Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

SEMINAR ON PROBABILITY

Vol. 55

コンパクト空間上の力学系

(自己同型を伴う群の構造定理とBernoulli性
位相力学系へのアプローチ)

青 木 統 夫

1 9 8 3

確 率 論 セ ミ ナ ー

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

コンパクト空間上の力学系

(自己同型を伴う群の構造定理とBernoulli性
位相力学系へのアプローチ)

青木統夫

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

§0 はじめに

位相群上の準同型写像の挙動の研究はエルゴード理論では同型問題に，そして力学系理論ではAnosov微分同相の存在論に，それぞれ深くかゝわり合っている。準同型写像はエルゴード理論を含む位相力学系理論において具体的なモデルを提供している理由から多くの人達によって研究されてきた。

この小論はコンパクト空間，特に群上の位相力学系の諸結果を紹介することを目的として書かれた。

Xは局所コンパクト群，μはX上の一つのHaar測度そしてσはX上の準同型であるとする。このときσは測度論の立場で可測変換である。最初に強い条件；i.e. Xはコンパクトで距離付け可能，そしてσは上への準同型，を仮定する。この場合XはLebesgue空間でHaar測度μの一意性によって，σは測度論的に保測変換になっている。Xに対して，既約表現の同値類の集合をX^*とし，$\gamma g(x)=g(\sigma x)$，$g\in X^*$によって写像$\gamma : X^* \circlearrowleft$が$\sigma$によって生成される。$X$が可換であれば，$X^*$は$X$の指標群であって，$\gamma$は$X$上の$\sigma$の随伴準同型である。$\sigma$のエルゴード性は$\gamma$の集合論的性質で表わされる；i.e. σがエルゴード的である必要十分条件はγのすべての軌道が無限である。但し，単位元は除かれる。更に次のように位相的性質にも表現される；i.e. σがエルゴード的である必要十分条件はXの或る点のσによる軌道の集合はXで稠密である。σがエルゴード的であるとき，それはエルゴード理論の中で強い条件をそなえている；i.e. 可換群上のエルゴード的準同型は可算-Lebesgueスペクトルをもつ。これは完全正のエントロピーをもつことと同値になっている(Rohlin [54])．非可換の場合には次の概念は重要な役割をもっている；i.e. Hはコンパクト群で距離付け可能とし，$H_i=H$ $(i\in\mathbb{Z})$に対して，Xは$\{H_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$の直積に分解するとする。$\sigma\{h_i\}=\{h_i'\}$，$h_i'=h_{i+1}$ $(h_i\in H_i)$によってX上の自己同型σを定義する。このときσはBernoulli自己同型とよび，Xをσによる

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

Bernoulli群とよぶ。このような群の存在は中心をもたない連結コンパクト群上のエルゴード的自己同型によって実現することができる(Yuzvinskii [82]). 準同型のエントロピーの計算に関して加法定理がある; i.e. Hはσ-不変正規部分群で, σ_2 そして σ_1 はσによって生成された, それぞれHそしてX/H上の準同型とする。このとき $h(\sigma)=h(\sigma_1)+h(\sigma_1)$ (hはエントロピーを表わす)(Yuzvinskii [82]). 準同型のエントロピーの計算はSinai (1959)によって初めつれ, 1966にYuzvinskiiによって次のような結果がえられている; i.e. σは*solenoidal*群上の準同型とする。*solenoidal*群の指標群X^*は*torsion free*で有限階数をもつ。それ故にX^*の固定した基底に対して準同型γは有理数の行列Aで表現できる。Aの固有値を$\lambda_1, \cdots, \lambda_r$, Aの固有多項式の係数の共通の*denominator*をΔとするとき, σのエントロピーは $h(\sigma)=\log\Delta+\sum_{|\lambda_i|>1}\log|\lambda_i|$ で表わされる(Yuzvinskii [83]). *solenoidal*群はトーラス群の一般化である。*solenoidal*群上の準同型σがエルゴード的であっても, その固有値は絶対値が1の場合が存在する。従って微分力学系のAnosov写像ではない。Anosov写像のBernoulli性はMarkov分割を通じてえられる。しかし有限次元トーラス上のエルゴード的自己同型はBernoulli性をもつ(Katznelson [28]). 最近, 一般にコンパクト群上のエルゴード的自己同型はBernoulli性をもつことが証明された(Miles and Thomas[39,40,41], Lind [37], Aoki [1]). この問題はOrnsteinの同型定理が完成された以後困難な問題の一つとして残されていたものである。この小論では詳しくこの問題を解説し, その過程から生ずる位相力学系の諸結果をコンパクト距離空間上に展開する。

次に局所コンパクト群上のエルゴード的自己同型に関してはHalmosによって問題が提起されている。これに関しては§10で詳しく解説す。

§1には全体を通じて使われる基本的な命題が記されている。§2で有限エントロピーをもつ自己同型σを許すコンパクト可換

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

群の構造定理が述べられている; i.e. X に α-不変な完全不連結群 H, N と部分群 S, T が存在して, $N=H\cap S\cap T$ をみたし, $h(\alpha_{|N})=0$ で, S/N は solenoidal 群, T/N は無限か有限次元トーラス群で, X/N は直和分解 $X/N=H/N\oplus S/N\oplus T/N$ をもつ。この命題から理解できるように, いくらでも小さいエントロピーをもつトーラス上の自己同型が存在するかは問題として未解決である。§3ではコンパクト可換群が三つの α-不変部分群 X_1, X_2, X_3 の和に分解されることを解説している。ここに X_1 は完全不連結, X_2 は連結で solenoidal 群の射影的極限, X_3 は連結で Bernoulli 群の射影的極限である。(X,α) がエルゴード的であれば, X_i ($i=1,2,3$) はエルゴード性をみたすようにえらばれる。この定理は§2の結果の一般化になっている。§4では solenoidal 群上の自己同型の位相的性質を詳しく述べている。ここで扱った諸結果は位相力学系の取り扱いに役立っている。例えば§9で使われ, また次の問題が解決される; i.e. エルゴード的 solenoidal 自己同型は Markov 分割をもつ必要十分条件を求めよ (Miles and Thomas [41])。§5はエルゴード的自己同型を伴う零次元コンパクト群 X の構造を決定している; i.e. X の最大可換群 X_0 と α による Bernoulli 群 X_i ($i\geqq 1$) が存在して, X は直積分解 $X=\bigotimes_{i\geqq 0}X_i$ される。更に周期点をもたない (単位元を除いて) エルゴード的自己同型の存在を紹介している。これは Yuzvinskii ([82]) によって提起された問題の解答になっている。この解答から Lind ([36]) による specification の存在に関係する予想が否定される。specification の存在の必要十分条件も与えられている。§6は Weil ([78]) に述べられているコンパクト群の諸結果を利用して位相力学系において必要とされる形に書きかえた自己同型を伴う非可換群上の構造定理を述べている。§7は, この小論の目的の一つであるエルゴード的自己同型の Bernoulli 性を解説している。特に, solenoidal 群上の Bernoulli 性の証明は他の証明 ([39], [40], [41], [37]) より, 非常に簡単な方法で与えている。§8では Pinsker の問題が成立する一つの例をコンパクト

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

可換群上の自己同型を使って述べている。一般には成立しないことがD. S. Ornsteinによって解決されている。§9は§§2～8で得られた力学系の性質をモデルとして，コンパクト距離空間上の位相同相の力学的諸性質の一部を述べている。§10は上で述べた局所コンパクト群上のエルゴード的自己同型の諸結果を紹介する。Halmosの予想は最近著者によって完全に解決された。しかし，この小論に紹介することができず残念である。

最後に，Bernoulli系の証明に対しては多大な御援助を下さった十時東生，久保泉 両先生に深く感謝の意を表します。

参考のために，位相群論に関する著書としてpontrjagin[50]，Bernoulli系の諸結果に関する著書として十時東生，伊藤俊次，村田博[74]，力学系の著書として森本明彦[43]，微分力学系の著書として白岩謙一[60]をあげておきます。また評論社から出版されている数学セミナー(1982)，9月以降に連載の久保泉著の"エルゴード伝説"は統計力学の発展の過程をわかりやすく解説している。位相力学系と深く関連しているので記しておきます。

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

目 次

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

§1 基本的事項

全体を通じて使われる基本的な命題を述べる。

Xは局所コンパクト可換群で距離付け可能であるとする。全体を通じて扱う空間は全部距離空間であるために，以後，距離付け可能の言葉を省略する。GはXから単位円周の中へのすべての連続な準同型写像の集合とし，各写像をXの指標とよぶ。Gは関数の積の演算の下で一つの可換群になる。Gに *compact open topology* を導入するとき，Gは局所コンパクト可換群になる。このときGをXの指標群という。

(1) Xがコンパクトである必要十分条件はGが離散的であることである。

(2) X′はGの指標群とする。このとき，XとX′は $\alpha(\gamma)=\gamma(\alpha)$ ($\forall\gamma\in G$) なる対応によって同型である。

(3) Xはコンパクトであるとする。Xが連結(完全不連結)である必要十分条件はGが *torsion free* (*torsion* 群)であることである。

(4) $H\subsetneqq X$ は真の閉部分群とする。このとき $1\neq\gamma\in G$ が存在して $\gamma(h)=1$ ($\forall h\in H$) が成立する。

(5) Xをコンパクトまたは離散可換群，Gをその指標群とする。Xの閉部分群Hに対し，

$$\Phi=ann(G,H)=\{g\in G:g(x)=1,\ \forall x\in H\}$$
$$H'=ann(X,\Phi)=\{x\in X:g(x)=1,\ \forall g\in\Phi\}$$

とすると，$H=H'$ である。

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

(6) Xをコンパクトまたは離散可換群，Gをその指標群とする。Xの閉部分群Hに対して，$\Phi = ann(G, H)$ とする。
$\xi^* \in G/\Phi$，$x \in H$に対して $\xi^*(x) = \xi(x)$ $(\xi \in \xi^*)$ とおけば代表元ξのとり方に関せず単位円周の元$\xi^*(x)$がxだけで定まる。そしてξ^*はHの指標であってG/ΦはHの指標群となる。

(7) Xをコンパクトまたは離散可換群，GをXの指標群とする。H_1, H_2はXの閉部分群とするとき次が成立する；

$$ann(G, H_1) + ann(G, H_2) = ann(G, H_1 \cap H_2)$$

(8) Xをコンパクトまたは離散可換群，GをXの指標群とする。Xが有限群であれば，XはGと同型である。

以後ことわらないかぎりXはコンパクト可換群でGはXの指標群であるとする。μはX上の確率Haar測度を表わす。

(9) Gは$L^2(\mu)$の中で互に直交する。

(証明)

$\int_X \gamma(x)\,d\mu(x) = 0$ $(\gamma \neq 1)$ を示せば十分である。$a \in X$に対して，

$$\int \gamma(x)\,d\mu(x) = \int \gamma(ax)\,d\mu = \gamma(a)\int \gamma(x)\,d\mu$$

今，$\gamma(a) \neq 1$なる$a \in X$をえらべば，$\int \gamma(x)\,d\mu = 0$。//

(10) Gは$L^2(\mu)$の正規直交基底をなす。

(証明)

Peter-Weyl の定理と Stone-Weierstrass の定理より求まる。

(11) $C(X)$は複素数値連続関数の全体を表わし，$\|f\|$ $(f \in C(X))$

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

によって一様ノルムを表わす。明らかに $C(X)$ は Banach 空間をなす。このとき，G は $C(X)$ の中で離散的である。

(証明)

$0<\varepsilon<1$ なる ε に対して，$\|\xi-1\|<\varepsilon$ をみたす $\xi\in G$ は 1 に限る。実際に，$\xi\neq 1$ とすれば

$$\varepsilon>\|\xi-1\|\geqq\int|\xi-1|\,d\mu\geqq\left|\int(\xi-1)\,d\mu\right|=1。/\!/$$

(12) σ は X から X 上への連続準同型とする。μ は σ－不変測度；i.e. $\mu(\sigma^{-1}E)=\mu(E)\ (\forall E\subset X)$。

(証明)

$\mu'(E)=\mu(\sigma^{-1}E)$ とおくと，明らかに μ' は Borel 測度で，
$\mu'(\sigma x\cdot E)=\mu(\sigma^{-1}(\sigma x\cdot E))=\mu(x\cdot\sigma^{-1}E)=\mu(E)$,
$\sigma(X)=X$ と Haar 測度の一意性より，$\mu=\mu'$ をうる。$/\!/$

(13) σ は X 上の自己同型とする。次の部分集合

$$\Omega=\{x\in X:\ {}^{\forall}x\text{ の近傍 }U\text{ に対して，}\sigma^nU\cap U\neq\phi,\ {}^{\exists}n\neq 0\}$$

は<u>非遊走集合</u>とよばれる。このとき，$X=\Omega$ である。

(証明)

$X\setminus\Omega$ は開集合である。今，$X\supsetneqq\Omega$ と仮定する。
${}^{\forall}x\in X\setminus\Omega$ に対して，$\sigma^jV\cap V=\phi\ ({}^{\forall}j\neq 0)$ なる x の近傍が存在する。$\mu(\bigcup_0^\infty\sigma^{-j}V)=\sum_0^\infty\mu(\sigma^{-j}V)=\sum_0^\infty\mu(V)=\infty$ となり矛盾である。$/\!/$

(14) σ は X 上の自己同型，$(U_\sigma\xi)(x)=\xi(\sigma x)\ (\xi\in G,\ x\in X)$ によって，G 上の自己同型を定義する。U_σ は $L^2(\mu)$ 上に拡張できる。(X,σ) がエルゴード的である必要十分条件は U_σ は G の単位元 1 を除いて有限軌道をもたないことである。

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

(証明)

(X,σ) はエルゴード的とし，$U_\sigma^n \xi = \xi$ なる $\xi \in G$ が 1 でないとする。$g = \xi + U_\sigma \xi + \cdots + U_\sigma^{n-1}\xi$ は U_σ－不変，故に g = 定数．G は $L^2(\mu)$ の正規直交基底であるから，矛盾をうる。逆に，$g \in L^2(\mu)$ に対して，$U_\sigma g = g$ とする。$g = \sum a_j \xi_j$ $(\xi_j \in G)$ と Fourier 展開され

$$g = \sum a_j \xi_j = \sum a_j U_\sigma \xi_j = U_\sigma g .$$

Fourier 展開の一意性によって，$\xi_j = U_\sigma \xi_j$ $({}^\forall j)$ 故に $\xi_j = 1$; i.e. g = 定数である。//

(15) (X,σ) がエルゴード的ならば，${}^\forall k > 0$ に対して (X,σ^k) もエルゴード的である。

(証明)

(14) より明らか。//

(16) σ は X から X 上への準同型とする。次は同値である；

強混合的 $\Leftrightarrow$ 弱混合的 $\Leftrightarrow$ エルゴード的

(証明)

エルゴード的ならば，強混合的を示せば十分である。

$\gamma, \delta \in G$ に対して，$\gamma = \delta = 1$ のとき

$$(U_\sigma^n \gamma, \delta) = \int U_\sigma^n \gamma \cdot \bar{\delta}\, d\mu = 0 .$$

明らかに，$(U_\sigma^n \gamma, \delta) \to (\gamma, 1)(\delta, 1)$．　$\delta \in G$ を固定し，

$$H_\delta = \{ f \in L^2(\mu) : (U_\sigma^n f, \delta) \to (f, 1)(\delta, 1) \}$$

とおく。H_δ は $L^2(\mu)$ の閉部分空間である。閉集合であることは次のように示される。$f_k \in H_\delta$ で $f_k \to f \in L^2(\mu)$ とする。
$\delta = 1$ のときは $H_\delta = L^2(\mu)$ に注意する。$(1, \delta) = 0$ を仮定する。このとき k は $\|f - f_k\|_2 = \{\int |f - f_k|^2 d\mu\}^{1/2} < \varepsilon/2$ をみたし，$N(\varepsilon) > 0$ は $n \geq N(\varepsilon)$ に対して，

$|(U_\sigma^n f_k, \delta)| < \varepsilon/2$ なるようにえらぶことができるから，

$$\begin{aligned}|(U_\sigma^n f, \delta)| &\leqq |(U_\sigma^n f, \delta) - (U_\sigma^n f_k, \delta)| + |(U_\sigma^n f_k, \delta)| \\ &\leqq \|f - f_k\|_2 + |(U_\sigma^n f_k, \delta)| \\ &= \|f - f_k\|_2 + |(U_\sigma^n f_k, \delta)| \\ &< \varepsilon .\end{aligned}$$

これで H_δ は閉であることが示された。$H_\delta \supset G$ より，$H_\delta = L^2(\mu)$.
次に $f \in L^2(\mu)$ を固定して

$$L_f = \{ g \in L^2(\mu) : (U_\sigma^n f, g) \longrightarrow (f, 1)(g, 1) \}$$

は $L^2(\mu)$ の閉部分空間で，$L_f \supset G$ をみたす。故に，$L_f = L^2(\mu)$.
(X, σ) は強混合的である。//

(17) (Rohlin, [54]) X はコンパクト可換群，σ は X 上の自己同型とする。(X, σ) がエルゴード的であれば，(X, σ) は K-System である。(K-System である必要十分条件は完全正のエントロピーをもつことである)。

(18) X は距離空間，σ は X から X 上への位相同相，ν は X 上の Borel 測度で空でない開集合 U を正測度 $(\nu(U) > 0)$ にもつとする。このとき σ が ν に関してエルゴード的ならば，σ は X で稠密な軌道 $O_\sigma(x) = \{\sigma^n(x) : n \in \mathbb{Z}\}$ をもつ。特に ν が確率測度であれば $\nu\{x \in X : \overline{O_\sigma(x)} = X\} = 1$ である。

(証明)
$\{U_1, U_2, \cdots\}$ は可算基とする。このとき

$$\begin{aligned}\overline{O_\sigma(x)} \neq X \quad &\Longleftrightarrow \quad {}^\exists n \geqq 1, \quad O_\sigma(x) \cap U_n = \phi \\ &\Longleftrightarrow \quad {}^\exists n \geqq 1, \quad \sigma^k(x) \in X \setminus U_n \quad ({}^\forall k \in \mathbb{Z}) \\ &\Longleftrightarrow \quad {}^\exists n \geqq 1, \quad x \in \bigcap_{k=-\infty}^{\infty} \sigma^k(X \setminus U_n) \\ &\Longleftrightarrow \quad x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=-\infty}^{\infty} \sigma^k(X \setminus U_n)\end{aligned}$$

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

閉集合 $\bigcap_{k=-\infty}^{\infty}\sigma^k(X\setminus U_n)$ は σ-不変で，エルゴード性によってその測度は0か1である。$\{\bigcap_{k=-\infty}^{\infty}\sigma^k(X\setminus U_n)\}^c \supset U_n$ より，$\nu(\bigcap_{k=-\infty}^{\infty}\sigma^k(X\setminus U_n))=0$. 故に $x\notin\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=-\infty}^{\infty}\sigma^k(X\setminus U_n)$ に対して，$\overline{O_\sigma(x)}=X$. $\nu(X)=1$ ならば $\nu\{x:\overline{O_\sigma(x)}=X\}=1$ をうる。//

(19) X はコンパクト可換群，σ は X 上の自己同型とする。(X,σ) がエルゴード的ならば，$x_0\in X$ が存在して，$^\forall k\geqq 1$ に対して $\overline{O_{\sigma^k}(x_0)}=X$ である。

(証明)

(X,σ) がエルゴード的であるから，$\overline{O_\sigma(x_0)}=X$ なる $x_0\in X$ が存在する。$^\forall k\geqslant 1$ に対して $O_\sigma(x_0)=O_{\sigma^k}(x_0)\cup O_{\sigma^k}(\sigma x_0)\cup\cdots\cup O_{\sigma^k}(\sigma^{k-1}x_0)$. $\sigma\overline{O_{\sigma^k}(x_0)}=\overline{O_{\sigma^k}(\sigma x_0)}$ は明らか。Baireの定理によって，$\overline{O_{\sigma^k}(x_0)}$ は内点をもつ。(15)によって (X,σ^k) はエルゴード的であるから，$X=\overline{O_{\sigma^k}(x_0)}$.//

(20) X はコンパクト群で，σ は X 上の自己同型とする。$\overline{O_\sigma(x)}=X$ なる $x\in X$ が存在すれば，σ は X 上の Haar 測度 μ に関してエルゴード的である。

(証明)

$f,g\in L^2(\mu)$ とする。$\tilde f(x)=\overline{f(x^{-1})}$，$f*g$ は f と g の Convolution とする。$h\in L^2(\mu)$ は定数関数でないとすると，$h*\tilde h$ は定数関数でない。実際に，$h*\tilde h=$ 定数 と仮定するとき，

$$\begin{aligned}\int h*\tilde h(x)\,d\mu(x)&=\iint h(xy)\overline{h(y)}\,d\mu(y)\,d\mu(x)\\&=\int h(x)\,d\mu(x)\int\overline{h(y)}\,d\mu(y)\\&=\left|\int h(x)\,d\mu(x)\right|^2.\end{aligned}$$

しかし

$$h*\tilde h(1)=\int|h(y)|^2d\mu(y)>\left|\int h(y)\,d\mu(y)\right|^2.$$

よって矛盾をうる。今，σ はエルゴード的でないとする。このとき定数 $\neq f\in L^2(\mu)$ が存在して $f\circ\sigma=f$ a.e. をみたす。
$g=f*\tilde f*f$ は連続で σ は μ-保測であるから，

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

$$
\begin{aligned}
g(\sigma x) &= \int f^*\tilde{f}(\sigma(x)y)f(y^{-1})d\mu(y) \\
&= \int f^*\tilde{f}(\sigma(x)y^{-1})f(y)d\mu(y) \\
&= \iint f(\sigma(x)y^{-1}z)\overline{f(z)}\,f(y)\,d\mu(z)d\mu(y) \\
&= \iint f(\sigma(x)\sigma(y)^{-1}\sigma(z))\overline{f(\sigma(z))}\,f(\sigma y)\,d\mu(z)d\mu(y) \\
&= \iint f\circ\sigma(xy^{-1}z)\,\overline{f\circ\sigma(z)}\,f\circ\sigma(y)\,d\mu(z)d\mu(y) \\
&= \iint f(xy^{-1}z)\overline{f(z)}f(y)\,d\mu(z)d\mu(y) \\
&= g(x).
\end{aligned}
$$

故に $f^*\tilde{f} \neq$ 定数 そして $g^*\tilde{f} = (f^*\tilde{f})^*(f^*\tilde{f})^{\sim}$ も定数関数でない。
しかし $\overline{O_\sigma(x)} = X$ で $g\circ\sigma = g$ は連続であるから，$g =$ 定数．故に $g^*\tilde{f} =$ 定数．これは矛盾である。//

上の命題(20)は一般には成立しない。例えば Halmos (P. 27, [21]) を参照せよ。

> (21) X はコンパクト可換群，μ は前のように X 上の確率 Haar 測度とする。$x \in X$ で $\{x^n : n \in \mathbb{Z}\}$ が X で稠密であるとき，x を X の generator であるという。
> X が連結であれば，generator の集合は μ 測度 1 である。

(証明)

X の指標群 G は可算である；$G = \{1, \xi_1, \xi_2, \cdots\}$ ($\because$ X は距離空間であるから)．$X_i = ann(X, \langle\xi_i\rangle)$ とおく。ここに $\langle\xi\rangle$ は巡回群を表わす。明らかに X_i は閉部分群で $X_i \neq X$．故に $X = \cup\{yX_i \;\; y \in X\}$ と表わされる。今，$\mu(X_i) > 0$ とすれば，$\mu(X_i) = \mu(yX_i)$ ($\forall y \in X$) であるから，$X = X_i \cup y_1X_i \cup \cdots \cup y_kX_i$ ($\exists k \geq 1$)；i.e. X_i は開部分群である。しかし X は連結であるから，このようなことは起らない。故に $\mu(X_i) = 0$ そして $\mu(E) = 0$ ($E = \cup_{i\geq 1} X_i$)．
故に $\mu(X \setminus E) = 1$ で $y \in X \setminus E$ は $\forall \xi_i \in G$ に対して $\xi_i(y) \neq 1$；i.e. y は X の generator である。//

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

Xはコンパクト距離空間とする。ΣをXの部分集合の族とする。$x \in X$に対して点xを含むΣの集合の数を$\gamma(x)$で表わす。関数$\gamma(x)$の最大値をΣの重複度という。部分集合族Σ, Σ'において，$^\forall A' \in \Sigma'$に対して$A' \subset A$なる$A \in \Sigma$が存在するならば，Σ'はΣに内蔵されるという。

次の二条件をみたす整数$n \geqq 0$が存在するとき，Xの次元はnであるという($dim(X) = n$)；(i) Xの有限開被覆をどのようにえらんでも，それに内蔵されるXの閉被覆Δで，その重複度が$n+1$を越えないものが存在する。(ii) Xの有限開被覆で，それに内蔵されるXの有限閉被覆がすべてのnより大きい重複度をもつようなものが存在する。このような性質をもつ数nが存在しない場合には，Xの次元は無限であるという。

(22) コンパクト距離空間Xが完全不連結である必要十分条件は $dim(X) = 0$ である。

(証明)

Xは完全不連結とし，ΣをXの任意の開被覆とする。$^\forall x \in X$に対してxを含む開集合$U_x \in \Sigma$を対応させる。$x \in V_x \subset U_x$なる閉で開なる集合V_xが存在する。$\{V_x : x \in X\}$から有限被覆$\{W_1, \cdots, W_k\}$をえらび，

$$F_1 = W_1, \quad F_2 = W_2 \setminus W_1, \cdots, F_k = W_k \setminus (W_1 \cup \cdots \cup W_{k-1})$$

とおく。$\{F_1, \cdots, F_k\}$はΣに内蔵され，Xの重複度1なる有限被覆である。Σは任意であるから，Xの次元は0に等しい。

Xは$dim(X) = 0$とする。$a, b \in X$で$a \neq b$とする。

$U = X \setminus \{a\}$, $V = X \setminus \{b\}$はXの被覆である。$F_1, \cdots, F_k$を重複度1なるXの閉被覆でU, Vに内蔵されるものとし，$a \in F_1$とする。Xは二つの互に交わらない閉集合F_1及び$F_2 \cup \cdots \cup F_k$の和に分解されている。故に，aの成分はF_1に含まれ従って$X \setminus \{b\}$にも含まれる；i.e. bを含まない。bは任意であるからaの成分はa自身に一致する。Xは完全不連結である。//

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

Gは可算離散可換群とする。Gの演算は加法とする。$g_1, \cdots, g_r \in G$に対して$a_1 g_1 + \cdots + a_r g_r = 0$ $(a_1, \cdots, a_r \in \mathbb{Z})$は$a_1 = \cdots = a_r = 0$に限るとき，$\{g_1, \cdots, g_r\}$は$\mathbb{Z}$上一次独立であるという。$\forall g \in G$に対して，$bg = b_1 g_1 + \cdots + b_r g_r$なる$0 \neq b \in \mathbb{Z}$, $\exists b_1, \cdots, b_r \in \mathbb{Z}$で$(b_1, \cdots, b_r) \neq (0, \cdots, 0)$が存在するとき，$\{g_1, \cdots, g_r\}$はGの<u>generators</u>であるという。generators $\{g_1, \cdots, g_r\}$の個数rをGの<u>階数</u>といい，$\mathrm{rank}(G) = r$で表わす。

(23) Xはコンパクト可換群，Gを指標群とする。このとき位相空間Xの次元はGの階数に等しい。

(24) Gはtorsion freeで，$\mathrm{rank}(G) < \infty$とする。このときXが局所連結であれば，Xは有限次元トーラスである。

(25) コンパクト可換群が連結，局所連結であれば，それは有限次元か無限次元のトーラスである。

(26) $(X, \mathbb{B}, \mu)$は確率空間とし，σはμ-保測変換とする。このとき次は同値である；
(i) σは弱混合的，(ii) $\sigma \otimes \sigma$はエルゴード的，(iii) $\sigma \otimes \sigma$は弱混合的.

(証明)
簡単な証明が(P. 44, [76])に与えられている。//

<u>注意</u> コンパクト可換群の演算はことわらない限り加法で表わし，コンパクト群の演算は積で表わすことにする。部分群は閉部分群を意味する。和を記号＋で，直和を⊕で表わし，直積は⊗によって表わすことにする(テンソル積ではないことに注意する)。与えられた変換の制限，拡張，商空間へもちこんだ変換等は混乱が起きない限り同じ記号で表わす。

1-次元トーラス$[0, 1) \pmod 1$上の分割を近似する関数につい

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

て明記しておく。

(27) $^\forall m \geqq 2$ に対して，次をみたす $0<\delta_m<m^{-2}$ が存在する；

$$(1+m^{-2})\left\{1-2/(m^{20}+1)\delta_m^2\right\} \geqq 1.$$

(証明)

$^\forall m \geqq 2$ に対して $m^{20}+1 > 2(m^6+m^4)$ は容易に分かる。故に

$$m^{-4}(m^{20}+1) > \delta_m^2(m^{20}+1) > 2(m^2+1)$$

をみたす $\delta_m > 0$ をみつけることができる。このことから結論をうる。//

$\mathcal{P}$ を長さ $1/2^n$ $(n \geqq 1)$ の $[0,1)$ の分割とする。$\mathcal{P}$ の区間を左から $P_j=[a_j, a_{j+1})$ と番号付けをする。$k>0$ に対して，$[0,1)$ 上に Fejér 核 $g_k(t)$ を定義する；

$$g_k(t) = \frac{1}{2(k+1)}\left\{\frac{\sin 2\pi\left(\frac{k+1}{2}\right)t}{\sin \pi t}\right\}^2$$

$$= \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{k}\left(1-\frac{j}{k+1}\right)\cos 2\pi j t$$

簡単な計算によって

$$\frac{1}{\pi}\int_0^1 g_k(t)dt = 1 \quad (k>0)$$

$\delta_m > 0$ を(27)のようにえらぶと，$t \in (\delta_m, 1-\delta_m)$ に対して

$$g_{m^{20}}(t) \leqq \frac{1}{(m^{20}+1)\delta_m^2}.$$

$P_j \in \mathcal{P}$，$m \geqq 2$ に対して，1-周期関数 $f_{m,j}(t)$ を定義する；

$$f_{m,j}(t) = \frac{1+m^{-2}}{\pi}\int_0^1 1_{P_j}(t+s)g_{m^{20}}(s)ds.$$

(28) $m \geqq 2$，$2^n \geqq j \geqq 1$ に対して

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

$$f_{m,j}(t) \geqq 1 \quad \text{on } (a_j + \delta_m,\ a_{j+1} - \delta_m),$$

$$\sup_{t\in[0,1)} \sum_{j=1}^{2^n} f_{m,j}(t) = 1 + m^{-2},$$

$$f_{m,j}(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{m^{20}} \{c_k e^{2\pi ikt} + \bar{c}_k e^{-2\pi ikt}\}$$

が成立する。ここに各 c_k は Fourier 係数，$\bar{c}_k$ は c_k の複素共役である。

(証明)

Fejér 核の性質より明らか。//

(29) (Rohlin [53]). X, Y は完備可分距離空間し，π は X から Y への多価関数とする。Y の任意の開集合 U の原像 $\pi^{-1}(U)$ は X で可測で，$x \in X$ に対して $\pi(x)$ は Y で閉集合であるとする。このとき π は少なくとも $\varphi(x) \in \pi(x)$ ($\forall x \in X$) をみたす Borel 可測一価関数 $\varphi : X \to Y$ が存在する(このような φ を Borel branch という).

(証明)

Y の直径は 1 を越えないとする。次をみたす X を Y の中に写す(一価) Borel 可測写像の列 $\varphi_0, \varphi_1, \cdots$ を構成する；

$$d(\varphi_n(x), \pi(x)) < 1/2^n \quad (1_n)$$

$$d(\varphi_n(x), \varphi_{n-1}(x)) < 3/2^n \quad (2_n)$$

帰納的に構成してゆく。φ_0 は一つの Borel 可測写像とする。(1_0) は明らかに成立する。(1_{n-1}) をみたす写像 φ_{n-1} が構成されたと仮定し，(1_n), (2_n) をみたす写像 φ_n を次のようにして構成する；(1_{n-1}) によって

$$d(\varphi_{n-1}(x), y_x) < 1/2^{n-1}$$

をみたす $y_x \in \pi(x)$ をえらぶことができる。$\{y_x : x \in X\}$ から

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

$\frac{1}{2^n}$ - net $\{y_1, y_2, \cdots\}$ をえらぶ。$B(y_i)$ は y_i を中心として半径 $\frac{1}{2^n}$ の開球とする。

$$A_i = \pi^{-1}(B(y_i)) \setminus \pi^{-1}(B(y_i)) \cap \bigcup_{j=1}^{i-1} \pi^{-1}(B(y_j))$$

$$\varphi_n(x) = y_i \quad (x \in A_i)$$

とおく。φ_n は (1_n), (2_n) をみたしている。実際に. $x \in A_i$ とすれば, $\pi(x) \subset \pi(A_i)$. $\pi(x) \cap B(y_i) \neq \phi$ で $\varphi_n(x) = y_i \in B(y_i)$ であるから, $d(\varphi_n(x), \pi(x)) < \frac{1}{2^n}$. 更に, $d(\varphi_{n-1}(x), y_x) < \frac{1}{2^{n-1}}$ $(x \in A_i)$ であるから, $y_x \in \pi(x) \subset \pi(A_i)$. 故に $d(y_x, \varphi_n(x)) < \frac{1}{2^n}$ そして $d(\varphi_{n-1}(x), \varphi_n(x)) < \frac{3}{2^n}$.

(2_n) から $\{\varphi_0, \varphi_1, \cdots\}$ は一様収束する。故に $\varphi_n \to \varphi$ とすると, φ は Borel 可測. 一方, (1_n) によって $d(\varphi(x), \pi(x)) = 0$. 故に $\varphi(x) \in \pi(x)$; i.e. φ は π の Borel branch である。//

(30) X は局所コンパクト群で, σ は X 上の連続な自己同型とする。一般に σ^{-1} は連続ではない。

例を構成する。C は circle 群で普通の位相をもっているとする。F は離散位相をもつ circle 群とする。$F_i = F$, $C_i = C$ $(i \geqq 1)$ とおく。$F' = \bigotimes_1^n F_i$, $C' = \bigotimes_1^n C_i$ は直積位相群で, $X = F' \otimes C'$ は離散位相群 F' とコンパクト位相群 C' の直積であるから, X は局所コンパクト可換群である。$x = (x_1, x_2, \cdots) \in F'$, $y = (y_1, y_2, \cdots) \in C'$ に対して, $u = (x_2, x_3, \cdots)$, $v = (x_1, y_1, y_2, \cdots)$ として, $\sigma(x, y) = (u, v)$ とおく。このとき, σ は X 上の連続自己同型であるが, σ^{-1} は連続ではない。

(31) X は左不変 Haar 測度 μ をもつ局所コンパクト群, σ は X 上の自己同型とする。$\sigma(H) = H$ なる部分群 H に対して, right coset space X/H 上に Borel 測度 μ' を生成することができる (π を X から X/H 上への射影とするとき, $\mu' = \mu\pi^{-1}$ と定義すれ

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

ばよい)。(X,σ) がエルゴード的ならば, $(X/H,\sigma)$ もエルゴード的である。

(証明)

$(X/H,\sigma)$ はエルゴード的でないとすると, $\sigma\dot{K}=\dot{K}$ で $\mu'(\dot{K})\neq 0$, $\mu'(X/H\setminus\dot{K})\neq 0$ なる部分集合 $\dot{K}\subset X/H$ が存在する。
$K=\pi^{-1}(\dot{K})$ とすれば, K は X の部分集合で $\mu(K)\neq 0$, $\mu(X\setminus K)\neq 0$ かつ $\sigma(K)=K$ をみたす。これは (X,σ) のエルゴード性に反する。//

§2 有限エントロピー自己同型を伴う可換群の構造

前のように X はコンパクト可換群とする。X 上の自己同型を σ, 確率 Haar 測度を μ で表わす。σ は μ-測度不変な変換である。μ に関する σ のエントロピーを $h(\sigma)$ で表わすことにする。

G は X の指標群とする。X, G は可換であるから, X, G の群演算は加法で表わすことにする。G は可算集合で離散的である。$(\gamma g)(x)=g(\sigma x)$ $(g\in G,\ x\in X)$ によって自己同型 $\gamma: G\to G$ が定義される。X が連結のとき, G は *torsion free* である。G の部分群

$$G_t=\{g\in G : p(\gamma)g=0,\ 0\neq {}^{\exists}p(x)\in \mathbb{Z}[x]\}$$

は γ-不変である。ここに $\mathbb{Z}[x]$ は整係数の多項式の全体を表わす; i.e. $\mathbb{Z}[x]$ は多項式環である。$g\in G_t$ $(0\neq g)$ に対して $p(\gamma)g=0$ なる $0\neq p(x)\in\mathbb{Z}[x]$ の次数は $k>0$ であるとする。
$G(g)$ は $\{g,\gamma g,\cdots,\gamma^{k-1}g\}$ によって生成された G の部分群とし,

$$\overline{G(g)}=\{f\in G : mf\in G(g),\ {}^{\exists}m\neq 0\}$$

とおく。このとき $G(g)\subset\overline{G(g)}$ で, 両方共に γ-不変である。
$\overline{G(g)}/G(g)$ は *torsion* 群であるから,

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

$$\mathrm{rank}(\overline{G(g)}) = \mathrm{rank}(G(g)) = k.$$

X での G' の annihilator を $\mathrm{ann}(X, G')$ で表わす;

i.e. $\mathrm{ann}(X, G') = \{x \in X : f(x) = 0, \ \forall f \in G'\}$.

$X(g) = \mathrm{ann}(X, \overline{G(g)})$ とおくと、$\overline{G(g)}$ の指標群は $X/X(g)$, $G/\overline{G(g)}$ の指標群は $X(g)$ である。

$0 \neq g \in G$ に対して $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ が monic で定数項が 1 か -1 であって, $p(\gamma)g = 0$ をみたすとき, g は condition (*) をみたすという。G が自明部分群$\{0\}$を除いて γ-不変有限生成部分群をもたないとき, G は condition (**) をもつという。この条件は次のように言い換えることができる; $0 \neq g \in G$ に対して $p(\gamma)g = 0$ なる $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ は次の条件の一つをみたしている; (i) $p(x)$ は monic でない, (ii) $p(x)$ の定数項は ± 1 でない, (iii) $p(x)$ は monic でも, 定数項が ± 1 でもない。X が連結で有限次元であるとき, X は solenoidal 群であるという。明らかに有限次元トーラスは solenoidal 群である。しかし solenoidal 群は必ずしもトーラスではない。solenoidal 群とその上の自己同型については §4 で詳しく解説をする。solenoidal 群 X に X/K がトーラスとなるような σ-不変部分群 K が存在しないとき, X の指標群 G は condition (**) をもつことは容易に分かる。

Y_n $(n \geq 1)$ は有限次元トーラスとし, 直積位相群 $Y = \bigotimes_1^\infty Y_n$ は無限次元トーラスである。β は次のように定義される Y 上の自己同型とする;

$$\begin{aligned}&\beta(y_1, y_2, y_3, \cdots)\\ &= (\beta_1(y_1), \alpha_1(y_1) + \beta_2(y_2), \alpha_2(y_1, y_2) + \beta_3(y_3), \cdots)\end{aligned}$$

ここに β_n は Y_n 上の自己同型で, $\alpha_n : \bigotimes_1^n Y_j \to Y_{n+1}$ は準同型とする。

最初に次の定理を証明する。

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

定理 2.1. 無限次元トーラスX上の自己同型σは有限エントロピーをもつとする。このとき上のような力学系(Y, β)が存在して，(X, σ)と(Y, β)は同型である。

証明に対して，次の二つの結果を必要とする。

定理 2.2 (P.79, [82]) Xはコンパクト可換群，σはXからX上への準同型とする。σの核の位数を$ord(\sigma^{-1}(0))$で表わすと，つねに$h(\sigma) \geq \log ord(\sigma^{-1}(0))$が成立する。

補題 2.3. $G_t \neq G$ ならば，$h(\sigma) = \infty$ である。

(証明)

$f \notin G_t$ に対して，Wは$\{\gamma^j f : j \geq 0\}$によって生成されたGの部分群とする。明らかに$\gamma W \subsetneq W$，故に$W/\gamma W$は無限巡回群$\langle f \rangle$に同型である。明らかに$\sigma\, ann(X, W) \subsetneq ann(X, W)$ 故に$X/ann(X, W)$上にσによって準同型σ'を生成することができる。σ'の核は無限である。定理 2.2 によって$h(\sigma) \geq h(\sigma') = \infty$. //

定理 2.1の証明. 補題 2.3によって，$G_t = G$ ($h(\sigma) < \infty$であるから). 前のように$0 \neq f_1 \in G$に対して，$\overline{G(f_1)}$を定義する。$rank(\overline{G(f_1)}) < \infty$であるから，$\overline{G(f_1)}$は巡回群の有限直和で表わされ，更に$G = \overline{G(f_1)} \oplus G_1$なる部分群$G_1$が存在する。
$0 \neq f_2 \in G_1$に対して$\overline{G(f_2)}$を定義すると，同じようにして$G_1 = \overline{G(f_2)} \oplus G_2$と表わされ，$G = \overline{G(f_1)} \oplus \overline{G(f_2)} \oplus G_2$がえられる。このことをくりかえすと，Gは次のような条件をもつ部分群の列$\{\overline{G(f_j)}\}_{j \geq 1}$をもつ；

$$G = \oplus_{j \geq 1} \overline{G(f_j)}, \quad \gamma(\oplus_{j \leq k} \overline{G(f_j)}) = \oplus_{j \leq k} \overline{G(f_j)}, \quad k \geq 1$$

($\oplus_{j \geq 1} G_j$ は制限直和を意味する). $j \geq 1$ に対して

$$X_j = ann(X_j, \oplus_{i \neq j} \overline{G(f_i)})$$

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

は有限次元トーラスで,

$$X = \bigoplus_{j\geq 1} X_j, \quad \sigma(\bigoplus_{j\geq R} X_j) = \bigoplus_{j\geq R} X_j, \quad R \geq 1$$

をうる。今 $\bigoplus_{j\geq 1} X_j$ の元 $x = \sum x_j$ を $(x_1, x_2, \cdots)$ で表わすことにする。このとき σ は skew product 自己同型

$$\sigma(x) = (\sigma_1(x_1),\ \beta_1(x_1) + \sigma_2(x_2),\ \beta_2(x_1, x_2) + \sigma_3(x_3),\ \cdots)$$

で表わされる。ここに $\sigma_j : X_j \to X_j$ は σ の制限で, $\beta_j : \bigoplus_{i=1}^{j} X_i \to X_{j+1}$ は或る準同型である。//

注意 無限次元トーラス上に有限エントロピーをもつエルゴード的自己同型が存在するかは問題として残されている。

> **定理 2.4** X はコンパクト連結可換群, σ は X 上の自己同型とする。(G, γ) は (X, σ) の dual とし, G の各元は condition (*) をみたすと仮定する。このとき $h(\sigma) < \infty$ ならば, σ-不変完全不連結部分群 K が存在して, X/K は局所連結で, $h(\sigma_{|K}) = 0$ をみたす。

証明に対して次の三つの結果を準備する。

> **定理 2.5** (P.73, [82]) X はコンパクト群, σ は X 上の自己同型, N は σ-不変部分群とする。このとき
>
> $$h(\sigma) = h(\sigma_{|X/N}) + h(\sigma_{|N})$$
>
> が成立する。

> **補題 2.6.** X は solenoidal 群とし, F は σ-不変完全不連結部分群とする。このとき $h(\sigma_{|F}) = 0$ が成立する。

(証明)

X は solenoidal であるから, $\dim(X) = \mathrm{rank}(G) = r$.
故に G は generators $\{e_1, e_2, \cdots, e_r\}$ をもつ。$g \in G$ は,

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

$ag = a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_re_r$ $(a, a_1, \cdots, a_r \in \mathbb{Z})$ と表わされ，$(a_1/a, \cdots, a_r/a)$ は一意的に存在する。

$$\varphi(g) = (a_1/a, \cdots, a_r/a)$$

によって中への1-1準同型 $\varphi : G \to \mathbb{Q}^r$ が定義される。（$\mathbb{Q}^r$ は有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の r-次元ベクトル空間を表わす）。 G は $\mathbb{Q}^r$ の部分集合とし，γ の $\mathbb{Q}^r$ 上への拡張を再び γ で表わす。 $p(x)$ は γ の特性多項式とすると，$p(x)$ は有理係数の多項式（$p(x) \in \mathbb{Q}[x]$）である。 λ_i は γ の固有値，Δ は $\Delta p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ なる最小の正の整数とする。このとき

$$h(\sigma) = \sum_{|\lambda_i|>1} \log|\lambda_i| + \log\Delta$$

この関係式は§4の定理4.5で証明される。 F は完全不連結であるから，$ann(G, F)(\subset G)$ は階数 r をもつ；i.e. $\sigma_{|X/F}$ は $\mathbb{Q}^r$ 上の自己同型を生成し，同じ特性多項式 $p(x)$ をもつ。 故に $h(\sigma_{|X/F}) = h(\sigma)$. 定理2.5によって，$h(\sigma) = h(\sigma_{|X/F}) + h(\sigma_{|F})$. 故に $h(\sigma_{|F}) = 0$.//

<u>補題 2.7</u>. X はコンパクト連結可換群，σ は X 上の自己同型とする。 $h(\sigma) < \infty$ を仮定する。 このとき，σ-不変完全不連結部分群 N に対して，つねに $h(\sigma_{|N}) = 0$ である。

（証明）

補題2.3によって，$G_t = G$. 故に G は次をみたす部分群の列 $\{G_n\}$ をもつ；

$$G_1 \subset G_2 \subset \cdots \subset \bigcup G_n = G, \quad rank(G_n) < \infty \quad (n \geq 1).$$

$X_n = ann(X, G_n)$ とおく。 明らかに $(N + X_n)/X_n$ は完全不連結で，X/X_n は solenoidal である。補題2.6によって，$h(\sigma_{|(N+X_n)/X_n}) = 0$. $X_n \searrow \{0\}$ であるから，$h(\sigma_{|N}) = 0$.//

<u>定理 2.8</u> (Gauss) $\mathbb{Z}[x] \ni p(x)$ は原始的とする。 $\mathbb{Z}[x]$ に

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

属する $g(x)$ が $\mathbb{Q}$ 上で $p(x)$ で割り切れれば，すでに $\mathbb{Z}$ 上で割り切れている。

証明に対しては（P. 75，[7]）を見よ。

$\mathbb{M}[x]$ は $\mathbb{Z}[x]$ に含まれる多項式 $p(x)$ で次をみたすものの全体とする；各 $p(x)$ は monic で定数は 1 か −1 である。

定理 2.4 の証明．$h(\sigma)<\infty$ で (X,σ) は condition (*) をみたすから，$0\neq g_1\in G$ に対して，$p_1(\gamma)g_1=0$ なる $0\neq p_1(x)\in\mathbb{M}[x]$ が存在する。$p_1(x)$ は次数が最小で原始多項式としてえらべる。原始多項式にえらべることを示す。

$0\neq g(x)\in\mathbb{M}[x]$ は $g(\gamma)g_1=0$ なる最小次数とすると，$g(x)$ は $\mathbb{Q}$ 上で $p_1(x)$ を割り切ることができる。$g'(x)$ は $g(x)=ng(x)'\ (\exists n\neq 0)$ なる原始多項式であるとする。このとき $g(\gamma)g_1=ng(\gamma)'g_1=0$. G は torsion free であるから，$g(\gamma)'g_1=0$. 定理 2.8 によって，実は，$g(x)'$ は $\mathbb{Z}$ 上で $p_1(x)$ を割り切る。故に $g(x)'\in\mathbb{M}[x]$，$g(x)'$ は原始的で $g(\gamma)'g_1=0$.

$p_1(x)$ の次数を k_1 とし，$G_1=\sum_{i=0}^{k_1-1}\gamma^i\langle g_1\rangle$ とおく。k_1 の最小性と $p_1(x)\in\mathbb{M}[x]$ によって

$$\gamma G_1=G_1,\qquad G_1=\oplus_0^{k_1-1}\gamma^i\langle g_1\rangle$$

がえられる。

$$\overline{G}_1=\{g\in G:\ ng\in G_1,\ \exists n\neq 0\}$$

とおくと，$\gamma\overline{G}_1=\overline{G}_1$，$G/\overline{G}$ は torsion free である。$g_2\in G$，$g_2\notin\overline{G}_1$ に対して，$p_2(\gamma)g_2\in\overline{G}_1$ をみたす最小次数で原始的な $p_2(x)\in\mathbb{M}[x]$ が存在する。更に $n_2p_2(\gamma)g_2\in G_1$ なる $n_2>0$ が存在する。$k_2>0$ は $p_2(x)$ の次数とすると，

$$G_2=\sum_{i=0}^{k_2-1}\gamma^i\langle n_2g_2\rangle=\oplus_{i=0}^{k_2-1}\gamma^i\langle n_2g_2\rangle.$$

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

$g_2 \notin \overline{G_1}$ であるから，$G_1 \cap G_2 = \{0\}$．このことをくりかえすとき次のような部分群の列がえられる；

$$G_1 \subset G_1 \oplus G_2 \subset \cdots \subset \bigcup_1^{\infty} G_1 \oplus \cdots \oplus G_n = G_\infty,$$

$$G = \{g \in G : mg \in G_\infty, \ ^{\exists} m \neq 0\}.$$

G/G_∞ は torsion 群であるから，$K = ann(X, G_\infty)$ は完全不連結で $\sigma K = K$．補題 2.7 によって，$h(\sigma_{|K}) = 0$．X/K は指標群 G_∞ をもつから，X/K は局所連結である。//

> 定理 2.9．X はコンパクト連結可換群，σ は X 上の自己同型で前のように (X, σ) の dual を (G, γ) で表わす。G の各元は condition (＊) をみたさないと仮定する。このとき $h(\sigma) < \infty$ ならば，X は solenoidal で X の指標群 G の各元は condition (＊＊) をみたす。

(証明)

$0 \neq f_1 \in G$ に対して，G の部分群 $\overline{G(f_1)}$ を定義する。$X_1 = ann(X_1, \overline{G(f_1)})$ とおくと，$\sigma X_1 = X_1$ で，X/X_1 は指標群 $\overline{G(f_1)}$ をもつ。$G/\overline{G(f_1)}$ は torsion free であるから，X_1 は連結である。$f_2 \notin \overline{G(f_1)}$ とすると，$\overline{G(f_1)} \subsetneq \overline{G(f_1)} + \overline{G(f_2)}$．$X_{12} = ann(X, \overline{G(f_1, f_2)})$ とする。ここに $\overline{G(f_1, f_2)}$ は

$$\overline{G(f_1, f_2)} = \{g \in G : kg \in \overline{G(f_1)} + \overline{G(f_2)}, \ ^{\exists} k > 0\}.$$

明らかに $\sigma X_{12} = X_{12}$ で，X_{12} は連結である。$rank(\overline{G(f_1, f_2)}/\overline{G(f_1)}) < \infty$ であるから，X_1/X_{12} は連結で有限次元である。$f_3 \notin \overline{G(f_1, f_2)}$ のとき，

$$\overline{G(f_1, f_2)} \subsetneq \overline{G(f_1, f_2)} + \overline{G(f_3)}.$$

$X_{123} = ann(X, \overline{G(f_1, f_2, f_3)})$ とおく。但し

$$\overline{G(f_1, f_2, f_3)} = \{g \in G : kg \in \overline{G(f_1, f_2)} + \overline{G(f_3)}, \ ^{\exists} k > 0\}.$$

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

このとき，X_{123} は連結，$\sigma X_{123}=X_{123}$ そして X_{12}/X_{123} は有限次元である。この方法で次のように部分群の列

$$X\supset X_1\supset X_{12}\supset\cdots\supset\bigcap_n X_{12\cdots n}=\{0\},$$
$$\dim(X_{12\cdots n}/X_{12\cdots n+1})<\infty,\quad \sigma X_{12\cdots n}=X_{12\cdots n}$$

を構成する。σ_n は σ によって生成された $X_{12\cdots n}/X_{12\cdots n+1}$ 上の自己同型とすると，

$$X_{12\cdots n+1}\subsetneqq X_{12\cdots n}\Rightarrow h(\sigma_n)\geqq\log 2.$$

実際，$G=\overline{G(f_1,\cdots,f_{n+1})}/\overline{G(f_1,\cdots,f_n)}$ は $X_{12\cdots n}/X_{12\cdots n+1}$ の指標群であることに注意する。f_{n+1} は condition (*) をみたさないから，$p(x)\in\mathbb{Z}[x]\setminus\mathbb{M}[x]$ なる多項式が存在して $p(\gamma)f_{n+1}=0$ である。$p(x)$ は最小次数で原始的にえらばれているとしてよい。例えば

$$p(x)=x^k+a_{k-1}x^{k-1}+\cdots+a_0,\quad |a_0|\neq 1$$

であるとする。$\dot{f}_{n+1}=f_{n+1}+\overline{G(f_1,\cdots,f_n)}$ と書くことにして，$\dot{W}$ は $\{\gamma^j\dot{f}_{n+1}:0\leqq j\leqq k-1\}$ によって生成された $\dot{G}$ の部分群とし，$\gamma\dot{W}=\dot{W}$ を仮定する(定義から，$\gamma\dot{W}\subset\dot{W}$ は明らか)。このとき $\dot{f}_{n+1}\in\gamma\dot{W}$. 故に $g(\gamma)\dot{f}_{n+1}=0$ なる $g(x)\in\mathbb{Z}[x]$ が存在し，$g(x)$ の定数項は 1 か -1 である。$p(x)$ の次数の最小性によって，$p(x)$ は $\mathbb{Q}$ 上で $g(x)$ を割り切る。$p(x)$ は原始的であるから，定理 2.8 によって，$p(x)$ は $\mathbb{Z}$ 上で $g(x)$ を割り切る。これは起りえない。故に，$\gamma\dot{W}\subsetneqq\dot{W}$. 他の場合に対しても $\gamma\dot{W}\subsetneqq\dot{W}$ か $\gamma^{-1}\dot{W}\subsetneqq\dot{W}$ なる $\dot{W}$ をみつけることができる。次の補題によって，

$$h(\sigma_{|X_{1\cdots n}/X_{1\cdots n+1}})\geqq\log 2.$$

定理 2.5 から

$$h(\sigma)=\sum_{n=1}^{k}h(\sigma_n)+h(\sigma_{|X_{1\cdots n+1}})\quad(k\geqq 1).$$

しかし $h(\sigma)<\infty$ であるから，$k>0$ があって

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

$$X_{12\cdots k} \supsetneqq X_{12\cdots k+1} = \{0\}.$$

故に，Xは有限次元である。Gの各元はcondition (*)をみたさない；i.e. Gはγ-不変有限生成部分群をもたないから，Gの各元はcondition (**)をもつ。//

補題 2.10 Xとσは定理2.9のものとする。$0 \neq f \in G$に対してWは$\{\gamma^j f : j \geq 1\}$によって生成された部分群とする。このとき$\gamma W \subsetneqq W$ならば，$h(\sigma) \geq \log 2$である。

(証明)

$\sigma\, ann(X, W) \subsetneqq ann(X, W)$より，$\sigma$は$X/ann(X, W)$上の準同型$\sigma'$を生成する。明らかに$ord(\sigma'^{-1} ann(X, W)) \geq 2$. 定理2.2によって，$h(\sigma) \geq \log 2$.//

補題 2.11 Gは可算離散可換群でtorsion free，γはG上の自己同型とする。Gの階数は有限であると仮定する。G_1はcondition (*)をみたすGの元の全体とする(G_1はGの部分群)。このとき部分群G_2が

$$G_1 \cap G_2 = \{0\}, \quad rank(G_1 \oplus G_2) = rank(G)$$

をみたすようにえらぶことができる。

(証明)

$\gamma G_1 = G_1$は明らか。$rank(G) = r$とする。このときGは$\mathbb{Q}^r$に埋めこまれる。$G \subset \mathbb{Q}^r$と考えることにする。γの$\mathbb{Q}^r$上への拡張を同じ記号で表わす。$\mathbb{Q}^{r_1}$はG_1を含む最小の部分空間で，$\mathbb{Q}^{r_2}$は$\mathbb{Q}^r = \mathbb{Q}^{r_1} \oplus \mathbb{Q}^{r_2}$をみたす部分空間とする。$\forall f \in G$に対して，$f = f_1 + f_2$ ($f_1 \in \mathbb{Q}^{r_1}$, $f_2 \in \mathbb{Q}^{r_2}$)と表わされる。$nf_1, nf_2 \in G$なる$n > 0$が存在することに注意する。このとき$nf_1 \in G_1$ そして $nf_2 \in G \cap \mathbb{Q}^{r_2} = G_2$ 故に $nf = nf_1 + nf_2 \in G_1 \oplus G_2$.//

定理 2.12 Xはコンパクト連結可換群で，σはX上の自己

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

同型とする。このとき $h(\sigma)<\infty$ ならば，完全不連結部分群K，部分群S，Tが存在して次をみたすようにできる；

(i) K，S，Tは σ-不変，

(ii) $h(\sigma_{|K})=0$，

(iii) $S/K \neq \{K\}$ ならば，S/K は solenoidal で condition (＊＊) をみたす，

(iv) $T/K \neq \{K\}$ ならば，T/K は連結局所連結，

(v) $X/K = S/K \oplus T/K$.

（証明）

$h(\sigma)<\infty$ であるから，補題2.3によって $G_t=G$. 故に γ-不変部分群の列

$$G^{(1)} \subset G^{(2)} \subset \cdots \subset \cup G^{(n)}=G,\quad \mathrm{rank}(G^{(n)})<\infty\ (n\geqq 1)$$

が存在する。$n\geqq 1$ に対して condition (＊) をみたす $G^{(n)}$ の元の全体を $G_1^{(n)}$ とする。明らかに $G_1^{(n)}$ は $G^{(n)}$ の部分群である。補題2.11によって

$$G_1^{(n)} \cap G_2^{(n)}=\{0\},\quad \mathrm{rank}(G_1^{(n)}\oplus G_2^{(n)})=\mathrm{rank}(G^{(n)})$$

なる部分群 $G_2^{(n)}$ が存在する。

$$G_1^{(1)} \subset G_1^{(2)} \subset \cdots,\quad G_2^{(1)} \subset G_2^{(2)} \subset \cdots$$

であることに注意する。$G_1=\cup G_1^{(n)}$, $G_2=\cup G_2^{(n)}$ とおく。
このとき

$$G_1 \cap G_2=\{0\},\quad \mathrm{rank}(G_1\oplus G_2)=\mathrm{rank}(G).$$

$K=\mathrm{ann}(X, G_1\oplus G_2)$ とすると，X/K の指標群は $G_1\oplus G_2$ である。G_1, G_2 を指標群にもつ X/K の部分群をそれぞれ X_1/K, X_2/K とすると，$X/K=X_1/K\oplus X_2/K$. Kは完全不連結であるから，$h(\sigma_{|K})=0$ (∵補題2.7). X_1/K に対して定理2.4を，X_2/K に対して定理2.9を使ったとき，結論をうる。//

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

Gを可算離散可換群，γをG上の自己同型とする。$g \in G$に対して，$W_g = \sum_{-\infty}^{\infty} \gamma^i \langle g \rangle$と書く。

補題 2.13. G_1はGのγ-不変 torsion free 部分群とする。$\forall g \in G$に対して$G_1 + dW_g$が torsion free となるような$d > 0$が存在する。

（証明）

$G_1 + W_g$は torsion free でないと仮定する。このとき，$dp(\gamma)g \in G_1$なる$d > 0$と最小次数をもつ原始多項式$p(x) \in \mathbb{Z}[x]$が存在する。この$d > 0$が求めるものである。$G_1 + dW_g$の元fが或る$m > 0$に対して$mf = 0$であると仮定する。このとき$f = f_1 + d\gamma^{-b}g(\gamma)g$に分解される。ここに$f_1 \in G_1$，$b > 0$，$g(x) \in \mathbb{Z}[x]$である。故に

$$m d g(\gamma) g = -m\gamma^b f_1 \in G_1.$$

定理 2.8 によって，$g(x) = g(x)' p(x)$なる$g(x)' \in \mathbb{Z}[x]$が存在する。故に$f = f_1 + d\gamma^{-b} g(\gamma)' p(\gamma) g \in G_1$. G_1は torsion free であるから，$f = 0$. 故に$G_1 + dW_g$は torsion free である。//

補題 2.14. Xはコンパクト可換群，σはX上の自己同型とする。単位元の連結成分をX_0で表わすと，$X = X_0 + H$なるσ-不変完全不連結部分群Hが存在する。

（証明）

帰納的に補題 2.13 を使ったとき，$G' = \sum_1^{\infty} d_j W_{g_j}$は torsion free で$G/G'$は torsion 群となるように$d_1, d_2, \cdots > 0$と$g_1, g_2, \cdots \in G$をみつけることができる。$H = ann(X, G')$は完全不連結で，$\sigma$-不変である。$X/H$の指標群は$G'$であるから，$X/H$は連結，故に$X/(X_0 + H)$も連結．一方，$X/X_0$は完全不連結より，$X/(X_0 + H)$も完全不連結．このことは$X = X_0 + H$を意味する。//

定理 2.15. Xはコンパクト可換群，σはX上の自己同型とする。$h(\sigma) < \infty$と仮定すると，完全不連結部分群H, Nと部分群

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

S, T が存在して次をみたす；
(i) H, N, S, T は σ－不変，
(ii) $N = H \cap S \cap T$，
(iii) $h(\sigma_{|N}) = 0$，
(iv) $S/N \neq \{N\}$ ならば，S/N は solenoidal で condition (**) をみたす，
(v) $T/N \neq \{N\}$ ならば，T/N は連結局所連結，
(vi) $X/N = H/N \oplus S/N \oplus T/N$.

(証明)

補題2.14によって，$X = X_0 + H$. 定理2.12によって $X_0/K = S/K \oplus T/K$. 故に $X = H + S + T$.

$P = ann(G, H)$，$L = ann(G, S)$，$M = ann(G, T)$ とおくと，$L \cap M = G_0$ は G の torsion 部分群.

$$rank(P) = rank(L + M) = rank(G)$$

は明らか。$P_L = P \cap L$，$P_M = P \cap M$ とおくと，P は torsion free であるから，

$$P_L \cap P_M = P \cap G_0 = \{0\}.$$

同じ理由で，$(P_L \oplus P_M) \cap G_0 = \{0\}$. 故に直和 $P_L \oplus P_M \oplus G_0$ は G の部分群である。

$$\begin{aligned} P_L \oplus P_M \oplus G_0 &= (P \cap L) \oplus (P \cap M) \oplus (L \cap M) \\ &= ann(G, H+S) \oplus ann(G, H+T) \oplus ann(G, S+T) \\ &= ann(G, (H+S) \cap (H+T) \cap (S+T)) \end{aligned}$$

より，$N = (H+S) \cap (H+T) \cap (S+T)$ とおくと，N は完全不連結であることが分かる。故に $h(\sigma_{|N}) = 0$. P_M の各元は condition (**) をみたすことは明らか。結論がえられた。//

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

§3 自己同型を伴う可換群の構造

エントロピーが有限である条件を除いた時，コンパクト可換群の構造がどのように変化するか。このことを調べる。

Xはコンパクト可換群，σはX上の自己同型とし，前のようにして(X, σ)の dual を(G, γ)で表わす。$0 \neq {}^\forall g \in G$に対して$p(\gamma)g = 0$なる$0 \neq p(x) \in \mathbb{Z}[x]$が存在するとき，$(X, \sigma)$は condition (A) をみたすと呼ぶ。condition (A) は§2で定義された condition ($*$) と condition ($**$) に細分される。$0 \neq {}^\forall g \in G$に対して$p(\gamma)g \neq 0$ $(0 \neq {}^\forall p(x) \in \mathbb{Z}[x])$なるとき，$(X, \sigma)$は condition (B) をみたすと呼ぶ。エントロピーが有限の自己同型をもつ群の場合には，condition (B) が現われてこない。

次の定理を証明することがこの§の目的である。

定理 3.1. Xはコンパクト可換群，σはX上の自己同型とする。Xにσ-不変部分群X_1, X_2, X_3が存在して次をみたすようにできる;

(i) X_1は完全不連結，

(ii) X_2は連結で condition (A) をみたす，

(iii) X_3は連結で condition (B) をみたす，

(iv) Xは和$X = X_1 + X_2 + X_3$に分解される。

特に，(X, σ)がエルゴード的であれば，X_i $(i = 1, 2, 3)$はエルゴード性をみたすようにえらぶことができる。

補題 2.14 によって，$X = X_0 + H$と分解される。HをX_1と書けば(i)がえられる。(ii), (iii) はX_0に対して次の補題を適応すればよい。

補題 3.2. Xは連結とする。このとき定理 3.1 の (ii), (iii) をみたす部分群X_2, X_3が存在して，$X = X_2 + X_3$と表わされる。

(証明)

G_Aは condition (A) をみたす最大な部分群とする。$g \notin G_A$に対

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

して，$W_g\ (=\sum_{-\infty}^{\infty}\gamma^j\langle g\rangle)$ は直和 $W_g=\oplus_{-\infty}^{\infty}\gamma^j\langle g\rangle$ に分解される。$g_{i_1}\notin G_A$ に対して，$W_{g_{i_1}}\cap W_f=\{0\}$ なる $f\notin G_A$ を g_{i_2} とし，$(W_{g_{i_1}}\oplus W_{g_{i_2}})\cap W_h=\{0\}$ なる $h\notin G_A$ を g_{i_3} と書くことにする。これをくりかえすと部分群の列 $\{W_{g_{i_n}}\}$ が存在して

$$G_B=\oplus_{n\geq 1}W_{g_{i_n}}$$

は G の部分群となる。$G_A\cap G_B=\{0\}$ で，$0\neq\dot{g}\in G/G_A$ は $p(\gamma)\dot{g}=0$ なる $0\neq p(x)\in\mathbb{Z}[x]$ をもつ。

$$\overline{G}_B=\{f\in G:\ mf\in G_B,\ \exists m\neq 0\}$$

とおくと，$G/\overline{G}_B$ は torsion free. G/G_A も torsion free. $X_2=\mathrm{ann}(X,\overline{G}_B)$ そして $X_3=\mathrm{ann}(X,G_A)$ は連結で

$$X_2+X_3=\mathrm{ann}(X,\overline{G}_B\cap G_A)=\mathrm{ann}(X,\{0\})=X.$$

X_2 の指標群は $\overline{G}_B$，X_3 の指標群は G_A であるからそれぞれ(ii),(iii)をみたしている。定理の前半は証明された。後半は次の補題からえられる。

> 補題 3.3. (X,σ) はエルゴード的で，X は部分群 Y_1 と Y_2 の和 $X=Y_1+Y_2$ に分解されていると仮定する。このときエルゴード性をみたす Y_2 の(σ-不変)部分群 Y_3 が存在して，$X=Y_1+Y_3$ と表わすことができる。

(証明)

(Y_3,σ) が K-system で，$(Y_2/Y_3,\sigma)$ が零エントロピーをもつような部分群 Y_3 が存在する(次の補題を見よ)．$Y_2/(Y_1\cap Y_2)$ は X/Y_1 の剰余群であるから，$(Y_2/(Y_1\cap Y_2),\sigma)$ は K-system. 一方，$(Y_2/(Y_3+(Y_1\cap Y_2)),\sigma)$ は零エントロピーをもち，$(Y_2/(Y_1\cap Y_2),\sigma)$ の homorphic image である。従って $Y_2\subsetneq Y_3+(Y_1\cap Y_2)$ であれば，エントロピーは零かつ正となり矛盾する。故に $Y_2=Y_3+(Y_1\cap Y_2)$．このことから $X=Y_1+Y_3$ がえられる。//

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

補題 3.4. Xはコンパクト可換群，σはX上の自己同型とする。このとき$(X/K, \sigma)$が零エントロピーをもち，(K, σ)はK-systemとなるようなσ-不変部分群が存在する。

(証明)

前のように(G, γ)は(X, σ)のdualとする。帰納的に

$$F_0 = \{0\},\ F_{n+1} = \{g \in G : \gamma^{n+1} g - g \in F_n\}\ (n \geq 0)$$

を定義する。$F_\infty = \bigcup_0^\infty F_n$とおくと，γは$G/F_\infty$の単位元を除いて有限軌道をもたない。$K = ann(X, F_\infty)$とおく。Kの指標群は$G/F_\infty$であるから，$(K, \sigma)$はエルゴード的，故にK-systemである。一方，$H_n = ann(X, F_n)\ (n \geq 0)$とすると，$H_n/H_{n+1}$の指標群は$F_{n+1}/F_n$である。$F_{n+1}/F_n$の各元は$\gamma^{n+1}$の不動点であるから，$h(\sigma|_{H_n/H_{n+1}}) = 0\ (n \geq 0)$. 定理2.5によって，$(X/H_n, \sigma) = (H_0/H_n, \sigma)$は零エントロピーをもつ。$H_n \searrow K$であるから，$(X/K, \sigma)$も零エントロピーをもつ。//

定理 3.5. Xはコンパクト連結可換群，σはX上の自己同型とし，(X, σ)はcondition (A)をみたすとする。このとき次のような部分群の列$\{X_n\}$が存在する; $X_1 \supset X_2 \supset \cdots \supset \cap X_n = \{0\}$, $\forall n \geq 1$に対して，$\sigma(X_n) = X_n$, X/X_nはsolenoidalである。

(証明)

condition (A)をみたすから，$rank(G_n) < \infty$なるGのγ-不変部分群の列$G_1 \subset G_2 \subset \cdots \subset \cup G_n = G$が存在する。$X_n = ann(X, G_n)\ (n \geq 1)$とおくと，$X/X_n$の指標群は$G_n$であるから，$dim(X/X_n) = rank(G_n) < \infty$. 故にXはsolenoidalである。//

Wは可算離散可換群とする。$\forall g \in W$と$\forall n \in \mathbb{Z}\ (n > 0)$に対して方程式$nx = g$がWの中で一つの解をもつならば，Wは完備であるという。

定理 3.6. (PP. 163−175, [32]) (i) 完備群の剰余群は完備で

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

あり，完備群の任意の集合の直和はそれ自身完備である。(ii) 群Wを含む完備群が存在する。(iii) 群Wを含むどんな完備群においても，Wを含む極小完備部分群を少なくとも一つみつけることができる。(iv) 群Wを含むどんな二つの極小完備群の間にもWの恒等自己同型の拡張たる同型が存在する。(V) 群Wに含まれる完備部分群はWの直和因子である。

γ は群Wの自己同型とする。Wを含む完備群を $\overline{W}$ とし，γ の $\overline{W}$ への拡張 $\overline{\gamma}$ が存在するとき，$(\overline{W}, \overline{\gamma})$ は (W, γ) の完備化であるという。

補題3.7. $g \in W$ は torsion free; i.e. $\langle g \rangle$ は無限巡回群とし，$W_g = \bigoplus_{-\infty}^{\infty} \gamma^n \langle g \rangle$ はWの部分群であるとする。このとき $\langle g \rangle$ を含む極小完備群 Q_0 と (W_g, γ) の完備化 $(\overline{W_g}, \overline{\gamma})$ が存在して，$\overline{W_g} = \bigoplus_{-\infty}^{\infty} \overline{\gamma}^n Q_0$ と表わすことができる。

(証明)

$\gamma^n \langle g \rangle$ は $\mathbb{Z}$ に同型であるから，W_g の完備群 $\overline{W_g} = \bigoplus_{-\infty}^{\infty} Q_n$ が存在する。ここに Q_n は Q に同型である。次のように $\overline{\gamma}$ を定義する。$\forall f \in \overline{W_g}$ に対して $kf \in W_g$ なる $k > 0$ が存在する。このとき $k\tilde{f} = \gamma(kf)$ なる $\tilde{f}$ が一意的に $\overline{W_g}$ に存在する。$\tilde{f}$ は k のえらび方に依存しないことに注意する。$\overline{\gamma}(f) = \tilde{f}$ は $\overline{W_g}$ 上の変換を定義している。$\overline{\gamma}$ は $\overline{W_g}$ 上の自己同型であることを示す。$f, h \in \overline{W_g}$ で i, k は $if, kh \in W_g$ なる整数とすると，

$$ik\overline{\gamma}(f+h) = \gamma(ikf + ikh) = \gamma(ikf) + \gamma(ikh)$$
$$= ik\overline{\gamma}(f) + ik\overline{\gamma}(h) = ik(\overline{\gamma}f + \overline{\gamma}h).$$

故に $\overline{\gamma}(f+h) = \overline{\gamma}(f) + \overline{\gamma}(h)$ が成立する。$f \in \overline{W_g}$ で $kf \in W_g$ とする。$k\tilde{f} = \gamma^{-1}(kf)$ なる $\tilde{f} \in \overline{W_g}$ をえらぶと，$k\overline{\gamma}(\tilde{f}) = \gamma(k\tilde{f}) = kf$，故に $\overline{\gamma}(\tilde{f}) = f$. $\overline{\gamma}$ は上への準同型である。$\overline{\gamma}(f) = 0$ で $kf \in W_g$ とする。このとき $\gamma(kf) = k\overline{\gamma}(f) = 0$. 故に $kf = 0$; i.e. $f = 0$. $\overline{\gamma}$ は 1-1 である。$\overline{\gamma}$ は $\overline{W_g}$ 上の自己同型であ

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

ることが示された。最後に $\overline{\gamma}Q_n = Q_{n+1}$ $(n \in \mathbb{Z})$ を示す。$\forall f \in Q_n$ と $kf \in \gamma^n\langle g\rangle$ なる $k>0$ をえらぶ。このとき $k\overline{\gamma}f = \gamma(kf) \in \gamma^{n+1}\langle g\rangle$. 故に $\overline{\gamma}f \in Q_{n+1}$. 逆に $f \in Q_{n+1}$ と $kf \in \gamma^{n+1}\langle g\rangle$ なる $k>0$ をとると, $k(\overline{\gamma}^{-1}f) = \gamma^{-1}(kf) \in \gamma^n\langle g\rangle$. 故に $f \in \gamma Q_n$. //

<u>定理 3.8</u>. Wは可算離散可換群で，γはW上の自己同型とする。このとき(W, γ)の完備化$(\overline{W}, \overline{\gamma})$が存在する。

(証明)

$W = \{h_1, h_2, \cdots\}$ と番号付けをする。$\forall j \in \mathbb{Z}$ と $\forall n > 0$ に対して $\langle \hat{h}_{n,j} \rangle$ は $\mathbb{Z}$ に同型な巡回群とする。このとき次のような準同型 φ_n が存在する；

$$\varphi_n : D_n = \bigotimes_{j=-\infty}^{\infty} \langle \hat{h}_{n,j} \rangle \to \sum_{j=-\infty}^{\infty} \langle \gamma^j h_n \rangle.$$

γ_n' は D_n 上の次のような自己同型(推移変換)とする；

$$\begin{aligned}\gamma(\cdots, \quad &\hat{h}_{n,j'}, \quad \cdots \quad , \hat{h}_{n,j''}, \cdots) \\ =(\cdots, \hat{h}_{n,j'}, \quad &\cdots \quad , \hat{h}_{n,j''}, \cdots \quad)\end{aligned}$$

このとき $\varphi_n \circ \gamma_n' = \gamma \circ \varphi_n$ が成立する。D_nは直和分解 $D_n = \bigoplus_{j=-\infty}^{\infty} \gamma_n'^{\,j} \langle \hat{h}_n \rangle$ をもつ。$D = \bigotimes_{-\infty}^{\infty} D_n$ とおく。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \langle \gamma^j h_n \rangle = W$$

であるから,

$$\varphi(\{k_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(k_n), \quad \gamma'(\{k_n\}) = \{\gamma_n' k_n\}$$

$(\{k_n\} \in D)$ によって, $\varphi : D \to W$ は準同型, $\gamma' : D \to D$ は自己同型で, 次の diagram は可換である；

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "\gamma'"] \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & D \arrow[d, "\varphi"] \\ W \arrow[r, "\gamma"'] & W \end{tikzcd}$$

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

Kは小さい核とすると、$\gamma' K = K$ で $(D/K, \gamma')$ は (W, γ) と同型。$\langle e_{n,j} \rangle \subset Q_{n,j}$ なる極小完備群 $(Q_{n,j} \cong Q)$ が存在し $\bar{D} = \bigotimes_{n=1}^{\infty} \{ \bigotimes_{j=-\infty}^{\infty} Q_{n,j} \}$ はDの完備群である。補題3.7によって、γ' の $\bar{D}$ への拡張 $\bar{\gamma}'$ が存在する。$\bar{D}/K$ は完備，$K \subset D \subset \bar{D}$ で，$\gamma' K = K$ である故に (W, γ) を $(\bar{D}/K, \bar{\gamma}')$ に埋めこめば結論をうる。//

> 定理 3.9. $(\overline{W}, \bar{\gamma})$ は (W, γ) の完備化とし，(W, γ) は単位元0を除いて有限軌道をもたないとする。このとき $\overline{W}$ に $\bar{\gamma}$-不変完備部分群 $\overline{W}_1$ が存在して $(\overline{W}_1, \bar{\gamma})$ は (W, γ) の完備化で，0を除いて有限軌道をもたないようにできる。

(証明)

$$\overline{W}_2 = \{ g \in \overline{W} : (\bar{\gamma}^n - I)^k g = 0 ,\ ^\exists n > 0 ,\ ^\exists k > 0 \}$$

とおくと，明らかに $W \cap \overline{W}_2 = \{0\}$. Wは $\overline{W}/\overline{W}_2$ の或る部分群に，$\overline{W}/\overline{W}_2$ は $\overline{W}$ の或る部分群にそれぞれ同型である。$(\overline{W}/\overline{W}_2, \gamma)$ は単位元を除いて有限軌道をもたない。従って (W, γ) を $(\overline{W}/\overline{W}_2, \gamma)$ に埋めこめばよい。//

定理3.9においては $\overline{W}_1$ はWを含む極小完備群かどうか分らない。

> 定理 3.10. Wは torsion free とする。(W, γ) は0を除いて有限軌道をもたないとする。このときWを含む γ-不変極小完備部分群 $\overline{W}_1$ が存在して $(\overline{W}_1, \bar{\gamma})$ は0を除いて有限軌道をもたないようにできる(このような $(\overline{W}_1, \bar{\gamma})$ を<u>極小完備化</u>であるという).

(証明)

$\overline{W}_1$ は定理3.9のものとする。$\overline{W}_2$ は $\overline{W}_1$ の最大な torsion 群とする。明らかに $\bar{\gamma}(\overline{W}_2) = \overline{W}_2$ で $\overline{W}_2$ は $\overline{W}_1$ の直和因子である($\because \overline{W}_1$ は完備部分群であるから，定理3.6(v)より分かる). 故に $\overline{W}_1/\overline{W}_2$ は $\overline{W}_1$ の或る部分群と同型で，torsion free である。$(\overline{W}_1/\overline{W}_2, \bar{\gamma})$

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

は単位元を除いて有限軌道をもたない。 $W \cap \overline{W}_2 = \{0\}$ より，W は $\overline{W}_1/\overline{W}_2$ の或る部分群と同型であるから，$(\overline{W}_1/\overline{W}_2, \overline{\gamma})$ は (W, γ) の完備化とみることができる。 $\widetilde{W}$ は $\overline{W}_1/\overline{W}_2$ の中で W を含む極小完備群とするとき，$\overline{\gamma}(\widetilde{W}) = \widetilde{W}$ を示せばよい。 $^\forall f \in \widetilde{W}$ に対して，$kf \in W$ なる $k>0$ が存在する。 $\overline{\gamma}$ は W 上で1-1であるから，$g \in W$ があって，$kf = \overline{\gamma}^{-1}g$. 故に $\overline{\gamma}(kf) = g$. $g = k\overline{g}$ なる $\overline{g}$ が $\widetilde{W}$ に存在するから，$k\overline{\gamma}(f) = k\overline{g}$; i.e. $k(\overline{\gamma}f - \overline{g}) = 0$. $\overline{\gamma}f - \overline{g} \in \overline{W}_1/\overline{W}_2$ で，$\overline{W}_1/\overline{W}_2$ は torsion free であるから，$\overline{\gamma}f = \overline{g}$; i.e. $\overline{\gamma}f \in \widetilde{W}$. $\overline{\gamma}$ を $\overline{\gamma}^{-1}$ におきかえるとき，$\overline{\gamma}^{-1}f \in \widetilde{W}$ をうる。 故に $\overline{\gamma}(\widetilde{W}) = \widetilde{W}$. //

<u>定理 3.11</u> (単項 ideal 整域上の module の構造定理)
R を単項 ideal 整域とする。有限個の元で生成された free R-module M は $M \cong R^r$ と分解される。ここに r は或る正の整数である。

証明に対しては (p. 109, [25]) を見よ。

X はコンパクト可換群で，部分群 H によって $X = \bigoplus_{-\infty}^{\infty} H_i$ $(H_i = H)$ に直和分解されているとする。 $\sigma\{h_i\} = \{h_i'\}$, $h_i' = h_{i+1}$ $(i \in \mathbb{Z})$ とおくと，σ は X 上の自己同型となる。このような自己同型を <u>Bernoulli 自己同型</u>とよぶ。 このような X を σ による <u>Bernoulli 群</u>という。 特に H が単純群のとき，σ を <u>simple Bernoulli 自己同型</u>といい，X を <u>σ による simple Bernoulli 群</u>であるという。

<u>定理 3.12</u>. X はコンパクト連結可換群，σ は X 上の自己同型とし，(X, σ) は condition (B) をみたすとする。このとき次のような部分群の列 $X_1 \supset X_2 \supset \cdots \supset \cap X_n = \{0\}$ と $^\forall n \geq 1$ に対して，コンパクト可換群 $\overline{X}_n$ と $\overline{X}_n$ 上の Bernoulli 自己同型 $\overline{\sigma}_n$ が存在して，$(X/X_n, \sigma)$ は $(\overline{X}_n, \overline{\sigma}_n)$ の homomorphic image となるようにできる。

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

（証明）

$g \in G$ に対して W_g を前のように定義する。$G_n = \sum_{i=1}^{n} W_{f_i}$ $(f_i \in G)$ とおくと，$G_1 \subset G_2 \subset \cdots \subset \cup G_n = G$．各 G_n の階数は有限であることに注意する。$X_n = ann(X, G_n)$ とおくと，X/X_n の指標群は G_n である。G_n は torsion free であるから，(G_n, γ) の極小完備化 $(\overline{G}_n, \overline{\gamma})$ が存在する（∵ 定理3.10）．従って $\overline{G}_n$ は torsion free である。$\forall \overline{f} \in \overline{G}$ と $\forall n > 0$ に対して，一意的に $\overline{g} \in \overline{G}$ があって $n\overline{g} = \overline{f}$ とできる。今 $\overline{g}$ を $(1/n)\overline{f}$ と思って次によって $\mathbb{Q}[x, x^{-1}]$ は $\overline{G}_n$ 上で作用していると考える。

$$\left(\sum_{j=-m}^{n} b_j x^j\right)\overline{g} = \sum_{j=-m}^{n} b_j \gamma^j \overline{g} \quad (b_j \in \mathbb{Q},\ \overline{g} \in \overline{G}_n).$$

ここに $\mathbb{Q}[x, x^{-1}]$ は $\mathbb{Q}$-係数をもつ x, x^{-1} の多項式環とする。上の約束から，$\overline{G}_n$ は $\mathbb{Q}[x, x^{-1}]$-module とみることができる。$\mathbb{Q}[x, x^{-1}]$ は単項 ideal 整域であるから，$g_1, \cdots, g_p \in G_n$ が存在し，

$$\overline{G}_n = \bigoplus_{i=1}^{p} \mathbb{Q}[x, x^{-1}] g_i = \bigoplus_{1}^{p} \left\{ \bigoplus_{j=-\infty}^{\infty} \gamma^j \langle g_i \rangle \right\}$$

と表わすことができる。$\overline{X}_n$ は $\overline{G}_n$ の指標群とし，$\overline{\sigma}$ は $\overline{\gamma}$ によって生成された $\overline{X}_n$ の自己同型とすれば，$\overline{X}_n$ は $\overline{\sigma}$ による Bernoulli 群である。$G_n \subset \overline{G}_n$ であるから，$\overline{X}_n / ann(\overline{X}_n, G)$ は X/X_n と同型である。故に $(\overline{X}_n, \overline{\sigma})$ の射影として $(X/X_n, \sigma)$ がえられる。//

§4 自己同型を伴う solenoidal 群の構造

solenoidal 群はトーラスの一般化である。しかし solenoidal 群を力学系の立場でみるとき，§§2,3 でみたように solenoidal 群をさけて力学系を議論することはできない。solenoidal 群の構造はトーラスの場合に比較して複雑なため一部をのぞいてほとんど研究されていなかったようである。この § では力学系の立場で自己同型を伴う solenoidal 群

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

の構造を明らかにすることが目的である。

最初に，Smaleによって発見された固体トーラス(solid torus)の中にsolenoidal群とその上にaxiom Aアトラクターと同じ性質をもつ自己同型が存在することから解説を始める。

S^1, D^2 は次のような複素平面の中の部分集合とする；

$S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, $D^2 = \{w \in \mathbb{C} : |w| \leq 1\}$.

直積位相空間 $N = S^1 \otimes D^2$ 上に写像 $f: N \to N$ を定義する：$f(z, w) = (z^2, \frac{1}{2}z + \frac{1}{4}w)$. このとき $f(N)$ は下図のように $\frac{1}{4}$ の太さの固体トーラスで，N の中で2回まきついた形になっている。$f^n(N)$ は N の中で $(\frac{1}{4})^n$ の太さの固体トーラスが 2^n 回まきついた形になる。$\Lambda = \bigcap_0^\infty f^n(N)$ とおく。円板 $\{z\} \otimes D^2$ で Λ を切断すると，その断面は区間 $[0, 1]$ の $t = n_1/3 + n_2/3^2 + \cdots$ $(n_i = 0, 2)$ で表わされるCantor集合と位相同相になる。$\tau(z, w) = z$ によって射影 $\tau: S^1 \otimes D^2 \longrightarrow S^1$ を定義するとき，

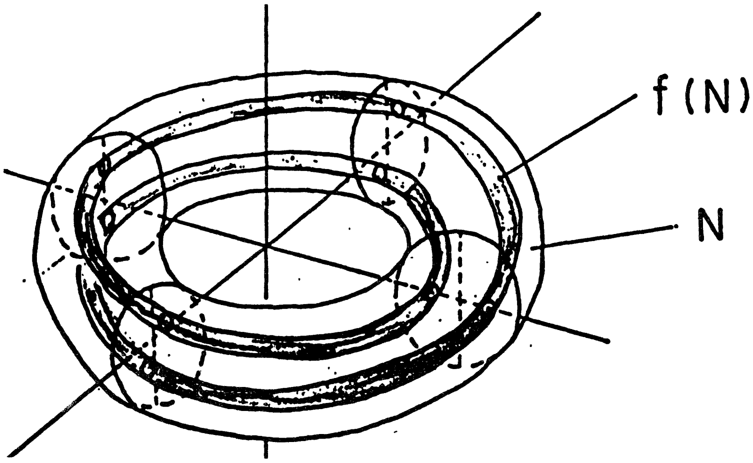
$$\pi(y) = \{\tau f^{-i}(y)\}_{i=0}^\infty \quad (y \in \Lambda)$$

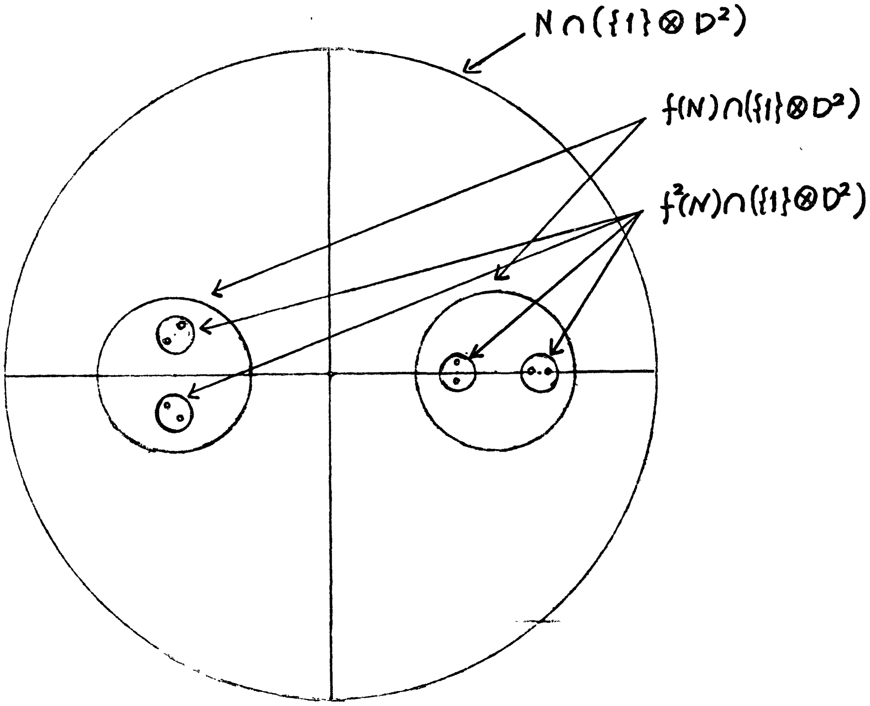
は Λ から直積位相空間 $\bigotimes_0^\infty S^1$ への1-1連続写像となる。実は位相同相である。

$$X = \{\{z_i\} \in \bigotimes_0^\infty S^1 : z_i = z_{i+1}^2\}$$

は積に関してコンパクト可換群で，射影空間である。故に X は1次元solenoidal群となる。$\sigma = \pi \cdot f \cdot \pi^{-1}$ は X 上の $\sigma: \{z_i\} \mapsto \{z_i^2\}$ なる自己同型となっている。自己同型 σ を伴うsolenoidal群 X 上の力学系 (X, σ) は (Λ, f) と位相同相である。(Λ, f) は3次元球面上の或るaxiom A微分位相の制限で，axiom Aアトラクターと位相同相であることも知られている。

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160





上で構成した solenoidal 群は特別の場合である。今から自己同型を伴う solenoidal 群の一般的な構造を調べる。そのために準備をする。

Xは solenoidal 群，σはX上の自己同型とし，GはXの指標群とする。前のように $(\gamma g)(x)=g(\sigma x)$ $(g\in G,\ x\in X)$ に

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

によってG上の自己同型γを定義する。$(\overline{G}, \overline{\gamma})$は$(G, \gamma)$の極小完備化とする。簡単にするために，$\overline{\gamma}$を$\gamma$と書くことにする。§3ですでに見たように，$\mathbb{Q}[x, x^{-1}]$は$\overline{G}$上に作用していると考えることができる；

$$\left(\sum_{j=-m}^{n} b_j x^j\right)\overline{g} = \sum_{-m}^{n} b_j \gamma^j \overline{g} \quad (b_j \in \mathbb{Q},\ \overline{g} \in \overline{G}).$$

故に$\overline{G}$は$\mathbb{Q}[x, x^{-1}]$-*module*で，$\mathbb{Q}[x, x^{-1}]$は単項*ideal*整域である。故に，$g_1, \cdots, g_s \in \overline{G}$があって

$$\overline{G}_{g_i} = \{f \in \overline{G} : mf \in gp\{\gamma^j g_i : j \in \mathbb{Z}\},\ ^{\exists} m \neq 0\}$$

($gp\,E$は部分集合Eによって生成された部分群を意味する)
とおくと，$\overline{G}$は次のように直和分解される；

$$\overline{G} = \overline{G}_{g_1} \oplus \cdots \oplus \overline{G}_{g_s}.$$

各$\overline{G}_{g_1}$はγ-不変で，$\mathrm{rank}(\overline{G}_{g_i}) \leq \mathrm{rank}(\overline{G}) < \infty$であるから，各$g_i$に対して，$g_i(x) \in \mathbb{Z}[x]$があって$g_i(\gamma)g_i = 0$が成立する。$g_i(x)$は$g_i(\gamma)g_i = 0$をみたす最小次数$r_i$をもつ多項式とすると，

$$\Theta = \{g_1, \cdots, \gamma^{r_1-1}g_1, \cdots, g_s, \cdots, \gamma^{r_s-1}g_s\}$$

は$\mathbb{Z}$上で一次独立で，$G/gp\Theta$は*torsion*群である。Θの元を

$$\Theta = \{e_1, e_2, \cdots, e_r\}$$

と書き改める。$0 \neq {}^{\forall}g \in G$は

$$ag = a_1 e_1 + \cdots + a_r e_r \quad (^{\exists}a, a_1, \cdots, a_r \in \mathbb{Z})$$

と表わされる。$(a_1/a, \cdots, a_s/a)$は一意的に存在するから，

$$\varphi(g) = (a_1/a, \cdots, a_s/a)$$

によって，中への準同型$\varphi : G \to \mathbb{Q}^r$が定義される。$\varphi$によって$g$と$(a_1/a, \cdots, a_s/a)$を同一視すると，$\Theta$は$\mathbb{Z}^r$の標準基底

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

$e_1 = (1, 0, \cdots, 0), \cdots, e_r = (0, \cdots, 0, 1)$ になっている。故に,

$$gp\,\mathbb{H} = \mathbb{Z}^r \subset G \subset \overline{G} = \mathbb{Q}^r \subset \mathbb{R}^r .$$

自然な方法で $\mathbb{R}^r$ 上に γ を拡張して，再び γ で表わすことにする。
$t = (t_1, \cdots, t_r) \in \mathbb{R}^r$ に対して，ψ を次のように定義する;

$$\psi(t)g = t_1 a_1/a + \cdots + t_r a_r/a \quad (\forall g = (a_1/a, \cdots, a_r/a) \in G).$$

このとき $\psi(t) \in X$; i.e.

$$\psi : \mathbb{R}^r \to X$$

は準同型である。

$$\psi(\hat{\gamma} t)g = \psi(t)\gamma g = (\sigma\,\psi(t))g \quad (t \in \mathbb{R}^r, g \in G)$$

によって γ の adjoint $\hat{\gamma}$ を定義すると，γ と $\hat{\gamma}$ は相似となるから，$\hat{\gamma}$ を γ と書いても以後の議論において混乱が起らない。
$(\mathbb{R}^r, \gamma)$ を (X, σ) の <u>*lifting system*</u> とよぶことにする。次の性質 (P4.1) は明らかである。

<u>(P4.1)</u> γ は次のいずれかをみたす;

(i) $\gamma\mathbb{Z}^r = \gamma^{-1}\mathbb{Z}^r = \mathbb{Z}^r$,

(ii) $\gamma\mathbb{Z}^r \subset \mathbb{Z}^r, \ \gamma^{-1}\mathbb{Z}^r \not\subset \mathbb{Z}^r$,

(iii) $\gamma\mathbb{Z}^r \not\subset \mathbb{Z}^r, \ \gamma^{-1}\mathbb{Z}^r \subset \mathbb{Z}^r$,

(iv) $\gamma\mathbb{Z}^r \not\subset \mathbb{Z}^r, \ \gamma^{-1}\mathbb{Z}^r \not\subset \mathbb{Z}^r$.

<u>(P4.2)</u> $F = ann(X, gp\,\mathbb{H})$ とおくと，次が成立する。

(i) $\psi(\mathbb{R}^r)$ は X で稠密，X がトーラスであれば，$\psi(\mathbb{R}^r) = X$,

(ii) F は完全不連結で，$\psi^{-1}\{\psi(\mathbb{R}^r) \cap F\} = \mathbb{Z}^r$,

(iii) $X = \psi(\mathbb{R}^r) + F$,

(iv) $\mathbb{R}^r$ の単位元 0 の開近傍 U が存在して，$\psi(U) \cap F = \{0\}$ で直積集合 $U \otimes F$ は $\psi(U) + F$ と位相同型で $\psi(U) + F$ は X の単位元 0 の開近傍である ($\psi(U) + F$ を $\psi(U) \oplus F$ で表わす).

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

(証明)

ψの定義によって$\psi(t)g=0$ ($\forall t\in\mathbb{R}^r$) ならば, $g=0$である。このことは$\psi(\mathbb{R}^r)$がXで稠密であることを示している。(i)の前半が示された。$G/\mathrm{gp}H$ は torsion 群であるから, 明らかにFは完全不連結、$\psi^{-1}\{\psi(\mathbb{R}^r)\cap F\}=\mathbb{Z}^r$ はψの定義より明らかであるから(ii)が示された。(iii)は次のように示される。$\pi: X\to X/F$ は自然な射影とする。(ii)によって

$$\pi\psi(\mathbb{R}^r)=\pi\psi\{(t_1,\cdots,t_r)\in\mathbb{R}^r:\ 0\leq t_i\leq 1,\ 1\leq i\leq r\}.$$

故に, $\pi\psi(\mathbb{R}^r)$ はコンパクト、$\psi(\mathbb{R}^r)$は稠密であるから, $\pi\psi(\mathbb{R}^r)=X/F$. 故に$X=\psi(\mathbb{R}^r)+F$. (i)の後半を示すことが残っている。$X$が$r$-次元トーラスとすると, $G/\mathrm{gp}H$ は有限である。故にFも有限, 従って$mF=\{mx:\ x\in F\}=\{0\}$ なる$m>0$が存在する。$\psi(\mathbb{R}^r)$ は連結であるから, $X=\psi(\mathbb{R}^r)+mF=\psi(\mathbb{R}^r)$.
(iv)を示す。有界な閉集合

$$U=\{(t_1,\cdots,t_r)\in\mathbb{R}^r:\ -1/3\leq t_i\leq 1/3,\ 1\leq i\leq r\}$$

に対して, $\xi(x,y)=\psi(x)+y$ ($x\in U$, $y\in F$) とおくと, $\xi: U\otimes F\to\psi(U)+F$ は上への連続写像である。ξが1-1を示せば, 位相同相である。$u,u'\in U$, $x,x'\in F$ に対して, $\xi(u,x)=\xi(u',x')$ とすれば, $\psi(u)+x=\psi(u')+x'$. 故に $\psi(u-u')=x'-x\in\psi(\mathbb{R}^r)\cap F$; i.e. $u-u'\in\mathbb{Z}^r$. $u-u'$の各成分の0からの距離は$2/3$より小であるから, $u-u'=0$ に限る。故に$x=x'$. $\pi\psi:\mathbb{R}^r\to X/F$ は開写像であるから, $\psi(U)+F$ はXの開近傍である。//

($\mathrm{gp}H$, ψ, r, F) はHによって生成された標準系であるとよぶことにする。

(P4.3) $\tilde{F}^-=\bigcap_0^\infty\sigma^n F$, $\tilde{F}^+=\bigcap_0^\infty\sigma^{-n}F$ とおくと, 次が成立する;
(i) $F=\tilde{F}^-+\tilde{F}^+$,

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

(ii) $\sigma\tilde{F}^-/\tilde{F}^-$, $\tilde{F}^+/\sigma\tilde{F}^+$ は有限群である。

(証明)

$gp\,Ⓗ = ann(G, F)$ に注意する。このとき

$$ann(G, \tilde{F}^+) = ann(G, \cap_0^\infty \sigma^{-n}F) = \Sigma_0^\infty \gamma^n ann(G, F)$$
$$= \Sigma_0^\infty \gamma^n gp\,Ⓗ = gp\{\gamma^n g_i : 0 \leq n < \infty,\ 1 \leq i \leq s\}.$$

ここに、$Ⓗ = \{g_1, \cdots, \gamma^{r_1-1}g_1, \cdots, g_s, \cdots, \gamma^{r_s-1}g_s\}$ であることに注意する。同じようにして

$$ann(G, \tilde{F}^-) = gp\{\gamma^n g_i : -\infty < n \leq r_i - 1,\ 1 \leq i \leq s\}$$

が成立する。$G^- = ann(G, \tilde{F}^+)$, $G^+ = ann(G, \tilde{F}^-)$ とおく。$G^- + G^+ \subset G$ であるから、$(G^- + G^+)/gp\,Ⓗ$ は torsion 群である。各 r_i $(1 \leq i \leq s)$ の最小性から、$gp\,Ⓗ$ は次のように直和に分解される；

$$gp\,Ⓗ = \bigoplus_{i=1}^{s} gp\{\gamma^j g_i : 0 \leq j \leq r_i - 1\}.$$

次のように部分群 G_i^-, G_i^+ $(1 \leq i \leq s)$ を定義する；

$$G_i^- = gp\{\gamma^j g_i : 0 \leq j < \infty\},\quad G_i^+ = gp\{\gamma^j g_i : -\infty < j \leq r_i - 1\}.$$

$gp\{\gamma^j g_i : 0 \leq j \leq r_i - 1\} \supset G_i^- \cap G_i^+$ $(1 \leq i \leq s)$ に注意する。実際に、$h \in G_i^- \cap G_i^+$ に対して、$p(\gamma)g_i = h$ なる $0 \neq p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ (最小次数 $n > 0$ をもつ) が存在する。今、$n < r_i$ とすれば、

$$h \in gp\{\gamma^j g_i : 0 \leq j \leq r_i - n\}.$$

$n \geq r_i$ を仮定したとき矛盾を引き出す。$h \in G_i^+$ であるから、$m > 0$ と $g(x) \in \mathbb{Z}[x]$ ($g(x)$ の次数 $\leq m + r_i - 1$) があって、$\gamma^m h = g(\gamma)g_i$ とできる。$s(x)$ は次をみたす最小次数をもつ原始多項式とする；

$$s(\gamma)g_i = 0.$$

$\{p(\gamma)\gamma^m - g(\gamma)\}g_i = 0$ より、$s(x)$ は $p(x)x^m - g(x)$ を $\mathbb{Q}$ 上で割り切る。$s(x)$ は原始的であるから、$\mathbb{Z}$ 上で割り切れなくてはな

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

らない。$l(s)$ は $s(x)$ の，$l(p)$ は $p(x)x^m - g(x)$ の主係数とすれば，$c>0$ があって $l(s)c = l(p)$ が成立する。

$$t(x) = p(x) - cx^{n-r_i}s(x)$$

とすれば，$t(x)$ の次数は $p(x)$ の次数より小さい。更に，

$$t(\gamma)g_i = p(\gamma)g_i - c\gamma^{n-r_i}s(\gamma) = 0.$$

$p(x)$ が最小次数であることに反する。$G_i^- \cap G_i^+ \subset gp\{\gamma^j g_i : 0 \leq j \leq r_i - 1\}$ が示された。$G^- \cap G^+ = \oplus_1^s (G_i^- \cap G_i^+)$ であるから，$gp\textcircled{H} = G^- \cap G^+$. 故に，

$$\begin{aligned} F &= ann(X, gp\textcircled{H}) = ann(X, G^- \cap G^+) \\ &= ann(X, G^-) + ann(X, G^+) \\ &= \tilde{F}^+ + \tilde{F}^-. \end{aligned}$$

(i)が示された。(ii)を示す。$aG_i^+ \subset \gamma^{-1}G_i^+ \subset G_i^+$ なる $a>0$ が存在するから，$G_i^+/\gamma^{-1}G_i^+$ の元の個数は a^r ($r_i \leq r$) 以下である。$G^+ = \Sigma_1^s G_i^+$ より，$G^+/\gamma^{-1}G^+$ は有限である。故に，$\sigma\tilde{F}^+/\tilde{F}^+$ も有限である。同様にして $\tilde{F}^+/\sigma\tilde{F}^+$ も有限であることが求まる。//

G が γ に関して有限生成; i.e. G の有限集合 Λ が存在して $G = gp\bigcup_{-\infty}^{\infty}\gamma^j\Lambda$ をみたす。このとき (X, σ) は property(*) をみたすという。

(P4.4) $H = \tilde{F}^- \cap \tilde{F}^+$ とおくと次が成立する;
(i) $H = \{0\} \iff G = gp\bigcup_{-\infty}^{\infty}\gamma^j\textcircled{H}$,
(ii) H は有限である $\iff$ (X, σ) は property(*) をもつ.

(証明)

H の指標群は $G/gp\bigcup_{-\infty}^{\infty}\gamma^j\textcircled{H}$ であるから，(i)は明らかである。(X, σ) が property(*) をもつとする; i.e. 有限集合 Λ に対して $G = gp\bigcup_{-\infty}^{\infty}\gamma^j\Lambda$. $rank(gp\textcircled{H}) = rank(G) = r$ より，$n>0$ があって $n\Lambda \subset gp\textcircled{H}$. 故に $G/gp\bigcup_{-\infty}^{\infty}\gamma^j n\Lambda$ は有限であるから，$G/gp\bigcup_{-\infty}^{\infty}\gamma^j\textcircled{H}$ も有限で H と同型である。逆は簡単に分る。//

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

<u>定理 4.1</u> (11.2, [82]). Hはコンパクト完全不連結群, σはHの自己同型とする。$h(\sigma)=0$のとき, Hは次のようなσ-不変部分群の列 $H=H_0\supset H_1\supset \cdots$ を含む; $\forall n\geq 0$ に対して, H_n はHの開部分群で, $\cap H_n$ は単位元である。

<u>(P4.5)</u> $k>0$ に対して, $\tilde{F}_k^- = \bigcap_{n=0}^{\infty} \sigma^{kn} F$, $\tilde{F}_k^+ = \bigcap_{n=0}^{\infty} \sigma^{-kn} F$, $H_k = \tilde{F}_k^- \cap \tilde{F}_k^+$ とおく ($\tilde{F}_1^- = \tilde{F}^-$, $\tilde{F}_1^+ = \tilde{F}^+$, $H_1 = H$ に注意する).
このとき

(i) $\sigma^k H_k = H_k$,

(ii) H_k は σ^k-不変部分群の列 $H_k = H_k^{(0)} \supset H_k^{(1)} \supset \cdots \supset \cap H_k^{(n)} = \{0\}$ が存在して, $H_k/H_k^{(n)}$ $(n\geq 0)$ は有限で,

(iii) $\sigma^k \tilde{F}_k^- / \tilde{F}_k^-$, $\tilde{F}_k^+ / \sigma^k \tilde{F}_k^+$ は有限である。

(証明)

(i)は明らか。H_kが有限のとき(ii)は明らか。H_kが無限のとき, H_kは完全不連結であるから, 補題2.7によって, $h(\sigma^k|_{H_k}) = 0$. 定理4.1によって, (ii)がえられる。(iii)は(P4.3)(ii)と同じように証明される。実際に, $G' = gp\bigcup_{n=1}^{\infty}\gamma^{-nk}\textcircled{H}$ とする。

$$\tilde{F}_k^- = \bigcap_{n=0}^{\infty}\sigma^{kn}F = ann\Big(X,\ gp\bigcup_{n=0}^{\infty}\gamma^{-kn}\textcircled{H}\Big)$$

であるから, $\sigma^k\tilde{F}_k^-/\tilde{F}_k^-$ の指標群は $(gp\textcircled{H} + G')/G'$.
$rank(gp\gamma^{-k}\textcircled{H}) = r$ であるから, $a>0$ があって $a\,gp\textcircled{H} \subset gp\gamma^{-k}\textcircled{H}$.
故に $(gp\textcircled{H} + G')/G'$ は有限で $\sigma^k\tilde{F}_k^-/\tilde{F}_k^-$ も有限. 同様にして $\tilde{F}_k^+/\sigma^k\tilde{F}_k^+$ も有限であることが証明される。//

<u>(P4.6)</u> $\forall x \in \tilde{F}_k^-$ $(x \in \tilde{F}_k^+)$ に対して, $h_x \in H_k$ が一意的に存在して次が成立する;

$$\lim_{i\to\infty}\Big\{\sup_{x\in\tilde{F}_k^-} d(\sigma^{-ki}(x),\ \sigma^{-ki}(h_x))\Big\} = 0$$

$$\Big(\lim_{i\to\infty}\Big\{\sup_{x\in\tilde{F}_k^+} d(\sigma^{ki}(x),\ \sigma^{ki}(h_x))\Big\} = 0\Big).$$

(証明)

$\tau = \sigma^k$ と書くことにする。(P4.5)(ii) によって, $\varepsilon > 0$ に対して, $n > 0$ と $\varepsilon/2 > \delta > 0$ なる δ があって

$$\{h \in H_k : d(h, 0) < \delta\} \subset H_k^{(n)} \subset \{h \in H_k : d(h, 0) < \varepsilon/2\}$$

が成立する。

$$d(x, y) < \delta' \Rightarrow d(\tau^{-1}(x), \tau^{-1}(y)) < \varepsilon/2$$

をみたす $\delta' \in (0, \delta/2)$ をえらぶ。$\bigcap_0^\infty \tau^{-i}\tilde{F}_k^- = H_k$ で $\tilde{F}_k^-/\tau^{-i}\tilde{F}_k^-$ $(i \geq 0)$ は有限であるから, $a > 0$ が存在して $\forall x \in \tilde{F}_k^-$ に対して $d(\tau^{-i}(x), H_k) < \delta'$ $(i \geq a)$. 故に, $h_x^{(i)} \in H_k$ があって,

$$d(\tau^{-i}(x), \tau^{-i}(h_x^{(i)})) = d(\tau^{-i}(x), H_k) < \delta' \ (i \geq a).$$

次が成立することに注意する;

$$\sup_{x \in \tilde{F}_k^-} d(h_x^{(i)}, h_x^{(i+m)}) < \varepsilon/2 \quad (i \geq a, \ m \geq 0).$$

実際に $\forall i \geq a$ に対して,

$$\sup_{x \in \tilde{F}_k^-} d(\tau^{-(i+1)} h_x^{(i)}, \tau^{-(i+1)} h_x^{(i+1)})$$

$$\leq \sup_{x \in \tilde{F}_k^-} d(\tau^{-1}(\tau^{-i} h_x^{(i)}), \tau^{-1}(\tau^{-i} x))$$

$$+ \sup_{x \in \tilde{F}_k^-} d(\tau^{-(i+1)}(x), \tau^{-(i+1)}(h_x^{(i+1)})) < \delta.$$

故に, $\tau^{-(i+1)} h_x^{(i)} - \tau^{-(i+1)} h_x^{(i+1)} \in H_k^{(n)}$. $\tau(H_k^{(n)}) = H_k^{(n)}$ であるから, $h_x^{(i)} - h_x^{(i+1)} \in H_k^{(n)}$. $H_k^{(n)}$ は群であるから, $h_x^{(i)} - h_x^{(i+m)} \in H_k^{(n)}$ $(m \geq 0)$. $h_x = \lim_{i \to \infty} h_x^{(i)}$ $(x \in \tilde{F}_k^-)$ とおくと, $h_x^{(i)} - h_x \in H_k^{(n)}$ $(\forall i \geq a)$. $i \geq a$ に対して

$$\sup_{x \in \tilde{F}_k^-} d(\tau^{-i}(x), \tau^{-i}(h_x)) \leq \sup_{x \in \tilde{F}_k^-} d(\tau^{-i}(x), \tau^{-i}(h_x^{(i)}))$$

$$+ \sup_{x \in \tilde{F}_k^-} d(\tau^{-i}(h_x^{(i)}), \tau^{-i}(h_x)) \leq \varepsilon$$

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

$(\mathrm{diam}(H_k^{(m)}) < \varepsilon/2)$. 極限点 h_x の存在の一意性を示すために，h_x' はもう一つの極限点とすれば，

$$\begin{aligned} &d(\tau^{-i}(h_x),\ \tau^{-i}(h_x')) \\ &\leqslant d(\tau^{-i}(h_x),\ \tau^{-i}(x)) + d(\tau^{-i}(x),\ \tau^{-i}(h_x')) \to 0 \quad (i\to\infty). \end{aligned}$$

(P 4.5)(ii) によって，$\{\tau^i\}_{-\infty}^{\infty}$ は H_k 上で同程度連続であるから，$d(h_x, h_x') = 0$; i.e. $h_x = h_x'$. //

(P 4.7) 次をみたす準同型 $\varphi_k^- : \tilde{F}_k^- \to H_k$ $(\varphi_k^+ : \tilde{F}_k^+ \to H_k)$ が存在する；

φ_k^- は H_k 上で恒等写像 (φ_k^+ も H_k 上で恒等写像) で次の diagram が成立する；

$$\begin{tikzcd} \tilde{F}_k^- \arrow[r, "\varphi_k^-"] \arrow[d, "\sigma^{-k}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & H_k \arrow[d, "\sigma^{-k}"] \\ \tilde{F}_k^- \arrow[r, "\varphi_k^-"'] & H_k \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \tilde{F}_k^+ \arrow[r, "\varphi_k^+"] \arrow[d, "\sigma^{k}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & H_k \arrow[d, "\sigma^{k}"] \\ \tilde{F}_k^+ \arrow[r, "\varphi_k^+"'] & H_k \end{tikzcd}$$

(証明)

$\tau = \sigma^k$ と書く。h_x $(x\in\tilde{F}_k^-)$ の存在の一意性 (P4.6) によって，$h_{x+y} = h_x + h_y$, $h_{\tau^{-1}(x)} = \tau^{-1}(h_x)$. 特に $x\in H_k$ のとき $h_x = x$.

$$\varphi_k^-(x) = h_x \quad (x\in\tilde{F}_k^-,\ h_x\in H_k)$$

とおく。φ_k^- は代数的準同型で，$\varphi_k^-\circ\tau^{-1} = \tau^{-1}\circ\varphi_k^-$ が成立する。φ_k^- の連続性を示す。(P4 6) によって $\forall\varepsilon>0$ に対して，$a = a(\varepsilon) > 0$ があって

$$\sup_{y\in\tilde{F}_k^-} d(\tau^{-a}(h_y),\ \tau^{-a}(y)) < \varepsilon/2$$

が成立する。(P 4.5)(iii) によって，$\tau^a\tilde{F}_k^-/\tilde{F}_k^-$ は有限であるから，$0<\eta<\varepsilon/2$ なる η が存在して

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

$$d(x\cdot 0)<\eta \quad (x\in\tilde{F}_k^-) \Rightarrow x\in\tau^{-a}\tilde{F}_k^- .$$

$d(x,0)<\eta$ なる $x\in\tilde{F}_k^-$ に対して, $y\in\tilde{F}_k^-$ があって $\tau^{-a}(y)=x$ そして

$$d(h_x,0)\leqslant d(\tau^{-a}(h_y),\tau^{-a}(y))+d(x,0)<\varepsilon$$

($h_x=\tau^{-a}(h_y)$ に注意). φ_k^- は連続である。同じ方法で連続準同型 $\varphi_k^+:\tilde{F}_k^+\to H_k$ が構成できる。//

$$F_k^-=\{x\in\tilde{F}_k^-:\varphi_k^-(x)=0\},\quad F_k^+=\{x\in\tilde{F}_k^+:\varphi_k^+(x)=0\}$$

とおくと, F_k^- は $\tilde{F}_k^-$ の部分群で, $\tilde{F}_k^-=F_k^-\oplus H_k$. F_k^+ は $\tilde{F}_k^+$ の部分群で, $\tilde{F}_k^+=F_k^+\oplus H_k$ がえられる。

(P 4.8) 次が成立する;
(i) $F^-=F_k^-$, $F^+=F_k^+$, $H=H_k$ $(\forall k>0)$,
(ii) $F^-\supset\sigma^{-1}F^-\supset\cdots\supset\bigcap_0^\infty\sigma^{-n}F^-=\{0\}$,
(iii) $F^+\supset\sigma F^+\supset\cdots\supset\bigcap_0^\infty\sigma^nF^+=\{0\}$,
(iv) $F^-/\sigma^{-1}F^-$, $F^+/\sigma F^+$ は有限である,
(v) $H=H^{(0)}\supset H^{(1)}\supset\cdots\supset\bigcap H^{(n)}=\{0\}$ なる σ-不変部分群の列で, $H^{(n)}/H^{(n+1)}$ $(n\geqslant 0)$ は有限である,
(vi) $F=F^-\oplus F^+\oplus H$.

(証明)

(P 4.3)(i) によって, $\tilde{F}^-\subset\tilde{F}_k^-$, $\tilde{F}^+\subset\tilde{F}_k^+$ $(k>0)$ そして $F=\tilde{F}^-+\tilde{F}^+$ であるから, $F=\tilde{F}_k^-+\tilde{F}_k^+$. 故に $F=F_k^-\oplus F_k^+\oplus H_k$ $(k>0)$. (vi) が示された。

$$F_k^-\supset F_1^-=F^-,\quad F_k^+\supset F_1^+=F^+$$

に注意する。実際に, $\sigma^{-i}\tilde{F}^-\searrow H$ であるから, $x\in\tilde{F}^-$ に対して

$$d(\sigma^{-ki}(x),\sigma^{-ki}\varphi_1^-(x))\longrightarrow 0 \quad (i\to\infty).$$

φ_k^- の定義によって, $\varphi_k^-(x)=\varphi_1^-(x)$ $(x\in\tilde{F}^-)$. 故に

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

$$F_k^- = \ker(\varphi_k^-) \supset \ker(\varphi_1^-) = F^-.$$

同様にして $F_k^+ \supset F^+$ をうる。 $H = H_1 \subset H_k$ $(k>0)$ は明らか。故に $F^- = F_k^-$, $F^+ = F_k^+$, $H = H_k$ $(k>0)$. (i)が証明された。(P4.7)によって，$\sigma^{-1}\varphi_1^-(x) = \varphi_1^-\sigma^{-1}(x)$ $(x \in \tilde{F}_1^-)$, $\sigma^{-1}\tilde{F}_1^- \subset \tilde{F}_1^-$ であるから，(ii), (iii)をうる。 $\tilde{F}^- = F^- \oplus H$, $\sigma\tilde{F}^-/\tilde{F}^- \cong \sigma F^-/F^-$ であるから，(iv)が成立する。 $H = H_k$ $(k>0)$ と (P4.5)(ii) から(V)がえられる。//

<u>(P4.9)</u> (X, σ) が *property* $(*)$ をもてば，$X = \psi(\mathbb{R}^r) + \{F^- \oplus F^+\}$ である。

(証明)

(P4.2)(ii), (P4.8)(iv) によって，$X = \psi(\mathbb{R}^r) + \{F^- \oplus F^+ \oplus H\}$. (P4.4)(iii) によって，Hは有限である。Xは連結であるから，結論をうる。//

$(\mathbb{R}^r, \gamma)$ は (X, σ) の *lifting system* とする。このとき，$\mathbb{R}^r$ は直和

$$\mathbb{R}^r = E^u \oplus E^s \oplus E^c$$

に分解される。 ここに E^u, E^s, E^c は γ-不変部分空間で，$\gamma_{|E^u}$, $\gamma_{|E^s}$, $\gamma_{|E^c}$ の固有値の絶対値はそれぞれ >1, <1, $=1$ とする。 $E^c = \{0\}$ のとき，$(\mathbb{R}^r, \gamma)$ は <u>双曲型</u> であるという。部分空間 E^u, E^s に関して，ノルム $\|\cdot\|_u$, $\|\cdot\|_s$ と $\lambda_0 \in (0, 1)$ が存在して

$$\|\gamma^n x\|_u \leqslant \lambda_0^{-n} \|x\|_u \quad (x \in E^u, \ n \leqslant 0)$$
$$\|\gamma^n x\|_s \leqslant \lambda_0^{n} \|x\|_s \quad (x \in E^s, \ n \geqslant 0)$$

が成立するようにできる。 $E^c \neq \{0\}$ の場合に，実数体上の Jordan 標準系を利用して，E^c は次のように直和分解される;

$$E^c = E^{c_0} \oplus \cdots \oplus E^{c_k},$$

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

(a) $\dim(E^{c_i}) = 1$ か 2 $(0 \leq i \leq k)$,

(b) $$\gamma_{|E^c} = \begin{bmatrix} \gamma_0 & I_1 & & 0 \\ & \gamma_1 & \ddots & \\ & & \ddots & I_k \\ 0 & & & \gamma_k \end{bmatrix}$$

ここに $\gamma_i : E^{c_i} \to E^{c_i}$ は E^{c_i} の一つのノルム $\|\cdot\|_{c_i}$ の下で等距離的で, $I_i : E^{c_i} \to E^{c_{i-1}}$ は零写像か単位行列に対応する写像である,

(c) I_i が零写像でないとき, $I_i \gamma_i (x) = \gamma_{i-1} I_i (x)$ $(x \in E^{c_i})$ が成立する。

$E^c \neq \{0\}$ で $I_i : E^{c_i} \to E^{c_{i-1}}$ が零写像のとき, $(\mathbb{R}^r, \gamma)$ は <u>central spin</u> であるという。$(\mathbb{R}^r, \gamma)$ が central spin のとき, $\gamma E^{c_i} = E^{c_i}$ であることに注意する。I は $\mathbb{R}^r$ 上の恒等写像とするとき, $\forall m > 0$ に対して, $I - \gamma^m$ の E^{c_i} 上の固有値は $1 - \lambda_i^m$ (λ_i は $\gamma_{|E^{c_i}}$ の一つの固有値). このとき $C_{(i)} > 0$ が存在して

$$\|(I - \gamma^m)x\|_{c_i} \leq C_{(i)} |1 - \lambda_i^m| \|x\|_{c_i} \quad (x \in E^{c_i}, \ m > 0)$$

は明らかである。γ の特性多項式 $p(x)$ が $\mathbb{Q}$ 上で既約で $p(x)$ は絶対値 1 の根をもてば, $(\mathbb{R}^r, \gamma)$ は central spin である。

$$\|x\|_c = \max_{0 \leq i \leq k} \|x^i\|_{c_i} \quad (x = x^0 + \cdots + x^k \in E^{c_0} \oplus \cdots \oplus E^{c_k})$$

によって E^c 上のノルム $\|\cdot\|_c$ を定義する。

次の命題 (P4.10) — (P4.13) は容易に証明できる。そこでその証明は省略する。

<u>(P4.10)</u> $x = x^u + x^s + x^c$, $y = y^u + y^s + y^c \in E^u \oplus E^s \oplus E^c$ に対して

$$d_0(x, y) = \max\{\|x^u - y^u\|_u, \|x^s - y^s\|_s, \|x^c - y^c\|_c\}$$

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

とおくと，d_0は$\mathbb{R}^r$上のもとの位相を生成する距離関数で次をみたす：

(i) $d_0(x, y) = d_0(x+h, y+h) \quad (^\forall h \in \mathbb{R}^r)$,

(ii) $\lambda_0 \in (0, 1)$が存在して

$$d_0(\gamma^n(x), 0) \leqslant \begin{cases} \lambda_0^{-n} d_0(x, 0) & (x \in E^u,\ n \leqslant 0) \\ \lambda_0^n d_0(x, 0) & (x \in E^s,\ n \geqslant 0) \end{cases}$$

(iii) $E^c \neq \{0\}$ならば，γ_cはd_0で等距離的で，

(iv) $d_0(jx, 0) = j d_0(x, 0) \quad (x \in \mathbb{R}^r,\ j \geqslant 0)$.

(P4.2)(iv)によって，$\alpha_1 > 0$があって，$^\forall \alpha \in (0, \alpha_1]$に対して，$\psi B(\alpha) \cap F = \{0\}$をみたす$\mathbb{R}^r$の閉球

$$B(\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^r : d_0(x, 0) \leqslant \alpha\}$$

が存在する。$\psi B(\alpha) \oplus F^- \oplus F^+ \oplus H$はXの0での閉近傍である。

<u>(P4.11)</u> $\lambda_0 \in (0, 1)$は(P4.10)，$\{H^{(n)}\}$は(P4.8)(V)のようにえらび

$$d_-(x, y) = \begin{cases} \lambda_0^n & (x-y \in \sigma^{-n}F^-,\ x-y \notin \sigma^{-(n+1)}F^-) \\ 0 & (x = y) \end{cases}$$

$$d_+(x, y) = \begin{cases} \lambda_0^n & (x-y \in \sigma^n F^+,\ x-y \notin \sigma^{n+1}F^+) \\ 0 & (x = y) \end{cases}$$

$$d_H(x, y) = \begin{cases} \lambda_0^n & (x-y \in H^{(n)},\ x-y \notin H^{(n+1)}) \\ 0 & (x = y) \end{cases}$$

とおく。このときd_-, d_+, d_HはそれぞれF^-, F^+, Hのもとの相対位相を生成する距離関数である。

<u>(P4.12)</u> $\alpha_1 > 0$は上のようにえらぶ。$x = x_0 + x_1 + x_2$

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

$+\ x_3 \in \psi B(\alpha_1) \oplus F^- \oplus F^+ \oplus H$ に対して,

$$\rho(x) = \min\{d_1,\ \max\{d_0(\psi^{-1}(x_0), 0),\ d_-(x_1, 0),\ d_+(x_2, 0),\ d_H(x_3, 0)\}\}$$

とおくと, $\rho(x)$ は劣加法的関数である。次の距離関数 d は X のもとの位相を生成する;

$$d(x, y) = \begin{cases} \rho(x-y) & (x-y \in \psi B(\alpha_1) \oplus F^- \oplus F^+ \oplus H) \\ \alpha_1 & (x-y \notin \psi B(\alpha_1) \oplus F^- \oplus F^+ \oplus H) \end{cases}$$

$\varepsilon \in (0, \alpha_1]$ に対して部分集合 $B^u(\varepsilon)$, $B^\Delta(\varepsilon)$, $B^c(\varepsilon)$ を定義する;

$$B^u(\varepsilon) = B(\varepsilon) \cap E^u,\quad B^\Delta(\varepsilon) = B(\varepsilon) \cap E^\Delta,\quad B^c(\varepsilon) = B(\varepsilon) \cap E^c$$

このとき, 距離関数 d の定義から,

$$B(\varepsilon) = B^u(\varepsilon) \oplus B^\Delta(\varepsilon) \oplus B^c(\varepsilon)$$

をうる。閉近傍を X の真部分集合になるようにえらぶために,

$$0 < \alpha_0 < \alpha_1$$

なる α_0 を固定して議論をつづける。$\varepsilon \in (0, \alpha_0]$ に対して, X の閉近傍

$$W(\varepsilon) = \{x \in X : d(x, 0) \leq \varepsilon\}$$

は次のように表わされる;

$$W(\varepsilon) = W^u(\varepsilon) \oplus W^\Delta(\varepsilon) \oplus W^c(\varepsilon).$$

ここに $W^u(\varepsilon)$, $W^\Delta(\varepsilon)$, $W^c(\varepsilon)$ は次のように定義されている;

$$W^u(\varepsilon) = W(\varepsilon) \cap \{\psi B^u(\varepsilon) \oplus F^+\},$$
$$W^\Delta(\varepsilon) = W(\varepsilon) \cap \{\psi B^\Delta(\varepsilon) \oplus F^+\},$$
$$W^c(\varepsilon) = W(\varepsilon) \cap \{\psi B^c(\varepsilon) \oplus H\}.$$

<u>(P4.13)</u> d は(P4.12)の中で定義された距離関数とする。
$x = x^u + x^\Delta + x^c \in W^u(\varepsilon) \oplus W^\Delta(\varepsilon) \oplus W^c(\varepsilon)$ に対して

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

$$d(x,0)=\max\{d(x^u,0),\ d(x^s,0),\ d(x^c,0)\},$$

$$d(\sigma^n(x),0)\leqslant\begin{cases}\lambda_0^{-n}\,d(x,0) & (x\in W^u(\alpha_0),\ n\leqslant 0)\\ \lambda_0^{n}\,d(x,0) & (x\in W^s(\alpha_0),\ n\geqslant 0)\end{cases}$$

が成立する。

開近傍 $W(\varepsilon)$ を X の 0 での局所座標であるという。(X,σ) が property $(*)$ をもち $(\mathbb{R}^r,\gamma)$ が双曲型であるとき，(X,σ) は双曲型であるという。このとき局所座標 $W(\varepsilon)$ は $W(\varepsilon)=W^u(\varepsilon)\oplus W^s(\varepsilon)$ $(W^u(\varepsilon)\neq\{0\},\ W^s(\varepsilon)\neq\{0\})$ に分解される。(X,σ) は property $(*)$ をもたず $(\mathbb{R}^r,\gamma)$ が双曲型であるか，または $(\mathbb{R}^r,\gamma)$ が central spin である場合に (X,σ) は central spin であるという。

定理 4.2 (Kronecker). $\mathbb{Z}[x]\ni p(x)$ のすべての根 λ が $|\lambda|=1$ であれば，それらは 1 のべき根である。

証明に対しては (P. 114, [72]) を見よ。

(P 4. 14) (X,σ) がエルゴード的であれば，つねに $W^u(\alpha_0)\neq\{0\}$, $W^s(\alpha_0)\neq\{0\}$ が成立する。

(証明)

$\mathbb{R}^r$ 上の γ の挙動は (P 4. 1) の (i) − (iv) のいずれかである。(i) の場合，$\det(\gamma')=\pm1$ なる $\gamma'\in GL(r,\mathbb{Z})$ が存在する。定理 4.2 によって，$|\lambda_1|>1$, $|\lambda_2|<1$ なる固有値 λ_1,λ_2 が必らず存在する。故に $\{0\}\neq\psi B^u(\alpha_0)\subset W^u(\alpha_0)$, $\{0\}\neq\psi B^s(\alpha_0)\subset W^s(\alpha_0)$. (ii) の場合，$\gamma$ は $|\lambda|>1$ なる固有値 λ をもつ。故に $\{0\}\neq\psi B^u(\alpha_0)\subset W^u(\alpha_0)$. $\gamma\mathbb{Z}^r\subset\mathbb{Z}^r$ で $\gamma^{-1}\mathbb{Z}^r\not\subset\mathbb{Z}^r$ より，$\sigma F\subsetneqq F$, $F=F^+\oplus H$. 故に $\{0\}\neq W(\alpha_0)\cap F^+\subset W^s(\alpha_0)$. γ を γ^{-1} でおきかえたとき，$F^-\neq\{0\}$, $F^+\neq\{0\}$ をうる。今 $F^-=\{0\}$ $(F^+=\{0\})$ とすると，$\sigma F^-\subset F^-$ $(\sigma^{-1}F^+\subset F^+)$. 故に $\gamma\mathbb{Z}^r\subset\mathbb{Z}^r$ $(\gamma^{-1}\mathbb{Z}^r\subset\mathbb{Z}^r)$. これは起りえない。//

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

(P 4.15) 局所座標 $W(\varepsilon) = W^u(\varepsilon) \oplus W^s(\varepsilon) \oplus W^c(\varepsilon)$ は次の性質をもつ；

(i) $W^u(\varepsilon) \supset \sigma^{-1} W^u(\varepsilon) \supset \cdots \supset \bigcap_0^\infty \sigma^{-i} W^u(\varepsilon) = \{0\}$,

(ii) $W^s(\varepsilon) \supset \sigma W^s(\varepsilon) \supset \cdots \supset \bigcap_0^\infty \sigma^{i} W^s(\varepsilon) = \{0\}$,

(iii) (X, σ) が central spin ならば, $\sigma W^c(\varepsilon) = W^c(\varepsilon)$,

(iv) $W^u(\varepsilon)$, $W^s(\varepsilon)$, $W^c(\varepsilon)$ は X の単位元 0 で対称的である。

(証明)

(i), (ii) は (P4.13) によって明らか。定義によって (iii), (iv) がえられる。//

コンパクト距離空間 X 上の位相同相 σ が拡大的 (expansive) であるとは, $\varepsilon > 0$ が存在して $\forall x, y \in X$ $(x \neq y)$ に対して, $n \in \mathbb{Z}$ があって $d(\sigma^n(x), \sigma^n(y)) > \varepsilon$ をみたすことである。これは自己同型の場合次のようにいい変えることができる；局所コンパクト群上の自己同型 σ が不変距離に関して拡大的であるとは, 単位元の開近傍 U が存在して, $\bigcap_{-\infty}^\infty \sigma^n U$ が単位元だけである。このような U を拡大的近傍であるという。

定理 4.3. X は solenoidal 群で, σ は X 上の自己同型とする。(X, σ) が拡大的であることと (X, σ) が双曲的であることとは同値である。

(証明)

(X, σ) が拡大的ならば, それは双曲型であることをまず証明する。U は (X, σ) の拡大的近傍とする。このとき $\psi(B) \subset U$ なる $\mathbb{R}^r$ の 0 の近傍 B があって, $\psi : B \to X$ は 1-1 である ($\because$ (P4.2)(iv))。$\psi \circ \gamma = \sigma \circ \psi$ によって,

$$\psi\left(\bigcap_{-\infty}^\infty \gamma^n B\right) = \bigcap_{-\infty}^\infty \sigma^n \psi B \subset \bigcap_{-\infty}^\infty \sigma^n U = \{0\}.$$

故に B は $(\mathbb{R}^r, \gamma)$ の拡大的近傍となる。$(\mathbb{R}^r, \gamma)$ は双曲型である ($\because$ $(\mathbb{R}^r, \gamma)$ が拡大的 $\Longleftrightarrow$ $(\mathbb{R}^r, \gamma)$ は双曲型)。(P4.2)(iii) によって, $X = \psi(\mathbb{R}^r) + F$. (P4.8)(vi) によって, $F = F^- \oplus F^+ \oplus$

Hである。$\sigma(H)=H$であるから，(H,σ)は拡大的である。補題2.7によって，$h(\sigma|H)=0$であるから，Hは有限になる(∵§5の補題5.19による)。(P4.4)によって，(X,σ)は双曲型となる。逆を示す。$G=gp\{\gamma^j g : j\in\mathbb{Z}\}$となる$g\in G$が存在する場合，$(X,\sigma)$が拡大的であることを示す。$(X,\sigma)$は双曲型であるから，(P4.8)(vi)によって，$F=F^-\oplus F^+$. $F/\bigcap_{-1}^{1}\sigma^n F$は有限(∵(P4.8)(iv))であるから，$C=\psi(\bigcap_{-1}^{1}\gamma^n B)\oplus\bigcap_{-1}^{1}\sigma^n F$はXの0での閉近傍である。$(\mathbb{R}^r,\gamma)$は双曲型で$\bigcap_{-\infty}^{\infty}\sigma^n F=\{0\}$であるから，

$$\bigcap_{-\infty}^{\infty}\sigma^j C=\psi(\bigcap_{-\infty}^{\infty}\gamma^j B)\oplus\bigcap_{-\infty}^{\infty}\sigma^j F=\{0\}$$

i.e. (X,σ)は拡大的である。(X,σ)は双曲型であるから，それは*property* (*)をもつ。故に有限集合$\{f_1,\cdots,f_n\}$があって$G=gp\bigcup_{-\infty}^{\infty}\gamma^j\{f_1,\cdots,f_n\}$となる。$K_i=ann(X,gp\{\gamma^j f_i : j\in\mathbb{Z}\})$ $(1\leqq i\leqq n)$とすると，$\bigcap_1^n K_i=\{0\}$. 故に$(X/K_i,\sigma)$は拡大的である。U_iはX/K_iの拡大的近傍，$\pi_i : X\to X/K_i$は自然な射影とする。このとき$U=\pi_1^{-1}(U_1)\cap\cdots\cap\pi_n^{-1}(U_n)$は$(X,\sigma)$の拡大的近傍であることが分かる。//

<u>定理4.4</u> (Bowen, [9]) Xはコンパクト群，σはX上の自己同型とする。$B(\varepsilon)$はXの単位元のε-半径の閉球とし，$D_n(\varepsilon)=\bigcap_{k=0}^{n}\sigma^{-k}B(\varepsilon)$ $(\forall n>0)$とする。このとき

$$h(\sigma)=\lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_{n\to\infty}-\log\mu(D_n(\varepsilon))/n$$

が成立する。ここにμはX上の確率Haar測度である。

Xの部分集合Eがσに関して(n,ε)-<u>*separated*</u>であるとは，$x,y\in E$ $(x\neq y)$のとき$\max_{0\leqq i\leqq n-1}d(\sigma^i(x),\sigma^i(y))>\varepsilon$をみたすことである。$(n,\varepsilon)$-*separated*集合の族で最大濃度を$s_n(\varepsilon)$で表わす。$s_n(\varepsilon)$は有限で

$$h(\sigma)=\lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_{n\to\infty}\log s_n(\varepsilon)/n$$

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

である(証明に対しては Walters [76], p.146 を見よ).

定理4.4の証明は次のように与えられる。与えられた群 X は可換とは限らないので，群演算は積で表わす。$B(\varepsilon, x) = \{x \in X : d(x, y) < \varepsilon\}$ とし，$D_n(x, \varepsilon) = \bigcap_0^{n-1} \sigma^{-k} B(\varepsilon, x)$ とおく。$\forall k > 0$ に対して，$\sigma^{-k} B(\varepsilon, \sigma^k x) = x\sigma^{-k} B(\varepsilon, e)$ である。$\varepsilon > 0$ に対して $\xi = \{A_1, ---, A_n\}$ は直径 $< \varepsilon$ なる Borel 集合から成る分割とする。$x \in \bigcap_0^{n-1} \sigma^{-k} A_{i_k}$ に対して $\bigcap_0^{n-1} \sigma^{-k} A_{i_k} \subset x D_n(\varepsilon, e)$ に注意する。実際に，$y \in \bigcap_0^{n-1} \sigma^{-n} A_{i_k}$ に対して $\sigma^k(y), \sigma^k(x) \in A_{i_k}$ $(\forall k)$. 故に $y \in \sigma^{-k} B(\varepsilon, \sigma^{k} x) = x D_n(\varepsilon, e)$. 故に $\mu(\bigcap_0^{n-1} \sigma^{-k} A_{i_k}) \leqslant \mu(D_n(\varepsilon, e))$. ここで

$$\begin{aligned}
&\Sigma\, \mu(\cap \sigma^{-k} A_{i_k}) \log \mu(\cap \sigma^{-k} A_{i_k}) \\
&\leqslant \Sigma\, \mu(\cap \sigma^{-k} A_{i_k}) \log \mu(D_n(\varepsilon, e)) \\
&= \log \mu(D_n(\varepsilon, e)).
\end{aligned}$$

(Σ は $\bigvee_0^{n-1} \sigma^{-k}\xi$ の元についてとられている). 故に

$$\begin{aligned}
h(\sigma) \geqslant h(\sigma, \xi) &= \lim_n \frac{1}{n} H(\xi \vee --- \vee \sigma^{-(n-1)}\xi) \\
&\geqslant \limsup \left\{ \frac{-1}{n} \log \mu(D_n(\varepsilon, e)) \right\}.
\end{aligned}$$

$\varepsilon > 0$ は任意であるから,

$$h(\sigma) \geqslant \lim_{\varepsilon \to 0} \limsup_n \left\{ \frac{-1}{n} \log \mu(D_n(\varepsilon, e)) \right\}.$$

E は最大濃度をもつ (n, ε)-*separated* 集合であるとする。このとき $\{x D_n(\varepsilon, e) : x \in E\}$ は互に交わらない。故に $\mu(\cup_{x \in E} x D_n(\varepsilon, e)) = s_n(\varepsilon)\, \mu(D_n(\varepsilon, e)) \leqslant 1$; i.e.

$$s_n(\varepsilon) \leqslant 1/\mu(D_n(\varepsilon, e)).$$

故に

$$\limsup_n \frac{1}{n} \log s_n(\varepsilon) \leqslant \limsup_n \left\{ \frac{-1}{n} \log \mu(D_n(\varepsilon, e)) \right\}$$

$\varepsilon \longrightarrow 0$ としたとき,

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

$$h(\sigma) \le \lim_{\varepsilon \to 0} \limsup_{n} \left\{ \frac{-1}{n} \log \mu(D_n(\varepsilon, \sigma)) \right\} \le h(\sigma).$$

結論が得られた。//

定理 4.5 (Yuzvinskii, [83]). X は solenoidal 群で σ は X 上の自己同型とする。(X, σ) の lifting system を $(\mathbb{R}^r, \gamma)$ とし, $p(x)$ は γ の特性多項式 ($p(x) \in \mathbb{Q}[x]$) とするとき,

$$h(\sigma) = \sum_{|\lambda|>1} \log|\lambda| + \log \Delta.$$

ここに λ は γ の固有値で Δ は $\Delta p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ なる最小の正整数である。

Yuzvinskii [83] の証明より簡単な証明を与える。証明に対して定理 4.4 を利用する。

特性多項式 $p(x)$ が $\mathbb{Q}$ 上で既約な多項式 $p_i(x) \in \mathbb{Q}[x]$ $(1 \le i \le k)$ によって $p(x) = p_1(x)^{a_1} \cdots p_k(x)^{a_k}$ と表わされる。ここに $a_1, \cdots, a_k$ は自然数である。$q = \max\{a_1, \cdots, a_k\}$, $p^{(i)}(x) = p_1(x)^i \cdots p_k(x)^i$ $(0 \le i \le q)$ とおく。$G^{(i)} = \{g \in G : p^{(i)}(\gamma)g = 0\}$ は γ-不変部分群で, $G^{(1)} \subset G^{(2)} \subset \cdots \subset G^{(q)} = G$. $X_i = \mathrm{ann}(X, G^{(i)})$ とする。$G/G^{(i)}$ は torsion free であるから, $G/G^{(i)}$ の指標群 X_i は連結で, $X_1 \supset X_2 \supset \cdots \supset X_q = \{0\}$. $\gamma_{|G^{(i+1)}/G^{(i)}}$ の特性多項式は $p^{(1)}(x)$ で割り切れることに注意する。定理 2.5 によって

$$h(\sigma) = h(\sigma_{|X/X_1}) + h(\sigma_{|X_1/X_2}) + \cdots + h(\sigma_{|X_{q-1}}).$$

γ の特性多項式 $p(x)$ が既約多項式 $p_i(x) \in \mathbb{Q}[x]$ によって $p(x) = p_1(x) \cdots p_k(x)$ と表わされる場合について考える。このことは各 X_i/X_{i+1} の場合に対応している。$G_i = \{g \in G : p_1(\gamma) \cdots p_i(\gamma)g = 0\}$ $(1 \le i \le k)$ は γ-不変部分群で $G_1 \subset G_2 \subset \cdots \subset G_k = G$. $Y_i = \mathrm{ann}(X, G_i)$ は σ-不変部分群で $Y_1 \supset Y_2 \supset \cdots \supset Y_k = \{0\}$. 各 Y_i は指標群 G_i/G_{i+1} をもち, G_i/G_{i+1} の特性多項式は $p_{i+1}(x)$ である。再び定理 2.5 によって

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

$$h(\sigma) = h(\sigma_{|Y_1/Y_2}) + \cdots + h(\sigma_{|Y_{k-1}}).$$

結局γの特性多項式$p(x)$が$\mathbb{Q}$上で既約であるとき，定理が成立することを証明すればよい。

$D(\varepsilon)$を次の形のXの0でのε-開近傍とする; $D(\varepsilon) = B \oplus D$.
ここに

$$B = \psi\left(\bigcap_{-1}^{1} \gamma^n B^u(\varepsilon)\right) \oplus \psi\left(\bigcap_{-1}^{1} \gamma^n B^c(\varepsilon)\right) \oplus \psi\left(\bigcap_{-1}^{1} \gamma^n B^\Delta(\varepsilon)\right),$$
$$D = \bigcap_{-1}^{1} \sigma^n F^- \oplus \bigcap_{-1}^{1} \sigma^n F^+ \oplus H$$

である。$\forall n > 0$ に対して次は簡単に計算できる;

$$D_n(\varepsilon) = \sigma^{-n} \psi B^u(\varepsilon) \oplus \bigcap_{0}^{n} \sigma^{-k} \psi B^c(\varepsilon)\, \psi B^\Delta(\varepsilon) \oplus H.$$

$D(\varepsilon)$上への確率Haar測度μの制限をμ'とすると，μ'はB上のLebesgue測度μ_LとD上の確率Haar測度μ_0の積で表わされる。実際に，$\mu'(\cdot \oplus D) = \mu_L(\cdot)$ とおく。$E_1 \subset B$，$E_2 \subset D$ はBorel集合とし，$\mu'_{E_1}(E_2)$はD上のHaar測度より，Haar測度の一意性によって，$\lambda_{E_1} > 0$が存在して $\mu'_{E_1}(\cdot) = \lambda_{E_1} \mu_D(\cdot)$ が成立する。$\mu'_{E_1}(D) = \lambda_{E_1} \mu_D(D) = \lambda E_1$ に注意する。このとき

$$\mu'(E_1 \oplus E_2) = \mu'_{E_1}(E_2) = \lambda_{E_1} \mu_D(E_2) = \mu'_{E_1}(D) \mu_D(E_2)$$
$$= \mu'(E_1 \oplus D) \mu_D(E_2) = \mu_L(E_1) \mu_D(E_2).$$

$p(x)$は既約であるからすべての固有値は異なっている。λは$|\lambda| > 1$なるγの固有値とし，E_λはλの固有空間とすれば，E_λに$B_\lambda(\varepsilon)$なる0のε-開近傍が存在して,

$$\psi B^u(\varepsilon) = \bigoplus_{|\lambda|>1} \psi B_\lambda(\varepsilon)$$

と表わすことができる。

$$\mu_\lambda(\sigma^{-n} \psi B_\lambda(\varepsilon)) = |\lambda|^{-n \dim(E_\lambda)} \mu_\lambda(\psi B_\lambda(\varepsilon))$$

であるから,

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

$$\begin{aligned}
&\mu_L(\sigma^{-n}\psi B^u(\varepsilon)\oplus \bigcap_0^n \sigma^{-k}\psi B^c(\varepsilon)\oplus\psi B^s(\varepsilon))\\
&=\mu_u(\sigma^{-n}\psi B^u(\varepsilon))\,\mu_c(\bigcap_0^n\sigma^{-k}\psi B^c(\varepsilon))\,\mu_s(\psi B^s(\varepsilon))\\
&=(\Pi_{|\lambda|>1}|\lambda|)^{-n\Sigma \dim(E_\lambda)}\mu_u(\psi B^u(\varepsilon))\,\mu_c(\bigcap_0^n\sigma^{-k}\psi B^c(\varepsilon))\,\mu_s(\psi B^c(\varepsilon)).
\end{aligned}$$

$\sigma^{-n}F^-\subset F^-$ で $F^-/\sigma^{-n}F^-$ は有限であるから，F^- 上の Haar 測度 μ_- に対して

$$\mu_-(\sigma^{-n}F^-)=|F^-/\sigma^{-n}F^-|=\prod_{j=0}^{n-1}|\sigma^{-j}F^-/\sigma^{-(j+1)}F^-|=|F^-/\sigma^{-1}F^-|^n$$

をうる。$p(x)$ は既約であるから，この § の最初に述べた Ⓗ は Ⓗ $=\{g,\gamma g,\cdots,\gamma^{r-1}g\}$ なる集合である。(P4.8)(iv) の証明から，$\sigma\tilde{F}^-/\tilde{F}^-\cong\sigma F^-/F^-$ で，$ann(G,\tilde{F}^-)=gp\{\gamma^n g:-\infty<n\leq r-1\}$ ((P4.3) を見よ)。$ann(G,\sigma\tilde{F}^-)=gp\{\gamma^n g:-\infty<n\leq r-2\}$ であるから，$\sigma\tilde{F}^-/\tilde{F}^-$ の指標群は

$$gp\{\gamma^n g:-\infty<n\leq r-1\}/gp\{\gamma^n g:-\infty<n\leq r-2\}.$$

$\gamma^{n-1}g$ が分母の群に属するためには $\Delta p(x)\in\mathbb{Z}[x]$ なる最小の正整数 Δ に対して，Δ 倍しなくてはならない。このことは $|\sigma\tilde{F}^-/\tilde{F}^-|=|\tilde{F}^-/\sigma^{-1}\tilde{F}^-|=\Delta$ を意味する。故に

$$\frac{-1}{n}\log\mu(D_n(\varepsilon))=\Sigma_{|\lambda|>1}\log|\lambda|+\log\Delta+O(1/n).$$

$n\to\infty$ とすれば定理がえられる。//

$\boxed{\text{注意}}$ X はコンパクト距離空間，σ は X から X 上への位相同相とする。$\forall\delta>0$ と $\forall x\in X$ に対して

$$\begin{aligned}
W_\delta^s(x)&=\{y\in X: d(\sigma^n(x),\sigma^n(y))\leq\delta,\ \forall n\geq 0\},\\
W_\delta^u(x)&=\{y\in X: d(\sigma^n(x),\sigma^n(y))\leq\delta,\ \forall n\leq 0\}
\end{aligned}$$

を定義する。次をみたすとき (X,σ) は標準座標をもつという；X に適当な距離関数 d が存在して，$\forall\delta>0$ に対して $\varepsilon>0$ があって $d(x,y)<\varepsilon$ なる $x,y\in X$ に対して

$$W_\delta^s(x)\cap W_\delta^u(y)\neq\phi$$

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

をみたす。(X,σ) が標準座標をもち，$\delta^*>0$，$\lambda\in(0,1)$，$c>1$ が存在して，$\forall x\in X$ に対し次の(a)，(b)をみたすとき (X,σ) は<u>双曲型標準座標</u>をもつという；

(a) $\forall y\in W^s_{\delta^*}(x)$ に対して，$d(\sigma^n(x),\sigma^n(y))\leq c\lambda^n d(x,y)$ $(n\geq 0)$,

(b) $\forall z\in W^u_{\delta^*}(x)$ に対して，$d(\sigma^n(x),\sigma^n(z))\leq c\lambda^{-n} d(x,y)$ $(n\leq 0)$.

X の有限閉被覆 $\alpha=\{A_1,\cdots,A_n\}$ が (X,σ) の <u>*topological generator*</u> であるとは，$\forall x\in X$ に対して α に属する集合列 $\{A_{i_k}:k\in\mathbb{Z}\}$ が存在して $\{x\}=\bigcap_{-\infty}^{\infty}\sigma^k A_{i_k}$ をみたすときをいう。(X,σ) が拡大的であるとき (X,σ) は当然 *topological generator* をもつ。有限閉被覆 α が *topological generator* であるとする。このとき <u>α が Markov 分割</u>であるとは，次の(c)，(d) をみたすときをいう；

(c) $\forall\varepsilon>0$ に対して $\delta>0$ があって，$d(x,y)<\delta$ なる $x,y\in X$ に対して $W^s_\varepsilon(x)\cap W^u_\varepsilon(y)$ が1点集合 $\{[x,y]\}$ で，$(x,y)\longmapsto[x,y]$ なる対応 $[\cdot,\cdot]:\{(x,y)\in X\otimes X: d(x,y)<\delta\}\to X$ は連続である，

(d) (i) $\forall A_i\in\alpha$ に対して，$A_i=\overline{\mathrm{int}\,A_i}$，$x,y\in A_i$ ならば，$[x,y]\in A_i$，

(ii) $\mathrm{int}\,A_i\cap\mathrm{int}\,A_j=\phi$ $(i\neq j)$,

(iii) $x\in\mathrm{int}\,A_i$ で $\sigma(x)\in\mathrm{int}\,A_j$ のとき，
$\sigma W^u(x)\cap A_i\supset W^u(\sigma x)\cap A_j$，$\sigma W^s(x)\cap A_i\subset W^s(\sigma x)\cap A_j$.

(X,σ) が位相的に混合性 (*topollogically mixing*) をもって，双曲型標準座標をもっているとする。このとき (X,σ) は Markov 分割をもつ (P. 78, [11])。

$\boxed{\text{注意}}$ *solenoidal* 群 X 上の自己同型 σ が双曲型；*i.e.* 局所座標 $W(\varepsilon)=W^u(\varepsilon)\oplus W^s(\varepsilon)$ に分解されるとき，(X,σ) はエルゴード的である($\because$ $(\mathbb{R}^r,\gamma)$ は双曲型で；X の指標群 G は $G\subset\mathbb{R}^r$ で，γ は G 上で単位元を除いて有限軌道をもたないから)。$\forall x\in X$ に対して，$W^u_\varepsilon(x)=W^u(\varepsilon)+x$，$W^s_\varepsilon(x)=W^s(\varepsilon)+x$ とおくと，$W^u_\varepsilon(x)$，$W^s_\varepsilon(x)$ は上の注意の (a)，(b) をみたしている。

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

$d(x,y)<\delta/3$ なる $x, y \in X$ に対して, $W^u_\varepsilon(x) \cap W^s_\varepsilon(y) \neq \phi$ は明らか。故に (X,σ) は双曲型標準座標をもっている。従って (X,σ) は拡大的であるので, Markov分割をもつ。この場合 (X,σ) は確率Haar測度に関してBernoulli系であることが知られている(Bowen, [11])(Bernoulli系の定義は§7を見よ). しかし (X,σ) はエルゴード的でも, 双曲型とは限らない。この場合, (X,σ) はMarkov分割をもたない。トーラス上のエルゴード的自己同型に対するBernoulli性はKatznelson [28] によって証明された。一般の場合に対しては§7で解説する。

注意 双曲型ではないエルゴード的 *solenoidal* 自己同型の例を与える;

(a) T^4 は4-次元トーラスとし, σ は次の行列によって与えられた自己同型とする;

$$\gamma_\sigma = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

γ_σ の固有値は $(3-\sqrt{5} \pm i\sqrt{6\sqrt{5}+2})/4$ (絶対値 $=1$),
$(3+\sqrt{5}+\sqrt{6\sqrt{5}-2})/4$ (≈ 2.15), $(3+\sqrt{5}-\sqrt{6\sqrt{5}-2})/4$ (≈ 0.46).
(T^4, σ) はエルゴード的である。

(b) Ⓗ は $\mathbb{R}^2$ の標準基底とし,

$$\gamma = \begin{bmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{bmatrix}$$

とする。γ の固有値は $(3 \pm 4i)/5$ (絶対値 $=1$). $G = gp \bigcup_{-\infty}^{\infty} \gamma^n$Ⓗ は $\mathbb{R}^2$ の中の群で, γ-不変. 明らかに, Ⓗ $\subset G \subset \mathbb{R}^2$ である。G は離散位相をもっているとする。G の指標群 X は *solenoidal*, しかしトーラスではない。σ は X 上の γ によって生成された自己同型とすれば, (X,σ) はエルゴード的, しかし双曲型ではない。

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

注意 トーラス上の自己同型の周期点全体は稠密である。しかし solenoidal 自己同型に対しては正しくない。

まず後半の例を構成する。γ は $\mathbb{Q}^r$ 上の双曲型自己同型とすれば，$\gamma^n - I\ (n>0)$ は $\mathbb{Q}^r$ 上の自己同型である。故に $(\gamma^n - I)\mathbb{Q}^r = \mathbb{Q}^r$ $(\forall n>0)$. $\mathbb{Q}^r$ は離散位相をもつ可換群とし，X は $\mathbb{Q}^r$ の指標群とする。σ は γ によって導入された X 上の自己同型とする。X は solenoidal で (X,σ) はエルゴード的で，単位元 0 を除いて周期点が存在しない。前半を示そう。

T^n とその上の自己同型 σ の dual を (G,γ) とする。明らかに $G \cong \mathbb{Z}^n$ である。$\forall m \in \mathbb{N}$ に対して，$G_m = \{2^m g = 0 : g \in G\}$ は γ-不変で $G_m \downarrow \{0\}$ がえられる。$K_m = ann(T^n, G_m)$ は σ-不変．$K_m \ni x$ は $2^m x = 0$ をみたす．故に K_m は有限である; i.e. K_m の各元は周期点である。$K_m \nearrow$ に注意する。$\overline{\bigcup K_m} = \overline{\bigcup ann(T^n, G_m)}$ $= \overline{ann(T^n, \bigcap G_m)} = T^n$. 周期点の全体は稠密であることが示された。//

§5 自己同型を伴う零次元群の構造

この§では群 X の可換性を仮定していないので，群演算は積で表わされる。最初にエルゴード的自己同型を伴う零次元コンパクト群の構造定理を与える。

定理 5.1 X は零次元コンパクト群，X_0 は X の最大可換群で，σ は X 上の自己同型とする。(X,σ) がエルゴード的であれば，次をみたす σ-不変部分群の列 $\{X_j : j \geqq 0\}$ が存在する;

(i) (X_0, σ) はエルゴード的である，

(ii) $X_j\ (j \geqq 1)$ は simple Bernoulli 群，

(iii) $X = \bigotimes_{j\geqq 0} X_j$.

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

零次元コンパクト可換群上のエルゴード的自己同型の挙動は上の定理からは分からない。定理5.1の証明に対して，多くの準備を必要とする。

補助定理 5.2. (X, σ)はエルゴード的であるとすると，Xに次のようなσ-不変部分群の列が存在する; $X = F_0 \supset F_1 \supset \cdots \supset \cap F_n = \{e\}$, $\forall n \geq 0$に対してF_{n+1}はF_nの中で正規で

(i) F_n/F_{n+1}が非可換であれば，F_n/F_{n+1}は単純群$\sigma^j \dot{F}_n$の直積$F_n/F_{n+1} = \bigotimes_{-\infty}^{\infty} \sigma^j \dot{F}_n$に表わされる，

(ii) F_n/F_{n+1}が可換であれば，F_nにσ-不変部分群の減少列$\{Y_{n,i}\}$が存在して，$\cap_i Y_{n,i} = F_{n+1}$，$F_n/Y_{n,i}$ $(i \geq 1)$は単純群$\sigma^j \dot{H}_n$の直積$F_n/Y_{n,i} = \bigotimes_{-\infty}^{\infty} \sigma^j \dot{H}_n$に表わされる。

補助定理の証明の中で次のYuzvinskiiの結果を使う。

定理 5.3 (11.5, [82]) Aは$\cap \sigma^n A = \{e\}$なるXの開正規部分群とする。X/Aが単純であるとき，Xは有限群であるか，またはXはσによる*simple Bernoulli*群である。

定理 5.4 (11.1, [82]) HはXのσ-不変正規部分群とすると，Hの中に次をみたすσ-不変正規部分群Wが存在する; (W, σ)は*K-system*で$(H/W, \sigma)$は零エントロピーをもつ。

$\boxed{\text{注意}}$ 補題3.4と定理5.4はよく似た命題であるが，群の構造が異なっていることに注意せよ。

定理 5.5 (3.7, [82]) Xの中心群をZで表わす。Zが有限でX/Zが単純群$\sigma^j \dot{W}$の直積$X/Z = \bigotimes_{-\infty}^{\infty} \sigma^j \dot{W}$に分解すると仮定する。このとき$\dot{W}$が非可換であれば，$X$に$\sigma$-不変正規部分群$H$が存在し$X = Z \otimes H$と表わされる。

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

定理 5.6 (10.7, [82]) Hはσ-不変正規部分群でX/Hは可換であるとする。$\sigma_{|X/H}$の周期点の全体がX/Hで稠密で,$(X/H, \sigma)$かエルゴード的であれば,Xは可換である。

定理 5.7 (3.4, [82]) Xは単純非可換群L_i $(i \in I)$の直積$X = \bigotimes_{i\in I} L_i$に分解されているとする。このとき,この分解は一意的でXの正規部分群はいくつかのL_iの直積で表わされる。

定理 5.8 (3.5, [82]) (X, σ)はエルゴード的であるとすると,σ-不変有限正規部分群は中心群に含まれる。

定理 5.9 (11.3, [82]) $X \neq \{e\}$で(X, σ)がエルゴード的ならば,$h(\sigma) > 0$が成立する。

補助定理 5.2 の証明 Xは完全不連結であるから,開正規部分群の列 $X \supset A_1 \supset \cdots \supset \cap A_n = \{e\}$ が存在する。

$$H'_n = \cap_k \sigma^k A_n \quad (n \geqq 1)$$

とおく。定理 5.4によって,$(H'_n/H_n, \sigma)$は零エントロピーをもち,(H_n, σ)はK-systemとなる正規部分群H_nが存在する。次が成立することは明らかである;

$$X = H_0 \supset H_1 \supset \cdots \supset \cap H_n = \{e\} \quad (*)$$

$\dot{X} = X/H'_n$, $\dot{A} = A_n/H'_n$ とおく。$\dot{A}$は$\dot{X}$で開正規部分群である。ξはAのcosetsから成る有限分割とすると,$\vee \sigma^k \xi$は$\dot{X}$の各点分割に成る。故に,$h(\sigma_{|\dot{X}}) = h(\sigma, \xi) < \infty$. 定理 2.5によって

$$h(\sigma_{|H_{n-1}/H_n}) \leqq h(\sigma_{|X/H_n}) = h(\sigma_{|X/H'_n}) + h(\sigma_{|H'_n/H_n}) < \infty .$$

補助定理 5.2 の結論は次の補題 5.10, 11, 12, 13 からえられる。

補題 5.10. (X, σ)はK-systemである。

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

(証明)

(X,σ) が K-system でないと仮定する。定理5.4によって、正規部分群 W が存在して、(W,σ) は K-system で、$(X/W,\sigma)$ は零エントロピーをもつ。定理4.1によって、X/W は σ-不変開正規部分群 $\dot{K} \subsetneqq X$ を含む。故に、$(X/W)/\dot{K}$ は有限、$((X/W)/\dot{K},\sigma)$ は (X,σ) の homomorphic image である。故にエルゴード的である。従って定理5.9によって、$X/W=\dot{K}$. これは矛盾である。//

$\forall n \geqq 0$ を固定して、

$$F = H_n \;, \quad H = H_{n+1}$$

と書く。$F \supset H$ で、(F,σ) と (H,σ) は K-system で

$$h(\sigma_{|F/H}) < \infty \qquad (**)$$

に注意する。次の補題5.11, 12, 13によって、Fは次のような σ-不変部分群の列を含む；

$$F = F_{-1} \supset F_0 \supset \cdots \supset F_k = H$$

で、$\forall i \geqq 0$ に対して F_i は F_{i-1} で正規, F_{i-1}/F_i が非可換のとき、F_{i-1} は(ii)をみたす。

$F \supset B \supset H$ で、F/B が単純となる開正規部分群 B が存在する。この群 B に対して

$$B_0 = \cap \sigma^k B$$

とおくと、定理5.3によって、F/B_0 の単純正規部分群 F'/B_0 が存在して

$$F/B = \otimes_{-\infty}^{\infty} \sigma^i (F'/B_0).$$

定理5.4によって、B_0 の中に次をみたす σ-不変正規部分群 F_0 が存在する；

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

$$F \supset B_0 \supset F_0 \supset H$$

で $(B_0/F_0, \sigma)$ は零エントロピーをもち，(F_0, σ) は K-system である。

> 補題 5.11　F/F_0 が非可換のとき，F/F_0 は単純部分群 $\sigma^j\dot{F}$ の直積 $F/F_0 = \otimes_{-\infty}^{\infty}\sigma^j\dot{F}$ に分解される。

（証明）

$F_0 = B_0$ を示せば充分である。$h(\sigma_{|B_0/F_0}) = 0$ であるから，定理4.1によって，B_0 は次のような σ-不変部分群の列 $H_1 \supset H_2 \supset \cdots \supset \cap H_k = F_0$ を含む；$\forall k > 0$ に対して H_k は F の開正規部分群である。故に B_0/H_k は F/H_k の有限群である。定理5.8によって B_0/H_k は F/H_k の中心群に含まれる。

$(F/H_k)/(B_0/H_k)$ は可換であると仮定する。$F/B_0 = \otimes_{-\infty}^{\infty}\sigma^j(F/B_0)$ であるから，$\sigma_{|F/B_0}$ の周期点の集合は稠密で，$(F/B_0, \sigma)$ はエルゴード的である。$\forall k > 0$ に対して $(F/H_k)/(B_0/H_k) \cong F/B_0$，$B_0/H_k$ は F/H_k の中心部分群，故に F/H_k は可換（∵定理5.6による）．$H_k \searrow F_0$ であるから，F/F_0 も可換．これは矛盾である。故に $(F/H_k)/(B_0/H_k)$ は非可換．定理5.7によって B_0/H_k は F/H_k の中心群．故に定理5.5によって F/H_k は $F/H_k = \dot{C}_k \otimes (B_0/H_k)$ なる σ-不変部分群 $\dot{C}_k$ を含む。故に $(B_0/H_k, \sigma)$ は $(F/H_k, \sigma)$ の homomorphic image である。しかし B_0/H_k は有限であるから，$B_0 = H_k$ $(k \geqq 1)$．結果的に $B_0 = \cap H_k = F_0$ をうる。//

離散可換群の各元の位数が一つの固定された素数 p のベキであるとき，その群は <u>p-primary 群</u>であるという。

> 補題 5.12　F/F_0 が可換であるとき，$h(\sigma_{|F/F_0}) = \log p$ なる素数 p が存在する。更に F の中にす σ-不変正規部分群の減少列 $\{Y_{0,k}\}$ が存在して，$\cap_k Y_{0,k} = F_0$，$\forall k \geqq 1$ に対して $F/Y_{0,k}$ は位数 p の巡回群 $\sigma^j\dot{F}$ の直積 $F/Y_{0,k} = \otimes_{-\infty}^{\infty}\sigma^j\dot{F}$ に分解される。

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

(証明)

G を F/F_0 の指標群，γ は σ によって生成された G の自己同型とする。G の群演算は加法であるとする。明らかに G は torsion 群である。$(F/F_0, \sigma)$ は K-system であるから，γ は G の単位元を除いて有限軌道をもたない。F/B_0 は単純群で $F/B_0=\otimes_{-\infty}^{\infty}\sigma^j(F/B_0)$ であり，F/B_0 は可換であるから，F/B_0 は位数が素数 p の巡回群。故に $h(\sigma_{|F/B_0})=\log p$ で，定理 2.5 によって

$$h(\sigma_{|F/F_0}) = h(\sigma_{|F/B_0}) + h(\sigma_{|B_0/F_0}) = \log p.$$

G は p-primary 群である。これは次のように示される。G は torsion 群であるから，γ-不変 primary 群 $G^{(a)}$ の直和

$$G = \oplus_{a\geqq 1} G^{(a)}$$

に分解される。故に $\dot{F}^{(a)}$ $(a\geqq 1)$ は指標群 $G^{(a)}$ をもつ σ-不変部分群とするとき，

$$F/F_0 = \otimes_{a\geqq 1}\dot{F}^{(a)}$$

に分解される。$G_{B_0}=ann(G, B_0/F)$ とするとき，G_{B_0} は F/B_0 の指標群である。$F/B_0=\otimes_{-\infty}^{\infty}\sigma^j(F/B_0)$ で F/B_0 は位数 p の巡回群であるから，G_{B_0} の各元 g は $pg=0$ である。故に $G_{B_0}\subset G^{(a)}$ $(\exists a\geqq 1)$ そして $h(\sigma_{|\dot{F}^{(a)}})\geqq \log p$. しかし $h(\sigma_{|F/F_0})=\log p$ であるから，$G=G^{(a)}$; i.e. G は p-primary 群である。$G_1=\{g\in G : pg=0\}$ とおく。$G=G_1$ は次のように証明される。

$\dot{N}_1=ann(F/F_0, G_1)$ として，$\dot{W}_1\neq\{e\}$ を仮定する。定理 5.3 によって，$h(\sigma_{|(F/F_0)/\dot{W}_1})\geqq\log p$. 故に $h(\sigma_{|\dot{W}_1})=0$ (∵定理 4.2 による). 一方，$\gamma_{|G/G_1}$ は単位元を除いて有限軌道をもたないから，$(\dot{W}_1, \sigma)$ はエルゴード的である。故に $h(\sigma_{|\dot{W}_1})>0$. これは $h(\sigma_{|\dot{W}_1})=0$ に矛盾する。故に $\dot{W}_1=\{e\}$; i.e. $G=G_1$.

G は $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[x, x^{-1}]$-module であると考えることができる。$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[x, x^{-1}]$ は単項 ideal 整域で，$0\neq{}^\forall g\in G$ に対して $p(\gamma, \gamma^{-1})g\neq 0$ $(0\neq{}^\forall p(x, x^{-1})\in\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[x, x^{-1}])$ であるから，G は free

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[x, x^{-1}]$-module. 故に G の部分群の列 $\{U_j\}$ が存在して、各 U_j に対して $g_1, \cdots, g_{k_j} \in U_j$ が存在して

$$U_j = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[\gamma, \gamma^{-1}]g_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[\gamma, \gamma^{-1}]g_{k_j}$$
$$= (\oplus_{-\infty}^{\infty}\gamma^n\langle g_1\rangle) \oplus \cdots \oplus (\oplus_{-\infty}^{\infty}\gamma^n\langle g_{k_j}\rangle)$$

と分解される($\because$ 定理 3.11 による). しかし $h(\sigma_{|F/F_0}) = \log p$ であるから, $k_j = 1$; i.e.

$$U_j = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[\gamma, \gamma^{-1}]g_1 = \oplus_{-\infty}^{\infty}\gamma^n\langle g_1\rangle.$$

$Y_{0,j}/F_0 = \mathrm{ann}(F/F_0, U_j)$ とすれば, $Y_{0,j} \downarrow F_0$ で, $\forall j \geq 1$ に対して $F/Y_{0,j}$ は補題をみたす。//

> **補題 5.13.** 次のような $n_0 \geq 1$ と σ-不変部分群の列 $\{F_i : -1 \leq i \leq n_0\}$ が存在する; $F = F_{-1} \supset F_0 \supset \cdots \supset F_{n_0} = H$ で, $\forall i \geq 1$ に対して F_i は F_{i-1} で正規そして
> (i)′ F_{i-1}/F_i が非可換であれば, F_{i-1}/F_i は補題 5.11 のように分解される,
> (ii)′ F_{i-1}/F_i が可換であれば, F_{i-1} に補題 5.12 をみたす部分群の減少列 $\{Y_{i-1,n}\}$ が存在する。

(証明)

$F \supset F_0 \supset H$ で, (F_0, σ) は K-system であるから, 組 (F_0, H) に対して上の議論を適用することができる。このとき $F_0 \supset F_1 \supset H$, (F_1, σ) は K-system たる σ-不変部分群 (F_1 は F_0 で正規である) が存在する。F_0/F_1 が非可換のとき, 補題 5.11 によって, $F_0/F_1 = \otimes_{-\infty}^{\infty}\sigma^j\tilde{F}_0$ ($\sigma^j\tilde{F}_0$ は単純群である). F_0/F_1 が可換のとき, 補題 5.12 によって, $\forall k > 0$ に対して $F_0/Y_{1,k} = \otimes_{-\infty}^{\infty}\sigma^j\tilde{F}_0$ ($\sigma^j\tilde{F}_0$ は位数 p の巡回群である)たる σ-不変部分群の列 $Y_{1,1} \supset Y_{1,2} \supset \cdots \supset \cap Y_{1,k} = F_1$ が存在する。

(F_1, σ) は K-system であるから, 同じ議論をくりかえすことができる。結果的に, F は $F = F_{-1} \supset F_0 \supset \cdots \supset H$ たる σ-不変部分

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

群の$\mathfrak{F}_1$を含み，$\forall j \geq 0$ に対してF_jはF_{j-1}で正規，(F_j, σ)はK-systemでF_{j-1}/F_jは(i)$'$か(ii)$'$をみたすようにできる。//

$F_{n_0} = H$なる$n_0 \geq 1$の存在を示す。(＊＊)によって$h(\sigma_{|F/H}) < \infty$. 一方，$h(\sigma_{|F_{j-1}/F_j}) \geq \log 2$ ($F_j \subsetneqq F_{j-1}$のとき). 故に定理2.5によって

$$\sum_j h(\sigma_{|F_{j-1}/F_j}) \leq h(\sigma_{|F/H}) < \infty.$$

このことから$n_0 \geq 1$の存在が求まる。

補助定理5.2は補題5.10，11，12，13と(＊)からえられる。

次の補助定理は可換群を扱うので，群演算は加法で表わす。

補助定理 5.14　Xはコンパクト可換群，σはX上の自己同型であるとする。(X, σ)が拡大的であれば，σ-不変部分群Hに対して，$(X/H, \sigma)$も拡大的である。

証明に対して次の三つの補題を準備する。

補題 5.15.　Xは完全不連結であるとする。前のように(X, σ)のdualを(G, γ)で表わす。このとき(X, σ)が拡大的である必要十分条件はGに有限部分群G_1が存在して$G = \sum_{-\infty}^{\infty} \gamma^j G_1$とできることである。

(証明)

(X, σ)が拡大的であるとすると，$\bigcap_{-\infty}^{\infty} \sigma^j F = \{0\}$なる開集合Fが存在する。Fは完全不連結であるから，Fに開部分群F_0が含まれる。$F_0 = \{0\}$のとき，Xは有限群．従って，Gも有限群である。$F_0 \neq \{0\}$の場合に$G_1 = \mathrm{ann}(G, F_0)$とすれば，

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \gamma^j G_1 = \mathrm{ann}(G, \bigcap_{-\infty}^{\infty} \sigma^{-j} F_0) = \mathrm{ann}(G, \{0\}) = G.$$

逆を証明する。G_1を有限群で$G = \sum_{-\infty}^{\infty} \gamma^j G_1$とする。

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

$F = \mathrm{ann}(X, G_1)$ は X の開部分群で $\bigcap_{-\infty}^{\infty}\sigma^j F = \{0\}$. 故に (X, σ) は拡大的である。//

補題 5.16. X は完全不連結であるとする。(X, σ) が拡大的であれば, σ-不変部分群 L に対して, $(X/L, \sigma)$ も拡大的である。

(証明)

$G_L = \mathrm{ann}(G, L)$ とする。(X, σ) は拡大的であるから, 補題 5.15 によって, 有限部分群 G_1 が存在して, $\sum_{-\infty}^{\infty}\gamma^j G_1 = G$. G は $\mathbb{Z}[x, x^{-1}]$-module と考えることができる。G_L は $\mathbb{Z}[x, x^{-1}]$-submodule で $\mathbb{Z}[x, x^{-1}]$ は Noetherian であるから, G_L も $G_L = \sum_{-\infty}^{\infty}\gamma^j G_1'$ と表わされる。ここに G_1' は G_L の有限部分群である。補題 5.15 によって, $(X/L, \sigma)$ は拡大的である。//

補題 5.17. X はコンパクト可換群, σ は X 上の自己同型とする。H は X の σ-不変部分群で (H, σ), $(X/H, \sigma)$ は拡大的であるとすると, (X, σ) も拡大的である。

(証明)

$\dot{U}$, U' はそれぞれ $(X/H, \sigma)$, (H, σ) の拡大的近傍とする。$\dot{U} = \{x + H : x \in U\}$, $U' = H \cap V$ (U, V は X の 0 の近傍である) と表わされる。$W = U \cap V$ とおく。$\bigcap_{-\infty}^{\infty}\sigma^j(W + H) = H$ であるから,

$$\bigcap_{-\infty}^{\infty}\sigma^j W = \bigcap_{-\infty}^{\infty}\sigma^j W \cap H = \bigcap_{-\infty}^{\infty}\sigma^j(W \cap H) = \{0\}.$$

故に W は (X, σ) の拡大的近傍である。//

補助定理 5.14 の証明. 補題 2.13 を利用したとき, 完全不連結 σ-不変部分群 K が存在して, $X = X_0 + K$ と表わされる。(ここに X_0 は単位元の連結成分である). (X_0, σ), (K, σ) は明らかに拡大的である。H は補助定理に述べた部分群であるとする。このとき

$$X/H = \{(X_0 + H)/H\} + \{(K + H)/H\}.$$

$(K + H)/H$ は K の剰余群であるから, 補題 5.16 によって, $((K + H)/H, \sigma)$ は拡大的である。次の定理 5.18 によって, X_0 は有限次元; i.e. X_0 は solenoidal である。定理 4.3 によって (X_0, σ) は双曲型で

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

ある。故に(X_0,σ)は property (*) をもつ; i.e. X_0の指標群Gは有限部分集合Λが存在して$G=gp\bigcup_{-\infty}^{\infty}\gamma^j\Lambda$と表わされる。

Kはσ-不変部分群とし, $G_K=ann(G,K)$とおく。G_Kもγに関して有限生成である. 実際に, Gを$\mathbb{Z}[x,x^{-1}]$-moduleと考えると, G_Kは$\mathbb{Z}[x,x^{-1}]$-submoduleで, $\mathbb{Z}[x,x^{-1}]$はNoetherianであるから, 有限集合Λ'があって, $G_K=gp\bigcup_{-\infty}^{\infty}\gamma^j\Lambda'$; i.e. X_0/Kはproperty (*) をもち, $(X_0/K,\sigma)$は双曲型である。故に$(X_0/K,\sigma)$は拡大的である。$(X_0+H)/H$はX_0剰余群であるから, 上の事実によって, $((X_0+H)/H,\sigma)$は拡大的である。補題5.16によって, $(X/H,\sigma)$は拡大的である。//

定理 5.18 (Mané [38]). Xはコンパクト距離空間, $\sigma:X\to X$は上への位相同相とする。(X,σ)が拡大的ならば, Xの位相的次元は有限である。

(証明)

$C>0$は(X,σ)の拡大定数とし, $0<\varepsilon<C/2$なるεを固定する。三つの段階に分けて証明される。

段階(1). $\delta>0$があって$d(x,y)<\delta$なる$x,y\in X$に対して,

$$\varepsilon\leq\max\{d(\sigma^j(x),\sigma^j(y)):0\leq j\leq n\}\leq 2\varepsilon$$

をみたす$n>0$が存在すれば, $d(\sigma^n(x),\sigma^n(y))>\delta$である。

否定すれば$\forall n\geq 1$に対して$x_n,y_n\in X$と$m_n>0$が存在して$d(x_n,y_n)\to 0$, $d(\sigma^{m_n}(x_n),\sigma^{m_n}(y_n))\to 0$ $(n\to\infty)$をみたし, $m_n>l_n>0$なるl_nがあって$d(\sigma^{l_n}(x_n),\sigma^{l_n}(y_n))\geq\varepsilon$で, かつ$\max\{d(\sigma^m(x_n),\sigma^m(y_n)):0\leq m\leq m_n\}\leq 2\varepsilon$が成立する。$X$はコンパクトであるから, 部分列をとることによって$\sigma^{l_n}(x_n)\to x$, $\sigma^{l_n}(y_n)\to y$ $(n\to\infty)$. 故に, $d(x,y)\geq\varepsilon$. $l_n<m_n$より, $\forall j\in\mathbb{Z}$に対して, $d(\sigma^j(x),\sigma^j(y))\leq 2\varepsilon$がえられる。$(X,\sigma)$は拡大的であるから, $x=y$となり矛盾する。

段階(2). $\forall\xi>0$に対して, $N(\xi)=N>0$が存在して, $d(x,y)\geq\xi$であれば, 次が成立する;

$\max\{d(\sigma^n(x), \sigma^n(y)) : |n| \leq N\} > \varepsilon.$

否定すると, $\forall n \geq 1$ に対して, $d(x_n, y_n) \geq \xi$ なる $x_n, y_n \in X$ が存在して, $\max\{d(\sigma^j(x_n), \sigma^j(y_n)) : |j| \leq n\} \leq \varepsilon$ がえられる。 $x_n \to x$, $y_n \to y$ $(n \to \infty)$ とすると, $d(x, y) \geq \xi$ で, 一方 $d(\sigma^j(x), \sigma^j(y)) \leq \varepsilon$ $(\forall j \in \mathbb{Z})$. これは矛盾である。

段階(3). 直径 $\delta > 0$ 以下の開集合から成る X の被覆 $\{U_i : 1 \leq i \leq l\}$ を考える。ここに $\delta > 0$ は段階(1)のものとする。 $\dim(X) \leq l^2 - 1$ を示す。

$\forall n \geq 1$ を固定して, 次をみたす $\delta_n > 0$ をみつける; $d(x, y) < \delta_n$ ならば, $d(\sigma^j(x), \sigma^j(y)) < \varepsilon$ $(|j| \leq n)$. $U^n_{i,j} = \sigma^n(U_i) \cap \sigma^{-n}(U_j)$ とおくと, $\{U^n_{i,j}\}$ は X の開被覆である。 $\forall x, y \in U^n_{i,j}$ に対して, $d(x_r, x_{r+1}) \leq \delta_n$ をみたす点列 $x_0 = x, x_1, \cdots, x_p = y$ が存在するとき, $x \sim y$ であるとする。記号"$\sim$"は同値律をみたす。この同値律によって $U^n_{i,j}$ を類別し, 類を $U^{n,k}_{i,j}$ $(1 \leq k \leq k(i,j,n))$ で表わす。各 $U^{n,k}_{i,j}$ は開集合, $\{U^{n,k}_{i,j} : 1 \leq i, j \leq l,\ 1 \leq k \leq k(i,j,n)\}$ は X の被覆である。このとき

$$\lim_{n\to\infty}\{\sup_{k,i,j} \operatorname{diam}(U^{n,k}_{i,j})\} = 0 \quad (*)$$

がえられる。否定したとき, $\xi > 0$ と $n \geq 2N(\xi)$ (段階(2)で存在したもの)があって, $d(x, y) \geq \xi$ なる x, y を含む $U^{n,k}_{i,j}$ が存在する。このとき $x_0 = x$, $x_1, \cdots, x_p = y$ が $U^{n,k}_{i,j}$ にあって, $d(x_r, x_{r+1}) \leq \delta_n$ $(0 \leq r \leq p-1)$ が成立する。

$$\Delta_r = \max\{d(\sigma^m(x_r), \sigma^m(x_0)) : |m| \leq x_n\}$$

とおくとき, 段階(2)によって $\Delta_p > \varepsilon$. δ_n のえらび方によって $\Delta_1 < \varepsilon$. 故に $|\Delta_{r+1} - \Delta_r| \leq \varepsilon$ $(1 \leq r \leq p-1)$ である。実際に, $m, m' \in (-n, n)$ があって

$$\begin{aligned}
&d(\sigma^m(x_{r+1}), \sigma^m(x_0)) - d(\sigma^{m'}(x_r), \sigma^{m'}(x_0)) \\
&\leq d(\sigma^m(x_{r+1}), \sigma^m(x_0)) - d(\sigma^m(x_r), \sigma^m(x_0)) \\
&\leq d(\sigma^m(x_{r+1}), \sigma^m(x_r)) \leq \varepsilon .
\end{aligned}$$

$\Delta_r > \varepsilon$ で $\Delta_{r'} \leq \varepsilon$ $(r' < r)$ なる $r > 0$ が存在する。故に $\Delta_r \leq 2\varepsilon$. $x = x_0$, x_r に対して $\sigma^{-n}(x), \sigma^{-n}(x_r), \sigma^n(x), \sigma^n(x_r) \in U_i$ であるから, $d(\sigma^{-n}(x), \sigma^{-n}(x_r)) \leq \delta$, $d(\sigma^n(x), \sigma^n(x_r)) \leq \delta$. 更に

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

$\varepsilon < \Delta_r = \max\{d(\sigma^m(x), \sigma^m(x_r)) : |m| \leq n\} \leq 2\varepsilon$. 今, $x' = \sigma^{-n}(x)$, $x_r' = \sigma^{-n}(x_r)$ とおくと,

$$\varepsilon < \max\{d(\sigma^m(x'), \sigma^m(x_r')) : 0 \leq m \leq 2n\} \leq 2\varepsilon.$$

$d(x', x_r') < \delta$ であるから, 段階(1)によって $d(\sigma^{2n}(x'), \sigma^{2n}(x_r')) = d(\sigma^n(x), \sigma^n(x_r)) > \delta$. これは矛盾である。故に(*)が成立する。

$\forall n \geq 0$ に対して, $\forall x \in X$ は $\{U_{i,j}^{n,k} : 1 \leq i, j \leq l,\ 1 \leq k \leq K(i,j,n)\}$ の中の高々 l^2 個の集合に属することを示す。

$$\cap\{U_{i_m, j_m}^{n, k_m} : 1 \leq m \leq s\} = \phi$$

のとき, 各集合 $U_{i,j}^{n,k}$ は $U_{i,j}^n$ の δ_n-成分であるから, $(i_m, j_m) = (i_{\bar{m}}, j_{\bar{m}})$ ならば, $U_{i_m, j_m}^{n, k_m} = U_{i_{\bar{m}}, j_{\bar{m}}}^{n, k_{\bar{m}}}$. このことは m が (i_m, j_m) を決定している。故に $s \leq m^2 \leq l^2$. 定理は証明された。//

補題 5.19. X はコンパクト完全不連結群, σ は X 上の自己同型とする。(X, σ) が拡大的で, $h(\sigma) = 0$ であれば, X は有限群である。

(証明)

拡大的近傍として開部分群 K をえらぶことができる。$h(\sigma) = 0$ であるから, $\bigcap_0^k \sigma^n K = \bigcap_1^k \sigma^n K$ をみたす $k > 0$ が存在する。実際に, $\forall n \geq 0$ に対して, $\bigcap_0^n \sigma^j K \subsetneq \bigcap_1^n \sigma^j K$ であると仮定すると, $\bigcap_0^n \sigma^j K$ は開部分群であるから, $|X/\bigcap_0^\infty \sigma^j K| \geq 2^n$. $\zeta(K)$ は K の coset から成る X の分割とすると, $\zeta(K)$ は有限分割で $\bigvee_0^n \sigma^j \zeta(K) = \zeta(\bigcap_0^n \sigma^j K)$ であるから, $|\zeta(\bigcap_0^n \sigma^j K)| \geq 2^n$ である。故に

$$h(\sigma) \geq \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n+1} \log 2^n = \log 2.$$

これは矛盾である。$K' = \bigcap_1^k \sigma^j K$ とおくと, 明らかに $\sigma K' = K'$ である。K は拡大的近傍より, K' は単位元だけの集合; i.e. X は有限である。//

補題 5.20. X はコンパクト完全不連結群, σ は X 上の自己同型とする。$h(\sigma) < \infty$ のとき, $h(\sigma) = \log |n|$ なる $n \in \mathbb{Z}$ が存在する。

(証明)

X は完全不連結であるから, 閉正規部分群の列 $A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset \cap A_n = \{e\}$

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

が存在する(e は X の単位元を表わす). $\zeta(A_m)$ は A_m の coset から成る X の有限分割とすると，エントロピーの定義から，

$$h(\sigma, \zeta(A_m)) = \lim_{i\to\infty} H(\zeta(A_m)|\vee_1^i \sigma^{-j}\zeta(A_m))$$
$$= \lim_{i\to\infty} \log|\zeta(\cap_0^i \sigma^{-j}A_m)/\zeta(\cap_1^i \sigma^{-j}A_m)|.$$

故に $h(\sigma, \zeta(A_m)) = \log|n_m|$ なる $n_m \in \mathbb{Z}$ が存在する。$\zeta(A_m)\uparrow$ で $\vee\zeta(A_m)$ は X の各点分割であるから，$h(\sigma) = \lim_{m\to\infty} h(\sigma, \zeta(A_m))$.
故に $h(\sigma) = \log|n|$ なる $n \in \mathbb{Z}$ が存在する。//

X_1, X_2 はコンパクト群 X の部分群とする。$[X_1, X_2]$ は $[x_1, x_2] = x_1^{-1}x_2^{-1}x_1x_2$ ($x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$) なる元全体によって生成された(閉)部分群とする。X_1 が正規であれば，$[x_1, x_2] \subset X_1$，特に X_2 も正規であれば，$[X_1, X_2] \subset X_1 \cap X_2$. X の既約ユニタリー表現の同値類の集合を X^* で表わすことにする。σ は X 上の自己同型とするとき，$(\gamma f)(x) = f(\sigma x)$ ($f \in X^*$, $x \in X$) によって写像 γ: $X^* \to X^*$ が定義される。

<u>定理 5.21</u> (Kaplansky [26]) X はコンパクト群で σ は X 上の自己同型とする。(X, σ) がエルゴード的である必要十分条件は，$\gamma^n f = f$ ($f \in X^*$, $n > 0$) なるとき f は単位行列に限ることである。

<u>補題 5.22</u>. X はコンパクト群で σ は X 上の自己同型とする。(X, σ) がエルゴード的であれば，$([X, X], \sigma)$ もエルゴード的である。$[X, X] \neq \{e\}$ ならば，それは無限集合である。

(証明)

$\forall k \geqslant 1$ に対して，(X, σ^k) はエルゴード的で $(X \otimes X, \sigma^k \otimes \sigma^k)$ もエルゴード的である。故に $\dot{x}_0 \in X \otimes X$ があって $\{(\sigma^k \otimes \sigma^k)^j \dot{x}_0 : j \in \mathbb{Z}\}$ は $X \otimes X$ で稠密である。$\varphi(x, y) = [x, y]$ ($(x, y) \in X \otimes X$) とおくと，$\varphi: X \otimes X \to [X, X]$ は連続で，$\varphi(\sigma^k \otimes \sigma^k)\dot{x} = \sigma^k \varphi \dot{x}$ をみたす。故に $\{\sigma^{kj}\varphi\dot{x}_0 : j \in \mathbb{Z}\}$ は $\varphi(X \otimes X)$ で稠密である。$[X, X]$ 上

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

で $\sigma^k f = f$ $(f \in [X, X]^*,\ n > 0)$ と仮定する。このとき $\mathcal{S}(X \otimes X)$ 上で $f = I$ をうる。故に $\forall n \geqq 1$ に対して，$\{x_1 \cdots x_n : x_i \in \mathcal{S}(X \otimes X),\ 1 \leqq i \leqq n\}$ 上で $f = I$. このことは $[X, X]$ 上で $f = I$ を示している; i.e. $([X, X], \sigma^k)$ がエルゴード的である(∵ 定理5.21による). $[X, X] \neq \{e\}$ のとき，定理5.9によって $[X, X]$ は無限群である。//

以後，この§の最後まで，X は完全不連結コンパクト群であるとする。

> <u>補題 5.23</u>. (X, σ) はエルゴード的であるとする。X に σ-不変正規部分群 K が存在して，(K, σ) はエルゴード的で X/K は σ による *simple Bernoulli* 群であるとする。このとき $X = FK$ なる正規部分群が存在する。
>
> X_1, $\{e\} \neq K_1 (\subset X_1)$ は X の σ-不変正規部分群で，(X_1, σ), (K_1, σ) は共にエルゴード的で，X_1/K_1 は σ による *Simple Bernoulli* 群であるとする。このとき $X_1 = F_1 K_1$ なる正規部分群 F_1 が存在する。

(証明)

(K, σ) はエルゴード的であるから，$\forall k > 0$ に対して，(K, σ^k) もエルゴード的である。故に $x_0 \in K$ があって，$\forall k \geqq 1$ を固定して軌道 $\{\sigma^{kj} x_0 : j \in \mathbb{Z}\}$ は K で稠密である。$g(x_0) \neq I$ なる $g \in X^*$ をえらぶ。$F = \{x \in X : g(x) = I\}$ とすると，X/F は Lie 群であるから，X/F は有限群に限る。一方 X/K は σ による *simple Bernoulli* 群; i.e. X の正規部分群 B が存在して，$X/K = \bigotimes_{-\infty}^{\infty} \sigma^j (B/K)$ と表わされる。故に $F \not\subset K$ である。$\sigma^j B/(F \cap \sigma^j B) \cong F\sigma^j B/F \subset X/F$ $(j \in \mathbb{Z})$ であるから，$\sigma^j B/(F \cap \sigma^j B)$ は有限群. $F \cap \sigma^j B \not\subset K$ $(j \in \mathbb{Z})$ が成立する。実際に，$F \cap \sigma^j B \subsetneqq K$ $(\exists j \in \mathbb{Z})$ を仮定する。このとき $K/(F \cap \sigma^j B)$ は明らかに有限だから，

$$\{\sigma^n x_0 : n \in \mathbb{Z}\}(F \cap \sigma^j B)/(F \cap \sigma^j B)$$

は $K/(F \cap \sigma^j B)$ に含まれる有限集合である。故に $n > m \geqq 0$ があって $\sigma^n x_0 (F \cap \sigma^j B) = \sigma^m x_0 (F \cap \sigma^j B)$. $y = \sigma^m x_0$ とおくと，$(\sigma^{n-m} y)^{-1} y \in F$ であるから，$g(\sigma^{n-m} y) = g(y)$. $\{\sigma^{(n-m)j} y : j \in \mathbb{Z}\} = \sigma^m \{\sigma^{(n-m)j} x_0 : j \in \mathbb{Z}\}$ は K で稠密であるから，K 上で $g = I$; i.e. 矛盾である。故に $F \cap \sigma^j B \not\subset K$ $(\forall j \in \mathbb{Z})$. $(F \cap \sigma^j B)K \supsetneqq K$ で $\sigma^j B/K$ は単純であるから，$\sigma^j B = (F \cap \sigma^j B)K$ $(\forall j \in \mathbb{Z})$. 故に $X = FK$. 後半も同じように示される。//

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

補題 5.24. (X, σ) はエルゴード的であるとする。KはXのσ-不変正規部分群とする。このとき次が成立する。
(i) Kが有限でX/Kは可換とすると，Xは可換である，
(ii) $X = FK$ なる真の正規部分群Fが存在するとする，Kがσによる simple Bernoulli 群で K, X/Kは可換とすれば，Xは可換である。

(証明)

X/Kは可換であるから，$[X, X] \subset K$, Kは有限とすれば，$[X, X] = \{e\}$ (∵ 補題 5.22 によるる)，(i)が示された。

$F \cap K = \{e\}$ であれば，$X = F \otimes K$ は可換である。$F \cap K \neq \{e\}$ のとき，$[X, X] \subset F \cap K \subsetneq K$ (∵ $X/(F\cap K)$ は可換であるから)。
$([X, X]\ \sigma)$ はエルゴード的で，$[X, X] \neq \{e\}$ ならば，$[X, X]$は無限群，定理2.5によって，$h(\sigma_{|K}) = h(\sigma_{|[X,X]}) + h(\sigma_{|K/[X,X]})$.
Kはσによる simple Bernoulli 群で，Kは可換であるから，素数pがあって，$h(\sigma_{|K}) = \log p$. 補題 5.20 によって $h(\sigma_{|[X,X]}) = 0$, 補題 5.19によって$[X, X]$は有限；i.e. $[X, X] = \{e\}$ である。//

補題 5.24. (X, σ)はエルゴード的で，Xは$\bigcap_{-\infty}^{\infty}\sigma^i A = \{e\}$ なる開正規部分群Aを含んでいるとする。このときσ-不変正規部分群の列 $X = F_0 \supset F_1 \supset \cdots \supset F_n \supsetneq F_{n+1} = \{e\}$ が存在して，F_i/F_{i+1} $(i \geq 0)$ はσによる simple Bernoulli 群であるようにできる。

(証明)

(X, σ)はエルゴード的であるから，補助定理5.2によってσ-不変正規部分群の列 $X = F_0 \supset F_1 \supset \cdots \supset \cap F_n = \{e\}$ が存在して補助定理5.2の(i),(ii)が成立する。Aは開で$\bigcap_{-\infty}^{\infty}\sigma^i A = \{e\}$ であるから，$n \geq 0$があって，$F_n \supsetneq F_{n+1} = \{e\}$ とできる(∵ 補助定理 5.2 の証明の中のF_nの構成から分る)。F_n/F_{n+1} が可換の場合に，それがσによる simple Bernoulli 群であることを示せばよい。$\{Y_{n,i}\}$は補助定理5.2の中の部分群の列とする。$F_n/Y_{n,i}$は simple Bernoulli 群で，$F_n/Y_{n,i}$ は可換であるから，$h(\sigma_{|F_n/Y_{n,i}}) = \log p$

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

(pは或る素数). 故に $h(\sigma_{|Y_{n,i}/F_{n+1}})=0$ (定理2.5による) $\bigcap_{-\infty}^{\infty}\sigma^j A=\{e\}$ であるから, (X,σ) は拡大的である。故に $(Y_{n,i},\sigma)$ も拡大的. 補題5.16によって, $(Y_{n,i}/F_{n+1},\sigma)$ は拡大的. 故に補題5.19によって $Y_{n,i}/F_{n+1}$ は有限群; i.e. $Y_{n,k}=F_{n+1}$ なる $k>0$ が存在する。//

補題5.25. (X,σ) はエルゴード的で, K は補題5.23のものとする。特にKはσによる simple Bernoulli 群として次の条件の一つが成立すると仮定する;

(i) Kは可換で X/K は非可換,
(ii) Kは非可換で X/K は可換,
(iii) K, X/K は共に非可換.

このとき $X=K\otimes B$ なるσ-不変正規部分群Bがσによる simple Bernoulli 群であるようにとれる。

(証明)

補題5.23によって, $X=KF'$, $F'\not\supset K$, X/F' は単純となる正規部分群F'が存在する。$B=\bigcap_{-\infty}^{\infty}\sigma^j F'$ はXで正規. 定理5.3によって, X/B はσによる simple Bernoulli 群である。まず(i)の場合に対して証明を与える。Kは可換であるから, X/F' は可換である。故にX/Bも可換である。X/K は simple Bernoulli 群で非可換であるから, 定理5.7によって X/BK は可換となる。故に $X=BK$ が成立する。$X=K\otimes B'$ なるσ-不変正規非可換群$B'(\subset B)$で simple Bernoulli 群であるものがえらべる。実際に, Kは simple Bernoulli 群で可換であるから, 素数pが存在して $h(\sigma_{|K})=\log p$. $B\cap K\subsetneq K$ であるから, $h(\sigma_{|B\cap K})=0$. (K,σ)は拡大的であるから, 補題5.19によって, $B\cap K$は有限である。定理5.8によって, $B\cap K$はXの中心部分群である。$X/K\cong B/(B\cap K)$ は非可換で$B/(B\cap K)$ はσによる simple Bernoulli 群であるから, $B\cap K$はBの中心群である。定理5.5によって, $B=(B\cap K)\otimes B'$ なる非可換部分群B'が存在する。B'はBの中心を含まない。$\forall x\in X$ に対して $x^{-1}B'x$ はBで正規である。定理5.7を利用した

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

とき，$B'(x^{-1}B'x)$ はBの中心を含まないことが分かる。このことは $x^{-1}B'x \subset B'$; i.e. B' はXで正規．故に $X = K \otimes B'$. (ii)の場合，同じ方法で結論をうる。(iii)の場合，X/B は非可換そして X/K も非可換である。定理5.7を使って，$X/K = BK/K$．故に $X = BK = B \otimes K$.//

$\boxed{\text{注意}}$ 補題5.25の(i)，(ii)のいずれかをみたす場合，Bは非可換で，(ii)の場合，Bは可換である。

補題5.26．(X, σ) はエルゴード的で，Xは補題5.24をみたす正規部分群の列 $X = F_0 \supset F_1 \supset \cdots \supset F_n \supsetneq F_{n+1} = \{e\}$ を含んでいるとする。$k \geqq 2$ は X/F_{k-1} が可換となる最大な整数とすれば，Xに σ-不変正規部分群Cが存在して，C/F_k は可換，F_{k-1}/F_k は非可換で $X/F_k = (C/F_k) \otimes (F_{k-1}/F_k)$ をみたすようにできる。

(証明)

$(X/F_2)/(F_1/F_2) \cong X/F_1$ で，X/F_1 は σ による *simple Bernoulli* 群，$(F_1/F_2, \sigma)$ はエルゴード的であるから，補題5.23によって $X/F_2 = (C_1/F_2)(F_1/F_2)$ をみたす閉正規部分群 C_1/F_2 が存在する。C_1 はXで正規である。組 $(F_1/F_3, F_2/F_3)$ に対して，同じ方法を使って $F_1/F_3 = (C_2/F_3)(F_2/F_3)$ をみたす X/F_3 の正規部分群 C_2/F_3 をみつけることができる。故に $X/F_3 = (C_1C_2/F_3)(F_2/F_3)$. C_1C_2 はXで正規である。この方法を $k-1$ 回つづけたとき，$X/F_k = (C'/F_k)(F_{k-1}/F_k)$ なる正規部分群 C' が存在し，$X = C'F_{k-1}$ と表わされる。$X/C' \cong F_{k-1}/(C' \cap F_{k-1})$ であるから，X/C' は F_{k-1}/F_k の剰余群である。補題5.24によって，F_{k-1}/F_k は非可換で σ による *simple Bernoulli* 群である($F_{k-1}/F_k \neq \{e\}$ のとき)．故に F_{k-1}/F_k は中心を含まない。定理5.7によって，X/C' は中心を含まない。$\forall n \geqq 1$ に対して，$X/\bigcap_{-n}^{n} \sigma^i C'$ は $\bigotimes_{-n}^{n}(X/\sigma^i C')$ の部分群に同型であるから，$C = \bigcap_{-\infty}^{\infty} \sigma^i C'$ とするとき，X/C は中心を含まない。X/F_{k-1} は可換であるから，$X = CF_{k-1}$．$(C \cap F_{k-1})/F_k \subset F_{k-1}/F_k$ であるから，$C \cap F_{k-1} = F_k$ (∵ 定理5.7と補助定理5.1(i)による).//

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

> 補題 5.27. (X, σ)はエルゴード的で，Xは非可換 そして $\bigcap_{-\infty}^{\infty}\sigma^j A=\{e\}$なる開正規部分群$A$を含むとする。このとき中心群$U$と$\sigma$による simple Bernoulli 群の有限直積Vが存在して，$X=U\otimes V$と直積分解することができる。

（証明）

補題5.24をみたす正規部分群の列$X=F_0\supset F_1\supset\cdots\supset F_{n+1}=\{e\}$が存在する。$k\geqq 2$は$X/F_{k-1}$が可換となる最大数とする。補題5.26によって，$\sigma$-不変正規部分群$C$が存在して

(a) $X/F_k=(C/F_k)\otimes(F_{k-1}/F_k)$

と直積分解される。ここにC/F_kは可換でF_{k-1}/F_kは非可換である。組$(F_{k-1}/F_{k+1},\ F_k/F_{k+1})$に対して，補題5.25を適用すると，部分群$C_1$が$X$に存在して$C_1$は$F_{k-1}$で正規でそして

(b) $F_{k-1}/F_{k+1}=(C_1/F_{k+1})\otimes(F_k/F_{k+1})$

と直積分解される。$C_1/F_{k+1}\cong F_{k-1}/F_k$であるから，$C_1/F_{k+1}$は非可換で$\sigma$による simple Bernoulli 群である。故にC_1/F_{k+1}はF_{k-1}/F_{k+1}の中心をもたない。前と同じようにしてC_1/F_{k+1}はX/F_{k+1}で正規であることが分かる; i.e. C_1はXで正規である。(a), (b)から，

(c) $X/F_{k+1}=(C/F_{k+1})\otimes(C_1/F_{k+1})$.

F_{k+1}/F_{k+2}が可換であれば，上のようにしてσ-不変部分群C_2が存在して，C_2はC_1で正規で

(d) $C_1/F_{k+2}=(C_2/F_{k+2})\otimes(F_{k+1}/F_{k+2})$

と直積分解され，C_2/F_{k+2}は中心を含まない。C_2はXで正規であることが示される。(c), (d)から

(e) $X/F_{k+2}=(C/F_{k+2})\otimes(C_2/F_{k+2})$.

F_{k+1}/F_{k+2}が非可換の場合には，X/F_{k+2}は(e)のように直積分解され，C_2はXで正規である(∵ 定理5.7を利用すればよい)。上の方法を有限回くりかえすとき，$X=C\otimes X_1$なるσ-不変正規部分群Cと非可換正規 simple Bernoulli 群X_1が存在する。(C, σ)に対して上の議論をくりかえすとき，(X, σ)のエントロピーは有限であるから，補題の結論をうる。//

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

補題 5.28. (X,σ) はエルゴード的で，X は中心をもたないとする。このとき σ-不変正規部分群 H に対して，X/H は中心をもたない。

(証明)

X は開正規部分群の列 $A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset \cap A_n = \{e\}$ を含んでいる。$H_n = \cap_{-\infty}^{\infty}\sigma^i A_n$ $(n \geq 1)$ とおくと，$\{H_n\}$ は減少列で $\cap H_n = \{e\}$ である。$(X/H_n, \sigma)$ はエルゴード的であるから，補題 5.27 によって X/H_n は $X/H_n = (U_n/H_n) \otimes (V_n/H_n)$ に直積分解される。ここに U_n/H_n は X/H_n の中心群，V_n/H_n は非可換で正規 *simple Bernoulli* 群の有限直積である。

$$C_n = \overline{\Pi_{i=n}^{\infty} U_i}, \quad B_n = \overline{\Pi_{i=n}^{\infty} V_i} \quad (n \geq 1)$$

とおく。明らかに $X = C_n B_n$ $(n \geq 1)$ で $X_0 = \cap_1^{\infty} C_n$，$B = \cap_1^{\infty} B_n$ とすると $X = X_0 B$ をうる。X_0 は可換である。実際に，$\forall n \geq 1$ に対して

$$X_0 H_n/H_n \subset C_n/H_n = \overline{\Pi_{i=0}^{\infty}(U_{n+i}H_n/H_n)}.$$

$U_{n+i}H_n/H_n$ は U_{n+i}/H_{n+i} の剰余群で U_{n+i}/H_{n+i} は X/H_{n+i} の中心群 $(i \geq 0)$ であるから，$U_{n+i}H_n/H_n$ は X/H_n の中心群に含まれる。故に $X_0 H_n/H_n \cong X_0/(X_0 \cap H_n)$ は可換である。故に X_0 は可換である。明らかに

$$B H_n/H_n \subset B_n/H_n = \overline{\Pi_{i=0}^{\infty}(V_{n+i}H_n/H_n)} \quad (n \geq 1).$$

$n \geq 1$ を固定する。$\forall i \geq 1$ に対して V_{n+i}/H_{n+i} は非可換で正規 *simple Bernoulli* 群の有限直積である。$V_{n+i}H_n/H_n$ は V_{n+i}/H_{n+i} の剰余群であるから，$V_{n+i}H_n/H_n$ は非可換で正規 *simple Bernoulli* 群の有限直積である($\because$ 定理 5.7 による)。

$$V_{n+i}H_n/H_n \subset X/H_n = (U_n/H_n) \otimes (V_n/H_n) \quad (i \geq 0)$$

であるから，$V_{n+i}H_n/H_n \subset V_n/H_n$ $(i \geq 0)$．故に，$B_n/H_n = V_n/H_n$．BH_n/H_n は非可換で正規 *simple Bernoulli* 群の有限直積であることに注意する(*i.e.* BH_n/H_n は中心をもたない)．$H_n \downarrow \{e\}$ であるから，B は中心をもたない。故に，$X_0 \cap B = \{e\}$; *i.e.* $X = X_0 \otimes B$．補題の仮定によって $X = B$ (*i.e.* $X_0 = \{e\}$)．H は補題の中の正規部分群とする。$\forall n \geq 1$ に対して，$X/HH_n = B/HH_n$ は B/H_n の剰余群．故に定理 5.7 によって X/HH_n は B/H_n の剰余群．故に定理 5.8 によって X/HH_n は中心をもたない; *i.e.* X/H は中心をもたない。//

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

補題 5.29. (X,σ)はエルゴード的で，X_0はXの中心群とする。このときσ-不変正規部分群Bが存在して$X=X_0\otimes B$に直積分解される。

(証明)

これは補題5.28の証明からえられる。//

補題 5.30. (X,σ)はエルゴード的でXは中心をもたないとする。このときσ-不変正規部分群の列$\{X_j : j\geqq 1\}$が存在して，$\forall j\geqq 1$に対してX_jはσによる simple Bernoulli 群でXは$X=\otimes_{j\geqq 1}X_j$と表わされる。

(証明)

補助定理5.2のようにXの正規部分群の列$\{F_n : n\geqq 0\}$が存在する。補題5.28によってX/F_2には中心が存在しない。補題5.25によって，非可換正規simple Bernoulli群D_1/F_2があって$X/F_2=(D_1/F_2)\otimes(F_1/F_2)$と表わされる。$D_1$は$X$の正規部分群で，$X=D_1F$が成立する。$D_1/F_2$，$F_1/F_2$は共に非可換であるから，同じようにして，

$$D_1/F_3=(D_2/F_3)\otimes(F_2/F_3),\quad F_1/F_3=(D_2'/F_3)\otimes(F_2/F_3)$$

なる直積分解をうる。D_2，D_2'はXの正規部分群としてえらばれることに注意する。(実際に，D_2/F_3，F_2/F_3は非可換でσによるsimple Bernoulli群であるから，定理5.7によって，$\forall x\in X$に対して$x^{-1}D_2x/F_3=D_2/F_3$をうる)．明らかに$D_1=D_2F$で

$$X/F_3=(D_2/F_3)\otimes(D_2'/F_3)\otimes(F_2/F_3).$$

上式の右側の各項の部分群は非可換である。$X=D_2F_1$と表わされる。D_2/F_4に対して同じ方法で

$$D_2/F_4=(D_3/F_4)\otimes(F_3/F_4)$$

なる直積分解がえられ，D_3/F_4，F_3/F_4は共にσによるsimple Bernolli群である。従ってD_3はXの正規部分群で$D_2=D_3F_3$をうる。故に$X=D_3F_1$である。

この論法をくりかえすとき，正規部分の列$D_1\supset D_2\supset\cdots$が存在して，$\forall n\geqq 1$に対して$D_n/F_{n+1}$は非可換で，$\sigma$によるsimple

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

Bernoulli 群そして $X = D_n F_1$ である。$X_1 = \cap D_n$ とおくと，$X = X_1 F_1$ で $X \supsetneq F_1$ である。故に $X_1 F_n \supsetneq (X_1 \cap F_1) F_n$ ($\forall n \geqq 1$). 故に

$$X_1 F_{n+1} / F_{n+1} \supsetneq (X_1 \cap F_1) F_{n+1} / F_{n+1} .$$

$X_1 F_{n+1} / F_{n+1} \subset D_n / F_{n+1}$ であるから，$X_1 F_{n+1} / F_{n+1}$ は非可換で $X_1 F_{n+1} / F_{n+1}$ は σ による simple Bernoulli 群である。定理5.7によって $(X_1 \cap F_1) F_{n+1} / F_{n+1}$ は単位元に等しいことが分かる; i.e. $(X_1 \cap F_1) F_{n+1} = F_{n+1}$ ($\forall n \geqq 1$). $F_n \downarrow \{e\}$ であるから，$X_1 \cap F_1 = \{e\}$. 故に $X = X_1 \otimes F_1$. F_1 は中心をもたない。(F_1, σ) はエルゴード的であるから，F_1 に対して上での議論を使うことができる。このことをくりかえすと正規部分群の列 $\{X_j\}$ が次をみたすようにえらべる; $\forall j \geqq 1$ に対して X_j は正規非可換部分群で，σ による simple Bernoulli 群であり，更に $X = X_1 \otimes \cdots \otimes X_n \otimes F_n$ ($n \geqq 1$) をみたす。

$$X^{(1)} = F_2 , \quad X^{(j)} = \overline{\prod_{i \neq j} X_i} \quad (j \geqq 2)$$

とおくと，

$$X^{(j)} = X_1 \otimes \cdots \otimes X_{j-1} \otimes X_{j+1} \otimes F_{j+2} \quad (j \geqq 2).$$

故に $\bigcap_1^n X^{(j)} = F_{n+1}$ ($n \geqq 1$); i.e. $\bigcap_1^\infty X^{(j)} = \{e\}$. このことは $\overline{\prod X_j} = X$ を示している。故に X は直積分解 $X = \bigotimes_{j \geqq 1} X_j$ をもつ。//

<u>定理 5.1 の証明</u>. 補題 5.29によって，$X = X_0 \otimes B$ に分解され，B は中心を含まない。(X_0, σ), (B, σ) はエルゴード的であるから，補題5.30によって，定理の結論がえられる。//

完全不連結コンパクト可換群上の自己同型の挙動については補助定理5.2(ii)がある。その他に二つの結果があるのでそれを紹介する。その一つは次の定理である。

<u>定理 5.31</u>. (X, σ) はエルゴード的で，σ の周期点は単位元だけであるような完全不連結コンパクト可換群 X とその上の自己同型が存在する。

(証明)

Gは可算で離散可算可換群，γはG上の自己同型で$G=\oplus_{-\infty}^{\infty}\gamma^n\langle g\rangle$であるとする。ここに$\langle g\rangle$は位数$p$(素数)の巡回群である。$I$は$G$上の恒等写像とする。$\forall j\geqq 0$に対して，$(\gamma^j-I)G\subsetneqq G$は明らかである。$G=G_j$ $(j>0)$として，(制限)直積群$P=\otimes_1^{\infty}G_i$を考える。
$\forall x=(x_1,\cdots,x_n,0,\cdots)\in P$に対して，

$$\tilde{\gamma}(x)=(\gamma x_1,\cdots,\gamma x_n,0,\cdots),$$

$$\tilde{\beta}(x)=(0,(\gamma-I)x_1,\cdots,(\gamma^n-I)x_n,0,\cdots)$$

を定義する。$\tilde{\gamma}$はP上の自己同型，$\tilde{\beta}$はPからPの中への1-1準同型である。$\tilde{\gamma}$は0を除いて周期点をもたないことに注意する。$Q=\{x-\tilde{\beta}(x):x\in P\}$は$\tilde{\gamma}$-不変部分群である。部分群$P_n$を次のように定義する:

$$P_n=\{(0,\cdots,0,x_n,0,\cdots):x_n\in G_n\}\quad(n\geqq 1).$$

このとき$Q\cap P_n=\{0\}$で$P_n\oplus Q\subsetneqq P_{n+1}\oplus Q$が成立する。故に$\cup_1^{\infty}(P_n\oplus Q)=P$. このことから

$$\cup_1^{\infty}\{(P_n\oplus Q)/Q\}=P/Q.$$

$\tilde{\gamma}^j-I$はP上で1-1であるから，$\forall j\geqq 1$に対して

$$P_j\oplus Q=\{(\tilde{\gamma}^j-I)P_{j+1}\}\oplus Q.$$

$((P_j\oplus Q)/Q,\tilde{\gamma})$は$(G,\gamma)$に同型であるから，$\tilde{\gamma}_{|P/Q}$は単位元を除いて周期点をもたない。$\forall j\geqq 1$に対して，$(\tilde{\gamma}^j-I)(P/Q)=P/Q$が成立する。実際に，

$$\begin{aligned}P_{jn}\oplus Q&=\{(\tilde{\gamma}^{jn}-I)P_{jn+1}\}\oplus Q\\&=\{(\tilde{\gamma}^{j(n-1)}+\tilde{\gamma}^{j(n-2)}+\cdots+I)(\tilde{\gamma}^j-I)P_{jn+1}\}\oplus Q\\&\subset\{(\tilde{\gamma}^j-I)P_{jn+1}\}\oplus Q.\end{aligned}$$

故に$(P_{jn}\oplus Q)/Q\subset(\tilde{\gamma}^j-I)\{(P_{jn+1}\oplus Q)/Q\}$である。$(P_n\oplus Q)/Q\uparrow P/Q$であるから，要求がみたされている。

XはP/Qの指標群とし，$\tilde{\alpha}$は$\tilde{\gamma}$によって生成されたX上の自己同型とする。P/Qはtorsion群であるから，Xはコンパクト完全不連結である。$\forall j\geqq 1$に対して，$(\tilde{\gamma}^j-I)(P/Q)=P/Q$であるから，$\tilde{\alpha}$は$X$の単位元を除いて周期点をもたない。$(P/Q,\tilde{\gamma})$は単位元を除いて有限軌道をもたないから，$(X,\tilde{\alpha})$はエルゴード的である。定理は証明された。//

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

Xはコンパクト完全不連結可換群で，σはX上の自己同型とする。(X,σ)のdualを(G,γ)で表わす。Gはtorsion群である。補題5.12の証明でみたように，Gはp-primary群$G(p)$の直和で表わされる；i.e. $G=\oplus_p G(p)$. 明らかに$\gamma G(p)=G(p)$で，$X_p=ann(X,\oplus_{q\neq p}G(q))$とおくと，$X=\oplus_p X_p$に直和分解され，各$X_p$は$\sigma$-不変である。$X$の指標群$G$は$p$-primaryであるとする。$X$はいつも距離付け可能と約束してあったから，$G$は可算集合である。$G_n=\{g\in G: p^n g=0\}$ $(n\geq 1)$とおく。このときG_{n+1}/G_nの元はp倍すると単位元となる群である。$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[x,x^{-1}]$は体$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$に係数をもつ$x,x^{-1}$の多項式全体から成る環とする(実は単項ideal整域である). $\mathbb{R}_k(p)=\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[x^k,x^{-k}]$とおく。$\mathbb{R}_k(p)$は$\mathbb{R}_1(p)$の部分環である(idealではない). xの代りにγをおきかえたとき，各G_{n+1}/G_nは$\mathbb{R}_1(p)$-moduleと考えることができる。G_{n+1}/G_nの単位元ではない元$\dot{g}$が$a\dot{g}\neq 0$ $(0\neq{}^\forall a\in\mathbb{R}_1(p))$で，$G_{n+1}/G_n$が有限生成(moduleとして)であれば，定理3.11によって$\dot{g}_1,\cdots,\dot{g}_k\in G_{n+1}/G_n$があって

$$G_{n+1}/G_n=\mathbb{R}_1(p)\dot{g}_1\oplus\cdots\oplus\mathbb{R}_1(p)\dot{g}_k=\{\oplus_{-\infty}^{\infty}\gamma^j\langle\dot{g}_1\rangle\}\oplus\cdots\oplus\{\oplus_{-\infty}^{\infty}\gamma^j\langle\dot{g}_k\rangle\}$$

と直和分解される。従ってG_{n+1}/G_nを指標群にもつ群YはσによるBernoulli群である。しかしG_{n+1}/G_nが有限生成でないとき，その指標群はどんな構造をもつかを調べたのが次の定理5.32である。

<u>定理5.32</u>. Xは完全不連結可換群，σはX上の自己同型で(G,γ)を(X,σ)のdualとする。次を仮定する；1) (X,σ)はエルゴード的である，2) すべての$g\in G$に対して，$pg=0$なる素数pが存在する，3) $\mathbb{R}_1(p)$-rank$(G)=r<\infty$である(i.e. $\mathbb{R}_1(p)$上一次独立なr個の元$g_1,\cdots,g_r\in G$があって，$0\neq{}^\forall g\in G$は$0\neq a$, $a_1,\cdots,a_r\in\mathbb{R}_1(p)$ $((a_1,\cdots,a_r)\neq(0,\cdots,0))$があって$ag=a_1g_1+\cdots+a_rg_r$と表わされる). このとき$\sigma$-不変真部分群$L$が存在して，$X/L$は直和$X/L=\dot{B}^-\oplus\dot{B}^+\oplus\dot{C}$に分解され，それぞれの部分群は次の性質をもつ；

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

(i) $\sigma^{-j}\dot{B}^- \downarrow \{L\}$, $\sigma\dot{B}^-/\dot{B}^-$ は有限群である,

(ii) $\sigma^{j}\dot{B}^+ \downarrow \{L\}$, $\dot{B}^+/\sigma\dot{B}^+$ は有限群である,

(iii) $\sigma\dot{C}=\dot{C}$ で $h(\sigma_{|\dot{C}})=0$,

(iv) $\bigcap_{j=-\infty}^{\infty}\sigma^{kj}(\dot{B}^-\oplus\dot{B}^+)=\{L\}$ $(\forall k\geqq 1)$.

証明を与える前に，言葉の約束をする。$0\neq{}^\forall g\in G$ が $ag\neq 0$ $(0\neq{}^\forall a\in\mathbb{R}_1(p))$ をもつとき，G は $\mathbb{R}(p)$-<u>torsion free</u> とよぶ。${}^\forall g\in G$ が $ag=0$ なる $0\neq a\in\mathbb{R}_1(p)$ をもつとき，G は $\mathbb{R}_1(p)$-<u>torsion 群</u>とよぶことにする。(G,γ) が単位元を除いて有限軌道をもたない(i.e. (X,σ) がエルゴード的である)ことと G が $\mathbb{R}_1(p)$-torsion free とは同値である。$\mathbb{R}_1(p)$-rank$(G)=1$ なる必要十分条件は $\mathbb{R}_k(p)$-rank$(G)=k$ $(k\geqq 1)$ である。

<u>補題 5.33</u>. $G/\sum_{i=-\infty}^{\infty}\gamma^i(\bigcap_{j=0}^{k-1}\gamma^j G')$ が $\mathbb{R}_1(p)$-torsion 群となる部分群 G' と $k\geqq 1$ が存在すると仮定する。このとき $G/\sum_{-\infty}^{\infty}\gamma^{kj}G'$ は $\mathbb{R}_k(p)$-torsion 群である。

(証明)

$\mathbb{R}_1(p)$-rank$(\sum_{i=-\infty}^{\infty}\gamma^i(\bigcap_{j=0}^{k-1}\gamma^j G'))=r$ であるから，$\bigcap_{j=0}^{k-1}\gamma^j G'$ に $\mathbb{R}_1(p)$ 上一次独立な元 $\{f_1,\cdots,f_r\}$ が存在する。故に $\gamma^{-j}f_i\in G'$ $(1\leqq i\leqq r,\ 0\leqq j\leqq k-1)$. i に対して $\{f_i,\gamma^{-1}f_i,\cdots,\gamma^{-(k-1)}f_i\}$ は $\mathbb{R}_k(p)$ 上一次独立である。故に

$$\bigoplus_{i=1}^{r}\{\mathbb{R}_k(p)f_i\oplus\cdots\oplus\mathbb{R}_k(p)\gamma^{-(k-1)}f_i\}\subset\sum_{j=-\infty}^{\infty}\gamma^{kj}G',$$

このことから $\mathbb{R}_k(p)$-rank$(\sum_{j=-\infty}^{\infty}\gamma^{kj}G')=rk$. $\mathbb{R}_k(p)$-rank$(G)=rk$ より結論をうる。//

<u>補題 5.34</u>. G は γ に関して有限生成(i.e. $\mathbb{R}_1(p)$-module として有限生成)と仮定する。このとき次をみたす γ-不変部分群 G_0 が存在する;

(i) $\mathbb{R}_1(p)$-rank$(G_0)=r_0\leqq r$,

(ii) $G_0=\{\bigoplus_1^{r_0}\mathbb{R}_1(p)f_i\}\oplus G_0'$ に直和分解される,

ここに G_0' は無限群である,

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

(iii) $\tilde{G}_0'$ は G_0' に同型で, $G_0 = \{\oplus_1^{r_0} \mathbb{R}_1(p) f_i\} \oplus \tilde{G}_0'$ が成立しているとする。このとき $\tilde{G}_0'/G_0''$ が有限となる部分群 G_0'' に対して $G_0/\sum_{-\infty}^{\infty} \gamma^\delta G_0''$ は $\mathbb{R}_1(p)$-torsion群である。

(証明)

$\mathbb{R}_1(p)$-$rank(G) = r < \infty$ であるから, r 個の元 $g_1, \cdots, g_r \in G$ があって, $A = \oplus_1^r \mathbb{R}_1(p) g_i$ は部分群で G/A で $\mathbb{R}_1(p)$-torsion群とできる。G の部分群 A' が存在して, $G = A \oplus A'$ と直和に分解される。明らかに A' は無限群である。$\tilde{A}'$ は $G = A \oplus \tilde{A}'$ をみたす部分群とする。A'' は $\tilde{A}'/A''$ が有限となる部分群であるとする。$G_1 = \sum_{-\infty}^{\infty} \gamma^\delta A''$ とおく。A は γ に関して有限生成であるから, $A \cap G_1$ もそうである。$\mathbb{R}_1(p)$ は単項ideal整域であるから, 定理3.11によって, A の γ-不変部分群 V があって, $V \cap (A \cap G_1) = \{0\}$ で $A/(V \oplus (A \cap G_1) \oplus \tilde{A}')$ であるから, $G/(V + G_1)$ は有限である。故に G_1 は γ に関して有限生成ではない。$\mathbb{R}_1(p)$-$rank(G_1) = r$ のとき, G/G_1 は $\mathbb{R}_1(p)$-torsion群である。$\mathbb{R}_1(p)$-$rank(G_1) = r_1 < r$ のとき, G_1 に対して上の議論をくりかえす。このとき G_1 は直和 $G_1 = \{\oplus_1^{r_1} \mathbb{R}_1(p) f_i\} \oplus G_1'$ に分解される。ここに G_1' は無限群である。$\tilde{G}_1'$ は $G_1 = \{\oplus_1^{r_1} \mathbb{R}_1(p) f_i\} \oplus \tilde{G}_1'$ をみたす部分群で, G_1'' は $\tilde{G}_1'/G_1''$ が有限となる部分群とする。$G_2 = \sum_{-\infty}^{\infty} \gamma^\delta G_1''$ とおく。このとき $\mathbb{R}_1(p)$-$rank(G_2) < r_1$ のとき, 同じ議論をくりかえす。$\mathbb{R}_1(p)$-$rank(G) < \infty$ であるから, 有回のうちに補題の結論がえられる。//

<u>定理5.32の証明</u>. G_0 は補題5.34のものとする。$X/ann(X, G_0)$ は指標群 G_0 をもつ。証明をわかり易くするために, $X/ann(X, G_0)$ を X に, G_0 を G に置き換える。故に, $G = \{\oplus_1^r \mathbb{R}_1(p) f_i\} \oplus G'$ と直和分解される($\because$ 補題3.4(ii)). $G/\oplus_1^r \mathbb{R}_1(p) f_i$ は $\mathbb{R}_1(p)$-torsion群であることに注意する。

$$W^- = \oplus_{i=1}^r \{\oplus_{\delta=1}^{\infty} \gamma^{-\delta} \langle f_i \rangle\}, \qquad W^+ = \oplus_{i=1}^r \{\oplus_{\delta=0}^{\infty} \gamma^{\delta} \langle f_i \rangle\}$$

とおくと, $\oplus_1^r \mathbb{R}_1(p) f_i = W^- \oplus W^+$ である。$F^- = ann(X, W^-)$, $F^+ = ann(X, W^+)$ とすれば,

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

(1) $X = F^- + F^+$.

$H = ann(X, W^- \oplus W^+)$ とおくと，$F^- \cap F^+ = H$ をうる。G' は無限群であるから，H も無限で，σ-不変である。$F_1^- = ann(X, W^- \oplus G')$，$F_1^+ = ann(X, W^+ \oplus G')$ とすると，$F_1^- + F_1^+ = ann(X, G')$ で，次が成立する；

(2) $F^- = F_1^- + H$, $\quad F^+ = F_1^+ + H$,

(3) $F^- \supset \sigma^{-1}F^- \supset \cdots \supset \bigcap_0^\infty \sigma^n H$, $\quad F^+ \supset \sigma F^+ \supset \cdots \supset \bigcap_0^\infty \sigma^n F^+ = H$,

(4) $F^-/\sigma^{-1}F^-$, $\quad F^+/\sigma F^+$ は共に有限群である。

(1),(2) から，$X = F_1^- + F_1^+ + H$ である。(H, σ) の dual は $(G/\oplus_1^r \mathbb{R}_1(p)f_i, \gamma)$ である。$G/\oplus_1^r \mathbb{R}_1(p)f_i$ は $\mathbb{R}_1(p)$-torsion 群であるから，それの γ による軌道は有限である。これは $h(\sigma_{|H}) = 0$ を意味する。故に定理4.[illegible] が成立する。組 (F^-, F^+, H) は (P4.5) の条件をみたしている。故に (P4.7), (P4.8) によって，X に次をみたす部分群 B^-, B^+ が存在する；

(1)′ $X = B^- \oplus B^+ \oplus H$ $\quad$ ((1) と (2)′ による)

(2)′ $F^- = B^- \oplus H$, $\quad F^+ = B^+ \oplus H$,

(3)′ $B^- \supset \sigma^{-1}B^- \supset \cdots \supset \bigcap_0^\infty \sigma^{-j}B^- = \{0\}$

$\quad B^+ \supset \sigma B^+ \supset \cdots \supset \bigcap_0^\infty \sigma^j B^+ = \{0\}$,

(4)′ $B^-/\sigma^{-1}B^-$, $\quad B^+/\sigma B^+$ は共に有限である。

$\tilde{G}' = ann(G, B^- \oplus B^+)$ とおくと，(1)′ によって $G = \{\oplus_1^r \mathbb{R}_1(p)f_i\} \oplus \tilde{G}'$ が成立する。(1)′, (4)′ によって $(B^- + \sigma^{-(k-1)}B^+)/(B^- \oplus B^+)$ $(k \geq 1)$ は有限である。それの指標群は $\tilde{G}'/\bigcap_0^{k-1}\gamma^j\tilde{G}'$ である（故に有限群である）。補題 5.34 (iii) によって，$G/\sum_{-\infty}^\infty \gamma^i(\bigcap_0^{k-1}\gamma^j\tilde{G}')$ は $R_1(p)$-torsion 群である。補題 5.33 によって $G/\sum_{-\infty}^\infty \gamma^{kj}\tilde{G}'$ は $R_k(p)$-torsion 群である。

$$A_k^- = \bigcap_{j=0}^\infty \sigma^{kj}(B^- \oplus B^+), \quad A_k^+ = \bigcap_{j=0}^\infty \sigma^{-kj}(B^- \oplus B^+) \quad (k \geq 1)$$

とおく。(3)′ によって $A_k^- + A_k^+ = B^- \oplus B^+$ で，簡単な計算によって $A_k^- \cap A_k^+ = ann(X, \sum_{-\infty}^\infty \gamma^{kj}\tilde{G}')$．$H_k = A_k^- \cap A_k^+$ とおく。(H_k, σ^k) の dual は $(G/\sum_{-\infty}^\infty \gamma^{kj}\tilde{G}', \gamma^k)$ で $G/\sum_{-\infty}^\infty \gamma^{kj}\tilde{G}'$ は $\mathbb{R}_k(p)$-torsion 群であるから，$h(\sigma^k_{|H_k}) = 0$ である。明らかに，$A_k^- \supset \sigma^{-k}A_k^- \supset \cdots \supset \bigcap_0^\infty \sigma^{-kj}A_k^- = H_k$

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

である。$A_k^-/\sigma^{-k}A_k^-$ は有限である。実際に，$A_k^-/\sigma^{-k}A_k^- \cong \{A_k^- + \sigma^{-k}(B^-\oplus B^+)\}/\sigma^{-k}(B^-\oplus B^+)$ であるから，$A_k^-/\sigma^{-k}A_k^-$ は有限群 $(B^- + \sigma^{-k}B^+)/\sigma^{-k}(B^-\oplus B^+)$ の或る部分群に同型である。A_k^+ についても A_k^- と同じような性質をもつことが示される。組 (A_k^-, A_k^+, H_k) に対して，再び (P4.8) を使ったとき，次をみたす部分群 B_k^-, B_k^+ をみつけることができる；

$A_k^- = B_k^- \oplus H_k$,　$A_k^+ = B_k^+ \oplus H_k$,

$B_k^- \supset \sigma^{-k}B_k^- \supset \cdots \supset \bigcap_{j=0}^{\infty}\sigma^{-kj}B_k^- = \{0\}$,

$B_k^+ \supset \sigma^{k}B_k^+ \supset \cdots \supset \bigcap_{j=0}^{\infty}\sigma^{kj}B_k^+ = \{0\}$,

$B_k^-/\sigma^{-k}B_k^-$, $B_k^+/\sigma^{k}B_k^+$ は共に有限群である。

明らかに $H_1 \subset H_k$, $A_1^- \subset A_k^-$, $A_1^+ \subset A_k^+$ $(\forall k \geqq 1)$ である。このとき $B_1^- \subset B_k^-$, $B_1^+ \subset B_k^+$ $(k \geqq 1)$ がえられる（実際には (P4.8) の証明のように求める)．$X = B^- \oplus B^+ \oplus H = (A_k^- + A_k^+) \oplus H$ であるから，$H_1 = H_k$, $B_1^- = B_k^-$, $B_1^+ = B_k^+$ $(k \geqq 1)$ で $\bigcap_{j=-\infty}^{\infty}\sigma^{kj}(B_1^- \oplus B_1^+) = \{0\}$. $C = H_1 \oplus H$ とすれば，$X = B_1^- \oplus B_1^+ \oplus C$ で $h(\sigma_{|C}) = 0$．定理は証明された。//

§6 自己同型を伴う（一般の）群の構造

この§では自己同型を伴うコンパクト非可換群の構造を調べることが目的である。X はコンパクト群，σ は X 上の自己同型とする。(X, σ) のエルゴード性は仮定しない。

> 定理 6.1 (pp. 88〜93, [78]) X に次をみたす正規部分群 A, B が存在する；
>
> (i) A は X の中心群 Z_X の単位元の連結成分，
>
> (ii) B は $B'/Z = (\bigotimes_{i\in I} L_i')/Z$ に同型，ここに L_i $(i\in I)$ は単連結コンパクト単純Lie群で Z は B' の中心群 $Z_{B'}$ の部分群である，
>
> (iii) $X = AB$.

次は定理 6.1 から容易にえられる。定理 6.1 (i) によって，

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

$\sigma(A) = A$ は明らかである。

(P6.1) Z_B は B の中心群とする。このとき
(i) B/Z は $B'/Z_B = \otimes_{i \in I} (L'_i Z_B'/Z_{B'})$ に同型,
(ii) B/Z は直積分解 $B/Z_B = \otimes_{i \in I} L^{(i)}$ をもつ, ここに $L^{(i)} = L_i Z_B/Z_B$ で, L_i は B に含まれる単連結コンパクト単純Lie群である,
(iii) B/Z_B は中心をもたない,
(iv) Z_B は完全不連結で, X の正規部分群,
(v) Z_B は直積分解 $Z_B = \Pi_{i \in I} Z_i$ をもつ, Z_i は L_i の中心群である,
(vi) Z_B は X の中心群に含まれる,
(vii) X/AZ_B は B/Z_B に同型で, $AZ_B = Z_X$ である。

(P6.2) $\varphi(xZ_B) = xZ_X$ $(x \in B)$ によって, 写像 φ を定義するとき, $\varphi: B/Z_B \to X/Z_X$ は同型である。このとき $\sigma(B) = B$ で, $(X/Z_X, \sigma)$ は $(B/Z_B, \sigma)$ に同型である。

(証明)
(P6.2)(vii) によって, 明らかに φ は同型写像である。$\psi(xZ_B) = \sigma(x)\sigma(Z_B)$ $(x \in B)$ とおくと, $\psi: B/Z_B \to \sigma(B)/\sigma(Z_B)$ は同型写像である。B は X で正規であるから, $\sigma(Z_B)(\sigma(B) \cap B)/\sigma(Z_B)$ は $\sigma(B)/\sigma(Z_B)$ の正規部分群である。(P6.2)(ii) によって, $B/Z_B = \otimes_{i \in I} L^{(i)}$ であるから,

$$\sigma(B)/\sigma(Z_B) = \otimes_{i \in I} \psi L^{(i)},$$

定理5.7によって, I の部分集合 I_0 があって $\sigma(Z_B)(\sigma(B) \cap B)/\sigma(Z_B) = \otimes_{i \in I_0} \psi L^{(i)}$ と表わすことができる。

$$\sigma(B)/\sigma(Z_B) = \{\otimes_{i \in I_0} \psi L^{(i)}\} \otimes \{\otimes_{i \notin I_0} \psi L^{(i)}\}$$

であるから,

$$\begin{aligned} \sigma(B)B/\sigma(Z_B)B &\cong \sigma(B)/\sigma(Z_B)(\sigma(B) \cap B) \\ &\cong \{\sigma(B)/\sigma(Z_B)\}/\{\sigma(Z_B)/(\sigma(B) \cap B)/\sigma(Z_B)\} \cong \otimes_{i \notin I_0} \psi L^{(i)}. \end{aligned}$$

D は $A \otimes B$ から X への自然な射影の核とする。このとき同型写像 $\varphi_1: (A \otimes B)/D \to X$ をみつけることができる。次の diagram が成立するように射影 π_0, π_1, π_2 を定義する;

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

$$\begin{tikzcd} A\otimes B \arrow[r, "\pi_0"] \arrow[d, "\pi_1"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & A \arrow[d, "\pi_2"] \\ (A\otimes B)/D \arrow[r, "F"'] & A/\pi_0(D) \end{tikzcd}$$

写像Fは $F\pi_1(a,b) = \pi_2\pi_0(a,b)$ $(a\in A,\ b\in B)$ をみたすように定義することができる。$\sigma' = \varphi_1^{-1}\circ\sigma\circ\varphi_1$ とおくと，σ' は $(A\otimes B)/D$ の自己同型である。$F(\sigma'(\{e\}\otimes B)D/D)$ は可換でFの核は $(\{e\}\otimes B)D/D$ であるから，

$$\sigma'[(\{e\}\otimes B)D/D][(\{e\}\otimes B)D/D]/[(\{e\}\otimes B)D/D]$$

も可換である。故に $\sigma(B)B/B$ は可換．従って $\sigma(B)B/\sigma(Z_B)B$ は単位元に等しい; i.e. $\sigma(B)\subset\sigma(Z_B)B$. 両辺の連結成分を取るとき，$\sigma(B)$は連結であるから，$\sigma(B)\subset B$. σ を σ^{-1}でおきかえて同じ方法によって，$\sigma^{-1}(B)\subset B$ がえられる。故に $\sigma(B)=B$. 後半はφの定義から明らかである。//

> (P6.3) B/Z_B に次をみたすσ-不変正規部分群M_1, M_2が存在する; M_1 はσによる *Bernoulli*群の直積，M_2 はσ-不変半単純正規部分群の直積で，B/Z_B は直積分解 $B/Z_B = M_1\otimes M_2$ をもつ。

(証明)

(P6.1)(ii)によって，$B/Z_B = \otimes_{i\in I} L^{(i)}$. $L^{(i)}$は代数的に単純である; i.e. $L^{(i)}$は真の正規部分群をもたない。

$$M_1 = \otimes\{L^{(i)} : \sigma^n L^{(i)} \neq L^{(i)},\ \forall n\neq 0\},$$
$$M_2 = \otimes\{L^{(i)} : \sigma^n L^{(i)} = L^{(i)},\ \exists n\neq 0\}.$$

とおく。定理5.7によって，$B/Z_B = M_1\otimes M_2$. $i\in I$ に対して，$\sigma L^{(i)} = L^{(j)}$ なる $j\in I$ が存在する(∵定理5.7による). 故に $M_1 = \otimes_{n=-\infty}^{\infty}\sigma^n\{\otimes_{i\in I_1} L^{(i)}\}$. ここに$I_1$は$I$の部分集合である。故に$M_1$は$\sigma$による*Bernoulli*群の直積である。$M_2$は$\sigma$-不変半単純Lie群$U_\iota$の直積; i.e. $M_2 = \otimes_\iota U_\iota$ である。//

> (P6.4) X_0はXの$\{e\}$の連結成分とし，X_0の次元は有限とする。このとき完全不連結正規部分群Hを次をみたすようにえらぶこ

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

とができる; X_0H は X で開正規部分群で $\sigma(X_0H)=X_0H$ が成立する。

(証明)

$X_0\neq\{e\}$ とすれば, $g(X_0)\neq\{I\}$ なる表現 $g\in X^*$ が存在する。$H^{(1)}$ は g の核とすると, $H^{(1)}$ は X の正規部分群で $X_0H^{(1)}=g^{-1}(g(H))$ である。$g(X)$ の単位元の連結成分を $g(X)_0$ で表わすとき, $g(X_0)\subset g(X)_0$ で $g(X)_0/g(X_0)$ は連結である。$g(X)_0/g(X_0)$ は $g^{-1}g(X)_0/X_0$ の剰余群であることは明らか。故に $g(X)_0/g(X_0)$ は完全不連結; i.e. $g(X_0)=g(X)_0$. $g(X)$ はLie群であるから, $g(X_0)$ は $g(X)$ で開部分群である。故に $X_0H^{(1)}$ は X で開集合である。$H_0^{(1)}$ は $H^{(1)}$ の $\{e\}$ での連結成分とする。明らかに, $H_0^{(1)}\subsetneq X_0$; i.e. $\dim(H_0^{(1)})<\dim(X_0)$. 再び $f\in X^*$ を次のようにえらぶ; $f(H_0^{(1)})\neq\{I\}$ そして $f'=f_{|H^{(1)}}$ とおく。f' の核 $H^{(2)}$ は X の正規部分群であることに注意する。実際に, $H^{(2)}$ は部分群である。$\forall x\in X$ に対して $xH^{(1)}x^{-1}=H^{(1)}$ で

$$f'(xhx^{-1})=f'(x)f'(h)f'(x^{-1})=I\quad(h\in H^{(2)})$$

であるから, $xhx^{-1}\in H^{(2)}$; i.e. $xH^{(2)}x^{-1}\subset H^{(2)}$ $(\forall x\in X)$. $f'(H_0^{(1)})$ は $f'(H^{(1)})$ で開部分群であるから, $H_0^{(1)}H^{(2)}=f'^{-1}(f'(H_0^{(1)}))$ は $H^{(1)}$ で同様に開部分群である。故に $H^{(1)}/H_0^{(1)}H^{(2)}$ は有限である。$X_0H^{(1)}/X_0H^{(2)}$ は $H^{(1)}/H_0^{(1)}H^{(2)}$ の剰余群であることは明らか。故に, $X_0H^{(2)}$ は $X_0H^{(1)}$ で開部分群, それ故に X で開部分群である。$H_0^{(2)}$ は $H^{(2)}$ の $\{e\}$ での連結成分とする。$\dim(H_0^{(2)})<\dim(H_0^{(1)})$ である。上の方法を $H_0^{(2)}$ に適応して, くりかえすとき, X は次をみたす正規部分群の列 $\{H_0^{(k)}\}$ をもつ; $\dim(X_0)>\dim(H_0^{(1)})>\dim(H_0^{(2)})>\cdots$ で, $\forall k\geq 1$ に対して $X_0H_0^{(k)}$ は X の正規部分群である。$\dim(X_0)<\infty$ であるから, $H^{(n)}$ が完全不連結となる $n\geq 1$ が存在する。

$$D=H^{(n)},\quad A_m=D\sigma(D)\cdots\sigma^m(D)\quad(m\geq 1)$$

とおき, $\pi: X\to X/X_0$ は自然な射影とする。π は開写像であるから, $\{\pi(A_m)\}$ は X/X_0 の開部分群の増大列である。$\dot{K}=\bigcup_{m\geq 1}\pi(A_m)$ とおく。$\dot{K}$ はコンパクト, 故に $\dot{K}=\pi(A_M)$ なる $M>0$ が存在する。D は完全不連結であるから, A_M もそうである。$\sigma(\dot{K})=\dot{K}$ を示す; μ を X/X_0 の確率Haar測度とする。このとき

$$\mu\left(\bigcup_{j\geq 1}\sigma^j(\dot{K}\setminus\sigma\dot{K})\right)=\sum_{j\geq 1}\mu(\dot{K}\setminus\sigma\dot{K})$$

によって $\sigma\dot{K} \subsetneqq \dot{K}$ のとき，上の測度は無限大になる。このことは不可能である。故に $\sigma(X_0 A_M) = X_0 A_M$ をうる。//

注意 (X, σ) がエルゴード的であれば，(P6.4)において，$X = X_0 H$ が成立する。

(P6.5) X_0，H は(P6.4)のものとする。X_0 が特に可換であれば，H は $\sigma(H) = H$ をみたすようにえらぶことができる。

(証明)

X_0 は可換であるから，$[X_0 H, X_0 H] = [X_0, X_0][H, H] = [H, H]$ が成立する。$X_0 H/[H, H]$ は可換群で

$$X_0 H/[H, H] = \{X_0[H, H]/[H, H]\}\{H/[H, H]\}$$

であるから，補題2.14によって，σ-不変部分群 $H_t/[H, H]$ が存在して

$$X_0 H/[H, H] = \{X_0[H, H]/[H, H]\}\{H_t/[H, H]\}$$

で $H_t/[H, H]$ は完全不連結であるようにえらぶことができる。$\sigma(H_t) = H_t$ で H_t は完全不連結である。この H_t が求めているものである。//

X_0 は単位元の連結成分，X_0 は可換であると仮定して，G を X_0 の指標群とする。γ は σ によって導入された G 上の自己同型とする($((\gamma g)(x) = g(\sigma x)$，$g \in G$，$x \in X$)。$C(X_0)$ は複素数値連続関数の全体とする。それは一様ノルムによって Banach 空間になることは明らか。X_0 の指標 $g \in G$ を $\langle \cdot, g \rangle$ によって表わし，それの全体を $\hat{G}$ で表わすことにする。$\hat{G}$ は $C(X_0)$ の中で離散的であることは明らかである。

$$\langle x, \phi_y g \rangle = \langle y x y^{-1}, g \rangle \quad (g \in G,\ y \in X)$$

によって，$\hat{G}$ 上の自己同型 ϕ_y を定義する。

(P7.6) (i) ϕ_y は y に関して連続，(ii) $g \in G$ に対して，

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

$\{\langle\cdot,\psi_y g\rangle : y\in X\}$は有限である。

(証明)

ψ_yの連続性は明らか。$g\in G$に対して

$$\sup_{x\in X_0}|\langle x,\psi_y g\rangle-\langle x,g\rangle|\to 0\quad(y\to e)$$

がえられる。$\varphi_g(y)=\langle\cdot,\psi_y g\rangle$ ($g\in G$, $y\in X$) とおくと，$\varphi_g : X\to G$は連続である($\because$ ψ_yの連続性より)．故に $\varphi_g(X)\subset\hat{G}$. $\varphi_g(X)$は有限である。//

(P6.7) $g\in G$に対して，次をみたすXの開正規部分群U_gが存在する; $U_g\supset X_0$で$\psi_y(g)=g$ ($\forall y\in U_g$) をみたす。

(証明)

(P6.6)(ii)によって，$\{\psi_y(g) : y\in X\}$は有限であるから，(P6.6)(i)から，Xに$X_0\subset U_g'$, $\psi_y(g)=g$ ($\forall y\in U_g'$)をみたす開部分群U_g'が存在する。X/X_0は完全不連結であることに注意する。このとき $X_0\subset U_g\subset U_g'$ なるXの開正規部分群U_gがみつかる。このU_gが求めるものである。//

G_Aは condition (A) をみたす(G,γ)の最大部分群であるとする。

(P6.8) XにX_0を含むσ-不変開正規部分群X_1が存在して，$\psi_y(G_A)=G_A$ ($\forall y\in X_1$) をみたす。

(証明)

$0\neq g\in G_A$ に対して，$p(\gamma)g=0$ なる $0\neq p(x)\in\mathbb{Z}[x]$ が存在することが分かる。$p(x)$の次数は $k>0$であるとする。(P6.7)によって，開正規部分群Vが存在して，$\forall v\in V$に対して，$\psi_v(\gamma^j g)=\gamma^j g$ ($0\leq j\leq k$) をみたす。Gは torsion free であるから，$\forall j\in\mathbb{Z}$, $\forall v\in V$ に対して $\psi_v(\gamma^j g)=\gamma^j g$が成立する。コンパクト性によって，$X_1=V\sigma(V)\cdots\sigma^m(V)$が$\sigma$-不変となる $m>0$が存在する。故に$\forall y\in X_1$に対して $\psi_y(g)=g$. gはG_Aの中で任意であるから，結論をうる。//

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

$\boxed{\text{注意}}$ (X, σ) がエルゴード的であれば，(P6.8)において，$X = X_1$ が成立する。

(P6.9) X_1 は(P6.8)のものとする。このとき次をみたす X_1 の σ-不変正規部分群 $K (\subset X_0)$ が存在する；
(i) K は指標群 G/G_A をもち，condition (B) をみたす，
(ii) X_0/K は指標群 G_A をもつ。

(証明)
(P6.8)によって，$\varphi_y(G_A) = G_A \ (\forall y \in X_1)$ であるから，$K = \mathrm{ann}(X_0, G_A)$ は X_1 で正規である。K, X_0/K はそれぞれ指標群 G/G_A, G_A をもつ。G/G_A は condition (B) をみたすことは明らかである。//

(P6.10) X_1, K は(P6.9)のものとする。このとき σ-不変正規部分群の列 $X_0 \supset X^{(1)} \supset X^{(2)} \supset \cdots$ が存在して次をみたす；
(i) $\bigcap X^{(i)} = K$,
(ii) $X_0/X^{(i)}$ は solenoidal 群である。

(証明)
(P6.9)によって，X_0/K は指標群は condition (A) をもつ。g は X_0/K の指標とする。このとき $\{\varphi_y(g) : y \in X_1\}$ は(P6.6)(ii)によって，有限である。故に $\{\gamma^j \varphi_y(g) : j \in \mathbb{Z}, y \in X_1\}$ によって生成された G の部分群の階数は有限であるから，結論は容易にえられる。//

§7 エルゴード的自己同型の Bernoulli 性

X はコンパクト群で，μ は確率 Haar 測度とする。(X, μ) は Lebesgue 空間である。σ は X 上の自己同型とする。X の可測分割 ξ があって，$\{\sigma^n \xi : n \in \mathbb{Z}\}$ は μ-独立，$\bigvee_{-\infty}^{\infty} \sigma^n \xi$ は各点分割になるとき，(X, σ, μ) は Bernoulli 系であるという。σ に

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

よるBernoulli群は確率Haar測度のもとでBernoulli系であることは明らかである。

定理 7.1 (Orstein [46]). Bernoulli系のhomomorphic imageはBernoulli系である。

定理 7.2 (Orstein [45]). $\mathbb{B}$はXのBorelクラスとし$\{\mathbb{B}_n\}$は部分Borelクラスで$\mathbb{B}_n \subset \mathbb{B}_{n+1}$, $\sigma\mathbb{B}_n = \mathbb{B}_n$, $\vee_1^\infty \mathbb{B}_n = \mathbb{B}$をみたしているとする。このとき各商空間$(X/\mathbb{B}_n, \sigma_n, \mu_n)$がBernoulli系であれば、$(X, \mathbb{B}, \sigma, \mu)$もBernoulli系である。

定理 7.3 Xはsolenoidal群(確率Haar測度をμとする), σはX上の自己同型とする。(X, σ, μ)がエルゴード的であれば、(X, σ, μ)はBernoulli系である。

この定理の証明は準備を必要とするために、この§の最後に証明を与える。以後考える力学系は確率不変測度をもっているとし、コンパクト群の場合は確率Haar測度μを扱うことにする。

定理 7.4. Xは完全不連結コンパクト群で、σはX上の自己同型とする。(X, σ, μ)がエルゴード的であれば、(X, σ, μ)はBernoulli系である。

(証明)

定理5.1によって、Xは直和分解$X = \otimes_{j \geq 0} X_j$をもつ。各$X_j$は$\sigma$-不変正規部分群で、$X_j$ $(j \geq 1)$はσによるBernoulli群であるから、それらはBernoulli系である。定理の結論をうるために、可換群X_0のBernoulli性を示すことだけが残っている。補助定理5.2によって、X_0にσ-不変部分群の列$X_0 = F_0 \supset F_1 \supset \cdots \supset \cap F_n = \{e\}$が次をみたすようにとれる; $\forall n \geq 1$に対して、F_nにσ-不変部分群の減少列$\{Y_{n,i}\}$があって、$\cap_i Y_{n,i} = F_{n+1}$, $F_n / Y_{n,i}$

$(i \geqq 1)$ は σ による simple Bernoulli 群である。従って $F_n/Y_{n,i}$ は Bernoulli 系で，定理 7.2 によって F_n/F_{n+1} が Bernoulli 系であることがえられる。次の補題 7.5 によって，$(F_0/F_1 \otimes F_1/F_2, \Delta)$ は $(F_0/F_2, \sigma)$ と測度的に同型となる skew product 変換 Δ が存在する。更に補題 7.6 によって，$(F_0/F_1 \otimes F_1/F_2, \Delta)$ は Bernoulli 系である。故に $(F_0/F_1, \sigma)$ は Bernoulli 系．帰納的にこの方法をくりかえすとき，$(F_0/F_n, \sigma) = (X_0/F_n, \sigma)$ $(n \geqq 1)$ は Bernoulli 系．定理 7.2 によって (X_0, σ) は Bernoulli 系である。//

N は X の部分群，X/N は right coset space とする。μ_N は N 上の確率 Haar 測度とし，$\mu_{X/N} = \mu\pi^{-1}$ とおく。ここに $\pi : X \to X/N$ は自然な射影である。$\phi : X/N \to X$ は Borel branch とし，$\varphi(Nx, y) = y\phi(Nx)$，$(Nx, y) \in X/N \otimes N$ によって，写像 $\varphi : X/N \otimes N \to N$ を定義する。φ は 1-1，上への可測写像である。φ^{-1} の可測性を示す。$\mathcal{B}(X)$ は X 上のすべての有界可測関数の集合とし，$(U_\varphi h)(Nx, y) = h\varphi(Nx, y)$ $(h \in \mathcal{B}(X))$ によって線型写像 $U_\varphi : \mathcal{B}(X) \longrightarrow \mathcal{B}(X/N \otimes N)$ を定義する。

$$\mathcal{B}(N)' = \{h_1' : h_1'(x) = h_1(\eta x),\ h_1 \in \mathcal{B}(N)\}$$

とおく。ここに $\eta(x) = x\phi(Nx)^{-1}$ $(x \in X)$ である。h_1' は X の有界可測関数で，

$$(U_\varphi h_1')(Nx, y) = h_1'\varphi(Nx, y) = h_1'(y\phi(Nx)) = h_1\eta(y\phi(Nx))$$
$$= h_1(y\phi(Nx)\phi(N\phi(Nx))^{-1}) = h_1(y\phi(Nx)\phi(Nx)^{-1}) = h_1(y).$$

故に $U_\varphi\mathcal{B}(N)' = \mathcal{B}(N)$．$\mathcal{B}(X/N)$, $\mathcal{B}(N)$ は $\mathcal{B}(X/N \otimes N)$ の部分集合とみるとき，$\mathcal{B}(X/N)\mathcal{B}(N) = U_\varphi\mathcal{B}(X/N)U_\varphi\mathcal{B}(N)' \subset U_\varphi\mathcal{B}(X)$．故に $U_\varphi\mathcal{B}(X)$ は $X/N \otimes N$ の筒集合の定義関数の全体を含んでいる。このことより φ^{-1} は可測である。写像 φ は同型写像 $(X/N \otimes N, \mu_{X/\mu} \otimes \mu_N) \xrightarrow{\varphi} (X, \mu)$ である。φ の保測性が示されれば十分である。$E_0 (\subset X/N)$ は Borel 集合とすると，$\mu_{X/N}(E_0) = \mu(\varphi(E_0 \otimes N))$．$^\forall x \in X$ に対して，$\mu(\varphi(X/N \otimes xE_1)) = \mu(xE_1\phi(X/N)) = \mu(E_1\phi(X/N)) = \mu(\varphi(X/N \otimes E_1))$ であるから，$\mu(\varphi(X/N \otimes \cdot))$ は N 上の確率 Haar 測度．故に Haar 測度の一意性によって，$\mu_N(\cdot) = \mu(\varphi(X/N \otimes \cdot))$．

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

$\mu(\varphi(E_0\otimes N))>0$ なるE_0を固定して，$\mu_{E_0}(\cdot)=\mu\varphi(E_0\otimes\cdot)$ とおくと，μ_{E_0}はN上のHaar測度，故に$\gamma_{E_0}>0$があって$\mu_{E_0}(\cdot)=\gamma_{E_0}\mu_N(\cdot)$が成立する。故に$\gamma_{E_0}=\mu_{E_0}(N)=\mu_{X/N}(E_0)$. すべての筒集合$E_0\otimes E_1$に対して，$\mu\varphi(E_0\otimes E_1)=\mu_{E_0}(E_1)=\gamma_{E_0}\mu_N(E_1)=\mu_{X/N}(E_0)\mu_N(E_1)$; i.e. φは保測である。

Nはσ-不変とする。$\alpha(Nx)=(\sigma\varphi(Nx))\varphi(Nx)^{-1}$, $Nx\in X/N$ とおく。$\alpha: X/N\to N$ はBorel写像である。

$$s(Nx,y)=(\sigma_{|X/N}(Nx),\ \sigma_{|N}(y)\alpha(Nx)),\quad (Nx,y)\in X/N\otimes N$$

によって skew product 変換$s: X/N\otimes N\to X/N\otimes N$を定義する。明らかに$s$は$\mu_{X/N}\otimes\mu_N$-保測である。次がえられた。

補題7.5. Nはσ-不変部分群とする。このとき，1-1両側可測変換$\varphi: X/N\otimes N\to X$と$\mu_{X/\mu}\otimes\mu_N$-保測 skew product 変換$s: X/N\otimes N\to X/N\otimes N$が存在して，$(X/N\otimes N, s, \mu_{X/N}\otimes\mu_N)$と$(X,\sigma,\mu)$は$\varphi$によって同型となるようにできる。

補題7.6. 特にNはσによるBernoulli群であるとする。このとき$(X/N\otimes N, s, \mu_{X/N}\otimes\mu_N)$は$(X/N\otimes N, \sigma_{|X/N}\otimes\sigma_{|N}, \mu_{X/N}\otimes\mu_N)$に同型である。

（証明）

仮定によって，$N=\otimes_{-\infty}^{\infty}\sigma^n N'$（$N'$は正規部分群）と表わされる。$s(Nx,y)=(\sigma_{|X/N}(Nx),\sigma_{|N}(y)\alpha(Nx))$であるから，$\varphi(Nx)$は$(\varphi_i(Nx))_{-\infty}^{\infty}$である。$f=(f_i)_{-\infty}^{\infty}: X/N\to N$の可測写像とし，$g(Nx,y)=(Nx,\ yf(Nx))$とするとき，

$$g^{-1}\circ s\circ g(Nx,y)=(\sigma_{|X/N}(Nx),\ \sigma_{|N}(y)[f\sigma_{|X/N}(Nx)]^{-1}\alpha(Nx)\sigma_{|N}\alpha(Nx)).$$

$[f\sigma_{|X/N}(Nx)]^{-1}\alpha(Nx)\sigma_{|N}\alpha(Nx)=e\ \ (Nx\in X/N)$ (*) とするとき，$g^{-1}\circ s\circ g=\sigma_{|X/N}\otimes\sigma_{|N}$ をうる。故に(*)が成立するようにfをみつけることが必要である。(*)は次の方程式の集合に同値である；$\alpha_i(Nx)f_{i+1}(Nx)=f_i\sigma_{|X/N}(Nx)$ $(i\in\mathbb{Z})$. 故に

$$f_0(Nx)=e,$$

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

$f_1(Nx) = [\alpha_0(Nx)]^{-1}$,

$f_i(Nx) = [\alpha_0\sigma^{i-1}_{|X/N}(Nx)\alpha_1\sigma^{i-2}_{|X/N}(Nx)\cdots\alpha_{i-1}(Nx)]^{-1}$ $(i \geq 1)$

$f_i(Nx) = \alpha_{-1}\sigma^{i}_{|X/N}(Nx)\alpha_{-2}\sigma^{i+1}_{|X/N}(Nx)\cdots\alpha_i\sigma^{-1}_{|X/N}(Nx)$ $(i<0)$

とおくことによってえられた $f=(f_i)_{-\infty}^{\infty}$ が求めるものである。//

補題 7.7. $\bar{N}$はコンパクト群，$\bar{\sigma}$は$\bar{N}$上の自己同型で(N,σ)は$(\bar{N},\bar{\sigma})$の*homomorphic image*であるとする。このとき準同型$\bar{\varphi}$と，$\sigma_{|X/N}$と$\bar{\sigma}$によって構成される$X/N\otimes\bar{N}$上の*skew product*変換$\bar{s}$が存在して，次の*diagram*が可換となるようにできる;

$$\begin{tikzcd} X/N\otimes\bar{N} \arrow[r, "\bar{s}"] \arrow[d, "\bar{\varphi}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & X/N\otimes\bar{N} \arrow[d, "\bar{\varphi}"] \\ X/N\otimes N \arrow[r, "s"'] & X/N\otimes N \end{tikzcd}$$

(証明)

(N,σ)と$(\bar{N}/W,\bar{\sigma})$が同型となるような$\bar{\sigma}$-不変正規部分群Wが存在する。$\bar{N}/W$からNへの同型写像をφ_1，$\bar{N}$から$\bar{N}/W$への射影をπで表わす。$\bar{\varphi}(Nx,\bar{y})=(Nx,\varphi_1\pi(\bar{y}))$, $(Nx,\bar{y})\in X/N\otimes\bar{N}$, によって準同型$\bar{\varphi}: X/N\otimes\bar{N}\to X/N\otimes N$を定義し，$\psi_1: \bar{N}/W\to\bar{N}$をBorel *branch* $(W\psi(Wx)=Wx)$とする。$\delta(Nx)=\psi_1\varphi_1^{-1}\alpha(Nx)$ $(Nx\in X/N)$とおく。ここにαは補題7.5の*skew product*変換sに表われるBorel写像である。このとき$\delta: X/N\to\bar{N}$はBorel写像である。$X/N\otimes\bar{N}$上の*skew product*変換$\bar{s}$を次のように定義する;

$\bar{s}(Nx,\bar{y})=(\sigma_{|X/N}(Nx),\bar{\sigma}(\bar{y})\delta(Nx))$. このとき

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}\bar{s}(Nx,\bar{y}) &= (\sigma_{|X/N}(Nx),\varphi_1\pi\bar{\sigma}(\bar{y})\varphi_1\pi\delta(Nx))\\ &= (\sigma_{|X/N}(Nx),\sigma_{|N}\varphi_1\pi(\bar{y})\alpha(Nx)) = s(Nx,\varphi_1\pi(\bar{y})) = s\bar{\varphi}(Nx,\bar{y}).\end{aligned}$$ //

補題 7.8. Xはコンパクト群で，X_0は単位元の連結成分とする。X上の自己同型をσで表わす。σ-不変完全不連結正規部分群Hが存在して，$X=X_0H$と表わされていると仮定する。(X,σ)がエルゴード的で，X_0は可換であれば，(X_0,σ)もエルゴード的で，Hは(H,σ)がエルゴード的で$X=X_0H$をみたすようにえら

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

ぶことができる。

(証明)

X_0は可換であるから，$[X,X]=[H,H]$で$([H,H],\sigma)$はエルゴード的である(∵補題5.22による)．$X/[H,H]=(X_0[H,H]/[H,H])(H/[H,H])$は可換であるから，補題3.3によって，$(H/[H,H],\sigma)$がエルゴード性をみたすように$H/[H,H]$がえらばれる。もちろん$(X_0[H,H]/[H,H])$もエルゴード的である。次の補題7.9によって，$(H,\sigma)$はエルゴード的である。$X_0$は可換であるから，$G$を$X_0$の指標群として，$\gamma$を$\sigma$による$G$上の自己同型とする。$G_1=\mathrm{ann}(G,X_0\cap[H,H])$とすれば，$G/G_1$はtorsion群である。今，$\gamma^n g=g$なる$n\neq0$，$g\in G$が存在したとする。このとき$lg\in G_1$なる$l>0$が存在して，$\gamma^n(lg)=lg$．$(G_1,\gamma)$のdualは$(X_0/(X_0\cap[H,H]),\sigma)$で，エルゴード的であるから，$lg=0$．$g$はtorsion freeであるから，$g=0$; i.e. (X_0,σ)はエルゴード的である。//

補題7.10．Xは自己同型σをもつコンパクト群で，Nはσ-不変正規部分群とする。$(X/N,\sigma)$，(N,σ)が共にエルゴード的ならば，(X,σ)もエルゴード的である。

(証明)

(X,σ)はエルゴード的でないと仮定する。このとき$\gamma^n g=g$ $(n\neq0)$をみたす$I\neq g\in X^*$が存在する。$g'=g_{|N}$とする。(N,σ)はエルゴード的であるから，$\gamma^n g'=g'$．定理5.21によって，$g'=I$; i.e. gはX/N上のユニタリー表現$\tilde{g}$を生成する。$\tilde{\gamma}$は$\sigma_{|X/N}$によって生成された$(X/N)^*$上の写像とすると，$\tilde{\gamma}^n\tilde{g}=\tilde{g}$が成立する。$(X/N,\sigma)$はエルゴード的であるから，$\tilde{g}=I$; i.e. X上で$g=I$．これは仮定に反する。//

定理7.11．Xはコンパクト群でσはX上の自己同型とする。(X,σ,μ)がエルゴード的であれば，(X,σ,μ)はBernoulli系である。

(証明)

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

X_0は単位元eの連結成分とする。定理6.1と(P6.3)によってX_0は$X_0 = AB$で表わされ，$\sigma(A) = A$，$\sigma(B) = B$が成立する。$Y = X/B$，$Y_0 = X_0/B$とおく。$Y/Y_0 \cong X/X_0$でY_0は可換である。GはY_0の指標群とし，G_Aはcondition (A)をみたす最大部分群とする。$K = \mathrm{ann}(Y_0, G_A)$は$Y$の正規部分群である($\because$ (P6.8)と(Y, σ)のエルゴード性による)．$E = Y/K$，$E_0 = Y_0/K$とおくと，$E/E_0 \cong Y/Y_0 \cong X/X_0$で$E_0$は指標群$G_A$をもつ。(P6.10)と$(E, \sigma)$のエルゴード性によって，$\sigma$-不変正規部分群の列$E_0 \supset E^{(1)} \supset E^{(2)} \supset \cdots \supset \cap E^{(i)} = \{e\}$で，$E_0/E^{(i)}$ $(i \geq 1)$は*solenoidal*群になるようにえらぶことができる。$E_0/E^{(i)}$は$E/E^{(i)}$の単位元の連結成分である。故に(P6.4)，(P6.5)と補題7.8によって，σ-不変完全不連結正規部分群$H^{(i)}/E^{(i)}$が存在して，$E/E^{(i)} = (E_0/E^{(i)})(H^{(i)}/E^{(i)})$と表わされ，$(E_0/E^{(i)}, \sigma)$，$(H^{(i)}/E^{(i)}, \sigma)$は共にエルゴード的であるようにできる。定理7.4によって，$(H^{(i)}/E^{(i)}, \sigma)$はBernoulli系．定理7.2によって，$(E_0/E^{(i)}, \sigma)$もBernoulli系である。$E/E^{(i)}$は直積群$(E_0/E^{(i)}) \otimes (H^{(i)}/E^{(i)})$の剰余群とみることができる。故に定理7.1によって，$(E/E^{(i)}, \sigma)$はBernoulli系である。従って，$(E, \sigma) = (Y/K, \sigma)$はBernoulli系($\because$定理7.2による)．$K(\subset A)$の指標群は$G/G_A$ ($\because$ (P6.9)(i)による)．G/G_Aはcondition (B)をみたしているから，定理3.12によってKはσ-不変部分群の列$K = K_0 \supset K_1 \supset \cdots \supset \cap K_n = \{e\}$と，コンパクト可換群$\bar{K}_n$とその上の自己同型$\bar{\sigma}_n$が次をみたすように存在する；$\bar{K}_n$は$\bar{\sigma}_n$によるBernoulli群で，$(K/K_n, \sigma)$は$(\bar{K}_n, \bar{\sigma}_n)$の*homomorphic image*である。$Y/K_n$は*right coset space*とし，補題7.5のようにして$Y/K \otimes K/K_n$上に*skew product*変換Δを構成すると，$(Y/K \otimes K/K_n, \Delta, \mu_{Y/K} \otimes \mu_{K/K_n})$と$(Y/K_n, \sigma, \mu)$は測度的に同型であるようにできる。補題7.7のようにして，$Y/K \otimes \bar{K}_n$上に*skew product*変換$\bar{\Delta}$を構成すると，$(Y/K \otimes K/K_n, \Delta, \mu_{Y/K} \otimes \mu_{K/K_n})$は$(Y/K \otimes \bar{K}_n, \bar{\Delta}, \mu_{Y/K} \otimes \mu_{\bar{K}_n})$の*homomorphic image*である。$\bar{K}_n$はBernoulli群であるから，補題7.6によって，$(Y/K \otimes \bar{K}_n, \bar{\Delta}, \mu_{Y/K} \otimes \mu_{\bar{K}_n})$はBernoulli系である。故に$(Y/K_n, \sigma)$はBernoulli系．$K_n \downarrow \{e\}$であるから，$(Y, \sigma) = (X/B, \sigma)$はBernoulli系である。

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

Z_BはBの中心群とする。(P6.1)(vii)によって，$Z_X = AZ_B$．故にZ_BはXの正規部分群．(P6.2)によって，$\sigma(Z_B) = Z_B$．$AB/Z_X \cong B/Z_B$により，AB/Z_Xは中心をもたないX/Z_Xの単位元の連結成分である。故にB/Z_Bは中心をもたないX/Z_Bの正規部分群である。次の定理7.12によって，B/Z_BはσによるBernoulli群である。$X/Z_B \otimes B/Z_B$上にskew product変換を構成して，補題7.5，7.6を利用すると，$(X/Z_B, \sigma)$はBernoulli系となる。次の補題7.13によって，Bにσ-不変可換部分群Sがあって，S/Z_BがσによるBernoulli群であるようにできる。更に，補題7.14によって，コンパクト可換群$\bar{S}$と自己同型$\bar{\sigma}$が存在して，$\bar{S}$は$\bar{\sigma}$によるBernoulli群で(S, σ)は$(\bar{S}, \bar{\sigma})$のhomomorphic imageであるようにできる。X/Sはright coset spaceとすると$(X/S, \sigma)$は$(X/Z_B, \sigma)$のhomomorphic imageであるから，$(X/S, \sigma)$はBernoulli系である。補題7.5，6，7によって，$(X/S \otimes \bar{S}, \sigma_{|X/S} \otimes \bar{\sigma}) \cong (X/S \otimes \bar{S}, \bar{\Delta}) \xrightarrow{factor} (X/S \otimes S, \Delta) \cong (X, \sigma)$．故に$(X, \sigma)$はBernoulli系である。//

<u>定理7.12</u>（5.2，[82]）　X_0はコンパクト群Xの単位元の連結成分とし，X_0は中心をもたないとする。Xの自己同型をσで表わす。(X, σ)がエルゴード的であれば，X_0はσによるBernoulli群である。

<u>補題7.13</u>．Xはコンパクト群，X_0は単位元の連結成分とする（定理6.1によって，$X=AB$と表わされる）．Xの自己同型をσで表わす。(X, σ)がエルゴード的で，$B \neq \{e\}$であればBの中にσ-不変可換部分群Sが存在してS/Z_BはσによるBernoulli群とできる。

（証明）

(P6.1)によって，$B/Z_B = \otimes_{i\in I}(L_i Z_B/Z_B)$．故に，$[\Pi_{k\neq j} L_k, L_j] = \{e\}$ $(j \in \mathbb{Z})$．T_iはL_iに含まれる極大トーラス群とする。このときT_iは極大可換群である(Corollary 4.2，P152，[22])．Z_iは(P6.1)(V)のものとすると，$Z_i \subset T_i$ $(i \in \mathbb{Z})$．定理7.12を利用したとき，B/Z_BはσによるBernoulli群；i.e.

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

$\mathcal{B}/Z_B = \bigotimes_{-\infty}^{\infty}\sigma^n\{\bigotimes_{i\in I_1}(L_i Z_B/Z_B)\}$ で表わされる(ここに I_1 は添数の集合). このとき $\mathcal{S}=\prod_{-\infty}^{\infty}\sigma^n\{\prod_{i\in I_1}T_i\}$ は B の可換部分群である。$T_i Z_B/Z_B \subset L_i Z_B/Z_B$ ($i\in\mathbb{Z}$) であるから, $\mathcal{S}/Z_B = \bigotimes_{-\infty}^{\infty}\sigma^n\{\bigotimes_{i\in I_1}(T_i Z_B/Z_B)\}$; *i.e.* $\mathcal{S}/Z_B$ は Bernoulli 群である。//

<u>補題 7.14</u>. $\mathcal{S}$ は補題 7.13 のものとする。このときコンパクト可換群 $\bar{\mathcal{S}}$ とその上の自己同型 $\bar{\sigma}$ が存在して, $\bar{\mathcal{S}}$ は $\bar{\sigma}$ による Bernoulli 群で $(\mathcal{S},\sigma)$ は $(\bar{\mathcal{S}},\bar{\sigma})$ の *homomorphic image* であるようにできる。(これは定理 3.12 の特別の場合であることに注意する).

(証明)

$\mathcal{S}$ の指標群を G とし, $\sigma_{|\mathcal{S}}$ によって生成される G 上の自己同型を γ で表わす。$G_1 = ann(G, Z_B)$ は $\mathcal{S}/Z_B$ の指標群であるから, 補題 7.13 によって $G_1 = \bigotimes_{-\infty}^{\infty}\gamma^n G_2$ なる部分群 G_2 が存在する。$(\bar{G},\bar{\gamma})$ は (G,γ) の極小完備化とする。Z_B の指標群は G/G_1 であるから, G/G_1 は *torsion* 群である。故に $\bar{G} = \{g\in\bar{G} : g^m\in G, \exists m\neq 0\}$ は直積分解 $\bar{G} = \bigotimes_{-\infty}^{\infty}\bar{\gamma}^n\bar{G}_2$ をもつ。ここに $\bar{G}_2 = \{g\in\bar{G} : g^m\in G_2, \exists m\neq 0\}$. $(\bar{G},\bar{\gamma})$ の *dual* を $(\bar{\mathcal{S}},\bar{\sigma})$ とすれば, $\bar{\mathcal{S}}$ は $\bar{\sigma}$ による Bernoulli 群で, $(\mathcal{S},\sigma)$ は $(\bar{\mathcal{S}},\bar{\sigma})$ の *homomorphic image* である。//

定理 7.3 の証明だけが残っている。まず準備をする。$(X,\mathbb{B},\mu)$ は確率 Lebesgue 空間とし, ここでの分割はすべて $\mathbb{B}$-可測分割であるとする。二つの分割 $\mathcal{A},\mathcal{B}$ が <u>ε-独立</u> ($\varepsilon>0$) ($\mathcal{A}\perp^{\varepsilon}\mathcal{B}$ と書く) であるとは, $\sum_{\mathcal{A}\vee\mathcal{B}}|\mu(A\cap B)-\mu(A)\mu(B)|<\varepsilon$ をみたすことである。

<u>補助定理 7.15</u> (Katznelson [28]). $\mathcal{A},\mathcal{B}$ は有限分割とし, $\varepsilon>0$ を与える。$E\subset X$ は $\mu(E)<\varepsilon^2$ をみたす可測集合とし, 次を仮定する; $\forall A\in\mathcal{A}$, $\forall B\in\mathcal{B}$ に対して X 上の可測関数 $\phi_A\geq 0$, $\phi_B\geq 0$ がそれぞれ対応して,

(1) $\phi_A(x)\geq 1$ on $A\setminus E$, $\phi_B(x)\geq 1$ on $B\setminus E$,

(2) $\sum_{A\in\mathcal{B}}\int\phi_A\,d\mu < 1+\varepsilon^2$, $\sum_{B\in\mathcal{B}}\int\phi_B\,d\mu < 1+\varepsilon^2$,

(3) $\int \phi_A \phi_B \, d\mu = \int \phi_A \, d\mu \int \phi_B \, d\mu$.

このとき $\mathcal{A} \overset{20\varepsilon}{\perp} \mathcal{B}$ である。

(証明)

$\mathcal{A}_1 = \{A \in \mathcal{A} : \int \phi_A \, d\mu \leqq (1+\varepsilon)\mu(A)\}$ とすると,

$$\Sigma_{A \notin \mathcal{A}_1} \int \phi_A \, d\mu \geqq (1+\varepsilon) \Sigma_{A \notin \mathcal{A}_1} \mu(A),$$

$$\Sigma_{A \in \mathcal{A}_1} \int \phi_A \, d\mu \geqq \Sigma_{A \in \mathcal{A}_1} \mu(A \setminus E) \geqq \Sigma_{A \in \mathcal{A}_1} \mu(A) - \varepsilon^2.$$

(2) によって, $1 + \varepsilon^2 \geqq 1 + \varepsilon \Sigma_{A \in \mathcal{A}_1} \mu(A) - \varepsilon^2$; i.e.

(4) $\Sigma_{A \notin \mathcal{A}_1} \mu(A) \leqq 2\varepsilon$.

$\mathcal{A}_0 = \{A \in \mathcal{A} ; \int \phi_A \, d\mu \geqq (1-\varepsilon)\mu(A)\}$ とする。$A \in \mathcal{A}_0$ であれば, $\mu(A \cap E) \geqq \varepsilon \mu(A)$. 故に $\varepsilon^2 \geqq \mu(E) \geqq \Sigma_{A \notin \mathcal{A}_0} \mu(A \cap E) \geqq \varepsilon \Sigma_{A \notin \mathcal{A}_0} \mu(A)$; i.e.

(5) $\Sigma_{A \notin \mathcal{A}_0} \mu(A) \leqq \varepsilon$.

$A \in \tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A}_0 \cap \mathcal{A}_1$ に対して,

(6) $(1-\varepsilon)\mu(A) \leqq \int \phi_A \, d\mu \leqq (1+\varepsilon)\mu(A)$.

(4), (5) によって

(7) $\Sigma_{A \notin \tilde{\mathcal{A}}} \mu(A) \leqq 3\varepsilon$.

同様な方法によって, $\tilde{\mathcal{B}} = \{B \in \mathcal{B} : (1-\varepsilon)\mu(B) \leqq \int \phi_B \, d\mu \leqq (1+\varepsilon)\mu(B)\}$ とすると,

(8) $\Sigma_{B \notin \tilde{\mathcal{B}}} \mu(B) \leqq 3\varepsilon$.

(1), (2), (3) によって,

$$\phi_A \phi_B \geqq 1 \quad \text{on } (A \cup B) \setminus E,$$

$$\Sigma \int \phi_A \phi_B \, d\mu < (1+\varepsilon^2)^2 < 1 + 3\varepsilon^2.$$

$\tilde{\mathcal{D}} = \{A \cap B \in \mathcal{A} \vee \mathcal{B} : (1-\varepsilon)\mu(A \cap B) \leqq \int \phi_A \phi_B \, d\mu \leqq (1+\varepsilon)\mu(A \cap B)\}$ とおくと,

(9) $\Sigma_{A \cap B \notin \tilde{\mathcal{D}}} \mu(A \cap B) \leqq 5\varepsilon$.

$A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$, $A \cap B \in \tilde{\mathcal{D}}$ に対して,

$$\mu(A \cap B) \leqq (1-\varepsilon)^{-1} \int \phi_A \phi_B \, d\mu = (1-\varepsilon)^{-1} \int \phi_A \int \phi_B$$
$$\leqq (1-\varepsilon)^{-1} (1+\varepsilon)^2 \mu(A) \mu(B),$$

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

$$\mu(A\cap B) \geqslant (1+\varepsilon)^{-1}\int \phi_A\,\phi_B = (1+\varepsilon)^{-1}\int \phi_A\,\phi_B$$
$$\geqslant (1+\varepsilon)^{-1}(1-\varepsilon)^2\mu(A)\mu(B).$$

上の二つの不等式と(7), (8), (9)から補題がえられる。//

有限分割$\mathcal{P}$がαに対して *almost weak Bernoulli* であるとは次をみたすことである; $\forall\varepsilon>0$ に対して, $K_0=K_0(\varepsilon)>0$ が存在して, $\forall K\geqslant K_0$ と $\forall N\geqslant K$ に対して,

$$\bigvee_{-N}^{-K}\alpha^{-j}\mathcal{P} \overset{\varepsilon}{\perp} \bigvee_{K}^{K^2}\alpha^{-j}\mathcal{P}$$

が成立することである。定理7.3は或る有限分割が almost weak Bernoulli であることを示すことによって得られる。その理由は次の Ornstein の定理にある。

定理 7.16([45]) $\{\mathcal{P}_k\}_{k=1}^{\infty}$ は次をみたす有限分割の列とする; $\mathcal{P}_{k+1}$ は $\mathcal{P}_k$ の細分で $\bigvee_{-\infty}^{\infty}\alpha^n\{\vee\mathcal{P}_k\}$ は $\mathcal{B}$ を張る。$\forall k\geqslant 1$ に対して, $\mathcal{P}_k$ が very weak Bernoulli であれば, $(X, \mathcal{B}, \mu, \alpha)$ は Bernoulli 系である。

almost weak Bernoulli 分割は very weak Bernoulli 分割であることを調べなくてはならない。

$\mathcal{P}$ は有限分割とし, $\mu(g)>0$ のとき, $\mathcal{P}$のgへの制限を $\mathcal{P}|g=\{p\cap g : p\in\mathcal{P}\}$ で表わすことにする。$\mathcal{P}=\{p_1, ---, p_k\}$, $\mathcal{B}=\{b_1, ---, b_k\}$で, $\mu(g)>0$ のとき, $d(\mathcal{P}|g, \mathcal{B})=\sum_{i=1}^{k}|\mu(p_i|g)-\mu(b_i)|$ とおく。ここに $\mu(p_i|g)=\mu(p_i\cap g)/\mu(g)$. 特に, $d(\mathcal{P}|X, \mathcal{B})=d(\mathcal{P}, \mathcal{B})$. $\mathcal{P}$と$\mathcal{B}$の他の距離関数Dを次のように与える; $D(\mathcal{P}, \mathcal{B})=\sum_{i=1}^{k}\mu(p_i\triangle b_i)$. ここに $p\triangle b$ は対称差を意味する。次の関係は容易にえられる; $d(\mathcal{P}, \mathcal{B})\leqslant D(\mathcal{P}, \mathcal{B})\leqslant 2$.

$\mathcal{P}$ はk個, $\mathcal{B}$ はl個の集合をもっているとする。このとき $\mathcal{P}\vee\mathcal{B}=\{p_i\cap b_j : 1\leqslant i\leqslant k,\ 1\leqslant j\leqslant l\}$ の順序を辞書式に導入する。

$\{\mathcal{P}_i\}_1^N$, $\{\mathcal{B}_i\}_1^N$ はそれぞれk個の集合をもつとする。次を定義する; $\bar{d}_N(\{\mathcal{P}_i\}_1^N, \{\mathcal{B}_i\}_1^N)=\inf\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}D(\mathcal{P}_i', \mathcal{B}_i')$. ここに inf は $d(\bigvee_1^N\mathcal{P}_i', \bigvee_1^N\mathcal{P}_i)=d(\bigvee_1^N\mathcal{B}_i', \bigvee_1^N\mathcal{B}_i)=0$ をみたす $\{\mathcal{P}_i'\}_1^N$, $\{\mathcal{B}_i'\}_1^N$のすべて

の上でとられる。

有限分割$\mathcal{P}$が次をみたすとき，$\mathcal{P}$はσに対して<u>weak Bernoulli</u>であるという；$\forall\varepsilon>0$に対して，$K_1>0$が存在して，$\forall m\geqq 1$に対して$\bigvee_{-m}^{0}\sigma^i\mathcal{P}$の部分集合$\mathcal{G}$が次をみたすようにえらばれる，

$$\mu(\bigcup_{g\in\mathcal{G}} g)>1-\varepsilon,\quad d(\bigvee_{K_1}^{K_1+m}\sigma^i\mathcal{P}|g,\ \bigvee_{K_1}^{K_1+m}\sigma^i\mathcal{P})<\varepsilon\quad (g\in\mathcal{G}).$$

この定義は次の(W.B.1)，(W.B.2)と同値である。

<u>(W.B.1)</u> $\forall\varepsilon>0$に対して，次をみたす$K_1>0$が存在する；$\forall m\geqq 1$に対して，

$$\bigvee_{-m}^{0}\sigma^i\mathcal{P}\overset{\varepsilon^2}{\perp}\bigvee_{K_1}^{K_1+m}\sigma^i\mathcal{P}.$$

<u>(W.B.2)</u> $\forall\varepsilon>0$に対して，次をみたす$K_1>0$が存在する；$\forall m\geqq 1$と$\forall n\geqq 1$に対して

$$\bigvee_{-m}^{0}\sigma^i\mathcal{P}\overset{\varepsilon^2}{\perp}\bigvee_{K_1}^{K_1+n}\sigma^i\mathcal{P}.$$

$\mathcal{P}$がσに対して<u>very weak Bernoulli</u>であるとは，$\forall\varepsilon>0$に対して次をみたすように$K_1>0$が存在することである；$\forall m\geqq 1$に対して$\bigvee_{-m}^{0}\sigma^i\mathcal{P}$の部分集合$\mathcal{G}$があって，

$$\mu(\bigcup_{g\in\mathcal{G}} g)>1-\varepsilon,\quad \bar{d}_{K_1}(\{\sigma^i\mathcal{P}|g\}_1^{K_1},\{\sigma^i\mathcal{P}\}_1^{K_1})<\varepsilon\quad (g\in\mathcal{G}).$$

<u>(P 7.1)</u> $\mathcal{P}$，$\mathcal{B}$は有限分割とし，それぞれk個の集合をもっているとする。$\forall n\geqq 1$に対して，$\mathcal{B}\overset{\varepsilon^2}{\perp}\bigvee_{n}^{K_1+n-1}\sigma^i\mathcal{P}$ならば，$\mathcal{B}$の部分集合$\mathcal{G}$が存在して

$$\mu(\bigcup_{g\in\mathcal{G}} g)>1-\varepsilon,\quad \bar{d}_{K_1}(\{\sigma^i\mathcal{P}|g\}_m^{K_1+n-1},\{\sigma^i\mathcal{P}\}_n^{K_1+n-1})<\varepsilon\quad (g\in\mathcal{G}).$$

(証明)

仮定によって，$\sum_{b\in\mathcal{B}}\mu(b)\sum_{p\in\bigvee_n^{K_1+n-1}\sigma^i\mathcal{P}}|\mu(p|b)-\mu(p)|<\varepsilon^2$.

$$\mathcal{G}=\{b\in\mathcal{B}:\sum_{p\in\bigvee_n^{K_1+n-1}}|\mu(p|b)-\mu(p)|<\varepsilon\}$$

とするとき，$\mu(\bigcup_{g\in\mathcal{G}} g)>1-\varepsilon$. $g\in\mathcal{G}$に対して

$$d(\bigvee_n^{K_1+n-1}\sigma_i\mathcal{P}|g,\ \bigvee_n^{K_1+n-1}\sigma^i\mathcal{P})<\varepsilon\Rightarrow\bar{d}_{K_1}(\{\sigma^i\mathcal{P}|g\}_n^{K_1+n-1},\{\sigma^i\mathcal{P}\}_n^{K_1+n+1})<\varepsilon.$$

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

$g \in \mathcal{G}$ に対して，分割の列 $\{\bar{P}_{i+n-1}\}_{i=1}^{K_1}$ が次をみたすように構成する；

$$(*)\quad d\Big(\bigvee_{i=1}^{K_1} \bar{P}_{i+n-1},\ \bigvee_{i=1}^{K_1} \sigma^{i+n-1}P \,|\, g\Big)=0.$$

分割は次のように構成される；

$$a = \sigma^n P_{j_1} \cap \cdots \cap \sigma^{K_1+n-1} P_{j_{K_1}} \in \bigvee_n^{K_1+n-1} \sigma^i P$$

に対して，

$$J_a = \{(j_1, \cdots, j_{K_1}) \in \{1, 2, \cdots, k\}^{K_1} : \mu(a|g) \leqq \mu(a)\}$$

とおく。i を固定して，

$$\bar{P}_{i+n-1} = \Big\{\bigcup_{j_\ell=1,\ \ell \neq i}^{k} \bar{P}_{j_1\cdots j_{K_1}} : 1 \leqq j_i \leqq k\Big\}$$

とおく。$\bar{P}_{j_1\cdots j_{K_1}}$ は次をみたす集合とする； $a=\sigma^n P_{j_1}\cap\cdots\cap\sigma^{K_1+n-1}P_{j_{K_1}} \in \bigvee_n^{K_1+n-1}\sigma^i P$ に対して，

$$(j_1, \cdots, j_{K_1}) \in J_a \Rightarrow \bar{P}_{j_1\cdots j_{K_1}} \subset a,\ \ \mu(\bar{P}_{j_1\cdots j_{K_1}}) = \mu(a|g),$$
$$(j_1, \cdots, j_{K_1}) \notin J_a \Rightarrow \bar{P}_{j_1\cdots j_{K_1}} \supset a,\ \ \mu(\bar{P}_{j_1\cdots j_{K_1}}) = \mu(a|g).$$

このとき $\bar{P}_{i+n-1}$ は X の分割で，$\{\bar{P}_{i+n-1}\}_{i=1}^{K_1}$ は $(*)$ をみたす分割の列である。故に次から結論がえられる；

$$D(\bar{P}_{i+n-1},\ \sigma^{i+n-1}P) = \sum_{j_i=1}^{k} \mu\Big(\bigcup_{j_\ell=1,\ \ell\neq i}^{k} \bar{P}_{j_1\cdots j_{K_1}} \,\triangle\, \sigma^{i+n-1}P_{j_i}\Big)$$
$$= \sum_{j_i=1}^{k} \mu\Big(\bigcup_{j_\ell=1,\ \ell\neq j}^{k} \bar{P}_{j_1\cdots j_{K_1}} \,\triangle\, \bigcup_{j_\ell=1,\ \ell\neq j}^{k} \sigma^n P_{j_1} \cap\cdots\cap \sigma^{K_1+n-1}P_{j_{K_1}}\Big)$$
$$\leqq \sum_{(j_1,\cdots,j_{K_1})\in\{1,2,\cdots,k\}^{K_1}} |\mu(\bar{P}_{j_1\cdots j_{K_1}}) - \mu(\sigma^n P_{j_1}\cap\cdots\cap\sigma^{K_1+n-1}P_{j_{K_1}})|$$
$$= \sum|\mu(\sigma^n P_{j_1}\cap\cdots\cap\sigma^{K_1+n-1}P_{j_{K_1}}|g) - \mu(\sigma^n P_{j_1}\cap\cdots\cap\sigma^{K_1+n-1}P_{j_{K_1}})|$$
$$= d\Big(\bigvee_n^{K_1+n-1}\sigma^i P|g,\ \bigvee_n^{K_1+n-1}\sigma^i P\Big) < \varepsilon. \,/\!/$$

(P 7. 2) *Weak Bernoulli* 分割は *very weak Bernoulli* 分割である。

(証明)

P は σ に対して *Weak Bernoulli* 分割であるとする。(W. B. 2) によって，$\forall \varepsilon>0$ に対して $K_1>0$ が次をみたすように存在する；

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

$\forall m \geq 1$ に対して，$\bigvee_{-m}^{0}\alpha^i p \overset{\varepsilon^2}{\perp} \bigvee_{K_1}^{K_1+n}\alpha^i p$．ここに $n>0$ は $(K_1-1)/(K_1+n)<\varepsilon$ をみたす大きな整数とする。(P7.1) によって，$\bigvee_{-m}^{0}\alpha^i p$ の部分集合 $\mathcal{G}$ が $\mu(\cup_{g\in\mathcal{G}}\, g)>1-\varepsilon$，$\bar{d}_{n+1}(\{\alpha^i p|g\}_{K_1}^{K_1+n}, \{\alpha^i p\}_{K_1}^{K_1+n})<\varepsilon$ $(g\in\mathcal{G})$ をみたすようにとれる。故に $\forall g\in\mathcal{G}$ に対して，

$$\begin{aligned}&\bar{d}_{K_1+n}(\{\alpha^i p|g\}_1^{K_1+n}, \{\alpha^i p\}_1^{K_1+n})\\ &= \frac{K_1-n}{K_1+n}\bar{d}_{K_1-1}(\{\alpha^i p|g\}_1^{K_1-1}, \{\alpha^i p\}_1^{K_1-1})\\ &+ \frac{n+1}{K_1+n}\bar{d}_{n+1}(\{\alpha^i p|g\}_{K_1}^{K_1+n}, \{\alpha^i p\}_{K_1}^{K_1+n})<3\varepsilon.\ /\!/\end{aligned}$$

(P7.3) almost weak Bernoulli 分割は very weak Bernoulli 分割である。

(証明)

p は α に対して almost weak Bernoulli であるとする。$M>0$ は almost weak Bernoulli の性質をみたす整数とする。$\bigvee_{-M}^{0}\alpha^i p$ の部分集合 $\mathcal{G}$ が $\mu(\cup_{g\in\mathcal{G}}\, g)>1-\varepsilon$，$\bar{d}_{K^2-K+1}(\{\alpha^i p|g\}_K^{K^2+1}, \{\alpha^i p\}_K^{K^2+K})<\varepsilon$ $(g\in\mathcal{G})$ をみたすようにとれることに注意する（∵(P7.1)による）．故に $g\in\mathcal{G}$ に対して

$$\begin{aligned}&\bar{d}_{K^2+K}(\{\alpha^i p|g\}_1^{K^2+K}, \{\alpha^i p\}_1^{K^2+K})\\ &= \frac{K-1}{K^2+K}\bar{d}_{K-1}(\{\alpha^i p|g\}_1^{K-1}, \{\alpha^i p\}_1^{K-1}) + \frac{K^2+1}{K^2+K}\bar{d}_{K^2+1}(\{\alpha^i p|g\}_K^{K^2+K}, \{\alpha^i p\}_K^{K^2+K}).\end{aligned}$$

K を $(K-1)/(K^2+1)<\varepsilon$ なるようにえらべばよい。//

定理7.3の証明は次の三つの補助定理によって完了する。

X は solenoidal 群である。このとき (G,γ) は (X,α) の dual とする。$\mathrm{rank}(G)=r<\infty$ とすれば，G は $\mathbb{Q}^r$ に埋め込まれる。以後 $G\subset\mathbb{Q}^r$ とし $\mathbb{Q}^r$ 上への γ の拡張を同じ記号で表わす。$(\overline{\mathbb{T}}^r,\alpha)$ を $(\mathbb{Q}^r,\gamma)$ の dual とする。γ は $\mathbb{Q}^r$ の単位元を除いて有限軌道をもたないから，$(\overline{\mathbb{T}}^r,\alpha)$ はエルゴード的である。次の補助定理7.17によって $(\overline{\mathbb{T}}^r,\alpha)$ は Bernoulli 系である。$\overline{\mathbb{T}}(G)=\mathrm{ann}(\overline{\mathbb{T}}^r,G)$ とすると，$(\overline{\mathbb{T}}^r/\overline{\mathbb{T}}(G),\alpha)$ は (X,α) と同型であるから，定理7.1によって，(X,α) は Bernoulli 系である。

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

補助定理 7.17. $(\mathbb{T}^r, \sigma)$ がエルゴード的ならば，それは Bernoulli 系である。

γ に対応する $GL(r,\mathbb{Q})$ の行列を再び γ で表わす。$k\geq 1$ と $f_i \in \mathbb{Q}^r$ $(1\leq i\leq k)$ が存在して $\mathbb{Q}^{r_i} = span_{\mathbb{Q}}\{\gamma^j g_i : j\in\mathbb{Z}\}$ とおくと，$\mathbb{Q}^r$ は直和分解 $\mathbb{Q}^r = \mathbb{Q}^{r_1}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Q}^{r_k}$ をもつ。従って $(\mathbb{T}^r,\sigma)$ も直和に分解される；$(\mathbb{T}^r,\sigma) = (\mathbb{T}^{r_1},\sigma)\oplus\cdots\oplus(\mathbb{T}^{r_k},\sigma)$. 各 $(\mathbb{T}^{r_i},\sigma)$ はエルゴード的である。従って Bernoulli 系さえ示されゝばよい。補助定理 7.17 は次の補助定理によって得られる。

補助定理 7.18. γ の固有値はベキ根をもたず，$\mathbb{Q}^r = span_{\mathbb{Q}}\{\gamma^j f : j\in\mathbb{Z}\}$ $(\exists f\in\mathbb{Q}^r)$ であるとする。このとき $(\mathbb{Q}^r,\gamma)$ の dual $(\mathbb{T}^r,\sigma)$ は Bernoulli 系である。

(証明)

$\mathbb{T}(\langle f\rangle) = ann(\mathbb{T}^r, \langle f\rangle)$ とする。$\mathbb{T}^r/\mathbb{T}(\langle f\rangle)$ は 1-次元トーラス $[0,1]$ $(mod\ 1)$ に同型である。$n>0$ を固定し，$\mathcal{P}_n$ は $\mathbb{T}^r/\mathbb{T}(\langle f\rangle)$ の分割で長さ $1/2^n$ をもつ $[0,1)$ の分割に対応しているとする。$\pi : \mathbb{T}^r \to \mathbb{T}^r/\mathbb{T}(\langle f\rangle)$ は自然な射影とするとき，$\pi^{-1}(\mathcal{P}_n)$ は $\mathbb{T}^r$ の分割となる。$\mathbb{T}^r$ の指標群を $\varphi(\cdot, g)$ $(g\in\mathbb{Q}^r)$ で表わし，$p\in\mathcal{P}_n$ と $m>0$ に対して次を定義する；

$$f_{m,p}(t) = (1+m^2)\int_{\pi^{-1}p}\sum_{k=-m^{20}}^{m^{20}} 2^{-1}\{1-|k|[m^{20}+1]^{-1}\}\varphi(t-s, kf)\,d\mu(s).$$

これは $(1+m^{-2})$ を剰じた $[0,1)$ の部分集合の定義関数の位数 m^{20} の Fejér sum に対応した関数である。

$$\mathcal{A} = \bigvee_{m=0}^{K^2}\sigma^{-m}\pi^{-1}(\mathcal{P}_n),\quad \mathcal{B} = \sigma^{-K^2-K}\bigvee_{m=0}^{M}\sigma^{-m}\pi^{-1}(\mathcal{P}_n)$$

とおく。$A\in\mathcal{A}$ は $A = \bigcap_{m=0}^{K^2}\sigma^{-m}\pi^{-1}p_{j_m}$ $(j_m = 1, 2, \cdots, 2^n)$ なる形の集合である。$J>0$ に対して $\mathbb{T}^r$ 上の関数 $\phi_A(t)$ を定義する；

$$\phi_A(t) = \prod_{m=0}^{K^2}\sum_{k=-(m+J)^{20}}^{(m+J)^{20}} c_{k,m}\,\varphi(\sigma^m t, kf).$$

ここに，

$$c_{k,m} = 2^{-1}[1+(m+J)^{-2}]\{1-|k|[(m+J)^{20}+1]^{-1}\}\int_{\pi^{-1}p_{j_m}}\varphi(-s,kf)\,d\mu(s).$$

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

$\phi_A(t)$は次のように表わされる；

$$\phi_A(t)=\sum_{\{k_m\}} C_{\{k_m\}}\varphi(t,\sum_{m=0}^{K^2}k_m\gamma^m f),$$

各$C_{\{k_m\}}$は或る定数．同じ方法によって，$\forall B\in\mathcal{B}$ ($B=\sigma^{-K^2-K}\bigcap_{m=0}^{M}\sigma^{-m}\pi^{-1}p_{j_m}$)に対して，

$$\phi_B(t)=\prod_{m=0}^{M}f_{m+J,\,p_{j_m}}(\sigma^{m+K^2+K}t)$$

を定義する。このとき

$$\phi_B(t)=\sum_{\{k_{m+K^2+K}\}}D_{\{k_{m+K^2+K}\}}\varphi(t,\gamma^{K^2+K}\sum_{m=0}^{M}k_{m+K^2+K}\gamma^m f)$$

ここに各$D_{\{k_{m+K^2+K}\}}$は或る定数．Fejér sum の性質によって次がえられる；T^r上で$\phi_A(t)\geqslant 0$で，

$$\phi_A(t)\geqslant 1 \quad \text{on} \quad A\setminus\bigcup_0^{K^2}\sigma^{-m}E_{J+m},$$

$$\sum_{A\in\mathcal{A}}\int\phi_A=\int\prod_{m=0}^{K^2}\sum_{p\in\mathcal{P}_n}f_{m+J,\,p}(\sigma^m t)\leqslant\prod_0^{K^2}\{1+(m+J)^{-2}\}.$$

同じく，T^r上で$\phi_B(t)\geqslant 0$で，

$$\phi_B(t)\geqslant 1 \quad \text{on} \quad B\setminus\bigcup_0^{M}\sigma^{-m}E_{J+m},$$

$$\sum_{B\in\mathcal{B}}\int\phi_B=\int\prod_0^M\sum_p f_{m+J,\,p}(\sigma^m t)\leqslant\prod_0^M\{1+(m+J)^{-2}\}.$$

故に，$\varepsilon>0$に対して$J=J(\mathcal{P}_n,\varepsilon)>0$と$\mu(E)<\varepsilon^2$なる$E\subset T^r$が存在して，$\forall K>0$，$\forall M>0$に対して次がえられる；

$$\phi_A(t)\geqslant 1 \text{ on } A\setminus E,\quad \phi_B(t)\geqslant 1 \text{ on } B\setminus E,$$

$$\sum_A\phi_A(t)\leqslant 1+\varepsilon^2,\quad \sum_B\phi_B(t)\leqslant 1+\varepsilon^2.$$

$\phi_A(t)$と$\phi_B(t)$の Fourier 展開と次の補助定理によって，$K_1>0$があって，$\forall K\geqslant K_1$と$\forall M>0$に対して$\phi_A(t)$と$\phi_B(t)$の共通の frequency だけが0となるようにできる。故に$\{\varphi(\cdot,g): g\in Q^r\}$の正規直交性によって，$\forall K\geqslant K_1$と$\forall M>0$に対して

$$\int\phi_A\phi_B=\int\phi_A\int\phi_B.$$

補助定理 7.15によって，T^rの分割$\pi^{-1}(\mathcal{P}_n)$は almost weak Bernoulli

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

である。$K_f=\sum_{-\infty}^{\infty}\gamma^i\langle f\rangle$, $\mathbb{T}(K_f)=ann(\mathbb{T}^r, K_f)$ とおく。$\bigvee_{j=-\infty}^{\infty}\sigma^j\{\bigvee_{-\infty}^{\infty}\pi^{-1}(\mathcal{P}_n)\}$ は $\mathbb{T}(K_f)$ の coset から成る $\mathbb{T}^r$ の分割である。故に $(\mathbb{T}^r/\mathbb{T}(K_f), \sigma)$ は Bernoulli 系. $\forall n\geqq 1$ を固定して, $\xi_n(g)=(1/n!)g$ $(g\in\mathbb{Q}^r)$ とおくと, $\xi_n: \mathbb{Q}^r\to\mathbb{Q}^r$ は同型写像である。このとき $\xi_n(K_f)\uparrow\mathbb{Q}^r$ $(n\to\infty)$. 故に $\mathbb{T}(\xi_n(K_f))\downarrow\{0\}$. $(\mathbb{T}^r/\mathbb{T}(\xi_n(K_f)), \sigma)$ は Bernoulli 系であるから, 定理 7.2 によって, $(\mathbb{T}^r, \sigma)$ も Bernoulli 系である。//

補助定理 7.18 のもとで, γ の特性多項式 $h(x)$ は $\mathbb{Q}$ 上で最小多項式である。$h(x)=cp(x)$ $(\exists c\in\mathbb{N})$ なる原始多項式を $p(x)$ とする。$J>0$ に対して, 次を定義する;

$$V_J(j;\gamma)=\{\sum_{m=0}^{j}k_m\gamma^m f : k_m\in\mathbb{Z},\ |k_m|\leqq(m+J)^{20}\}.$$

<u>補助定理 7.19</u>. $J>0$ に対して, 次をみたすような $K_1>0$ が存在する; $\forall K\geqq K_1$, $\forall M>0$ に対して

$$V_J(K^2;\gamma)\cap\gamma^{K^2+K}V_J(M;\gamma)=\{0\}.$$

証明に対して次の補題を必要とする。

<u>補題 7.20</u>. $p(x)$ は上のような γ に対する原始多項式とする。$\forall g(x), g(x)'\in\mathbb{Z}[x]$ に対して次が成立する;

(i) $g(\gamma)f=0 \iff g(\gamma)=0$,

(ii) $g(\gamma)=0 \iff p(x)$ は $\mathbb{Z}$ 上で $g(x)$ を割り切る,

(iii) $k>degree(g(x))$, $g(\gamma)=\gamma^k g(\gamma)'$ ならば, $degree(g(x)'')\leqq r-1$ をもつ $g(x)''\in\mathbb{Z}[x]$ が存在して, $g(\gamma)=\gamma^k g(\gamma)''$ とできる。

(証明)

$\mathbb{Q}^r=span_{\mathbb{Q}}\{\gamma^j f : j\in\mathbb{Z}\}$ であるから, (i) は明らか。(ii) $g(\gamma)=0$ ならば, $p(x)$ は $\mathbb{Q}$ 上で $g(x)$ を割り切る。定理 2.8 によって $p(x)$ は $\mathbb{Z}$ 上で $g(x)$ を割り切る。逆は明らか。(iii) $degree(g(x)')=s$ として, $s\geqq r$ の場合に証明を与えればよい。(ii) によって, $p(x)$ は $\mathbb{Z}$ 上で $x^k g(x)'-g(x)$ を割り切る。故に a_1 を $x^k g(x)'-g(x)$ の, a_2 を $p(x)$ の主係数とするとき, $a_1=a_0a_2$ なる整数 $a_0>0$ が存在する。

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

$g(x)'' = g(x)' - a_0 p(x) x^{s-r}$ の次数は s よりも完全に小さく，$g(\gamma) = \gamma^k g(x)''$ が成立する。これをくりかえすとき，(iii)がえられる。//

補助定理7.19の証明　或る $K>0$，$M>0$ に対して，$0 \neq \tilde{k} \in V_J(K^2;\gamma) \cap \gamma^{K^2+K} V_J(M;\gamma)$ と仮定する。このとき $\tilde{k} = a(\gamma) f = \gamma^{K^2+K} b(\gamma) f$ なる多項式

$$a(x) = \sum_{m=0}^{K^2} k_m x^m \quad (k_m \in \mathbb{Z},\ |k_m| \leq (m+J)^{20}),$$

$$b(x) = \sum_{m=0}^{M} k_{m+K^2+K} x^m \quad (k_{m+K^2+K} \in \mathbb{Z},\ |k_{m+K^2+K}| \leq (m+J)^{20})$$

が存在する。補題7.21(i)によって，

(イ)　$a(\gamma) = \gamma^{K^2+K} b(\gamma)$.

$\gamma \in GL(r, \mathbb{Q})$ より，$m_0 > 0$ があって，$degree(g(x)) \leq r-1$ なる $\forall g(x) \in \mathbb{Z}[x]$ に対して $m_0 g(\gamma) \in GL(r, \mathbb{Z})$ とできる。γ は $\mathbb{R}^r$ 上に拡張されたものとすると，$\mathbb{R}^r$ は直和分解 $\mathbb{R}^r = E^s \oplus E^c \oplus E^u$ をもつ。γ のすべての固有値 λ に対して，$|\arg \lambda^{n_0}| < 1/2$ で，$|\lambda| < 1$ のとき $|\lambda^{n_0}| < 1/2$ なるように $n_0 > 0$ が存在する(∵ Dirichletの定理による)．このとき次が成立する；

$$|\lambda^{n_0} - 1| < \begin{cases} 1 - |\lambda^{n_0}|/2 & \text{if } |\lambda| < 1 \\ 1/2 & \text{if } |\lambda| = 1 \\ |\lambda^{n_0}| - 1/2 & \text{if } |\lambda| > 1. \end{cases}$$

I は単位行列とすると，$\gamma^{n_0} - I$ は non-singular (∵ γ は $\mathbb{R}^r$ の 0 を除いて有限の軌道をもたない)．$0 < n_0 k < K$ なる k に対して，(イ)の両辺に $(\gamma^{n_0} - I)^k$ を作用させる。補題7.20(iii)によって $degree(p_0(x)) \leq r-1$ なる $p_0(x) \in \mathbb{Z}[x]$ が存在し　$(\gamma^{n_0} - I)^k a(\gamma) = \gamma^{K^2+K}(\gamma^{n_0} - I)^k b(\gamma) = \gamma^{K^2+K} p_0(\gamma)$ が成り立つ。故に $m_0 > 0$ の選び方によって

(ロ)　$m_0 p_0(\gamma) = m_0(\gamma^{n_0} - I)^k a(\gamma) \gamma^{-K^2-K} = m_0 (\gamma^{n_0} - I)^k b(\gamma) \in G(r, \mathbb{Z})$.

故にノルム，f と m_0 に依存した定数 $C > 0$ が存在して $C < \|p_0(\gamma) f\|$.
f は次のように一意的に分解される；$f = f_s + f_c + f_u \in E^s \oplus E^c \oplus E^u$.
(ロ)によって

(ハ)　$C \leq \|p_0(\gamma) f_s\| + \|p_0(\gamma) f_c\| + \|p_0(\gamma) f_u\|$

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

$$\leq \|(\gamma^{n_0}-I)^{k} b(\gamma)f_s\| + \|(\gamma^{n_0}-I)^{k}\gamma^{-K^2-K}f_c\| + \|(\gamma^{n_0}-I)^{k}\gamma^{-K^2-K}a(\gamma)f_u\|.$$

ζ_{-1} は $\gamma_{|E^s}$ のすべての固有値の絶対値の最小値, ξ は $\gamma_{|E^s}$ の最大値. θ は $\gamma_{|E^u}$ の最小値, θ_1 は $\gamma_{|E^u}$ の最大値とする。Jordanの標準型によって, 次をみたす $d>0$ がとれる; $\forall m>0$ に対して

$$\|\gamma^m f_s\| \leq d m^r \xi^m \|f_s\|,$$
$$\|\gamma^{-m} f_u\| \leq d m^r \theta^{-m} \|f_u\|;$$
$$\|(\gamma^{n_0}-I)^m f_s\| \leq d m^r (1-\zeta_{-1}^{n_0}/2)^m \|f_u\|,$$
$$\|(\gamma^{n_0}-I)^m f_c\| \leq d m^r 2^{-m} \|f_c\|,$$
$$\|(I-\gamma^{-n_0})^m f_u\| \leq d m^r (1-\theta_1^{-n_0}/2)^m \|f_u\|.$$

$k=[K/n_0]$ として, 上の五つの不等式を使ったとき, (ハ)の右辺の各項は $k\to\infty$ のとき, 0 に収束する。これは矛盾である。//

§ 8 自己同型のBernoulli系への分解

X はコンパクト可換群, α は X 上の自己同型とし, (X,α) の dual を前のように (G,γ) で表わす。この §の目的は次の定理を解説することである。

定理 8.1. X に α-不変部分群 X_1, X_2 があって次をみたすようにできる;
(i) (X_1,α) は零エントロピーをもつ,
(ii) (X_2,α) は Bernoulli 系である,
(iii) X は $X=X_1+X_2$ に分解される(直和分解ではない)。

定理は次の二つの補助定理に分けることによって証明される。

補助定理 8.2. X が連結のとき, 定理 8.1 は成立する。

補助定理 8.3. X が完全不連結のとき, 定理 8.1 は成立する。

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

補題2.14によって，Xは$X=X_0+H$に分解される。上の補助定理によって，$X_0=X_1'+X_2'$，$H=H_1+H_2$と分解される。ここにX_1'，H_1は(i)をみたし，X_2'，H_2は(ii)をみたす。$X_1=X_1'+H_1$，$X_2=X_2'+H_2$とおくと，$X=X_1+X_2$がえられる。(X,α)は$(X_1'\otimes H_1, \alpha\otimes\alpha)$の，$(X_2,\alpha)$は$(X_2'\otimes H_2, \alpha\otimes\alpha)$のそれぞれ *homomorphic images* であるから，(X_1,α)は零エントロピーをもち，(X_2,α)は Bernoulli 系である。定理8.1の証明に対して，上の二つの補助定理を証明すればよい。補助定理8.2を証明するために準備をする。

Xは連結であるから，Gは *torsion free* である。$g\in G$に対して$p(\gamma)g=0$なる最小次数をもつ$p(x)\in\mathbb{Z}[x]$を$p_g(x)$で表わすことにする。

$$G_A=\{g\in G : p_g(\gamma)g=0\}$$

はγ-不変部分群である。G_B，G_Cは次のように定義する；

$$G_B=\{g\in G_A : p_g(x)\text{は}1\text{のべキ根だけをもつ}\},$$
$$G_C=\{g\in G_A : p_g(x)\text{は}1\text{のべキ根をもたない}\}.$$

補題8.4. G_B, G_Cはγ-不変部分群で，$G_B\cap G_C=\{0\}$をみたす。

(証明)

G_B, G_Cがγ-不変であることは明らか。$f,g\in G$に対して，$p_f(\gamma)f=p_g(\gamma)g=0$．$p_f(\gamma)p_g(\gamma)(f+g)=0$であるから，$p_{f+g}(x)$は$p_f(x)p_g(x)$を$\mathbb{Q}$上で割り切る。故に，$p_{f+g}(x)$は1のべキ根だけをもつ；i.e. $f+g\in G_B$．G_Cも部分群であることが容易に示される。明らかに，$G_B\cap G_C=\{0\}$である。

補題8.5. $G_A/(G_B\oplus G_C)$は *torsion* 群である。

(証明)

$\mathrm{rank}(G_A)=r<\infty$の場合，$G_A$は$\mathbb{Q}^r$に埋め込まれる。今$G_A\subset\mathbb{Q}^r$とする。$\mathbb{Q}^r$上への$\gamma$の拡張を同じ記号で表わす。$\mathbb{Q}^r$は$\gamma_{|\mathbb{Q}_B}$の固有値が1のべキ根だけを，$\gamma_{|\mathbb{Q}_C}$は1のべキ根をもたな

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

いような部分空間 Q_B, Q_c によって, $Q^r = Q_B \oplus Q_c$ に直和分解される。明らかに, $G_B \subset Q_B$, $G_c \subset Q_c$ である。G_A の元 f は $f = f_B + f_c$ ($f_B \in Q_B$, $f_c \in Q_c$) と一意的に分解される。Q^r は G_A の極小完備群であるから, $nf_B \in G_B$, $nf_c \in G_c$ なる $n>0$ が存在する。故に $nf = nf_B + nf_c \in G_B \oplus G_c$; i.e. $G_A/(G_B \oplus G_c)$ は torsion 群である。

$rank(G_A) = \infty$ の場合, G_A に次をみたす γ-不変部分群の列が存在する; $G_A^{(1)} \subset G_A^{(2)} \subset \cdots \subset \cup G_A^{(n)} = G_A$ で $rank(G_A^{(n)}) < \infty$ $(n \geq 1)$. 故に $G_B^{(n)} \subset G_B$, $G_c^{(n)} \subset G_c$ で $G_A^{(n)}/(G_B^{(n)} \oplus G_c^{(n)})$ は torsion 群である。このことより結論がえられる。//

補題 8.6. $g \notin G_A$ に対して, 部分群 $W_g = \sum_{-\infty}^{\infty} \gamma^j \langle g \rangle$ は直和分解 $W_g = \oplus_{-\infty}^{\infty} \gamma^j \langle g \rangle$ される。

(証明)

$0 \neq {}^\forall p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ に対して, $p(\gamma) g \neq 0$ なる性質からえられる。//

$\Gamma = \{g \in G : g \notin G_A\}$ は可算集合で群にはならないことに注意する。しかし $G_A + \Gamma = G$ が成立する。$g_{i_1} \in \Gamma$ に対して $W_{g_{i_1}} \cap W_f = \{0\}$ なる $f \in \Gamma$ を g_{i_2} とし, $W_{g_{i_1}} \oplus W_{g_{i_2}} \cap W_h = \{0\}$ なる $h \in \Gamma$ を g_{i_3} と番号付けをする。このことを Γ のすべての元にわたってくりかえすとき, 部分群の列 $\{W_{g_{i_n}}\}$ がえられ $G_D = \oplus_{n \geq 1} W_{g_{i_n}}$ は γ-不変部分群で, $G_A \cap G_D = \{0\}$ が成立する。G/G_D は必ずしも torsion 群でない。

補題 8.7. $\dot{g} \in G/G_D$ に対して, $p(\gamma)\dot{g} = 0$ なる $0 \neq p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ が存在する。

(証明)

G_D の構成から明らかである。//

補題 8.8. $G = G_B$ であれば, (X, σ) は零エントロピーをもつ。

(証明)

G は torsion free であることに注意する。$g \in G$ に対して $P_g(\gamma) g = 0$

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

であるから，$W_g=\sum_{-\infty}^{\infty}\gamma^s\langle g\rangle$ の階数は有限である。$P_g(x)$は1のベキ根をもつから，$P_g(x)$はmonicで定数項は±1である。故に，W_gは有限生成である。Gは可算であるから，$W_1\subset W_2\subset\cdots\subset\bigcup W_n=G$なる$\gamma$-不変部分群の列$\{W_n\}$で，各$W_n$は有限生成であるようなものが存在する。$X_n=\mathrm{ann}(X, W_n)$とすると，$X/X_n$は有限次元トーラスで，$P_g(x)$は1のべき根だけをもつから，$(X/X_n, \alpha)$は零エントロピーをもつ。$X_n\downarrow\{0\}$であるから，$(X,\alpha)$も零エントロピーをもつ。//

補助定理8.2の証明． 後で証明される補助定理8.1を利用しなくてはならない。明らかに

$$G\supset G_A\oplus G_B\supset G_B\oplus G_C\oplus G_D.$$

$Y_1=\mathrm{ann}(X, G_C\oplus G_D)$，$X_2=\mathrm{ann}(X, G_B)$とおくと，

$$Y_1+Y_2=\mathrm{ann}(X, \{G_C\oplus G_D\}\cap G_B\}=X.$$

ここで(X_2, α)はエルゴード的；i.e. Bernoulli系で$(X/X_2,\alpha)$は零エントロピーをもつことに注意する。実際に，X_2の指標群はG/G_Bで$\gamma_{|G/G_B}$は単位元を除いて有限軌道をもたない。今，$\dot{g}=g+G_B\in G/G_B$が$\gamma^k(\dot{g})=\dot{g}$ $(\exists k>0)$をみたしているとする。このとき$(\gamma^k-I)g\in G_B$. 故に$P_{(\gamma^k-I)g}(\gamma)(\gamma^k-I)g=0$. 多項式$P_{(\gamma^k-I)g}(x)$は1のべキ根だけをもっているから，明らかに$P_{(\gamma^k-I)g}(x)(x^k-1)$も1のべキ根だけをもつ。故に，$g\in G_B$；i.e. $\dot{g}$はG/G_Bの単位元である。X/X_2の指標群はG_Bであるから，補題8.8によって$(X/X_2, \alpha)$は零エントロピーをもつ。X_2は上で述べた性質をもつ最大群であることに注意する(最大性は定理2.5を使えば容易にえられる)．

Y_1は連結であるとは限らない。補題2.14によって，$Y_1=Z+H$に分解され，Zは連結でHは完全不連結である。補助定理8.3を使ったとき，Hの中に(H_1,α)は零エントロピーをもち，(H_2,α)はBernoulli系で$H=H_1+H_2$なるα-不変部分群H_1, H_2が含まれることが分かる。

$(G^{(\Xi)}, \gamma)$ は (Ξ, α) の dual とする。$G/(G_C \oplus G_D)$ は Y_1 の指標群であるから，$G^{(\Xi)}$ は $G/(G_C \oplus G_D)$ の剰余群である。補題8.7によって，$g \in G^{(\Xi)}$ は $P(\gamma)g = 0$ なる $0 \neq P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ をもつ。前と同じようにして γ-不変部分群

$$G_B^{(\Xi)} = \{g \in G^{(\Xi)} : p_g(x) \text{ は } 1 \text{ のべき根だけをもつ}\},$$

$$G_C^{(\Xi)} = \{g \in G^{(\Xi)} : p_g(x) \text{ は } 1 \text{ のべき根をもたない}\}$$

を定義する。$G^{(\Xi)}/(G_B^{(\Xi)} \oplus G_C^{(\Xi)})$ は torsion 群である(∵補題8.5による). $G^{(\Xi)}$ は torsion free であるから，$(G^{(\Xi)}, \gamma)$ の極小完備化 $(\bar{G}^{(\Xi)}, \gamma)$ が存在して，$\bar{G}^{(\Xi)} = \bar{G}_B^{(\Xi)} \oplus \bar{G}_C^{(\Xi)}$ と直和分解される。ここに

$$\bar{G}_B^{(\Xi)} = \{g \in \bar{G}^{(\Xi)} : mg \in G_B^{(\Xi)}, \exists m \neq 0\},$$
$$\bar{G}_C^{(\Xi)} = \{g \in \bar{G}^{(\Xi)} : mg \in G_C^{(\Xi)}, \exists m \neq 0\}.$$

明らかに，$g \in \bar{G}_B^{(\Xi)}$ に対して $p_g(x)$ は 1 のべき根だけをもち，$f \in \bar{G}_C^{(\Xi)}$ に対して $p_f(x)$ は 1 のべき根をもたない。$(\bar{\Xi}, \alpha)$ は $(\bar{G}^{(\Xi)}, \gamma)$ の dual とし，$\bar{\Xi}_B = ann(\bar{\Xi}, \bar{G}_C^{(\Xi)})$，$\bar{\Xi}_C = ann(\bar{\Xi}, \bar{G}_B^{(\Xi)})$ とおくと，$\bar{\Xi} = \bar{\Xi}_B \oplus \bar{\Xi}_C$ に直和分解され，補題8.8によって $(\bar{\Xi}_B, \alpha)$ は零エントロピーをもつ。$\bar{\Xi}_C$ の指標群は単位元を除いて有限軌道をもたないから，$(\bar{\Xi}_C, \alpha)$ は Bernoulli 系である。$K = ann(\bar{\Xi}, G^{(\Xi)})$ とすると，$\bar{\Xi}/K$ は Ξ と同型で，$\bar{\Xi}/K$ と Ξ は同じ指標群 $G^{(\Xi)}$ をもつ; i.e. (Ξ, α) と $(\bar{\Xi}/K, \alpha)$ は同型である。Ξ_1 は $\bar{\Xi}_B$ の，Ξ_2 は $\bar{\Xi}_C$ の剰余群とすれば，Ξ は $\Xi = \Xi_1 + \Xi_2$ に分解される。X_2 は X の中で (X_2, α) が Bernoulli 系となる最大群であったから，$\Xi_2 + H_2 \subset X_2$. $X_1 = \Xi_1 + H_1$ とすると，(X_1, α) は零エントロピーをもち，$X = X_1 + X_2$ である。//

補助定理8.3の証明だけが残っている。以後，X は完全不連結であるとする。

補題8.9. X は α による simple Bernoulli 群とすると，α-不変真部分群は有限群に限る。

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

(証明)

Kはσ-不変真部分群とする。Xは可換で，simple Bernoulli群であるから，$h(\sigma)=\log p$ なる素数pが存在する。定理2.5と補題5.20から，$h(\sigma_{|X/K})=\log p$ か $h(\sigma_{|K})=\log p$ をうる。$h(\sigma_{|X/K})>0$ であるから，$h(\sigma_{|X/K})=\log p$ で $h(\sigma_{|K})=0$ である。(X,σ) は拡大的であるから，(K,σ) もそうである。故に，補題5.19によってKは有限群である。//

補題8.10. Y_2 はσによるsimple Bernoulli群で，$(X/Y_2,\sigma)$ は零エントロピーをもつとする。Y_2がXで開部分群であれば，$X=Y_1+Y_2$ なるσ-不変部分群Y_1が存在する。

(証明)

Y_2はsimple Bernoulli群であるから，p-位数の巡回群Wによって，$Y_2=\oplus_{-\infty}^{\infty}\sigma^i W$ と直和分解される。ここにpは素数である。故に，$x\in Y_2$ は $px=0$ をみたす。Y_2は開であるから，$X=Y_2+F$ なる有限部分群Fが存在する。

$$K=\{\oplus_{i\neq 0,1,\dots,n}\sigma^i W\}+F$$

とおくとき，$K\subsetneq X$ をみたすように最小の整数$n>0$を固定する。このとき$X=\sigma^n W+K$がえられる。故に$X/K\cong\sigma^n W$; i.e. X/Kは単純である。$Y_1=\cap_{-\infty}^{\infty}\sigma^i K$とすると，$X/Y_1$は無限群である。もし$X/Y_1$が有限であるとすると，$(Y_1+Y_2)/Y_1\cong Y_2/(Y_1\cap Y_2)$も有限である。$Y_1\cap Y_2\subsetneq Y_2$であるから，補題8.9によって$Y_1\cap Y_2$も有限. 故に$Y_2$も有限になり矛盾する。定理5.3によって$X/Y_1$は$\sigma$によるsimple Bernoulli群である。$X/(Y_1+Y_2)$が単位元でなければ，$(X/(Y_1+Y_2),\sigma)$は零エントロピーをもち，かつBernoulli系である。このことは起りえないから，$X=Y_1+Y_2$である。//

補題8.11. XはσによるBernoulli群で，$h(\sigma)<\infty$とする。このとき(X,σ)は拡大的で，Hはσ-不変部分群とすれば$(X/H,\sigma)$も拡大的である。

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

(証明)

(X,σ)が拡大的ならば，補題5.17によって$(X/H,\sigma)$も拡大的である。Xはσによる Bernoulli群であるから，定義によって，部分群Wがあって$X=\oplus_{-\infty}^{\infty}\sigma^i W$と表わされる。$h(\sigma)<\infty$であるから，$W$は有限に限る。この場合$(X,\sigma)$は拡大的である。//

補題 8.12. Y_2はσによる simple Bernoulli群で$(X/Y_2,\sigma)$は零エントロピーをもつとする。Y_2は開部分群でないとき，σ-不変部分群Fで(F,σ)は零エントロピーをもち，Y_2+Fは開部分群となるようにえらぶことができる。

(証明)

Y_2は simple Bernoulli群であるから，$h(\sigma_{|Y_2})\geq\log 2$. Xに開部分群Lが次をみたすようにえらべる；$F_L=\bigcap_{-\infty}^{\infty}\sigma^i L$とすると$(Y_2+F_L)\supsetneqq F_L$. 実際に$Y_2\subset F_L$とすると$Y_2=\cap F_L=\{0\}$で補題8.12の仮定に矛盾する。$h(\sigma_{|X/Y_2})=0$であるから，$h(\sigma_{|X/(Y_2+F_L)})=0$.
定理2.5によって，

$$h(\sigma_{|Y_2})=h(\sigma)=h(\sigma_{|X/(Y_2+F_L)})+h(\sigma_{|(Y_2+F_L)/F_L})+h(\sigma_{|F_L}).$$

故に$h(\sigma_{|F_L})=0$. $V_i=X/L$ $(i\in\mathbb{Z})$として，直積群$\tilde{X}=\otimes_{i\in\mathbb{Z}}V_i$を考える。$\pi: X/F_L\to X/L$は自然な射影とし，$\hat{\sigma}$は$\tilde{X}$上の Bernoulli 自己同型とする。写像$\varphi: X/F_L\to\tilde{X}$を

$$\varphi(\tilde{x})=\{\pi\sigma^i(\tilde{x})\}_{-\infty}^{\infty}\ ,\quad \tilde{x}\in X/F_L$$

によって定義する。φはX/F_Lから$\tilde{X}$の或る部分群上への同型写像である。$\tilde{X}$は$\hat{\sigma}$による Bernoulli群で，$h(\hat{\sigma})<\infty$であるから，$(\tilde{X},\hat{\sigma})$そして$(\tilde{X}/\varphi((Y_2+F_L)/F_L),\hat{\sigma})$は拡大的である(∵補題8.11による). 故に$(\varphi(X/F_L)/\varphi((Y_2+F_L)/F_L),\hat{\sigma})$も拡大的.
$\varphi(X/F_L)/\varphi((Y_2+F_L)/F_L)\cong X/(Y_2+F_L)$であるから，$(X/(Y_2+F_L),\sigma)$も拡大的である。$h(\sigma_{|X/(Y_2+F_L)})=0$であるから，補題5.19によって$X/(Y_2+F_L)$は有限；i.e. Y_2+F_LはXで開部分群である。//

補助定理 8.3 の証明. 定理5.4によって，$(X/X_2,\sigma)$は零エ

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

ントロピーをもち，(X_2, σ) は Bernoulli 系となるσ-不変部分群 X_2 が存在する。補助定理5.2によって X_2 に次をみたすσ-不変部分群の列が存在する；$X_2 = X_{2,0} \supset X_{2,1} \supset \cdots \supset \cap X_{2,n} = \{0\}$ で，$\forall n \geqq 0$ に対して

$$X_{2,n} \supset X_{2,n,1} \supset \cdots \supset \cap_j X_{2,n,j} = X_{2,n+1}$$

なるσ-不変部分群の列 $\{X_{2,n,j}\}$ があって，$\forall j > 0$ に対して $X_{2,n}/X_{2,n,j}$ はσによる simple Bernoulli 群である。故に，$X_2/X_{2,0,1}$ はσによる simple Bernoulli 群で

$$((X/X_{2,0,1})/(X_2/X_{2,0,1}), \sigma)$$

は零エントロピーをもつから，補題8.10，11を利用して

$$X = M_1 + X_2 \ , \quad h(\sigma_{|M_1/X_{2,0,1}}) = 0$$

なるσ-不変部分群 M_1 をみつけることができる。$X_{2,0,j} \downarrow X_{2,1}$ であるから，定理2.5によって

$$h(\sigma_{|X_{2,0}/X_{2,0,k}}) = h(\sigma_{|X_{2,0}/X_{2,0,1}}) + \sum_{j=2}^{k} h(\sigma_{|X_{2,0,j-1}/X_{2,0,j}}).$$

$X_{2,0}/X_{2,0,k}$ ，$X_{2,0}/X_{2,0,1}$ は共に simple Bernoulli 群であるから，

$$0 = \sum_{j=2}^{k} h(\sigma_{|X_{2,0,j-1}/X_{2,0,j}}) = h(\sigma_{|X_{2,0,1}/X_{2,0,k}}).$$

k は任意であるから，$h(\sigma_{|X_{2,0,1}/X_{2,1}}) = 0$. $M_1 \subset X_{2,0,1}$ であるから，$h(\sigma_{|M_1/X_{2,1}}) = 0$ である。

$X_{2,1}/X_{2,1,1}$ は simple Bernoulli 群で，

$$((M_1/X_{2,1,1})/(X_{2,1}/X_{2,1,1}), \sigma)$$

は零エントロピーをもつから，同じ方法によって

$$M_1 = M_2 + X_{2,1} \ , \quad h(\sigma_{|M_2/X_{2,1,1}}) = 0$$

なるσ-不変部分群 M_2 をみつけることができる。

$X_{2,1} \subset X_2$ であるから，$M_1 + X_2 = M_2 + X_2 = X$. $X_{2,1}/X_{2,1,j}$ $(j \geqq 1)$ は simple Bernoulli 群であるから，$h(\sigma_{|X_{2,1,1}/X_{2,1,j}}) = 0$ $(j \geqq 1)$ がえられる。故に $h(\sigma_{|X_{2,1,1}/X_{2,2}}) = 0$ そして

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

$$h(\sigma_{|M_2/X_{2,2}}) = h(\sigma_{|M_2/X_{2,1,1}}) + h(\sigma_{|X_{2,1,1}/X_{2,2}}) = 0,$$

故に,

$$((M_2/X_{2,1,1})/(X_{2,2}/X_{2,2,1}),\ \sigma)$$

は零エントロピーをもつ。$X_{2,2}/X_{2,2,1}$ は simple Bernoulli群であるから, M_2 に σ-不変部分群 M_3 があって

$$M_2 = M_3 + X_{2,2}\ ,\quad h(\sigma_{|M_3/X_{2,2,1}}) = 0$$

をみたすようにできる。明らかに $X = M_3 + X_2$ である。このことを帰納的にくりかえすとき, σ-不変部分群の列 $M_1 \supset M_2 \supset \cdots$ が

$$X = M_n + X_2\ ,\quad h(\sigma_{|M_n/X_{2,n}}) = 0$$

をみたすようにえらぶことができる。$X_1 = \cap M_n$ とおけば, $X = X_1 + X_2$ で $X_1/(X_{2,n} \cap X_1) \cong (X_{2,n} + X_1)/X_{2,n}$ は $M_n/X_{2,n}$ の部分群であるから, $h(\sigma_{|X_1}) = 0$ がえられる。補助定理8.3が証明された。//

§9 位相力学系への展開

この§では微分力学系の諸結果を位相力学系へ展開することが目的である。その試みはまだほとんどなされていないと思われる。

X はコンパクト距離空間, f は X 上の位相同相とする。X の距離関数を d で表わすことにする。(X, f) が <u>topologically transitive</u> であるとは, 空でない任意の開集合 U, V に対して, $U \cap f^n(V) \neq \phi$ なる $n > 0$ が存在することである。$N > 0$ があって, $U \cap f^n(V) \neq \phi\ (\forall n \geq N)$ をみたすとき, (X, f) は topologically mixing である。(P.55 を見よ).

<u>定理 9.1</u>. X は局所コンパクト完備距離空間で, f は X 上の位相同相とする。このとき次の(1)−(4)は同値である;

(1) $x_0 \in X$ があって軌道 $O_f(x_0) = \{f^n(x_0) : n \in \mathbb{Z}\}$ は X で稠密である,

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

(2) $f(E)=E$, $E \subsetneq X$ なる閉集合 E は nowhere dense である,
(3) 空でない開集合 U, V に対して, $U \cap f^n(V) \neq \phi$ なる $n>0$ が存在する,
(4) $\{x \in X : \overline{O_f(x)} \neq X\}$ は第1類集合である。

(証明)

(1)⇒(2): $E \supset U \neq \phi$ なる開集合 U が存在したと仮定する。仮定によって, $\overline{O_f(x_0)} = X$ であるから, $p \in \mathbb{Z}$ があって $f^p(x_0) \in U$. 故に $O_f(x_0) \subset E$; i.e. $E = X$. これは矛盾である。(2)⇒(3): (2)によって $\bigcup_{-\infty}^{\infty} f^n(U)$ は X で稠密である。故に $\bigcup_{-\infty}^{\infty} f^n(U) \cap V \neq \phi$. (3)⇒(4): $\{U_1, U_2, \cdots\}$ は X の可算基とする。このとき $\overline{O_f(x)} \neq X \Leftrightarrow x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=-\infty}^{\infty} f^m(X \setminus U_n)$ が成立する(§1の(18)の証明を見よ). (3)によって, $\bigcup_{m=-\infty}^{\infty} f^m(U_n)$ は X で稠密であるから, (4)がえられる。(4)⇒(1): 局所コンパクト完備距離空間は第2類集合であるから明らかである。//

$\boxed{\text{注意}}$ X がコンパクト集合である場合, (X, f) が topologically transitive であっても, 空でない開集合を正にするエルゴード的確率測度が存在するとは限らない([79]を見よ).

以後ことわらない限り X はコンパクトであるとする。

点列 $\{x_i\}_{i \in (a,b)}$ $(-\infty \leq a < b \leq \infty)$ が $d(f(x_i), x_{i+1}) < \delta$ $(i \in (a, b-1))$ をみたすとき, δ-<u>擬軌道</u>(δ-p.o.)であるという。$d(f^i(x), x_i) < \varepsilon$ $(i \in (a, b))$ なる $x \in X$ が存在するとき $\{x_i\}$ は ε-<u>追跡</u>されるという。$\forall \varepsilon > 0$ に対して, $\delta > 0$ があって, $\forall \delta$-p.o. が或る点によって ε-追跡されるとき, (X, f) は<u>擬軌道追跡性</u>(P.O.T.P.)をもつという。$\alpha > 0$ とする。$x, y \in X$ に対して, $x_0 = x, x_1, \cdots, x_k = y$; $y_0 = y, y_1, \cdots, y_l = x$ なる α-p.o. が存在するとき, 点 x は y に α-<u>関係</u>にあるといって, $x \overset{\alpha}{\sim} y$ で表わす。$\forall \alpha > 0$ に対して, $x \overset{\alpha}{\sim} y$ のとき $x \sim y$ で表わす。集合 $R = \{x \in X : x \sim x\}$ を <u>chain recurrent set</u> という。R は閉集合である。Ω は (X, f) に対する非遊走集合とする(定義は§1の(13)を見よ). Ω は閉集合, $\Omega \subset R$ で $f(R) = R$ をみたす。

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

(X, f) が P.O.T.P をもつとすると，$\Omega = R$ が成立する。実際に，$x \in R$ とする。$^\forall \alpha > 0$ に対して $\alpha' > 0$ は P.O.T.P. の定義にでてくるものとする。点列 $\{x_i\}$ は次をみたす α'-P.O. とする；$x_0 = x$, x_1, $\cdots$, $x_k = x$. このとき $y \in X$ があって $d(f^i(y), x_i) < \alpha$ $(0 \leq i \leq k)$ が成立する；i.e. $U_\alpha(x) = \{y \in X : d(x, y) < \alpha\}$ とおくと，$U_\alpha(x) \cap f^{-k}(U_\alpha(x)) \neq \phi$. 故に $x \in \Omega$ がえられる。

f の周期点の全体を $per(f)$ で表わす。

定理 9.2. (X, f) が P.O.T.P. をもてば，(Ω, f) も P.O.T.P. をもつ。

定理 9.2 の証明に必要とする補題を準備する。次の三つの補題では (X, f) は P.O.T.P. をもつと仮定されている。

補題 9.3. $\alpha > 0$ に対して，$^\forall x \in \Omega$ は $f(x)$ に α-関係である。

(証明)

$x \in per(f)$ のときは明らかである。$x \notin per(f)$ の場合に対して，$d(z, x) < \gamma$ ならば $\max\{d(f(z), f(x)), d(f^2(z), f^2(x))\} < \alpha$ なる γ $(0 < \gamma < \alpha)$ をえらぶ。$x \in \Omega$ であるから，$l \geq 3$ があって，$f^{-l}(U_\gamma(x)) \cap U_\gamma(x) \neq \phi$. 故に $f^l(z), z \in U_\gamma(x)$ なる $z \in X$ が存在する。$\{f(x), f^2(z), \cdots, f^{l-1}(z), x\}$ は α-P.O. である。//

補題 9.4. $\alpha > 0$ とする。$\{x^i\}_{i \geq 1} \subset \Omega(f)$ は $\lim x^i = x^0$ なる点列とする。$x^i \overset{\alpha}{\sim} x^{i+1}$ $(i \geq 1)$ ならば，$x^i \overset{\alpha}{\sim} x^0$ $(i \geq 1)$ である。

(証明)

$d(x^j, x^0) < \alpha/2$ $(j \geq J)$ なる $J > 0$ がえらべる。$R = \Omega$ であるから，x^J から x^0 へ そして x^0 から x^J への α-P.O. がそれぞれ構成できる。故に $x^J \overset{\alpha}{\sim} x^0$.//

$\varepsilon > 0$ に対して，$\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ は P.O.T.P. の定義によって存在する数とする。このとき Ω を δ-関係によって類別する；$\Omega = \cup_\lambda A_\lambda$.

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

A_λはf-不変で閉集合である(∵補題9.3, 9.4による). 次の補題9.5から, $\{A_\lambda\}$は有限; i.e. $\Omega = \bigcup_1^k A_i$である。

補題9.5 A_λはΩで開集合である。

(証明)

$x \in A_\lambda$を固定する。$\forall y \in A_\lambda$に対して, Ωの中で, $\{x_0 = x, x_1, ---, x_p = y\}$なる$\delta$-p.o.をえらぶ。$U_\alpha(x) = \{z \in \Omega : d(z, x) < \alpha\}$とする。$f(U_\gamma(x_0)) \subset U_\delta(x_1)$なる$0 < \gamma < \delta/3$をもつ$\gamma$をみつける。このとき$\forall x_0' \in U_\gamma(x_0)$に対して, $\{x_0', x_1, ---, x_p\}$はΩの中でδ-p.o.である。一方, $\{y_0 = y, y_1, ---, y_l = x\} = \theta$は$\Omega$の中の$\delta$-p.o.とする。もしも$f(y_{l-1}) \in \overline{U_\gamma(x_0)} \cap \Omega$であれば, $(\theta \setminus \{y_l\}) \cup \{x_0'\} = \{y_0, y_1, ---, y_{l-1}, x_0'\}$は$\delta$-p.o.である(∵$d(f(y_{l-1}), x_0') \leq 2\gamma < \delta$による). 故に$y \overset{\delta}{\sim} x_0'$. もしも$f(y_{l-1}) \notin \overline{U_\gamma(x_0)} \cap \Omega$であれば, $d(f(y_{l-1}), \overline{U_\gamma(x_0)} \cap \Omega) = d(f(y_{l-1}), z) < \delta$なる$z \in \overline{U_\gamma(x_0)} \cap \Omega$が存在して, $d(x_0', z) \leq 2\gamma$. $z \in \Omega = R$であるから, $z \sim z$; i.e. γ-p.o. $\{z_0 = z, z_1, ---, z_{b+1} = z\}$が$\Omega$の中に存在する。$d(f(z_b), x_0') \leq d(f(z_b), z) + d(z, x_0') \leq 3\gamma < \delta$であるから, $(\theta \setminus \{y_l\}) \cup \{z_0, ---, z_b, x_0'\} = \{y_0, ---, y_{l-1}, z_0, ---, x_0'\}$は$y_0$から$x_0'$への$\delta$-p.o.である。故に$x_0' \in A_\lambda$ そして$U_\gamma(x_0) \subset A_\lambda$. //

定理9.2の証明. $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$は上の如くとする。A_iはΩで開かつ閉であるから, $d(A_i, A_j) = \inf\{d(a, b) : a \in A_i, b \in A_j\} > 0$ $(i \neq j)$である。$\delta_1 = \min\{d(A_i, A_j) : i \neq j\}$とおく。$0 < \alpha < \min\{\delta, \delta_1\}$なる$\alpha$に対して, $\{x_i\}$はΩの中のα-p.o.とする。$\{x_i\}$がΩの中でε-追跡されることを示せば十分である。補題9.3によって, $\{x_i\} \subset A_j$なるA_jが存在する。$x_a, x_b \in \{x_i\}$ $(a < b)$をえらぶ。このとき, $x_a \overset{\delta}{\sim} x_b$. 故に次をみたす$k_1, k_2 > 0$と$(k_1 + k_2)$-cyclic δ-p.o. $\{z_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$が存在する; $x_a = z_{(k_1+k_2)i}$, $x_b = z_{k_1 + (k_1+k_2)i}$ $(\forall i \in \mathbb{Z})$. $k = k_1 + k_2$とおく。(X, f)はP.O.T.P.をもっているから, $d(f^i(y_{a,b}), z_i) < \varepsilon$ $(i \in \mathbb{Z})$なる$y_{a,b} \in X$が存在する。故に$d(f^{ki+j}(y_{a,b}), z_j) < \varepsilon$ $(i \in \mathbb{Z}, 0 \leq j < k)$.

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

$D=\overline{\{f^{k_i}(y_{a,b}):i\in\mathbb{Z}\}}$ が離散的であれば，$l>0$ があって，$f^l(y_{a,b})=y_{a,b}$．故に $y_{a,b}\in\Omega$．D が離散的でなければ，部分列 $\{f^{k_i}(y_{a,b})\}$ があって $f^{k_i}(y_{a,b})\to y'_{a,b}\in X$ $(i\to\infty)$ とできる。明らかに $d(y'_{a,b}, x_a)\leq\varepsilon$ そして $d(f^j(y'_{a,b}), z_j)\leq\varepsilon$ $(j\in\mathbb{Z})$．$y'_{a,b}\in\Omega$ を示さねばならない。$\alpha>0$ に対して，$J>0$ があって，$d(f^{k_j}(y_{a,b}), y'_{a,b})<\alpha$，$d(f^{k_j+1}(y_{a,b}), f(y'_{a,b}))<\alpha$ $(j\geq J)$ とできる。このことから $y'_{a,b}\overset{\alpha}{\sim}y'_{a,b}$ が成立する；i.e. $y'_{a,b}\in R=\Omega$．$y'_{a,b}\to y\in\Omega$ $(a\to-\infty,\ b\to+\infty)$ で $d(f^i(y), x_i)\leq\varepsilon$ $(i\in\mathbb{Z})$．(Ω, f) は P.O.T.P をもつことが証明された。//

(Ω, f) は拡大的であるとし，$e>0$ を拡大的定数とする。$0<\varepsilon<e/2$ なる ε を固定する。$x\in\Omega$ に対して，$W^s_\varepsilon(x)$ そして $W^u_\varepsilon(x)$ は§4で定義された集合とする；i.e. $W^s_\varepsilon(x)=\{y\in\Omega: d(f^n(x), f^n(y))\leq\varepsilon,\ n\geq 0\}$，$W^u_\varepsilon(x)=\{y\in\Omega: d(f^n(x), f^n(y))\leq\varepsilon,\ n\leq 0\}$．次によって安定集合 $W^s(x)$，不安定集合 $W^u(x)$ を定義する；

$$W^s(x)=\cup_{n\geq 0}f^{-n}W^u_\varepsilon(f^n(x)),\quad W^u(x)=\cup_{n\geq 0}f^nW^u_\varepsilon(f^{-n}(x)).$$

次の補題によって，

$$W^s(x)=\{y\in\Omega:\lim_{n\to\infty}d(f^n(x), f^n(y))=0\},$$
$$W^u(x)=\{y\in\Omega:\lim_{n\to\infty}d(f^{-n}(x), f^{-n}(y))=0\}.$$

補題 9.6. $\forall\gamma>0$ に対して，$N>0$ が存在して次をみたす；
$f^n(W^s_\varepsilon(x))\subset W^s_\gamma(f^n(x))$，$f^{-n}(W^u_\varepsilon(x))\subset W^u_\gamma(f^{-n}(x))$ $(\forall x\in X, \forall n\geq N)$.

(証明)

命題を否定する。このとき $y_n\in W^s_\varepsilon(x_n)$，$\lim m_n=\infty$ $d(f^{m_n}(x_n), f^{m_n}(y_n))>\gamma$ なる $x_n, y_n\in X$ と $m_n>0$ が存在する。$y_n\in W^s_\varepsilon(x_n)$ であるから，$d(f^n(f^{m_n}(x_n)), f^n(f^{m_n}(y_n)))\leq\varepsilon$ $(-m_n\leq\forall n)$．$f^{m_n}(x_n)\to x$，$f^{m_n}(y_n)\to y$ $(n\to\infty)$ とすると，$d(f^n(x), f^n(y))\leq\varepsilon$ $(\forall n\in\mathbb{Z})$．一方，$d(x,y)=\lim d(f^{m_n}(x_n), f^{m_n}(y_n))\geq\gamma$．これは拡大的であることに反する。//

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

(Ω, f) は P.O.T.P をもてば，Ω は関係"$\sim$"によって類別される；$\Omega = \cup_\lambda B_\lambda$．ここに B_λ は f-不変で開集合である（∵ 補題 9.3，9.4 による）.

定理 9.7. (Smale's Spectral Decomposition) (Ω, f) が拡大的で P.O.T.P をもてば，Ω に f-不変閉部分集合の有限列 $\{B_i : 1 \leq i \leq k\}$ が存在して，(B_i, f) は topologically transitive で $\Omega = \cup_1^k B_i$ とできる。

この定理は次の補題 9.8，9.9 によってえられる。次の補題では (Ω, f) は拡大的で P.O.T.P. をもつと仮定する。このとき $\overline{per(f)} = \Omega$ は容易に証明できる。

補題 9.8. B_λ は Ω の中で開集合である。

(証明)

$\varepsilon > 0$ は上でえらばれたものとし，$\delta > 0$ は P.O.T.P の定義に現われる数とする。$U_\delta(B_\lambda) = \{y \in \Omega : d(y, B_\lambda) < \delta\}$ とする。$U_\delta(B_\lambda)$ は B_λ を含む開集合である。$p \in U_\delta(B_\lambda) \cap per(f)$ に対して，$d(y, p) < \delta$ なる $y \in B_\lambda$ が存在する。(Ω, f) は P.O.T.P をもつから，$W^u(p) \cap W^s(y) \neq \phi$ そして $W^s(p) \cap W^u(y) \neq \phi$. 故に $y_0 \sim p$ なる $y_0 \in B_\lambda$ が存在する；i.e. $p \in B_\lambda$. $B_\lambda \supset \overline{U_\delta(B_\lambda) \cap per(f)} \supset U_\delta(B_\lambda) \cap \overline{per(f)} = U_\delta(B_\lambda)$；i.e. $B_\lambda = U_\delta(B_\lambda)$. //

Ω のコンパクト性と補題 9.8 によって，$\{B_\lambda\}$ は有限集合；i.e. $\Omega = \cup_1^k B_i$ である。

補題 9.9. (B_i, f) は topologically transitive である。

(証明)

B_i は Ω で開集合であるから（補題 9.8），(B_i, f) は P.O.T.P をもつ。U, V は B_i の空でない開集合とする。$x \in U$，$y \in V$ に対して，$x \sim y$ であるから，x から y への P.O. に対して B_i の中に

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

追跡点をみつけることができる; i.e. $U \cap f^{l}(V) \neq \phi\ (\exists l > 0)$である。//

> 定理 9.10 (Bowen's Decomposition) 定理 9.7 の仮定のもとで, 各 B_i に対して, 次をみたす部分集合 X_p と $a > 0$ が存在する; $f^a(X_p) = X_p$, $X_p \cap f^j(X_p) = \phi\ (0 < j < a)$, (X_p, f^a) は topologically mixing そして $B_i = \bigcup_0^{a-1} f^j(X_p)$.

この定理は次の補題によってえられる。

> 補題 9.11. $p \in B_i \cap Per(f)$ に対して, $X_p = \overline{W^u(p) \cap B_i}$ とおくと, X_p は B_i で開集合である。

(証明)

$f^m(p) = p$ で $U_\delta(X_p) = \{y \in B_i : d(y, X_p) < \delta\}$ とする。ここに $\delta > 0$ は上のようにえらばれたものとする。$q \in U_\delta(X_p) \cap per(f)$ $(f^n(q) = q,\ \exists n > 0)$ に対して, $d(q, x) < \delta$ なる $x \in W^u(p) \cap B_i$ をみつけることができる。(B_i, f) は P.O.T.P. をもつから, $x' \in W^s(q) \cap W^u(x) \cap B_i$ なる x' が存在する。$W^u(x) = W^u(p)$ であるから, $f^{kmn}(x') \in f^{kmn}(W^u(p)) = W^u(p)\ (\forall k > 0)$. 一方, $d(f^{kmn}(x'), f^{kmn}(q)) = d(f^{kmn}(x'), q) \to 0\ (k \to \infty)$. 故に $q \in \overline{W^u(p) \cap B_i} = X_p$; i.e. $U_\delta(X_p) = X_p$.//

$f(X_p) = X_{f(p)}$ であるから, $f^n(X_p) = X_p$. 故に $f^a(X_p) = X_p$ なる $0 < a \leq m$ が存在する。(B_i, f) は topologically transitive であるから, $B_i = X_p \cup f(X_p) \cup \cdots \cup f^{a-1}(X_p)$. 特に, $f(p) = p$ であれば $B_i = X_p$ がえられる。

> 補題 9.12. $q \in X_p \cap per(f)$ に対して, $X_p = X_q$.

(証明)

補題 9.11 の証明から, $U_\delta(X_p) = X_p$ であるから, $W^u_\delta(q) \subset X_p$. $f^m(p) = p$, $f^n(q) = q$ とする。このとき $W^u(q) = \bigcup_{j \geq 0} f^{nmj} W^u_\delta(q)$ であることに注意する。故に $X_q \subset X_p$. 結論をうるために, $p \in X_q$

を仮定する。このとき $0<d(K,X_q)$. ここに $K=X_p\setminus X_q$ でKは開かつ閉である。$q\in X_p=\overline{W^u(p)\cap B_i}$ であるから, $d(z,q)<d(K,X_q)$ なる $z\in W^u(p)\cap B_i$ が存在する。明らかに $z\in X_q$. 一方 $d(f^{-nm_j}(z),p)=d(f^{-nm_j}(z),f^{-nm_j}(p))\to 0$ $(j\to\infty)$. 故に十分大きな $j>0$ に対して $f^{-nm_j}(z)\notin X_q$. 故に $z\notin f^{nm_j}(X_q)=X_q$. 矛盾がえられた。//

補題 9.13. (X_p, f^a) は topologically mixing である。

(証明)

U, V は X_p の空でない開集合とする。$\forall p'\in X_p\cap per(f)$ に対して, $X_p=X_{p'}$ であるから, $p'\in V\cap per(f)$ に対して $U\cap W^u(f^{aj}(p'))\neq\phi$ $(j\in\mathbb{Z})$ をうる。$f^l(p')=p'$ とする。$0\leqq j\leqq l-1$ に対して, $z_j\in U\cap W^u(f^{aj}(p'))$ があって, $f^{-alt}(z_j)\to f^{aj}(p')$ $(t\to\infty)$ とできる。明らかに $f^{aj}(p')\in f^{aj}(V)$. $0\leqq j\leqq l-1$ なる j を固定する。このとき $N_j>0$ があって, $\forall t\geqq N_j$ に対して $f^{-alt}(z_j)\in f^{aj}(V)$ とできる。$N=\max\{N_j: 0\leqq j\leqq l-1\}$ とおく。$\forall t\geqq N$ に対して, $t=ls+j$ $(0\leqq j<l)$. $s\geqq N$ のとき $f^{-at}(z_j)=f^{-als-aj}(z_j)\in V$. $z_j\in U$ であるから, $f^{at}(V)\cap U\neq\phi$ $(t\geqq lN)$.//

次に P.O.T.P. をもつ位相同相の例を与える。距離関数 d_0 をもつコンパクト距離空間 X の直積位相空間 $\Sigma=X^{\mathbb{Z}}$ 上に $d(x,y)=\max_{i\in\mathbb{Z}} d_0(x_i,y_i)/2^{|i|}$ $(x=(x_i),\ y=(y_i)\in\Sigma)$ なる距離関数 d を定義する。明らかに Σ はコンパクト距離空間である。Σ 上に次のような位相同相 σ が定義できる; $\sigma(x_i)=(y_i)$, $y_i=x_{i+1}$ $(\forall i\in\mathbb{Z})$. このような σ を shift とよぶことにする。

定理 9.14. (Σ,σ) は P.O.T.P. をもつ。

(証明)

$\forall\varepsilon>0$ に対して $diam(\Sigma)/2^n<\varepsilon$ なる $n>0$ と $n\delta<\varepsilon$ なる $\delta>0$ をえらぶ。このとき $\forall\delta$-P.O. $\{x^i\}$ が ε-追跡される点 $x\in\Sigma$ が存在することを示せば十分である。$\forall i\in\mathbb{Z}$ に対して,

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

$\delta > d(\sigma(x^i), x^{i+1}) \geq d_0((\sigma x^i)_k, x_k^{i+1})/2^{|k|} = d_0(x_{k+1}^i, x_k^{i+1})/2^{|k|}$
($\forall k \in \mathbb{Z}$) であるから，$d(x_{k+1}^i, x_k^{i+1}) < 2^{|k|}\delta$ ($\forall i \in \mathbb{Z}$, $\forall k \in \mathbb{Z}$).
今，$x = (\cdots, x_0^{-1}, x_0^0, x_0^1, \cdots)$ とおく。このとき $|k| \leq n$ に対して

$$d_0(x_k^i, (\sigma^i x)_k) = d_0(x_k^i, x_0^{i+k}) \leq \sum_{j=0}^{k-1} d_0(x_{k-j}^{i+j}, x_{k-j-1}^{i+j+1}) < |k| 2^{|k|}\delta.$$

故に $d_0(x_k^i, (\sigma^i x)_k)/2^{|k|} \leq |k|\delta < \varepsilon$. $|k| \geq n$ に対して，

$$d_0(x_k^i, (\sigma^i x)_k)/2^{|k|} < diam(\Sigma)/2^{|n|} < \varepsilon.$$

結果として，$d(x^i, \sigma^i(x)) < \varepsilon$ ($\forall i \in \mathbb{Z}$) がえられた。//

$k \in \mathbb{Z}$ ($k > 1$) を固定する。$X = \{0, 1, \cdots, k-1\}$ の場合を考える。$\Sigma = \{0, 1, \cdots, k-1\}^{\mathbb{Z}}$ は完全不連結である。次によって与えられた距離関数は上で与えた Σ 上の距離関数と同値である；
$d(x, y) = 2^{-m}$ ($x_i = y_i$, $\forall |i| < m$, $x_m \neq y_m$), $d(x, y) = 1$ ($x_0 \neq y_0$).

$\sigma(S) = S$ なる Σ の閉部分集合が存在するとき，(S, σ) を <u>subshift</u> という。(S, σ) が <u>subshift of finite type</u> であるとは，$N > 0$ と $C \subset \prod_0^N \{0, 1, \cdots, k-1\}$ があって，S が次の部分集合と一致することである；

$$S = \left\{ x \in \Sigma : \forall x \in S \text{ の長さ } N+1 \text{ の任意の block}(x_i, \cdots, x_{i+N}) \text{ は } C \text{ の元である.} \right\}$$

ここに N を (S, σ) の <u>order</u> という。

注意. すべての subshift of finite type は order 1 の subshift of finite type と位相同型である。実際に，上の集合 C は有限集合であるから，C の各元 (block) を点として，直積位相空間 $S_c = C^{\mathbb{Z}}$ とその上の shift σ' を定義する。このとき

$$\varphi(\cdots, x_{-1}, x_0, x_1, \cdots) = \left(\cdots, \begin{pmatrix} x_{-1} \\ \vdots \\ x_{N-2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}, \cdots \right)$$

によって，$\varphi : S \to S_c$ が定義される。φ は 1-1 連続写像であることは明らかである。更に $\varphi \circ \sigma = \sigma' \circ \varphi$ がえられるから，$S_c' = \varphi(S)$

とおくとき，(S_c', σ') は order 1 の subshift of finite type である。

> 定理 9.15. (S, σ) は (Σ, σ) の subshift とする。このとき (S, σ) が P.O.T.P. をもつ必要十分条件は (S, σ) が subshift of finite type である。

(証明)

$\Leftarrow$): (S, σ) は order 1 と考えてよい(以上の注意より). $\forall \varepsilon > 0$ に対して，$2^{-m} < \varepsilon$ なる $m \geq 1$ が存在する。$x = (x_i)$, $y = (y_i) \in S$ に対して，

$d(x, y) < 2^{-(m+1)} \Rightarrow x_i = y_i \ (\forall |i| < m)$.

$\{x^{(j)}\}$ は $2^{-(m+1)}$-P.O. であるとする; i.e. $d(\sigma(x^{(j)}), x^{(j+1)}) < 2^{-(m+1)}$ $(\forall j \in \mathbb{Z})$. このとき $x_1^{(j)} = x_0^{(j+1)}$ $(\forall j \in \mathbb{Z})$ である。今，$x_n = x_0^{(n)}$ $(n \in \mathbb{Z})$ で $x = (x_n)$ とおく。このとき $x \in S$. 実際に，$\forall i \in \mathbb{Z}$ に対して，$(x_i, x_{i+1}) = (x_0^{(i)}, x_0^{(i+1)}) = (x_0^{(i)}, x_1^{(i)})$. $(\sigma^j x)_i = x_i^{(j)}$ $(|i| < m)$ であるから，$d(\sigma^j(x), x^{(j)}) \leq 2^{-m} < \varepsilon$ $(j \in \mathbb{Z})$. 故に (S, σ) は P.O.T.P. をもつ。

$\Rightarrow$): (Σ, σ) は拡大的であることを示す。$(x_i) \neq (y_i)$ とすると，$x_n \neq y_n$ なる n が存在する。故に $d(\sigma^n(x_i), \sigma^n(y_i)) \geq 1$. 1 が拡大的定数である。明らかに (S, σ) も拡大的である。$\varepsilon > 0$ は (S, σ) の拡大的定数で $\delta > 0$ は P.O.T.P. の定義に現われる数とする。このとき $\forall \delta$-P.O. は $\varepsilon/2$-追跡されることに注意する(仮定によって). $\forall |i| \leq N-1$ に対して，$x_i = y_i$ ならば，$d(x, y) < \delta$ なる $N > 0$ が存在する。

$$A = \left\{ \begin{array}{l} \forall x \in \Sigma \text{ に対して，} x \text{ の長さ } 2N+1 \text{ のすべての block} \\ \quad (x_{i-N}, \cdots, x_i, \cdots, x_{i+N}) \text{ の全体} \end{array} \right\}$$

とおく。A は有限集合である。

$S(A) = \{x \in S : (x_{i-N}, \cdots, x_{i+N}) \in A, \ \forall i \in \mathbb{Z}\}$

とすれば，$S \subset S(A)$ で，$S(A)$ は σ-不変，閉集合である。故に $(S(A), \sigma)$ は subshift of finite type である。$S = S(A)$ を示せば結論をうる。実際に，$\forall y \in S(A)$, $\forall i \in \mathbb{Z}$ に対して，$(y_{i-N}, \cdots, y_i, \cdots, y_{i+N}) \in A$. $y_{i+j} = x_j^i$ $(|j| \leq N)$ となる $x^i \in S$ が存在し，$d(\sigma^i(y), x^i) < \delta$

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

である。故に，$z \in S$ があって $d(\sigma^i(z), x^i) < \varepsilon/2$. 故に $d(\sigma^i(z), \sigma^i(y)) < \varepsilon$ $(\forall i \in \mathbb{Z})$. $\varepsilon > 0$ は拡大的定数であるから，$z = y$; i.e. $y \in S$. (S, σ) は subshift of finite type である。//

$C \subset [0, 1]$ は Cantor 集合とする；C の各元 x は $x = a_1/3 + a_2/3^2 + \cdots$ (各 $a_i = 0$ か 2) なる性質をもつ。$\mathcal{H}(C)$ は C 上の位相同相の全体を，$\mathcal{P}(C)$ は P.O.T.P. をもつ位相同相の全体を表わすとする。$\forall f, g \in \mathcal{H}(C)$ に対して，$\bar{d}(f, g) = \max\{d(f(x), g(x)) : x \in C\}$ とおくと，$\bar{d}$ は $\mathcal{H}(C)$ 上の距離関数で，$(\mathcal{H}(C), \bar{d})$ は完備距離空間である。$\forall r \geq 1$ に対して，$C \cap [i/3^r, (i+1)/3^r] \neq \phi$ $(0 \leq i \leq 3^r - 1)$ なる集合を階数 r の Cantor 部分区間とよんで，$I(i, r)$ で表わす。明らかに，$C = \bigcup_{i=1}^{2^r} I(i, r)$ で $I(i, r) = I(2i-1, r+1) \cup I(2i, r+1)$ が成立する。$g \in \mathcal{H}(C)$ が次の条件をみたすとき，g を generalized permutation とよぶことにする；(i) $1 \leq \forall i \leq 2^r$ に対して，$s = s(i) \geq 1$ と $1 \leq j = j(i) \leq 2^s$ があって，$g(I(i, r)) = I(j, s)$，(ii) $1 \leq \forall i \leq 2^r$ に対して，$k = k(i) \in C$ があって，$g(x) = 3^{r - s(i)} x + k$ $(x \in I(i, r))$. すべての generalized permutation の全体を $\mathcal{G}(C)$ で表わす。

定理 9.16. $\mathcal{G}(C)$ は $\mathcal{H}(C)$ で稠密である。

(証明)

$\forall f \in \mathcal{H}(C)$ と $\forall r \geq 1$ に対して，$d(x, y) < 3^{-s}$ ならば，$d(f(x), f(y)) < 3^{-r}$ となる $s \geq 1$ をえらぶ。このとき $1 \leq \forall j \leq 2^s$ に対して，$1 \leq i_j \leq 2^r$ があって $f(I(j, s)) \subset I(i_j, r)$ とできる。f は上への写像であるから，$1 \leq i \leq 2^r$ に対して $n \geq 1$ と $j_1, \cdots, j_n > 0$ があって $f(\bigcup_{k=1}^{n} I(j_k, s)) = I(i, r)$. $I(i, r)$ は n 個の Cantor 部分区間の和集合で表わされる；i.e. $I(i, r) = \bigcup_{k=1}^{n} I(i_k, r_k)$. 今，$g(I(j_k, s)) = I(i_k, r_k)$ $(1 \leq k \leq n)$ なる $g \in \mathcal{G}(C)$ を構成することができる。明らかに $\bar{d}(f, g) < 3^{-r}$.//

定理 9.17. $\mathcal{P}(C)$ は $\mathcal{H}(C)$ で稠密である。

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

(証明)

$\forall g \in \mathcal{G}(C)$ が P.O.T.P. をもつことを示せば十分である。
$g \in \mathcal{G}(C)$ に対して，$r_0 \geq 1$ があって，$\forall r \geq r_0$ に対して，g は generalized permutation の定義の (i),(ii) をみたすようにできる。$\varepsilon > 0$ に対して，$3^{-r} < \varepsilon$ となる $r \geq r_0$ をえらぶ。$\forall x \in C$ と $\forall i \in \mathbb{Z}$ に対して，$g^i(x) \in I(x_i, r)$ なる $x_i \in \{1, 2, \cdots, 2^r\}$ を定義する。$\forall n \geq 1$, $\forall x \in C$ に対して $\bigcap_{j=1}^{n} g^j(I(x_{-j}, r))$ は Cantor 部分区間であることに注意する。$\Sigma = F^{\mathbb{Z}}$ とおく。ここに $F = \{1, 2, \cdots, 2^r\}$. σ は Σ 上の shift とする。$x \in C$ に対して，$h(x) = (x_i)$ とおくと，$h : C \to \Sigma$ は連続写像で $h \circ g = \sigma \circ h$ をみたす。

$$A = \{x \in C : \bigcap_{j=1}^{\infty} g^j I(x_{-j}, r) \subsetneqq I(x_0, r)\}$$

とする。$x \in A$ に対して，次をみたす最小の正整数を $n(x)$ とする; $\bigcap_{j=1}^{n(x)} g^j I(x_{-j}, r) \subsetneqq I(x_0, r)$. $x \in C \setminus A$ に対して，次をみたす最小の正整数を同じく $n(x)$ とする; $\bigcap_{j=1}^{n(x)} g I(x_{-j}, r) = \bigcap_{j=1}^{\infty} g^j I(x_{-j}, r) \supset I(x_0, r)$.
このとき $\max_{x \in C} \operatorname{rank}\{\bigcap_{j=1}^{n(x)} g^j I(x_{-j}, r)\} = \max_{i \in F} \operatorname{rank}\{g I(i, r)\} < \infty$.
故に $\{\bigcap_{j=1}^{n(x)} g^j I(x_{-j}, r) ; x \in C\}$ は有限である。今，$\bigcap_{j=1}^{n(x)} g^j I(x_{-j}, r) = \bigcap_{j=1}^{n(x')} g I(x'_{-j}, r)$ とすると，$1 \leq j \leq \min\{n(x), n(x')\}$ なる j に対して，$x_{-j} = x'_{-j}$ をうる。$n(x)$, $n(x')$ は最小であるから，$n(x) = n(x')$ をうる。故に $\{n(x) : x \in C\}$ は有限集合である。$N = \max_{x \in C} n(x)$ とおき，

$$B = \{(i_0, i_{-1}, \cdots, i_{-N}) \in F^{N+1} : \bigcap_{j=0}^{N} g^j I(i_{-j}, r) \neq \phi\}$$

を定義する。$(h(C), \sigma)$ が order $N+1$ の subshift of finite type であることを示すために，次を定義する;

$$\Sigma(B) = \{(i_j) \in \Sigma : (i_j, i_{j-1}, \cdots, i_{j-N}) \in B,\ \forall i \in \mathbb{Z}\}.$$

明らかに，$\Sigma(B)$ は閉集合で $\sigma(\Sigma(B)) = \Sigma(B)$. $(\Sigma(B), \sigma)$ は order $N+1$ の subshift of finite type である。定義によって，$h(C) \subset \Sigma(B)$ である。$h(C) \supset \Sigma(B)$ を示す; i.e.

$$(*) \quad (i_{-j}, i_{-(j+1)}, \cdots, i_{-(j+N)}) \in B \quad (0 \leq j \leq m-N)$$
$$\Rightarrow$$
$$\bigcap_{j=0}^{m} g^j I(i_{-j}, r) \neq \phi \quad (m \geq N)$$

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

を示す。m に関する帰納法を利用する。$m=N$ のとき，(*) が成立する。m に対して(*)が成立すると仮定する。$(i_{-j},\cdots,i_{-(j+N+1)})\in B$ $(0\leq j\leq (m+1)-N)$ なる長さ $m+1$ の block $(i_0,i_{-1},\cdots,i_{-(m+1)})\in F^{m+1}$ をえらぶ。仮定によって，$\bigcap_{j=0}^{m+1} g^j I(i_{-j},r)\neq\phi$. 故に $\bigcap_{j=1}^{N} g^j I(i_{-j},r)\neq\phi$. $x\in\bigcap_{j=1}^{N} g^j I(i_{-j},r)$ とする。$x\in A$ のとき，$\bigcap_{j=1}^{N} g^j I(i_{-j},r)\subsetneq I(i_0,r)$. 故に，

$$\bigcap_{j=0}^{m+1} g^j I(i_{-j},r)=\bigcap_{j=1}^{m+1} g^j I(i_{-j},r)\neq\phi.$$

$x\notin A$ のとき

$$\bigcap_{j=1}^{m+1} g^j I(i_{-j},r)=\bigcap_{j=1}^{N} g^j I(i_{-j},r)\supset I(i_0,r).$$

故に $\bigcap_{j=0}^{m+1} g^j I(i_{-j},r)\neq\phi$. $h(C)=\Sigma(B)$ が示された。

d' は Σ の距離関数とし，$\varepsilon'>0$ は $d'(s,t)<\varepsilon'$ なるとき $s_0=t_0$ となるような数とする。$(h(C),\sigma)$ は subshift of finite type であるから，$\forall\delta$-P.O. $\{s^n\}\subset C$ に対して，$d'(\sigma^n(s),s^n)<\varepsilon'$ なる $s\in h(C)$ が存在する。$d(x,y)<\eta$ $(x,y\in C)$ は $d'(h(x),h(y))<\delta$ となるように $\eta>0$ をえらぶ。η-P.O. $\{x_n\}$ (of g) をとると，$\{h(x^n)\}$ は δ-P.O. (of σ) で，$d'(\sigma^n h(x),h(x^n))<\varepsilon'$ なる $x\in C$ が存在する。故に，$(g^n x)_0=(x^n)_0$ $(n\in\mathbb{Z})$ よして $d(g^n x,x^n)<3^{-r}<\varepsilon$ $(n\in\mathbb{Z})$. //

$\boxed{\text{注意}}$ C 上の恒等写像 id は generalized permutation である。従って id は P.O.T.P. をもつ。コンパクト完全不連結群上のすべての自己同型は P.O.T.P. をもつことが[3]に証明されている。

f-不変閉集合 K $(f(K)=K)$ が $K=\phi$ か $K=X$ に限るとき，(X,f) は <u>minimal</u> であるという。A は $\mathbb{Z}$ の部分集合とする。$\mathbb{Z}=K+A$ なる有限集合 K が存在するとき，A は <u>syndetic</u> であるという。$x\in X$ が <u>almost periodic point</u> であるとは，x の任意の開近傍 U に対して，$\{n\in\mathbb{Z}: f^n(x)\in U\}$ が syndetic になることである。$\inf\{d(f^n(x),f^n(y)): n\in\mathbb{Z}\}=0$ のとき，$x=y$ に限るならば，(X,f) は <u>distal</u> であるという。$\forall x\in X$ が almost periodic point

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

である必要十分条件は (X, f) が distal であることである(P.36, [18])。同程度連続な位相同相は distal である。従って等距離同相は distal である。distal であっても同程度連続にならない位相同相が存在する。例えば，T^2 は2-次元トーラスとし，$\varphi(x_1, x_2) = (\alpha + x_1, n x_1 + x_2)$ によって φ を定義する。ここに $\alpha \in T^2$，$n > 0$ とする。φ は distal であるが同程度連続ではない。(X, f) が distal であれば，X の各元は非遊走点；i.e. $X = \Omega$. (X, f) が minimal であれば，空でない開集合 U を正にする f-不変確率測度 μ が存在する(cf. P.132, [76])。

定理 9.18 X は連結で，一点集合ではないと仮定する。(X, f) が minimal であれば，(X, f) は P.O.T.P. をもたない。

補題 9.19. (X, f) は P.O.T.P. をもてば，$\forall \varepsilon > 0$ と $\forall x_0 \in \Omega$ に対して，$y \in X$ と $k = k(x_0, \varepsilon) > 0$ があって $\overline{O_{f^k}(y)} \subset U_\varepsilon(x_0)$ $(= \{z \in X : d(x_0, z) < \varepsilon\})$ とできる。

(証明)

$x_0 \in \Omega$ であるから，$0 < \delta < \varepsilon$ なる P.O.T.P. をみたす δ に対して $x \in X$ と $k > 0$ があって $x, f^k(x) \in U_{\delta/2}(x_0)$ とできる。今，$x_{nk+i} = f^i(x)$ $(n \in \mathbb{Z}, 0 \leq i < k)$ とおく。明らかに，$\{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}} = \{\cdots, x, f(x), \cdots, f^{k-1}(x), \cdots\}$ は δ-P.O. である。故に $d(f^i(y), x_i) < \varepsilon$ $(i \in \mathbb{Z})$ なる $y \in X$ が存在する。特に，$d(f^{nk}(y), x_{nk}) < \varepsilon$. 故に $d(f^{nk}(y), x) < \varepsilon$ $(n \in \mathbb{Z})$；i.e. $\overline{O_{f^k}(y)} \subset U_\varepsilon(x_0)$. //

定理 9.18 の証明. $\varepsilon = \mathrm{diameter}(X)/3$ とし，(X, f) は P.O.T.P. をもつとする。補題9.19によって $x_0 \in \Omega$ に対して $y \in X$ と $k > 0$ があって $\overline{O_{f^k}(y)} \subset U_\varepsilon(x_0)$ とできる。X は連結であるから，$\overline{O_{f^k}(x)} = \overline{O_f(x)} = X$. 故に $\mathrm{diameter}(X) \leq 2\varepsilon$. 矛盾がえられた。//

補題 9.20. (X, f) は P.O.T.P. をもつとする。$\forall k > 0$ に対して，(X, f^k) も P.O.T.P. をもつ。

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

(証明)

$\forall\varepsilon>0$ に対して，$\delta>0$ があって $\forall\delta$-P.O. $\{x_i\}$ は X の点で ε-追跡される。$\{y_i\}$ は δ-P.O. として，$x_{nk+i}=\varphi^i(y_n)$ $(n\in\mathbb{Z},\ 0\leqslant i<k)$ とおく。明らかに $\{x_i\}$ は δ-P.O. である。故に $y\in X$ があって $d(f^i(y),x_i)<\varepsilon$ $(i\in\mathbb{Z})$. 特に，$d(f^{kn}(y),y_n)=d(f^{kn}(y),x_{nk})<\varepsilon$ $(n\in\mathbb{Z})$. //

補題 9.21. (X,f) は distal とする。このとき $\forall x\in X$ に対して $(\overline{O_f(x)},f)$ は minimal である。

(証明)

$\forall x\in X$ は almost periodic であるから，x の近傍 U に対して，$A=\{n\in\mathbb{Z}: f^n(x)\in U\}$ とおくと，$\mathbb{Z}=K+A$ なる有限集合 $K=\{n_1,\cdots,n_k\}$ が存在する。故に $\overline{O_f(x)}=\overline{\{f^n(x):n\in A\}}\cup\overline{\{f^{n+n_1}(x):n\in A\}}\cup\cdots\cup\overline{\{f^{n+n_k}(x):n\in A\}}$ である。$y\in\overline{O_f(x)}$ とするとき，$O_f(y)\cap U\neq\phi$; i.e. $x\in\overline{O_f(y)}$. 故に $\overline{O_f(x)}=\overline{O_f(y)}$. //

$\boxed{\text{注意}}$ (X,f) が distal で topologically transitive であれば，明らかに minimal である（∵補題 9.21）. 特に f は等距離的であるとする。このときコンパクト可換群 X^* とその上の rotation g が存在して，(X,f) は (X^*,g) に位相同型 (topollogically conjugacy) である。実際に，(X,f) は topologically transitive であるから，$\overline{O_f(x_0)}=X$ なる点 $x_0\in X$ が存在する。$\forall n,m\in\mathbb{Z}$ に対して，$f^n(x_0)*f^m(x_0)=f^{n+m}(x_0)$ とおく。このとき

$$\begin{aligned}
&d(f^n(x_0)*f^m(x_0),\ f^p(x_0)*f^q(x_0))=d(f^{m+n}(x_0),\ f^{p+q}(x_0))\\
&\leqslant d(f^{n+m}(x_0),\ f^{p+m}(x_0))+d(f^{p+m}(x_0),\ f^{p+q}(x_0))\\
&=d(f^n(x_0),\ f^p(x_0))+d(f^m(x_0),\ f^q(x_0)).
\end{aligned}$$

故に $*: O_f(x_0)\otimes O_f(x_0)\longrightarrow O_f(x_0)$ は一様連続である.
$d(f^{-n}(x_0),f^{-m}(x_0))=d(f^m(x_0),f^n(x_0))$ であるから，inverse: $O_f(x_0)\to O_f(x_0)$ も一様連続である。$*$ は $X\otimes X$ 上に，inverse は X 上に拡張できる。故に X は演算 $*$ によって位相群になる。$\{f^n(x_0)\}$ は $*$ による可換群で，稠密性によって，X はコンパクト可換群

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

X^*になる。$f(f^n(x_0)) = f^{n+1}(x_0) = f(x_0) * f^n(x_0)$ $(n \in \mathbb{Z})$によって，$f(x) = f(x_0) * x$ $(\forall x \in X^*)$ //

> 定理 9.22. Xは連結であるとする。(X, f)が distal であれば，(X, f)は P.O.T.P. をもたない。

(証明)

(X, f)は P.O.T.P. をもつと仮定して，矛盾を証明する。$\varepsilon = \mathrm{diameter}(X)/9$とする。$\delta > 0$は P.O.T.P. の定義に現われる数とする。補題 9.19 によって，$y_0 \in \Omega$に対して$O_{f^k}(y) \subset U_\varepsilon(y_0)$なる$y \in X$と$k > 0$が存在する。$g = f^k$とおく。補題 9.20 によって，$(X, g)$は P.O.T.P. をもつ。distal でもある。Xは連結でコンパクトであるから，点列$\{p_i\}_{i=1}^N \subset X$が次をみたすようにえらべる；$p_1 = y$，$d(p_i, p_{i+1}) < \delta/2$ $(1 \leqslant i \leqslant N-1)$で$\bigcup_{i=1}^N U_\delta(p_i) = X$．$X$の各元は almost periodic であるから，$d(p_i, f^{c(i)}(p_i)) < \delta/2$なる$c(i) > 0$が存在する。

$x_i = g^{-i}(p_1)$ $(i < 0)$；$x_i = g^i(p_1)$ $(0 \leqslant i \leqslant c(1) - 1)$

$x_{c(1)+i} = g^i(p_2)$ $(0 \leqslant i \leqslant c(2) - 1)$；---

$x_{c(1)+\cdots+c(N-1)+i} = g^i(p_N)$ $(0 \leqslant i \leqslant c(N) - 1)$；

$x_{c(1)+\cdots+c(N)+i} = g^i(p_{N-1})$ $(0 \leqslant i \leqslant c(N-1) - 1)$；

---；$x_{c(1)+2c(2)+\cdots+2c(N-1)+c(N)+i} = g^i(p_1)$ $(i \geqslant 0)$．

明らかに$\{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$は$\delta$-p.o.で，$\forall y \in X$に対して$d(y, x_i) < \delta$なる$x_i \in \{x_i\}$が存在する。仮定によって$\varepsilon$-追跡点$z \in X$がえらべて$d(g^i(z), x_i) < \varepsilon$ $(i \in \mathbb{Z})$．故に，$\forall y \in X$に対して$y' \in O_g(z)$があって$d(y, y') < 2\varepsilon$．特に

$d(g^i(z), g^i(p_1)) = d(g^i(z), g^i(y)) < \varepsilon$ $(i < 0)$，

$d(g^{i+c}(z), g^i(p_1)) = d(g^{c+i}(z), g^i(y)) < \varepsilon$ $(i \geqslant 0)$．

ここに$c = c(1) + c(N) + 2\sum_{i=2}^{N-1} c(i)$である。故に

$g^i(z) \in U_\varepsilon(g^i(y)) \subset \bigcup_{h \in \overline{O_g(y)}} U_\varepsilon(h) = U_\varepsilon(\overline{O_g(y)})$ $(i < 0)$，

$g^{c+i}(z) \in U_\varepsilon(g^i(y)) \subset U_\varepsilon(\overline{O_g(y)})$ $(i \geqslant 0)$．

$O_g^-(z) = \{g^i(z) : i < 0\}$そして$O_g^+(z) = \{g^i(z) : i \geqslant 0\}$とおくと，

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

$\overline{O_\varphi^-(z)} \subset U_\varepsilon(O_g(y))$, $g^c(\overline{O_g^+(z)}) \subset U_\varepsilon(\overline{O_g(y)})$ をうる。$O_g^-(z) \cup O_g^+(z) = O_g(z)$ であるから，$\overline{O_g^-(z)}$ か $\overline{O_g^+(z)}$ のいずれかが $\overline{O_g(z)}$ の中で空でない内点をもつ。μ は $\overline{O_g(z)}$ 上の g-不変確率測度とすると，$(\overline{O_g(z)}, g)$ は *minimal* であるから(∵補題 9.21)，μ は $\overline{O_g(z)}$ の空でない開集合を正にもつ。$\overline{O_g(z)}$ の中で $\overline{O_g^-(z)}$ の内点集合が空でないとする。このとき $\overline{O_g^-(z)} = g\,\overline{O_g^-(z)}$ が成立する。実際に $g^{-1}\overline{O_g^-(z)} \subsetneq \overline{O_g^-(z)}$ を仮定する。このとき $V = \bigcap_{k\geq 0} g^{-k}\overline{O_g^-(z)}$ は $\overline{O_g(z)}$ の中で $\overline{O_g^-(z)}$ の内点を含まない。故に $\mu(\overline{O_g^-(z)} \setminus V) > 0$. $W = \overline{O_g^-(z)} \setminus g^{-1}\overline{O_g^-(z)}$ とおくと，$\overline{O_g^-(z)} = \bigcup_{k\geq 0} g^{-k} W \cup V$ であるから，$\mu(W) > 0$. 故に $\mu(\overline{O_g^-(z)}) \leq 1$ に矛盾する。$\overline{O_g(z)}$の中で $\overline{O_g^+(z)}$ の内点集合が空でなければ，$g\,\overline{O_g^+(z)} = \overline{O_g^+(z)}$ をうる。いずれの場合も $\overline{O_g(z)} = \overline{O_g^-(z)}$ か $\overline{O_g(z)} = \overline{O_g^+(z)}$ が成立する。故に $\overline{O_g(z)} \subset U_\varepsilon(\overline{O_g(y)})$ そして $\overline{O_g(z)} \subset U_\varepsilon(\overline{O_g(y)}) \subset U_{2\varepsilon}(y_0)$ ($\overline{O_g(y)} \subset U_\varepsilon(y_0)$ であるから). $\max_{x\in X} d(\overline{O_g(z)}, x) \leq 2\varepsilon$ であるから，$X = U_{2\varepsilon}(\overline{O_g(z)})$. 故に $X = U_{4\varepsilon}(y_0)$; i.e. *diameter* $(X) \leq 8\varepsilon$. 矛盾がえられた。//

前のように $\mathcal{H}(X)$ は X 上の位相同相全体の集合とする。(X, f) が<u>位相的安定</u>であるとは，$\forall\varepsilon > 0$ に対して，$\delta > 0$ があって $\forall g \in \mathcal{H}(X)$ で $\max_{x\in X} d(f(x), g(x)) < \delta$ をみたしているとする。このとき $d(h(x), x) < \varepsilon$ なる X 上の連続写像 h が存在して $h\circ g = f\circ h$ をみたすことである。

<u>定理 9.23</u>. (X, f) は拡大的で P.O.T.P をもっているとする。このとき (X, f) は位相的安定である。

証明に対して二つの補題を準備する。

<u>補題 9.24</u>. (X, f) は拡大的で，$e > 0$ は拡大的定数となる。このとき $\forall N \geq 1$ に対して，$\delta > 0$ があって $d(x, y) < \delta$ ならば，$d(f^n(x), f^n(y)) \leq e$ $(\forall |n| \leq N)$ である。逆に，$\forall\varepsilon > 0$ に対して，$N \geq 1$ があって $d(f^n(x), f^n(y)) \leq e$ $(\forall |n| \leq N)$ ならば，$d(x, y) \leq \varepsilon$ である。

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

(証明)

前半はf, f^{-1}の一様連続性より明らかである。後半を示すために命題を否定する; i.e. $\forall n \geq 1$に対して, x_n, y_nがあって$d(f^j(x_n), f^j(y_n)) \leq e$ $(\forall |j| \leq n)$かつ$d(x_n, y_n) \geq \varepsilon$をみたす$\varepsilon > 0$が存在する。$x_n \to x$, $y_n \to y$ $(n \to \infty)$であるから, $d(x, y) \geq \varepsilon$, $d(f^j(x), f^j(y)) \leq e$ $(\forall j \in \mathbb{Z})$. (X, f)の拡大的であることに矛盾する。//

補題 9.25. $0 < {}^\forall\varepsilon < e/2$に対して, $\delta > 0$はP.O.T.P.をみたす数とする。このとき$\forall\delta$-P.O. $\{x_n\}$に対して, $d(f^n(x), x_n) \leq \varepsilon$ $(n \in \mathbb{Z})$なる$x \in X$は一意的である。

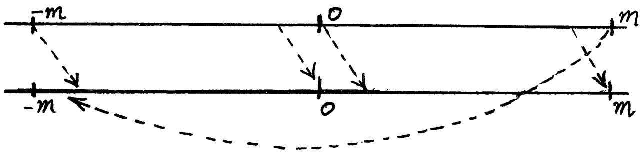
(証明)

$d(f^n(y), x_n) < \varepsilon$ $(\forall n \in \mathbb{Z})$とすると, $d(f^n(x), f^n(y)) \leq d(f^n(x), x_n) + d(x_n, f^n(y)) \leq 2\varepsilon$ $(\forall n \in \mathbb{Z})$. 故に$x = y$. //

定理 9.22 の証明. $0 < {}^\forall\varepsilon < e/3$に対して 上のように$\delta > 0$はP.O.T.P.をみたす数とする。このとき$d(g(x), f(x)) < \delta$ $(\forall x \in X)$なる$g \in \mathcal{H}(X)$に対して, $d(fg^n(x), g^{n+1}(x)) < \delta$ $(\forall x \in X, \forall n \in \mathbb{Z})$. 故に$\{g^n(x)\}$は$f$の$\delta$-P.O.である。補題 9.25によって, $h(x)$が一意的に存在して, $d(f^j h(x), g^j(x)) < \varepsilon$ $(j \in \mathbb{Z})$. $j = 0$のとき, $d(h(x), x) < \varepsilon$ $(\forall x \in X)$. $d(f^j h(x), g^{j+1}(x)) < \varepsilon$ $(j \in \mathbb{Z})$そして$d(f^j(fh(x)), g^{j+1}(x)) = d(f^{j+1}h(x), g^{j+1}(x)) < \varepsilon$ $(j \in \mathbb{Z})$. 故に$hg(x), fh(x)$は$\{g^j(x)\}$をε-追跡している。補題 9.25によって, $hg(x) = fh(x)$ $(\forall x \in X)$. $h: X \circlearrowleft$の連続性を示す。$\forall\lambda > 0$に対して, 補題 9.23によって, $N \geq 1$があって$d(f^n(u), f^n(v)) < e$ $(\forall |n| \leq N)$ならば, $d(u, v) < \lambda$. 次をみたす$\eta > 0$が存在する; $d(x, y) < \eta$ならば, $d(g^n(x), g^n(y)) < e/3$ $(\forall |n| \leq N)$. 故に$d(x, y) < \eta$ならば, $\forall |n| \leq N$に対して $d(f^n h(x), f^n h(y)) = d(hg^n(x), hg^n(y)) < d(hg^n(x), g^n(x)) + d(g^n(x), g^n(y)) + d(g^n(y), hg^n(y)) < \varepsilon + e/3 + \varepsilon < e$. 故に$d(x, y) < \eta$ならば, $d(h(x), h(y)) < \lambda$ i.e. $h: X \circlearrowleft$は連続である。//

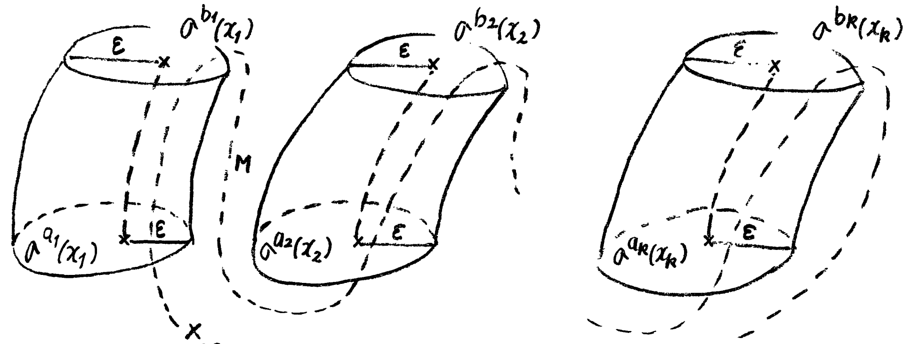
Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

$\boxed{\text{注意}}$ 上のような $h: X$↺ は一般に onto ではない。実際に、前のように $\Sigma=\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ 上の距離関数 d を定義する; $d(x,y)=2^{-m}$ $(x_n=y_n,\ \forall|n|<m,\ x_m\neq y_m)$ そして $=1$ $(x_0\neq y_0)$. Σ 上の shift σ は拡大的で P.O.T.P. をもっている。Σ 上に位相同相 g を次のようにして定義する; $(gx)_n=x_n$ $(n<-m,\ n>m)$, $(gx)_n=x_{n+1}$ $(-m\leq n<n)$, $(gx)_m=x_{-m}$.



$m>0$ は十分大であるとする; $d(g(x),f(x))<\delta<1/2^m$ $(x\in\Sigma)$.
ここで $\varepsilon>0$ に対して、$\delta>0$ は P.O.T.P. をみたすものとする。このとき $h:\Sigma$↺ が存在して $h\circ g=f\circ h$, $d(h(x),x)<\varepsilon$ $(\forall x\in\Sigma)$ をみたす。$g^{2m+1}(x)=x$ $(\forall x\in\Sigma)$ であるから、$h(x)=hg^{2m+1}(x)=\sigma^{2m+1}h(x)$ $(\forall x\in\Sigma)$. 今 $h(X)=X$ とすると、$\sigma^{2m+1}(x)=x$ $(\forall x\in\Sigma)$. σ は Σ 上の shift であるから矛盾である。

次をみたす (X,f) は <u>specification</u> をもつという; $\forall\varepsilon>0$ に対して、$M_\varepsilon=M>0$ があって、$\forall k\geq 1$, $a_j-b_{j-1}\geq M$ $(2\leq j\leq k)$ なる任意の整数列 $a_1\leq b_1<a_2\leq b_2<\cdots<a_k\leq b_k$ と $\forall k$ 個の点 $x_1,x_2,\cdots,x_k\in X$, $\forall p\geq M+(b_k-a_1)$ に対して、$f^p(x)=x$ なる $x\in X$ が存在して、$d(f^j(x),f^j(x_i))<\varepsilon$ $(a_i\leq j\leq b_i,\ 1\leq i\leq k)$ をみたす。



specification の定義の中で存在する点 $x\in X$ が周期点 $(f^p(x)=x)$ の条件を除いた他は全く同じとき、(X,f) は <u>weak specification</u>

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

をみたすという。

<u>定理 9.26</u>. (X, f) は topologically mixing で P.O.T.P. をもてば、(X, f) は weak specification をみたす。

(証明)

$\forall \varepsilon > 0$ に対して、$\delta > 0$ は P.O.T.P. の定義で存在する数とする。$\mathcal{U}$ は δ-ball の有限被覆とする。(X, f) は topologically mixing であるから、$\forall U_i, U_j \in \mathcal{U}$ に対して、$M_{i,j} > 0$ が存在して、$f^n(U_i) \cap U_j \neq \phi$ $(n \geq M_{i,j})$ が成立する。$M = \max\{M_{i,j}\}$ とおく。$\forall k \geq 1$, $\{a_i\}$, $\{b_i\}$ は specification の定義をみたす整数列、$\forall x_1, \cdots, x_k \in X$ とする。今、$z \in X$ に対して、$z \in U$ なる $U \in \mathcal{U}$ を $U(z)$ と書くことにする。$1 \leq j \leq k-1$ に対して、$f^{a_{j+1}-b_j}(y_j) \in U(f^{a_{j+1}} x_{j+1})$ をみたす $y_j \in U(f^{b_j} x_j)$ が存在する。実際に、$a_{j+1} - b_j \geq M$ であるから、$U(f^{a_{j+1}} x_{j+1}) \cap f^{a_{j+1}-b_j} U(f^{b_j} x_j) \neq \phi$. 次のように $\{z_i : a_1 \leq i \leq b_k\} \subset X$ を定義する; $z_i = f^i(x_j)$ $(a_j \leq i < b_j)$; $z_i = f^{i-b_j}(y_j)$ $(b_j \leq i < a_{j+1})$. 明らかに $\{z_i\}$ は δ-P.O. である。(X, f) は P.O.T.P. をもつから、$x \in X$ があって、$d(f^i(x), z_i) < \varepsilon$ $(a_1 \leq i \leq b_k)$. 故に (X, f) は weak specification をみたす。//

<u>定理 9.27</u> (X, f) は定理 9.26 の仮定の他に拡大的条件をもつとする。このとき (X, f) は specification をみたす。

(証明).

上の証明で、$\varepsilon > 0$ は拡大的定数より十分小さくえらぶ。$p \geq M + (b_k - a_1)$ なる $p \in \mathbb{Z}$ に対して、$a_{k+1} = p + a_1$, $x_{k+1} = x_1$ とおく。上のように点列 $\{z_i : i \in \mathbb{Z}\} \subset X$ を定義する; i.e. $z_i = f^i(x_j)$ $(a_j \leq i < b_j)$; $z_i = f^{i-b_j}(y_j)$ $(b_j \leq i < a_{j+1})$; $z_{i+p} = z_i$ $(i \in \mathbb{Z})$. このとき $\{z_i : i \in \mathbb{Z}\}$ は δ-P.O. であるから、$d(f^i(x), z_i) < \varepsilon$ $(i \in \mathbb{Z})$ なる $x \in X$ が存在する。$z_{i+p} = z_i$ $(\forall i \in \mathbb{Z})$ であるから、$d(f^{i+p}(x), z_i) < \varepsilon$ $(i \in \mathbb{Z})$. 故に $d(f^{i+p}(x), f^i(x)) < 2\varepsilon$. 拡大性によって、$f^p(x) = x$. 結論がえられた。//

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

specification をみたせば topologically mixing であることは定義より明らかである。specification をみたし拡大的であれば P.O.T.P. をもつかどうか問題が提起される。しかし，これは否定的である。例えば次がその例の一つである。

前のように $\Sigma=\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ を定義し，その上に距離関数 d を次のように定義する；$d(x,y)=\sum_{j\in\mathbb{Z}}(1-\delta_{x(j)y(j)})/2^{|j|}$ ここに $x=(x(j))$, $y=(y(j))\in\Sigma$, δ_{ij} は Kronecker 記号である。

$$S=\Sigma\setminus\bigcup_{i\in\mathbb{Z}}\bigcup_{k=1}^{\infty}\{x\in\Sigma : x(i)=x(i+2k+1),\ x(j)=1,\ i\leq j\leq i+2k\}$$

とおく。明らかに S は閉集合で，shift σ に関して不変集合である。(S,σ) は拡大的であることは容易に証明できる。

注意 (S,σ) は specification をみたすが，P.O.T.P. をもたない。

(S,σ) は specification をみたすことを証明する。$\forall\varepsilon>0$ に対して，$x(j)=y(j)$, $|j|\leq n$ ならば，$d(x,y)<\varepsilon$ なる $n>0$ が存在する。specification の定義の中の $M_\varepsilon>0$ として，$2n+1=M_\varepsilon$ をえらぶ。$\forall k\geq 1$, $a_{i+1}-b_i\geq 2n+1$ $(1\leq i\leq k-1)$ なる任意の整数列 $a_1\leq b_1<a_2\leq b_2<\cdots<a_k\leq b_k$, $\forall x_1,\cdots,x_k\in S$, $\forall p\geq b_k-a_1+2n+1$ に対して，$x=(x(j))_{j\in\mathbb{Z}}\in S$ を次のように定義する；

(1) $x(j)=x_i(j)$ $\quad(a_i-n<j<b_i+n,\ 1\leq i\leq k)$

(2) $x(j)=0$ $\quad(b_i+n<j\leq a_{i+1}-n,\ 1\leq i\leq k-1;\ b_k+n<j\leq a_1-n+p)$

(3) $$x(b_i+1)=\begin{cases}1 & \left(\begin{array}{l}1\leq i\leq k \text{ に対して，} r\in\mathbb{Z} \text{ があって } b_i+n-2r>a_i-n\\ \text{のとき } y_i(b_i+n-2r-1)=0 \text{ で，} y_i(j)=1\ (b_i+n-2r\\ \leq j<b_i+n),\end{array}\right)\\ 0 & (\text{otherwise}),\end{cases}$$

(4) $x(j+mp)=x(j)$ $\quad(a_i-n<j\leq a_1-n+p,\ m\in\mathbb{Z})$.

このとき $x\in S$ で，(4) によって $\sigma^p(x)=x$, $a_i\leq\forall j\leq b_i$ $(1\leq i\leq k)$, $\forall|m|<n$ に対して，

$\sigma^j x(m)=x(j+m)=x_i(j+m)=\sigma^j x_i(m)$ ((1) による). 故に $d(\sigma^j x,\sigma^j x_i)<\varepsilon$ $(a_i\leq j\leq b_i,\ 1\leq i\leq k)$; i.e. (S,σ) は specification

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

をみたす。

次に (S,σ) は subshift of finite type でないことを証明する。(S,σ) は或る order N の subshift であると仮定する。このとき S の定義から $\Pi_0^N\{0,1\}\supset B$ があって，B は次の block を含む；

$$\underbrace{(0,\cdots,0)}_{N},\ \underbrace{(1,\cdots,1)}_{N};$$

$$(\underbrace{1,\cdots,1}_{j},\underbrace{0,\cdots,0}_{N-j}),\ (\underbrace{0,\cdots,0}_{j},\underbrace{1,\cdots,1}_{N-j})\quad(1\leqq j\leqq N-1)$$

$k>0$ は偶数で，$k\geqq N$ として，$y\in\Sigma$ を次のように定義する；
$y(j)=1\ (1\leqq j\leqq k)$；$y(j)=0\ (j\leqq 0,\ j\geqq k)$．明らかに $y\notin S$ である。しかし $(y(j),\cdots,y(j+k))\in B\ (j\in\mathbb{Z})$ であるから，$y\in S$．これは矛盾である。

specification, weak specification の存在に関して，次が知られている。

定理 9.28. X は solenoidal 群，σ は X 上の自己同型とする。このとき次が成立する；

(i) specification $\Leftrightarrow$ 拡大的 $\Leftrightarrow$ 双曲的，

(ii) weak specification $\Leftrightarrow$ エルゴード的で central spin.

証明に対しては[15]を参照．

定理 9.29. 零次元コンパクト可換群 X 上の自己同型 σ は次の性質をもつ；

(i) (X,σ) : specification $\Leftrightarrow$ コンパクト可換群 $\bar{X}$ とその上の自己同型 $\bar{\sigma}$ が存在して，$\bar{X}$ は $\bar{\sigma}$ による Bernoulli 群の直積群であって，(X,σ) は $(\bar{X},\bar{\sigma})$ の剰余群である。

(ii) (X,σ) : Weak specification $\Leftrightarrow$ エルゴード的。

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

証明に対しては[3，6]を参照．定理9.29の中のXが非可換の場合は§5の定理5.1によって，定理9.29の命題がえられる。

fはコンパクト距離空間上の位相同相とする。次をみたす(X, f)は<u>almost weak specification</u>をもつという；$\forall \varepsilon > 0$に対して，関数$M_\varepsilon(\cdot): \mathbb{Z}^+ \circlearrowleft$が存在して$\lim_{n\to\infty} M_\varepsilon(n)/n = 0$をみたし，$\forall k \geq 1$，$a_{i+1} - b_i \geq M_\varepsilon(b_{i+1} - a_{i+1})$をみたす任意の整数列$a_1 \leq b_1 < a_2 \leq b_2 < \cdots < a_k \leq b_k$と$\forall k$個の点$x_1, \cdots, x_k \in X$に対して，$x \in X$があって$d(f^j(x_i), f^j(x)) < \varepsilon$ $(a_i \leq j \leq b_i,\ 1 \leq i \leq k)$をみたす。

> <u>定理9.30</u>．Xはコンパクト可換群で，αはX上の自己同型とするとき，次は同値である；
> (X, α): almost weak specification $\Longleftrightarrow$ エルゴード的．

証明に対しては[16]を参照．

almost weak specificationの概念を使って，コンパクト距離空間X上の位相同相fを不変にするBorel確率測度が分類できることを解説する。X上のBorel確率測度の全体を$M(X)$で表わし，$M_f(X) = \{\mu \in M(X): \mu(f^{-1}E) = \mu(E),\ \forall E\}$とする。$\forall \mu \in M(X)$に対して，$f\mu(\cdot) = \mu(f^{-1}\cdot)$とおくと，$f: M(X) \to M(X)$は1－1，上への写像である。$C(X)$はX上のすべての実数値連続関数の全体とする。明らかに$C(X)$は線型空間と考えることができる。ノルム$\|f\| = \max_{x\in X} |f(x)|$によって$C(X)$はBanach空間である。$C(X)^* = \{\alpha \mid \alpha: C(X) \to \mathbb{R}$，連続線形汎関数$\}$とする。$\forall f \in C(X)$，$\forall \varepsilon > 0$，$\forall \alpha_0 \in C(X)^*$に対して，$U(f, \varepsilon, \alpha_0) = \{\alpha \in C(X)^*: |\alpha(f) - \alpha_0(f)| < \varepsilon\}$とおき，族$\{U(f, \varepsilon, \alpha_0): f \in C(X),\ \varepsilon > 0,\ \alpha_0 \in C(X)^*\}$を$C(X)^*$の部分基として$C(X)^*$に位相を導入する。このような位相を$C(X)^*$の<u>weak＊－topology</u>という。$\forall \mu \in M(X)$に対して，$\alpha_\mu(f) = \int f d\mu$ $(f \in C(X))$とおくと，$\alpha_\mu \in C(X)^*$．Riesz Representation定理によって，$\alpha: \mu \mapsto \alpha_\mu$は1－1で$\alpha(M(X)) = \{\alpha \in C(X)^*: \alpha(1) = 1,\ \alpha(f) \geq 0 \Leftarrow f \geq 0\} \subset C(X)^*$である。以後$\alpha_\mu$を$\mu$と書くことにする；i.e. $M(X) \subset C(X)^*$とみなす。従って$M(X)$に(相対)weak＊－topologyが導入されてい

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

る。この位相は次によって定義された距離dによる位相と一致する；$\{f_n\}$は$C(X)$の稠密な可算集合とする。$d(\mu,\nu)=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}\|f_n\|\cdot|\int f_n d\mu-\int f_n d\nu|$は$C(X)^*$上の距離関数である。

注意. $M(X)$はコンパクト距離空間である。実際に，$\{f_k\}_0^{\infty}$は$\|f_k\|=1$なる$C(X)$の稠密集合とし，$\varphi:\mu\mapsto(\int f_k d\mu)_0^{\infty}$を定義する。$\varphi:M(X)\to[-1,1]^{\mathbb{N}}$は1-1，中への連続写像である。$\varphi^{-1}$は連続であることを示そう。$\varphi(\mu_n)\to\varphi(\mu)\,(n\to\infty)$とすれば，$\forall k\geq 0$に対して$\int f_k d\mu_n\to\int f_k d\mu\,(n\to\infty)$であるから，$\forall f\in C(X)$に対して，$\int f d\mu_n\to\int f d\mu$；i.e. $\mu_n\to\mu$. 故に，$\varphi:M(X)\to\varphi(M(X))$は位相同相である。$\varphi(M(X))$は$[-1,1]^{\mathbb{N}}$の中で閉集合であることを示そう。$\varphi(\mu_n)\to\omega=(\omega_k)\in[-1,1]^{\mathbb{N}}$とすれば，$\|f\|=1$なる任意の$f\in C(X)$に対して，$\{f_{k_i}\}\subset\{f_k\}_0^{\infty}$があって，$f_{k_i}\to f\,(i\to\infty)$とできるから，列$\{\int f d\mu_n\}$は収束する。次のように線形正値汎関数$L$を定義する；$L:f\mapsto\lim_n\int f d\mu_n$. このとき$L(1)=1$であるから，*Riesz Representation*定理によって$\mu\in M(X)$があって，$L(f)=\int f d\mu\,(f\in C(X),\ \|f\|=1)$とできる。$L(f_k)=\omega_k$によって，$\varphi(\mu)=(\omega_k)$. 故に$\varphi(\mu)$は$\varphi(\mu_n)$の極限点である。故に$\varphi(M(X))$はコンパクトであるから，$M(X)$はコンパクトである。

注意. $M_f(X)$は$M(X)$の閉部分集合である。実際に，$\forall\mu\in M(X)$に対して，$\mu_n=\frac{1}{n}\{\mu+f\mu+\cdots+f^{n-1}\mu\}$とおくと，部分列$\{\mu_{n_k}\}$は収束する；i.e. $\mu_{n_k}\to\mu'\in M(X)\,(k\to\infty)$. $f\mu'=\mu'$を示せば十分である。$\mu_{n_k}=\frac{1}{n_k}\{\mu+\cdots+f^{n_k-1}\mu\}$で，$f\mu_{n_k}=\frac{1}{n_k}\{f\mu+\cdots+f^{n_k}\mu\}=\frac{n_k+1}{n_k}\cdot\frac{1}{n_k+1}\{\mu+\cdots+f^{n_k}\mu\}-\frac{1}{n_k}\mu$. 故に$f\mu'=\mu'\in M_f(X)$. //

定理 9.31. Xはコンパクト距離空間，fはX上の位相同相とする。(X,f)が*almost weak specification*をもてば，次が成立する；$\{\mu\in M_f(X):$ 強混合的$\}$は$M_f(X)$の中で，第1類集合で，$\{\mu\in M_f(X):$ エルゴード的$\}$は$M_f(X)$の中で稠密である。

証明に対しては[14]を参照. 次はK. Sigmund[62]の結果である。

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

定理 9.32. X, f は定理 9.31 のものとする。(X, f) が P.O.T.P. をもち，拡大的で topologically mixing であるとする。このとき (X, f) が Bernoulli 系となる $\mu \in M_f(X)$ の全体は $M_f(X)$ で稠密である。

注意 (X, f) が specification をもち，拡大的であるとき (X, f) が Bernoulli 系となる $\mu \in M_f(X)$ の全体は $M_f(X)$ で稠密であるか。この問題は未解決である。

今までに述べてきた位相力学系上の諸概念の関連性を明記しておく。各ブロック内は互に同値である。

(I) n 次元トーラス上の自己同型の場合

(i) hyperbolic (ii) expansive (iii) specification (iv) P.O.T.P. (v) topologically stable	(1) central spin, ergodic (2) weak specification	(a) ergodic (b) almost weak specification

(i)〜(v) の同値性は森本明彦[43]に証明が与えられている。

(II) Solenoidal 群上の自己同型の場合

(i) hyperbolic (ii) expansive (iii) specification	(1) central spin, ergodic (2) weak specification	(a) ergodic (b) almost weak specification
(iv) P.O.T.P. (v) topologically stable		

(III) 零次コンパクト群上の自己同型の場合

(イ) 任意の自己同型は P.O.T.P. をもつ。

(ロ) ergodic $\Longleftrightarrow$ weak specification $\Longleftrightarrow$ almost weak specification.

(ハ) specification については定理 9.29 が成立する。

さて topologically transitive 位相同相と拡大的位相同相の存在について，再び Cantor 集合上で議論をする。P.125 で与えた約束と記号のもとで次を証明する。

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

定理 9.33 Cantor集合上の拡大的位相同相の全体を$\mathcal{E}(C)$で表わす。このとき$\mathcal{E}(C)$は$\mathcal{H}(C)$の中で稠密である。

次の補題を準備する。

補題 9.34 $I(k,n)$, $I(l,m)$は階数n, mのCantor部分区間とする。このとき位相同相$f: I(k,n) \to I(l,m)$が存在して次をみたすようにできる; $r>0$, $\Delta>0$があって$x=0.x_1x_2x_3\cdots$, $y=0.y_1y_2y_3\cdots \in I(k,n)\ [I(l,m)]$に対して, $x_i \neq y_i$なる最初のiが奇数[偶数]で, $|x-y|<1/r$であれば, $|f(x)-f(y)| \geq \Delta|x-y|$ $[|f^{-1}(x)-f^{-1}(y)| \geq \Delta|x-y|]$が成立し, $(f(x))_i \neq (f(y))_i$なる最初のiは再び奇数で, $(f^{-1}(x))_i \neq (f^{-1}(y))_i$なる最初の$i$は偶数である。

(証明)

直積位相空間$\Sigma=\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$と$\Sigma$上のshift σを定義する。位相同相$I_n: I(k,n) \to \Sigma$; $I_m: I(l,m) \to \Sigma$を構成して, $I_n^{-1}\circ\sigma^p\circ I_m$が補題をみたすように$p>0$をみつける。二つの場合に分けて証明する。

場合(i). m, nが奇数のとき,

$$I_n(0.\bar{x}_1\bar{x}_2\cdots\bar{x}_n x_{n+1}\cdots) = \cdots x_{n+5}\, x_{n+3}\, \overset{\downarrow}{x_{n+1}}\, x_{n+2}\, x_{n+4}\cdots$$

とする。明らかに

$$I_n(x)_i = \begin{cases} x_{n+2i} & i>0 \\ x_{n+2i+1} & i \leq 0 \end{cases}$$

($\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n$は$x \in I(k,n)$に対して固定されていることに注意する). 同様な方法によって,

$I_m(0.\underline{x}_1\cdots\underline{x}_m x_{m+1}\cdots) = \cdots x_{m+3}\, \overset{\downarrow}{x_{m+1}}\, x_{m+2}\cdots$ とする。I_m, I_nは位相同相である。$p>2$に対して$f_p = I_m^{-1}\circ\sigma^p\circ I_n$とおく。$p$は後で決定される。このとき$x\in I(k,n)$に対して

$$\begin{aligned} f_p(x) &= I_m^{-1}\sigma^p I_n(0.\bar{x}_1\bar{x}_2\cdots\bar{x}_n x_{n+1}\cdots) \\ &= I_m^{-1}(\cdots x_{n+2p-4}\, x_{n+2p-2}\, \overset{\downarrow}{x_{n+2p}}\, x_{n+2p+2}\cdots) \\ &= 0.\underline{x}_1\cdots\underline{x}_m\, x_{n+2p}\, x_{n+2p+2}\, x_{n+2p-2}\, x_{n+2p+4}\cdots. \end{aligned}$$

同様にして, $y\in I(l,m)$に対して

$$f_p^{-1}(y) = I_n^{-1}\sigma^{-p}I_m(y) = 0.\bar{x}_1\cdots\bar{x}_n\, y_{m+1+2p}\, y_{m-1+2p}\, y_{m+3+2p}\cdots$$

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

がえられる 今 $p>2$ を次のようにえらぶ; $2p>1+|n-m|$.

$\Delta = 2\cdot 3^{2p-|n-m|-1}$, $r=3^{\delta}$, $\delta=\max\{m+1+2p,\ n+2+2p\}$ とおく。f_pは補題をみたすことを示す。

$x, y\in I(k,n)$で, $|x-y|<1/r$, $x_i\neq y_i$ なる最初のiが奇数とする($i=q$ とする). このとき, $(f_p(x))_i=(f_p(y))_i$ なる最初のiは奇数で, 次の数のいずれかの一つである; $n+2p+2, n+2p+4, \cdots$ そして

$|f_p(x)-f_p(y)|\geqq 3^{n-m+2p}\cdot 2/3^{q}\geqq 2\cdot 3^{n-m+2p-1}|x-y|$; i.e. $|f_p(x)-f_p(y)|\geqq \Delta|x-y|$.

同様にして, $x, y\in I(l,m)$で, $|x-y|<1/r$ のとき, qは奇数とする。このとき $(f_p^{-1}(x))_i\neq(f_p^{-1}(y))_i$ なるiは偶数で次の数のいずれかの一つである; $m+1+2p, m+3+2p, \cdots$ そして

$|f_p^{-1}(x)-f_p^{-1}(y)|\geqq 3^{m-n+2p}\cdot 2/3^{q}\geqq 2\cdot 3^{m-n+2p-1}|x-y|$; i.e. $|f_p^{-1}(x)-f_p^{-1}(y)|\geqq \Delta|x-y|$.

場合(ii). nは奇数, mは偶数とする。I_nは(i)のように定義する。I_m^*は次のように定義する;

$$I_m^*(0.\underline{x}_1\cdots\underline{x}_m\ x_{m+1}\ x_{m+2}\cdots)=\cdots x_{m+4}\ x_{m+2}\ \overset{\downarrow}{x_{m+1}}\ x_{m+3}\ x_{m+5}\cdots,$$

$f_p^*=I_m^{*-1}\cdot\sigma^p\circ I_m^*$ とおくとき,

$$f_p^*(x)=0.\underline{x}_1\cdots\underline{x}_m\ x_{n+2p}\ x_{n+2p-2}\ x_{n+2p+2}\cdots$$
$$f_p^*(y)=0.\overline{x}_1\cdots\overline{x}_n\ y_{m+2p}\ y_{m+2p-2}\ y_{m+2p+2}\cdots$$

p, r, Δは(i)のようにえらぶ。$x, y\in I(k,n)$, $|x-y|<1/r$ で $x_i\neq y_i$ なるiは奇数のとき, $(f_p^*(x))_i\neq(f_p^*(y))_i$ なるiも奇数で, $n+2p$, $n+2p+2, \cdots$ のいずれかの一つである。同様にして, $x, y\in I(l,m)$, $|x-y|<1/r$ で, $x_i\neq y_i$ なるiは偶数のとき, $(f_p^{*-1}(x))_i\neq(f_p^{*-1}(y))_i$ なるiも偶数で, $m+2p, m+2p+2, \cdots$ のいずれかの一つである。そして

$|f_p^*(x)-f_p^*(y)|\geqq\Delta|x-y|/3$, $|f_p^{*-1}(x)-f_p^{*-1}(y)|\geqq\Delta|x-y|/3$. 他の場合($n, m$が偶数, nは偶数でmは奇数)は $I(k,n)$, $I(l,m)$を階数 $n+1$, $m+1$に分割して場合(i),(ii)を使えば結論をうる。//

定理 9.33の証明. $g\in\mathcal{H}(C)$, $n>0$とする。このとき $gI(k,n)=$

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

$I(l,m)$ なる $n>0$ が存在する。$g\{I(k_1,n)\cup\cdots\cup I(k_{l_1},n)\}=I(l,m)$ をうる。一般に，$i=1,2,\cdots,2^m$ に対して

$g\{I(k_{l_{i-1}},n)\cup\cdots\cup I(k_{l_i},n)\}=I(i,m)$.

$I(i,m)$ を l_i-l_{i-1} 個の Cantor 部分区間

$I(p_{l_{i-1}+1},q_{l_{i-1}+1}),\ \cdots,\ I(p_i,q_i)$

に分割する。今から $hI(k_i,n)=I(p_i,q_i)$ $(1\leqslant i\leqslant 2^m)$ なる拡大的位相同相 h が存在することを示す。実際に，$d(h,f)=\max_{x\in C}|h(x)-f(x)|<3^{-m}$ であるから，$0<{}^\forall i\leqslant 2^n$ に対して，補題 9.33 によって，$g_i:I(k_i,n)\to I(p_i,q_i)$ が存在して，r を r_i，s を s_i にとる。$h(x)=g_i(x)$ $(x\in I(k_i,n))$ とすれば，$h:C\to C$ は位相同相である。h は拡大的であることを示す。

$r=\max_{1\leqslant i\leqslant 2^n}\{r_i,3^{q_i},3^n\}$, $\quad s=\min_{1\leqslant i\leqslant 2^n}\{s_i\}$

とする。$x\neq y$，$|x-y|<1/r$ で $x_i\neq y_i$ なる最初の i が奇数のとき，$x,y\in I(k_i,n)$ より，$|h(x)-h(y)|\geqslant s|x-y|$. 故に $|h^g(x)-h^g(y)|>1/2r$ なる $g>0$ が存在する。同様にして，$x_i\neq y_i$ なる i が偶数のとき，$x,y\in I(p_i,q_i)$ であるから，$|h^{-1}(x)-h^{-1}(y)|\geqslant s|x-y|$. 故に $|h^{-g}(x)-h^{-g}(y)|\geqslant 1/2r$ なる $g>0$ が存在する。故に $h:C\to C$ は拡大的定数 $1/2r$ をもつ拡大的位相同相である。//

<u>定理 9.35.</u> *topologically transitive* でない位相同相の全体 $\mathcal{S}$ は $\mathcal{H}(C)$ で稠密である。

(証明)

g は *generalized permutation* で，$g\{I(k_1,n)\cup\cdots\cup I(k_l,n)\}=I(r_k,m)$ $(n>m)$ とする。$I(k_1,n)\subsetneq I(r_k,m)$ であるから，$I(r_k,m)\setminus I(k_1,n)$ を $l-1$ 個の Cantor 部分区間に分割して，$I(k_2,n)$ を第一番目の部分区間，$I(k_3,n)$ を第二番目の部分区間，$\cdots$，特に $I(k_1,n)$ を $I(k_1,n)$ に対応させ，その他は g と同じ対応とする *generalized permutation* g' を考える。$g'I(k_1,n)=I(k_1,n)$ であるから，g' は *topologically transitive* ではない。$d(g,g')\leqslant 3^{-m}$ は明らか。故に定理 9.14 によって，$\mathcal{S}$ は $\mathcal{H}(C)$ で稠密である。//

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

定理 9.36. topologically transitive 位相同相の全体 $\mathcal{E}$ は $\mathcal{H}(C)$ で稠密ではない。

(証明)

$\mathcal{S}$ を定理 9.35 のものとして, $\mathcal{S}$ を含む $\mathcal{H}(C)$ の開集合 $U(\mathcal{S})$ があって, $U(\mathcal{S})\cap\mathcal{E}=\phi$ を示せば十分である。$f\in\mathcal{S}$ は cycle $I(k_1,n),\cdots,I(k_l,n)$ をもつとする。今 $g\in\mathcal{H}(C)$ で $d(g,f)<3^{-n}$ とするとき, g は topologically transitive でないことを示す。$i>0$ があって $x\in I(k_i,n)$ ならば, $d(g(x),f(x))<3^{-n}$ とできる。故に $g(x)\in I(k_{i+1},n)$ ($i+1$ は mod l); i.e. $gI(k_i,n)\subset I(k_{i+1},n)$. 今 $gI(k_i,n)\neq I(k_{i+1},n)$ のとき, $g(y)\in I(k_{i+1},n)\setminus I(k_i,n)$ なる $y\in C$ が存在する。故に $f(y)\notin I(k_{i+1},n)$. このことは $d(f(y),g(y))\geq 3^{-n}$ を示している。これは矛盾である。故に $I(k_1,n),\cdots,I(k_l,n)$ は g で cycle である。g は自明でない不変部分集合をもつ; g は topologically transitive ではない。//

完全不連結コンパクト距離空間と Cantor 集合との関係について, 次の定理を明記しておく。

定理 9.37. X は孤立点をもたない完全不連結コンパクト距離空間とする。このとき X は Cantor 集合 C と位相同型である。

(証明)

X 上の距離関数を $d(x,y)$, C 上の距離関数を $d'(a,b)=|a-b|$ で表わすことにする。X は完全不連結であるから, 2^{k_1} ($k_1>0$) 個の開かつ閉の部分集合 $X_1,\cdots,X_{2^{k_1}}$ が X の中でえらばれ, 次の条件をみたす; $\mathrm{diam}(X_i)<\mathrm{diam}(X)/2$ $(1\leq i\leq 2^{k_1})$, $X=\bigcup_{i=1}^{k_1}X_i$, $X_i\cap X_j=\phi$ $(i\neq j)$. 各 X_i は孤立点をもたない完全不連結集合であるから, 上と同じようにして, 2^{k_2} 個の開かつ閉の部分集合 $X_{i,1},\cdots,X_{i,2^{k_2}}$ が X_i の中に存在して,

$\mathrm{diam}(X_{i,j})<\mathrm{diam}(X)/2^2$, $X_i=\bigcup_{j=1}^{2^{k_2}}X_{i,j}$, $X_{i,j}\cap X_{i,j'}=\phi$ $(j\neq j')$.

この方法を帰納的にくりかえすとき,

$\{k_j\}_{j=1}^{\infty}\subset\mathbb{N}$ と開かつ閉の集合 $X_{i_1,\cdots,i_m}$ $(1\leq i_l\leq 2^{k_l},\ 1\leq l\leq m,\ m\geq 1)$

が存在して次をみたすようにできる;

i) $\mathrm{diam}(X_{i_1,\cdots,i_m}) < \mathrm{diam}(X)/2^m \quad (1 \le i_\ell \le 2^{k_\ell},\ 1 \le \ell \le m,\ m \ge 1)$,

ii) $X_{i_1,\cdots,i_{m-1},i_m} \cap X_{i_1,\cdots,i_{m-1},i_m'} = \phi \quad (i_m \ne i_m')$,

iii) $X_{i_1,\cdots,i_{m-1}} = \bigcup_{j=1}^{2^{k_m}} X_{i_1,\cdots,i_{m-1},j}$,

iv) $X = \bigcup_{j=1}^{2^{k_1}} X_j$.

今, $(i_1,\cdots,i_n,\cdots) \in \prod_{j=1}^{\infty}\{1,2,\cdots,2^{k_j}\}$ に対して, $x \in X$ があって $\{x\} = \bigcap_{j=1}^{\infty} X_{i_1,\cdots,i_j}$ がえられる。 $k(m) = \sum_{j=1}^{m} k_j$ そして

$$p(m) = \begin{cases} i_1 & (m=1) \\ i_m + \sum_{j=1}^{m} 2^{\sum_{\ell=0}^{m-j-1} k_{m-\ell}}(i_j - 1) & (m \ge 2) \end{cases}$$

とおく。 このとき $y \in C$ があって $\{y\} = \bigcap_{m=1}^{\infty} I(p(m),\ k(m))$. ここに $I(p(m),\ k(m))$ は階数 $k(m)$ の $p(m)$ 番目の Cantor 部分区間である。 $h(x) = y$ によって, 1-1 上への写像 $h: X \to C$ が定義できる. h は連続である。 実際に, $\forall \varepsilon > 0$ に対して $3^{k_1+k_2+\cdots+k_{m_0}} > 1/\varepsilon$ なる $m_0 \ge 1$ が存在する。 このとき

$$0 < \delta < \min \left\{ \begin{array}{l} d(X_{i_1,\cdots,i_{m_0-1},j},\ X_{i_1,\cdots,i_{m_0-1},j'}) : 1 \le i_n \le 2^{k_n}, \\ \qquad\qquad 1 \le n \le m_0 - 1,\ j \ne j' \le 2^{k_{m_0}} \end{array} \right\}$$

なる δ に対して, $d(x,y) < \delta \ (x, y \in X)$ ならば, $h(x), h(y)$ は階数が $\sum_{j=1}^{m_0} k_j$ の同じ Cantor 部分区間に入る。 故に $d'(h(x), h(y)) < \varepsilon$. 故に X と C は位相同型である。//

subshift of finite type は axiom A 微分同相の basic set として 2 次元球面上に埋めこまれることが Smale [67] によって証明されている。 最後に次の定理を述べる。

> 定理 9.38 (Λ, σ) は subshift of finite type とする。 このとき次の (i), (ii) をみたす 2 次元球面 S^2 上の C^∞-微分同相 g と S^2 の g-不変閉集合 F が存在する;
>
> (i) $(F, g_{|F})$ は (Λ, σ) に位相同型である,
>
> (ii) $F = \bigcap_{-\infty}^{\infty} g^i(U)$ なる開集合 U が S^2 に存在する。

(証明)

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

$M=\{0,1,\cdots,m-1\}$で$\Lambda\subset M^{\mathbb{Z}}$であるとする。$(\Lambda,\sigma)$は order 1 の finite type であると仮定しても一般性を失わない。$p=2m-1$とおく。写像$\varphi:\Lambda\to\mathbb{R}^2$を次のように定義する；$\bar{u}=(u_i)\in\Lambda$に対して，

$$\varphi(\bar{u})=2\sum_{i\geq 0}u_i p^{-i}e_0+2\sum_{i<0}u_i p^{i}e_1.$$

ここに$\{e_0,e_1\}$は$\mathbb{R}^2$の標準基底とする。φは連続で，1-1である。これを示すために$M^{\mathbb{Z}}$上に前のように距離関数$d(\bar{u},\bar{v})=2^{-N}$ $(N=\min\{n\geq 0: u_n\neq v_n,\ u_{-n}\neq v_{-n}\})$を定義する。$\bar{u}\neq\bar{v}$とすると，$u_i=v_i$ $(|i|<N)$で$u_N\neq v_N$か$u_{-N}\neq v_{-N}$なる$N\geq 0$が存在する。今，$u_N\neq v_N$とする。sは$\varphi(\bar{u})$の，tは$\varphi(\bar{v})$のe_0-座標を表しているとし，$d_0(\cdot,\cdot)$は$\mathbb{R}^2$のユークリッド距離関数とする。このとき

$$\begin{aligned}2p\,d(\bar{u},\bar{v})&\geq 2p^{-N+1}=2(m-1)\sum_{|i|\geq N}p^{-|i|}\geq d_0(\varphi(\bar{u}),\varphi(\bar{v}))\\&\geq|s-t|\geq 2p^{-N}-2(m-1)\sum_{j=1}^{\infty}p^{-N-j}=p^{-N}.\end{aligned}$$

この不等式よりφの連続性と1-1がえられる。故に$\varphi:\Lambda\to\varphi(\Lambda)$への位相同相である。$\varphi(\Lambda)=F$と書くことにする。$0\leq k\leq m-1$なる$k$に対して

$$F_k=\varphi\{\bar{u}\in\Lambda: u_0=k\},$$

$$V_k=\{(x_0,x_1)\in\mathbb{R}^2: 2k-1/3\leq x_0\leq 2k+4/3,\ -1/3\leq x_1\leq 4/3\}$$

とおく。このとき$V_k\supset F_k$，$V_i\cap V_k=\phi$ $(0\leq i<j\leq m-1)$がえられる。各V_kはコンパクト近傍であることに注意する。$L:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$は双曲型線型写像とする；

$$L(e_j)=\begin{cases}pe_j & (j=0)\\ p^{-1}e_j & (j=1).\end{cases}$$

$0\leq k\leq m-1$に対して，アフィン写像$G_k(z)=L(z)-2kpe_0+2kp^{-1}e_1$ $(z\in\mathbb{R}^2)$を定義する。そして$G|V_k=G_k|V_k$とおく。このときGは$V_0\cup\cdots\cup V_{m-1}$から$\mathbb{R}^2$の中への$C^\infty$-微分同相である（∵各$k$に対して，$G(V_k)\subset\{(x_0,x_1): (2k-1/3)p^{-1}\leq x_1\leq(2k+4/3)p^{-1}\}$）。

$\forall\bar{u}=(u_i)\in\Lambda$に対して，

$$\begin{aligned}G\varphi(\bar{u})&=G(2\sum_{i\geq 0}u_ip^{-i}e_0+2\sum_{i<0}u_ip^{i}e_1)\\&=(2\sum_{i\geq 0}u_ip^{-i+1}-2u_0p)e_0+(2\sum_{i<0}u_ip^{i-1}+2u_0p^{-1})e_1\end{aligned}$$

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

$$= 2\Sigma_{i\geq 0} u_{i+1} p^{-i} e_0 + 2\Sigma_{i<0} u_{i+1} p^{i} e_1$$
$$= \varphi\sigma(\bar{u})$$

Gの微分はLであるから，Gはorientationを保存する。

$V_0 \cup \cdots \cup V_{m-1}$は互に交わらない集合の和集合であるから，Gは恒等写像にisotopicである。$\mathbb{R}^2 \subset S^2$と考えるとき，isotopy extension theorem (p. 180 [23])によって，Gの拡張であるC^∞-微分同相g ($S^2 \to S^2$)が存在する。今(i)がえられた。(ii)を証明するために，$g = g|_{\mathbb{R}^2}$とおく。Aは(Λ, σ)の推移行列とする。このとき$g(F_k) \cap F_j \neq \phi \Leftrightarrow A_{k,j} = 1$である。故に$F_i \subset U_i \subset V_i$ $(0 \leq i \leq m-1)$なる開集合U_iに対して，$g(U_k) \cap U_j \neq \phi \Leftrightarrow A_{k,j} = 1$がえられる。$U = U_0 \cup U_1 \cup \cdots \cup U_{m-1}$とおく。このとき$F = \bigcap_{i\in\mathbb{Z}} g^i(U)$. 実際に，$g(F) = G\varphi(\Lambda) = \varphi\sigma(\Lambda) = \varphi(\Lambda) = F$であるから，$F \subset \bigcap_{i\in\mathbb{Z}} g^i(U)$をうる。$x \in \bigcap_{i\in\mathbb{Z}} g^i(U)$のとき，$0 \leq u_i \leq m-1$が存在して，$g^i(x) \in U_{u_i}$ $(i \in \mathbb{Z})$. 故に$\bar{u} = (u_i) \in \Lambda$. $g^i\varphi(\bar{u})$そして$g^i(x)$は同じU_{u_i}に属する。$g(x) - g(y) = G_k(x) - G_k(y) = L(x-y)$ $(x, y \in U_k,\ 0 \leq k \leq m-1)$であるから，$\|L^i(\varphi(\bar{u}) - x\| \leq \max\{diam(U_k) : 0 \leq k \leq m-1\} < \infty$ $(i \in \mathbb{Z})$. Lは双曲型であるから，$x = \varphi(\bar{u}) \in F$. 結論がえられた。//

§10 局所コンパクト群とエルゴード的自己同型

局所コンパクト群上の自己同型の挙動について，Halmos (p.29, [21])は次の問題を提起している;

"コンパクトでない局所コンパクト群はエルゴード的自己同型をもたない"

この問題に関するRajagopalan [51]，Rajagopalan and Kauffman [29]，Wu [80]，Yuzvinskii [81]の諸結果を解説する。

定理 10.1 (p. 115, [50]). Xを局所コンパクトで可算コンパクト群とする。φをXから局所コンパクト群上への準同型とする。

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

このときφは開写像となる。

補題 10.2. σは局所コンパクト群Xの連続自己同型とする。σが位相同相である必要十分条件は次をみたすことである; Hが$\sigma(H)\subset H$なる開可算コンパクト群とすれば, $\sigma^{-1}(H)$も可算コンパクトである。

(証明)

σは位相同相とすれば, Hが可算コンパクトのとき, $\sigma^{-1}(H)$も可算コンパクトである。逆を示すために, Hは開可算コンパクト群で$\sigma(H)\subset H$をみたせば$\sigma^{-1}(H)$も可算コンパクトであると仮定する。Vは単位元の対称近傍とする。このとき, Vによって生成された群Fは開可算コンパクトである。σは連続であるから, $\sigma(F)$, $\sigma^2(F)$, ---, $\sigma^n(F)$, --- はすべて可算コンパクトである。故に$\bigcup_0^\infty \sigma^n(F)$によって生成された群Hは開可算コンパクトである。明らかに$\sigma(H)\subset H$. 仮定によって$\sigma^{-1}(H)$は開可算コンパクトである。$K=\bigcup_0^\infty \sigma^{-n}(H)$はXの開コンパクト部分群で, $\sigma(K)=K$. 故にσは位相同相である(∵定理 10.1による). KはXで開部分群であるから, σはX上で位相同相である。//

定理 10.3 局所コンパクト群XがHaar測度μをもつとする。連続自己同型σが位相同相でなければ, σはエルゴード的ではない。

(証明)

補題 10.2によって, $\sigma^{-1}(H)\supset H$で$\sigma^{-1}(H)$は可算コンパクトでなく, Hは可算コンパクトなる部分群Hが存在する。このとき$\{x\in H : x\in\sigma^{-1}(H)\}$の濃度は無限である。故に$x_1H\cap H=x_0H\cap H=x_0H\cap x_1H=\phi$なる$x_0, x_1\in\sigma^{-1}(H)$が存在する。Hは可算コンパクトであるから, x_0Hも可算コンパクトである。故に$\sigma^n(x_0H)$ $(n\geq 0)$も可算コンパクト(∵σは連続であるから). $\bigcup_0^\infty \sigma^n(x_0H)$はBorel集合. $\bigcup_1^\infty \sigma^{-n}(x_0H)$はXの開集合. 故に$F=\bigcup_{-\infty}^\infty \sigma^n(x_0H)$はBorel集合で$\sigma(F)=F$
$F\supset x_0H$より, $\mu(F)>0$. $x_1H\cap F=\phi$であるから, $\mu(X\setminus F)>0$;

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

i.e. σはエルゴード的ではない。//

補題 10.4. Xは局所コンパクト可換群でHaar測度μをもつとする。Xは完全不連結で，(X,σ)がエルゴード的であれば，Xはコンパクトである。

(証明)

Xは完全不連続であるから，コンパクト開部分群Hが存在する。定理10.3によって，σは位相同相である。$K_n=H\sigma(H)\cdots\sigma^n(H)$ $(n\geqq 0)$とおく。K_nはコンパクト開部分群で，$K_n\nearrow$である。$K=\bigcup_0^\infty K_n$とすれば，Kはコンパクト開部分群で$\overline{\sigma}\subset\sigma(K)\subset K$. 故に$K=K_n$なる$n\geqq 0$が存在する。このとき$\sigma(K)=K$をうる。$(X,\sigma)$のエルゴード性によって，$K=X$; i.e. Xはコンパクトである。//

定理 10.5. 局所コンパクト可換群Xがエルゴード的自己同型σをもてば，Xはコンパクトである。

(証明)

Xはコンパクトでないと仮定する。X_0はXの単位元の連結成分とすると，X/X_0はコンパクトである(∵定理10.4による)。このときXは直積分解$X=K\otimes R^n$ $(n>0)$をもつ(P.262，定理49，[50])。ここにKはコンパクト群である。明らかにXは可算コンパクトであるから，σは位相同相である。KはXで最大コンパクト群であるから，$\sigma(K)=K$. σはX/K $(\cong R^n)$上に自己同型を生成する。もちろん$(X/K,\sigma)$はエルゴード的である。(P.28，[21])のようにして定数でない非負連続関数$f(x)$が

$$f(\sigma x)=|\det\sigma|^2 f(x) \qquad (\forall x\in X/K)$$

をみたすように構成できる。$|\det\sigma|=1$のとき，$f(\sigma x)=f(x)$; i.e. $(X/K,\sigma)$のエルゴード性に反する。$|\det\sigma|\neq 1$の場合，例えば，$\alpha=|\det\sigma|^2>1$のとき開集合$C=\{x\in X/K : \alpha<f(x)<\alpha^2\}$は遊走集合である。//

XをLie群とする。Xの自己同型全体は群をつくりこれを$\mathrm{Aut}(X)$で表わす。$\mathfrak{g}$をXのLie algebraとし，$\mathfrak{g}$の自己同型全体

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

を $Aut(\mathfrak{g})$ とすれば，これは $\mathfrak{g}$ の一般一次変換群 $GL(\mathfrak{g})$ の部分群である。$\sigma\in Aut(X)$ に対して，それの微分 $d\sigma$ は $\mathfrak{g}$ の自己同型である。σ と $d\sigma$ は $\sigma(exp(X))=exp(d\sigma(X))$ $(X\in\mathfrak{g})$ なる関係にある。$\tau,\sigma\in Aut(X)$ のとき，$d(\tau\circ\sigma)=d\tau\circ d\sigma$ がなりたつ。かつ $d\sigma^{-1}$ は $d\sigma$ の逆写像 $(d\sigma)^{-1}$ を与える。X の内部自己同型を A_x とする; i.e. $A_x(y)=xyx^{-1}$ $(y\in X)$. 写像 $x\mapsto dA_x$ は X から $Aut(\mathfrak{g})$ への準同型である。この準同型を X の<u>随伴表現</u>とよびこれを Ad で表わす; i.e. $Ad(x)=dA_x$ $(x\in X)$. $\sigma\in Aut(X)$ に対して，$(\sigma x)y(\sigma x^{-1})=\sigma(x(\sigma^{-1}y)x^{-1})$ $(y\in X)$ から，$A_{\sigma x}=\sigma A_x\sigma^{-1}$ をうる。故に，$dA_{\sigma x}=d\sigma\circ dA_x\circ d\sigma^{-1}$.

<u>補題 10.6</u>．X は連結 Lie 群，σ は X 上の連続自己同型とする。(X,σ) はエルゴード的であると仮定する。このとき 1 は $Ad(x)$ $(x\in X)$ の一意的な特性根である; i.e. X の Lie algebra $\mathfrak{g}$ は nilpotent である。

(証明)

$Ad(\sigma x)=tAd(x)t^{-1}$ $(x\in X)$ なる $t\in Aut(\mathfrak{g})$ が存在する。複素数 λ を固定して x の関数 $det(\lambda I-Ad(x))$ は連続関数で，$det(\lambda I-Ad(\sigma x))=det(\lambda I-Ad(x))$. 故に，$det(\lambda I-Ad(x))=det(\lambda I-Ad(e))=\lambda-1$ $(\forall x\in X)$. λ_1 は一つの特性根とすれば，$0=det(\lambda_1 I-Ad(x))=\lambda_1-1$. 故に $\lambda_1=1$ である。このとき X の Lie algebra $\mathfrak{g}$ は nilpotent である。

<u>定理 10.7</u>　X は連結局所コンパクト群で，σ は X 上の連続自己同型とする。(X,σ) がエルゴード的ならば，X はコンパクトである。

(証明)

X は 1 次元 Lie 群とすれば，X は可換．故に定理 10.5 によって X はコンパクトである。$dim(X)<n$ なる Lie 群に対して定理は真であると仮定する。X は $dim(X)=n$ なる Lie 群とする。補題 10.6 によって X は nilpotent である。故に X の中心群 Z は連結

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

である(p. 188, [22]). ; i.e. $\dim(Z) > 0$。 $\sigma(Z) = Z$ で, $\dim(X/Z) < \dim(X)$ そして$(X/Z, \sigma)$はエルゴード的であるから, 帰納法の仮定によって, X/Zはコンパクトである。故にXはコンパクト群KとR^n $(n \geqq 0)$の直積$X = K \otimes R^n$に表わされる(p. 153, [22]). 明らかに$\sigma(K) = K$で, $X/K \cong R^n$. $(X/K, \sigma)$はエルゴード的であるから, $R^n = \{0\}$でなくてはならない; i.e. $X = K$はコンパクトである。//

定理 10.8 Xは局所コンパクト群, X_0は単位元の連結成分とする。σはX上のエルゴード的自己同型でX/X_0がコンパクトであると仮定する。このときXはコンパクトでなくてはならない。

(証明)

X_0がコンパクトであれば, X/X_0がコンパクトであるからXもコンパクト. そこでX_0はコンパクトでないと仮定する。NはX_0/NがLie群なるX_0の最大コンパクト正規部分群とする(Lemma 4.2, [24]). このときX_0/Nはコンパクト正規真部分群を含まない。NはXで正規であることに注意する。$Y = X/N$, $Y_0 = X_0/N$とおく。$Y/Y_0 (\cong X/X_0)$はコンパクトであるから, Y/KがLie群となるコンパクト正規部分群Kをみつけることができる(p. 175, [42]). $K_n = K\sigma(K) \cdots \sigma^n(K)$ $(n \geqq 0)$とする。Y/K_nはLie群でY_0K_n/K_nは最大連結正規部分群であるから, それはY/K_nで開部分群である。故にY_0K_nはYで開正規部分群で, $\bigcup_n Y_0K_n = Y$ ($\because (Y, \sigma)$はエルゴード的であるから). $\sigma^{-1}(K)$はコンパクトであるから, $\sigma^{-1}(K) \subset Y_0K_{m-1}$なる$m > 1$が存在する。このことより$\sigma(Y_0K_m) = Y_0K_m$. 再び$(Y, \sigma)$のエルゴード性によって, $Y = Y_0K_m$. K_mはコンパクトであることに注意する。$K_m \cap Y_0 \subset Y_0$で, Y_0はコンパクト正規部分群を含まないから, $K_m \cap Y_0 = \{e\}$; i.e. $Y = Y_0 \otimes K_m$. K_mは最大コンパクト正規部分群であるから, $\sigma(K_m) = K_m$. $Y/K_m \cong Y_0$で$(Y/K_m, \sigma)$はエルゴード的であるから, 定理 10.5によってY/K_mはコンパクト; i.e. X_0/Nはコンパクト. これは仮定に反する。//

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

定理10.9. σはコンパクト連結有限次元群X上のエルゴード的自己同型とする。このときXは可換である。

(証明)

定理6.1によって, $X = AB$ と積に分解され, $\sigma(A) = A$, $\sigma(B) = B$ をうる(cf (P6.2)による)。Z_B はBの中心群とする。このとき(P6.3)によって B/Z_B はσによるBernoulli群と半単純Lie群の直積に分解されるが, B/Z_B は有限次元であるから, σによるBernoulli群は存在しない; i.e. B/Z_B そしてBは半単純Lie群である。$B \neq \{e\}$ とすれば, $\sigma|_B$ は negative definite であるKilling形式 $\mathbb{B}$ をもつ。$-\mathbb{B}$ によって生成されたB上のRieman距離は $\sigma|_B$ を等距離に保つ。$X/A \cong B/(A\cap B)$ であるから, $B/(A\cap B)$ 上に生成されたσが等距離的になるように距離関数を導入することができる。しかし $(B/(A\cap B), \sigma)$ はエルゴード的であるから, それはBernoulli系である。これは矛盾である。故に $B = \{e\}$; i.e. $X = A$ は可換である。//

注意 Halmosの問題に対して, 次が残されている; "Xは完全不連結局所コンパクト非可換群とする。Xはエルゴード的自己同型をもてば, Xはコンパクトに限る。"

もしXにコンパクト開正規部分群Kが存在すれば, 補題10.4の証明の方法で問題は解決する。残念ながら, (非可換の場合) このようなKは一般には存在しない。この例を次の注意で与える。

注意 コンパクト開正規部分群をもたない完全不連結局所コンパクト群が存在する。

Xは z, x_n $(n \in \mathbb{Z})$ の有限または無限の積を元にもつ群で, 次の条件をみたすとする;

1) $x_n^2 = e$ $(\forall n \in \mathbb{Z})$, 2) $x_m x_n = x_n x_m$ $(\forall m, n \in \mathbb{Z})$,

3) $x_m z = z x_{m-1}$ $(\forall m \in \mathbb{Z})$.

条件3)によって次の条件4)がえられる; 4) $\forall i, j \in \mathbb{Z}$ に対して, $z^{-n} x_i z^n = x_j$ なる $n \in \mathbb{Z}$ が存在する。

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

$H=\{x_{n_1}x_{n_2}\cdots x_{n_k} : n_1<n_2<\cdots<n_k,\ 1\leqq k\leqq\infty\}$

とおく。Hの定義より，添え数が負であるのは有限個しかありえない。$\forall h\in H$に対して，$h=x_{n_1}x_{n_2}\cdots$であるから $h^2=(x_{n_1}x_{n_2}\cdots)^2=\prod_{k=1}^{\infty}(x_{n_1}\cdots x_{n_k}x_{n_1}\cdots x_{n_k})=e$ (∵ 条件 1)，2)による)．故にHは位数2を元にもつ可換群である。$x\in H$は$x=x_{n_1}x_{n_2}\cdots$と表わされるから条件3)によって，$z^{-1}xz=x'$なるx'は$x'=x_{n_1-1}x_{n_2-1}\cdots$と表わされる。Gのすべての元$x$はHの元$x$と$z^m$ ($\exists m>0$) の積$z^m x$で表わされる。Gに位相を導入するために，eの近傍U_m ($m\geqq 1$) を次のように定義する; $U_m\subset H$で，U_mの各元は$n>m$なるx_nの積になっている。このように導入された位相でU_mはコンパクト開部分群となる。従ってGは局所コンパクト群である。すべての開部分群は十分大きな$n>0$に対して，x_nを含む。条件4)より，開正規部分群はすべてのx_n ($n\in\mathbb{Z}$)を含むことになる。このような群はGの中でコンパクトではない。

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

References

N. Aoki

1. A simple proof of the Bernoullicity of ergodic automorphisms on compact abelian groups, Israel J. Math. 38 (1981), 189-198.
2. Zero-dimensional automorphisms having a dense orbit, J. Math. Soc. Japan, 33 (1981), 693-700.
3. The splitting of zero-dimensional automorphisms and its application, (to appear in Colloq. Math.)
4. A group automorphism is a factor of a direct product of a zero entropy automorphism and a Bernoulli automorphism, Fund. Math. 14 (1981), 159-171.
5. Group automorphisms with finite entropy, Mh. Math. 88 (1979), 275-285.
6. Zero-dimensional automorphisms with specification, (to appear in Mh. Math.)

G. Birkoff

7. (with S. MacLane) A survey of Modern Algebra, Macmillan, New York, 1965.

R. Bowen

8. Markov partitions for axiom A diffeomorphisms, Amer. J. Math. 92 (1970), 725-747.
9. Entropy for group endomorphisms and homogeneous spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 153 (1971), 401-414.
10. Some systems with unique equilibrium state, Math. Syst. Theory, 8 (1974), 193-202.
11. Bernoulli equilibrium states for axiom A diffeomorphisms, Math. Syst. Theory, 8 (1975), 289-294.
12. Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms, Lecture notes Math. 470 Springer 1975.
13. One-dimensional hyperbolic set for flows, J. Diff. Eq. 12 (1972), 173-179.

M. Dateyama

14. Invariant measures for homeomorphisms with weak specification, Tokyo J. Math. 4 (1981), 389-397.
15. (with N. Aoki and M. Komuro) Solenoidal automorphisms with specification, Mh. Math. 93 (1982), 79-110.
16. Group automorphisms with almost weak specification, (to appear).

M. Denker

17. (with C. Grillenberger and K. Sigmund) Ergodic Theory on Compact Spaces, Lecture notes Math. 527 Springer 1974.

R. Ellis

18. Lectures on Topological Dynamics, Benjamin, New York 1969.

L. W. Goodwyn

19. Cmparing topological entropy with measure theoretic entropy, Amer. J. Math. 74 (1972), 366-388.

N. A. Friedman

20. (with D. S. Ornstein) On isomorphism of weak Bernoulli transformations, Advances in Math. 5 (1971), 365-394.

R. Halmos

21. Lecture on Ergodic Theory, Publ. Math. Soc. Japan 3, Tokyo, 1956.

G. Hochschild

22. The Structure of Lie Groups, Holden-Day. San Francisco, 1965.

M. H. Hirsch

23. Differentiable Topology, Graduate Texts 33, Springer 1976.

K. Iwasawa

24. On some type of topological groups, Ann. of Math. 50 (1949), 507-558.

S. Iyanaga (and M. Fukawa)

25. 代数学, 岩波書店, 1968.

I. Kaplansky

26. Groups with representations of bounded degree, Canad. J. Math. 1 (1949), 105-112.

T. Kamae

27. Normal numbers and ergodic-theory, Lecture notes Math. 550 (1976), 253-269.

Y. Katznelson

28. Ergodic automorphisms of T^n are Bernoulli shifts, Israel J. Math. 10 (1971), 186-195.

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

R. Kauffman

29. (with M. Rajagopalan) On automorphisms of a locally compact group, Mich. Math. J. 13 (1966), 373-374.

W. Krieger

30. On the uniqueness of the equilibrium states, Math. Syst. Theory 8 (1974), 97-104.

C. Kuratowski

31. Topologies, Vol. II, Warzawa, 1961.

A. G. Kurosch

32. Theory of Groups I, New York, Chelsea 1960.

I. Kubo

33. (with N. Aoki) A number theoretical lemma and its application to the ergodic theory, (preprint).
34. Ergodicity of the dynamical system of a particle on a domain with irregular walls, Lecture notes Math. 330 Springer (1973), 287-295.

D. Lind

35. Splits skew products, a related functional equation and specification, Israel J. Math. 30 (1978), 236-254.

36. Ergodic group automorphisms and specification, Lecture notes Math. 729 Springer (1979), 93-105.
37. The structure of skew product with ergodic group automorphisms, Israel J. Math. 28 (1977), 205-248.

R. Mañé

38. Expansive homeomorphisms and topological dimension, Trans. Amer. Math. Soc. 252 (1979), 313-319.

G. Miles

39. (with K. Thomas) The breakdown of automorphisms of compact topological groups, Studies in Prob. and Ergodic Theory, Advances in Math. Supplementary Studies, 2 (1978), 207-218.
40. (with K. Thomas) On the polynomials uniformity of translations of the

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

n-torus, ivid, 219-229.

41. (with K. Thomas) Generalized torus automorphisms are Bernoullian, ivid, 231-249.

D. Montogomery

42. (with L. Zippin) Topological Transformation groups, Interscience, New York, 1955.

A. Morimoto

43. 擬軌道追跡の方法と力学系の安定性，東大数学教室，セミナリー・ノート39，1979

D. S. Ornstein

44. Bernoulli shifts with the same entropy are isomorphic, Advances in Math. 4 (1970), 337-452.

45. Two Bernoulli shifts with infinite entropy are isomorphic, ivid, 5 (1971), 339-348.

46. Factors of Bernoulli shifts are Bernoulli shifts, ivid, 5 (1971), 349-364.

47. Imbedding Bernoulli shifts in flows, Contribution to Ergodic Theory and Probability, Springer (1970), 178-218.

K. R. Parthasarathy

48. A note on mixing process, Sankā Ser. A 24, (1964), 331-332.

49. On the category of ergodic measures, Illinois J. Math. 5 (1961), 648-656.

L. Pontrjagin

50. Topological Groups, New York, Gordon and Breach, 1966.

M. Rajagopalan

51. Ergodic properties of automorphisms of a locally compact group, Proc. Amer. Math. Soc. 17 (1966), 372-376.

52. (with B. M. Screiber) Ergodic automorphisms and affine transformations, Proc. Japan Acad. 46 (1970), 633-636.

V. A. Rohlin

53. Selected topics from the metric theory of dynamical systems, Amer. Math. Soc. Transl. 49 (1966), 171-240.

54. Metric properties of endomorphisms of compact abelian groups, Amer. Math. Soc. Transl. 64 (1967), 244-252.

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

D. Ruelle

55. Thermodynamic Formalism, Addison-Wesley, 1978.
56. A measure associated with axiom A attractors, Amer. J. Math. 98 (1976), 619-654.
57. Statistical mathematics on a compact set with $\mathbb{Z}^{\nu}$ - action satisfying expansiveness and specification, Trans. Amer. Math. Soc. 185 (1973), 237-251.

K. Shiraiwa

58. Manifolds which do not admit Anosov diffeomorphisms, Nagoya Math. J. 49 (1973), 111-115.
59. Anosov 微分同相写像, 数学, 日本数学会 26 (1974), 97-108.
60. 力学系理論(構造安定性), 都立大学, セミナー報告, 1982

K. Sigmund

61. Generic properties of invariant measures for axiom A diffeomorphisms, Inven. Math. 11 (1970), 99-109.
62. On dynamical systems with the specification property, Trans. Amer. Math. Soc. 190 (1974), 285-299.
63. On mixing measures for axiom A diffeomorphisms, Proc. Amer. Math. Soc. 36 (1976), 497-504.

Ya. G. Sinai

64. Gibbs measures in ergodic theory, Russ, Math. Surveys 766 (1972), 27-69.
65. Markov partitions and Y-diffeomorphisms, Fun. Anal. Appl. 2 (1968), 64-89.
66. The construction of Markov partitions, Fun. Anal. Appl. 2 (1968), 70-80.

S. Smale

67. Differentiable dynamical systems, Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967), 147-817.

M. Smordinsky

68. Ergodic Theory, Entropy, Lecture notes Math. 214. Springer 1971.

Y. Takahashi

69. Gibbs 測度の特徴づけ, Semi. on Prob. 46, 1977.
70. Isomorphisms of β- automorphisms to Markov automorphisms, Osaka J. Math. 10 (1973), 175-184.

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

71. Shifts with orbit basis and realization of one dimensional maps, (to appear in Osaka Math. J.)

T. Takagi

72. 代数的整数論, 岩波書店, 1971.

H. Totoki

73. エルゴード理論入門, 共立出版, 1971.
74. (伊藤俊次, 村田博 共著) エルゴード理論における同型定理 (D.S. Ornstein の諸定理), Semi. on Prob. 33, 1971
75. (with N. Aoki) Ergodic automorphisms of T^{∞} are Bernoulli automorphisms, PRIM, Kyoto Univ. 10 (1975), 535-544.

P. Walters

76. Ergodic Theory, Lecture notes Math. 458, Springer 1975.
77. A variational principle for pressure of continuous transformations, Amer. J. Math. 97 (1973), 937-971.

A. Weil

78. L'integration dans les groupes topologiues et ses applications, Herman, Paris 1951.

B. Weiss

79. Topological transitive and ergodic measures, Math. Syst. Theory, 5 (1971), 71-75.

T. S. Wu

80. Continuous automorphisms on locally compact groups, Math. Z. 96 (1967), 256-258.

S. A. Yuzvinskii

81. Metric properties of automorphisms of a locally compact group, Russ. Math. Surveys 22 (1967), 47-52.
82. Metric properties of endomorphisms of compact groups, Amer. Math. Soc. Transl. 66 (1968), 63-98.
83. Calculation of the entropy of a group endomorphism, Sibirian Math. J. 8 (1967), 230-239.

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

索 引

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

記 号 表

Sem. on Probab.
Vol.55 1983年
P1-160

1983年1月　確率論セミナー発行