\infty]$ をそれぞれ $p, p' \in [1,\infty)$ の共役指数とする．すなわち $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $\frac{1}{p'}+\frac{1}{q'}=1$. すると，$u \in \mathrm{Dom}(A_p^*) \cap L^{q'}$, $v \in \mathrm{Dom}(A_{p'}) \cap L^q$ ならば $\langle A_p^* u, v\rangle = \langle u, A_{p'} v\rangle$ である．

証明　(1) は容易．例えば稠密性は，$u \in L^p$ に対して $\alpha G_\alpha u \to u$ in L^p as $\alpha \to \infty$ となることから従う．

(2) を示す．仮定より

$$\langle \alpha G_\alpha f - f, h\rangle = \langle G_\alpha g, h\rangle$$

であるから $\alpha G_\alpha f - f = G_\alpha g$, すなわち $G_\alpha(\alpha f - g) = f$ である．従って $f \in \mathrm{Dom}(A_p)$ となり

$$A_p f = A_p G_\alpha(\alpha f - g) = -(\alpha f - g) + \alpha G_\alpha(\alpha f - g) = -(\alpha f - g) + \alpha f = g$$

を得る．

(3) を示す．$h = G_\alpha^* u$, $u \in L^1 \cap L^\infty$ とおくと

$$\langle g, G_\alpha^* u\rangle = \langle f, A^* G_\alpha^* u\rangle = \langle f, -u + \alpha G_\alpha^* u\rangle.$$

(2) より，$A_p f = g$ を得る．

(4) は，

$$A_p u = \lim_{t\downarrow 0} \frac{T_t u - u}{t} \quad \text{in } L^p$$

に注意すれば良い．(5) は，$u = G_\alpha(\alpha u - A_p u)$, $\alpha u - A_p u \in L^q$ から $u \in \mathrm{Dom}(A_q)$ が従う．

(6) は

$$\langle A_p^* u, v\rangle = \left\langle \lim_{t\downarrow 0} \frac{T_t^* u - u}{t}, v \right\rangle = \left\langle u, \lim_{t\downarrow 0} \frac{T_t v - v}{t} \right\rangle = \langle u, A_{p'} v\rangle$$

であることからわかる．　■

K を可分な実または複素 Hilbert 空間とする．K の内積とノルムをそれぞれ $(\cdot|\cdot)_K$ と $|\cdot|_K$ で表す．K だけでなく一般に Hilbert 空間の内積は $(\ |\ )$ を用いる．簡単のため普通は $|\cdot|_K$ の代わりに $|\cdot|$ を用いることにする．$L^p = L^p(m;K)$ で，K-値可測関数 u で

$$\|u\|_p = \left\{ \int_X |u(x)|^p dm \right\}^{1/p} < \infty$$

を満たすもの全体の空間を表す．m-a.e. で一致する 2 つの関数は同一視する．後の具体例で述べるように X 上のベクトル束の section からなる空間を考えなければならないことがあるが，可測構造のみを問題にするため自明束に相当する今の枠組みで考えておけば十分である．$\{\vec{T}_t\}$ を $L^2(m;K)$ 上の 強連続縮小半群とする．対応する生成作用素とレゾルベントをそれぞれ $\vec{A}$ と $\vec{G}_\alpha, \alpha > 0$ とする．

次の関係が成立するための条件を求めることに興味がある:

$$|\vec{T}_t u(x)| \le T_t|u|(x) \quad m\text{-a.e. } x, \quad {}^\forall u \in L^2(m;K).$$

Sem. on Probab.
Vol.58 1995年
P1-115

定理 1.4. (B. Simon [96, 97]) 次の 3 条件は互いに同値である:

(1) $|\vec{T}_t u| \le e^{\lambda t} T_t |u|$,

(2) $|\vec{G}_{\alpha+\lambda} u| \le G_\alpha |u|$, $\alpha > \max\{0, -\lambda\}$,

(3) $A|u| \ge \Re((\vec{A} - \lambda)u | \operatorname{sgn} u)_K$, $u \in \mathrm{Dom}(\vec{A})$

ここで

$$\operatorname{sgn} u = \begin{cases} \dfrac{u}{|u|}, & u \neq 0, \\ 0, & u = 0. \end{cases}$$

また $\Re$ は実部を表す.

証明 (1) と (2) の同値性は

$$G_\alpha = \int_0^\infty e^{-\alpha t} T_t dt, \quad \vec{G}_{\alpha+\lambda} = \int_0^\infty e^{-(\alpha+\lambda)t} \vec{T}_t dt,$$

$$T_t = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{t}\right)^n G_{n/t}^n, \quad \vec{T}_t = e^{\lambda t} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{t}\right)^n \vec{G}_{(n/t)+\lambda}^n$$

より従う. (1) $\Rightarrow$ (3) を示す. $u \in \mathrm{Dom}(A_2)$ に対し, $f \in \mathrm{Dom}(A_2)$ かつ $f \ge 0$ を任意にとると

$$\langle T_t|u|, f\rangle \ge \langle e^{-\lambda t} \Re(\vec{T}_t u | \operatorname{sgn} u)_K, f\rangle,$$

従って

$$\langle |u|, T_t^* f\rangle \ge e^{-\lambda t} \Re(\vec{T}_t u | f \operatorname{sgn} u)_{L^2}$$

を得る. この式と

$$\langle |u|, f\rangle = (u | f \operatorname{sgn} u)_{L^2}$$

より次式が成り立つ.

$$\left\langle |u|, \frac{T_t^* f - f}{t} \right\rangle \ge \Re\left(\frac{e^{-\lambda t}\vec{T}_t u - u}{t} \middle| f \operatorname{sgn} u \right)_{L^2}.$$

$t \to 0$ とすると

$$\langle |u|, A^* f\rangle \ge \Re((\vec{A} - \lambda)u | f \operatorname{sgn} u)_{L^2} = \langle \Re((\vec{A} - \lambda)u|u)_K, f\rangle$$

となり (3) が示された.

次に (3) $\Rightarrow$ (1) を証明する. 任意の $g \in \mathrm{Dom}(A_2^*)_+$ に対し,

$$\langle |u|, (A^* - \alpha)g\rangle \ge \langle \Re(\vec{A} - \lambda - \alpha)u | \operatorname{sgn} u), g\rangle \ge -\langle |(\vec{A} - \lambda - \alpha)u|, g\rangle$$

が成り立つ. $u = \vec{G}_{\alpha+\lambda} v$ とし, 任意の $\psi \in L_+^2$ に対し $g = G_\alpha \psi$ とおけば

$$\langle |\vec{G}_{\alpha+\lambda} v|, (A^* - \alpha) G_\alpha \psi\rangle \ge -\langle |(\vec{A} - \lambda - \alpha)(\vec{G}_{\alpha+\lambda} v)|, G_\alpha^* \psi\rangle.$$

よって

$$\langle |\vec{G}_{\alpha+\lambda} v|, \psi\rangle \le \langle G_\alpha |v|, \psi\rangle$$

となり $|\vec{G}_{\alpha+\lambda} v| \le G_\alpha |v|$ を得る. ■

Sem. on Probab.
Vol.58 1995年
P1-115

$\{T_t\}$ と $\{\vec{T}_t\}$ は対称であれば，付随する対称形式 $\mathcal{E}, \vec{\mathcal{E}}$ を考えることができる．

定理 1.5. T_t と $\vec{T}_t$ が対称で定理 1.4 の条件のどれか 1 つを満たしたとする．すると $u \in \mathrm{Dom}(\vec{\mathcal{E}})$ ならば $|u| \in \mathrm{Dom}(\mathcal{E})$ であり

$$\mathcal{E}(|u|,|u|) \leq \vec{\mathcal{E}}(u,u) + \lambda\|u\|_2^2. \tag{1.7}$$

さらに $g \geq 0$ と $u \in \mathrm{Dom}(\vec{\mathcal{E}})$ が $gu \in \mathrm{Dom}(\vec{\mathcal{E}})$ を満たせば $g|u| \in \mathrm{Dom}(\mathcal{E})$ であって

$$\mathcal{E}(|u|, g|u|) \leq \vec{\mathcal{E}}(u, gu) + \lambda\langle g, |u|^2\rangle \tag{1.8}$$

が成り立つ．

証明　定理 1.4 (2) を仮定して (1.7)を示す．まず $u \in \mathrm{Dom}(\vec{\mathcal{E}})$ に対して

$$((\alpha - \alpha^2 G_\alpha)|u|\,|\,|u|)_{L^2} \leq ((\alpha - \alpha^2 \vec{G}_{\alpha+\lambda})u|u)_{L^2}$$

であるから $\alpha \to \infty$ として

$$\lim_{\alpha\to\infty}((\alpha - \alpha^2 G_\alpha)|u|\,|\,|u|)_{L^2} \leq \lim_{\alpha\to\infty}((\alpha - \alpha^2 \vec{G}_{\alpha+\lambda})u|u)_{L^2} = \vec{\mathcal{E}}(u,u) + \lambda\|u\|_2^2$$

を得る．よって $|u| \in \mathrm{Dom}(\mathcal{E})$ と

$$\mathcal{E}(|u|,|u|) \leq \vec{\mathcal{E}}(u,u) + \lambda\|u\|_2^2$$

が従う．次に (1.8)を示す． $gu \in \mathrm{Dom}(\vec{\mathcal{E}})$ とすると上の結果から $g|u| \in \mathrm{Dom}(\mathcal{E})$ である．(2) より

$$((\alpha - \alpha^2 G_\alpha)|u|\,|\,g|u|)_{L^2} \leq ((\alpha - \alpha^2 \vec{G}_{\alpha+\lambda})u|gu)_{L^2}$$

であるから $\alpha \to \infty$ とすれば (1.8) を得る． ■

この定理から次のことがわかる．定理 1.5 の条件を全て仮定し，更に次の不完全対数 **Sobolev** 不等式が $\mathcal{E}$ に関して成立するとする．すなわちある $\alpha > 0, \beta \geq 0$ が存在して

$$\int_X f^2 \log(f^2/\|f\|_2^2)dm \leq \alpha\mathcal{E}(f,f) + \beta\|f\|_2^2, \quad \text{for } f \in \mathrm{Dom}(\mathcal{E}). \tag{1.9}$$

($\beta = 0$ と取れるときは単に対数 **Sobolev** 不等式が成立すると言う)．このとき $\vec{\mathcal{E}}$ に関して同様の不等式が成立する:

$$\int_X |u|^2 \log(|u|^2/\|u\|_2^2)dm \leq \alpha\vec{\mathcal{E}}(u,u) + (\beta+\lambda)\|u\|_2^2, \quad \text{for } u \in \mathrm{Dom}(\vec{\mathcal{E}}). \tag{1.10}$$

実際， $f = |u|$ として (1.7) を用いれば

$$\int_X |u|^2 \log(|u|^2/\|u\|_2^2)dm \leq \alpha\mathcal{E}(|u|,|u|) + \beta\||u|\|_2^2 \leq \alpha\vec{\mathcal{E}}(u,u) + (\beta+\lambda)\|u\|_2^2$$

となる．この不等式は，テンソル場に作用する Laplacian を取り扱う際に重要な役割を果たす．

命題 1.6. 定理 1.4 の仮定のどれか一つが成立したとする．この時 $\{\vec{T}_t\}$, $\{\vec{T}_t^*\}$ は任意の $p \in [1,\infty)$ に対して L^p 上強連続な半群である．

Sem. on Probab.
Vol.58 1995年
P1-115

証明　まず $u \in L^1 \cap L^2$ に対して $\lim_{t\to 0} \|\vec{T}_t u - u\|_1 = 0$ を示す．結論を否定すると，$\varepsilon > 0$ と 0 に収束する数列 $\{t_n\}$ で

$$\int_X |\vec{T}_{t_n} u - u|_K dm \geq 5\varepsilon \tag{1.11}$$

となるものが存在する．更に必要に応じて部分列をとることで $\vec{T}_{t_n} u \to u \quad m$-a.e. を仮定してもよい．Fatou の補題から，

$$\int_X |u| dm \leq \varliminf_{n\to\infty} \int_X |\vec{T}_{t_n} u| dm \leq \varlimsup_{n\to\infty} \int_X |\vec{T}_{t_n} u| dm \leq \varlimsup_{n\to\infty} \int_X T_{t_n} |u| dm \leq \int_X |u| dm$$

を得る．これより

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |\vec{T}_{t_n} u| dm = \int_X |u| dm$$

が従う．よって $|T_{t_n} u| \to |u|$ in L^1 と，任意の可測集合 $E \subseteq X$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \int_E |\vec{T}_{t_n} u| dm = \int_E |u| dm$$

であることがわかる (例えば [52, Theorem (13.47)] 参照)．$m(E) < \infty$ なる $E \subseteq X$ で

$$\int_{X\setminus E} |u| dm \leq \varepsilon$$

となる集合をとる．$v_n = 1_E \vec{T}_{t_n} u$, $v = 1_E u$ とおく．$\{|v_n|\}$ は一様可積分だから，任意の n に対し

$$\int |v_n| 1_{\{|v_n| > N\}} dm < \varepsilon$$

となる $N > 0$ がとれる．v についても上と同様な不等式が成り立つとしてよい．$\varphi_N : K \to K$ を

$$\varphi_N(k) = \begin{cases} k & \text{if } |k| \leq N, \\ Nk/|k| & \text{if } |k| > N \end{cases}$$

として定義する．$v_n^{(N)} = \varphi_N(v_n)$, $v^{(N)} = \varphi_N(v)$ とおくと，

$$\begin{aligned}
\int_X |\vec{T}_{t_n} u - u| dm &\leq \int_X 1_E |\vec{T}_{t_n} u - u| dm + \int_{X\setminus E} |\vec{T}_{t_n} u - u| dm \\
&\leq \int_X \{|v_n - v_n^{(N)}| + |v_n^{(N)} - v^{(N)}| + |v^{(N)} - v|\} dm \\
&\quad + \int_{X\setminus E} \{|\vec{T}_{t_n} u| + |u|\} dm \\
&\leq \int_X |v_n| 1_{\{|v_n| > N\}} dm + \int_X |v_n^{(N)} - v^{(N)}| dm + \int_X |v| 1_{\{|v| > N\}} dm \\
&\quad + \int_{X\setminus E} |\vec{T}_{t_n} u| dm + \int_{X\setminus E} |u| dm
\end{aligned}$$

となるので，dominated convergence theorem から

$$\begin{aligned}
\varlimsup_{n\to\infty} \int_X |\vec{T}_{t_n} u - u| dm &\leq \varepsilon + \lim_{n\to\infty} \int_X |v_n^{(N)} - v^{(N)}| dm + \varepsilon + \lim_{n\to\infty} \int_{X\setminus E} |\vec{T}_{t_n} u| dm + \varepsilon \\
&= 4\varepsilon
\end{aligned}$$

Sem. on Probab.
Vol.58 1995年
P1-115

を得るがこれは (1.11) に矛盾する．これで L^1 における $\{\vec{T_t}\}$ の強連続性が示せた．一般の $p \in [1, \infty)$ に対しては(1.6) と同様の不等式が成り立つことに注意すればよい． ■

次に Sobolev 空間を導入する．K を今までと同様可分な実 Hilbert 空間とする．$\{T_t\}$ は実数値関数に働く半群であるが，自然に K- 値関数に対しても働く．即ち，$\{T_t\}$ は $L^p(m; K)$ $(1 \leq p < \infty)$ 上の強連続縮小半群となる．実際，単関数 $u = \sum k_i 1_{A_i}$, $k_i \in K$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ for $i \neq j$, に対し

$$|T_t f| = |T_t(\sum k_i 1_{A_i})| = |\sum k_i T_t 1_{A_i}| \leq \sum |k_i| T_t 1_{A_i} \leq T_t(\sum |k_i| 1_{A_i}) = T_t|f|$$

が成立していることに注意すればよい．またこのことから $u \in L^p(m; K)$ に対し，

$$|T_t u| \leq T_t |u|$$

が成立していることが分かり，今までの結果が使えることになる．以下，$\{T_t\}$ は $L^p(m; K)$ 上の強連続半群と見なす．繁雑さを避けるために同じ記号を用いる．さて，この半群を用いて，**Sobolev 空間**が次のように定義される．まず，$r > 0$ にたいして，$L^p(m; K)$ 上の縮小作用素 $(1-A)^{-r/2}$ を

$$(1-A)^{-r/2} = \frac{1}{\Gamma(r/2)} \int_0^\infty e^{-t} t^{r/2-1} T_t \, dt$$

と定義する．$(1-A)^{-r/2}$ が 1 対 1 であることに注意して (命題 1.9 で示す)

$$\mathfrak{F}_{r,p}(K) := (1-A)^{-r/2}(L^p(m; K))$$

とし，$v = (1-A)^{-r/2} u$, $(u \in L^p(m; K))$ に対するノルム $\|v\|_{r,p}$ を

$$\|v\|_{r,p} = \|u\|_p$$

と定義する．負の指数にたいしては，$u \in L^p(m; K)$ のノルムを $\|u\|_{-r,p} := \|(1-A)^{-r/2} u\|_p$ と定め，このノルムで $L^p(m; K)$ を完備化したものを $\mathfrak{F}_{r,p}(K)$ と定義する．

Sobolev 空間 $\mathfrak{F}_{r,p}(K)$ について基本的なことを述べておく．$\alpha, r > 0$ に対して，$L^p(m; K)$ 上の作用素 $V_r^{(\alpha)}$ を

$$V_r^{(\alpha)} = \frac{1}{\Gamma(r/2)} \int_0^\infty e^{-\alpha t} t^{r/2-1} T_t \, dt$$

と定義する．$\alpha = 1$ のときは特に V_r と書く．$V_r = (1-A)^{-r/2}$ であるが，$(1-A)^{-r/2}$ と書く理由はほぼ明らかだろう．

命題 1.7. I を恒等作用素とするとき次のことがなりたつ．

$$\text{s-}\lim_{\alpha \to \infty} \alpha^{r/2} V_r^{(\alpha)} = I.$$

ここで s-lim は強収束をあらわす．

Sem. on Probab.
Vol.58 1995年
P1-115

証明 定義から

$$\alpha^{r/2}V_r^{(\alpha)} = \frac{\alpha^{r/2}}{\Gamma(r/2)}\int_0^\infty t^{r/2-1}e^{-\alpha t}T_t dt = \frac{1}{\Gamma(r/2)}\int_0^\infty s^{r/2-1}e^{-s}T_{s/\alpha}ds$$

であり，$\text{s-}\lim_{t\to 0} T_t = I$ から命題がみちびかれる． ■

レゾルベント $\{G_\alpha\}$ に対し，$\alpha, \beta > 0, |\beta-\alpha| < \alpha$ のとき $(1-(\beta-\alpha)G_\alpha)^{r/2}$ を

$$(1+(\beta-\alpha)G_\alpha)^{r/2} = \sum_{n=0}^\infty c_n\{(\beta-\alpha)G_\alpha\}^n \tag{1.12}$$

と定義する．ここで c_n は $(1+x)^{r/2}$ の Taylor 展開の係数である．すなわち

$$(1+x)^{r/2} = \sum_{n=0}^\infty c_n x^n.$$

$|\beta-\alpha| < \alpha$ ならば，$\|G_\alpha\|_{\text{op}} \le \frac{1}{\alpha}$ に注意して $\|(\beta-\alpha)G_\alpha\|_{\text{op}} < 1$ が導かれるから (1.12) はこのノルムで収束する．ここで $\|\cdot\|_{\text{op}}$ は $L^p(m;K)$ での作用素ノルムをあらわす．

命題 1.8. $|\beta-\alpha| < \alpha$ とする．このとき，

$$V_r^{(\alpha)} = (1+(\beta-\alpha)G_\alpha)^{r/2}V_r^{(\beta)} = V_r^{(\beta)}(1+(\beta-\alpha)G_\alpha)^{r/2}$$

が成り立つ．

証明 $h(t)$ を任意の関数とする．G_α を積分であらわし，$\{T_t\}$ の半群性をつかうと

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty e^{-\beta t}h(t)T_t(\beta-\alpha)G_\alpha\, dt \\
&\qquad = \int_0^\infty e^{-\beta t}h(t)T_t\, dt \int_0^\infty e^{-\alpha s}(\beta-\alpha)T_s\, ds \\
&\qquad = \int_0^\infty dt \int_0^\infty e^{-\beta t}h(t)e^{-\alpha s}(\beta-\alpha)T_{t+s}\, ds \\
&\qquad = \int_0^\infty d\sigma \int_0^\sigma e^{-\beta\tau}h(\tau)e^{-\alpha(\sigma-\tau)}(\beta-\alpha)T_\sigma\, d\tau \quad (t+s=\sigma,\ t=\tau) \\
&\qquad = \int_0^\infty e^{-\beta\sigma}Kh(\sigma)T_\sigma\, d\sigma
\end{aligned}$$

がえられる．ここで

$$Kh(\sigma) = (\beta-\alpha)\int_0^\sigma h(\tau)e^{(\beta-\alpha)(\sigma-\tau)}d\tau.$$

よって，$h(t) = t^{r/2-1}$ とおき，上の操作を n 回繰り返すと

$$\frac{1}{\Gamma(r/2)}\int_0^\infty e^{-\beta t}t^{r/2-1}T_t\{(\beta-\alpha)G_\alpha\}^n dt = \frac{1}{\Gamma(r/2)}\int_0^\infty e^{-\beta t}K^n h(t)T_t\, dt$$

を得る．よって

$$\begin{aligned}
(1+(\beta-\alpha)G_\alpha)^{r/2}V_r^{(\beta)} &= \frac{1}{\Gamma(r/2)}\int_0^\infty e^{-\beta t}t^{r/2-1}T_t\sum_{n=0}^\infty c_n\{(\beta-\alpha)G_\alpha\}^n dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(r/2)}\int_0^\infty e^{-\beta t}\sum_{n=0}^\infty c_n K^n h(t)T_t\, dt
\end{aligned}$$

Sem. on Probab.
Vol.58 1995年
P1-115

がわかる．あとは

$$e^{-\beta t}\sum_{n=0}^{\infty} c_n K^n h(t) = e^{-\alpha t} t^{r/2-1}$$

を示せば良い．これには，Laplace 変換をつかう．部分積分を行なうと

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{-\beta t} K^{n+1} h(t) dt &= \int_0^\infty e^{-\alpha t} e^{-\lambda t} (\beta-\alpha) dt \int_0^t e^{-(\beta-\alpha)\tau} K^n h(\tau) d\tau \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{-\alpha t} (\beta-\alpha)(\alpha+\lambda)^{-1} e^{-(\beta-\alpha)t} K^n h(t) dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{-\beta t} (\beta-\alpha)(\alpha+\lambda)^{-1} K^n h(t) dt.\end{aligned}$$

これから帰納的に

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{-\beta t} t^{r/2-1} (\beta-\alpha)^n (\alpha+\lambda)^{-n} dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{\beta t} K^n h(t) dt$$

がわかる．さらに n について足し合わせると

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{-\beta t} \sum_{n=0}^{\infty} c_n K^n h(t) dt &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{-\beta t} t^{r/2-1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (\beta-\alpha)^n (\alpha+\lambda)^{-n} dt \\ &= \Gamma(r/2)(\beta+\lambda)^{-r/2}(1+(\beta-\alpha)/(\alpha+\lambda))^{r/2} \\ &= \Gamma(r/2)(\alpha+\lambda)^{-r/2} \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{-\alpha t} t^{r/2-1} dt.\end{aligned}$$

Laplace 変換の逆をとって，証明をおわる． ■

命題 1.9. V_r は単射であり，$\mathfrak{F}_{r,p}(K)$ は $L^p(m;K)$ で稠密である．

証明　まず単射であることを示す．$V_r u = 0$ としよう．命題 1.8 から $\alpha > 1$ に対し

$$V_r^{(\alpha)} u = (1+(1-\alpha)G_\alpha)^{r/2} V_r u = 0.$$

ここで 命題 1.7 を使えば

$$u = \lim_{\alpha\to\infty} \alpha^{r/2} V_r^{(\alpha)} u = 0$$

稠密性は $u \in L^p$ に対し，$V_r^{(\alpha)} u \in \mathfrak{F}_{r,p}(K)$ に注意して，命題 1.7 を使えばよい． ■

補題 1.10. $r, s > 0$ に対し次が成立する．

$$V_r V_s = V_{r+s}$$

証明　定義に従って左辺を計算する．

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\Gamma(r/2)\Gamma(s/2)} \int_0^\infty\int_0^\infty t^{r/2-1} u^{s/2-1} e^{-t} e^{-u} T_t T_u dt\, du \\ &\quad= \frac{1}{\Gamma(r/2)\Gamma(s/2)} \int_0^\infty\int_0^\infty t^{r/2-1} u^{s/2-1} e^{-(t+u)} T_{t+u}\, dt\, du \\ &\quad= \frac{1}{\Gamma(r/2)\Gamma(s/2)} \int_0^\infty e^{-p} T_p\, dp \int_0^p t^{r/2-1} (p-t)^{s/2-1} dt \quad (t+u=p, t=t)\end{aligned}$$

Sem. on Probab.
Vol.58 1995年
P1-115

$$= \frac{1}{\Gamma(r/2)\Gamma(s/2)} \int_0^\infty p^{(r+s)/2-1} e^{-p} T_p \, dp \int_0^1 t^{r/2-1}(1-t)^{s/2-1} dt$$

ここで Beta 関数 $B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt$ と公式 $B(p,q) = \dfrac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)}$ を使うと，この式は

$$\frac{1}{\Gamma((r+s)/2)} \int_0^\infty p^{(r+s)/2-1} e^{-p} T_p \, dp = \text{右辺}$$

となる． ■

命題 1.11. $s \in \mathbb{R}, r > 0$ とする．このとき，$V_r : \mathfrak{F}_{s,p}(K) \to \mathfrak{F}_{r+s,p}(K)$ は等距離同形を与える．

証明 $s \geq 0$ のときは定義と補題 1.10 から明らかである．$s < 0$ のときは $s + r \geq 0$ と $s + r < 0$ とに場合わけする．まず $s < 0$ のときに V_r が $\mathfrak{F}_{s,p}(K)$ から $\mathfrak{F}_{r+s,p}(K)$ への写像を与えていることをみておく．

$s + r \geq 0$ のときは $V_r = V_{r+s}V_{-s}$(補題 1.10) であるから $u \in L^p(m;K)$ に対して $V_r u \in \mathfrak{F}_{r+s,p}(K)$ であって

$$\begin{aligned}
\|V_r u\|_{s+r,p} &= \|V_{s+r}V_{-s}u\|_{s+r,p} \\
&= \|V_{-s}u\|_p \\
&= \|u\|_{s,p}
\end{aligned}$$

となり V_r が $\mathfrak{F}_{s,p}(K)$ の稠密な部分空間 $L^p(m;K)$ 上で $\mathfrak{F}_{s+r,p}(K)$ への等距離写像となっていることがわかる．これから自然に V_r を拡張して $V_r : \mathfrak{F}_{s,p}(K) \to \mathfrak{F}_{s+r,p}(K)$ をえる．$s + r < 0$ の場合は再び補題 1.10 から $u \in L^p(m;K)$ に対して

$$\begin{aligned}
\|V_r u\|_{s+r,p} &= \|V_{-(s+r)}V_r u\|_{s+r,p} \\
&= \|V_{-s}u\|_p \\
&= \|u\|_{s,p}
\end{aligned}$$

がわかり，あとは $s + r \geq 0$ のときと同様である．

V_r が全射になっていることは $s + r \geq 0$ のときには次のように示される．$\mathfrak{F}_{-s,p}(K)$ は $L^p(m;K)$ で稠密だから，任意の $g \in L^p(m;K)$ に対して $L^p(m;K)$ の元の列 $\{g_n\}$ で

$$V_{-s}g_n \to g \quad \text{in } L^p(m;K) \quad (n \to \infty)$$

となるものがあるが，これから

$$\begin{aligned}
\|V_r g_n - V_{r+s}g\|_{r+s} &= \|V_{r+s}V_{-s}g_n - V_{r+s}g\|_{r+s} \\
&= \|V_{r+s}(V_{-s}g_n - g)\|_{r+s} \\
&= \|V_{-s}g_n - g\|_p \to 0 \quad (n \to \infty)
\end{aligned}$$

Sem. on Probab.
Vol.58 1995年
P1-115

が従う．これは $V_r(L^p(m;K))$ が $\mathfrak{F}_{r+s,p}(K)$ で稠密になっていることを示す．ところで $V_r(\mathfrak{F}_{s,p}(K))$ は $\mathfrak{F}_{r+s,p}(K)$ の閉部分空間だから全射性がわかる．$s+r<0$ のときもほぼ同様に示される．$u \in L^p(m;K)$ にたいして $\{u_n\} \subset L^p(m;K)$ を $V_r u_n \to u$ in $L^p(m;K)$ となるようにとると $V_{-(r+s)}$ が $L^p(m;K)$ 上の縮小作用素だから

$$\begin{aligned} \|V_r u_n - u\|_{r+s} &= \|V_{-(r+s)}(V_r u_n - u)\|_p \\ &\leq \|V_r u_n - u\|_p \to 0 \quad (n \to \infty) \end{aligned}$$

が従い，このときも V_r の全射性がわかる． ■

次の節への準備として (r,p)-**capacity** について触れておく．B の開集合 O に対して (r,p)-capacity を

$$C_{r,p}(O) = \inf\{\|f\|_{r,p}^p; f \geq 1\ \mu\text{-a.e. on } O\}$$

で定め，また一般の $A \subseteq B$ に対しては

$$C_{r,p}(A) = \inf\{C_{r,p}(O);\ O \text{ は開集合で } O \supseteq A\}$$

と定める．$u \in \mathfrak{F}_{r,p}(E)$ は μ 測度 0 の曖昧さをもつ関数であるが (r,p)- 準連続変形，すなわち次の 2 つの条件を満たす $\tilde{u}$ が (r,p)-capacity 0 の集合上での違いを除いて一意に定まる．

(1) $\mu(\tilde{u} \neq u) = 0$

(2) B の増大閉集合列 F_n があって $\lim_{n\to\infty} C_{r,p}(F_n^c) = 0$ であり $\tilde{u}$ の F_n への制限が連続になる．

以下の節においては，$\mathfrak{F}_{r,p}(K)$ に属する関数に対しては，必要に応じてその準連続変形をとって考え，いちいち断らない．

2. Square field operator と縮小半群

この節では **square field operator** を用いて議論を進める．また半群 $\{T_t\}$ は対称とし，次の条件を仮定する．

(Γ) $f, g \in \mathrm{Dom}(A_2)$ に対して，$f \cdot g \in \mathrm{Dom}(A_1)$.

この仮定の下で

$$\Gamma(f,g) = \frac{1}{2}\{A_1(f\cdot g) - A_2 f \cdot g - f \cdot A_2 g\}, \qquad f,g \in \mathrm{Dom}(A_2)$$

とおく．Γ について次のことが成立する．

命題 2.1. $f, g \in \mathrm{Dom}(A_2)$ に対して

$$\Gamma(f,f) \geq 0, \tag{2.1}$$

$$|\Gamma(f,g)|^2 \leq \Gamma(f,f)\Gamma(g,g), \tag{2.2}$$

Sem. on Probab.
Vol.58 1995年
P1-115

$$\int_X \Gamma(f,f)dm \le \mathcal{E}(f,f) \le 2\int_X \Gamma(f,f)dm \tag{2.3}$$

が成立する．このことからさらに Γ は $\mathrm{Dom}(\mathcal{E}) \times \mathrm{Dom}(\mathcal{E})$ から L^1 への連続双線形形式に一意的に拡張され，(2.1)〜(2.3) が成立する．

証明　補題 1.1 の Schwarz の不等式 (1.1) から

$$|T_t(fg)|^2 \le T_t(f^2)T_t(g^2).$$

ここで $g \uparrow 1$ とすれば

$$(T_t f)^2 \le T_t(f^2)T_t 1 \tag{2.4}$$

が得られる ($\{T_t\}$ は L^∞ に対しても定義されていたことを思い出そう)．特に，マルコフ性を使えば

$$(T_t f)^2 \le T_t(f^2)$$

が成立する．このとき $f \in \mathrm{Dom}(A_2)$ として t について $t=0$ で微分すれば (2.1) を得る．

(2.1) の正値性から Schwarz の不等式 (2.2) が得られるのはよく知られている．

次に (2.3) を見ていこう．まず定義から $f, g \in \mathrm{Dom}(A_2)$ に対し

$$\mathcal{E}(f,g) = \int_X \Gamma(f,g)dm - \frac{1}{2}\int_X A(f\cdot g)\,dm, \tag{2.5}$$

が成立する．

ここで一般に $f \in \mathrm{Dom}(A_1)_+$ に対し

$$\int_X A_1 f\,dm \le 0. \tag{2.6}$$

が成立することに注意しよう．実際このことを見るには $\{T_t\}$ の縮小性から

$$\int_X T_t f\,dm \le \int_X f\,dm$$

が成立し，従って

$$\int_X A_1 f\,dm = \lim_{t\to 0}\int_X \frac{T_t f - f}{t}dm \le 0$$

となり求める結果を得る．

そこで (2.6) を使えば

$$\int_X \Gamma(f,f)dm \le \mathcal{E}(f,f)$$

が容易に得られる．

最後に

$$\mathcal{E}(f,f) \le 2\int_X \Gamma(f,f)dm$$

を示そう．(2.4) から全ての $\alpha \in \mathbb{R}$ に対し

$$T_t1(x)\alpha^2 - 2T_t f(x)\alpha + T_t(f^2)(x) \ge 0$$

Sem. on Probab.
Vol.58 1995年
P1-115

が得られる ((2.4) は判別式が非正であることを意味している). $\alpha = f(x)$ ととって積分すれば

$$(T_t 1, f^2)_{L^2(m)} - 2(T_t f, f)_{L^2(m)} + (T_t f^2, 1)_{L^2(m)} \geq 0$$

となり，さらに

$$\frac{1}{t}(f^2 - T_t(f^2), 1)_{L^2(m)} \leq \frac{1}{t}(f - T_t f, f)_{L^2(m)}$$

が得られる．ここで $t \to 0$ とすれば

$$-\int_X A(f^2)dm \leq \mathcal{E}(f, f)$$

が従う．これと (2.5) を組合せれば

$$\begin{aligned} 2\int_X \Gamma(f, f)dm &= 2\mathcal{E}(f, f) + \int_X A(f^2)dm \\ &= \mathcal{E}(f, f) + (\mathcal{E}(f, f) + \int_X A(f^2)dm) \\ &\geq \mathcal{E}(f, f) \end{aligned}$$

を得る．

(2.2), (2.3) から

$$\begin{aligned} \int_X |\Gamma(f, g)|dm &\leq \int_X \Gamma(f, f)^{1/2}\Gamma(g, g)^{1/2}dm \\ &\leq \left\{\int_X \Gamma(f, f)dm\right\}^{1/2}\left\{\int_X \Gamma(g, g)dm\right\}^{1/2} \\ &\leq \mathcal{E}(f, f)^{1/2}\mathcal{E}(g, g)^{1/2} \end{aligned}$$

が従う．これから Γ が $\mathrm{Dom}(\mathcal{E}) \times \mathrm{Dom}(\mathcal{E})$ 上に連続に拡張できることは明らかだろう． ■

$\mathrm{Dom}(A_1) \cap L^\infty$ は多元環であり $f, g \in \mathrm{Dom}(A_1) \cap L^\infty$ に対して

$$A_1(f \cdot g) = A_1 f \cdot g + f \cdot A_1 g + 2\Gamma(f, g)$$

が成立する．また $\mathrm{Dom}(A_1) \cap L^\infty \subseteq \mathrm{Dom}(\mathcal{E})$ である．これは

$$\mathcal{E}(f, f) = \lim_{t \to 0}\langle\frac{f - T_t f}{t}, f\rangle = -\langle A_1 f, f\rangle \leq \|A_1 f\|_1 \|f\|_\infty$$

からわかる．

条件 (Γ) は $\mathrm{Dom}(A_2)$ の全ての元に対して仮定したが，もっと小さな部分空間で成立すれば十分である．実際，次の命題が成立する．

命題 2.2. Γ は次の (Γ') と同値である．

(Γ') $\mathrm{Dom}(A_2) \cap L^\infty$ の部分空間 $\mathcal{C}$ で，$\mathcal{C}$ は $\mathrm{Dom}(\mathcal{E})$ で稠密でありさらに任意の $f \in \mathcal{C}$ に対して $f^2 \in \mathrm{Dom}(A_1)$ が成立するものが存在する．

証明　$f, g \in \mathcal{C}$ および $h \in \mathrm{Dom}(A_2) \cap L^\infty$ に対し

$$\begin{aligned}\langle A_2 h, fg\rangle &= \langle h, A_1(fg)\rangle \\ &= \langle h, A_2 f \cdot g\rangle + \langle hf, A_2 g\rangle + \langle h, 2\Gamma(f,g)\rangle \\ &= -\mathcal{E}(f, hg) + \langle hf, A_2 g\rangle + \langle h, 2\Gamma(f,g)\rangle\end{aligned}$$

が成立する．そこで $f \in \mathrm{Dom}(A_2) \cap L^\infty$ に対して $\mathrm{Dom}(\mathcal{E})$ において f に収束する列 $\{f_n\} \subseteq \mathcal{C}$ をとる．上で示したことから $g \in \mathcal{C}$, $h \in \mathrm{Dom}(A_2) \cap L^\infty$ に対し

$$\begin{aligned}\langle A_2 h, fg\rangle &= \lim_{n\to\infty}\langle A_2 h, f_n g\rangle \\ &= -\lim_{n\to\infty}\mathcal{E}(f_n, hg) + \lim_{n\to\infty}\langle hf_n, A_2 g\rangle + \lim_{n\to\infty}\langle h, 2\Gamma(f_n, g)\rangle \\ &= -\mathcal{E}(f, hg) + \langle hf, A_2 g\rangle + \langle h, 2\Gamma(f,g)\rangle \\ &= \langle A_2 f, hg\rangle - \mathcal{E}(hf, g) + \langle h, 2\Gamma(f,g)\rangle\end{aligned}$$

が成立する．

同様に $g \in \mathrm{Dom}(A_2) \cap L^\infty$ に対して $\mathrm{Dom}(\mathcal{E})$ において g に収束する列 $\{g_n\} \subseteq \mathcal{C}$ をとれば $f, h \in \mathrm{Dom}(A_2) \cap L^\infty$ に対し

$$\begin{aligned}\langle A_2 h, fg\rangle &= \lim_{n\to\infty}\langle A_2 h, fg_n\rangle \\ &= \lim_{n\to\infty}\langle A_2 f, hg_n\rangle - \lim_{n\to\infty}\mathcal{E}(hf, g_n) + \lim_{n\to\infty}\langle h, 2\Gamma(f, g_n)\rangle \\ &= \langle A_2 f, hg\rangle - \mathcal{E}(hf, g) + \langle h, 2\Gamma(f,g)\rangle \\ &= \langle A_2 f, hg\rangle + \langle hf, A_2 g\rangle + \langle h, 2\Gamma(f,g)\rangle \\ &= \langle h, (A_2 f)g + fA_2 g + 2\Gamma(f,g)\rangle\end{aligned}$$

となる．結局 $f, g \in \mathrm{Dom}(A_2) \cap L^\infty$ に対して

$$A_1(f \cdot g) = A_2 f \cdot g + f \cdot A_2 g + 2\Gamma(f,g)$$

が成立することが分かる．あとは $\mathrm{Dom}(A_2) \cap L^\infty$ が $\mathrm{Dom}(A_2)$ で稠密であることに注意すればよいが，これは $\alpha G_\alpha(n \wedge f \vee (-n)) \in \mathrm{Dom}(A_2) \cap L^\infty$ で $n \to \infty$, $\alpha \to \infty$ とすればよい． ■

$\{\vec{T}_t\}$ の square field を定義するため次の条件をおく．

$(\vec{\Gamma})_\lambda$　ある $\lambda \in \mathbb{R}$ が存在して，$u, v \in \mathrm{Dom}(\vec{A}_2)$ に対して $(u|v)_K \in \mathrm{Dom}(A_1)$ であり，

$$A_1|u|^2 - 2(\vec{A}_2 u|u)_K + 2\lambda|u|^2 \geq 0$$

を満たす．

この条件の下で $\vec{\Gamma}$ を

$$\vec{\Gamma}(u,v)=\frac{1}{2}\{A_1(u|v)_K-(\vec{A}_2u|v)_K-(u|\vec{A}_2v)_K\}$$

で定める．この時 $u\in\mathrm{Dom}(A_2)$ に対し

$$\vec{\Gamma}(u,u)+\lambda|u|^2\geq 0 \tag{2.7}$$

が成立する．

定理 2.3. (Γ), $(\vec{\Gamma})_\lambda$ の下で， $u\in L^2$ に対して

$$|\vec{T}_tu|^2\leq e^{2\lambda t}T_t|u|^2 \tag{2.8}$$

が成り立ち， 任意の $p\in[1,\infty)$ に対して $\{\vec{T}_t\}$ は強連続縮小半群である．更に， $\vec{\Gamma}(u,v)$ は $u,v\in\mathrm{Dom}(\vec{\mathcal{E}})$ に対して well-defined であり

$$\int_X\vec{\Gamma}(u,u)dm\leq\vec{\mathcal{E}}(u,u),\quad u\in\mathrm{Dom}(\vec{\mathcal{E}}) \tag{2.9}$$

を満たす．

証明 $\vec{A}$ の代わりに $\vec{A}-\lambda$ を考えることで $\lambda=0$ として良い．

$t>0$ を任意にとる． $u\in\mathrm{Dom}(\vec{A}_2)$, $g\in L^\infty_+$ に対して $\Phi(s)$, $s\in[0,t]$ を

$$\Phi(s)=\langle T_{t-s}|\vec{T}_su|^2,g\rangle$$

で定義する． $\vec{T}_su\in\mathrm{Dom}(\vec{A}_2)$, $|\vec{T}_su|^2\in\mathrm{Dom}(A_1)$, であるから $(\vec{\Gamma})_\lambda$ を用いれば

$$\begin{aligned}\Phi'(s)&=\langle 2T_{t-s}(\vec{A}_2\vec{T}_su|\vec{T}_su)_K,g\rangle-\langle A_1T_{t-s}|\vec{T}_su|^2,g\rangle\\&=\langle 2(\vec{A}_2\vec{T}_su|\vec{T}_su)_K-A_1|\vec{T}_su|^2,T_{t-s}g\rangle\\&\leq 0\end{aligned}$$

となり， $\Phi(0)\geq\Phi(t)$ を得る．これより (2.8)が $u\in\mathrm{Dom}(\vec{A}_2)$ で成り立つことがわかり，結局一般の u についても成り立つ．

$p\in[2,\infty]$ に対して， L^p 上での $\{\vec{T}_t\}$ の縮小性は

$$|\vec{T}_tu|\leq\{T_t|u|^2\}^{1/2}\leq\{T_t|u|^p\}^{1/p}$$

より従う ($p=\infty$ の時は $\vec{T}_t$ は $\overline{L^2\cap L^\infty}^{\|\cdot\|_\infty}$ 上で定義されていることに注意)．双対性から，$p\in[1,2]$ に対しても縮小性がいえる．

$\{\vec{T}_t\}$ の強連続性をいうには

$$\int_X|u|dm\leq\varliminf_{t\to 0}\int_X|\vec{T}_tu|dm\leq\varlimsup_{t\to 0}\int_X|\vec{T}_tu|dm\leq\int_X|u|dm$$

に注意すれば命題 1.6 の証明と同様である．

Sem. on Probab.
Vol.58 1995年
P1-115

(2.9)を示す．$\vec{\Gamma}$ の定義より

$$\int_X \vec{\Gamma}(u,v)dm = \vec{\mathcal{E}}(u,v) + \frac{1}{2}\int_X A_1(u|v)_K dm$$

である．ここで (2.6) を使えば $u \in \mathrm{Dom}(\vec{A}_2)$ に対して

$$\int_X \vec{\Gamma}(u,u)dm \le \vec{\mathcal{E}}(u,u)$$

が成立することが分かる．

一方，(2.7) の正値性から Schwarz の不等式

$$|\vec{\Gamma}(u,v) + \lambda(u|v)_K|^2 \le \{\vec{\Gamma}(u,u) + \lambda|u|^2\}\{\vec{\Gamma}(v,v) + \lambda|v|^2\}$$

が成立する．よって

$$\|\vec{\Gamma}(u,v)\|_1 \le \{\vec{\mathcal{E}}(u,u) + \lambda\|u\|_2^2\}^{1/2}\{\vec{\mathcal{E}}(v,v) + \lambda\|v\|_2^2\}^{1/2} + |\lambda|\|u\|_2\|v\|_2.$$

これより $\vec{\Gamma}$ は $\mathrm{Dom}(\vec{\mathcal{E}}) \times \mathrm{Dom}(\vec{\mathcal{E}})$ から L^1 への連続双線形形式に拡張できることがわかり，証明を終わる． ■

上の定理の仮定の十分条件を求める．

命題 2.4. $\mathrm{Dom}(\vec{A}_2)$ の部分空間 $\mathcal{D}$ で，$\vec{A}_2$ の core であり，さらに $u,v \in \mathcal{D}$ に対して $(u|v)_K \in \mathrm{Dom}(A_1)$ であって，ある $\lambda \in \mathbb{R}$ に対し

$$\vec{\Gamma}(u,u) + \lambda|u|^2 \ge 0, \quad u \in \mathcal{D}$$

となるものが存在したとする．このとき条件 $(\vec{\Gamma})_\lambda$ が成り立つ．

証明　定理 2.3 の証明と同様にして

$$\int_X \vec{\Gamma}(u,u)dm \le \vec{\mathcal{E}}(u,u), \quad u \in \mathrm{Dom}(\vec{\mathcal{E}})$$

を得る．これより $\vec{\Gamma}$ は $\mathrm{Dom}(\vec{\mathcal{E}}) \times \mathrm{Dom}(\vec{\mathcal{E}})$ 上で well-defined であり $\vec{\Gamma}$ は $\mathrm{Dom}(\vec{\mathcal{E}}) \times \mathrm{Dom}(\vec{\mathcal{E}})$ から L^1 への有界な双線形作用素であることがわかる．$u,v \in \mathcal{D}$ に対して

$$A_1(u|v)_K = 2\vec{\Gamma}(u,v) + (\vec{A}_2 u|v)_K + (u|\vec{A}_2 v)_K$$

であった．右辺は $\mathrm{Dom}(\vec{A}_2) \times \mathrm{Dom}(\vec{A}_2)$ から L^1 への連続関数で $\mathcal{D}$ は $\mathrm{Dom}(\vec{A}_2)$ の core ゆえ，$u,v \in \mathrm{Dom}(\vec{A}_2)$ に対し $(u|v)_k \in \mathrm{Dom}(A_1)$ を得る．他は容易である． ■

我々は更に $\mathcal{E}$ が次の意味で局所性を持つことを仮定する．

(L)　$f \in \mathrm{Dom}(\mathcal{E})$, $F, G \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ に対して

$$\mathrm{supp}\, F \cap \mathrm{supp}\, G = \emptyset \implies \mathcal{E}(F_0(f), G_0(f)) = 0,$$

ここで $F_0(x) = F(x) - F(0)$, $G_0(x) = G(x) - G(0)$.

Sem. on Probab.
Vol.58 1995年
P1-115

上の条件は $\mathrm{Dom}(\mathcal{E})$ の稠密な部分空間の各元において満足すれば良い.

(L) の下で

$$\mathcal{E}(f,g) = \int_X \Gamma(f,g)dm \tag{2.10}$$

が成り立つ. 更に Γ は次の derivation property を持つ.

(1) $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を $F(0)=0$ なる C^1 関数とするとき, $f_1,\dots,f_n \in \mathrm{Dom}(\mathcal{E})\cap L^\infty$ に対して $F(f_1,\dots,f_n)\in \mathrm{Dom}(\mathcal{E})$ であり

$$\Gamma(F(f_1,\dots,f_n),g) = \sum_j \partial_j F(f_1,\dots,f_n)\Gamma(f_j,g), \quad {}^\forall g \in \mathrm{Dom}(\mathcal{E}).$$

もし更に $\partial_j F$ が有界であれば, 上の等式は $f_1,\dots,f_n \in \mathrm{Dom}(\mathcal{E})$ で成立する.

(2) $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を $F(0)=0$ なる C^2 関数とすると, $f_1,\dots,f_n \in \mathrm{Dom}(A_1)\cap L^\infty$ に対して $F(f_1,\dots,f_n)\in \mathrm{Dom}(A_1)\cap L^\infty$ であり

$$A_1(F(f_1,\dots,f_n)) = \sum_i \partial_i F(f_1,\dots,f_n)A_1 f_i + \sum_{i,j}\partial_i\partial_j F(f_1,\dots,f_n)\Gamma(f_i,f_j)$$

が成り立つ. 更に $\partial_i F, \partial_i\partial_j F, i,j=1,\dots,n$ が全て有界であれば, $f_1,\dots,f_n \in \mathrm{Dom}(A_1)\cap \mathrm{Dom}(\mathcal{E})$ に対して $F(f_1,\dots,f_n)\in \mathrm{Dom}(A_1)\cap\mathrm{Dom}(\mathcal{E})$ であって上の等式が成立する.

この証明については Bouleau-Hirsch [18, Chapter I, §5] を参照. 特に次の等式がよく使われる: $f, g \in \mathrm{Dom}(\mathcal{E})\cap L^\infty$, $h\in \mathrm{Dom}(\mathcal{E})$ に対して

$$\Gamma(fg,h) = f\Gamma(g,h) + g\Gamma(f,h).$$

また (2) のことを使えば次の命題は容易に得られる.

命題 2.5. $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を $F(0)=0$ となる C^1 関数で, F' が単調増大であるものとする. このとき $f \in \mathrm{Dom}(A_1)$ に対し $A_2F(f) - F'(f)A_1 f \le 0$ が成立する. 但しこの不等号は $g \in G_\alpha(L^1_+ \cap L^\infty_+)$ に対して

$$\langle F(f), A_1 g\rangle - \langle F'(f)A_1 f, g\rangle \le 0 \tag{2.11}$$

が成立していることを意味する.

さて、以上の準備の下で, ここでの主定理は次の通りである.

定理 2.6. (Γ), (L) とさらに次を仮定する.

(1) $u \in \mathrm{Dom}(\vec{\mathcal{E}})$ ならば $|u| \in \mathrm{Dom}(\mathcal{E})$ であり

$$\mathcal{E}(|u|,|u|) \le \vec{\mathcal{E}}(u,u) + \lambda\|u\|_2^2.$$

(2) $u \in \mathrm{Dom}(\vec{\mathcal{E}})\cap L^\infty$, $f\in\mathrm{Dom}(\mathcal{E})\cap L^\infty$ なら $fu \in \mathrm{Dom}(\vec{\mathcal{E}})\cap L^\infty$.

(3) $u \in \mathrm{Dom}(\vec{\mathcal{E}})\cap L^\infty$ と $g \in \mathrm{Dom}(\mathcal{E})\cap L^\infty_+$ に対し

$$\mathcal{E}(|u|, g|u|) \le \vec{\mathcal{E}}(u, gu) + \lambda\langle g, |u|^2\rangle. \tag{2.12}$$

このとき $u \in \mathrm{Dom}(\vec{A}_2)$ に対して $A_2|u| \geq \Re((\vec{A}-\lambda)u, \operatorname{sgn} u)_K$ が distribution の意味で成り立ち，特に定理 1.4 の仮定が満たされる．

証明 $\lambda = 0$ の時に示せば良い．$u \in \mathrm{Dom}(A_2) \cap L^\infty$ を任意にとる．$\varepsilon > 0$ に対して $|u|_\varepsilon = \sqrt{|u|^2+\varepsilon^2}$ と定める．$1/|u|_\varepsilon \in \mathrm{Dom}(\mathcal{E})$ である．$g \in \mathrm{Dom}(A_2) \cap L_+^\infty$ に対し (2.12) において $f = g/|u|_\varepsilon$ とすれば，

$$
\begin{aligned}
\langle g\frac{u}{|u|_\varepsilon}, A_2 u\rangle &= -\vec{\mathcal{E}}(g\frac{u}{|u|_\varepsilon}, u) \\
&\leq -\mathcal{E}(g\frac{|u|}{|u|_\varepsilon}, |u|) \\
&= -\int_X \Gamma(g\frac{|u|}{|u|_\varepsilon}, |u|)dm \quad (\because (2.10)) \\
&= -\int_X \Big\{g|u|\Big(-\frac{|u|}{|u|_\varepsilon^3}\Gamma(|u|,|u|) + \frac{g}{|u|_\varepsilon}\Gamma(|u|,|u|) + \frac{|u|}{|u|_\varepsilon}\Gamma(g,|u|)\Big\}dm \\
&= -\int_X \Big\{g\frac{\varepsilon^2}{|u|_\varepsilon^3}\Gamma(|u|,|u|) + \frac{|u|}{|u|_\varepsilon}\Gamma(g,|u|)\Big\}dm \\
&\leq -\int_X \frac{|u|}{|u|_\varepsilon}\Gamma(g,|u|)dm.
\end{aligned}
$$

$\varepsilon \to 0$ とすると

$$\int_X \frac{|u|}{|u|_\varepsilon}\Gamma(g,|u|)dm \to \int_X 1_{\{u\neq 0\}}\Gamma(g,|u|)dm.$$

一方，Γ の derivation property より

$$\Gamma(|u|^{1+\varepsilon}, |u|^{1+\varepsilon}) = (1+\varepsilon)^2|u|^{2\varepsilon}\Gamma(|u|,|u|).$$

ゆえに

$$1_{\{u=0\}}\Gamma(|u|^{1+\varepsilon}, |u|^{1+\varepsilon}) = 0$$

を得る．$\varepsilon \to 0$ とすれば

$$1_{\{u=0\}}\Gamma(|u|,|u|) = 0.$$

Schwarz の不等式 $|\Gamma(g,|u|)| \leq \Gamma(g,g)^{1/2}\Gamma(|u|,|u|)^{1/2}$ から

$$1_{\{u=0\}}\Gamma(g,|u|) = 0$$

が従うので，結局

$$\langle g \operatorname{sgn} u, A_2 u\rangle \leq -\int_X \Gamma(g,|u|)dm = -\mathcal{E}(g,|u|) = \langle A_2 g, |u|\rangle$$

を得る．$g \in \mathrm{Dom}(A_2) \cap L_+^2$ に対して上の不等式が成立することをみるには $n \in \mathbb{N}$ について $\alpha G_\alpha(g \wedge n) \in \mathrm{Dom}(A_2) \cap L_+^\infty$ であることに注意し，まず $n \to \infty$, 次に $\alpha \to \infty$ とすれば良い． ■

$\vec{\Gamma}$ についての条件を導入する．これは $\vec{\Gamma}$ の derivation property と関連している．

$(\vec{D})$ $u,v\in\mathrm{Dom}(\vec{\mathcal{E}})\cap L^\infty$, $f\in\mathrm{Dom}(\mathcal{E})\cap L^\infty$ に対し，$(u|v)_K\in\mathrm{Dom}(\mathcal{E})$, $fu\in\mathrm{Dom}(\vec{\mathcal{E}})$ であり

$$2f\vec{\Gamma}(u,v)=-\Gamma(f,(u|v)_K)+\vec{\Gamma}(u,fv)+\vec{\Gamma}(fu,v) \tag{2.13}$$

が成立する．

一方，$\vec{\Gamma}$ の定義より $u,v\in\mathrm{Dom}(\vec{A}_2)\cap L^\infty$ と $f\in\mathrm{Dom}(\mathcal{E})\cap L^\infty$ に対して

$$2f\vec{\Gamma}(u,v)=fA_1(u|v)_K-f(A_2u|v)_K-f(u|A_2v)_K$$

であるから，X 上で積分すると

$$\int_X 2f\vec{\Gamma}(u,v)dm=-\mathcal{E}(f,(v|u)_K)+\vec{\mathcal{E}}(u,fv)+\vec{\mathcal{E}}(fu,v) \tag{2.14}$$

を得る．この等式は $u,v\in\mathrm{Dom}(\vec{\mathcal{E}})\cap L^\infty$, $f\in\mathrm{Dom}(\mathcal{E})\cap L^\infty$ で成立する．

(2.13) に戻って $u=v$ とし，X 上で積分すると

$$\int_X 2f\vec{\Gamma}(u,u)dm=-\mathcal{E}(f,|u|^2)+2\int_X\vec{\Gamma}(fu,u).$$

(2.14)と比べて

$$\int_X\vec{\Gamma}(fu,u)dm=\vec{\mathcal{E}}(fu,u)$$

を得る．polarization により

$$\int_X\vec{\Gamma}(fu,v)dm=\vec{\mathcal{E}}(fu,v) \tag{2.15}$$

が従う．

次に定理 2.6 の条件が成立するための十分条件を与える．

定理 2.7. (Γ), (L), $(\vec{\Gamma})_\lambda$, $(\vec{D})$ を仮定すると，$u\in\mathrm{Dom}(\vec{\mathcal{E}})$ に対して $|u|\in\mathrm{Dom}(\mathcal{E})$ であり

$$\Gamma(|u|,|u|)\le\vec{\Gamma}(u,u)+\lambda|u|^2 \tag{2.16}$$

が成り立つ．また，$f\in\mathrm{Dom}(\mathcal{E})\cap L^\infty$，$u\in\mathrm{Dom}(\vec{\mathcal{E}})\cap L^\infty$ に対しては

$$\{\vec{\Gamma}(fu,fu)+\lambda f^2|u|^2\}^{1/2}\le|f|\{\vec{\Gamma}(u,u)+\lambda|u|^2\}^{1/2}+|u|\Gamma(f,f)^{1/2} \tag{2.17}$$

である．更に定理 2.6 の条件が満たされる．

証明 簡単のため $\lambda=0$ の場合に証明を与える．$u\in\mathrm{Dom}(\vec{\mathcal{E}})\cap L^\infty$ と $f\in\mathrm{Dom}(\mathcal{E})\cap L^\infty$ をとる．仮定より $v=fu\in\mathrm{Dom}(\vec{\mathcal{E}})$ であり (2.13) での v をこれにとると

$$\vec{\Gamma}(fu,fu)+\vec{\Gamma}(u,f^2u)=2f\vec{\Gamma}(u,fu)+\Gamma(f,f|u|^2)$$

を得る．従って

$$\begin{aligned}\vec{\Gamma}(fu,fu)&=-\vec{\Gamma}(u,f^2u)+2f\vec{\Gamma}(u,fu)+\Gamma(f,f|u|^2)\\&=-f^2\vec{\Gamma}(u,u)-\frac{1}{2}\Gamma(f^2,|u|^2)+f\{2f\vec{\Gamma}(u,u)+\Gamma(f,|u|^2)\}+\Gamma(f,f|u|^2)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= f^2\vec{\Gamma}(u,u) - f\Gamma(f,|u|^2) + f\Gamma(f,|u|^2) + \Gamma(f,f|u|^2)\\
&= f^2\vec{\Gamma}(u,u) + \Gamma(f,f|u|^2)\\
&= f^2\vec{\Gamma}(u,u) + f\Gamma(f,|u|^2) + |u|^2\Gamma(f,f).
\end{aligned} \tag{2.18}
$$

である．特に $f = |u|^2$ とすれば

$$
\vec{\Gamma}(|u|^2u, |u|^2u) = |u|^4\vec{\Gamma}(u,u) + 2|u|^2\Gamma(|u|^2,|u|^2) \tag{2.19}
$$

となる．一方，(2.13) において $v = u$, $f = |u|^2$ とすれば，

$$
2|u|^2\vec{\Gamma}(u,u) + \Gamma(|u|^2,|u|^2) = 2\vec{\Gamma}(|u|^2u,u).
$$

両辺を 2 乗すると

$$
\begin{aligned}
4|u|^4\vec{\Gamma}(u,u)^2 &+ 4|u|^2\vec{\Gamma}(u,u)\Gamma(|u|^2,|u|^2) + \Gamma(|u|^2,|u|^2)^2\\
&= 4\vec{\Gamma}(|u|^2u,u)^2\\
&\le 4\vec{\Gamma}(|u|^2u,|u|^2u)\vec{\Gamma}(u,u) \quad (\text{Schwarz の不等式より})\\
&= 4\{|u|^4\vec{\Gamma}(u,u) + 2|u|^2\Gamma(|u|^2,|u|^2)\}\vec{\Gamma}(u,u) \quad (\because\ (2.19))\\
&= 4|u|^4\vec{\Gamma}(u,u)^2 + 8|u|^2\Gamma(|u|^2,|u|^2)\vec{\Gamma}(u,u)
\end{aligned}
$$

となるから結局

$$
\Gamma(|u|^2,|u|^2) \le 4|u|^2\vec{\Gamma}(u,u) \tag{2.20}
$$

を得る．次に $\varepsilon > 0$ に対して $\varphi_\varepsilon(t) = \sqrt{t+\varepsilon^2} - \varepsilon$ とおく．すると derivation property と (2.20) から

$$
\Gamma(\varphi_\varepsilon(|u|^2),\varphi_\varepsilon(|u|^2)) \le \frac{1}{4(|u|^2+\varepsilon^2)}\Gamma(|u|^2,|u|^2) \le \frac{4|u|^2}{4(|u|^2+\varepsilon^2)}\vec{\Gamma}(u,u) \le \vec{\Gamma}(u,u)
$$

となる．$\varepsilon \to 0$ とすることで $|u| \in \mathrm{Dom}(\mathcal{E})$ と

$$
\Gamma(|u|,|u|) \le \vec{\Gamma}(u,u).
$$

を得る．実際，0 に収束する数列 $\{\varepsilon_n\}$ で $\{\varphi_{\varepsilon_n}(|u|^2)\}$ の Cesaro mean が $\mathrm{Dom}(\mathcal{E})$ で $|u|$ に収束するものをとって考えれば良い．(2.18)に戻れば

$$
\begin{aligned}
\vec{\Gamma}(fu,fu) &= f^2\vec{\Gamma}(u,u) + f\Gamma(f,|u|^2) + |u|^2\Gamma(f,f)\\
&\le f^2\vec{\Gamma}(u,u) + 2f|u|\Gamma(f,f)\vec{\Gamma}(u,u) + |u|^2\Gamma(f,f)\\
&= \{|f|\vec{\Gamma}(u,u)^{1/2} + |u|\Gamma(f,f)^{1/2}\}^2
\end{aligned}
$$

となって (2.17) が従う．

Sem. on Probab.
Vol.58 1995年
P1-115

最後に定理 2.6 の条件が成立することを確かめる．(1) は (2.16) よりいえる．(2) はすでに仮定している．(3) を示そう．$f \in \mathrm{Dom}(\mathcal{E}) \cap L^\infty_+$ と $u \in \mathrm{Dom}(\vec{\mathcal{E}}) \cap L^\infty$ に対して，$(\vec{D})$ と (2.15), (2.16) から

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{E}}(fu,u) &= \int_X \vec{\Gamma}(fu,u)dm \\ &= \int_X \{f\vec{\Gamma}(u,u) + \frac{1}{2}\Gamma(f,|u|^2)\}dm \\ &\geq \int_X \{f\Gamma(|u|,|u|) + |u|\Gamma(f,|u|)\}dm \\ &= \int_X \Gamma(f|u|,|u|)dm \\ &= \mathcal{E}(f|u|,|u|)\end{aligned}$$

となる．これで主張が示せた． ■

次の命題は，$(\vec{\Gamma})_\lambda$, $(\vec{D})$ の成立を確かめるには core の元を調べればよいことを示している．

命題 2.8. (Γ), (L) を仮定する．さらに次の条件を満たす多元環 $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{Dom}(\mathcal{E}) \cap L^\infty$ と部分空間 $\mathcal{D} \subseteq \mathrm{Dom}(\vec{A}_2) \cap L^\infty$ の存在を仮定する：$f \in \mathcal{C}$ と $u, v \in \mathcal{D}$ に対して $(u|v)_K \in \mathrm{Dom}(A_1) \cap L^\infty$, $fu \in \mathcal{D}$,

$$2f\vec{\Gamma}(u,v) = -\Gamma(f,(u|v)_K) + \vec{\Gamma}(fu,v) + \vec{\Gamma}(u,fv) \tag{2.21}$$

$$\vec{\Gamma}(u,u) + \lambda|u|^2 \geq 0 \tag{2.22}$$

が成立し，更に $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ はそれぞれ $\mathcal{E}$, $\vec{\mathcal{E}}$ の core．この時 $(\vec{\Gamma})_\lambda$ と $(\vec{D})$ が成り立つ．

証明　$u \in \mathcal{D}$, $f \in \mathcal{C}$ をとる．仮定より $v = fu \in \mathcal{D}$ である．定理 2.7 の証明と同様にして，

$$\begin{aligned}\vec{\Gamma}(fu,fu) &= f^2\vec{\Gamma}(u,u) + f\Gamma(f,|u|^2) + |u|^2\Gamma(f,f) \\ &\leq f^2\vec{\Gamma}(u,u) + |f|\Gamma(f,f)^{1/2}\Gamma(|u|^2,|u|^2)^{1/2} + |u|^2\Gamma(f,f)\end{aligned}$$

を得る．これより

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{E}}(fu,fu) &\leq 2\int_X \vec{\Gamma}(fu,fu)dm \\ &\leq 2\|f\|_\infty^2 \int_X \vec{\Gamma}(u,u)dm + 2\|f\|_\infty \int_X \Gamma(f,f)^{1/2}\Gamma(|u|^2,|u|^2)^{1/2}dm \\ &\quad + 2\|u\|_\infty^2 \int_X \Gamma(f,f)dm \\ &\leq 2\|f\|_\infty^2 \int_X \vec{\Gamma}(u,u)dm + 2\|f\|_\infty \Big\{\int_X \Gamma(f,f)dm\Big\}^{1/2}\Big\{\int_X \Gamma(|u|^2,|u|^2)dm\Big\}^{1/2} \\ &\quad + 2\|u\|_\infty^2 \int_X \Gamma(f,f)dm \\ &\leq 2\|f\|_\infty^2 \vec{\mathcal{E}}(u,u) + 2\|f\|_\infty \mathcal{E}(f,f)^{1/2}\mathcal{E}(|u|^2,|u|^2)^{1/2} + 2\|u\|_\infty^2 \mathcal{E}(f,f).\end{aligned}$$

Sem. on Probab.
Vol.58 1995年
P1-115

$f \in \mathrm{Dom}(\mathcal{E}) \cap L^\infty$, $u \in \mathcal{D}$ に対して $fu \in \mathrm{Dom}(\vec{\mathcal{E}})$ であり (2.21), (2.22) が成り立つことを示そう．$f \in \mathcal{C}$ を任意にとる．C^1 関数 $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対して 1 階微分まで F にコンパクト一様収束する多項式近似列 $\{P_n\}$ をとると，$\vec{\mathcal{E}}(P_n(f)u, P_n(f)u)$ は有界で $P_n(f)u$ は L^2 の意味で $F(f)u$ に収束するので，$F(f)u \in \mathrm{Dom}(\vec{\mathcal{E}})$ であり，更に次式が成立する．

$$\vec{\Gamma}(F(f)u, v) + \vec{\Gamma}(u, F(f)v) = 2F(f)\vec{\Gamma}(u,v) + \Gamma(F(f), (u|v)_K),$$

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{E}}(F(f)u, F(f)u) \le 2\|F(f)\|_\infty^2 \vec{\mathcal{E}}(u,u) + 2\|F(f)\|_\infty \mathcal{E}(F(f)f, F(f)f)^{1/2}\mathcal{E}(|u|^2, |u|^2)^{1/2} \\ + 2\|u\|_\infty^2 \mathcal{E}(F(f)f, F(f)).\end{aligned} \tag{2.23}$$

任意の $f \in \mathrm{Dom}(\mathcal{E}) \cap L^\infty$ に対して $|t| \le \|f\|_\infty$ では $\varphi(t) = t$ であるような有界な C^1 関数 φ をとる．$\{f_n\} \subseteq \mathcal{C}$ を $\mathrm{Dom}(\mathcal{E})$ で f に収束する関数列とする．$\{\varphi(f_n)\}$ は一様に有界であり，$\varphi(f_n)$ は $\mathrm{Dom}(\mathcal{E})$ で f に弱収束する．さらに (2.23) より $\sup_n \vec{\mathcal{E}}(\varphi(f_n)u, \varphi(f_n)u) < \infty$ であるから，部分列 $\{\varphi(f_{n_j})u\}$ で Cesaro mean が $\mathrm{Dom}(\vec{\mathcal{E}})$ で強収束するものがとれる．このことと $\varphi(f_n)u \to fu$ in L^2 をあわせれば，$f \in \mathrm{Dom}(\mathcal{E}) \cap L^\infty$ と $u \in \mathcal{D}$ に対して $fu \in \mathrm{Dom}(\vec{\mathcal{E}})$ であり，(2.21) と (2.22) が成立することがわかる．

(2.21) は $u, v \in \mathcal{D}$，$f \in \mathrm{Dom}(\mathcal{E}) \cap L^\infty$ で成り立つので $f = |u|^2$ ととれる．定理 2.7 の証明における議論を繰り返すことによって，$u \in \mathcal{D}$, $f \in \mathrm{Dom}(\mathcal{E}) \cap L^\infty$ に対し $fu \in \mathrm{Dom}(\vec{\mathcal{E}})$ であって

$$\begin{aligned}\vec{\Gamma}(fu, fu)^{1/2} &\le |f|\vec{\Gamma}(u,u)^{1/2} + |u|\Gamma(f,f)^{1/2}, \\ \Gamma(|u|, |u|) &\le \vec{\Gamma}(u,u)\end{aligned} \tag{2.24}$$

となることがわかる．$\mathcal{D}$ は $\mathrm{Dom}(\vec{\mathcal{E}})$ で稠密であるから(2.24) は $u \in \mathrm{Dom}(\vec{\mathcal{E}})$ で成り立つ．

これで (2.21) が $f \in \mathrm{Dom}(\mathcal{E}) \cap L^\infty$ と $u \in \mathrm{Dom}(\vec{\mathcal{E}}) \cap L^\infty$ に対して成り立つことが示せた．$u \in \mathcal{D}$ をとり，$\varepsilon > 0$ に対して

$$\psi_\varepsilon(t) = \frac{1}{1+\varepsilon t}, \quad t \in [0, \infty)$$

とおく．$\psi_\varepsilon' = -\dfrac{\varepsilon}{(1+\varepsilon t)^2}$ である．$\psi_\varepsilon(|u|) \in \mathrm{Dom}(\mathcal{E})$ ゆえ $\psi_\varepsilon(|u|)u \in \mathrm{Dom}(\vec{\mathcal{E}})$ であり，

$$\begin{aligned}&\vec{\Gamma}(f\psi_\varepsilon(|u|)u, f\psi_\varepsilon(|u|)u)^{1/2} \\ &\quad\le |f|\psi_\varepsilon(|u|)\vec{\Gamma}(u,u)^{1/2} + |u|\Gamma(f\psi_\varepsilon(|u|), f\psi_\varepsilon(|u|))^{1/2} \\ &\quad\le |f|\psi_\varepsilon(|u|)\vec{\Gamma}(u,u)^{1/2} + |u|\{\psi_\varepsilon(|u|)^2\Gamma(f,f) + 2\psi_\varepsilon(|u|)\psi_\varepsilon'(|u|)f\Gamma(|u|, f) \\ &\qquad\qquad + f^2\psi_\varepsilon'(|u|)^2\Gamma(|u|,|u|)\}^{1/2} \\ &\quad\le |f|\psi_\varepsilon(|u|)\vec{\Gamma}(u,u)^{1/2} + |u|\{\psi_\varepsilon(|u|)^2\Gamma(f) + 2\psi_\varepsilon(|u|)\psi_\varepsilon'(|u|)|f|\Gamma(|u|,|u|)^{1/2}\Gamma(f,f)^{1/2} \\ &\qquad\qquad + f^2\psi_\varepsilon'(|u|)^2\Gamma(|u|,|u|)\}^{1/2} \\ &\quad\le |f|\psi_\varepsilon(|u|)\vec{\Gamma}(u,u)^{1/2} + |u|\psi_\varepsilon(|u|)\Gamma(f,f)^{1/2} \\ &\qquad + 2\psi_\varepsilon(|u|)|\psi_\varepsilon'(|u|)||f|\Gamma(|u|,|u|)^{1/2}\Gamma(f,f)^{1/2} + f^2|\psi_\varepsilon'(|u|)|^2\Gamma(|u|,|u|)\}^{1/2}\end{aligned}$$

$$\leq |f|\psi_\varepsilon(|u|)\vec{\Gamma}(u,u)^{1/2} + |u|\psi_\varepsilon(|u|)\Gamma(f,f)^{1/2} + |u||f||\psi'_\varepsilon(|u|)|\vec{\Gamma}(u,u)^{1/2}.$$

任意の $v \in \mathrm{Dom}(\vec{\mathcal{E}}) \cap L^\infty$ に対して $\mathrm{Dom}(\vec{\mathcal{E}})$ で v に収束する列 $\{u_n\} \subseteq \mathcal{D}$ をとると，上の評価式から

$$\sup_n \vec{\mathcal{E}}(f\psi_\varepsilon(|u_n|)u_n, f\psi_\varepsilon(|u_n|)u_n) < \infty$$

である．Banach-Saks の定理より，必要に応じて部分列をとることで $\{f\psi_\varepsilon(|u_n|)u_n\}$ の Cesaro mean が $\mathrm{Dom}(\vec{\mathcal{E}})$ で $f\psi_\varepsilon(|u|)u$ に収束する．更に

$$\begin{aligned}
&\vec{\Gamma}\Big(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\psi_\varepsilon(|u_k|)u_k, \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\psi_\varepsilon(|u_k|)u_k\Big)^{1/2} \\
&\quad\leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \vec{\Gamma}(f\psi_\varepsilon(|u_k|)u_k, f\psi_\varepsilon(|u_k|)u_k)^{1/2} \\
&\quad\leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \{|f|\psi_\varepsilon(|u_k|)\vec{\Gamma}(u_k,u_k)^{1/2} + |u_k|\psi_\varepsilon(|u_k|)\Gamma(f,f)^{1/2} + |u_k||f||\psi'_\varepsilon(|u_k|)|\vec{\Gamma}(u_k,u_k)^{1/2}\}
\end{aligned}$$

に注意して $n \to \infty$ とすれば，$v \in \mathrm{Dom}(\vec{\mathcal{E}}) \cap L^\infty$ に対して

$$\begin{aligned}
\vec{\Gamma}(f\psi_\varepsilon(|u|)v, f\psi_\varepsilon(|v|)v)^{1/2} &\leq |f|\psi_\varepsilon(|v|)\vec{\Gamma}(v,v)^{1/2} + |v|\psi_\varepsilon(|v|)\Gamma(f,f)^{1/2} \\
&\quad + |v||f||\psi'_\varepsilon(|v|)|\vec{\Gamma}(v,v)^{1/2}
\end{aligned}$$

となる．次に $\varepsilon \to 0$ とすれば，$fv \in \mathrm{Dom}(\vec{\mathcal{E}})$ であり

$$\vec{\Gamma}(fv, fv)^{1/2} \leq |f|\vec{\Gamma}(v,v)^{1/2} + |v|\Gamma(f,f)^{1/2}$$

が従う．これより $\mathrm{Dom}(\vec{\mathcal{E}}) \cap L^\infty$ は $\mathrm{Dom}(\mathcal{E}) \cap L^\infty$-module となることが分かる．

最後に (2.21) が $u, v \in \mathrm{Dom}(\vec{\mathcal{E}}) \cap L^\infty$，$f \in \mathrm{Dom}(\mathcal{E})$ で成り立つことを見る．まず次の等式が成立することに注意する: $u, v \in \mathcal{D}$，$f, \psi \in \mathrm{Dom}(\mathcal{E})$ に対して

$$\vec{\Gamma}(f\psi u, v) + \vec{\Gamma}(\psi u, fv) = 2f\vec{\Gamma}(\psi u, v) + \Gamma(f, (\psi u|v)_K).$$

この等式は $\psi \in \mathcal{C}$ の時は仮定より明らかである．極限をとることにより，これは $\psi \in \mathrm{Dom}(\mathcal{E}) \cap L^\infty$ で成り立つ．この式を使って上の議論を繰り返せば $(\vec{D})$ が成立することが分かる．

$(\Gamma)_\lambda$ が成立することは，命題 2.2 の議論を繰返せばよい． ■

次に Bakry-Emery [17] によって導入された Γ_2 について述べる．まず次の条件を仮定する．

(Γ_2) $f, g \in \mathrm{Dom}(A_2^{3/2})$ に対して $\Gamma(f,g) \in \mathrm{Dom}(A_1)$ となる．

このとき，Γ_2 を次のように定める：

$$\Gamma_2(f,g) = \frac{1}{2}\{A_1\Gamma(f,g) - \Gamma(A_2f, g) - \Gamma(f, A_2g)\}. \tag{2.25}$$

Sem. on Probab.
Vol.58 1995年
P1-115

両辺を積分して (2.10) を使えば

$$\int_X \Gamma_2(f,g)dm = \frac{1}{2}\int_X A_1\Gamma(f,g)dm + \int_X A_2 f \cdot A_2 g dm \tag{2.26}$$

が従う．さらに (2.6) から

$$\int_X \Gamma_2(f,f)dm \leq \|A_2 f\|_2^2. \tag{2.27}$$

が成立していることが分かる．ここでさらに次の仮定を入れる．

$(BE)_\gamma$ ある定数 γ が存在し，任意の $f \in \mathrm{Dom}(A_2^{3/2})$ に対して次が成立する：

$$\Gamma_2(f,f) + \gamma\Gamma(f,f) \geq 0. \tag{2.28}$$

この条件の下で，まず次の Schwarz の不等式が成立する．

$$|\Gamma_2(f,g) + \gamma\Gamma(f,g)| \leq \{\Gamma_2(f,f)+\gamma\Gamma(f,f)\}^{1/2}\{\Gamma_2(g,g)+\gamma\Gamma(g,g)\}^{1/2}. \tag{2.29}$$

(2.27) と合せれば，Γ_2 は $\mathrm{Dom}(A_2)\times\mathrm{Dom}(A_2)$ から L^1 への双線形形式に拡張できることが分かる．

命題 2.4 と同様に，条件 (Γ_2), $(BE)_\gamma$ は $\mathrm{Dom}(A_2^{3/2})$ の稠密な部分空間 $\mathcal{C}$ で成立すればよい．例えば，$\mathcal{C}$ が多元環で A_2 の作用で閉じており (i.e., $A_2\,\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}$)，しかも $\mathrm{Dom}(A_2^{3/2})$ で稠密な場合を考えよう．このとき $f,g\in\mathcal{C}$ に対し，$\Gamma(f,g)\in\mathcal{C}$ となるから (Γ_2) が $\mathcal{C}$ 上で成立することが分かる．あと $(BE)_\gamma$ が $\mathcal{C}$ 上で確かめられればよい．あとで出てくるが，抽象 Wiener 空間上の Ornstein-Uhlenbeck 作用素などはこうした形で条件の成立が確かめられる．

対数 Sobolev 不等式との関連を述べるために次を準備する．

定理 2.9. もし定数 $\gamma\in\mathbb{R}$ で

$$\Gamma_2(f,f) + \gamma\Gamma(f,f) \geq 0 \tag{2.30}$$

を満たすものが存在すれば

$$\Gamma(T_t f, T_t f)^{1/2} \leq e^{\gamma t} T_t \Gamma(f,f)^{1/2}, \quad t\in[0,\infty) \tag{2.31}$$

が成立する．

証明　$g\in G_\alpha(L^1\cap L^\infty)\cap L^\infty_+$ を任意に取り

$$\Phi(s) = \langle \varepsilon^{-\gamma s}\Gamma(T_s f, T_s f)^{1/2}, T_{t-s} g\rangle, \qquad s\in[0,t]$$

とおく．$\Phi(t)\leq\Phi(0)$ を示そう．

まず Φ を近似する．任意の $\varepsilon>0$ に対して

$$\varphi_\varepsilon(x) = \sqrt{x+\varepsilon^2} - \varepsilon$$

とおき

$$\Phi_\varepsilon(s) = \langle e^{-\gamma s}\varphi_\varepsilon(\Gamma(T_s f, T_s f), T_{t-s} g\rangle.$$

と定める．$\varphi'_\varepsilon(x) = 1/(2\sqrt{x+\varepsilon^2})$ であるから φ'_ε は連続で有界: $\|\varphi'_\varepsilon\|_\infty \le 1/(2\varepsilon)$. ここで平均値の定理から

$$|\varphi_\varepsilon(y) - \varphi_\varepsilon(x) - \varphi'_\varepsilon(x)(y-x)| \le F_\varepsilon(x,y)|y-x|.$$

ここに

$$F_\varepsilon(x,y) = \max_{0\le\theta\le1}\{|\varphi'_\varepsilon(x+\theta(y-x)) - \varphi'_\varepsilon(x)|\}.$$

これから

$$\begin{aligned}&|\varphi_\varepsilon(\Gamma(T_{s+\sigma} f, T_{s+\sigma} f) - \varphi_\varepsilon(\Gamma(T_s f, T_s f) - \varphi'_\varepsilon(\Gamma(T_s f, T_s f))(\Gamma(T_{s+\sigma} f, T_{s+\sigma} f) - \Gamma(T_s f, T_s f))| \\ &\quad\le F_\varepsilon(\Gamma(T_s f, T_s f), \Gamma(T_{s+\sigma} f, T_{s+\sigma} f))|\Gamma(T_{s+\sigma} f, T_{s+\sigma} f) - \Gamma(T_s f, T_s f)|.\end{aligned}$$

一方 $\mathrm{Dom}(\mathcal{E})$ の位相で

$$\lim_{\sigma\to0}\frac{T_{s+\sigma} f - T_s f}{\sigma} = AT_s f \quad \text{in } \mathrm{Dom}(\mathcal{E}).$$

である．実際

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(&\frac{T_{s+\sigma} f - T_s f}{\sigma} - AT_s f|\frac{T_{s+\sigma} f - T_s f}{\sigma} - AT_s f) \\ &= \left(\frac{AT_{s+\sigma} f - AT_s f}{\sigma} - A^2 T_s f\middle|\frac{T_{s+\sigma} f - T_s f}{\sigma} - AT_s f\right) \\ &\to 0 \quad \text{as } \sigma\to0.\end{aligned}$$

ここで $AT_s f \in \mathrm{Dom}(A)$ であることを使っている．これらを合せて

$$\begin{aligned}\lim_{\sigma\to0}\frac{\Gamma(T_{s+\sigma} f, T_{s+\sigma} f) - \Gamma(T_s f, T_s f)}{\sigma} &= \lim_{\sigma\to0}\Gamma(\frac{T_{s+\sigma} f - T_s f}{\sigma}, T_s f) + \Gamma(T_{s+\sigma} f, \frac{T_{s+\sigma} f - T_s f}{\sigma}) \\ &= \Gamma(AT_s f, T_s f) + \Gamma(T_s f, AT_s f) \\ &= 2\Gamma(AT_s f, T_s f) \quad \text{in } L^1\end{aligned}$$

が従う．いま $u_n \to u$ a.e., $\sup_n \|u_n\|_\infty < \infty$ で $v_n \to v$ in L^1 のとき $u_n v_n \to uv$ in L^1 となることに注意する．$\|F_\varepsilon\|_\infty \le 1/\sqrt{\varepsilon}$ および $\lim_{y\to x} F_\varepsilon(x,y) = 0$ から

$$\lim_{\sigma\to0}\frac{1}{\sigma}F_\varepsilon(\Gamma(T_s f, T_s f), \Gamma(T_{s+\sigma} f, T_{s+\sigma} f))|\Gamma(T_{s+\sigma} f, T_{s+\sigma} f) - \Gamma(T_s f, T_s f)| = 0 \quad \text{in } L^1$$

であり，上のことが使えて

$$\begin{aligned}&\lim_{\sigma\to0}\frac{\varphi_\varepsilon(\Gamma(T_{s+\sigma} f, T_{s+\sigma} f)) - \varphi_\varepsilon(\Gamma(T_s f, T_s f))}{\sigma} \\ &\quad= \lim_{\sigma\to0}\varphi'_\varepsilon(\Gamma(T_s f, T_s f))\frac{\Gamma(T_{s+\sigma} f, T_{s+\sigma} f) - \Gamma(T_s f, T_s f)}{\sigma} \\ &\quad= \varphi'_\varepsilon(\Gamma(T_s f, T_s f))2\Gamma(AT_s f, T_s f) \quad \text{in } L^1\end{aligned}$$

を得る．これから

$$\begin{aligned}\Phi_\varepsilon'(s) &= \lim_{\sigma\to 0}\frac{\Phi_\varepsilon(s+\sigma)-\Phi_\varepsilon(s)}{\sigma}\\ &= \lim_{\sigma\to 0}\left\{\left\langle\frac{e^{-\gamma s+\sigma}\varphi_\varepsilon(\Gamma(T_{s+\sigma}f,T_{s+\sigma}f)-e^{-\gamma s}\varphi_\varepsilon(\Gamma(T_sf,T_sf)}{\sigma},T_{t-s-\sigma}g\right\rangle\right.\\ &\quad\left.-\left\langle e^{-\gamma s}\varphi_\varepsilon(\Gamma(T_sf,T_sf),\frac{T_{t-s-\sigma}g-T_{t-s}g}{\sigma}\right\rangle\right\}\\ &= \langle-\gamma e^{-\gamma s}\varphi_\varepsilon(\Gamma(T_sf,T_sf))+e^{-\gamma s}\varphi_\varepsilon'(\Gamma(T_sf,T_s))2\Gamma(AT_sf,T_sf),T_{t-s}g\rangle\\ &\quad-\langle e^{-\gamma s}\varphi_\varepsilon(\Gamma(T_sf,T_sf)),AT_{t-s}g\rangle\end{aligned}$$

が得られる．

さて φ_ε' は単調増大だから命題 2.5 から

$$\langle\varphi_\varepsilon(\Gamma(T_sf,T_sf)),AT_{t-s}g\rangle\le\langle\varphi_\varepsilon'(\Gamma(T_sf,T_sf))A\Gamma(T_sf,T_sf),T_{t-s}g\rangle$$

が従う．よって

$$\begin{aligned}\Phi_\varepsilon'(s) &\le \langle-\gamma e^{-\gamma s}\varphi_\varepsilon(\Gamma(T_sf,T_sf)+e^{-\gamma s}\varphi_\varepsilon'(\Gamma(T_sf,T_s))2\Gamma(AT_sf,T_sf),T_{t-s}g\rangle\\ &\quad-\langle e^{-\gamma s}\varphi_\varepsilon'(\Gamma(T_sf,T_sf))A\Gamma(T_sf,T_{t-s}g\rangle\\ &\le\left\langle e^{-\gamma s}\frac{-\gamma\{\Gamma(T_sf,T_sf)+\varepsilon^2-\varepsilon\sqrt{\Gamma(T_sf,T_sf)+\varepsilon^2}\}+2\Gamma(AT_sf,T_sf))}{2\sqrt{\Gamma(T_sf,T_sf)+\varepsilon^2}}\right.\\ &\quad\left.-\frac{A\Gamma(T_sf,T_sf))}{2\sqrt{\Gamma(T_sf,T_sf)+\varepsilon^2}},T_{t-s}g\right\rangle\\ &\le\left\langle e^{-\gamma s}\frac{-\gamma\{\Gamma(T_sf,T_sf)+\varepsilon^2-\varepsilon\sqrt{\Gamma(T_sf,T_sf)+\varepsilon^2}\}-\Gamma_2(T_sf,T_sf))}{2\sqrt{\Gamma(T_sf,T_sf)+\varepsilon^2}},T_{t-s}g\right\rangle\\ &\le\left\langle -e^{-\gamma s}\frac{\gamma\{\varepsilon^2-\varepsilon\sqrt{\Gamma(T_sf,T_sf)+\varepsilon^2}\}}{2\sqrt{\Gamma(T_sf,T_sf)+\varepsilon^2}},T_{t-s}g\right\rangle.\end{aligned}$$

結局

$$\Phi_\varepsilon(t)-\Phi_\varepsilon(0)\le\int_0^t\left\langle -e^{-\gamma s}\frac{\gamma\{\varepsilon^2-\varepsilon\sqrt{\Gamma(T_sf,T_sf)+\varepsilon^2}\}}{2\sqrt{\Gamma(T_sf,T_sf)+\varepsilon^2}},T_{t-s}g\right\rangle ds$$

が得られ $\varepsilon\to 0$ として最終的に求める結果

$$\Phi(t)-\Phi(0)\le 0$$

を得る． ■

上の命題を使って Bakry-Emery [17] による対数 Sobolev 不等式が成立するための十分条件を与えることが出来る．それを次に見よう．

定理 2.10. ある $\gamma < 0$ に対し $(BE)_\gamma$ を仮定する．さらに m は確率測度であり，定数関数が固有値 0 に対する一意的な固有関数であることを仮定する．このとき次の対数 Sobolev 不等式が成立する．

$$\int_X f^2 \log(f^2/\|f\|_2^2)dm \le -\frac{2}{\gamma}\mathcal{E}(f,f). \tag{2.32}$$

証明　一様に正の関数 $f \in \mathrm{Dom}(\mathcal{E})$ を取り $f_t = T_t f$ とおく．さらに関数 H を

$$H(t) = \int_X f_t \log f_t \, dm, \quad t \in [0,\infty)$$

と定義するとき

$$\begin{aligned} H'(t) &= \int_X A_2 f_t \log f_t dm + \int_X A_2 f_t \log f_t dm \\ &= -\int_X \Gamma(f_t, \log f_t) dm \\ &= -\int_X \frac{\Gamma(f_t,f_t)}{f_t} dm \\ &= -\mathcal{E}(f_t, \log f_t). \end{aligned}$$

0 に対する固有関数の一意性から

$$\lim_{t\to\infty} f_t \log f_t = \|f\|_1 \log \|f\|_1 \quad \text{in } L^1$$

が成立するから

$$\int_X f\log(f/\|f\|_1)dm = \int_0^\infty dt \int_X \frac{\Gamma(f_t,f_t)}{f_t} dm$$

が従う．

一方，定理 2.9 により

$$\begin{aligned} \Gamma(T_t f, T_t f) &\le e^{2\gamma t}\{T_t \Gamma(f,f)^{1/2}\}^2 \\ &\le e^{2\gamma t}\Big\{T_t\Big(f^{1/2}\frac{\Gamma(f,f)^{1/2}}{f^{1/2}}\Big)\Big\}^2 \\ &\le e^{2\gamma t} T_t f \, T_t\Big(\frac{\Gamma(f,f)}{f}\Big). \end{aligned}$$

従って

$$\int_X f\log(f/\|f\|_1)dm \le \int_0^\infty e^{2\gamma t}dt \int_X T_t\Big(\frac{\Gamma(f,f)}{f}\Big)dm = -\frac{1}{2\gamma}\int_X \Big(\frac{\Gamma(f,f)}{f}\Big)dm.$$

ここで一様に正である関数 $g \in \mathrm{Dom}(\mathcal{E}) \cap L^\infty$ に対して $f = \sqrt{g}$ とおけば

$$\begin{aligned} \int_X g^2 \log(g^2/\|g\|_2^2)dm &\le -\frac{1}{2\gamma}\int_X \Big(\frac{\Gamma(g^2,g^2)}{g^2}\Big)dm \\ &\le -\frac{4}{2\gamma}\int_X \Gamma(g,g)dm \end{aligned}$$

Sem. on Probab.
Vol.58 1995年
P1-115

$$\leq -\frac{2}{\gamma}\mathcal{E}(g,g).$$

次に $\mathrm{Dom}(\mathcal{E})_+$ の元に対して (2.32) を示すのは易しい．一般の元に対しては $\mathcal{E}$ が Dirichlet 形式だから，不等式 $\mathcal{E}(|g|,|g|) \leq \mathcal{E}(g,g)$ に注意すればよい． ■

3. 抽象 WIENER 空間の部分多様体

この節では，抽象 Wiener 空間の部分多様体について述べるが，その前にその入れ物となる抽象 Wiener 空間とその上の Sobolev 空間について説明を与えておく．

抽象 **Wiener** 空間とは，次の三つ組 (B,H,μ) を言う．B は，実可分な Banach 空間であって，Hilbert 空間 H が B に連続かつ稠密に埋め込まれている．また μ は

$$\hat{\mu}(\varphi) := \int_B e^{\sqrt{-1}_{B^*}\langle\varphi,x\rangle_B}\mu(dx) = \exp\left(-\frac{|\varphi|_{H^*}^2}{2}\right)$$

という特性関数を持つ B 上の確率測度である．ここで，$\varphi \in B^* \hookrightarrow H^*$ とみなしている．

例 3.1. (Classical Wiener space) 次の 3 組は古典的な Wiener 空間である．

$$B = \{x \in C([0,1] \to R^d); x(0) = 0\}$$

$$H = \{h \in C([0,1] \to R^d); h(0) = 0, \dot{h} \in L^2\}$$

$$\mu : B \text{ 上の Wiener 測度.}$$

Wiener 空間上の基本的な微分作用素である **Ornstein-Uhrenbeck** 作用素 L は，次で与えられる **Ornstein-Uhlnbeck** 半群 $\{T_t\}$ の生成作用素して定義される．

$$T_t f(x) = \int_B f(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y)\mu(dy).$$

注意 3.1. ここで，core としての f のクラスは，例えば

$$\mathcal{F}C_b^\infty := \{f(x) = F(\langle\varphi_1,x\rangle,\dots,\langle\varphi_n,x\rangle); F \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n), \varphi_1,\dots,\varphi_n \in B^*, n = 1,2,\dots\}$$

をとり，これを L^p 上に拡張して，L^p 上の作用素と思う．このとき，$\{T_t\}$ は対称で Markov 的な強連続縮小半群になっている．また，f としては実可分 Hilbert 空間 K に値をとるものも考える．

第 1 節で一般のマルコフ半群に対して Sobolev 空間を定義したが，今の場合半群として Ornstein-Uhlenbeck 半群をとることになる．また，$\mathcal{F}_{r,p}(K)$ を $W^{r,p}(K)$ と書くことにする[1]．

さて抽象 Wiener 空間上の滑らかな関数のクラスとして

$$W^{\infty,\infty-}(K) := \bigcap_{r\in\mathbb{R},p>1} W^{r,p}(K)$$

[1]この記法を使う人は小数派である．$\mathbb{D}_r^p$, $\mathbf{D}_{p,r}$ などの記号が使われることが多い．

Sem. on Probab.
Vol.58 1995年
P1-115

を取る．この空間は言わば test function の空間であり，その双対空間は

$$W^{-\infty,1+}(K) := \bigcup_{r\in\mathbf{R},p>1} W^{r,p}(K)$$

で与えられる．

注意 **3.2.** この Sobolev 空間を用いると，Malliavin の意味で非退化な関数（この定義はあとで与える）$F \in W^{\infty,\infty-}(\mathbb{R}^d)$ に対して $\mathbb{R}^d$ 上の超関数との合成，例えば

$$\delta_a(F) \in W^{-\infty,1+}(\mathbb{R}^d)$$

が定義でき，μ の F による条件付き確率測度 $E[\cdot|F=a]$ が $\delta_a(F)d\mu/p(a)$ として定義される (F の分布の密度関数を $p(x)$ と表した).

さらに重要なことは r,p をそれぞれ十分大きくとることにより (r,p)-capacity は条件つきの測度 $\delta_a(F)d\mu$ (F は非退化な関数) より細かい，すなわち

$$C_{r,p}(A)=0 \Longrightarrow (\delta_a(F)d\mu)(A)=0$$

が成り立つことである．これによって f という関数が $\delta_a(F)d\mu$ という測度に対して定義されることがわかる．

もう一つの基本的な微分作用素として，H- 微分作用素 D がある．これは，適当な core の上で，

$$_{H^*}\langle Df(x),h\rangle_H = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(x+\varepsilon h)-f(x)}{\varepsilon} \quad (h\in H)$$

となるもので，$L^p(\mu)$ から $L^p(\mu;H^*)$ への可閉作用素である．D は実数値関数だけでなく Hilbert 空間値の関数に対しても同様に定義される．D は 1 階の微分作用素で，$(1-L)^{1/2}$ は 1 階の '擬微分作用素' であるが，D と $(1-L)^{1/2}$ の関係としては，次の **Meyer** の同値性がよく知られている．

定理 **3.1.** $u\in \mathcal{F}C_b^\infty(B\to K)$ に対し次が成立する：

$$\|u\|_p+\|Du\|_p \sim \|(1-L)^{1/2}u\|_p,$$

ここで 2つのノルム $\|\cdot\|,\|\cdot\|'$ に対して $\sim$ は，ある定数 $c,C>0$ が存在して $c\|\cdot\|\le\|\cdot\|'\le C\|\cdot\|$ が成り立つという意味である．

この定理の証明は省略する．例えば Meyer [77], Sugita [100] を参照されるとよい．この定理を用いると

$$D: W^{r+1,p}(K)\to W^{r,p}(\mathcal{L}_{(2)}(H;K))$$

が有界作用素として定まることがわかる．ここで

$$\mathcal{L}_{(2)}(H;K) := \{H \text{ から } K \text{ への Hilbert-Schmidt 作用素}\}$$

である．

Sem. on Probab.
Vol.58 1995年
P1-115

さて抽象 Wiener 空間上の関数 $F = (F^1, \ldots, F^d) \in W^{\infty,\infty-}(\mathbb{R}^d)$ に対し

$$\sigma^{ij} = (DF^i | DF^j)_{H^*}$$

とおき，行列 $\sigma = (\sigma^{ij})$ を **Malliavin covariance matrix** とよぶ．σ が

$$(\det \sigma)^{-1} \in L^{\infty-}(\mu) := \bigcap_{p \geq 1} L^p(\mu) \tag{3.1}$$

をみたすとき F を非退化とよぶ(σ が非退化ともいう)．$a \in \mathbb{R}^d$ に対し $S = F^{-1}(a)$ は Wiener 空間内の部分集合であるが，これに微分構造を入れることが本節の目的である．B 上の微分というものは接空間を H，余接空間を H^* と思うものであるが，これを S 上に射影することを考える．Riesz の定理を用いてえられる同形を

$$\sharp : H^* \to H, \quad \flat : H \to H^*$$

とかく．$DF^i \in W^{\infty,\infty-}(H^*)$ を B 上の 1-form とみなし $\omega^i = DF^i$ とおく．$\gamma = \sigma^{-1} := (\gamma_{ij})$ は (3.1) から $\gamma \in W^{\infty,\infty-}(\mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d)$ である．ここで $X_i \in W^{\infty,\infty-}(H)$ を

$$X_i = \gamma_{ij}(DF^j)^\sharp$$

とする．ここで Einstein の規約に従い j について和をとっている．

命題 3.2.

$$_{H^*}\langle \omega^i, X_j \rangle_H = \delta^i_j$$

証明　定義から

$$\begin{aligned}
_{H^*}\langle \omega^i, X_j \rangle_H &= {}_{H^*}\langle DF^i, \gamma_{jk}(DF^k)^\sharp \rangle_H \\
&= \gamma_{jk\,H^*}\langle DF^i, (DF^k)^\sharp \rangle_H \\
&= \gamma_{jk}(DF^i | DF^k)_{H^*} \\
&= \gamma_{jk}\sigma^{ik} \\
&= \delta^i_j
\end{aligned}$$

となり求める結果を得る．■

ここで B の接空間 H を $x \in S$ において S に接する方向と，垂直な方向に分解する．

$$T(S)_x := \{h \in H; \omega^1_x(h) = \cdots = \omega^d_x(h) = 0\},$$

$$N(S)_x := (X_1, \ldots, X_d) \text{ で張られる線形空間.}$$

$N(S)_x$ への射影は

$$Q_x h = \omega^i(h) X_i,$$

$T(S)_x$ への射影は

$$P_x h = h - Q_x h$$

Sem. on Probab.
Vol.58 1995年
P1-115

で与えられる．$m=\sqrt{\det\sigma}\delta_a(F)d\mu$ とすると $m(S^c)=0$ なのでこれを S 上の測度とみなす．

ここで $\sqrt{\det\sigma}$ について注意しておく．$\phi:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$ を微分同相とし $G=\phi\circ F$ を考えると

$$S=\{F=a\}=\{G=\phi(a)\}$$

となる．すなわち S の表示には微分同相 ϕ の自由度がある．ここで G の場合の m を計算する．合成関数の微分の公式から

$$\sigma_G=(D\phi^i(F)|D\phi^j(F))_{H^*}=(\partial_k\phi^i)(\partial_l\phi^j)(DF^k|DF^l)_{H^*}\quad\left(ここに\ \partial_k\phi^i=\frac{\partial\phi^i}{\partial x_k}\right)$$

となる．両辺の行列式をとって

$$\det\sigma_G=|\det\phi'|^2\det\sigma_F$$

から

$$\sqrt{\det\sigma_G}=|\det\phi'|\det\sigma_F$$

がしたがう．測度の変換 $\delta_{\phi(a)}\circ\phi=(\det\phi')^{-1}\delta_a$ から

$$m_G=\sqrt{\det\sigma_G}\delta_{\phi(a)}(G)d\mu=|\det\phi'|\sqrt{\det\sigma_F}(\det\phi')^{-1}\delta_a(F)d\mu=m_F$$

となり S の表示によらないことがわかる．

$u\in W^{\infty,\infty-}(K)$ に対して $(D_Fu)(x):=P_x(Du)$ とし m に関する双対作用素を D_F^* とかく．すなわち任意の $u\in W^{\infty,\infty-}(K)$, $v\in W^{\infty,\infty-}(\mathcal{L}_{(2)}(H;K))$ に対して

$$\int_S(D_Fu|v)_{\mathrm{HS}}\,dm=\int_S(u|D_F^*v)_K\,dm \tag{3.2}$$

を満たすとする．D の μ に対する双対作用素を δ とかく．B 上の Ornstein-Uhlenbeck 作用素は $L=-\delta D$ と表すことが出来る．

補題 3.3. $v\in W^{\infty,\infty-}(\mathcal{L}_{(2)}(H;K))$ に対し $i(h)v=v(h), h\in H$ とする．このとき

$$\begin{aligned}D_F^*v&=\delta(v\circ P)-\frac{1}{2}v((D_F\log\det\sigma)^\sharp)\\&=\delta v-\delta(v\circ Q)-\frac{1}{2}i((D_F\log\det\sigma)^\sharp)v\end{aligned}$$

とかける．ここで $P=P_x, Q=Q_x$ ．さらに

$$\delta(v\circ Q)+\frac{1}{2}i((D_F\log\det\sigma)^\sharp)v=-\mathrm{tr}_{N(S)}Dv+i(Q\delta Q)v$$

が成り立つ．ここで $U\in H^*\otimes H^*$ に対し $\mathrm{tr}_{N(S)}U=\sigma^{ij}U(X_i,X_j)$ ．

証明 $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ を任意にとる. $\langle\cdot,\cdot\rangle$ を $W^{\infty,\infty-}$ と $W^{-\infty,1+}$ の pairing とすると

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} f(b)\langle (D_F u|v)_{\mathrm{HS}}\sqrt{\det\sigma}, \delta_b(F)\rangle db &= \int_B (f\circ F)(D_F u|v)_{\mathrm{HS}}\sqrt{\det\sigma}d\mu \\ &= \int_B (Du|(f\circ F)\sqrt{\det\sigma}v(P))_{\mathrm{HS}}\, d\mu \\ &= \int_B (u|\delta((f\circ F)\sqrt{\det\sigma}v(P)))_K\, d\mu.\end{aligned}$$

さらに

$$\begin{aligned}&\delta((f\circ F)\sqrt{\det\sigma}v(P)) \\ &\quad= -(\partial_j f\circ F)\sqrt{\det\sigma}v(P(DF^j)^\sharp) - (f\circ F)v(P(D\sqrt{\det\sigma})^\sharp) + (f\circ F)\sqrt{\det\sigma}\delta(v(P)) \\ &\quad= -\frac{1}{2}(f\circ F)\sqrt{\det\sigma}v((D_F\log\det\sigma)^\sharp) + (f\circ F)\sqrt{\det\sigma}\delta(v(P)) \quad (\because P(DF^j)^\sharp = 0)\end{aligned}$$

となるから

$$\begin{aligned}&\int_{R^d} f(b)\langle (D_F u|v)_{\mathrm{HS}}\sqrt{\det\sigma}, \delta_b(F)\rangle db \\ &\qquad= \int_B (f\circ F)\Big(u\Big| -\frac{1}{2}v((D_F\log\det\sigma)^\sharp) + \delta(v(P))\Big)_K \sqrt{\det\sigma}d\mu \\ &\qquad= \int_{R^d} f(b)\Big\langle \Big(u\Big| -\frac{1}{2}v((D_F\log\det\sigma)^\sharp) + \delta(v(P))\Big)_K \sqrt{\det\sigma}, \delta_b(F)\Big\rangle db\end{aligned}$$

を得る. $f \in C_0^\infty$ は任意であったから, すべての $b \in \mathbb{R}^d$ に対して

$$\langle (D_F u|v)_{\mathrm{HS}}\sqrt{\det\sigma}, \delta_b(F)\rangle = \Big\langle u\Big(-\frac{1}{2}v((D_F\log\det\sigma)^\sharp) + \delta(v(P))\Big)\sqrt{\det\sigma}, \delta_b(F)\Big\rangle$$

がわかり証明がおわる. ■

後の節で必要な公式を準備する.

補題 3.4. 次の式が成り立つ.

$$P\delta Q = -\frac{1}{2}\gamma_{jk}P(D\sigma^{jk})^\sharp, \tag{3.3}$$

$$Q\delta Q = -(LF^j - \mathrm{tr}_{N(S)}D^2F^j)X_j. \tag{3.4}$$

証明 定義から

$$\begin{aligned}\delta Q &= \delta(\gamma_{jk}DF^j\otimes(DF^k)^\sharp) \\ &= -(D\gamma_{jk}|DF^j)(DF^k)^\sharp + \gamma_{jk}(\delta DF^j)(DF^k)^\sharp - \gamma_{jk}D^2F^k(DF^j,\cdot) \\ &= -(D\gamma_{jk}|DF^j)(DF^k)^\sharp - LF^jX_j - \gamma_{jk}D^2F^k(DF^j,\cdot)\end{aligned}$$

となるが, 一方

$$\begin{aligned}-(D\gamma_{jk}|DF^j)(DF^k)^\sharp &= \gamma_{jl}\gamma_{mk}(D\sigma^{lm}, DF^j)(DF^k)^\sharp \\ &= \gamma_{jl}(D(DF^l|DF^m)|DF^j)X_m\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \gamma_{jl}(D^2F^l|DF^j \otimes DF^m)X_m + \gamma_{jl}(D^2F^m|DF^j \otimes DF^l)X_m \\
&= \frac{1}{2}\gamma_{jl}(D(DF^l|DF^j)|DF^m)X_m + \gamma_{jl}(D^2F^m|DF^j \otimes DF^l)X_m \\
&= \frac{1}{2}\gamma_{jl}(D\sigma^{lj}|DF^m)X_m + \gamma_{jl}(D^2F^m|DF^j \otimes DF^l)X_m \\
&= \frac{1}{2}\gamma_{jl}Q(D\sigma^{lj})^\sharp + \mathrm{tr}_{N(S)}D^2F^mX_m
\end{aligned}
$$

であって

$$
-\gamma_{jk}D^2F^k(DF^j,\cdot) = -\frac{1}{2}\gamma_{jk}D(DF^j|DF^k) = -\frac{1}{2}\gamma_{jk}D\sigma^{jk}
$$

だから

$$
\delta Q = \mathrm{tr}_{N(S)}D^2F^mX_m - LF^jX_j - \frac{1}{2}\gamma_{jl}P(D\sigma^{lj})^\sharp
$$

で $X_j \in N(S)$ に注意すると (3.3), (3.4) を得る. ■

この補題により D_F^* の表示が簡明になる.

命題 3.5. $v \in \mathcal{W}(S \to E)$ に対して

$$
\delta(v \circ Q) + \frac{1}{2}i((D_F \log\det\sigma)^\sharp)v = -\mathrm{tr}_{N(S)}Dv + i(Q\delta Q)v \tag{3.5}
$$

がなりたつ. さらに

$$
D_F^*v = \delta v + \mathrm{tr}_{N(S)}Dv + i(Q\delta Q)v. \tag{3.6}
$$

証明　(3.5) を証明すれば十分である. 行列 A に対する公式

$$
\frac{d}{dt}\det A = (\det A)\mathrm{tr}(A^{-1}\frac{dA}{dt})
$$

を使うと

$$
\begin{aligned}
D\log\det\sigma &= (\det\sigma)^{-1}D\det\sigma \\
&= (\det\sigma)^{-1}(\det\sigma)\mathrm{tr}(\sigma^{-1}D\sigma) \\
&= \gamma_{ij}D\sigma^{ij}.
\end{aligned}
$$

これから, 接方向への射影により

$$
D_F\log\det\sigma = \gamma_{ij}PD\sigma^{ij}
$$

がわかる. これと補題 3.4 をあわせると

$$
\begin{aligned}
\delta(v \circ Q) + \frac{1}{2}((D_F\log\det\sigma)^\sharp) &= v(\delta Q) - (Dv|\hat{Q}) + \frac{1}{2}i(\gamma_{jk}P(D\sigma^{jk})^\sharp)v \\
&= -(Dv|\hat{Q}) + i(Q\delta Q)v
\end{aligned}
$$

ここで $\hat{Q} \in W^{\infty,\infty-}$ は

$$
\hat{Q} = \gamma_{jk}DF^j \otimes DF^k
$$

Sem. on Probab.
Vol.58 1995年
P1-115

で定義される．つまり

$$(Dv|\hat{Q}) = \gamma_{jk}(Dv|DF^j \otimes DF^k) = \mathrm{tr}_{N(S)}Dv$$

だから (3.5) が示された． ■

D_F は 'S 上の微分' となるべきものであるが，これは B 上の関数に作用している．そこで，$f, g \in W^{\infty,\infty-}(K)$ の間に同値関係 $\sim$ を

$$f \sim g \Longleftrightarrow f = g \quad m\text{-a.e.}$$

と決めると (3.2) の関係式から

$$f \sim g \Longrightarrow D_F f \sim D_F g$$

となることが従う．そこで

$$\mathcal{W}(S \to K) := W^{\infty,\infty-}/\sim$$

とすると D_F は $\mathcal{W}(S \to K)$ から $\mathcal{W}(S \to \mathcal{L}_{(2)}(H;K))$ への作用素として well-defined になる．D_F^* に対しても同様にこれを $\mathcal{W}(S \to \mathcal{L}_{(2)}(H;K))$ から $\mathcal{W}(S \to K)$ への作用素とみなすことができる．

接ベクトル束等は次の様に定義される．接ベクトル束 $T(S)$ は

$$\bigcup_{x \in S} T(S)_x$$

余接ベクトル束 $T^*(S)$ は $T^*(S)_x = P_x^*(H^*)$ として

$$T^*(S) = \bigcup_{x \in S} T^*(S)_x$$

と定義される．さらに一般の (k,l) 型テンソル束 $T_l^k(S)$ については

$$T_l^k(S)_x = \underbrace{T(S)_x \otimes \cdots \otimes T(S)_x}_{k} \otimes \underbrace{T^*(S)_x \otimes \cdots \otimes T^*(S)_x}_{l}$$

として

$$T_l^k(S) = \bigcup_{x \in S} T_l^k(S)_x$$

となる．これらの切断の空間 $\Gamma(T_l^k(S))$ の元 ω を以下のように定義する．

$$H_l^k := \underbrace{H \otimes \cdots \otimes H}_{k} \otimes \underbrace{H^* \otimes \cdots \otimes H^*}_{l}$$

とし，さらに $\pi_{l,x}^k : H_l^k \to T_l^k(S)_x$ を

$$\pi_{l,x}^k = \underbrace{P_x \otimes \cdots \otimes P_x}_{k} \otimes \underbrace{P_x^* \otimes \cdots \otimes P_x^*}_{l}$$

と定義すると $\omega \in \Gamma(T_l^k(S))$ は $\omega \in \mathcal{W}(S \to H_l^k)$ であって $\pi_{l,x}^k \omega(x) = \omega(x)$ を満たすものとして特徴づけられる．また，とくに $(1,0)$ 型の切断，すなわちベクトル場の空間を $\mathfrak{X}(S)$ とかく．

4. 共変微分

$X, Y \in \mathfrak{X}(S)$ とする．部分多様体 S 上の共変微分 ∇ を以下のように定義する．

$$\nabla_X Y := P(D_F Y(X)) \quad (\in \mathfrak{X}(S))$$

また，第２基本形式 α を

$$\alpha(X, Y) := Q(D_F Y(X))$$

で定義する．

定理 4.1. α は次の様にもかかれる．

$$\alpha(X, Y) = -D^2 F^j(X, Y) X_j.$$

とくにこれから α が対称形式であることがわかる．

証明　$Qh = \omega^i(h) X_i$ であったから

$$D_F Y(X) + D^2 F^j(X, Y) X_j \in \mathrm{Ker}(\omega^k) \quad k = 1, 2, \ldots, d$$

を示せばよい．$D_F F^j = 0$ on B に注意すると

$$0 = D_F F^j(Y) = DF^j(PY) = DF^j(Y) \quad \text{on } S$$

がわかる．したがって

$$\begin{aligned} 0 &= D_F(DF^j(Y))(X) = D(DF^j(Y))(PX) = D(DF^j(Y))(X) \\ &= D^2 F^j(X, Y) + DF^j(DY(X)) \\ &= D^2 F^j(X, Y) + DF^j(D_F Y(X)) \end{aligned}$$

であるから

$$\omega^k(D_F Y(X) + D^2 F^j(X, Y) X_j) = DF^k(D_F Y(X)) + D^2 F^k(X, Y) = 0$$

となり求める結果を得る．　■

∇ は接ベクトル場の微分であるが，法ベクトル場に対しても対応するものが定義できる．$X \in \mathfrak{X}(S), \xi \in \Gamma(N(S))$ に対して

$$\nabla_X^{\perp} \xi = Q(D_F \xi(X))$$

とする．また α にあたるものとしては

$$\beta(X, \xi) = P(D_F \xi(X))$$

Sem. on Probab.
Vol.58 1995年
P1-115

が定義される.

補題 4.2. $X, Y \in \mathfrak{X}(S), \xi \in \Gamma(N(S))$ とする. このとき

$$(\alpha(X,Y)|\xi)_H + (Y|\beta(X,\xi))_H = 0.$$

証明 $(Y|\xi)_H = 0$ だから

$$\begin{aligned}0 &= (D_F(Y|\xi)_H)(X)\\ &= (D_FY(X)|\xi) + (Y|D_F\xi(X))\\ &= (\alpha(X,Y)|\xi)_H + (Y|\beta(X,\xi))_H\end{aligned}$$

となり求める結果を得る. ■

第2基本形式と関連してあとで必要になる DQ を計算しておこう.

命題 4.3. 次の等式が成立する.

$$DQ(P\cdot, P\cdot) = -\alpha(\cdot,\cdot), \tag{4.1}$$

$$QDQ(\cdot,\cdot) = DQ(\cdot, P\cdot), \tag{4.2}$$

$$QDQ(\cdot, Q\cdot) = 0. \tag{4.3}$$

特に $DQ(Ph, Pk)$ は h, k に関して対称である. さらに $\xi \in \Gamma(T^*(S))$ に対して次が成立する:

$$D\xi(P\cdot, Qh) = (\alpha(\cdot, \xi^\sharp)|h) \quad \text{for } h \in H^*. \tag{4.4}$$

証明 まず (4.1) から見ていこう. $X \in \mathfrak{X}(S)$ に対して $QX = 0$ が成立するから

$$\begin{aligned}0 &= D_F(QX)\\ &= D_FQ(\cdot, X) + Q(D_FX(\cdot))\\ &= DQ(P\cdot, X) + Q(DX(P\cdot))\\ &= DQ(P\cdot, X) + \alpha(P\cdot, X).\end{aligned}$$

X は任意であるから (4.1) を得る.

次に (4.2) を示すために $Q(Q\cdot) = Q(\cdot)$ に注意しよう. 両辺を微分して

$$DQ(\cdot, Q(\cdot)) + Q(DQ(\cdot,\cdot)) = DQ(\cdot,\cdot)$$

が得られるが、これから

$$QDQ(\cdot,\cdot) = DQ(\cdot,\cdot) - DQ(\cdot, Q\cdot) = DQ(\cdot, P\cdot)$$

が従い (4.2) が示せた. この式の2番目の変数に $Q\cdot$ を代入すれば(4.3) が成立することが容易に分かる.

Sem. on Probab.
Vol.58 1995年
P1-115

最後に (4.4) を示そう．第 2 基本形式の定義から $X \in \mathfrak{X}(S)$ に対し

$$\alpha(\cdot, X) = QDX(P\cdot)$$

が成立するが，ここで $X = \xi^\sharp, \xi \in \Gamma(T^*(S))$ ととれば，$h \in H^*$ に対して

$$(\alpha(\cdot, \xi^\sharp)|h) = (QD\xi^\sharp(P\cdot)|h) = D\xi(P\cdot, Qh).$$

即ち (4.4) が得られた． ■

定義 4.1. $Y, Z \in \mathfrak{X}(S)$ に対して Lie bracket $[Y, Z]$ を

$$[Y, Z] = \nabla_Y Z - \nabla_Z Y$$

で定義する．

注意 4.1. 有限次元での Riemann 多様体において Levi-Civita 接続の特徴づけのひとつとして，ねじれ率テンソル $T(Y, Z) = \nabla_Y Z - \nabla_Z Y - [Y, Z]$ が 0 になるというものがある．上の定義はそのことを逆に使っている． Lie bracket が通常の定義と一致することは次の命題で分かる．

命題 4.4. $Y, Z \in \mathfrak{X}(S)$, $f \in \mathcal{W}(S \to \mathbb{R})$ とする．このとき

$$Z(Yf) - Y(Zf) = [Y, Z]f$$

となる．

証明 まず $Z(Yf)$ を計算する．

$$\begin{aligned} Z(Yf) &= D(Yf)(Z) \\ &= D(Df(Y))(Z) \\ &= D^2f(Z, Y) + Df(DY(Z)) \\ &= D^2f(Z, Y) + Df(\nabla_Z Y) + Df(\alpha(Z, Y)) \\ &= D^2f(Z, Y) + (\nabla_Z Y)f + Df(\alpha(Z, Y)) \end{aligned}$$

D^2f と α は対称だから

$$\begin{aligned} Z(Yf) - Y(Zf) &= D^2f(Z, Y) + (\nabla_Z Y)f + Df(\alpha(Z, Y)) \\ &\quad - D^2f(Y, Z) - (\nabla_Y Z)f - Df(\alpha(Y, Z)) \\ &= (\nabla_Z Y)f - (\nabla_Y Z)f \end{aligned}$$

より結果が従う． ■

Sem. on Probab.
Vol.58 1995年
P1-115

この命題から Jacobi の等式

$$[[X,Y],Z]+[[Y,Z],X]+[[Z,X],Y]=0 \tag{4.5}$$

が従う.

次に Riemannian curvature $R\in\Gamma(T_3^1(S))$ を

$$R(X,Y)=[\nabla_X,\nabla_Y]-\nabla_{[X,Y]}$$

で定義する. R は $(1,3)$ 型のテンソルであるが

$$R(X,Y,Z,W)=(R(X,Y)Z|W)_H$$

のように $(0,4)$ 型テンソルとみなす.

定理 4.5. 曲率 R は第 2 基本形式 α を用いて

$$R(X,Y,Z,W)=-(\alpha(X,Z)|\alpha(Y,W))_H+(\alpha(Y,Z)|\alpha(X,W))_H$$

のように書ける.

証明 まず定義から

$$D_FZ(Y)=\nabla_YZ+\alpha(Y,Z)$$

となることに注意する. さらに ∇_YZ は接ベクトル場であり $\alpha(Y,Z)$ は法ベクトル場であるから

$$D_F(D_FZ(Y))(X)=\nabla_X\nabla_YZ+\alpha(X,\nabla_YZ)+\nabla_X^{\perp}\alpha(Y,Z)+\beta(X,\alpha(Y,Z)).$$

X と Y を入れ換えると

$$D_F(D_FZ(X))(Y)=\nabla_Y\nabla_XZ+\alpha(Y,\nabla_XZ)+\nabla_Y^{\perp}\alpha(X,Z)+\beta(Y,\alpha(X,Z))$$

を得る. 一方

$$\begin{aligned}
D_F(D_FZ(Y))(X)-D_F(D_FZ(X))(Y)&\\
&=D(DZ(Y))(X)-D(DZ(X))(Y)\\
&=D^2Z(X,Y)+DZ(DY(X))-D^2Z(Y,X)-DZ(DX(Y))\\
&=DZ(D_FY(X)-D_FX(Y))\\
&=DZ(\nabla_XY+\alpha(X,Y)-\nabla_YX-\alpha(Y,X))\\
&=DZ([X,Y])\\
&=\nabla_{[X,Y]}Z+\alpha([X,Y],Z)
\end{aligned}$$

これらをあわせて

$$\nabla_{[X,Y]}Z+\alpha([X,Y],Z)=\nabla_X\nabla_YZ+\alpha(X,\nabla_XZ)+\nabla_X^{\perp}\alpha(Y,Z)+\beta(X,\alpha(Y,Z))$$

Sem. on Probab.
Vol.58 1995年
P1-115

$$- \nabla_Y \nabla_X Z - \alpha(Y, \nabla_X Z) - \nabla_Y^{\perp} \alpha(X, Z) - \beta(Y, \alpha(X, Z))$$

を得る．接方向の成分を比較することにより

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \\ &= \beta(X, \alpha(Y,Z)) - \beta(Y, \alpha(X,Z)) \end{aligned}$$

これと補題 4.2 から

$$\begin{aligned} R(X,Y,Z,W) &= (W|\beta(X,\alpha(Y,Z)))_H - (W|\beta(Y,\alpha(X,Z)))_H \\ &= (\alpha(X,W)|\alpha(Y,Z))_H - (\alpha(Y,W)|\alpha(X,Z))_H \end{aligned}$$

が導かれる． ■

命題 4.6. R について次の恒等式が成り立つ．

$$R(X,Y) = -R(X,Y) \tag{4.6}$$

$$\mathfrak{S} R(X,Y)Z = 0 \tag{4.7}$$

$$R(X,Y,Z,W) = -R(X,Y,W,Z) \tag{4.8}$$

$$R(X,Y,Z,W) = R(Z,W,X,Y) \tag{4.9}$$

ここで $\mathfrak{S}$ は X, Y, Z についての巡回和をあらわす．

証明 (4.6) は定義から，また (4.8) と (4.9) は定理 4.5 から明らかである．よって (4.7) を証明すればよい． $[X,Y]$ の定義式を Z に沿って共変微分すると

$$\nabla_Z \nabla_X Y - \nabla_Z \nabla_Y X = \nabla_Z [X,Y] \tag{4.10}$$

を得る．また

$$\nabla_Z [X,Y] - \nabla_{[X,Y]} Z = [Z, [X,Y]] \tag{4.11}$$

だから，これを (4.10) に代入すると

$$\nabla_Z \nabla_X Y - \nabla_X \nabla_Y X - \nabla_{[X,Y]} Z = [[X,Y], Z]$$

がわかる． X, Y, Z を入れ換えることにより

$$\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_X \nabla_Z Y - \nabla_{[Y,Z]} X = [[Y,Z], X]$$

$$\nabla_Y \nabla_Z X - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[Z,X]} Y = [[Z,X], Y]$$

となるから，これらを足しあわせ， Jacobi の等式 (4.5) を用いると(4.7) を得る． ■

共変微分は，一般のテンソル場に拡張される． ∇ は $\Gamma(T_l^k)$ の元 u に対し $\Gamma(T_{l+1}^k)$ の元を

$$\nabla u = \pi_{l+1}^k(D_F u(\cdot))$$

のように対応させる作用素である．この ∇ の双対作用素を ∇^* とかくとき

$$\nabla^* = \pi_l^k D_F^*$$

となっていることに注意しておく．

5. Ricci 曲率

まず p 次微分形式を定義する． $p \in \mathbb{N}$ に対し

$$A_p : \underbrace{H^* \otimes \cdots \otimes H^*}_{p} \to \underbrace{H^* \otimes \cdots \otimes H^*}_{p}$$

を

$$A_p u(h_1, ..., h_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \mathrm{sgn}(\sigma) u(h_{\sigma(1)}, ..., h_{\sigma(p)})$$

と定義する．ここで $\mathfrak{S}_p$ は p 次対称群， $\mathrm{sgn}(\sigma)$ は $\sigma \in \mathfrak{S}_p$ の符号数をあらわす．

定義 5.1. S 上の p 次微分形式の空間 $\Lambda^p(S)$ を

$$\Lambda^p(S) = \{\omega \in \Gamma(T_p^0(S)); A_p\omega = \omega\}$$

と定義する．また，外微分 $d : \Lambda(S) \to \Lambda(S)$ は

$$d\omega = (p+1)A_{p+1}\nabla\omega$$

と定義する．

定義から $\Lambda^p(S) \subset \Gamma(T_p^0(S)) \subset \mathcal{W}(S \to (H^*)^{\otimes p})$ であるが，この空間の内積としては

$$(u|v)_{\mathrm{AHS}} = \frac{1}{p!}(u|v)_{\mathrm{HS}}$$

を用いる．

また $d^* = \nabla^*$ とおけば， d^* は d の双対作用素となっている．即ち $d^* : \Lambda^{p+1}(S) \to \Lambda^p(S)$ で

$$\int_S (d\omega|\eta)_{\mathrm{AHS}}\, dm = \int_S (\omega|d^*\eta)_{\mathrm{AHS}}\, dm$$

を満たす．

定義 5.2. Hodge-Kodaira Laplacian $\Box_p : \Lambda^p(S) \to \Lambda^p(S)$ を

$$\Box_p = -(d^*d + dd^*) = -(d+d^*)^2$$

で定義する．

Sem. on Probab.
Vol.58 1995年
P1-115

ここでWiener 空間での $\square_p$ の表示を与えておこう．H の完全正規直交系 $\{h_i\}$ を任意に取り固定しておく．$h_i^* = h_i^\flat$ とおけば $\{h_i^*\}$ は H^* の完全正規直交系になるが $\{h_i^*\} \subset B^*$ が成立するように取っておく．以下のことはこの正規直交系の取り方にはよらない．$L^2\Gamma(\Lambda^p(B))$ を B 上の外積束 $\Lambda^p(B)$ の可測な切断 η で

$$\|\eta\|_2 = \left\{\int_B |\eta|^2_{\mathrm{AHS}} d\mu\right\}^{1/2} < \infty$$

となるもの全体からなる空間とする．その中で tame function にあたる空間 $\mathcal{F}C_b^\infty\Gamma(\Lambda^p(B))$ を

$$f(\langle x, h_{i_1}^*\rangle, \dots, \langle x, h_{i_n}^*\rangle) h_{j_1}^* \wedge \cdots \wedge h_{j_p}^*, \quad f \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R})$$

の 1 次結合で表されるもの全体とする．そして

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{p=0}^\infty L^2\Gamma(\Lambda^p(B))$$

$$\mathcal{D} = \sum_{p=0}^\infty \mathcal{F}C_b^\infty\Gamma(\Lambda^p(B))$$

とおく．ここで $\mathcal{H}$ の方は Hilbert 空間としての直和であり，$\mathcal{D}$ の方は代数的な直和 (従って有限和) である．

以下 $\mathcal{H}$ 上の対称作用素を定義していくが，その定義域は全て $\mathcal{D}$ であるとし，特に断らない．また $\mathcal{D}$ 上で well-defined であることは以下の議論では明白である．

物理的な説明をしている余裕はないが，以下の考え方は超対称性の基本的なものである．ボーズ粒子の消滅演算子 a_i を

$$a_i\eta = D\eta(h_i)$$

で定義する．生成演算子 a_i^* は a_i の双対作用素として定義される．a_i, a_i^* は関数の部分のみに働く作用素である．例えば,

$$a_i^*(f(\langle x, h_1^*\rangle, \dots, \langle x, h_n^*\rangle)) = -\partial_i f(\langle x, h_1^*\rangle, \dots, \langle x, h_n^*\rangle)) + \langle x, h_i^*\rangle f(\langle x, h_1^*\rangle, \dots, \langle x, h_n^*\rangle)$$

となることは，次の Gauss 測度に対する部分積分の公式

$$\int_{-\infty}^\infty f'(x)g(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx = \int_{-\infty}^\infty f(x)\{-g'(x) + x\}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx$$

から容易に見てとれる．従って

$$a_i^*a_i(f(\langle x, h_1^*\rangle, \dots, \langle x, h_n^*\rangle)) = -\partial_i^2 f(\langle x, h_1^*\rangle, \dots, \langle x, h_n^*\rangle)) + \langle x, h_i^*\rangle \partial_i f(\langle x, h_1^*\rangle, \dots, \langle x, h_n^*\rangle)$$

となる．$a_i^*a_i$ は i 粒子の個数を表す作用素である．i について和をとれば,

$$L = -\sum_i a_i^* a_i$$

がわかり，$-L$ はボーズ粒子全体の個数を表すと考えられる．$-L$ が数作用素 (number operator) と言われる所以である．

Sem. on Probab.
Vol.58 1995年
P1-115

フェルミ粒子に関しては，消滅演算子 b_i は内部積を用いて

$$b_i = i(h_i)$$

で定義され(外積の部分だけに働いている)，従って生成演算子は

$$b_i^*(h_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge h_{i_p}^*) = h_i^* \wedge h_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge h_{i_p}^*$$

という外積をとる演算となる．

$$b_i^* b_i(h_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge h_{i_p}^*) = \begin{cases} h_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge h_{i_p}^* & \text{if } i_k = i \text{ for some } k, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

であるから，$b_i^* b_i$ は i 粒子が存在するかしないかを表す．フェルミ粒子は同時に2個以上存在できないから結局 i 粒子の個数と言っても同じことになる．上のことから

$$\sum_i b_i^* b_i(h_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge h_{i_p}^*) = p\, h_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge h_{i_p}^*.$$

$\sum_i b_i^* b_i$ がフェルミ粒子の数作用素とよばれるのはボーズ粒子のときと同じ．今の場合フェルミ粒子の個数とは微分形式の次数を意味する．さて解釈はこの際重要ではない．次の交換関係が基本的である．

命題 5.1. 次の正準交換関係が成立する．

$$\begin{aligned} &[a_i, a_j] = [a_i^*, a_j^*] = 0 \\ &[a_i, a_j^*] = \delta_{ij} \\ &[b_i, b_j]_+ = [b_i^*, b_j^*]_+ = 0 \\ &[b_i, b_j^*]_+ = \delta_{ij}. \end{aligned}$$

ここに，$[\cdot,\cdot]$ は交換子を，$[\cdot,\cdot]_+$ は反交換子 $[a,b]_+ = ab + ba$ を表す．また a_i と b_j についてはその双対まで含め，全て交換する．

これらの確認は定義にかえればそう難しいことではないから，読者の演習として残しておく．

さてこれらの記号を導入すれば外微分 d を次の様に表すことが出来る．

$$d = \sum_i b_i^* a_i. \tag{5.1}$$

実際上のことは定義にかえれば容易に確かめることが出来る．また双対作用素は

$$d^* = \sum_i b_i a_i^* \tag{5.2}$$

で表される．以上の準備の下で抽象 Wiener 空間上での $\Box_p$ の表示を与えることが出来る．

Sem. on Probab.
Vol.58 1995年
P1-115

定理 5.2. 抽象 Wiener 空間 B 上において次の等式が成立する：

$$dd^* + d^*d = \sum_i a_i^* a_i + \sum_i b_i^* b_i. \tag{5.3}$$

特に

$$\Box_p = L - p. \tag{5.4}$$

証明　まず (5.1), (5.2) の表示を用いて

$$\begin{aligned} d^*d + dd^* &= \sum_{i,j} b_j a_j^* b_i^* a_i + \sum_{i,j} b_i^* a_i b_j a_j^* \\ &= \sum_{i,j} \{[b_j, b_i^*]_+ - b_i^* b_j\} a_j^* a_i + \sum_{i,j} b_i^* b_j \{[a_i, a_j^*] + a_j^* a_i\} \\ &= \sum_i a_i^* a_i + \sum_i b_i^* b_i \end{aligned}$$

が得られる.

(5.4) は $\Lambda^p(B)$ 上では $\sum_i b_i^* b_i = p$ であることに注意すればよい. ■

注意 5.1. 上の証明中, 形式的には無限和の相殺が起っている訳だが, $\mathfrak{D}$ で考える限り, 有限和の計算ですむから, 上の計算は問題なく実行できる. 超対称性が有効なのはこうした発散項の相殺が起るからである.

さて再び部分多様体 S に戻って S 上での Ricci 曲率を定義しよう. しかし有限次元のときの定義をそのまま適用することはできない. 通常 Ricci 曲率は Riemann の曲率テンソルを縮約してえられるが, 今の場合それが無限和となり発散してしまう. そこで有限次元の場合の Weitzenböck の公式

$$\Box_1 \eta = -\nabla^* \nabla \eta - \mathrm{Ric}(\cdot, \eta^\sharp)$$

を念頭におき次のように定義する.

定義 5.3. **Ricci 曲率 Ric** は次のように定義される[2]. $\{\varphi_\lambda\}$ を H の完全正規直交系として

$$\mathrm{Ric}(\cdot,\cdot) := -\sum_\lambda (\alpha(\cdot, \varphi_\lambda) | \alpha(\cdot, \varphi_\lambda)) + (\alpha(\cdot,\cdot) | Q\delta Q).$$

この定義は **Weitzenböck** の公式が次のかたちで成り立つようにしたものである.

定理 5.3. $\eta \in \Lambda^1(S)$ とすると

$$\Box_1 \eta = -\nabla^* \nabla \eta - \eta - \mathrm{Ric}(\cdot, \eta^\sharp)$$

がなりたつ.

[2]Ricci 曲率の表示が最初間違っていた. 誤りを指摘して下さったのは九州大学の谷口説男氏である. ここにお礼を申し上げる.

Sem. on Probab.
Vol.58 1995年
P1-115

証明　命題 3.5 を使うと

$$\begin{aligned} dd^*\eta &= \nabla\nabla^*\eta \\ &= P^*D(D_F^*\eta) \\ &= P^*D\{\delta\eta + \mathrm{tr}_{N(S)}D\eta - i(Q\delta Q)\eta\} \\ &= P^*D\{\delta\eta + (D\eta|\hat{Q})\} \\ &= (D\delta\eta)(P\cdot) + (D^2\eta(P\cdot)|\hat{Q}) + (D\eta|D\hat{Q}(P\cdot)). \end{aligned}$$

ここで $u \in \Gamma(T_2(S))$ に対して

$$\check{u}(X,Y) := u(Y,X)$$

と定義する．この記号を用いれば

$$\begin{aligned} d^*d\eta &= \nabla^*(\nabla\eta - \check{\nabla}\eta) \\ &= \nabla^*\nabla\eta - \nabla^*(\check{D}\eta(P\cdot,P\cdot)) \\ &= \nabla^*\nabla\eta - \nabla^*(\check{D}\eta(\cdot,P\cdot)) - \check{D}\eta(Q\cdot,P\cdot)) \\ &= \nabla^*\nabla\eta - P^*[\delta\{\check{D}\eta(\cdot,P\cdot) - \check{D}\eta(Q\cdot,P\cdot)\} - \frac{1}{2}i((D_F \log\det\sigma)^\sharp)\check{D}\eta(\cdot,P\cdot)] \\ &= \nabla^*\nabla\eta - P^*[\delta(\check{D}\eta(\cdot,P\cdot)) + \mathrm{tr}_{N(S)}D(\check{D}\eta(\cdot,P\cdot)) - i(Q\delta Q)\check{D}\eta(\cdot,P\cdot)] \end{aligned}$$

だから，これらをあわせて

$$\begin{aligned} &(dd^* + d^*d)\eta - \nabla^*\nabla\eta \\ &\quad = (D\delta\eta)(P\cdot) - P^*\delta(\check{D}\eta(\cdot,P\cdot)) + (D^2\eta(P\cdot)|\hat{Q}) \\ &\qquad + (D\eta|D\hat{Q}(P\cdot)) - P^*\mathrm{tr}_{N(S)}D(\check{D}\eta(\cdot,P\cdot)) + D\eta(P\cdot,Q\delta Q). \end{aligned}$$

さらに，この最初の 2 項は

$$\begin{aligned} &(D\delta\eta)(P\cdot) - P^*\delta(\check{D}\eta(\cdot,P\cdot)) \\ &\quad = (D\delta\eta)(P\cdot) - P^*\delta\{\check{D}\eta(\cdot,\cdot) - \check{D}\eta(\cdot,Q\cdot)\} \\ &\quad = (D\delta\eta)(P\cdot) - P^*\delta\check{D}\eta(\cdot) + P^*(\delta\check{D}\eta)(Q\cdot) - \sum_\lambda P^*\check{D}\eta(\varphi_\lambda, DQ(\varphi_\lambda,\cdot)) \\ &\quad = (D\delta\eta)(P\cdot) - \delta\check{D}\eta(P\cdot) - \sum_\lambda D\eta(DQ(\varphi_\lambda,P\cdot),\varphi_\lambda) \\ &\quad = \eta(P\cdot) - \sum_\lambda D\eta(DQ(\varphi_\lambda,P\cdot),\varphi_\lambda) \end{aligned}$$

である．この変形の途中で抽象 Wiener 空間における公式 $dd^* + d^*d - \delta D = 1$ を使っていることを注意する．今の場合は

$$D\delta\eta - \delta\check{D}\eta = \eta$$

という形で使った．残りの項は

$$
\begin{aligned}
&(D^2\eta(P\cdot)|\hat{Q}) + (D\eta|D\hat{Q}(P\cdot)) - P^*\mathrm{tr}_{N(S)}D(\check{D\eta}(\cdot,P\cdot)) + D\eta(P\cdot,Q\delta Q)\\
&\quad = (D^2\eta(P\cdot)|\hat{Q}) + (D\eta|D\hat{Q}(P\cdot))\\
&\qquad - P^*\mathrm{tr}_{N(S)}\{D(\check{D\eta}(\cdot,\cdot)) - D(\check{D\eta}(\cdot,Q\cdot))\} + D\eta(P\cdot,Q\delta Q)\\
&\quad = (D^2\eta(P\cdot)|\hat{Q}) + (D\eta|D\hat{Q}(P\cdot)) - \mathrm{tr}_{N(S)}(D\check{D\eta})(P\cdot))\\
&\qquad + P^*\mathrm{tr}_{N(S)}\{\check{D\eta}(\cdot,DQ(\cdot,\cdot))\} + (\alpha(\cdot,\eta^\sharp)|Q\delta Q) \quad (\because\ (4.4))\\
&\quad = \sigma^{jk}D^2\eta(P\cdot,X_j,X_k) + (D\eta|D\hat{Q}(P\cdot))\\
&\qquad - \sigma^{jk}D^2\eta(X_j,P\cdot,X_k) + \sigma^{jk}D\eta(DQ(X_k,P\cdot),X_j) + (\alpha(\cdot,\eta^\sharp)|Q\delta Q)\\
&\quad = (D\eta|D\hat{Q}(P\cdot)) + \sigma^{jk}D\eta(DQ(X_k,P\cdot),X_j) + (\alpha(\cdot,\eta^\sharp)|Q\delta Q).
\end{aligned}
$$

となる．さらに $(D\eta|D\hat{Q}(P\cdot))$ を計算すると

$$
\begin{aligned}
&(D\eta|D\hat{Q}(P\cdot))\\
&\quad = \sum_\lambda D\eta(DQ(P\cdot,\varphi_\lambda),\varphi_\lambda)\\
&\quad = \sum_\lambda D\eta(DQ(P\cdot,Q\varphi_\lambda),Q\varphi_\lambda) + \sum_\lambda D\eta(DQ(P\cdot,P\varphi_\lambda),P\varphi_\lambda)\\
&\quad = \sum_\lambda D\eta(PDQ(P\cdot,Q\varphi_\lambda),Q\varphi_\lambda) + \sum_\lambda D\eta(DQ(P\cdot,P\varphi_\lambda),P\varphi_\lambda)\\
&\qquad\qquad (\because\ QDQ(\cdot,Q\cdot) = 0 \text{ by } (4.3))\\
&\quad = \sum_{\lambda,\mu} D\eta(\varphi_\mu,Q\varphi_\lambda)D\hat{Q}(P\cdot,Q\varphi_\lambda,P\varphi_\mu) + \sum_\lambda D\eta(DQ(P\cdot,P\varphi_\lambda),P\varphi_\lambda)\\
&\quad = \sum_{\lambda,\mu} D\eta(\varphi_\mu,Q\varphi_\lambda)D\hat{Q}(P\cdot,P\varphi_\mu,Q\varphi_\lambda) + \sum_\lambda D\eta(DQ(P\varphi_\lambda,P\cdot),P\varphi_\lambda)\\
&\qquad\qquad (\because\ DQ(P\cdot,P\cdot) \text{ と } \hat{Q} \text{ は対称})\\
&\quad = -\sum_{\lambda,\mu} D\eta(\varphi_\mu,Q\varphi_\lambda)(\alpha(\cdot,\varphi_\mu)|Q\varphi_\lambda) + \sum_\lambda D\eta(DQ(P\varphi_\lambda,P\cdot),P\varphi_\lambda)\\
&\quad = -\sum_\mu D\eta(\varphi_\mu,\alpha(\cdot,\varphi_\mu)) + \sum_\lambda D\eta(DQ(P\varphi_\lambda,P\cdot),P\varphi_\lambda)\\
&\quad = -\sum_\mu (\alpha(\cdot,\varphi_\mu)|\alpha(\varphi_\mu,\eta^\sharp)) + \sum_\lambda D\eta(DQ(P\varphi_\lambda,P\cdot),P\varphi_\lambda). \quad (\because\ (4.4))
\end{aligned}
$$

よって

$$
\begin{aligned}
&(dd^* + d^*d)\eta - \nabla^*\nabla\eta\\
&\quad = \eta - D\eta(DQ(\varphi_\lambda,P\cdot),\varphi_\lambda) - (\alpha(\cdot,\varphi_\mu)|\alpha(\varphi_\mu,\eta^\sharp))\\
&\qquad + D\eta(DQ(P\varphi_\lambda,P\cdot),P\varphi_\lambda) + \sigma^{jk}D\eta(DQ(X_k,P\cdot),X_j) + (\alpha(\cdot,\eta^\sharp)|Q\delta Q)\\
&\quad = \eta - (\alpha(\cdot,\varphi_\mu)|\alpha(\varphi_\mu,\eta^\sharp)) + (\alpha(\cdot,\eta^\sharp)|Q\delta Q)
\end{aligned}
$$

となり定理の主張を得る. ■

この定理から $\Delta := -\nabla^*\nabla$ とおくとき次の交換関係が導かれる.

命題 5.4. $f \in \mathcal{W}(S \to \mathbb{R})$ に対して

$$(\Delta\nabla - \nabla\Delta)f = \nabla f + \mathrm{Ric}((\nabla f)^\sharp, \cdot)$$

が成り立つ.

注意 5.2. この関係式は抽象 Wiener 空間の場合の Stroock の交換関係

$$LDf - DLf = Df$$

の自然な一般化になっている. (抽象 Wiener 空間の場合 $\mathrm{Ric} = 0$.)

証明 Weitzenböck の公式より

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= -(d^*d + dd^*)\nabla f + \nabla f + \mathrm{Ric}((\nabla f)^\sharp, \cdot) + \nabla\nabla^*\nabla f \\
&= -(d^*d + dd^*)df + \nabla f + \mathrm{Ric}((\nabla f)^\sharp, \cdot) + dd^*df \\
&= -dd^*df + \nabla f + \mathrm{Ric}((\nabla f)^\sharp, \cdot) + dd^*df \quad (\because d^2 = 0) \\
&= \text{右辺}
\end{aligned}$$

で示せた. ■

この公式から対数 Sobolev 不等式に関係の深い Γ_2 を Ric であらわす公式がえられる. まずマルコフ過程の生成作用素 A が与えられた時 square field operator Γ は

$$\Gamma(f,g) := \frac{1}{2}\{A(f\cdot g) - (Af)g - f(Ag)\}$$

で定義された. ここで f, g は A の定義域の適当な部分集合の元とする. さらに Bakry-Emery の Γ_2 は

$$\Gamma_2(f,g) := \frac{1}{2}\{A\Gamma(f,g) - \Gamma(Af,g) - \Gamma(f,Ag)\}$$

で導入された.

今の場合は $A = \Delta$ ととるから

$$\Gamma(f,g) = (\nabla f|\nabla g)_{H^*}$$

であり Weitzenböck の公式より

$$\begin{aligned}
\Gamma_2(f,g) &= \frac{1}{2}\{\Delta(\nabla f|\nabla g) - (\nabla\Delta f|\nabla g) - (\nabla f|\nabla\Delta g)\} \\
&= \frac{1}{2}\{(\Delta\nabla f|\nabla g) + 2(\nabla^2 f|\nabla^2 g) - (\nabla\Delta f|\nabla g) - (\nabla f|\nabla\Delta g)\} \\
&= \frac{1}{2}\{((\Delta\nabla - \nabla\Delta)f|\nabla g) + (\nabla f|(\Delta\nabla - \nabla\Delta)g) + 2(\nabla^2 f|\nabla^2 g)\} \\
&= (\nabla f|\nabla g) + (\nabla^2 f|\nabla^2 g) + \mathrm{Ric}((\nabla f)^\sharp, (\nabla g)^\sharp).
\end{aligned}$$

Sem. on Probab.
Vol.58 1995年
P1-115

これで Γ_2 を Ric であらわす公式が得られた．

特に，抽象 Wiener 空間 B 上では $\mathrm{Ric}=0$ だから

$$\Gamma_2(f,g)=\Gamma(f,g)+(D^2f|D^2g)$$

となり

$$\Gamma_2(f,f)-\Gamma(f,f)\geq 0$$

が従うから，定理 2.10 から対数 Sobolev 不等式が成立することが分かる．ただし，一般の場合には $(BE)_\gamma$ の成立は期待できない．このことはまたあとで見ていく．

6. Path group

G を d 次元のコンパクトで連結な Lie 群とする．$\mathfrak{g}$ をその Lie 環すなわち G の左不変ベクトル場全体とし $\mathrm{Ad}(G)$ 不変な内積 $(\cdot|\cdot)_{\mathfrak{g}}$ が与えられているとする．$T>0$ を固定し G 上の道の空間 PG を

$$PG=\{\gamma:[0,T]\to G\,;\gamma\text{ は連続で }\gamma_0=e\}$$

で定める．ここで e は G の単位元をあらわす．PG は $\gamma,\xi\in PG$ に対してその積 $\gamma\xi\in PG$ を

$$(\gamma\xi)_t=\gamma_t\xi_t$$

と定義してやることにより群構造をもつ．また $\mathfrak{g}$ 上の道の空間も同様に

$$P\mathfrak{g}=\{B:[0,T]\to\mathfrak{g}\,;B\text{ は連続で }B_0=0\}$$

と定める．PG と抽象 Wiener 空間は次の意味で同形がある．$\xi_1,\dots,\xi_d$ を $\mathfrak{g}$ の正規直交基底とし，次の確率微分方程式

$$\begin{cases} d\gamma_t=\xi_i(\gamma_t)\circ dB_t^i \\ \gamma_0=e \end{cases}\tag{6.1}$$

を考える．ここで $(B_t^1,\dots,B_t^d)$ は d- 次元 Brown 運動で $\circ$ は Fisk-Stratonovich 型確率積分をあらわす．(6.1) は次の様に行列の方程式にかきなおせる．$B_t:=B_t^i\xi_i$ とおくと B_t は $\mathfrak{g}$ に値をとる Brown 運動となり (6.1) は

$$\begin{cases} d\gamma_t=\gamma_t\circ dB_t \\ \gamma_0=e \end{cases}\tag{6.2}$$

となる．(6.2) は一意的な強い解をもつ．すなわち可測写像 $I:P\mathfrak{g}\to PG$ があって $\gamma=I(B)$ は (6.2) の解となる．B_t は $P\mathfrak{g}$ 上に Wiener 測度 μ を誘導するが I による μ の像測度を P^W とかくと $(P\mathfrak{g},\mu)$ と (PG,P^W) は測度空間として同型である．$H\subset P\mathfrak{g}$ を

$$H=\{h\in P\mathfrak{g};h\text{ は絶対連続関数で }\int_0^T|\dot{h}_t|_{\mathfrak{g}}^2dt<\infty\}$$

Sem. on Probab.
Vol.58 1995年
P1-115

で定める．H の内積は

$$(h|k)_H = \int_0^T (\dot{h}_t|\dot{k}_t)_{\mathfrak{g}} dt$$

であたえる．H は PG の接空間と思えるが，以下それを定式化する．$h \in H$ に対して PG の 1 パラメーター部分群 $\{\phi_u; u \in \mathbb{R}\}$ を

$$\phi_u(t) = \exp(uh(t))$$

と定める．ここで $\exp : \mathfrak{g} \to G$ は指数写像とする．ϕ_u は

$$\Phi_u(\gamma) = \phi_u \gamma$$

のように PG 上の 1 パラメーター変換群を定義する．そしてベクトル場 X^h は Φ_u に対する無限小変換で与える．すなわち

$$X^h f(\gamma) = \frac{d}{du} f(\Phi_u(\gamma))\Big|_{u=0} \text{ for } f \in \mathcal{F}C^\infty(PG)$$

で定義する．ここで $\mathcal{F}C^\infty(PG)$ は，ある $F \in C^\infty(G^n)$ $(n = 1, 2, \dots)$ があって

$$f(\gamma) = F(\gamma_{t_1}, \dots, \gamma_{t_n}) \quad (0 < t_1 < \cdots < t_n \le T)$$

とかかれる f 全体とする．

このように定義すると X^h は右不変ベクトル場というべきものになる．そこで PG の γ における接空間 $T(PG)_\gamma$ を

$$T(PG)_\gamma = \{X^h_\gamma; h \in H\}$$

と定義する．接ベクトル束は

$$T(PG) = \bigcup_{\gamma \in PG} T(PG)_\gamma$$

とすればよい．明らかに $T(PG)$ は写像

$$PG \times H \ni (\gamma, h) \mapsto X^h_\gamma \in T(PG)$$

によって $PG \times H$ と同一視されるが，これにより $T(PG)_\gamma$ における内積が

$$(X^h_\gamma | X^k_\gamma) = (h|k)_H$$

のように定義される．この内積は定義から右不変であるが，一般に左不変でないことに注意しておく．さらに (6.2) の解 I が，これから決まる計量で $P\mathfrak{g}$ と PG の等距離同型を与えることをみておく．$f \in \mathcal{F}C^\infty(PG)$ に対して $h \mapsto X_h f$ は連続線形写像であるが，これを $\hat{\nabla} f$ であらわす．すなわち

$$\langle \hat{\nabla} f, h \rangle = X^h f.$$

Gross [46] にあるように I の微分 I_* は

$$I_*(h) = \gamma \cdot h \tag{6.3}$$

であたえられる．ここで $\gamma\cdot h$ は

$$(\gamma\cdot h)(t)=\int_0^t \mathrm{Ad}(\gamma_s)\dot{h}(s)ds$$

で定義される H の元である．(6.3) は

$$\langle D(f\circ I)_B, h\rangle=\langle\hat{\nabla}f, \gamma\cdot h\rangle$$

を意味する．ここで B と γ は $\gamma=I(B)$ で結ばれている．つまり次の可換な図式が成立している．

$$\begin{array}{ccc} T(P\mathfrak{g})\cong P\mathfrak{g}\times H & \xrightarrow{I_*} & PG\times H\cong T(PG) \\ \downarrow & & \downarrow \\ P\mathfrak{g} & \xrightarrow{I} & PG \end{array} \tag{6.4}$$

I_* が等距離写像をあたえていることは，

$$|\gamma\cdot h|^2_{T(PG)_\gamma}=\int_0^T |\mathrm{Ad}(\gamma_s)\dot{h}_s|^2_{\mathfrak{g}}ds=\int_0^T|\dot{h}_s|^2_{\mathfrak{g}}ds=|h|^2_H=|h|^2_{T(P\mathfrak{g})_B}$$

によってわかる．また，このことから PG における共変微分は $P\mathfrak{g}$ におけるそれを通じて定義すれば良いことがわかる．

定義 6.1. X^h, X^k を $h,k\in H$ に付随した PG 上の右不変ベクトル場とする．このとき PG における共変微分 $\hat{\nabla}$ を

$$\hat{\nabla}_{X^h}X^k=I_*\left\{D(I_*^{-1}(X^k))(I_*^{-1}(X^h))\right\}$$

で定義する．

$\hat{\nabla}_{X^h}X^k$ は次のような表示をもつ．

命題 6.1. X^h, X^k を $h,k\in H$ に付随した PG 上の右不変ベクトル場とする．このとき，

$$\hat{\nabla}_{X^h}X^k=X^l \tag{6.5}$$

となる．ここで l は

$$l(t)=-\int_0^t[h(s),\dot{k}(s)]ds$$

となる H の元とする．さらに

$$[X^h,X^k]:=\hat{\nabla}_{X^h}X^k-\hat{\nabla}_{X^k}X^h=-X^{[h,k]} \tag{6.6}$$

がなりたつ．ここで $[h,k](t)=[h(t),k(t)]$ とする．

Sem. on Probab.
Vol.58 1995年
P1-115

証明 $\gamma = I(B)$ に対して $I_*^{-1}(X^k) = \gamma^{-1}\cdot k$ だから

$$\begin{aligned}D(\gamma^{-1}\cdot k)(t) &= D(\int_0^t \mathrm{Ad}(\gamma_s^{-1})\dot{k}(s)ds)\\ &= D(\int_0^t \gamma_s^{-1}\dot{k}(s)\gamma_s ds)\\ &= -\int_0^t \gamma_s^{-1}D\gamma_s\gamma_s^{-1}\dot{k}(s)\gamma_s ds + \int_0^t \gamma_s^{-1}D\gamma_s ds\\ &= -\int_0^t [\gamma_s^{-1}D\gamma_s, \mathrm{Ad}(\gamma_s^{-1})\dot{k}(s)]ds\end{aligned}$$

となるが，一方

$$\begin{aligned}\gamma_s^{-1}\langle D\gamma_s, \gamma^{-1}\cdot h\rangle &= \mathrm{Ad}(\gamma_s^{-1})\int_0^s \mathrm{Ad}(\gamma_u)\mathrm{Ad}(\gamma_u^{-1}\dot{h}(u)du\\ &= \mathrm{Ad}(\gamma_s^{-1}h(s))\end{aligned}$$

だから

$$\begin{aligned}\langle D(\gamma^{-1}\cdot k)(t), \gamma^{-1}\cdot h\rangle &= -\int_0^t [\mathrm{Ad}(\gamma_s^{-1})h(s), \mathrm{Ad}(\gamma_s^{-1})\dot{k}(s)]ds\\ &= -\int_0^t \mathrm{Ad}(\gamma_s^{-1})[h(s), \dot{k}(s)]ds.\end{aligned}$$

つまり

$$\langle D(\gamma^{-1}\cdot h), \gamma^{-1}\cdot k\rangle = -\int_0^{\cdot} \mathrm{Ad}(\gamma_s^{-1})[h(s), \dot{k}(s)]ds$$

だが，これの I_* による像を計算すると

$$\begin{aligned}I_*\langle D(\gamma^{-1}\cdot h), \gamma^{-1}\cdot k\rangle &= -\int_0^{\cdot} \mathrm{Ad}(\gamma_s)\mathrm{Ad}(\gamma_s^{-1})[h(s), \dot{k}(s)]\\ &= -\int_0^{\cdot} [h(s), \dot{k}(s)]ds\end{aligned}$$

を得るが，これは (6.5) を意味する．次に (6.6) については，$[\cdot,\cdot]$ に関する微分の公式から

$$-\int_0^t [h(s), \dot{k}(s)]ds + \int_0^t [k(s), \dot{h}(s)] = -\int_0^t \frac{d}{ds}[h(s), k(s)]ds = -[h(t), k(t)]$$

がなりたつのでこれと (6.5) から (6.6) を得る． ■

最後に，PG 上のベクトル場の発散を計算しておく．これを述べるため，もうひとつ $\mathfrak{g}$ に値をとる Brown 運動を導入する．$\mathfrak{g}$ に値をとる確率過程 (b_t) を

$$b_t = \int_0^t \mathrm{Ad}(\gamma_s)dB_s \tag{6.7}$$

と定義する．ここで積分は Itô 型の確率積分とする．$\mathfrak{g}$ の内積 $(\cdot|\cdot)_{\mathfrak{g}}$ が $\mathrm{Ad}(G)$ 不変だからこれは $\mathfrak{g}$ に値をとる Brown 運動になる．これに関して次の命題がなりたつ．

命題 6.2. 次の等式が成立する．

$$b_t = \int_0^t \mathrm{Ad}(\gamma_s)dB_s = \int_0^t \mathrm{Ad}(\gamma_s)\circ dB_s.$$

Sem. on Probab.
Vol.58 1995年
P1-115

証明 $\mathrm{Ad}(\gamma_t), B_t$ の基底 $\{\xi_1, \dots \xi_d\}$ に関する成分を $\mathrm{Ad}(\gamma_t)^i_j$, B^i_t とかく．それぞれの確率積分の定義から

$$\mathrm{Ad}(\gamma_t)^i_j \circ dB^j_t = \mathrm{Ad}(\gamma_t)^i_j dB^j_t + \frac{1}{2}\langle d\mathrm{Ad}(\gamma_t)^i_j, dB^j_t\rangle$$

となる．ここで $\langle\cdot,\cdot\rangle$ は quadratic variation をあらわす．(γ_t) は (6.1) の解だから $(\mathrm{Ad}(\gamma_t))$ は，確率微分方程式

$$d\mathrm{Ad}(\gamma_t)^i_j = \mathrm{Ad}(\gamma_t)^i_k \mathrm{Ad}(\xi_l)^k_j \circ dB^l_t$$

をみたす．よって

$$\begin{aligned}\langle d\mathrm{Ad}(\gamma_t)^i_j, dB^j_t\rangle &= \langle \mathrm{Ad}(\gamma_t)^i_k \mathrm{Ad}(\xi_l)^k_j \circ dB^l_t, dB^j_t\rangle \\ &= \langle \mathrm{Ad}(\gamma_t)^i_k \mathrm{Ad}(\xi_l)^k_j dB^l_t, dB^j_t\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{d} \mathrm{Ad}(\gamma_t)^i_k \mathrm{Ad}(\xi_j)^k_j dt \\ &= \sum_{j,k=1}^{d} \mathrm{Ad}(\gamma_t)^i_k([\xi_j, \xi_j]|\xi_k)_{\mathfrak{g}} \\ &= 0\end{aligned}$$

となり，証明を終る． ■

この命題からすぐに

$$B_t = \int_0^t \mathrm{Ad}(\gamma_s^{-1}) db_s = \int_0^t \mathrm{Ad}(\gamma_s^{-1}) \circ db_s$$

がわかるが，これにより (6.2) は

$$d\gamma_t = \gamma_t \circ dB_t = \gamma_t \circ (\mathrm{Ad}(\gamma_t^{-1}) \circ db_t) = \gamma_t \gamma_t^{-1} \circ db_t \gamma_t = \circ db_t \gamma_t$$

と変形される．

ベクトル場 X の発散 $\mathrm{div}X$ は，$f \in \mathcal{F}C^\infty(PG)$ に対し

$$\int (Xf) dP^W = -\int (\mathrm{div}X) f dP^W$$

をみたすものであるが，左辺は I で引き戻すと

$$\int \langle D(f \circ I), I_*^{-1}(X)\rangle d\mu$$

となるから $X^\flat$ を X に付随する 1-form すなわち $X^\flat(Y) = (X|Y)$ をみたすものとすると，$\mathrm{div}X = -\delta X^\flat$ となる．これから，右不変ベクトル場 X^h の発散が次のように計算される．

命題 6.3. $h \in H$ とする．このとき

$$\mathrm{div}\, X^h = -\delta(X^h)^\flat = -\int_0^T (\dot{h}(t)|db_t)_{\mathfrak{g}}$$

がなりたつ．ここで (b_t) は (6.7) の Brown 運動とする．

Sem. on Probab.
Vol.58 1995年
P1-115

証明 X^h を I で引き戻すと

$$(\gamma^{-1}\cdot h)(t)=\int_0^t \mathrm{Ad}(\gamma_s^{-1})\dot{h}(s)ds$$

となるが，被積分関数が adapted だから $\delta(\gamma^{-1}\cdot h)$ はそれの確率積分

$$\delta(\gamma^{-1}\cdot h)=\int_0^T(\mathrm{Ad}(\gamma_s^{-1})\dot{h}(s)|dB_s)_{\mathfrak{g}}$$

となる．$db_s=\mathrm{Ad}(\gamma_s)dB_s$ であり $(\cdot,\cdot)_{\mathfrak{g}}$ は $\mathrm{Ad}(G)$ 不変だったから

$$\begin{aligned}\mathrm{div}X^h&=-\delta(\gamma^{-1}\cdot h)\\&=-\int_0^T(\mathrm{Ad}(\gamma_s^{-1}\dot{h}(s)|dB_s)_{\mathfrak{g}}\\&=-\int_0^T(\dot{h}(s)|\mathrm{Ad}(\gamma_s)dB_s)_{\mathfrak{g}}\\&=-\int_0^T(\dot{h}(s)|db_s)_{\mathfrak{g}}\end{aligned}$$

となり証明を終る． ■

7. Based loop group

この節では based loop group

$$\Omega G=\{\gamma\in PG;\gamma_T=e\}$$

をあつかう．ΩG の接空間としては

$$H_0:=\{h\in H;h(T)=0\}$$

をとる．PG の時と同様に右不変ベクトル場が次のように定義される．$h\in H_0$ にたいして ΩG の 1 パラメーター部分群 $\{\phi_u;u\in\mathbb{R}\}$ を

$$\phi_u(t)=\exp\{uh(t)\}$$

と定義する．これは 1 パラメーター変換群

$$\Phi_u(\gamma)=\phi_u\gamma$$

を定義する．これから右不変ベクトル場 X^h は

$$X^hf(\gamma)=\frac{d}{du}f(\Phi_u(\gamma))\Big|_{u=0}\ \text{for}\ f\in\mathcal{F}C^\infty(\Omega G)$$

となる．ここで $\mathcal{F}C^\infty(\Omega G)$ は，ある $F\in C^\infty(G^n)$ があって

$$f(\gamma)=F(\gamma_{t_1},...,\gamma_{t_n}),\quad 0<t_1<\cdots<t_n<1$$

とかけるもの全体とする．ΩG は第 6 節の I をもちいると

$$S=\{B\in P\mathfrak{g};I(B)_T=e\}$$

Sem. on Probab.
Vol.58 1995年
P1-115

という Wiener 空間内の部分多様体と同一視される．以後 $I(B)_T$ を γ_T と書くことにし，第 3 節の F としてこれをとって計算を行なう．まず，γ_t の H- 微分を計算する．

補題 7.1.

$$\gamma_t^{-1}\langle D\gamma_t, h\rangle = \mathrm{Ad}(\gamma_t^{-1})\int_0^t \mathrm{Ad}(\gamma_s)\dot{h}(s)ds. \tag{7.1}$$

証明　(6.2) から $dB_t = \gamma_t^{-1}\circ d\gamma_t$ が従うが，この両辺を h 方向に微分すると

$$\begin{aligned}\dot{h}(t)dt &= \langle D(\gamma_t^{-1}\circ d\gamma_t), h\rangle \\ &= -\gamma_t^{-1}\langle D\gamma_t^{-1}\langle D\gamma_t, h\rangle\gamma_t^{-1}\circ d\gamma_t + \gamma_t^{-1}\circ d\langle D\gamma_t, h\rangle \\ &= -\gamma_t^{-1}\langle D\gamma_t, h\rangle\circ dB_t + \gamma_t^{-1}\circ d\langle D\gamma_t, h\rangle\end{aligned}$$

を得る．これから

$$d\langle D\gamma_t, h\rangle = \langle D\gamma_t, h\rangle\circ dB_t + \gamma_t\dot{h}(t)dt$$

が従う．

$$Y_t = \int_0^t \mathrm{Ad}(\gamma_s)\dot{h}(s)ds = \int_0^t \gamma_s\dot{h}(s)\gamma_s^{-1}dt$$

とおくと $(Y_t\gamma_t)$ のみたす確率微分方程式は

$$\begin{aligned}d(Y_t\gamma_t) &= dY_t\circ\gamma_t + Y_t\circ d\gamma_t \\ &= \gamma_t\dot{h}(t)\gamma_t^{-1}dt\circ\gamma_t + Y_t\circ(\gamma_t\circ dB_t) \\ &= \gamma_t\dot{h}(t)dt + (Y_t\gamma_t)\circ dB_t\end{aligned}$$

となり $\langle D\gamma_t, h\rangle$ のみたすそれと等しくなる．解の一意性から

$$\langle D\gamma_t, h\rangle = Y_t\gamma_t$$

がわかり，これから

$$\gamma_t^{-1}\langle D\gamma_t, h\rangle = \gamma_t^{-1}Y_t\gamma_t = \mathrm{Ad}(\gamma_t^{-1})\int_0^t \mathrm{Ad}(\gamma_s)\dot{h}(s)ds$$

のように (7.1) が従う．　■

「S と ΩG が I で同一視される」ことを，もう少し正確に述べておく．S の接空間については，第 3 節にしたがうと

$$T(S) = \{h\in H; \langle D\gamma_T, h\rangle = 0\}$$

であるが，(7.1) から $h\in T(S)$ に対して

$$(\gamma\cdot h)_T = I_*(h)_T = 0$$

であるから I_* は $T(S)_B$ から $H_0\cong T(\Omega G)_\gamma$ への等距離写像になっていることがわかる．

Sem. on Probab.
Vol.58 1995年
P1-115

γ_T の Malliavin covariance matrix σ については，$\{h_\lambda\}$ を H の正規直交基底とすると

$$\sigma = \sum_\lambda \langle D\gamma_T, h_\lambda\rangle \otimes \langle D\gamma_T, h_\lambda\rangle$$

とかける．これと (7.1) から

$$\begin{aligned}
\sigma &= \sum_\lambda \langle \gamma_T^{-1} D\gamma_T, h_\lambda\rangle \otimes \langle \gamma_T^{-1} D\gamma_T, h_\lambda\rangle \\
&= \sum_\lambda \mathrm{Ad}(\gamma_T^{-1})(\gamma\cdot h_\lambda) \otimes \mathrm{Ad}(\gamma_T^{-1})(\gamma\cdot h_\lambda) \\
&= \sum_\lambda \int_0^T \mathrm{Ad}(\gamma_T^{-1})\mathrm{Ad}(\gamma_s)\dot{h}_\lambda(s)ds \otimes \int_0^T \mathrm{Ad}(\gamma_T^{-1})\mathrm{Ad}(\gamma_s)\dot{h}_\lambda(s)ds \\
&= \sum \lambda \sum_{i,j=1}^d \int_0^T (\mathrm{Ad}(\gamma_T^{-1}\gamma_s)\dot{h}_\lambda(s)|\xi_i)_{\mathfrak{g}} ds \int_0^T (\mathrm{Ad}(\gamma_T^{-1}\gamma_s)\dot{h}_\lambda(s)|\xi_j)_{\mathfrak{g}} ds\, \xi_i \otimes \xi_j \\
&= \sum_{i,j=1}^d \sum_\lambda \int_0^T (\dot{h}_\lambda(s)|\mathrm{Ad}(\gamma_s^{-1}\gamma_T)\xi_i)_{\mathfrak{g}} ds \int_0^T (\dot{h}_\lambda(s)|\mathrm{Ad}(\gamma_s^{-1}\gamma_T)\xi_j)_{\mathfrak{g}} ds\, \xi_i \otimes \xi_j \\
&= \sum_{i,j=1}^d \int_0^T (\mathrm{Ad}(\gamma_s^{-1}\gamma_T)\xi_i|\mathrm{Ad}(\gamma_s^{-1}\gamma_T)\xi_i)_{\mathfrak{g}} ds\, \xi_i \otimes \xi_j \\
&= \sum_{i,j=1}^d \int_0^T (\xi_i|\xi_j)_{\mathfrak{g}} ds\, \xi_i \otimes \xi_j \\
&= T\sum_{i=1}^d \xi_i \otimes \xi_i
\end{aligned}$$

であるが，これから $\det\sigma = T^d$ がわかり，第 3 節の m は

$$m = \sqrt{T^d}\delta_\varepsilon(\gamma_T)d\mu = T^{d/2}p_T(e,e)E[\,\cdot\,|\gamma_T = e]$$

となる．ここで p_T は γ_T の分布の密度関数である．すなわち m と 条件付測度 $E[\,\cdot\,|\gamma_T = e]$ は定数倍を除いて等しい．

ΩG 上の共変微分を定義する．$H_0^\perp$ は $\psi_t = t/\sqrt{T}$ を用いて

$$H_0^\perp = \{X\psi\,;X\in\mathfrak{g}\}$$

とあらわされる．$H_0^\perp$ は $\mathfrak{g}$ と同型 (内積までこめて) であるから，以下この 2 つを同一視する．射影 $p: H\to H_0$ と $q: H\to H_0^\perp$ は

$$\begin{aligned}
ph &= h - \frac{h(T)}{\sqrt{T}}\psi, \\
qh &= \frac{h(T)}{\sqrt{T}}
\end{aligned}$$

Sem. on Probab.
Vol.58 1995年
P1-115

とかける．ΩG 上の共変微分は

$$\nabla_X Y = p\hat{\nabla}_X Y, \quad X, Y \in \Gamma(T(\Omega G))$$

と定義される．ΩG の第 2 基本形式の定義は

$$A(X, Y) = q\hat{\nabla}_X Y$$

である．これらの定義はすべて I によって Wiener 空間の部分多様体の時のそれと同値なものとなる．

命題 7.2. $h, k \in H_0$ とする．このとき

$$A(X^h, X^k) = -\frac{1}{\sqrt{T}}\int_0^T [h(s), \dot{k}(s)]ds$$

となる．

証明　命題 6.1 を $H_0^\perp$ に射影すれば良い．　■

ΩG の Ricci 曲率を計算する．Ricci 曲率は第 2 基本形式 A を用いて次のように書けた．(cf. 定義 5.3)

$$\mathrm{Ric}(\cdot,\cdot) = -\sum_\lambda (A(\cdot, X^{h_\lambda})|A(\cdot, X^{h_\lambda})) + (A(\cdot\,,\cdot)|q\delta q).$$

ここで $\{h_\lambda\}$ は H_0 の正規直交基底とする．まず $q\delta q$ を計算する．

補題 7.3.

$$q\delta q = \frac{b_T}{\sqrt{T}}.$$

証明　S の方での射影作用素 Q を計算する．

$$\begin{aligned} Qh &= I_*^{-1}(q(I_*h))Qh \\ &= I_*^{-1}(q(\gamma\cdot h)) \\ &= I_*^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{T}}(\gamma\cdot h)(T)\psi\right) \\ &= \frac{1}{T}\int_0^{\cdot} \mathrm{Ad}(\gamma_t^{-1})(\gamma\cdot h)(T)dt. \end{aligned} \tag{7.2}$$

H_0 の正規直交基底を $\{h_\lambda\}$ とすると δQ は

$$\delta Q = \delta\{\sum_\lambda (h_\lambda|Q(\cdot))_H \otimes h_\lambda\} = \sum_\lambda \delta(h_\lambda|Q(\cdot))_H h_\lambda$$

とあらわされる．この式で $(h_\lambda|Q(\cdot))_H$ の部分へ (7.2) を代入して計算する．$h \in H$ として

$$\begin{aligned} (h_\lambda|Q(h)) &= \frac{1}{T}\int_0^T \left(\dot{h}_\lambda(t)\middle|\mathrm{Ad}(\gamma_t^{-1})\int_0^T \mathrm{Ad}(\gamma_s)\dot{h}(s)ds\right)_{\mathfrak{g}} dt \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T\int_0^T (\mathrm{Ad}(\gamma_s^{-1}\gamma_t)\dot{h}_\lambda(t)|\dot{h}(s))_{\mathfrak{g}}\, ds\, dt \end{aligned}$$

であるから

$$(h_\lambda|Q(\cdot))_H = \frac{1}{T}\int_0^{\cdot} ds \int_0^T \mathrm{Ad}(\gamma_s^{-1}\gamma_t)\dot{h}_\lambda(t)dt \tag{7.3}$$
$$= \frac{1}{T}\int_0^{\cdot} ds \int_0^s \mathrm{Ad}(\gamma_s^{-1}\gamma_t)\dot{h}_\lambda(t)dt + \frac{1}{T}\int_0^{\cdot} ds \int_s^T \mathrm{Ad}(\gamma_s^{-1}\gamma_t)\dot{h}_\lambda(t)dt$$

とわけられる．第1項の被積分関数は adapted だから

$$\delta\Big(\frac{1}{T}\int_0^{\cdot} ds \int_0^s \mathrm{Ad}(\gamma_s^{-1}\gamma_t)\dot{h}_\lambda dt\Big) = \frac{1}{T}\int_0^T \Big(\int_0^s \mathrm{Ad}(\gamma_s^{-1}\gamma_t)\dot{h}_\lambda(t)dt\Big|dB_s\Big)_{\mathfrak{g}}$$
$$= \frac{1}{T}\int_0^T \Big(\int_0^s \mathrm{Ad}(\gamma_t)\dot{h}_\lambda(t)dt\Big|\mathrm{Ad}(\gamma_s)dB_s\Big)_{\mathfrak{g}}$$
$$= \frac{1}{T}\int_0^T ((\gamma\cdot h_\lambda)(s)|db_s)_{\mathfrak{g}}$$

とできる．第2項については $\Delta = \{0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_N = T\}$ を $[0,T]$ の分割，$|\Delta| = \max\{s_k - s_{k-1}; k = 1,\ldots,N\}$ とすると

$$\frac{1}{T}\int_0^{\cdot} ds \int_s^T \mathrm{Ad}(\gamma_s^{-1}\gamma_t)\dot{h}_\lambda(t)dt = \lim_{|\Delta|\to 0}\frac{1}{T}\sum_{k=1}^N \int_{s_k}^T \mathrm{Ad}(\gamma_{s_k}^{-1}\gamma_t)\dot{h}_\lambda(t)dt \int_0^{\cdot} 1_{[s_{k-1},s_k]}(s)ds$$

となる．ここで右辺の収束は $L^p(P\mathfrak{g},\mu)$ における強収束である．また (γ_t) は左不変 Brown 運動だから $t \geq s$ に対して

$$\gamma_s^{-1}\gamma_t = \gamma_{t-s}(\theta_s B)$$

となる．ここで $(\theta_s B)_u = B_{s+u} - B_s$ とする．これから $\mathrm{supp}(\dot{h}) \subset [0,s]$ なる h に対して

$$\langle D\mathrm{Ad}(\gamma_s^{-1}\gamma_t), h\rangle = 0$$

がわかる．このため,

$$\delta\Big\{\frac{1}{T}\sum_{k=1}^N \int_{s_k}^T \mathrm{Ad}(\gamma_{s_k}^{-1}\gamma_t)\dot{h}_\lambda(t)dt \int_0^{\cdot} 1_{[s_{k-1},s_k]}(s)ds\Big\}$$
$$= -\frac{1}{T}\sum_{k=1}^N\sum_{i=1}^d \Big(D\int_{s_k}^T (\mathrm{Ad}(\gamma_{s_k}^{-1}\gamma_t)\dot{h}_\lambda(t)|X_i)_{\mathfrak{g}}dt\Big|\int_0^{\cdot} X_i 1_{[s_{k-1},s_k]}(s)ds\Big)_H$$
$$+\frac{1}{T}\sum_{k=1}^N\sum_{i=1}^d \int_{s_k}^T (\mathrm{Ad}(\gamma_{s_k}^{-1}\gamma_t)\dot{h}_\lambda(t)|X_i)_{\mathfrak{g}}dt\,\delta\Big\{\int_0^{\cdot} X_i 1_{[s_{k-1},s_k]}(s)ds\Big\}$$
$$= \frac{1}{T}\sum_{k=1}^N \Big(\int_{s_k}^T \mathrm{Ad}(\gamma_{s_k}^{-1}\gamma_t)\dot{h}_\lambda(t)dt\Big|B_{s_k} - B_{s_{k-1}}\Big)_{\mathfrak{g}}$$
$$= \frac{1}{T}\sum_{k=1}^N\sum_{l=k}^{N-1} \Big(\int_{s_l}^{s_{l+1}} \mathrm{Ad}(\gamma_t)\dot{h}_\lambda(t)dt\Big|\mathrm{Ad}(\gamma_{s_k})(B_{s_k} - B_{s_{k-1}})\Big)_{\mathfrak{g}}$$
$$= \frac{1}{T}\sum_{l=1}^{N-1} \Big(\int_{s_l}^{s_{l+1}} \mathrm{Ad}(\gamma_t)\dot{h}_\lambda(t)dt\Big|\sum_{k=1}^l \mathrm{Ad}(\gamma_{s_k})(B_{s_k} - B_{s_{k-1}})\Big)_{\mathfrak{g}}$$

Sem. on Probab.
Vol.58 1995年
P1-115

となる．さらに

$$\lim_{\Delta\to 0}\sum_{k;s_k\le t}\mathrm{Ad}(\gamma_{s_k})(B_{s_k}-B_{s_{k-1}})=2\int_0^t\mathrm{Ad}(\gamma_s)\circ dB_s-\int_0^t\mathrm{Ad}(\gamma_s)dB_s=b_t$$

となることに注意する．ここで命題 6.2 を使っている．この式と，Itô の公式から

$$\begin{aligned}
&\lim_{|\Delta\to 0|}\delta\left\{\frac{1}{T}\sum_{k=1}^{N}\int_{s_k}^{T}\mathrm{Ad}(\gamma_{s_k}^{-1}\gamma_t)\dot h_\lambda(t)dt\int_0^{\cdot}1_{[s_{k-1},s_k]}(s)ds\right\}\\
&=\frac{1}{T}\int_0^T(\mathrm{Ad}(\gamma_t)\dot h_\lambda(t)|b_t)_{\mathfrak g}dt\\
&=\frac{1}{T}\left(\int_0^T\mathrm{Ad}(\gamma_t)\dot h_\lambda(t)dt\middle|b_t\right)_{\mathfrak g}-\frac{1}{T}\int_0^T\left(\int_0^t\mathrm{Ad}(\gamma_s)\dot h_\lambda(s)ds\middle|db_t\right)_{\mathfrak g}\\
&=\frac{1}{T}((\gamma\cdot h_\lambda)(T)|b_T)_{\mathfrak g}-\frac{1}{T}\int_0^T((\gamma\cdot h_\lambda)|db_t)_{\mathfrak g}
\end{aligned}$$

が従う．これで (7.3)の第 2 項の計算がおわる．第 1 項と合わせると

$$\begin{aligned}
\delta(h_\lambda|Q(\cdot))_H&=\frac{1}{T}\int_0^T((\gamma\cdot h_\lambda)(s)|db_s)_{\mathfrak g}+\frac{1}{T}((\gamma\cdot h_\lambda)(T)|b_T)_{\mathfrak g}-\frac{1}{T}\int_0^T((\gamma\cdot h_\lambda)(t)|db_t)_{\mathfrak g}\\
&=\frac{1}{T}((\gamma\cdot h_\lambda)(T)|b_T)_{\mathfrak g}
\end{aligned}$$

をえる．λ について足しあわせると

$$\sum_\lambda\delta(h_\lambda|q(\cdot))_H h_\lambda=\frac{1}{T}\sum_\lambda((\gamma\cdot h_\lambda)(T)|b_T)_{\mathfrak g}h_\lambda$$

となる．これで $Q\delta Q$ の計算ができるから

$$\begin{aligned}
q\delta q&=I_*(Q\delta Q)\\
&=\frac{1}{T}\sum_\lambda((\gamma\cdot h_\lambda)(T)|b_T)_{\mathfrak g}I_*(qh_\lambda)\\
&=\frac{1}{T}\sum_\lambda((\gamma\cdot h_\lambda)(T)|b_T)_{\mathfrak g}\frac{1}{\sqrt{T}}(\gamma\cdot h_\lambda)(T)\\
&=\frac{1}{T^{3/2}}\sum_\lambda\sum_{i=1}^{d}\left(\int_0^T\mathrm{Ad}(\gamma_s)\dot h_\lambda(s)ds\middle|b_T\right)_{\mathfrak g}\left(\int_0^T\mathrm{Ad}(\gamma_s)\dot h_\lambda(s)ds\middle|\xi_i\right)_{\mathfrak g}\xi_i\\
&=\frac{1}{T^{3/2}}\sum_{i=1}^{d}\sum_\lambda\int_0^T(\dot h_\lambda(s)|\mathrm{Ad}(\gamma_s^{-1})b_T)_{\mathfrak g}ds\int_0^T(\dot h_\lambda(s)|\mathrm{Ad}(\gamma_s^{-1})\xi_i)_{\mathfrak g}ds\,\xi_i\\
&=\frac{1}{T^{3/2}}\sum_{i=1}^{d}\int_0^T(\mathrm{Ad}(\gamma_s^{-1})b_T|\mathrm{Ad}(\gamma_s^{-1})\xi_i)_{\mathfrak g}ds\,\xi_i\\
&=\frac{1}{T^{3/2}}\sum_{i=1}^{d}T(b_T|\xi_i)_{\mathfrak g}\xi_i\\
&=\frac{1}{\sqrt{T}}b_T
\end{aligned}$$

となり，証明をおわる． ■

さて，Ricci 曲率であるが，この補題から次のようになる (Getzler [43]).

命題 7.4. Ricci 曲率は以下のように書かれる.

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}(X^h, X^k) =&\frac{1}{T}\int_0^T K(h(s), k(s))ds - \frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T K(h(s), k(t))dsdt \\ &+ \frac{1}{\sqrt{T}}(b_T|A(X^h, X^k))_{\mathfrak{g}}.\end{aligned} \tag{7.4}$$

ここで K は Killing 形式とする．すなわち $K(\xi,\eta) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}\xi\,\mathrm{ad}\eta)$.

証明 $\sum_\lambda(A(\cdot, X^{h_\lambda})|A(\cdot, X^{h_\lambda}))$ の部分を計算すればよい．$\mathfrak{g}$ の内積が $\mathrm{Ad}(G)$ 不変だから $\mathrm{ad}\xi$ ($\xi\in\mathfrak{g}$) は反対称である．よって $\xi,\eta\in\mathfrak{g}$ に対して $(\xi_i)_i$ を $\mathfrak{g}$ の正規直交基底とすると

$$\sum_i(\mathrm{ad}\xi(\xi_i)|\mathrm{ad}\eta(\xi_i))_{\mathfrak{g}} = -\sum_i(\xi_i|\mathrm{ad}\xi\,\mathrm{ad}\eta(\xi_i))_{\mathfrak{g}} = -\mathrm{tr}(\mathrm{ad}\xi\,\mathrm{ad}\eta) = -K(\xi,\eta)$$

がなりたつ．$\{h_\lambda\}\cup\{\xi_i\psi\}$ は H の完全正規直交系をなすから

$$\begin{aligned}&\sum_\lambda(A(X^h, X^{h_\lambda})|A(X^k, X^{h_\lambda}))_{\mathfrak{g}} \\ &\quad= \frac{1}{T}\sum_\lambda\left(\int_0^T[h(s),\dot h_\lambda(s)]ds\middle|\int_0^T[k(t),\dot h_\lambda(t)]dt\right)_{\mathfrak{g}} \\ &\quad= \frac{1}{T}\sum_\lambda\sum_{i=1}^d\int_0^T(\mathrm{ad}h(s)(\xi_i)|\dot h_\lambda(s))_{\mathfrak{g}}ds\int_0^T(\mathrm{ad}k(t)(\xi_i)|\dot h_\lambda(s))_{\mathfrak{g}}dt \\ &\quad= \frac{1}{T}\sum_{i=1}^d\int_0^T(\mathrm{ad}h(s)(\xi_i)|\mathrm{ad}k(s)(\xi_i))_{\mathfrak{g}}ds \\ &\qquad - \frac{1}{T}\sum_{i,j=1}^d\int_0^T(\mathrm{ad}h(s)(\xi_i)|\xi_j\dot\psi(s))_{\mathfrak{g}}ds\int_0^T(\mathrm{ad}k(t)(\xi_i)|\xi_j\dot\psi(t))_{\mathfrak{g}}dt \\ &\quad= -\frac{1}{T}\int_0^T K(h(s),k(s))ds + \frac{1}{T^2}\sum_{i=1}^d\int_0^T\int_0^T(\mathrm{ad}h(s)(\xi_i)|\mathrm{ad}k(t)(\xi_i))_{\mathfrak{g}}ds\,dt \\ &\quad= -\frac{1}{T}\int_0^T K(h(s),k(s))ds + \frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T K(h(s),k(t))ds\,dt\end{aligned}$$

がえられ，証明をおわる． ■

上の命題を用いて第 5 節の最後で述べた Γ_2 の具体的な表示を得ることが出来る．もし $\Gamma_2(f,f)+\gamma\Gamma(f,f)\geq 0$ となる $\gamma<0$ が存在すれば定理 2.9 から対数 Sobolev 不等式が従う．実際 Getzler [43] はこのことを目指していたのであるが，G が可換群 (つまり torus) のとき以外はこのことは成立しない．b_T が有界ではないからである．しかしながら対数 Sobolev 不等式が成立するかどうかは今なお興味ある問題である．完全な解答は得られていないが，次の節でこの問題へのアプローチを試みる．そのために $A(X^h, X^k)$ の部分を評価しておこう．M を

$$|[X,Y]|_{\mathfrak{g}}\leq M|X|_{\mathfrak{g}}|Y|_{\mathfrak{g}}$$

Sem. on Probab.
Vol.58 1995年
P1-115

を満たす数とする．命題 7.2 の表示をつかうと

$$\begin{aligned}|A(X^h, X^k)|_{\mathfrak{g}} &\le \frac{1}{\sqrt{T}}\int_0^T |[h(t), \dot{k}(t)]|_{\mathfrak{g}} dt \\ &\le \frac{M}{\sqrt{T}}\int_0^T |h(t)|_{\mathfrak{g}} |\dot{k}(t)|_{\mathfrak{g}} dt \\ &\le \frac{M}{\sqrt{T}} \sup_{t\in[0,T]} |h(t)|_{\mathfrak{g}} \int_0^T |\dot{k}(t)|_{\mathfrak{g}} dt \\ &\le \frac{M}{\sqrt{T}}\int_0^T |\dot{h}(t)|_{\mathfrak{g}} dt \int_0^T |\dot{k}(t)|_{\mathfrak{g}} dt \\ &\le \frac{M}{\sqrt{T}} T \left\{\int_0^T |\dot{h}(t)|_{\mathfrak{g}}^2 dt\right\}^{1/2} \left\{\int_0^T |\dot{k}(t)|_{\mathfrak{g}}^2 dt\right\}^{1/2} \\ &= M\sqrt{T}|h|_H|k|_H\end{aligned}$$

がわかる．これは

$$\|A\| := \sup_{|h|_H, |k|_H \le 1} |A(X^h, X^k)|_{\mathfrak{g}} \le M\sqrt{T} \tag{7.5}$$

と書ける．

さて，あとの議論で重要になるのは Ricci 曲率の下からの評価である．G はコンパクトだから Killing 形式 K は負定値であり，(7.4) の右辺第 1 項だけ評価すればよい．まず明らかに

$$|K(X,Y)| = |\sum_i (\operatorname{ad} X(X_i)| \operatorname{ad} Y(X_i))_{\mathfrak{g}}| \le \sum_i M^2 d |X|_{\mathfrak{g}} |Y|_{\mathfrak{g}}.$$

これから

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{T}\int_0^T K(h(s), k(s)) ds\right| &\le M^2 d \sup_{t\in[0,T]} |h(t)|_{\mathfrak{g}} \sup_{t\in[0,T]} |k(t)|_{\mathfrak{g}} \\ &\le M^2 dT |h|_H |k|_H\end{aligned}$$

を得る．

8. Loop 群における Laplacian の spectral gap

ループ群においてに，Laplacian の spectral gap の存在，あるいは対数 Sobolev 不等式の成立がいえるかどうかは現在のところ未解決の問題である．この節では，この問題へのアプローチを試みる．

scalar 値関数とテンソル場に作用する 2 種類の Laplacian を考える．その為に第 2 節の結果を用いる．A に相当するのは $\Delta = -\nabla^*\nabla$ であり，

$$\mathcal{E}(f,g) = \int_S (\nabla f | \nabla g) dm,$$

$$\Gamma(f,g) = (\nabla f | \nabla g),$$

Sem. on Probab.
Vol.58 1995年
P1-115

そして対応する半群 $\{T_t\}$ も定まる.

$$\vec{\mathcal{E}}(u,v) = \int_S (\nabla u|\nabla v)dm \quad u,v \in \Gamma(T_l^k(S))$$

は $L^2\Gamma(T_l^k(S))$ 上の縮小半群 $\{\vec{T}_t\}$ を定める．ここで $L^2\Gamma(T_l^k(S))$ とは，S 上の (k,l) 型テンソル束 $T_l^k(S)$ の可測な切断 u で

$$\|u\|_2 = \left\{\int_S |u|^2 dm\right\}^{1/2} < \infty$$

を満足するもの全体からなる空間である．生成作用素は $\vec{A} = -\nabla^*\nabla$ で $\vec{\Gamma}$ は

$$\vec{\Gamma}(u,v) = (\nabla u|\nabla v) \tag{8.1}$$

で与えられる.

この設定は命題 2.8 の仮定を $\lambda = 0$ として満たしていることを見よう．$\mathcal{C} = \mathcal{W}(S \to \mathbb{R}) \cap L^\infty$, $\mathcal{D} = \Gamma(T_l^k(S)) \cap L^\infty$ とする．$f \in \mathcal{C}, u \in \mathcal{D}$ に対し $fu \in \mathcal{D}$ で

$$\nabla(fu) = \nabla f \otimes u + f\nabla u.$$

よって

$$\begin{aligned}(\nabla(fu)|\nabla v) + (u|\nabla(fv)) &= (\nabla f \otimes u + f\nabla u|\nabla v) + (\nabla u|\nabla f \otimes v + f\nabla v)\\ &= (\nabla f|(u|\nabla v) + (\nabla u|v)) + 2f(\nabla u|\nabla v)\\ &= (\nabla f|\nabla(u|v)) + 2f(\nabla u|\nabla v)\end{aligned}$$

となる．最後の行で

$$\nabla(u|v) = (\nabla u|v) + (u|\nabla v)$$

を用いた．従って Γ, $\vec{\Gamma}$ は (2.21)を満足する．他の条件が成立することを確かめるのは容易である．ゆえに定理 2.6, 定理 2.7, 命題 2.8 より $u \in L^2\Gamma(T_l^k(S))$ に対し

$$|\vec{T}_t u| \le T_t|u|$$

を得る．特に，(1.9) を仮定すれば (1.10) が従う.

第 6, 7 節でみたように，based loop group は抽象 Wiener 空間のある部分多様体と同一視できるから，これに対しても上と同様の主張が成立する.

次に，based loop group 上の scalar function に作用する Laplacian が，spectral gap を持つための条件を考察する．記号は第 7 節のものに従う.

第 5 節の最後で定義した Γ, Γ_2 と生成作用素の spectrum との関係は次のように与えられる.

補題 8.1. ある $c>0$ に対して

$$\int_{\Omega G}\Gamma_2(f,f)dm \geq c\int_{\Omega G}\Gamma(f,f)dm$$

が全ての $f\in\mathcal{F}C_b^\infty(PG)$ に対して成立すれば,

$$\inf(\sigma(-\Delta)\backslash\{0\})\geq c$$

が従う．逆も同様に成立する．

証明　$\Delta 1=0$ に注意して $\int_{\Omega G}\Gamma(f,g)dm$ と $\int_{\Omega G}\Gamma_2(f,g)dm$ を具体的に計算すると,

$$\begin{aligned}\int_{\Omega G}\Gamma(f,g)dm &= \int_{\Omega G}\frac{1}{2}\{\Delta(f\cdot g)-(\Delta f)g-f(\Delta g)\}dm\\ &= -\int_{\Omega G}(\Delta f)g\,dm,\end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned}\int_{\Omega G}\Gamma_2(f,g)dm &= \int_{\Omega G}\frac{1}{2}\{\Delta\Gamma(f,g)-\Gamma(\Delta f,g)-\Gamma(f,\Delta g)\}dm\\ &= -\frac{1}{2}\int_{\Omega G}\{\Gamma(\Delta f,g)+\Gamma(f,\Delta g)\}dm\\ &= \frac{1}{2}\left(\int_{\Omega G}(\Delta^2 f)g\,dm+\int_{\Omega G}(\Delta f)(\Delta g)dm\right)\\ &= \int_{\Omega G}(\Delta f)(\Delta g)dm\end{aligned}$$

が得られる．$\mathcal{F}C_b^\infty(PG)$ が Δ の core であること (Aida [5]) と spectral theorem より主張が従う．■

不完全対数 Sobolev 不等式から spectral gap の存在が従うことを見る．

定理 8.2. ΩG 上で，ある $\lambda>0$, $\kappa\geq 0$ に対し，不等式

$$\int_{\Omega G} f^2\log(f^2/\|f\|_2^2)dm \leq \lambda\mathcal{E}(f,f)+\kappa\|f\|_2^2 \tag{DLS}$$

が成立したとする．$c>0$ を

$$c\leq 1-dM^2T+\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda}\left\|e^{\lambda M|b_T|}\right\|_1-\frac{\kappa}{\lambda} \tag{8.2}$$

を満たすようにとる．ここで M は第 7 節の最後で定義した定数である．このとき

$$c\leq\inf(\sigma(-\Delta)\backslash\{0\}),$$

即ち $-\Delta=\nabla^*\nabla$ は spectral gap を持つ．

注意 8.1.

1. (DLS) の成立はまだ証明されていない．
2. λ を十分大きく，T を十分 0 に近づけると，(8.2) を満たす $c>0$ は常にとれる．

Sem. on Probab.
Vol.58 1995年
P1-115

証明　第 5 節の最後の式と命題 7.4 及びその後の注意より，$f \in \mathcal{F}C_b^\infty(PG)$ に対して

$$\begin{aligned}\Gamma_2(f,f) &= |\nabla^2 f|^2 + |\nabla f|^2 + \mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f)\\ &\geq |\nabla^2 f|^2 + |\nabla f|^2 - |A(\nabla f, \nabla f)|_{\mathfrak{g}} \frac{|b_T|_{\mathfrak{g}}}{\sqrt{T}} - dM^2T|\nabla f|^2\\ &\geq |\nabla^2 f|^2 + (1 - dM^2T)|\nabla f|^2 - M|b_T|_{\mathfrak{g}}|\nabla f|_{\mathfrak{g}}^2\end{aligned}$$

となる．Young の不等式 $st \leq s\log s - s + e^t (s > 0, t \in \mathbb{R})$ と (1.10) を用いると

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega G} \Gamma_2(f,f)dm\\ &\geq \int_{\Omega G} |\nabla^2 f|^2 dm + (1 - dM^2T)\int_{\Omega G} |\nabla f|^2 dm - \frac{1}{\lambda}\int_{\Omega G} |\nabla f|^2 \lambda M |b_T|_{\mathfrak{g}} dm\\ &\geq \int_{\Omega G} |\nabla^2 f|^2 dm + (1 - dM^2T)\int_{\Omega G} |\nabla f|^2 dm\\ &\quad - \frac{1}{\lambda}\int_{\Omega G} \{|\nabla f|^2 \log |\nabla f|^2 - |\nabla f|^2 + \exp(\lambda M |b_T|_{\mathfrak{g}})\} dm\\ &\geq \int_{\Omega G} |\nabla^2 f|^2 dm + \left(1 - dM^2T + \frac{1}{\lambda}\right)\int_{\Omega G} |\nabla f|^2 dm - \frac{1}{\lambda}\int_{\Omega G} \exp(\lambda M|b_T|_{\mathfrak{g}})dm\\ &\quad - \frac{1}{\lambda}\{\lambda \vec{\mathcal{E}}(\nabla f, \nabla f) + \kappa \|\nabla f\|_2^2 + \|\nabla f\|_2^2 \log \|\nabla f\|_2^2\}\\ &= \left(1 - dM^2T + \frac{1}{\lambda} - \frac{\kappa}{\lambda}\right)\|\nabla f\|_2^2 - \frac{1}{\lambda}\left\|e^{\lambda M|b_T|_{\mathfrak{g}}}\right\|_1 + \|\nabla f\|_2^2 \log \|\nabla f\|_2^2\end{aligned}$$

を得る．最後の等号で $\vec{\mathcal{E}}(\nabla f, \nabla f) = \int_{\Omega G} |\nabla^2 f|^2 dm$ を用いた．上式で $f/\|\nabla f\|_2$ を f の代わりに代入すると，

$$\int_{\Omega G} \Gamma_2(f,f)dm \Big/ \|\nabla f\|^2 \geq \left(1 - dM^2T + \frac{1}{\lambda} - \frac{\kappa}{\lambda}\right) - \frac{1}{\lambda}\left\|e^{\lambda M|b_T|_{\mathfrak{g}}}\right\|_1 \geq c$$

となり，結局

$$\int_{\Omega G} \Gamma_2(f,f)dm \geq c\|\nabla f\|_2^2 = c\int_{\Omega G} \Gamma(f,f)dm$$

を得るので補題 8.1 より主張が従う．　■

REFERENCES

1. S. Aida, D^{∞}-cohomology groups and D^{∞}-maps on submanifolds in Wiener spaces, *J. Funct. Anal.*, **107** (1992), 289–301.
2. S. Aida, Certain gradient flows and submanifolds in Wiener spaces, *J. Funct. Anal.*, **112** (1993), 346–372.
3. S. Aida, On the Ornstein-Uhlenbeck Operators on Wiener-Riemannian Manifolds, *J. Funct. Anal.*, **116** (1993), 83–110.
4. S. Aida, Sobolev Spaces over Loop Groups, *J. Funct. Anal.*, **127** (1995), 155–172.
5. S. Aida, Essential selfadjointness of Ornstein-Uhlenbeck operators on loop groups, preprint.
6. S. Aida and D. Elworthy, Differential calculus on path and loop spaces, preprint.
7. S. Aida, T. Masuda and I. Shigekawa, Logarithmic Sobolev inequalities and exponential integrability, *J. Funct. Anal.*, **126** (1994), 83–101.
8. S. Aida and I. Shigekawa, Logarithmic Sobolev inequalities and spectral gaps: perturbation theory, *J. Funct. Anal.*, **126** (1994), 448–475.
9. H. Airault, Differential calculus on finite codimensional submanifolds of the Wiener space—The divergence operator, *J. Funct. Anal.*, **100** (1991), 291–316.
10. H. Airault and P. Malliavin, Intégration géometrique sur l'espace de Wiener, *Bull. Sci. Math.*, **112** (1988), 3–52.
11. H. Airault and P. Malliavin, Integration on loop groups. II. Heat equation for the Wiener measure, *J. Funct. Anal.*, **104** (1992), 71–109.
12. H. Airault and J. Van Biesen, Géometrie riemannienne en codimension finie sur l'espace de Wiener, *C. R. Acad Sci. Paris Série I*, **311** (1990), 125–130.
13. H. Airault and J. Van Biesen, Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck sur une sous-variété de l'espace de Wiener, *Bull. Sci. Math.*, **115** (1991), 185–210.
14. S. Albeverio, M. Fukushima, W. Hansen, Z. M. Ma and M. Röckner, An invariance result for capacities on Wiener space, *J. Funct. Anal.*, **106** (1992), 35–49.
15. S. Albeverio and R. Høegh-Krohn, The energy representation of Sobolev Lie groups, *Compositio Math.*, **36** (1978), 37–52.
16. S. Albeverio, Ju. G. Kondratiev and M. Röckner, An approximate criterium of essential self-adjointness of Dirichlet operators, *Potential Anal.*, **1** (1992), 307–317.
17. D. Bakry and M. Emery, Diffusions hypercontractives, *Séminaire de Prob.* XIX, Lecture Notes in Math., vol. 1123, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1985.
18. N. Bouleau and F. Hirsch, "*Dirichlet forms and analysis on Wiener space*," Walter de Gruyter, Berlin-New York, 1991.
19. N. Bourbaki, "*Topologie générale*," Chapitres 5 à 10, Hermann, Paris, 1974.
20. A.-B. Cruzeiro, Équation différentielles ordinaires: Non explosion et mesures quasi-invariantes, *J. Funct. Anal.*, **54** (1983), 193–205.
21. A.-B. Cruzeiro, Équation différentielles sur l'espace de Wiener et formules de Cameron-Martin non-linéaires *J. Funct. Anal.*, **54** (1983), 206–227.
22. A.-B. Cruzeiro, Unicité de solutions d'équations differentielles sur l'espace de Wiener, *J. Funct. Anal.*, **58** (1984), 335–347.
23. A.-B. Cruzeiro and P. Malliavin, Repère mobile et géometrie riemannienne sur les espace des chemins, *C. R. Acad Sci. Paris Série I*, **319** (1994), 859–864.
24. A.-B. Cruzeiro and P. Malliavin, Stochatic analysis on the path space of a Riemannian manifold: II. Riemannian geometry on the path space, preprint.
25. E. B. Davies, "*One-parameter semigroups*," Academic Press, London, 1980.
26. E. B. Davies, "*Heat kernels and spectral theory*," Cambridge University Press, Cambridge, 1989.
27. B. K. Driver, A Cameron-Martin type quasi-invariance theorem for Brownian motion on a compact Riemannian manifold, *J. Funct. Anal.*, **110** (1992), 272–376.
28. B. K. Driver, The non-equivalence of Dirichlet forms on path spaces, in "*Stochastic analysis on infinite dimensional spaces*," ed. by H. Kunita and H.-H. Kuo, pp. 99–110, Longman, Harlow, 1994.
29. B. K. Driver, A Cameron-Martin type quasi-invariance theorem for pinned Brownian motion on acompact Riemannian manifold, to appear in *Trans. Amer. Math. Soc.*
30. B. K. Driver and M. Röckner, Construction of diffusion on path and loop spaces of compact Riemannian manifolds, *C. R. Acad Sci. Paris Série I*, **315** (1992), 603–608.

31. S. Fang, Inégalité du type de Poincaré sur un espace de chemins, preprint.
32. S. Fang, Divergence operators on the path space of a Riemannian manifold, preprint.
33. S. Fang and P. Malliavin, Stochastic analysis on the path space of a Riemannian manifold: I. Markovian stochatic calculus, *J. Funct. Anal.*, **118** (1993), 249–274.
34. D. Feyel and A. de La Pradelle, Espaces de Sobolev gaussiens, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, **39** (1989), 875–908.
35. D. Feyel and A. de La Pradelle, Capacités gaussiennes, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, **41** (1991), 49–76.
36. D. Feyel and A. de La Pradelle, Opérateurs linéaires et espaces de Sobolev sur l'espace de Wiener, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **313**, Serie I, (1991) 727-729.
37. D. Feyel and A. de La Pradelle, Opérateurs linéaires gaussiens, *Potential Anal.*, **3** (1994), 89-105.
38. D. S. Freed, The geometry of loop groups, *J. Diff. Geom.*, **28** (1988), 223–276.
39. I. B. Frenkel, Orbital theory for affine Lie algebras, *Invent. math.*, **77** (1984), 301–352.
40. M. Fukushima, Dirichlet spaces and strong Markov processes, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **162** (1971), 185–224.
41. M. Fukushima, "*Dirichlet forms and Markov Processes*," North Holland/Kodansha, Amsterdam/Tokyo, 1980.
42. M. Fukushima and H. Kaneko, On (r,p)-capacities for general Markovian semigroups, in "*Infinite dimensional analysis and stochastic processes*," pp. 41–47, ed. by S. Albeverio, Longman Scientific & Technical, Harlow, 1985.
43. E. Getzler, Dirichlet forms on loop space, *Bull. Sci. Math.*, **113** (1989), 151–174.
44. E. Getzler, An extension of Gross' log-Sobolev inequality for the loop space of a compact Lie group, Proceedings of the conference on probability models in mathematical physics, ed. by G. J. Morrow and W.-S. Yang, pp. 73–97, World Scientific, Singapore, 1991.
45. L. Gross, Logarithmic Sobolev inequalities, *Amer. J. Math.*, **97** (1975), 1061–1083.
46. L. Gross, Logarithmic Sobolev inequalities on loop groups, *J. Funct. Anal.*, **102** (1991), 268–313.
47. L. Gross, Logarithmic Sobolev inequality over some infinite dimensional manifolds, Proceedings of the conference on probability models in mathematical physics, ed. by G. J. Morrow and W.-S. Yang, pp. 98–107, World Scientific, Singapore, 1991.
48. L. Gross, Uniqueness of ground states for Schrödinger operators over loop groups, *J. Funct. Anal.*, **112** (1993), 373–441.
49. L. Gross Harmonic analysis for the heat kernel measure on compact homogenious spaces, in "*Stochastic analysis on infinite dimensional spaces*," ed. by H. Kunita and H.-H. Kuo, pp. 99–110, Longman, Harlow, 1994.
50. S. Helgason, "*Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*," Academic Press, New York, 1978.
51. H. Hess, R. Schrader and D.A. Uhlenbrock, Kato's inequality and the spectral distribution of Laplacians on compact Riemannian manifolds, *J. Diff. Geom.*, **21** (1971), 244–255.
52. E. Hewitt and K. Stromberg, "*Real and abstract analysis*," Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1965.
53. R. Høegh-Krohn, A general class of quantum fields without cut-offs in two space-time dimensions, *Commun. math. Phys.*, **21** (1971), 244–255.
54. E. P. Hsu, Quasiinvariance of the Wiener measure and integration by parts in the path space over a compact Riemannian manifold, to appear in *J. Funct. Anal.*
55. E. P. Hsu, Logarithmic Sobolev inequalities on path spaces, preprint.
56. N. Ikeda and S. Watanabe, "*Stochastic differential equations and diffusion processes*," North Holland/Kodansha, Amsterdam/Tokyo, 1981.
57. H. Kaneko, On (r,p)-capacities for Markov processes, *Osaka J. Math.*, **23** (1986), 325–336.
58. T. Kazumi, De Rham complex in an abstract Wiener space (in Japanese), Master thesis of Kyoto University, 1989.
59. T. Kazumi and I. Shigekawa, Measures of finite (r,p)-energy and potentials on a separable metric space, Séninaire de Probabilités, XXVI, ed. by J. Azéma, P.A. Meyer and M. Yor, Lecture Notes in Math., vol. 1526, pp. 415–444, Berlin-Heidelberg-New York, Springer-Verlag, 1992.
60. T. Kazumi and I. Shigekawa, Differential calculus on a submanifold of an abstract Wiener space, I. Covariant derivative, in "*Stochastic analysis on infinite dimensional spaces*," ed. by H. Kunita and H.-H. Kuo, pp. 117–140, Longman, Harlow, 1994.

61. T. Kazumi and I. Shigekawa, Differential calculus on a submanifold of an abstract Wiener space, II. Weitzenböck formula, preprint.
62. S. Kobayashi and K. Nomizu, "*Foundations of differential geometry*," I, II, Interscience Publishers, New York-London, 1963, 1969.
63. Ju. G. Kondratiev and T. V. Tsycalenko, Infinite-dimensional Dirichlet operators I: Essential selfadjointness and associated elliptic equations, *Potential Anal.*, 2 (1993), 1–21.
64. S. Kusuoka, Some remarks on Getzler's degree theorem, in "*Probability Theory and Mathematical Statistics*," Proc. 5th Japan-USSR Symp., (Kyoto 1986), ed. by S. Watanabe, Yu. V. Prohorov, Lecture Notes in Math., vol 1299, pp. 239–249, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1988.
65. S. Kusuoka, Degree theorem in certain Wiener Riemannian manifolds, in "Stochastic Analysis," Proc. France-Japan seminar (Paris 1987), ed. by M. Métivier, S. Watanabe, Lecture Notes in Math., vol 1322, pp. 93–108, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1988.
66. S. Kusuoka, On the foundations of Wiener-Riemannian manifolds, in "*Stochastic analysis, path integration and dynamics*," ed. by K. D. Elworthy, J-C. Zambrini, Pitman Research Notes in Math., Vol. 200, pp. 130–164, Longman Scientific & Technical, Essex, 1989.
67. S. Kusuoka, De Rham cohomology of Wiener-Riemannian manifolds, Proc. ICM 90, Vol. II, pp. 1075-1082, Springer, Tokyo, 1991.
68. S. Kusuoka, Analysis on Wiener space, I. Nonlinear maps, *J. Funct. Anal.*, **98** (1991), 122–168.
69. S. Kusuoka, Analysis on Wiener space, II. Differential forms, *J. Funct. Anal.*, **103** (1992), 229–274.
70. S. Kusuoka and S. Taniguchi, Pseudoconvex domains in almost complex abstract Wiener spaces, RIMS-preprint 891, 1992.
71. Z.-M. Ma and M. Röckner, "*Introduction to the theory of (non-symmetric) Dirichlet forms*," Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1992.
72. M.-P. Malliavin and P. Malliavin, Integration on loop groups. I. Quasi Invariant measures, *J. Funct. Anal.*, **93** (1990), 207–237.
73. M.-P. Malliavin and P. Malliavin, Integration on loop groups. III. Asymptotic Peter-Weyl orthogonality, *J. Funct. Anal.*, **108** (1992), 13–46.
74. P. Malliavin and D. Nualart, Quasi sure analysis of stochastic flows and Banach space valued smooth functionals on the Wiener space, *J. Funct. Anal.*, **112** (1993), 287–317.
75. Y. Matsushima, "*Differentiable manifolds*," Marcel Dekker, New York, 1972.
76. P. A. Meyer, "*Probability and Potential*," Blaisdell Publishing Co., Waltham, Massachusetts, 1966
77. P. A. Meyer, Notes sur les processus d'Ornstein-Uhlenbeck, *Séminaire de Prob.* XVI, ed. par J. Azema et M. Yor, Lecture Notes in Math., vol. 920 (1982), 95–133, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York.
78. P. A. Meyer, Quelques results analytiques sur le semigroupe d'Ornstein-Uhlenbeck en dimension infinie, Theory and application of random fields, Proceedings of IFIP-WG 7/1 Working conf. at Bangalore, ed. by G. Kallianpur, Lecture Notes in Cont. and Inform. Sci., vol. 49 (1983), 201–214, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York.
79. P. A. Meyer, Transformations de Riesz pour les lois gaussiennes, *Séminaire de Prob.* XVIII, ed. par J. Azema et M. Yor, Lecture Notes in Math., vol. 1059, 179–193, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1984.
80. A. Pressley and G. Segal, "*Loop groups*," Oxford University Press, New York, 1986.
81. M. Reed and B. Simon, "*Method of modern mathematical physics, II: Fourier analysis, self-adjointness*," Academic Press, San Diego, 1975.
82. M. Reed and B. Simon, "*Method of modern mathematical physics, IV: Analysia of operator*," Academic Press, San Diego, 1978.
83. J. Ren, Analyse quasi-sûre des équations différentielles stochasiques, *Bull. Sc. math.*, 2^e série, **114** (1990), 187–213.
84. J. Ren, On smooth martingales, *J. Funct. Anal.*, **120** (1994), 72–81.
85. D. Revuz and M. Yor, "*Continuous martingles and Brownian motion*," Berlin-Heidelberg-New York, Springer-Verlag, 1991.
86. M. Röckner and T.-S. Zhang, Uniqueness of generalized Schrödinger operators and applications, *J. Funct. Anal.* **105** (1992), 187–231.
87. B. Schmuland, An alternative compactification for classical Dirichlet forms on topological vector spaces, *Stochastics*, **33** (1990), 75–90.

Sem. on Probab.
Vol.58 1995年
P1-115

88. I. Shigekawa, Transformations of Brownian motion on a Riemannian symmetric space, *Z. Wahr. verw. Gebiete.*, **65** (1984), 493–522.
89. I. Shigekawa, Transformations of the Brownian motions on the Lie group, Proceedings of the Taniguchi International Symposium on Stochastic Analysis, Katata and Kyoto, 1982, pp. 409–422, (1984).
90. I. Shigekawa, De Rham-Hodge-Kodaira's decomposition on an abstract Wiener space, *J. Math. Kyoto Univ.*, **26** (1986), 191–202.
91. I. Shigekawa, Sobolev spaces of Banach-valued functions associated with a Markov process, *Prob. Th. and Rel. Fields*, **99** (1994), 425–441.
92. I. Shigekawa, A quasi-homeomorphism on the Wiener space, preprint.
93. I. Shigekawa, Differential calculus on a based loop group, preprint.
94. I. Shigekawa, L^p contraction semigroup for vector valued functions, preprint.
95. B. Simon, "*The $P(\phi)_2$ Euclidean (quantum) field theory*," Princeton University Press, Princeton, New Jersy, 1974.
96. B. Simon, An abstract Kato's inequality for generators of positivity preserving semigroups, *Indiana Univ. Math. J.*, **26** (1977), 1069–1073.
97. B. Simon, Kato's inequality and the comparison of semigroups, *J. Funct. Anal.*, **32** (1979), 97–101.
98. B. Simon and R. Høegh-Krohn, Hypercontractive semigroups and two-dimensional self-coupled Bose fields, *J. Funct. Anal.*, **9** (1972), 121–180.
99. D. Stroock, Some applications of stochastic calculus to partial differential equations, École d'été de Saint-Flour, XI, 1981, Lecture Notes in Math., vol. 976, pp. 268–382, Berlin-Heidelberg-New York, Springer-Verlag, 1983.
100. H. Sugita, Sobolev spaces of Wiener functionals and Malliavin's calculus, *J. Math. Kyoto Univ.*, **25** (1985), 31–48.
101. H. Sugita, Positive generalized Wiener functions and potential theory over abstract Wiener spaces, *Osaka J. Math.*, **25** (1988), 665–696.
102. H. Sugita, Properties of holomorphic Wiener functionals — skeleton, contraction and local Taylor expansion —, preprint.
103. M. Takeda, (r,p)-capacity on the Wiener space and properties of Brownian motion, *Z. Wahr. verw. Gebiete*, **68** (1984), 149–162.
104. J. Van Biesen, The divergence on submanifolds of the Wiener space, *J. Funct. Anal.*, **113** (1993), 426–461.
105. S. Watanabe, "*Lectures on stochastic differential equations and Malliavin calculus*," Tata Institute of Fundamental Research, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1984.
106. L. M. Wu, Feynman-Kac semigroups, ground state diffusions, and large deviations, *J. Funct. Anal.*, **123** (1994), 202–231.
107. N. Yoshida, Sobolev spaces on a Riemannian manifold and their equivalence, *J. Math. Kyoto Univ.*, **32** (1992), 621–654.
108. N. Yoshida, The Littlewood-Paley-Stein inequality on an infinite dimensional manifold, *J. Funct. Anal.*, **122** (1994), 402–427.
109. Y. S. Yun, The quasi-sure existence of solutions for differential equations on Wiener space, preprint.