Sem. on Probab.
Vol.53 1981年
P1-142

SEMINAR ON PROBABILITY

Vol. 53

Hilbert 空間上の確率微分方程式

宮 原 孝 夫

1 9 8 1

確 率 論 セ ミ ナ ー

Sem. on Probab.
Vol.53 1981年
P1-142

まえがき

無限次元空間上の確率過程、特に無限次元確率微分方程式はいろいろな問題と関連して現れている。たとえば、Filtering Theory, Quantum Field Theory, 数理生物学, あるいは Control 等の工学関係の問題など。

基本になる process は、有限次元の場合と同様に、やはり、無限次元 Brownian motion と呼ばれるべき process であろう。それをどのような形で設定するかは、様々な立場のありうるところであるが、我々は、考える空間 (state space) を可分な実 Hilbert 空間に限定して、その上の cylindrical Brownian motion (Def. 1.1. 以下 c.B.m. と略記する) を基礎にして話を進める。

考える問題によっては、Schwartz の空間 $\mathcal{S}'(R^d)$, あるいは Banach 空間上等で考える必要も生ずる。そうした場合にも、上の c.B.m. と関係づけて考えることができる。事実、K. Itô の standard Wiener $\mathcal{S}'$-process (K. Itô [1]) は Hilbert 空間 $L^2(R^d)$ 上の c.B.m. に同等であり、又、c.B.m. は L. Gross の abstract Wiener space 上の Wiener measure の典型的な例にもなっている。

本稿は、予備知識なしに読めるように §1 以下基本的なことから順に述べ、著者の仕事を中心に、それに関連したことがらをまとめた。

1981年10月

宮原孝夫

Sem. on Probab.
Vol.53　1981年
P1-142

目　次

Sem. on Probab.
Vol.53 1981年
P1-142

Hilbert空間上の確率微分方程式

§1. Hilbert空間上の cylindrical Brownian motion

この節では、Hilbert 空間上の cylindrical Brownian motion（略して、c.B.m. と書く）の定義を与え、それの持つ基本的な性質を調べることにする。 c.B.m.は、有限次元の Brownian motion の無限次元空間への自然な拡張であり、次節以下での議論の基礎になる。

確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ と、σ-field の増加列 $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$, $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$, とが与えられており、$\bigcap_{\varepsilon>0} \mathcal{F}_{t+\varepsilon} = \mathcal{F}_t$ で、$\mathcal{F}_t$ は P について完備であるとする。 そして、H を可分な実 Hilbert 空間とする。 このとき、c.B.m. の定義を次のように与える。

<u>Def. 1.1.</u> 写像 $B : R_+ \times H \times \Omega \longrightarrow R^1 = (-\infty, \infty)$, $R_+ = [0, \infty)$, $B(0, h, \omega) \equiv 0$ がH上の cylindrical Brownian motion (c.B.m.) であるとは、次の条件 (i), (ii) を満たしていることを言う。

(i) 任意の $h \in H$, $h \neq 0$, を1つ固定したとき

$$B(t, h, \omega) / \|h\|$$

は、1次元の $\mathcal{F}_t$-Brownian motion である。

(ii) BはH上で linear である。 すなわち、任意の $t \in R_+$, $\lambda, \mu \in R^1$, $h, k \in H$ に対して次式が成立する。

$$B(t, \lambda h + \mu k, \cdot) = \lambda B(t, h, \cdot) + \mu B(t, k, \cdot), \quad (P\text{-a.s.}) \quad (1.1)$$

以下、$B(t, h, \omega)$ のことを B_t あるいは $B_t(h)$ 等とも書くことにする。

Sem. on Probab.
Vol.53 1981年
P1-142

Remark 1.1. 上の定義より、

"$h \perp k$, (直交) $\Rightarrow \{B_t(h)\} \perp\!\!\!\perp \{B_t(k)\}$, (独立なProcess),"

が言える。実際, $h \perp k$ のとき (i) より $E[|B_t(h+k)|^2] = \|h\|^2 + \|k\|^2$ である(ここで, $E[\ ]$ は P についての期待値を示す)。一方、(ii) により $E[|B_t(h+k)|^2] = E[|B_t(h)|^2] + 2E[B_t(h) \cdot B_t(k)] + E[|B_t(k)|^2] = \|h\|^2 + 2E[B_t(h) \cdot B_t(k)] + \|k\|^2$ である。従って $E[B_t(h) B_t(k)] = 0$ となり, Gaussian であるから $B_t(h) \perp\!\!\!\perp B_t(k)$ が分る。

次に、$B_t(h)$ と $B_s(k)$ については, $s<t$ として, $E[B_t(h) B_s(k)] = E[E[B_t(h) B_s(k) | \mathcal{F}_s]] = E[B_s(h) B_s(k)] = 0$ となり、やはり独立である。

c.B.m. B_t を H-valued process として実現できるか見てみよう。いま $\{e_n, n=1,2,\cdots\}$ を H の1つの c.o.n.s. とすると, 上の Remark 1.1 により $\{B_t(e_n), t \geq 0\}$, $n=1,2,\cdots$ は互に独立な1次元 B.m. の可算列である。このとき, $\sum_{n=1}^{\infty} B_t(e_n) e_n$ が H 上で収束していればそれが B_t の H-valued process としての表現になろう。しかし、大数の法則より $\sum |B_t(e_n)|^2 = \infty$ (P-a.s.) であるから, それは望めない。こうして, B_t をある空間上の process として実現するためには H よりも広い空間を考えねばならないことになる。

可分な実 Hilbert 空間 H が, ある実 Banach 空間 V の dense subset になっているとしよう。このとき, V の topological dual space を V' とすると, 自然に $V' \subset H' \approx H \subset V$ なる関係がある。従って H' と H を同一視することにより

$$V' \subset H \subset V \quad (\text{共に dense subsets})$$

とみなすことができる。

Def. 1.2. V-valued process $\tilde{B}_t(\omega)$ が V 上の H-Brownian

Sem. on Probab.
Vol.53 1981年
P1-142

motion (H-B.m.) であるとは，次の (i) (ii) を満たすときをいう。

(i) $\tilde{B}_\cdot(\omega) : R_+ \to V$ は P-a.s. に連続で，$\tilde{B}_0(\omega) \equiv 0$.

(ii) 任意の $y' \in V'$, $y' \neq 0$, に対して

$$\langle y', \tilde{B}_t \rangle_{V' \times V} / \|y'\| \text{ は 1 次元 } \mathcal{F}_t\text{-B.m.}$$

が成立する。 こゝで，$\langle \ , \ \rangle_{V' \times V}$ は V' と V との共役な双一次形式 (canonical bilinear form) であり，ノルム $\|\cdot\|$ は H におけるノルムを示している。

H 上の c.B.m. B_t を与えることと，ある適当な Banach 空間上の H-B.m. $\tilde{B}_t$ を与えることとが，次の２つの Propositions で示されるような意味で同値になる。

<u>Prop. 1.1.</u> $\tilde{B}_t$ を V 上の H-B.m. とするとき，次の条件をみたす H 上の c.B.m. B_t が唯一つ定まる。

$\forall y' \in V'$, $\forall t \in R_+$ に対して

$$\langle y', \tilde{B}_t \rangle_{V' \times V} = B_t(y') \qquad (P\text{-a.s.}) \qquad (1.2)$$

ただし，uniqueness は，$\forall h \in H$, $\forall t \in R_+$ に対して $B_t'(h) = B_t(h)$ (P-a.s.) なものを同一視して考える。

(Proof) $h \in V' \subset H$ なる h に対しては

$$B_t(h) = \langle h, \tilde{B}_t \rangle_{V' \times V}$$

と定義する。 次に $h \in H$, $h \notin V'$ の場合を考える。 V' は H 内で dense であるから，V' 内の点列 $\{y_n'\}$ で，$y_n' \to h$ in H, なるものが存在する。 このとき，$B_t(y_n') = \langle y_n', \tilde{B}_t \rangle_{V' \times V}$ は連続な $\mathcal{F}_t$-martingale であって，$n \to \infty$ とするとき $L^2(\Omega \times [0, T], dP \times dt)$, $0 < T < \infty$, 内で収束する。 従ってその極限

も2乗可積分な $\mathcal{F}_t$-martingale で，連続なversionをとることにより連続な $\mathcal{F}_t$-martingale が定まる。それを $B_t(h)$ と定義する。上のように定めた $B_t(h)$ が Def. 1.1. の条件 (i) (ii) を満足していることは容易に分る。また，一意性は，条件 (1.2) と V' が H で dense なことから明らかである。(Q.E.D.)

<u>Prop. 1.2.</u> B_t を H 上の c.B.m. とするとき，適当な Banach 空間 V と V 上の H-B.m. $\widetilde{B_t}$ で次の条件を満たすものが存在する。

$$\forall y' \in V' \text{ に対して } \quad B_t(\tau^* y') = \langle y', \widetilde{B_t} \rangle_{V' \times V} \quad (P\text{-a.s.}) \qquad (1.3)$$

ただし τ^* は，$V' \subset H \subset V$ における V' から H への injection である。

(Proof) H 上の正定値な Hilbert-Schmidt 作用素を1つとり，A とおく。そして，$|h| \equiv \|Ah\|$, $h \in H$, により H 上に新しいノルム $|\cdot|$ を導入し，H をこのノルム $|\cdot|$ により完備化した空間を V とおく。

次に，A の固有値を $\{a_n ; n=1,2,\dots\}$ とし，対応する固有ベクトルを $\{e_n\}$ とする。$a_n > 0$, $\sum a_n^2 < \infty$ であり，また $\{e_n\}$ は H の c.o.n.s. である。このとき，V-valued process $\widetilde{B_t}$ を

$$\widetilde{B_t} = \sum_{n=1}^{\infty} B_t(e_n) e_n \qquad (1.4)$$

により与える。

まず上の $\widetilde{B_t}$ が well-defined であることを見よう。

$$\widetilde{B}_{t,n} = \sum_{k=1}^{n} B_t(e_k) e_k$$

とおくと，これは V-valued $\mathcal{F}_t$-martingale である（Banach 空間上の martingale についてはこの節の後半，Def. 1.4. 以下を参照せよ）。$n \to \infty$ としたとき収束を言おう。$m < n$ とし

て次の計算ができる。

$$E[|\widetilde{B}_{t,n}-\widetilde{B}_{t,m}|^2] = E[|\sum_{k=m+1}^{n} B_t(e_k)e_k|^2]$$

$$= E[\sum_{k=m+1}^{n} a_k^2 B_t(e_k)^2] = \left(\sum_{k=m+1}^{n} a_k^2\right)t \longrightarrow 0 \quad (m, n \to \infty) \qquad (1\cdot5)$$

こうして $\{\widetilde{B}_{t,n}; n=1,2,\cdots\}$ は，t を固定したごとに $L^2(\Omega\to V, dP)$ における収束列であることが分った。従って Prop. 1.4.（後述）により，(1.4) の右辺は連続な V-valued $\mathcal{F}_t$-martingale に収束する。これが (1.4) 式による $\widehat{B}_t$ の定義である。

上に定義した $\widehat{B}_t$ が Def. 1.2. の条件を満たしていることを見よう。(i) はよいので (ii) をたしかめる。V, V' の定義から $e_n\in V'$ であり，V' は $\{e_n, n=1,2,\cdots\}$ で張られていることを注意しておこう。

各 $B_t(e_n)$ は1次元 $\mathcal{F}_t$-B.m. であるから独立増分を持つ。従って $\widetilde{B}_{t,n} = \sum_{k=1}^{n} B_t(e_k)e_k$ も独立増分（i.e., $\forall y'\in V'$ に対して $\langle y', \widetilde{B}_{t,n}-\widetilde{B}_{s,n}\rangle_{V'\times V}$ は $\mathcal{F}_s$ と独立 $(s<t)$）を持ち，その極限として $\widehat{B}_t$ も独立増分を持つ（i.e., $\widehat{B}_t-\widehat{B}_s$ は $\mathcal{F}_s$ と独立，$(s<t)$）。また，$y'\in V'$，$y'=\sum y'_n e_n$ とするとき

$$E[\langle y', \widehat{B}_t-\widehat{B}_s\rangle^2] = \sum y_n'^2 E[\langle e_n, \widehat{B}_t-\widehat{B}_s\rangle^2]$$

$$= \sum y_n'^2 E[(B_t(e_n)-B_s(e_n))^2] = \sum y_n'^2 |t-s|$$

$$= \|y'\|^2 |t-s| \qquad (1\cdot6)$$

となる。Gaussian であるから，上のことより

$$\langle y', \widehat{B}_t\rangle_{V'\times V} / \|y'\| \text{ は 1 次元 } \mathcal{F}_t\text{-B.m.}$$

が分り，Def. 1.2. の条件 (ii) が言えた。

次に (1.3) 式が成り立っていることを見る。$y'=e_n$ のときには定義より明らかであり，一般の $y'\in V'$ については，y' が $\{e_n, n=1,2,\cdots\}$ の一次結合の極限であることより言える。

(Q.E.D.)

Sem. on Probab.
Vol.53 1981年
P1-142

Remark 1.2. Prop. 1.2 により，$P(\Omega_0)=1$ なる $\Omega_0 \subset \Omega$ を

"$\omega \in \Omega_0$ のとき，$\forall y' \in V'$ に対して $B_t(y') = \langle y', \hat{B}_t \rangle$ は連続"

となるように選べる。しかし、すべての $h \in H$ に対して $B_t(h)$ が連続になるような Ω_0 を取ることはできていない。

Remark 1.3. Hilbert 空間 H として $L^2(R^d)$ を考えた場合の c.B.m. は，standard Wiener $\mathcal{S}'$-process（K. Itô [1]）と同等である。

上で V-valued martingale についての議論を使った。そこで，Banach 空間上の process 及び martingale について簡単にまとめておこう。

確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 及び σ-field の族 $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ は今までと同じとする。

Def. 1.3. V を可分な実 Banach 空間とするとき，$X_t(\omega)$：$[0,\infty) \times \Omega \to V$ が V-valued measurable process であるとは，任意の $y' \in V'$ に対して $\langle y', X_t \rangle_{V' \times V}$ が real valued process として measurable なときをいう。

上の定義は，V の weak topology についての可測性である。しかし，次の Proposition から分るように，実は，strong topology についての可測性と同値である。

Prop. 1.3. 可分な Banach 空間においては，weak topology から生成される最小の σ-field (cylindrical Borel field) と strong topology から生成される最小の σ-field (topological Borel field) とは一致する。

(Proof) V を可分な Banach 空間とし，その topological

Sem. on Probab.
Vol.53 1981年
P1-142

Borel field を $\mathcal{B}$, cylindrical Borel field を $\widetilde{\mathcal{B}}$ とおく。cylinder set $\{y\in V; \langle y', y\rangle_{V'\times V} \in E\}$, $y'\in V'$, $E\subset R^1$: open, は, $\langle y', \cdot\rangle$ の連続性により $\mathcal{B}$ の元である。従って $\widetilde{\mathcal{B}}\subset\mathcal{B}$ は明らか。よって、逆の包含関係 $\mathcal{B}\subset\widetilde{\mathcal{B}}$ を示せばよい。

Vは可分としているので, Vの任意の開集合は閉球の可算和に表現できる。このことより、$\mathcal{B}\subset\widetilde{\mathcal{B}}$を示すには

$$S=\{y\in V; |y|\leqq 1\}\in\widetilde{\mathcal{B}} \tag{1.7}$$

を示せば十分である。以下 (1.7) の証明を行なう。

$\{y_n, n=1,2,\cdots\}$ をVの dense subset とする。各 y_n に対して, Hahn-Banach の定理により,

$$|y_n'|_{V'}=1, \quad \langle y_n', y_n\rangle_{V'\times V}=|y_n|_V$$

なる $y_n'\in V'$ が存在する。$y\in S$ のとき $|\langle y_n', y\rangle|\leqq|y_n'||y|\leqq 1$ より

$$S\subset\bigcap_n\{y\in V; |\langle y_n', y\rangle|\leqq 1\} \tag{1.8}$$

が分る。次に、(1.8) の逆の包含関係を示そう。

いま $y\notin S$ として, $|y|=r>1$ とする。$\{y_n\}$はVにおいて稠密であったから, その中から $|y-y_n|<(r-1)/2$ を満たしている y_n をとることができる。このとき

$$|\langle y_n', y-y_n\rangle|\leqq|y_n'|_{V'}|y-y_n|_V\leqq|y-y_n|_V<(r-1)/2 \tag{1.9}$$

$$|y_n|_V\geqq|y|_V-|y-y_n|_V>(r+1)/2 \tag{1.10}$$

となるので, 次式が分る。

$$\begin{aligned}|\langle y_n', y\rangle| &\geqq|\langle y_n', y_n\rangle|-|\langle y_n', y-y_n\rangle|\\ &\geqq|y_n|-|y-y_n|\\ &>(r+1)/2-(r-1)/2=1\end{aligned} \tag{1.11}$$

この不等式より, yは (1.8) の右辺の集合に属していないこと

が分る。 すなわち

$$y \notin S \Rightarrow y \notin \bigcap_n \{y \in V ; |\langle y_n', y \rangle| \leqq 1\} \tag{1.12}$$

が分った。 (1.8) と (1.12) より

$$S = \bigcap_n \{y \in V ; |\langle y_n', y \rangle| \leqq 1\} \in \tilde{\mathcal{B}}$$

となって，(1.7) が示せた。 (Q.E.D.)

<u>Cor. 1.1.</u> V-valued process X_t について、次の (i) (ii) は同値である。

(i) X_t は measurable (Def. 1.3) である。

(ii) X_t は strong topology でみて measurable である。

次に V-valued martingale の定義を与え，その性質を見ておくことにする。

<u>Def. 1.4.</u> $X_t(\omega) : [0, \infty) \times \Omega \to V$, が V-valued $\mathcal{F}_t$-martingale であるとは，任意の $y' \in V'$ に対して $\langle y', X_t \rangle_{V' \times V}$ が real valued martingale のときをいう。

今後 V は可分で回帰的な実 Banach 空間であるとする。このときには V' も可分になることを注意しておこう。

<u>Def. 1.4.</u> X : V-valued random variable

$\mathcal{F}'$: $\mathcal{F}$ の sub-σ-field

とするとき，$\mathcal{F}'$ による X の条件付期待値 $E[X|\mathcal{F}']$ とは，

$$\langle y', E[X|\mathcal{F}'] \rangle = E[\langle y', X \rangle | \mathcal{F}'] \quad \text{for } \forall y' \in V' \tag{1.13}$$

を満たす $\mathcal{F}'$-measurable な V-valued random variable のことである。

上の定義により条件付期待値 $E[X|\mathcal{F}']$ が P-a.s. の意味で一意的に定まることは、次の Lemma による。

<u>Lemma 1.1.</u> V-valued random variable X が

$$\langle y', X\rangle = 0 \quad (P\text{-a.s.}) \quad \text{for } \forall y' \in V' \qquad (1.14)$$

を満たしていれば、$X = 0$ (P-a.s.) である。

(Proof) 上で注意したように V' も可分であるから，V'における稠密な可算系列 $\{y_n'\}$ を選び出すことができる。このとき

$$\Omega_0 = \{\omega\in\Omega\,;\, X(\omega)=0\}$$

$$\Omega_n = \{\omega\in\Omega\,;\, \langle y_n', X(\omega)\rangle = 0\},\quad n=1,2,\cdots$$

とおくと，(1.14) より $P(\Omega_n)=1$ である。一方，$\{y_n'\}$ が V'で稠密なことより，

" $\langle y_n', X(\omega)\rangle = 0,\ n=1,2,\cdots \iff X(\omega)=0$ "

であり，従って $\Omega_0 = \bigcap_n \Omega_n$ となる。以上から $P(\Omega_0)=1$ が言えた。 (Q.E.D.)

条件付期待値を使うと，martingale の定義 Def.1.4 は次のように述べたのと同値である。

<u>Def.1.4'.</u> V-valued process $X_t(\omega)$ は $E[X_t|\mathcal{F}_s]=X_s$, $s<t$，を満たしているとき V-valued $\mathcal{F}_t$-martingale という。

$E[|X_t|^2]<\infty$，$t\geq 0$，であるような martingale を二乗可積分な martingale 又は L^2-martingale と呼ぼう。L^2-martingale の連続性について次のことが言える。

Sem. on Probab.
Vol.53 1981年
P1-142

<u>Prop. 1.4.</u> $\{X_t^n, n=1,2,\cdots\}$ は V-valued continuous L^2-martingales の列であって、次の意味で X_t に収束しているとする。

$$X_t^n \to X_t \ (n\to\infty) \text{ in } L^2(\Omega\to V, P) \quad \text{for } \forall t\in[0,\infty)$$

このとき、X_t は continuous martingale version を持つ。

(Proof) 一般に、M_t を V-valued martingale とするとき、$|M_t|_V$ は real valued submartingale になる。実際、$y'\in V'$ に対して $\langle y', M_t\rangle$ は real martingale 故 $|\langle y', M_t\rangle|$ は submartingale であり、$|y'|_{V'}\leqq 1$ のときには、$s<t$ として

$$E[|M_t||\mathcal{F}_s] \geqq E[|\langle y', M_t\rangle||\mathcal{F}_s] \geqq |\langle y', M_s\rangle| \ (P\text{-a.s.}) \quad (1.15)$$

が成立する。$\{y_n'\}$ を V' 内の単位球内の稠密な点列にとって(1.15)を使い次の不等式をうる。

$$E[|M_t|_V|\mathcal{F}_s] \geqq \sup_n |\langle y_n', M_s\rangle| = |M_s|_V \quad (P\text{-a.s.}) \quad (1.16)$$

こうして、$|M_t|_V$ は submartingale になっている。

上のことより、$|X_t^n - X_t^m|_V$ は submartingale である。従って、submartingale に関する Doob の不等式により、

$$P\left(\sup_{0\leq t\leq T} |X_t^n - X_t^m| > \varepsilon\right) \leqq \frac{1}{\varepsilon^2} E[|X_T^n - X_T^m|^2] \xrightarrow[(m,n\to\infty)]{} 0 \quad (1.17)$$

となる。これより、$\{X_t^n\}$ の部分列 $\{X_t^{n(k)}, k=1,2,\cdots\}$ を次の条件を満たすように選べる。

$$P\left(\sup_{0\leq t\leqq T} |X_t^n - X_t^{n(k)}| > \frac{1}{2^k}\right) \leqq \frac{1}{2^k} \quad \text{for } \forall n \geqq n(k) \quad (1.18)$$

いま

$$A_k = \left\{\omega\in\Omega \,;\, \sup_{0\leq t\leq T} |X_t^{n(k+1)} - X_t^{n(k)}| > \frac{1}{2^k}\right\}$$

とおくと、(1.18)より $\sum P(A_k) < \infty$ である。従って

$$\Omega_0^T = \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c$$

とおくと，Borel-Cantelli の Lemma により $P(\Omega_0^T)=1$ である。そして，$\omega\in\Omega_0^T$ のとき

$$\lim_{k\to\infty} X_t^{n(k)} = X_t^{n(1)} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(X_t^{n(k+1)} - X_t^{n(k)}\right) \tag{1.19}$$

は $[0,T]$ 上で t について一様に収束している。そこで

$$\tilde{X}_t^T(\omega) = \begin{cases} (1.19)\text{式の値} & \text{if } \omega\in\Omega_0^T \\ 0 & \omega\notin\Omega_0^T \end{cases} \tag{1.20}$$

と定義すると，$\tilde{X}_t^T$ は P-a.e. に $[0,T]$ 上で連続である。

上の議論で T は $0<T<\infty$ に任意に固定している。そこで，T_j, $j=1,2,\cdots$ を $T_j\uparrow\infty$ ($j\to\infty$) なる数列にとり，まず T_1 に対して上の議論を行なって $\{X_t^{n(k)}, k=1,2,\cdots\}$ 及び $\tilde{X}_t^{T_1}(\omega)$ を定める。次には T_2 に対して，V-valued martingale の列 $\{X_t^{n(k)}, k=1,2,\cdots\}$ を出発点にして同じ議論を行ない $\tilde{X}_t^{T_2}(\omega)$ を定める。以下これを繰り返して，(1.19) に現われる部分列が一段階前に定めた部分列の中から取り出した部分列であるように定めてゆく。このようにして $\{\tilde{X}_t^{T_j}; j=1,2,\cdots\}$ を定めたとき

$$\bigcap_j \Omega_0^{T_j} = \Omega_0$$

とおくと $P(\Omega_0)$ であり

$$X_t^{T_j}(\omega) = X_t^{T_{j'}}(\omega) \quad \text{if } \omega\in\Omega_0 \text{ で, } t\leq T_j, T_{j'} \tag{1.21}$$

となっている。そこで

$$\tilde{X}_t(\omega) = \begin{cases} \tilde{X}_t^{T_j}(\omega) & \text{if } \omega\in\Omega_0,\ t<T_j \text{ なる } j \text{ をとる。} \\ 0 & \omega\notin\Omega_0 \end{cases} \tag{1.22}$$

と定めると $\tilde{X}_t(\omega)$ は連続になり，t を固定するごとには，$\tilde{X}_t = X_t$ (P-a.e.) が成立している。 (Q.E.D.)

<u>Remark 1.4.</u>　Prop. 1.4. において，X_t^n についての仮定が continuous の代りに right continuous であるときには，結

Sem. on Probab.
Vol.53 1981年
P1-142

論の部分も continuous を right continuous に置き換えた形の命題が成立する。証明はまったく同様でよい。

上の Proposition の証明より次の Corollary が示せる。

<u>Cor. 1.2</u> $\{X_t^n, n=1,2,\cdots\}$ 及び X_t を Prop. 1.4 におけるものと同じとする。このとき $\{X_t^n\}$ の適当な部分列をとって，P-a.e. の ω について $[0,\infty)$ 上の t について広義一様（すなわち，任意の有界区間上で一様）に，X_t の continuous version $\widetilde{X}_t$ に収束するようにできる。

(Proof) Prop. 1.4 の証明において，T_j，$j=1,2,\cdots$ に対応して選んだ $\{X_t^n\}$ の部分列を $\{X_t^{n,j}\}$ とおこう。その定め方から，$j<j'$ のとき $\{X_t^{n,j'}, n=1,2,\cdots\}$ は $\{X_t^{n,j}, n=1,2,\cdots\}$ の部分列であった。このとき $\{X_t^{n,n}, n=1,2,\cdots\}$ なる部分列が求めるものになっている。 (Q.E.D.)

weakly continuous process について次のことが言える。

<u>Cor. 1.3</u> H を可分な実 Hilbert 空間とするとき，H-valued weakly continuous L^2-martingale X_t は strongly continuous martingale version $\widetilde{X}_t$ を持つ。

(Proof) $\{e_n\}$ を H の1つの c.o.n.s. とし，π_n を $\{e_1,\cdots e_n\}$ で張られる部分空間への射影とする。このとき $X_t^n=\pi_n X_t$ とおくと X_t^n は有限次元空間上にあるので strong topology でも連続である。そして $X_t^n \longrightarrow X_t$ in $L^2(\Omega\to H, P)$ は明らか。従って Prop. 1.4 により結論をうる。 (Q.E.D.)

この節の終りに，Hilbert 空間 H 上の c.B.m. B_t の構成法を述べておこう。$\{e_n, n=1,2,\cdots\}$ を H の1つの c.o.n.s. とし，

Sem. on Probab.
Vol.53 1981年
P1-142

$\{b_t^n, n=1,2,\cdots\}$ を互に独立な1次元 B.m. の無限列とする。
このとき

$$B_t(h) = \sum h_n b_t^n, \quad h = \sum h_n e_n \in H \tag{1.23}$$

と定義する。こゝで，(1.23)式の右辺は，$\sum h_n^2 = \|h\|^2 < \infty$ より $L^2(\Omega)$ の意味で収束しており，適当な version をとれば連続になる。それを $B_t(h)$ とおいている。そして，associated increasing process は $\sum h_n^2 t = \|h\|^2 t$ であり，$B_t(h)/\|h\|$ は1次元 B.m. になっている。又，$B_t(h)$ が h について線型なことは (1.23)の定義式より明らか。従って $B_t(h)$ は H 上の c.B.m. である。

§2. 確率積分

前節と同様に，確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$，σ-field の増加列 $\{\mathcal{F}_t\}$，可分な実 Hilbert 空間 H と H 上の c.B.m. B_t が与えられているとしよう。本節では，c.B.m. B_t に関する確率積分を定義し，それの持つ性質を見ることにする。

Hilbert 空間の中に値を取る確率積分を定義したいのであるが，その前に実数値をとる確率積分の定義を与える。

<u>Def. 2.1.</u> $\phi_t(\omega)$, $t \in [0, \infty) \equiv R_+$, $\omega \in \Omega$, を $\mathcal{F}_t$-adapted な H-valued process で

$$E\left[\int_0^t \|\phi_s(\omega)\|^2 ds\right] < \infty \quad \text{for} \quad \forall t \in R_+ \tag{2.1}$$

をみたしているものとする。このとき，H の 1 つの c.o.n.s. $\{e_n\}$ に対して

$$\int_0^t \langle \phi_s, dB_s \rangle \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t (\phi_s, e_n)\, dB_s(e_n) \tag{2.2}$$

によって定まる実数値の continuous martingale を ϕ_t の B_t による確率積分と呼ぶ。ここで，(2.2) 式の右辺の $B_s(e_n)$, $n=1,2,\cdots$，は各々 1 次元 B.m. であり，その積分は 1 次元の場合の Itô-積分である。

<u>Remark 2.1.</u> 上の定義における (2.2) 式の右辺の和の各項は 2 乗可積分な continuous martingale であり，級数は $L^2(\Omega)$ の中で収束している。従って，極限の continuous martingale は P-a.e. に一意的に定まる。

又，上の定義による確率積分は c.o.n.s. $\{e_n\}$ の選び方には依存していない。実際，$\{\tilde{e}_m\}$ を別の c.o.n.s. とするとき，$\tilde{e}_m = \sum_n a_{mn} e_n$ として，$L^2(\Omega)$ 内で次の計算ができる。

$$\sum_{m=1}^{\infty} \int_0^t (\phi_s, \tilde{e}_m)\, dB_s(\tilde{e}_m) = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \int_0^t (\phi_s, \tilde{e}_m)\, dB_s(e_n) \right\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} a_{mn} \int_0^t (\phi_s, \tilde{e}_m) \, dB_s(e_n) \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_0^t (\phi_s, \sum_m a_{mn} \tilde{e}_m) \, dB_s(e_n) \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t (\phi_s, e_n) \, dB_s(e_n)$$

上の変形のさい，$n_1 \neq n_2$ のとき $\{B_s(e_{n_1})\} \perp\!\!\!\perp \{B_s(e_{n_2})\}$ であることを注意しておこう。

Prop. 2.1. 確率積分のノルムについて，次の等式が成立する。

$$E[|\int_0^t \langle \phi_s, dB_s \rangle|^2] = E[\int_0^t \|\phi_s\|^2 ds] \qquad (2.3)$$

(Proof) 独立性に注意して次のように計算してみればよい。

$$E[|\int_0^t \langle \phi_s, dB_s \rangle|^2] = \sum_n E[|\int_0^t (\phi_s, e_n) \, dB_s(e_n)|^2]$$

$$= \sum_n E[\int_0^t |(\phi_s, e_n)|^2 ds] = E[\sum_n \int_0^t |(\phi_s, e_n)|^2 ds]$$

$$= E[\int_0^t \|\phi_s\|^2 ds]$$

(Q.E.D.)

こうして，確率積分 $\phi_s \longrightarrow \int_0^t \langle \phi_s, dB_s \rangle$ は空間 $L^2([0,t] \times \Omega \to H)$ から $L^2(\Omega)$ への等距離写像になっていることが分った。

Hは今まで通りとし，もう1つ別の可分な実Hilbert 空間Kが与えられているとしよう。 そして，$\sigma_2(H,K)$ を，H からKへの Hilbert-Schmidt 作用素の全体に Hilbert-Schmidt ノルムを導入してできる Hilbert空間とする。 このとき K-valued の確率積分を次のように与えよう。

Def. 2.2. $\Phi(t) \equiv \Phi(t, \omega)$ を $\mathcal{F}_t$-adapted な $\sigma_2(H,K)$-valued process で

$$E[\int_0^t \|\Phi(s)\|_2^2 \, ds] < \infty \quad \text{for} \quad \forall t \in R_+ = [0, \infty) \qquad (2.4)$$

Sem. on Probab.
Vol.53 1981年
P1-142

をみたすものとする。ここで、$\|\cdot\|_2$ は Hilbert-Schmidt ノルムを示している。このとき、次式をみたす K-valued continuous $\mathcal{F}_t$-martingale $\int_0^t \Phi(s)dB_s$, $t \geq 0$,

$$(k, \int_0^t \Phi(s)dB_s)_K = \int_0^t \langle \Phi^*(s)k, dB_s \rangle \quad (P\text{-a.s.}) \text{ for } {}^\forall k \in K, \quad (2.5)$$

を $\Phi(s)$ の c.B.m. B_t に関する確率積分という。ここで $\Phi^*(s)$ は $\Phi(s)$ の共役作用素であり、右辺の確率積分は Def.2.1 によるものである。

上の定義により確率積分 $\int_0^t \Phi(s)dB_s$ が一意的に定まることを見ておこう。(2.5)をみたす K-valued continuous martingale が存在したとすれば P-a.s. の意味で一意的なことは明らかである。そこで、存在することを言う。いま、$\{\xi_n, n=1,2,\cdots\}$ を K の1つの c.o.n.s. として

$$Y_t^n = \sum_{k=1}^n \left(\int_0^t \langle \Phi^*(s)\xi_k, dB_s \rangle\right)\xi_k \qquad (2.6)$$

とおく。Y_t^n は K-valued continuous $\mathcal{F}_t$-martingale である。$m<n$ として $Y_t^n - Y_t^m$ の L^2-ノルムを計算すると、(2.3)より

$$E[\|Y_t^n - Y_t^m\|_K^2] = \sum_{k=m+1}^n E\left[\left\|\left(\int_0^t \langle \Phi^*(s)\xi_k, dB_s \rangle\right)\xi_k\right\|_K^2\right]$$

$$= \sum_{k=m+1}^n E\left[\left(\int_0^t \langle \Phi^*(s)\xi_k, dB_s \rangle\right)^2\right] = \sum_{k=m+1}^n \int_0^t \|\Phi^*(s)\xi_k\|_H^2 ds \quad (2.7)$$

となる。条件(2.4)より、(2.7)の値は $m,n\to\infty$ のとき0に収束することが分る(次の Prop.2.2 の証明を見よ)。こうして、$\{Y_t^n, n=1,2,\cdots\}$ は $L^2(\Omega\to K)$ 内で収束しているので、その極限を Y_t とおく。Prop 1.4 により、Y_t は K-valued continuous martingale であるとしてよい。

Y_t^n と Y_t の定め方から、

$$(\xi_j, Y_t)_K = \int_0^t \langle \Phi^*(s)\xi_j, dB_s \rangle \quad (P\text{-a.s.}),\ j=1,2,\cdots \quad (2.8)$$

は成立している。一般の $k \in K$ については、k が $\{\xi_j\}$ の

一次結合の極限と表現できることから，(2.8) 式は ξ_f を一般の $k\in K$ で置きかえても成立していることが分る。以上から $\int_0^t \Phi(s)dB_s = Y_t$ とおいて (2.5) の成立が言えたので，確率積分の存在が分った。

Prop. 2.2. 確率積分 $\int_0^t \Phi(s)dB_s$ に対して次の等式が成立する。

$$E\left[\left\|\int_0^t \Phi(s)dB_s\right\|_K^2\right] = E\left[\int_0^t \|\Phi(s)\|_2^2\,ds\right] \qquad (2.9)$$

(Proof) $\{\xi_n, n=1,2,\cdots\}$ を K の1つの c.o.n.s. とする。一般に $T\in\sigma_2(H,K)$ のとき $T^*\in\sigma_2(K,H)$ であって

$$\|T\|_2^2 = \|T^*\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\|T^*\xi_n\|_H^2$$

が成り立っている。このことと Prop 2.1 を使って次の計算ができる。

$$\begin{aligned}
E\left[\left\|\int_0^t \Phi(s)dB_s\right\|_K^2\right] &= E\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\xi_n, \int_0^t \Phi(s)dB_s\right)^2\right] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} E\left[\left(\int_0^t \langle \Phi^*(s)\xi_n, dB_s\rangle\right)^2\right] = \sum_n E\left[\int_0^t \|\Phi^*(s)\xi_n\|_H^2 ds\right] \\
&= E\left[\int_0^t \left(\sum_n \|\Phi^*(s)\xi_n\|_H^2\right)ds\right] = E\left[\int_0^t \|\Phi^*(s)\|_2^2\,ds\right] \\
&= E\left[\int_0^t \|\Phi(s)\|_2^2\,ds\right]
\end{aligned}$$

こうして，(2.9) が示せた。 (Q.E.D.)

上の Proposition により $\Phi \to \int_0^t \Phi(s)dB_s$ なる対応は，空間 $L^2([0,t]\times\Omega \to \sigma_2(H,K))$ から空間 $L^2(\Omega\to K)$ への等距離写像である。従って次の Corollary が従がう。

Cor. 2.1. $\Phi(t)$ 及び $\Phi^n(t)$, $n=1,2,\cdots$ は各々 $\sigma_2(H,K)$-valued $\mathcal{F}_t$-adapted process であって

$$\Phi^n(t) \longrightarrow \Phi(t) \quad (n\to\infty) \quad \text{in } L^2([0,T]\times\Omega \to \sigma_2(H,K)) \qquad (2.10)$$

Sem. on Probab.
Vol.53 1981年
P1-142

が満たされているとする。 このとき, $t\in[0,T]$に対して

$$\int_0^t \Phi^n(s)dB_s \longrightarrow \int_0^t \Phi(s)dB_s \quad (n\to\infty) \quad \text{in } L^2(\Omega\to K) \qquad (2.11)$$

が成立する。

stopping time で止めたときの確率積分について、次の公式が成立する。

<u>Prop. 2.3.</u> τを $\mathcal{F}_t$-stopping time (Markov time) とするとき

$$\int_0^{t\wedge\tau} \Phi(s)dB_s = \int_0^t \chi_{\{\tau>s\}}(\omega)\,\Phi(s,\omega)\,dB_s \qquad (2.12)$$

が成立する。 こゝで, 左辺は continuous martingale $\int_0^t \Phi(s)dB_s$, $t\geq 0$, において, 各ωごとの time $t\wedge\tau(\omega)$ における値 (i.e. $\left(\int_0^{\cdot} \Phi(s)dB_s\right)(t\wedge\tau(\omega),\omega)$) であり, 右辺は, $\chi_{\{\ \}}$で定義関数を現わして, $\chi_{\{\tau>s\}}\Phi(s)$ の確率積分を示している。

(Proof) H-valued $\mathcal{F}_t$-adapted process ϕ_s の確率積分を示すのに記号

$$\hat{I}(\phi)(t) \equiv \int_0^t \langle \phi_s, dB_s \rangle$$

を使うことにする。 又, $\tilde{\Phi}(s) \equiv \chi_{\{\tau>s\}}\Phi(s)$ とおく。
$y\in K$を1つ固定して

$$\hat{I}(\Phi^* y)(u) \equiv \int_0^u \langle \Phi^*(s)y, dB_s \rangle = \left(y, \int_0^u \Phi(s)dB_s\right)_K$$

及び

$$\hat{I}(\tilde{\Phi}^* y)(u) \equiv \int_0^u \langle \tilde{\Phi}^*(s)y, dB_s \rangle = \int_0^u \langle \chi_{\{\tau>s\}}\Phi^*(s)y, dB_s \rangle$$

を考えよう。 このとき

$$\hat{I}(\Phi^* y)(t\wedge\tau) = \hat{I}(\tilde{\Phi}^* y)(t) \qquad (P\text{-a.e.}) \qquad (2.13)$$

を示せば, $y\in K$が任意であることより結論が言える。 以下

(2.13) を示す。

簡単のために、次のようにおく。

$$\begin{cases} \phi(s) = \Phi^*(s)y \\ \hat{\phi}(s) = \chi_{\{\tau>s\}}\phi(s) = \chi_{\{\tau>s\}}\Phi^*(s)y. \end{cases}$$

さて, $\{e_n, n=1,2,\ldots\}$ をHの1つのc.o.n.s.とし, $\phi(s) = \sum \phi_n(s)e_n$ と表現したとき

$$\hat{I}(\phi)(u) = \sum_n \hat{I}(\phi_n e_n)(u) = \sum_n \int_0^u \phi_n(s)\,dB_s(e_n) \qquad (2.14)$$

$$\hat{I}(\hat{\phi})(u) = \sum_n \int_0^u \chi_{\{\tau>s\}}\phi_n(s)\,dB_s(e_n) \qquad (2.15)$$

である。ここで, $B_s(e_n)$, $n=1,2,\ldots$ は各々1次元B.m.であり, 1次元B.m.に関しては

$$\int_0^u \phi_n(s)\,dB_s(e_n)\Big|_{u=t\wedge\tau} = \int_0^t \chi_{\{\tau>s\}}\phi_n(s)\,dB_s(e_n) \quad (P\text{-a.s.}) \qquad (2.16)$$

は成立している。一方 (2.14) と (2.15) の級数の収束は real valued martingale の収束であり, 適当な部分列をとれば, P-a.s. の ω について, $[0,T]$, $0<T<\infty$, 上の u について一様に収束している。従って極限移行して, (2.16) より

$$\hat{I}(\phi)(t\wedge\tau) = \hat{I}(\hat{\phi})(t) \qquad (P\text{-a.s.})$$

が言え, (2.13) が示せた。 (Q.E.D.)

のちに使うために, Fubini 型の定理を述べておこう。
$(S, \mathcal{B}_S, m)$ を有界な (i.e. $m(S)<\infty$) 測度空間とし, 直積空間 $S\times[0,T]\times\Omega$ を考える。この空間上の H-valued な関数

$$\phi(s,t,\omega) : S\times[0,T]\times\Omega \longrightarrow H$$

が, 可積分性や $\mathcal{F}_t$-adapted の条件を満たしているとき、次の2種類の二重積分が考えられる。

(1) $\int_S \{ \int_0^T \langle \phi(s,t), dB_t \rangle \} m(ds)$

(2) $\int_0^T \langle \int_S \phi(s,t)\, m(ds) ; dB_t \rangle$

Fubini 型の定理とは、この (1) と (2) の積分が一致することを主張する定理のことである。 なお、(2) における $m(ds)$ に関する積分は Bochner 積分とする。

上の (1) 及び (2) の二重積分が well-defined であるように条件をつけて、次の定理に述べることができる。

Th. 2.1. 可測な写像 $\phi(s,t,\omega) : S \times [0,T] \times \Omega \to H$ が

$$E\left[\int_S \int_0^T \| \phi(s,t,\omega) \|^2 m(ds)\, dt\right] < \infty \tag{2.17}$$

をみたし，さらに，$s \in S$ を固定したときには H-valued process として $\mathcal{F}_t$-adapted であるとする。 このとき

$$\int_S \left\{ \int_0^T \langle \phi(s,t,\omega), dB_t \rangle \right\} m(ds) = \int_0^T \left\langle \int_S \phi(s,t,\omega) m(ds), dB_t \right\rangle \quad (P\text{-a.s.}) \tag{2.18}$$

が成立する。

上では H-valued な関数に対する定理を述べたが，$\sigma_2(H,K)$-valued な関数 $\Phi(s,t,\omega)$ についても同様の定理が成り立つ。この場合には積分は K-valued の確率変数になり，次の形の定理に述べられる。

Th. 2.2. 可測な写像 $\Phi(s,t,\omega) : S \times [0,T] \times \Omega \to \sigma_2(H,K)$ が

$$E\left[\int_S \int_0^T \| \Phi(s,t,\omega) \|_2^2\, m(ds)\, dt\right] < \infty \tag{2.19}$$

をみたしており，$s \in S$ を固定したときには $\mathcal{F}_t$-adapted な $\sigma_2(H,K)$-valued process であるとする。 このとき

$$\int_S \left\{ \int_0^T \Phi(s,t,\omega)\, dB_t \right\} m(ds) = \int_0^T \left\{ \int_S \Phi(s,t,\omega)\, m(ds) \right\} dB_t \quad (P\text{-a.s.}) \tag{2.20}$$

が成り立つ。

上の2つの定理の証明は、1次元B.m.の場合のFubini型の定理に帰着させることによってなされる。まず1次元B.m.の場合をLemmaとして述べる。

Lemma 2.1. b_t を1次元 $\mathcal{F}_t$-B.m. とし, $f(s,t,\omega)$ を $S\times[0,T]\times\Omega$ 上の実数値可測関数で $\mathcal{F}_t$-adapted であり，さらに

$$E\left[\int_S\int_0^T|f(s,t)|^2 m(ds)\,dt\right]<\infty$$

とする。このとき

$$\int_S\left\{\int_0^T f(s,t)\,db_t\right\}m(ds)=\int_0^T\left\{\int_S f(s,t)\,m(ds)\right\}db_t \quad (P\text{-a.s.}) \tag{2.21}$$

が成立する。

(Proof) 1次元の場合にはよく知られている。たとえば、G. Kallianpur and C. Striebel [1] を参照せよ。(Q.E.D.)

定理の証明のために必要なLemmaをもう1つ用意する。

Lemma 2.2 関数列 $\{f_n(s,\omega),\ n=1,2,\cdots\}$, $f_n\in L^2(S\times\Omega)$ が

$$f_n(s,\omega)\longrightarrow f(s,\omega)\quad(n\to\infty)\quad \text{in } L^2(S\times\Omega) \tag{2.22}$$

であるとき, 次式が成立する。

$$\int_S f_n(s,\omega)m(ds)\longrightarrow\int_S f(s,\omega)m(ds)\quad(n\to\infty)\quad \text{in } L^2(\Omega) \tag{2.23}$$

(Proof) 仮定 $m(S)<\infty$ に注意して次の評価をしてみればよい。

$$E\left[\left|\int_S f_n(s,\omega)\,m(ds)-\int_S f(s,\omega)\,m(ds)\right|^2\right]$$

Sem. on Probab.
Vol.53 1981年
P1-142

$$\leqq m(S)E\left[\int_S |f_n(s,\omega)-f(s,\omega)|^2 m(ds)\right] \longrightarrow 0 \quad (n\to\infty)$$

(Q.E.D.)

(Proof of Th.2.1) まず (2.18) の両辺が $L^2(\Omega)$ の元として確定することを注意しておこう。実際、左辺についてみると、仮定 (2.17) より

$$\int_S E\left[\left|\int_0^T \langle \phi(s,t,\omega), dB_t\rangle\right|^2\right] m(ds) = \int_S E\left[\int_0^T \|\phi(s,t,\omega)\|^2 dt\right] m(ds)$$

$$= \|\phi\|^2_{L^2(S\times[0,T]\times\Omega)} < \infty \tag{2.24}$$

となり、$f(s,\omega) \equiv \int_0^T \langle \phi(s,t,\omega), dB_t\rangle$ は $L^2(S\times\Omega)$ の要素であり、従って $L^1(S\times\Omega)$ の要素でもある。このことから P-a.e. の ω について $f(s,\omega)$ は $m(ds)$ について可積分となり (2.18) の左辺は P-a.e. の ω について値が確定する。又 Schwartz の不等式により

$$E\left[\left|\int_S \left\{\int_0^T \langle \phi(s,t,\omega), dB_t\rangle\right\} m(ds)\right|^2\right]$$

$$\leqq m(S)\, E\left[\int_S \left|\int_0^T \langle \phi(s,t,\omega), dB_t\rangle\right|^2 m(ds)\right] \tag{2.25}$$

であるが、(2.24) よりこの右辺は有限となり、従って (2.18) の左辺は $L^2(\Omega)$ の要素として well-defined である。

一方 (2.18) の右辺については、不等式

$$E\left[\int_0^T \left\|\int_S \phi(s,t,\omega)\, m(ds)\right\|^2 dt\right] \leqq E\left[\int_0^T \left|\int_S \|\phi(s,t,\omega)\|\, m(ds)\right|^2 dt\right]$$

$$\leqq m(S) E\left[\int_0^T \int_S \|\phi(s,t,\omega)\|^2 m(ds)\, dt\right] < \infty \tag{2.26}$$

が成り立っているので、確率積分の定義より (2.18) の右辺は $L^2(\Omega)$ の要素として確定していることが分る。

次に (2.18) の等号の成立することを見よう。$\{e_n, n=1,2,\cdots\}$ を H の1つの c.o.n.s. とし、これを使って (2.18) の両辺を書き直して、次の等式をうる。

Sem. on Probab.
Vol.53 1981年
P1-142

$$(2.18)\text{の左辺} = \int_S f(s,\omega)\, m(ds)$$

$$= \int_S \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T (\phi(s,t,\omega), e_n)\, dB_t(e_n) \right\} m(ds) \tag{2.27}$$

$$(2.18)\text{の右辺} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T \left(\int_S \phi(s,t,\omega) m(ds), e_n \right) dB_t(e_n)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T \left\{ \int_S (\phi(s,t,\omega), e_n)\, m(ds) \right\} dB_t(e_n)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_S \left\{ \int_0^T (\phi(s,t,\omega), e_n)\, dB_t(e_n) \right\} m(ds) \tag{2.28}$$

こゝで，最后の等号には Lemma 2.1 を使っている。 又，級数の収束は $L^2(\Omega)$の要素としての収束である．

さて，

$$f_n(s,\omega) = \sum_{k=1}^{n} g_k(s,\omega), \quad g_k(s,\omega) = \int_0^T (\phi(s,t,\omega), e_k)\, dB_t(e_k) \tag{2.29}$$

とおくと，(2.28) より

$$(2.18)\text{の右辺} = \lim_{n\to\infty} \int_S f_n(s,\omega)\, m(ds) \quad \text{in } L^2(\Omega) \tag{2.30}$$

である。 一方 $\{B_t(e_n), n=1,2,\cdots\}$ は n が異なるとき独立であり，従って $\{g_k, k=1,2,\cdots\}$ も k が異なるとき互に独立となる。このことから

$$E\left[\int_S |f(s,\omega) - f_n(s,\omega)|^2 m(ds)\right] = \int_S E\left[\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} g_k\right)^2\right] m(ds)$$

$$= \sum_{k=n+1}^{\infty} \int_S E[\,|g_k|^2]\, m(ds) \tag{2.31}$$

となる。 また，(2.17)の仮定より

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_S E[|g_k|^2]\, m(ds) = \int_S E\left[\sum_k |g_k|^2\right] m(ds)$$

$$= \int_S E\left[\left|\int_0^T \langle \phi(s,t,\omega), dB_t \rangle\right|^2\right] m(ds)$$

$$= \int_S E\left[\int_0^T \|\phi(s,t,\omega)\|^2 dt\right] m(ds) < \infty \tag{2.32}$$

Sem. on Probab.
Vol.53 1981年
P1-142

となるので，(2.31) の右辺は $n\to\infty$ のとき 0 に収束することが分る。こうして

$$f_n(s,\omega) \longrightarrow f(s,\omega) \quad (n\to\infty) \quad \text{in } L^2(S\times\Omega) \tag{2.33}$$

が分った。従って Lemma 2.2 を使うと

$$\int_S f_n(s,\omega)\,m(ds) \longrightarrow \int_S f(s,\omega)\,m(ds) \quad \text{in } L^2(\Omega) \tag{2.34}$$

となる。(2.27), (2.30), (2.34) より (2.18)式の両辺が $L^2(\Omega)$ の要素として等しいことが分った。こうして Th.2.1 の証明ができた。(Q.E.D.)

(Proof of Th.2.2) (2.20) を言うには任意の $y\in K$ と (2.20) 式の各辺との内積をとって，それらが P-a.s. に等しいことを言えばよい。なぜなら，$\{y_n, n=1,2,\cdots\}$ を K の1つの c.o.n.s. とし，各 y_n に対して上のことが言えたとしてその除外集合を Ω_n とする。このとき $\Omega_0=\bigcup_n\Omega_n$ とおけば，$\omega\notin\Omega_0$ の ω に対しては (2.20) の等号が言えており，$P(\Omega_0)=0$ である。

(2.20)式の各辺と y との内積はそれぞれ次のようになる。

$$\Big(y, \int_S\Big\{\int_0^T \Phi(s,t,\omega)\,dB_t\Big\}m(ds)\Big)_K = \int_S \Big(y, \int_0^T \Phi\,dB_t\Big)_K m(ds)$$
$$= \int_S\Big\{\int_0^T \langle \Phi^*(s,t,\omega)y, dB_t\rangle\Big\}m(ds) \tag{2.35}$$

$$\Big(y, \int_0^T\Big\{\int_S \Phi(s,t,\omega)\,m(ds)\Big\}dB_t\Big)_K = \int_0^T \Big\langle \Big\{\int_S \Phi\,m(ds)\Big\}^* y, dB_t\Big\rangle$$
$$= \int_0^T \Big\langle \int_S \Phi^*(s,t,\omega)\,y\,m(ds), dB_t\Big\rangle \tag{2.36}$$

この両者が P-a.e. に等しいことは Th.2.1 より従がう。(Q.E.D.)

この節の終りの部分では，確率微分方程式の理論において非常に重要な Itô-formula について考察する。ここでも，有限次元の場合の結果を知っているものとし，無限次元の場合は

Sem. on Probab.
Vol.53 1981年
P1-142

有限次元の場合に帰着させるという形で考えられる。

Th. 2.3. $x_i(t)$ を各々1次元の確率過程で次式により与えられているものとする。

$$x_i(t) = x_i(0) + \int_0^t a^i(s)\,ds + \int_0^t \langle \sigma^i(s), dB_s \rangle,\ i=1,\cdots,n, \qquad (2.37)$$

ここで，$a^i(t)$ は real valued $\mathcal{F}_t$-adapted process，$\sigma^i(t)$ は H-valued $\mathcal{F}_t$-adapted process で，共に $[0,T]\times\Omega$ 上で2乗可積分とする（Tは $0<T<\infty$ なる任意の数）。また，$f(t,x)$ を $[0,\infty)\times R^n$ 上の C^2-class の関数で，その各微分 $f_t=\partial f/\partial t$, $f_i=\partial f/\partial x_i$, $f_{ij}=\partial^2 f/\partial x_i\partial x_j$ は有界とする。

以上の仮定の下で次式が成立する。

$$f(t,x(t)) = f(0,x(0)) + \int_0^t \Big\{ f_t(s,x(s)) + \sum_{i=1}^n f_i(s,x(s))\,a^i(s)$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n \big(f_{ij}(s,x(s))\,\sigma^i(s), \sigma^j(s)\big)_H \Big\} ds + \sum_{i=1}^n \int_0^t \langle f_i(s,x(s))\,\sigma^i(s), dB_s \rangle$$
$$(P\text{-a.s.}) \qquad (2.38)$$

ただし $x(t)=(x_1(t),\cdots,x_n(t))$ は (2.37) より定まる n 次元 process である。

(Proof) $\{e_n, n=1,2,\cdots\}$ をHの1つの c.o.n.s. とし，次のような $x_i(t)$ の近似を考える。

$$x_i^m(t) = x_i(0) + \int_0^t a^i(s)\,ds + \sum_{k=1}^m \int_0^t (\sigma^i(s), e_k)\,dB_s(e_k) \qquad (2.39)$$

このとき $x^m(t) = (x_1^m(t),\cdots,x_n^m(t))$ は有限個の B.m. $B_s(e_k)$, $k=1,\cdots,m$ の確率積だけ使って表現されているので，有限次元の場合の Itô-formula により

$$f(t,x^m(t)) = f(0,x(0)) + \int_0^t \Big\{ f_s(s,x^m(s)) + \sum_{i=1}^n f_i(s,x^m(s))\,a^i(s)$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{k=1}^m \sum_{i,j=1}^n f_{ij}\,(\sigma^i(s), e_k)(\sigma^j(s), e_k) \Big\} ds$$

Sem. on Probab.
Vol.53 1981年
P1-142

$$+\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\int_0^t f_i(s, x^m(s))(\sigma^i(s), e_k)\, dB_s(e_k) \qquad (2.40)$$

が言える。 この式において $m\to\infty$ としたときの極限を考えたい。 まず (2.39) において $m\to\infty$ としたときを見る。 確率積分の定義より, $m\to\infty$ のとき

$$\sum_{k=1}^{m}\int_0^t(\sigma^i(s), e_k)\, dB_s(e_k) \longrightarrow \int_0^t \langle \sigma^i(s), dB_s\rangle \qquad (2.41)$$

で, この収束は2乗可積分な continuous martingale の収束であった。 従って適当な部分列をとれば P-a.e. の ω について $[0,T]$ 上の t について一様収束している。 以下 $m\to\infty$ としたときには, この部分列の極限を考えるものとしよう。 このとき (2.37) と (2.39) より, $m\to\infty$ のとき $[0,T]$ 上の t について一様に $x^m(t)\to x(t)$ である。 さらに, 関数 $f(t,x)$ のなめらかさの仮定から, $f(t,x^m(t))$, $f_t(t,x^m(t))$, $f_i(t,x^m(t))$, $f_{ij}(t,x^m(t))$ はいずれも, $m\to\infty$ のとき P-a.e. の ω については $[0,T]$ 上の t について一様に, それぞれ $f(t,x(t))$, $f_t(t,x(t))$, $f_i(t,x(t))$, $f_{ij}(t,x(t))$ に収束していることが分る。 こうして

$$\int_0^t f_t(s, x^m(s))\,ds \longrightarrow \int_0^t f_t(s,x(s))\,ds \qquad (P\text{-a.s.}) \qquad (2.42)$$

$$\int_0^t f_i(s, x^m(s))\, a^i(s)\,ds \longrightarrow \int_0^t f_i(s,x(s))\, a^i(s)\,ds \qquad (P\text{-a.s}) \qquad (2.43)$$

が分った。 また, f_{ij} の関係する項については, f_{ij} の有界性の仮定から, ある定数 C により

$$\left|\sum_{k=1}^{m} f_{ij}(s, x^m(s))\,(\sigma^i(s), e_k)(\sigma^j(s), e_k)\right| \leqq C\|\sigma^i(s)\|\,\|\sigma^j(s)\| \qquad (2.44)$$

となっており, $\{\sigma^i(s)\}$ の可積分性より

$$E\left[\int_0^t \|\sigma^i(s)\|\,\|\sigma^j(s)\|\,ds\right]$$

$$\leqq \sqrt{E\left[\int_0^t\|\sigma^i(s)\|^2 ds\right]}\sqrt{E\left[\int_0^t\|\sigma^j(s)\|^2 ds\right]} < \infty \qquad (2.45)$$

であるから, P-a.e. の ω について $\|\sigma^i(s)\|\,\|\sigma^j(s)\|$ は s の関数と

して可積分である。 こうして関数列 $\{\sum_{k=1}^{m} f_{ij}(s, x^m(s))(\sigma^i(s), e_k)(\sigma^j(s), e_k),\ m=1,2,\cdots\}$ は P-a.e. の ω に対しては，その絶対値が m について一様に可積分関数 $C\|\sigma^i(s)\|\|\sigma^j(s)\|$ より小となる。従って Lebesgue の定理により $m\to\infty$ なる極限移行と s に関する積分との順序交換ができて

$$\int_0^t \left\{\sum_{k=1}^{m} f_{ij}(s, x^m(s))(\sigma^i(s), e_k)(\sigma^j(s), e_k)\right\} ds$$

$$\longrightarrow \int_0^t (f_{ij}(s, x(s))\sigma^i(s), \sigma^j(s))\ ds \qquad (P\text{-a.s.}) \qquad (2.46)$$

となる。

最后に，(2.40)式における確率積分の項をみよう。 π_m を $\{e_1, \cdots, e_m\}$ で張られる空間への projection とすると，次の等式が成立する。

$$\sum_{k=1}^{m}\int_0^t f_i(s, x^m(s))(\sigma^i(s), e_k)\, dB_s(e_k)$$

$$= \int_0^t \langle f_i(s, x^m(s))\pi_m\sigma^i(s), dB_s\rangle \qquad (2.47)$$

これが $m\to\infty$ のとき $\int_0^t \langle f_i(s, x(s))\sigma^i(s), dB_s\rangle$ に収束することを言いたい。 そのためには，Cor. 2.1 により，$m\to\infty$ のとき

$$E\left[\int_0^t \|f_i(s, x^m(s))\pi_m\sigma^i(s) - f_i(s, x(s))\sigma^i(s)\|^2 ds\right] \longrightarrow 0 \qquad (2.48)$$

を示せばよい。 ところで，f_i が有界と仮定したので

$$E\left[\int_0^t \|f_i(s, x(s))\pi_m\sigma^i(s) - f_i(s, x(s))\sigma^i(s)\|^2 ds\right] \longrightarrow 0 \qquad (2.49)$$

は明らかである。 従って，もし

$$E\left[\int_0^t |f_i(s, x^m(s)) - f_i(s, x(s))|^2 \|\pi_m\sigma^i(s)\|^2 ds\right] \longrightarrow 0 \qquad (2.50)$$

が示されゝば，ノルムの三角不等式を使って，(2.49) と (2.50) より (2.48) が従がう。 (2.50) を示そう。 すでに見たように，P-a.e. の ω について $m\to\infty$ のとき $f_i(s, x^m(s))$ は $[0, T]$ 上の s について一様に $f_i(s, x(s))$ に収束してしていた。 従って

Sem. on Probab.
Vol.53 1981年
P1-142

(2.50)は明らか。

以上で(2.40)の両辺の各項が $m\to\infty$ のとき，適当な部分列をとれば，P-a.s. に(2.38)のそれぞれ対応する項に収束することが分った。上では時間を $[0,T]$ に限ったが，Tは任意にとってよかったから，任意の $0\le t<\infty$ に対して(2.38)が示せたことになる。 (Q.E.D.)

ついで，K-valued process に関する Itô-formula を導こう。

Th. 2.4. K-valued process X_t が次式で与えられているとしよう。

$$X_t = x + \int_0^t \alpha(s)ds + \int_0^t \Phi(s)dB_s \ , \ t\ge 0 \qquad (2.51)$$

ただし，$\alpha(t)$ は K-valued $\mathcal{F}_t$-adapted process，$\Phi(t)$ は $\sigma_2(H,K)$-valued $\mathcal{F}_t$-adapted process で，共に2乗可積分（i.e. 任意のTに対して $\alpha\in L^2([0,T]\times\Omega\to K, dt\times dP)$，$\Phi\in L^2([0,T]\times\Omega\to\sigma_2(H,K))$）とする。そして $f(t,x)$ を $[0,\infty)\times K$ 上の C^2-class の関数，すなわち Fréchet 微分 f_x, f_{xx} が存在し，$f_t(t,x)$，$f_x(t,x)\in\mathcal{L}(K\to R^1)\sim K$，$f_{xx}(t,x)\in\mathcal{L}(K\to K)$ が皆 (t,x) の関数として連続であるとする。さらにこれらの微分が有界と仮定する。

このとき，次の等式が成立する。

$$f(t,X_t) = f(0,x) + \int_0^t \Big\{ f_t(s,X_s) + (f_x(s,X_s),\alpha(s))_K + \frac{1}{2}\mathrm{Trace}\big\{\Phi^*(s)f_{xx}(s,X_s)\Phi(s)\big\}\Big\}ds + \int_0^t \langle \Phi^*(s)f_x(s,X_s), dB_s\rangle$$

$$(P\text{-a.s.}) \qquad (2.52)$$

(Proof) $\{\xi_n, n=1,2,\cdots\}$ を K の1つの c.o.n.s. とし，π_n を $\{\xi_1,\cdots,\xi_n\}$ で張られる空間への projection とする。このとき

$$X_t^n \equiv \pi_n X_t = \pi_n x + \int_0^t \pi_n\alpha(s)ds + \int_0^t \pi_n\Phi(s)dB_s \qquad (2.53)$$

Sem. on Probab.
Vol.53 1981年
P1-142

とおこう。 X_t^nを $X_t^n=\sum_{i=1}^n x_i(t)\xi_i$ と展開して X_t^n にn次元の process $\mathfrak{X}(t)=(x_1(t),\cdots,x_n(t))$ を対応させる。各$x_i(t)$は

$$x_i(t)=(X_t,\xi_i)=x_i(0)+\int_0^t \alpha^i(s)ds+\int_0^t\langle\Phi^*(s)\xi_i,dB_s\rangle \qquad (2.54)$$

をみたしている。ここで、$\alpha^i(s)=(\alpha(s),\xi_i)$である。(2.54)は、Th.2.3 の中の式(2.37)において、$a^i(s)=\alpha^i(s)$, $\sigma^i(s)=\Phi^*(s)\xi_i$ とおいた形をしている。

$[0,\infty)\times K$ 上の関数 $f(t,X)$に対して $[0,\infty)\times\mathbb{R}^n$ 上の関数 $\tilde{f}_n(t,\mathfrak{X})$ を次式で定義する。

$$\hat{f}_n(t,\mathfrak{X})=f(t,\sum_{i=1}^n x_i\xi_i)=f(t,X_t^n) \qquad (2.55)$$

fに対する仮定から $\tilde{f}_n$が Th.2.3 の仮定をみたしていることが分る。従って、(2.54)による $x_i(t)$, $i=1,\cdots,n$, とこの $\hat{f}_n(t,\mathfrak{X})$に Th.2.3 を適用して次式をうる。

$$\hat{f}_n(t,\mathfrak{X}(t))=\hat{f}_n(0,\mathfrak{X}(0))+\int_0^t\Big\{\tilde{f}_{n,t}(s,\mathfrak{X}(s))+\sum_{i=1}^n\hat{f}_{n,i}(s,\mathfrak{X}(s))\alpha^i(s)$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n(\hat{f}_{n,ij}\Phi^*(s)\xi_i,\Phi^*(s)\xi_j)_H\Big\}ds+\sum_{i=1}^n\int_0^t\langle\hat{f}_{n,i}(s,\mathfrak{X}(s))\Phi^*(s)\xi_i,dB_s\rangle$$

$$(P\text{-a.s.}) \qquad (2.56)$$

ただし、$\mathfrak{X}(t)=(x_1(t),\cdots x_n(t))$である。

関数 $\hat{f}_n$ の定義に戻ってみると、次の二式が分る。

$$\sum_{i=1}^n\hat{f}_{n,i}\alpha^i(s)=(f_X(s,X_s^n),\pi_n\alpha(s))_K \qquad (2.57)$$

$$\sum_{i,j=1}^n(\hat{f}_{n,ij}\Phi^*(s)\xi_i,\Phi^*(s)\xi_j)_H=\mathrm{Trace}\{\Phi^*(s)\pi_n f_{XX}(s,X_s^n)\pi_n\Phi(s)\}$$

$$(2.58)$$

上式のうち、(2.57)は明らかである。(2.58)については、行列表示をしてみると分る。実際、$\{e_j, j=1,2,\cdots\}$ を H の c.o.n.s. として

$$(\Phi(s)e_j,\xi_i)_K=(e_j,\Phi^*(s)\xi_i)_H=\sigma_{ij}(s)$$

Sem. on Probab.
Vol.53 1981年
P1-142

とおくとき,

$$(2.58)\text{の左辺} = \sum_{i,j=1}^{n} \tilde{f}_{n,ij}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_{ik}e_k, \sum_{k=1}^{\infty}\sigma_{jk}e_k\right)_H$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_{ik}\tilde{f}_{n,ij}\sigma_{jk} = (2.55)\text{の右辺}$$

となる。

こうして, (2.56) は次の式に書き直される。

$$f(t,X_t^n) = f(0,X_0^n) + \int_0^t\{f_t(s,X_s^n) + (f_x(s,X_s^n), \pi_n\alpha(s))_K$$

$$+\frac{1}{2}\mathrm{Trace}\{(\pi_n\Phi(s))^* f_{xx}(s,X_s^n)\pi_n\Phi(s)\}\}ds$$

$$+\int_0^t\langle\Phi^*(s)\pi_n f_x(s,X_s^n), dB_s\rangle \qquad (P\text{-a.s.}) \qquad (2.59)$$

この式において $n\to\infty$ としたときの極限を考えたいのであるが, その前に (2.53) 式における $n\to\infty$ のときの様子を見ておこう。 $\alpha(s)$ についての可積分性の仮定から, P-a.e. ω については, $n\to\infty$ のとき $\int_0^t\pi_n\alpha(s)ds$ は $[0,T]$ 上の t について一様に $\int_0^t\alpha(s)ds$ に収束する。 又 $\Phi(s)$ に関する可積分性の仮定から, Prop. 1.4 の証明にあるように, continuous martingale の列 $\{\int_0^t\pi_n\Phi(s)dB_s, n=1,2,\cdots\}$ は適当な部分列をとるとき, P-a.e. の ω に対して, $n\to\infty$ のとき $[0,T]$ 上の t について一様に $\int_0^t\Phi(s)dB_s$ に収束する(Cor. 2.1 も参照せよ)。 こうして, (2.53) 式の右辺は, 適当な部分列をとるとき, P-a.e. の ω について, $[0,T]$ 上の t について一様に (2.51) の右辺に収束していることが分った。

さらに f_t と f_x の連続性の仮定から, (2.59) の右辺の積分のうち $f_t(s,X_s^n)$ 及び $(f_x(s,X_s^n),\pi_n\alpha(s))_K$ に関する部分は, $n\to\infty$ のとき, 上のように部分列を取ったとすれば, それぞれ (2.52) の対応する項に収束することが分る。

次に $\mathrm{Trace}\{(\pi_n\Phi(s))^* f_{xx}(s,X_s^n)\pi_n\Phi(s)\}$ の部分について見よう。 $\Phi(s)$ は Hilbert-Schmidt 型の作用素であり f_{xx} は $\mathcal{L}(K\to$

K）の要素，すなわちK上の有界な線型作用素であるから，作用素

$$(\pi_n \Phi(s))^* f_{xx}(s, X_s^n)\pi_n \Phi(s)$$

は trace class の作用素である。さらに f_{xx} は $\mathcal{L}(K\to K)$－valued の関数として有界と仮定しているので，trace norm を $\|\cdot\|_1$ で示すとき，定数Cが存在して

$$
\begin{aligned}
&\left|\mathrm{Trace}\left\{(\pi_n \Phi(s))^* f_{xx}(s, X_s^n)\pi_n \Phi(s)\right\}\right| \\
&\leqq \|(\pi_n \Phi(s))^* f_{xx}(s, X_s^n)\pi_n \Phi(s)\|_1 \\
&\leqq C\|\Phi(s)^* \Phi(s)\|_1 = C\|\Phi(s)\|_2^2 \qquad (2.60)
\end{aligned}
$$

となっている。$\Phi(s)$ に関する可積分性の条件と (2.60) とから，Lebesgue の定理により，P-a.e. の ω に対しては $\mathrm{Trace}\{(\pi_n\Phi(s))^* f_{xx}(s, X_s^n)\pi_n\Phi(s)\}$ の s についての積分と $n\to\infty$ の極限移行との順序交換ができることが分る。こうして，(2.59) 式におけるこの項に関する積分の部分は $n\to\infty$ のとき，P-a.s. に (2.52) 式の対応する項に収束する。

最后に確率積分の項を見よう。(2.59) 式におけるこの項が (2.52) 式における対応する項に収束することを言うには

$$E\left[\int_0^t \|\Phi^*(s)\pi_n f_x(s, X_s^n) - \Phi^*(s) f_x(s, X_s)\|_2^2 ds\right] \to 0 \quad (n\to\infty) \qquad (2.61)$$

を示せばよい。ノルム $|||\cdot||| \equiv \sqrt{E[\int_0^t \|\cdot\|_2^2 ds]}$ についての三角不等式により

$$
\begin{aligned}
&|||\Phi^*(s)\pi_n f_x(s, X_s^n) - \Phi^*(s) f_x(s, X_s)||| \\
&\leqq |||(\pi_n\Phi(s))^* f_x(s, X_s^n) - (\pi_n\Phi(s))^* f_x(s, X_s)||| \\
&\quad + |||[(\pi_n\Phi(s))^* - \Phi^*(s)] f_x(s, X_s)||| \qquad (2.62)
\end{aligned}
$$

をうる。右辺の第2項は f_x が有界という仮定と $\pi_n\Phi \to \Phi$ $(n\to\infty)$ in $L^2([0,T]\times\Omega \to \sigma_2(H,K))$ より，$n\to\infty$ のとき

Sem. on Probab.
Vol.53 1981年
P1-142

0に収束する。 又、右辺の第1項については次のようになる。上に見たように、$n\to\infty$のとき適当な部分列をとれば、P-a.a.のωに対して$f_x(s,X_s^n)$はsについて一様に$f_x(s,X_s)$に収束しているので、$\pi_n\Phi\to\Phi\ (n\to\infty)$ in $L^2([0,T]\times\Omega\to\sigma_2(H,K))$である。 従って第1項も0に収束する。 こうして(2.62)が0に収束することが言えたが、これは(2.61)と同値である。

以上により、(2.59)式において、適当な部分列をとったときの$n\to\infty$なる極限移行により(2.52)が得られる。(Q.E.D.)

上の定理における関数$f(t,x)$のクラスを拡げることは可能である。 ただしその場合には、確率積分の定義を2乗可積分な範囲より拡げる必要があるので、こゝでは扱わない。 ただし、期待値$E[f(t,X_t)]$の評価については、多少弱い条件の下で扱うことができて、次の結果が得られる。

Th.2.5. X_tはTh.2.4におけると同じK-valued processとし、$f(t,x)$は下に有界な$[0,\infty)\times K$上のC^2-class の real valued な関数とする。 又、次式に現れるすべての被積分関数の可積分性が保障されているとする。 このとき、次の不等式が成立する。

$$E[f(t,X_t)]\leqq f(0,x)+\int_0^t\Big\{E[f_t(s,X_s)]+E[(f_x(s,X_s),\alpha(s))_K]+\frac{1}{2}E[\mathrm{Trace}\{\Phi^*(s)f_{xx}(s,X_s)\Phi(s)\}]\Big\}ds \qquad (2.63)$$

(Proof) R^1上のC^2-class の関数$g_n(u)$, $n=1,2,\cdots$を、条件

$$\begin{cases} g_n(u)=u & \text{if } |u|\leqq n, \\ |g_n(u)|\leqq n+1, \quad |g_n'(u)|\leqq 1, \quad |g_n''(u)|\leqq 1 \end{cases} \qquad (2.64)$$

をみたすように定める。 次に、このg_nを使って$f^{(n)}(t,x)$を

$$f^{(n)}(t,x)=g_n(f(t,x)) \qquad (2.65)$$

により与える。このとき $f^{(n)}(t,x)$ は Th.2.4 の条件を満たしているので、$f^{(n)}(t,x)$ に対して (2.52) が成立する。ところで、(2.52) の両辺は P-a.e. の ω について t の連続関数であり、従って P-a.e. の ω について (2.52) の等式が任意の $t\in[0,T]$ に対して成立している。そこで、stopping time T_n を

$$T_n=\inf\{t>0,\ \|X_t\|>n\}$$

と定義して、(2.52) の t に $t\wedge T_n$ を代入しても、P-a.e. の ω について等式が成立している。すなわち、P-a.e. に

$$\begin{aligned}f^{(n)}(t\wedge T_n, X_{t\wedge T_n}) &= f^{(n)}(0,x)+\int_0^{t\wedge T_n}\{f_t^{(n)}(s,X_s)\\ &+(f_x^{(n)}(s,X_s),\alpha(s))_K+\frac{1}{2}\mathrm{Trace}\{\Phi^*(s)f_{xx}^{(n)}(s,X_s)\Phi(s)\}\}ds\\ &+\int_0^{t\wedge T_n}\langle\Phi^*(s)f_x^{(n)}(s,X_s),dB_s\rangle \end{aligned}\tag{2.66}$$

が成立する（右辺の最後の項については Prop.2.3 参照）。ここで、

$$f^{(n)}(t\wedge T_n, X_{t\wedge T_n})=f(t\wedge T_n, X_{t\wedge T_n})$$

であり，又 $s<T_n$ のときには

$$f_t^{(n)}(s,X_s)=f_t(s,X_s),\ f_x^{(n)}(s,X_s)=f_x(s,X_s),\ f_{xx}^{(n)}(s,X_s)=f_{xx}(s,X_s)\tag{2.67}$$

であるから，(2.66) は次の形になる。

$$\begin{aligned}f(t\wedge T_n, X_{t\wedge T_n}) &= f(0,x)+\int_0^{t\wedge T_n}\{f_t(s,X_s)+(f_x(s,X_s),\alpha(s))_K\\ &+\frac{1}{2}\mathrm{Trace}\{\Phi^*(s)f_{xx}(s,X_s)\Phi(s)\}\}ds\\ &+\int_0^{t\wedge T_n}\langle\Phi^*(s)f_x(s,X_s),dB_s\rangle \end{aligned}\tag{2.68}$$

この式の各項の可積分性を仮定しているので，両辺の期待値をとり次式をうる。

$$E[f(t\wedge T_n, X_{t\wedge T_n})]=f(0,x)+\int_0^t E[\chi_n(s)\{f_t(s,X_s)$$

Sem. on Probab.
Vol.53 1981年
P1-142

$$+(f_x(s,X_s),\alpha(s))_K+\frac{1}{2}\mathrm{Trace}\{\Phi^*(s)f_{xx}(s,X_s)\Phi(s)\}\Big]ds \qquad (2.69)$$

ここで，$\chi_n(s)=\chi_{\{T_n>s\}}=\{T_n>s\}$の定義関数，である。

X_tはP-a.e.に連続であったから，$n\to\infty$のとき$T_n\to\infty$となり，$\chi_n(s)\to 1$である。又，(2.69)の右辺の被積分関数についての可積分性の仮定からLebesgueの定理が使えて，$n\to\infty$の極限移行と積分の順序交換ができ，その極限値は(2.63)の右辺に一致する。一方，fは下に有界と仮定していたので，(2.69)の左辺の極限移行にはFatouのLemmaが使えて

$$E[f(t,X_t)]=E[\lim_{n\to\infty}f(t\wedge T_n,X_{t\wedge T_n})]\leqq\varliminf_{n\to\infty}E[f(t\wedge T_n,X_{t\wedge T_n})] \qquad (2.70)$$

が分る。こうして，(2.69)の$n\to\infty$なる極限移行を考えることにより(2.63)が示された。 (Q.E.D.)

<u>Cor 2.2.</u> Th.2.5の仮定の下で，さらに次の条件

$$\sup_{0\le s\le t}|f(s,X_s)| \text{ が } dP\text{-可積分} \qquad (6.71)$$

が成りたてば，不等式(2.63)が等号で成立する。

(Proof) Th.2.5の証明より，(2.70)が等号で成立していれば，上の結論が言える。仮定(6.71)があれば(2.70)が等号で成立することは明らか。 (Q.E.D.)

Sem. on Probab.
Vol.53 1981年
P1-142

§3. 確率微分方程式

前節までと同様に，確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$，σ-field の増加列 $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$，$\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$，2つの可分なHilbert 空間H及びK，H上の c.B.m. B_t，が与えられているものとする。このとき，K上の確率微分方程式を考えるのが本節の目的である。

この節では，時刻 t は有限区間 $[0,T]$ 上を動くものとする。いま2つの可測関数

$$\alpha(t,\omega) : [0,T] \times \Omega \longrightarrow K \tag{3.1}$$

$$\Phi(t,\omega) : [0,T] \times \Omega \longrightarrow \sigma_2(H,K) \tag{3.2}$$

が与えられ，条件

$$\alpha(t,\cdot),\ \Phi(t,\cdot) \text{ は } \mathcal{F}_t\text{-adapted である} \tag{3.3}$$

$$\alpha(\cdot,\omega) \text{ は，P-a.e. の } \omega \text{ について Bochner integrable} \tag{3.4}$$

$$E\left[\int_0^T \|\Phi(t)\|_2^2 dt\right] < \infty \tag{3.5}$$

が満たされているとしよう。このとき，X_0 を K-valued な $\mathcal{F}_0$-可測な確率変数として

$$X_t = X_0 + \int_0^t \alpha(s,\omega)ds + \int_0^t \Phi(s,\omega)\, dB_s \tag{3.6}$$

により K-valued process X_t を与えよう。この形はすでに前節の (2.51) で見たものであるが，要点を整理しておこう。

空間Kが可分なことから，$f(t)$ を $[0,T]$ 上の K-valued function とするとき

$$\begin{aligned} &f : \text{Bochner integrable} \\ &\Longleftrightarrow f \text{ は weakly measurable で，} \|f\|_K \text{ が Lebesgue} \\ &\quad\ \text{measure について可積分} \end{aligned} \tag{3.7}$$

であり，(3.7) の条件が言えているとき

$$\left\|\int_B f(s)ds\right\|_K \leq \int_B \|f(s)\|_K ds \quad , \quad B \in \mathcal{B}([0,T]) \tag{3.8}$$

Sem. on Probab.
Vol.53 1981年
P1-142

が成立している。　これより (3.6) の右辺の第2項は P-a.e. の ω について t の連続関数である。　又，確率積分は定義より連続な martingale であったから，(3.6) の X_t は K 上の連続な process である。

次に確率微分方程式を考察しよう。　2つの Borel 可測な写像

$$a(t,x) : [0,T]\times K \to K \tag{3.9}$$

$$G(t,x) : [0,T]\times K \to \sigma_2(H,K) \tag{3.10}$$

が与えられたとき，X_t, $0\leq t\leq T$, についての方程式

$$X_t = x + \int_0^t a(s,X_s)\,ds + \int_0^t G(s,X_s)\,dB_s\,, \quad 0\leq t\leq T \tag{3.11}$$

を Hilbert 空間 K 上の確率積分方程式と呼ぶ。

<u>Def. 3.1.</u>　K-valued process X_t が確率積分方程式 (3.11) の解であるとは，X_t は $L^2([0,T]\times\Omega \to K)$ の要素であって，$\mathcal{F}_t$-adapted であり，各 t, $0\leq t\leq T$, ごとに P-a.e. に (3.11) の等式が成立することである。　ただし，(3.11) の積分は (3.6) について述べたものと同じである。

確率積分方程式 (3.11) は，次の形にも書いて

$$\begin{cases} dX_t = a(t,X_t)\,dt + G(t,X_t)\,dB_t\,, & 0\leq t\leq T \\ X_0 = x \end{cases} \tag{3.12}$$

これを確率微分方程式と呼ぶ。
方程式 (3.12) あるいは (3.11) の解の存在と一意性について少し見ておこう。

<u>Th. 3.1.</u>　(3.9) 及び (3.10) の写像 $a(t,x)$, $G(t,x)$ が，L 及び C をある定数として，次の条件を満たしているとする。

Sem. on Probab.
Vol.53 1981年
P1-142

$$\|a(t,x)-a(t,y)\|_K \leqq L\|x-y\|_K, \quad (\text{Lipschitz連続性}) \tag{3.13}$$

$$\|G(t,x)-G(t,y)\|_2 \leqq L\|x-y\|_K, \quad (\qquad \text{〃} \qquad) \tag{3.14}$$

$$\|a(t,x)\|_K \leqq C(1+\|x\|_K), \quad \|G(t,x)\|_2 \leqq C(1+\|x\|_K) \tag{3.15}$$

このとき方程式 (3.12) は P-a.e.に連続な解を持ち，又，P-a.e.の意味で解は unique である。

(Proof) §2 で述べた確率積分の性質を使って，通常の逐次近似の方法で示せる。 実際にそれを実行してみよう。 以下 Kにおけるノルム $\|\cdot\|_K$ を単に $\|\cdot\|$ と書くことにする。

$$X_t^0 \equiv x$$

とおき，以下，X_t^n が定義されたとき，X_t^{n+1} を

$$X_t^{n+1} = x + \int_0^t a(s, X_s^n)ds + \int_0^t G(s, X_s^n)dB_s \tag{3.16}$$

と定義して，$\{X_t^n,\ n=0,1,2,\dots,\ t\in[0,T]\}$ が定まる。 このとき，次の評価ができることを示そう。

$$E[\|X_t^{n+1}-X_t^n\|^2] \leqq \frac{(Mt)^{n+1}}{(n+1)!}, \quad n=0,1,2,\dots,\ t\in[0,T], \tag{3.17}$$

こゝで Mは (x, L, C, T) に依存して決まる定数である。
まず，$n=0$ のときに (3.17) の言えることを見よう。

$$\begin{aligned} E[\|X_t^1-X_t^0\|^2] &\leqq 2E[\|\int_0^t a(s,x)ds\|^2] + 2E[\|\int_0^t G(s,x)dB_s\|^2] \\ &\leqq 2E[\{\int_0^t \|a(s,x)\|ds\}^2] + 2E[\int_0^t \|G(s,x)\|_2^2 ds] \\ &\leqq 2C^2(1+\|x\|)^2t^2 + 2C^2(1+\|x\|)^2 t \end{aligned} \tag{3.18}$$

より

$$M \geqq 2C^2(1+\|x\|)^2(T+1) \tag{3.19}$$

にMを定めれば，(3.17) は $n=0$ のときには言える。

次に、(3.17) が $n \leqq m$ の n について言えたとき，$n=m+1$ の場合を見よう。

$$
\begin{aligned}
E[\|X_t^{m+1}-X_t^m\|^2] &\leqq 2E[\|\int_0^t\{a(s,X_s^m)-a(s,X_s^{m-1})\}ds\|^2] \\
&\qquad +2E[\|\int_0^t\{G(s,X_s^m)-G(s,X_s^{m-1})\}dB_s\|^2] \\
&\leqq 2E[\{\int_0^t L\|X_s^m-X_s^{m-1}\|ds\}^2]+2E[\int_0^t\{L\|X_s^m-X_s^{m-1}\|\}^2ds] \\
&\leqq 2L^2(t+1)\int_0^t E[\|X_s^m-X_s^{m-1}\|^2]ds \\
&\leqq 2L^2(T+1)\int_0^t \frac{(Ms)^{m+1}}{(m+1)!}ds \\
&= \frac{2L^2(T+1)M^{m+1}t^{m+2}}{(m+2)!}. \qquad (3.20)
\end{aligned}
$$

これより

$$
M \geqq 2L^2(T+1) \qquad (3.21)
$$

であるならば，(3.17) が $n=m+1$ でも言えることになる。 こうして，M が (3.19) と (3.21) をみたすように

$$
M \equiv \max\{2C^2(1+\|x\|)^2(T+1),\ 2L^2(T+1)\},
$$

と定めれば，(3.17) が成立することが分った。

(3.17) より $\{X_t^n, n=0,1,\cdots\}$ は $L^2(\Omega\to K)$ 内の収束列であり，又，$t\in[0,T]$ も変数とみたときには $L^2([0,T]\times\Omega\to K)$ における収束列でもある。 その極限として定まる K-valued $\mathcal{F}_t$-process を X_t とおき，この X_t を使って

$$
X_t^* \equiv x+\int_0^t a(s,X_s)ds+\int_0^t G(s,X_s)dB_s \qquad (3.22)
$$

と定義する。 この X_t^* が方程式 (3.12) の連続な解であることを示そう。

まず (3.22) の右辺が well-defined で，P-a.e. に連続であることを言う。 (3.17) の評価と，X_t が $\{X_t^n, n=0,1,\cdots\}$ の極限であることより，X_t の $L^2(\Omega\to K)$-norm は，$t\in[0,T]$ のと

tについて一様に有界である。このことに注意すれば，(3.15)の仮定より

$$a(s,X_s)\in L^2([0,T]\times\Omega\to K),\ G(s,X_s)\in L^2([0,T]\times\Omega\to\sigma_2(H,K)) \tag{3.23}$$

が分る。従って，(3.6)式の下で述べたように，X_t^* は P-a.e. に連続である。

次に，X_t^* が(3.11)を満たしていることを見よう。上で見たように，X_t^n は $n\to\infty$ のとき X_t に $L^2([0,T]\times\Omega\to K)$ において収束しており，tを固定したときには $L^2(\Omega\to K)$ で収束している。このとき，(3.16)の右辺が(3.22)の右辺に収束していることを示そう。実際(3.15)の仮定と，$X_t^n\to X_t$ in $L^2([0,T]\times\Omega\to K)$ を使って次のことが示せる。

$$\begin{aligned}&E\left[\left\|\int_0^t a(s,X_s^n)ds-\int_0^t a(s,X_s)ds\right\|^2\right]\leqq L^2E\left[\left\{\int_0^t\|X_s^n-X_s\|ds\right\}^2\right]\\&\leqq L^2TE\left[\int_0^T\|X_s^n-X_s\|^2ds\right]\longrightarrow 0\quad(n\to\infty)\end{aligned} \tag{3.24}$$

$$\begin{aligned}&E\left[\left\|\int_0^t G(s,X_s^n)dB_s-\int_0^t G(s,X_s)dB_s\right\|^2\right]\\&\leqq L^2E\left[\int_0^T\|X_s^n-X_s\|^2ds\right]\longrightarrow 0\quad(n\to\infty)\end{aligned} \tag{3.25}$$

こうして，(3.16)の右辺は $n\to\infty$ のとき $L^2(\Omega\to K)$ の意味で(3.22)の右辺に収束しており，一方(3.16)の左辺は X_t に収束している。従って

$$X_t=x+\int_0^t a(s,X_s)ds+\int_0^t G(s,X_s)dB_s\equiv X_t^*\quad\text{in } L^2(\Omega\to K). \tag{3.26}$$

が言えた。

上では，tを固定したときに(3.16)式の $n\to\infty$ のときの両辺の収束を $L^2(\Omega\to K)$ 内で見たが，(3.16)式の $n\to\infty$ のときの収束を $L^2([0,T]\times\Omega\to K)$ 内で見ることもできる。そのときにも(3.24)及び(3.25)と同様の評価ができて

$$X_t=x+\int_0^t a(s,X_s)ds+\int_0^t G(s,X_s)dB_s\equiv X_t^*\quad\text{in } L^2([0,T]\times\Omega\to K) \tag{3.27}$$

も分る。 (3.27) と (3.23) より

$$a(s, X_s^*) = a(s, X_s) \quad \text{in } L^2([0,T]\times\Omega \to K)$$
$$G(s, X_s^*) = G(s, X_s) \quad \text{in } L^2([0,T]\times\Omega \to \sigma_2(H, K))$$

が分り，従って

$$\int_0^t a(s, X_s^*)ds = \int_0^t a(s, X_s)ds \qquad P\text{-a.s.}$$
$$\int_0^t G(s, X_s^*)dB_s = \int_0^t G(s, X_s)dB_s \qquad P\text{-a.s.}$$

となる。 これを (3.22) に代入すれば，X_t^* が (3.11) を満たしていることが分る。

最后に (3.11) の解の一意性を見ておこう。 今，X_t及びY_t をそれぞれ (3.11) の解であるとして，

$$Z_t = X_t - Y_t$$

とおくと，

$$Z_t = \int_0^t \{a(s, X_s) - a(s, Y_s)\}ds + \int_0^t \{G(s, X_s) - G(s, Y_s)\}dB_s \qquad (3.28)$$

である。 この式に (3.13) と (3.14) を使って，(3.20) におけると同様の評価をすれば

$$E[\|Z_t\|^2] \leqq 2L^2(T+1)\int_0^t E[\|Z_s\|^2]\,ds \qquad (3.29)$$

が得られる。 さて，方程式 (3.11) の解の L^2-連続性は，(3.11) の右辺が積分型であることから容易に分る。 従って $E[\|Z_t\|^2]$ は t の連続関数である。 それ故，(3.29) に Gronwall の補題を適用することができて $E[\|Z_t\|^2] \equiv 0$ をうる。 こうして $Z_t = 0$ (P-a.e.) となり $X_t = Y_t$ (P-a.e.) である。 (Q.E.D.)

<u>Remark 3.1.</u> 定理の証明中，$X_t^n \to X_t$ の収束は L^2-sense で見たが，途中の評価式 (3.17) に類似の

$$E\Big[\sup_{0\leq t\leq T}\|X_t^{n+1} - X_t^n\|^2\Big] \leqq C_0(MT)^{n+1}/(n+1)! \qquad (3.30)$$

なる形の評価も可能であり，この不等式を使うと，適当な部分列をとれば，P-a.e. の ω に対して X_t^n は $[0, T]$ 上で t について一様に収束することが言える。そして，その極限が (3.11) の連続な解になっていることも容易に分る。

<u>Cor. 3.1.</u> Th. 3.1 と同じ条件の下で，(3.11) の解 X_t は

$$E[\|X_t\|^2] \leqq C_1(1+\|x\|^2)e^{C_2 t} \tag{3.31}$$

を満たしている。ここで，C_1 及び C_2 は，条件式 (3.15) に現れる定数 c に依存して決まる定数である。

(Proof) X_t を (3.11) の解とする。すなわち

$$X_t = x + \int_0^t a(s, X_s)ds + \int_0^t G(s, X_s)dB_s \tag{3.32}$$

とする。次に，関数 $f(t, x)$ を次式で定義する。

$$f(t, x) \equiv f(x) = \|x\|^2, \quad t \in [0, \infty), \quad x \in K, \tag{3.33}$$

このとき，$f_t \equiv 0$，$f_x = 2x$，$f_{xx} = 2\,id.$ ($id.$ = 恒等写像) に注意して，上の $f(t, x)$ と (3.32) に Th. 2.5 を適用して

$$\begin{aligned} E[\|X_t\|^2] &\leqq \|x\|^2 + \int_0^t \Big\{ E\big[(2X_s, a(s, X_s))_K \\ &\qquad + \mathrm{Trace}\{G^*(s, X_s)G(s, X_s)\}\big]\Big\} ds \\ &\leqq \|x\|^2 + \int_0^t \Big\{ 2E[\|X_s\|\|a(s, X_s)\|] + E[\|G(s, X_s)\|_2^2]\Big\} ds \end{aligned} \tag{3.34}$$

をうる。これに (3.15) を使って

$$\begin{aligned} E[\|X_t\|^2] &\leqq \|x\|^2 + 2c\int_0^t E[\|X_s\| + \|X_s\|^2]ds \\ &\qquad + c^2\int_0^t E[(1+\|X_s\|)^2]ds \\ &\leqq \|x\|^2 + (c+2c^2)t + (3c+2c^2)\int_0^t E[\|X_s\|^2]ds \end{aligned} \tag{3.35}$$

となる。$E[\|X_t\|^2]$ の連続性は分っているので，Gronwall の

lemma が使えて

$$E[\|X_t\|^2] \leqq \|x\|^2 + (C+2C^2)t + \int_0^t (\|x\|^2 + (C+2C^2)s) \times$$

$$\times \exp\{(3C+2C^2)(t-s)\}\, ds \qquad (3.36)$$

をうる。 この式より，C_1 及び C_2 を，C の大きさに応じて十分大にとれば (3.31) の成立することが分る。 (Q.E.D.)

Remark 3.2. 不等式 (3.31) における定数は時間区間 T に依存していない。 従って，時間区間 $[0,\infty)$ において (3.31) の評価が成立している。

Cor. 3.2. Th. 3.1 と同じ条件の下で，(3.11) の連続な解 X_t は次式を満たしている。

$$E[\sup_{0\leq t\leq T} \|X_t\|^2] \leqq C^*(1+\|x\|^2) \qquad (3.37)$$

こゝで C^* は，C と T のみに依存して決まる定数である。

(Proof) X_t が連続な解であることから，P-a.e. の ω について (3.11) の等号がすべての $t\in[0,T]$ に対して成立している。 そこで，以下，すべての ω について (3.11) が成立しているとして議論する。

(3.11) より

$$\sup_{0\leq t\leq T} \|X_t\|^2 \leqq 3\|x\|^2 + 3\left\{\int_0^T \|a(s,X_s)\| ds\right\}^2 + 3\sup_{0\leq t\leq T} \left\|\int_0^t G(s,X_s)dB_s\right\|^2$$

$$\leqq 3\|x\|^2 + 3C^2T\int_0^T (1+\|X_s\|)^2 ds + 3\sup_{0\leq t\leq T} \left\|\int_0^t G(s,X_s)dB_s\right\|^2 \qquad (3.38)$$

をうる。 $\|\int_0^t G(s,X_s)dB_s\|$ は submartingale であり (Prop. 1.4 の証明参照)，従って submartingale の不等式より

$$E[\max_{0\leq t\leq T} \left\|\int_0^t G(s,X_s)dB_s\right\|^2] \leqq 4E\left[\left\|\int_0^T G(s,X_s)dB_s\right\|^2\right] \qquad (3.39)$$

Sem. on Probab.
Vol.53 1981年
P1-142

が成り立っている。(3.38)の期待値をとり、(3.39)と(3.15)を使って次の不等式が言える。

$$E\Big[\sup_{0\le t\le T}\|X_t\|^2\Big] \le 3\|x\|^2 + 3C^2T\int_0^T E\big[(1+\|X_s\|)^2\big]ds + 12C^2\int_0^T E\big[(1+\|X_s\|)^2\big]ds$$

$$\le 3\|x\|^2 + (6C^2T^2+24C^2T) + (6C^2T+24C^2)\int_0^T E\big[\|X_s\|^2\big]ds \qquad (3.40)$$

この式と(3.31)により、C及びTに応じてC^*を適当に大きくとれば、(3.37)が成立するようにできる。 (Q.E.D.)

上の定理では大域的に一様なLipschitz連続性を仮定しているが、この条件は局所的なLipschitz連続の仮定に置きかえることができる。それを述べよう。

Th.3.2. Th.3.1における条件(3.13),(3.14)を次のように変える。すなわち、定数L_n, $n=1,2,\cdots$, が存在して

$$\|a(t,x)-a(t,y)\| \le L_n\|x-y\| \quad \text{if } \|x\|,\|y\|\le n \qquad (3.41)$$

$$\|G(t,x)-G(t,y)\|_2 \le L_n\|x-y\| \quad \text{if } \|x\|,\|y\|\le n, \qquad (3.42)$$

が成立する。それ以外はTh.3.1の仮定と同じとする。このとき、Th.3.1と同じ結論が言える。

(Proof)
$$B_n=\{x\in K,\ \|x\|\le n\},\quad n=1,2,\cdots \qquad (3.43)$$

とおき、連続な写像 $\tilde{x}_n : K\to K$ を次のように定める。

$$\tilde{x}_n(x)=\begin{cases} x & \text{if } x\in B_n \\ (n/\|x\|)x & \text{if } x\notin B_n \end{cases} \qquad (3.44)$$

このとき、$\tilde{x}_n(x)\in B_n$ であって

$$\|\tilde{x}_n(x)-\tilde{x}_n(y)\| \le \|x-y\| \qquad (3.45)$$

となっている。 この $\widehat{x}_n(x)$ を使って

$$a_n(t,x) = a(t,\widehat{x}_n(x)) \tag{3.46}$$
$$G_n(t,x) = G(t,\widehat{x}_n(x)) \tag{3.47}$$

と定義すると，(3.41), (3.42), (3.45) により

$$\|a_n(t,x)-a_n(t,y)\| \leqq L_n\|x-y\| \quad \text{for } \forall x,y\in K \tag{3.48}$$
$$\|G_n(t,x)-G_n(t,y)\| \leqq L_n\|x-y\| \quad \text{〃} \tag{3.49}$$

となり，方程式

$$dX_t = a_n(t,X_t)dt + G_n(t,X_t)dB_t, \quad X_0 = x \tag{3.50}$$

に Th.3.1 が適用できて，(3.50) は一意的な連続な解を持つ。その解を X_t^n とおこう。

次に，stopping time $\tau_n(\omega)$ を

$$\tau_n(\omega) = \begin{cases} \inf\{0<t\leqq T \mid X_t^n \notin B_n\} \\ T \quad \text{if } \{0<t\leqq T \mid X_t^n\notin B_n\}=\phi \end{cases} \tag{3.51}$$

と定める。 $x\in B_n$ のときには，$n\leqq m$ ならば

$$a_m(t,x) = a_n(t,x) = a(t,x)$$
$$G_m(t,x) = G_n(t,x) = G(t,x)$$

となっていることに注意して，のちに述べる Lemma 3.1 から，$n\leqq m$ のときには次式が成り立つ。

$$X^n_{t\wedge\tau_n} = X^m_{t\wedge\tau_n} \qquad t\in[0,T], \quad P\text{-a.s.} \tag{3.52}$$

以下，$n\to\infty$ としたときの $X^n_{t\wedge\tau_n}$ の極限 X_t が well-defined であって，それが求める解であることを示す。

Cor. 3.2 より

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T}\|X^n_{t\wedge\tau_n}\|^2\right] \leqq E\left[\sup_{0\leq t\leq T}\|X^n_t\|^2\right] \leqq C^*(1+\|x\|^2), \tag{3.53}$$

である。 ここで，C^* は C と T のみに依存して決まっており，

Sem. on Probab.
Vol.53 1981年
P1-142

n にはよらないことに注意しておこう。(3.52) と (3.53) より $n \leqq m$ として次の評価ができる。

$$P\left(\sup_{0\leq t\leq T}\|X^m_{t\wedge\tau_m} - X^n_{t\wedge\tau_n}\| > 0\right) \leqq P\left(\sup_{0\leq t\leq T}\|X^n_t\| > n\right)$$

$$\leqq \frac{1}{n^2} E\left[\sup_{0\leq t\leq T}\|X^n_t\|^2\right] \leqq \frac{C^*}{n^2}(1+\|x\|^2) \underset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} 0 \tag{3.54}$$

これより，Borel-Cantelli の Lemma を使うことにより，$\{X^n_{t\wedge\tau_n}\}$ の適当な部分列をとれば，P-a.e. の ω について，$[0, T]$ 上の t について一様に収束している。以下この部分列をとることを n' で示し，一様収束していない ω の全体を Ω_0 とおく。

上のように部分列をとって，その極限として定まる連続な process を X_t とおく（$\omega\in\Omega_0$ のときには，$X_t(\omega)\equiv x$ とする）。(3.53) より，X_t は L^2-process であって

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T}\|X_t\|^2\right] \leqq C^*(1+\|x\|^2) \tag{3.55}$$

を満足していることも分る。次に

$$\Omega_n = \{\omega\in\Omega\,;\,\tau_n(\omega) < T\} = \{\omega\in\Omega\,;\,\sup_{0\leq t\leq T}\|X^n_t(\omega)\| > n\} \tag{3.56}$$

とおくと，(3.52)，(3.53) より $n\to\infty$ のとき

$$\Omega_n\downarrow,\quad P(\Omega_n)\downarrow 0,\quad \tau_n\uparrow T\quad (P\text{-a.s.}) \tag{3.57}$$

である。又，(3.52) と X_t の定義より

$$\omega\notin\Omega_n\cup\Omega_0 \text{ のとき } X^n_t = X_t,\quad t\in[0,T] \tag{3.58}$$

であり，従って，$\omega\notin\Omega_n\cup\Omega_0$ のとき

$$\begin{cases} a_n(t, X^n_{t\wedge\tau_n}) = a_n(t, X^n_t) = a(t, X_t) \\ G_n(t, X^n_{t\wedge\tau_n}) = G_n(t, X^n_t) = G_n(t, X_t) \end{cases} \tag{3.59}$$

となっている。(3.57) と (3.59) より

$$\lim_{n'\to\infty}\int_0^t a_{n'}(s, X^{n'}_{s\wedge\tau_{n'}})\,ds = \int_0^t a(s, X_s)\,ds,\quad t\in[0,T],\ (P\text{-a.s.}) \tag{3.60}$$

が分る。

ついで，確率積分の項について見よう。次の式が言える。

$$E\left[\left\|\int_0^{t\wedge\tau_n} G_n(s, X^n_{s\wedge\tau_n})dB_s - \int_0^t G(s,X_s)dB_s\right\|^2\right]$$

$$= E\left[\int_0^t \| \chi_{\{\tau_n > s\}} G_n(s, X^n_{s\wedge\tau_n}) - G(s,X_s)\|_2^2 ds\right], \quad (\text{Prop. } 2.3)$$

$$= E\left[\int_0^t \| \chi_{\{\tau_n \geqq s\}} G(s,X_s)\|_2^2 ds\right]$$

$$\leqq 2\int_0^t \int_{\Omega_n} \|G(s,X_s)\|_2^2 \, dP\, ds$$

$$\leqq 2C^2 \int_0^t \int_{\Omega_n} (1+\|X_s\|)^2 dP\, ds \tag{3.61}$$

ところで，(3.61)の最右の式の値は，(3.55)と(3.57) より，$n\to\infty$ のとき 0に収束する。こうして $n\to\infty$ のとき L^2-senseで

$$\int_0^{t\wedge\tau_n} G_n(s,X^n_{s\wedge\tau_n})dB_s = \int_0^t \chi_{\{\tau_n>s\}} G_n(s,X^n_s)dB_s \to \int_0^t G(s,X_s)dB_s \tag{3.62}$$

となり，しかもこれは K-valued continuous martingale の収束列であるから，Prop. 1.4 の証明から分るように，適当な部分列をとれば，P-a.e. に $[0,T]$ 上で一様収束している。一方 X^n_t は (3.50) の連続な解であるから，時間 t のところに stopping time を代入しても (3.50) の積分型の等式はなり立っており，

$$X^n_{t\wedge\tau_n} = x + \int_0^{t\wedge\tau_n} a_n(s,X^n_s)ds + \int_0^{t\wedge\tau_n} G_n(s,X^n_s)dB_s$$

$$= x + \int_0^t \chi_{\{\tau_n>s\}} a_n(s,X^n_s)ds + \int_0^t \chi_{\{\tau_n>s\}} G_n(s,X^n_s)dB_s, \tag{3.63}$$

が P-a.e. に任意の $t\in[0,T]$ に対して成立している。

式(3.63) において，(3.62) が t について一様に continuous martingale として収束しているように $\{n'\}$ の部分列 $\{n''\}$ を選んで $n''\to\infty$ として，(3.60) と上のことより

$$X_t = x + \int_0^t a(s,X_s)ds + \int_0^t G(s,X_s)dB_s, \quad t\in[0,T], \ P\text{-a.s.} \tag{3.64}$$

をうる。こうして連続な解の存在が分った。

一意性について見よう。いま X^1_t, X^2_t を共に (3.64) の解

とする。 X_t^1, X_t^2 は連続としてよい。 もし連続でなかったならば,

$$\tilde{X}_t^i = x + \int_0^t a(s, X_s^i)\,ds + \int_0^t G(s, X_s^i)\,dB_s \quad , i=1,2.$$

とおくと, Th. 3.1 の証明の中で見たのと同様にして, $\tilde{X}_t^i$ は X_t^i の continuous version で, (3.64)の解である。 従って, $\tilde{X}_t^1$ と $\tilde{X}_t^2$ について議論すればよい。

stopping time τ_n^i, $i=1,2$, 及び τ_n を次のように与える。

$$\tau_n^i = \inf\{0<t\leq T\,;\,|X^i|>n\},\quad i=1,2,\quad n=1,2,\cdots$$
$$\tau_n = \tau_n^1 \wedge \tau_n^2 \tag{3.65}$$

ただし $\{0<t\leq T\,;\,|X^i|>n\}=\phi$ のときは $\tau_n^i=0$ とする。 このとき, 次の不等式が言える。

$$\begin{aligned}
E\left[\chi_{\{\tau_n\geq t\}}\|X_t^1-X_t^2\|^2\right] &\leq 2E\left[\chi_{\{\tau_n\geq t\}}\left\|\int_0^t\{a(s,X_s^1)-a(s,X_s^2)\}ds\right\|^2\right] \\
&\qquad +2E\left[\chi_{\{\tau_n\geq t\}}\left\|\int_0^t\{G(s,X_s^1)-G(s,X_s^2)\}dB_s\right\|^2\right] \\
&\leq 2E\left[\left\|\int_0^t\chi_{\{\tau_n\geq s\}}\{a(s,X_s^1)-a(s,X_s^2)\}ds\right\|^2\right] \\
&\qquad +2E\left[\left\|\int_0^t\chi_{\{\tau_n\geq s\}}\{G(s,X_s^1)-G(s,X_s^2)\}dB_s\right\|^2\right] \\
&\leq 2L_n^2\,t\,E\left[\int_0^t\chi_{\{\tau_n\geq s\}}\|X_s^1-X_s^2\|^2ds\right] \\
&\qquad +2L_n^2E\left[\int_0^t\chi_{\{\tau_n\geq s\}}\|X_s^1-X_s^2\|^2ds\right] \\
&\leq 2L_n^2(T+1)\int_0^tE\left[\chi_{\{\tau_n\geq s\}}\|X_s^1-X_s^2\|^2\right]ds
\end{aligned} \tag{3.66}$$

ここで, 2番目の不等式においては, P-a.e. に

$$\chi_{\{\tau_n\geq t\}}\left\|\int_0^t\Phi\,dB_s\right\| \leq \left\|\int_0^t\chi_{\{\tau_n\geq s\}}\Phi\,dB_s\right\| \qquad (\tau_n\geq t \text{ のとき, 等号})$$

なる事実を用いたが, この事実は次の2式を見れば分る。

$$\chi_{\{\tau_n\geq t\}}\int_0^t\Phi\,dB_s = \begin{cases}\int_0^t\Phi\,dB_s & \text{if } \tau_n\geq t\\ 0 & \text{if } \tau_n<t\end{cases}$$

$$\int_0^t \chi_{\{\tau_n \geq s\}} \Phi \, dB_s = \int_0^{t \wedge \tau_n} \Phi \, dB_s = \begin{cases} \int_0^t \Phi \, dB_s \, . & \text{if } \tau_n \geq t \\ \int_0^{t \wedge \tau_n} \Phi \, dB_s & \text{if } \tau_n < t \end{cases} \qquad \text{(Prop.2.3参照)}$$

不等式 (3.66) より Gronwall の Lemma を使って

$$E[\chi_{\{\tau_n \geq t\}} \| X_t^1 - X_t^2 \|^2] = 0 \qquad (3.67)$$

となる。 こうして,

$$\{\omega ; \tau_n \geq T\} \text{ 上では } \| X_t^1 - X_t^2 \| = 0 \quad \text{for } t \in [0, T] \qquad (3.68)$$

が分った。 これより, X_t^i の連続性から

$$\begin{aligned} P(\| X_t^1 - X_t^2 \| > 0 \ \text{for some } t \in [0,T]) &\leq P(\tau_n < T) \\ &\leq P(\tau_n^1 < T) + P(\tau_n^2 < T) \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty) \end{aligned} \qquad (3.69)$$

となり, 一意性が言えた。 (Q.E.D.)

上の定理の証明中に引用した Lemma を述べておこう.

<u>Lemma 3.1</u> K 上の2つの方程式

$$X_t = x + \int_0^t a^i(s, X_s) \, ds + \int_0^t G^i(s, X_s) \, dB_s \ , \ i = 1, 2, \qquad (3.70)$$

を考える。 こゝで, 係数はすべて Th.3.1 の条件をみたしており, さらに, K 内の ball $B = \{x \in K, \|x\| \leq \delta\}$, $\delta > 0$, 上においては

$$a^1(t, x) = a^2(t, x) \, , \quad G^1(t, x) = G^2(t, x) \quad \text{if } x \in B \qquad (3.71)$$

と仮定する。 このとき, (3.70) の連続解を X_t^i, $i=1, 2$, とし,

$$\tau^i(\omega) = \begin{cases} \inf \{0 < t \leq T ; X_t^i \notin B\} \\ 0 \quad \text{if 上の集合} = \phi \end{cases} \qquad i = 1, 2. \qquad (3.72)$$

とおくと

$$P(\tau^1=\tau^2)=1 \tag{3.73}$$

$$P\{\sup_{0\le s\le\tau^1}\|X_s^1-X_s^2\|=0\}=1 \tag{3.74}$$

が成立する。

(Proof) 恒等式

$$\begin{aligned}\chi_{\{\tau^1\geqq t\}}(X_t^1-X_t^2)=&\chi_{\{\tau^1\geqq t\}}\int_0^t\{a^1(s,X_s^1)-a^2(s,X_s^1)\}ds\\&+\chi_{\{\tau^1\geqq t\}}\int_0^t\{a^2(s,X_s^1)-a^2(s,X_s^2)\}ds\\&+\chi_{\{\tau^1\geqq t\}}\int_0^t\{G^1(s,X_s^1)-G^2(s,X_s^1)\}dB_s\\&+\chi_{\{\tau^1\geqq t\}}\int_0^t\{G^2(s,X_s^1)-G^2(s,X_s^2)\}dB_s\end{aligned} \tag{3.75}$$

において，$\tau^1\geqq t\geqq s$ のとき $X_s^1\in B$ 故，(3.71)より右辺の第1項は0になる。又，第3項も

$$\begin{aligned}第3項&=\chi_{\{\tau^1\geqq t\}}\int_0^{t\wedge\tau^1}\{G^1(s,X_s^1)-G^2(s,X_s^1)\}dB_s\\&=\chi_{\{\tau^1\geqq t\}}\int_0^t\chi_{\{\tau^1>s\}}\{G^1(s,X_s^1)-G^2(s,X_s^1)\}dB_s=0\end{aligned}$$

となる。従って(3.75)より

$$\begin{aligned}\chi_{\{\tau^1\geqq t\}}\|X_t^1-X_t^2\|^2=&\chi_{\{\tau^1\geqq t\}}\Big\|\int_0^t\{a^2(s,X_s^1)-a^2(s,X_s^2)\}ds\\&+\int_0^t\{G^2(s,X_s^1)-G^2(s,X_s^2)\}dB_s\Big\|^2\end{aligned} \tag{3.76}$$

が従がう。これに対しては，(3.66)で行なったと同様の評価ができて，前の(3.67)が言えたのと同じに

$$E[\chi_{\{\tau^1\geqq t\}}\|X_t^1-X_t^2\|^2]=0 \tag{3.77}$$

が言える。この式より，X_t^i の連続性を考慮して，(3.74)が分る。同時に $\tau^2\geqq\tau^1$ が言えたことになる。

上で行なった議論を、X^1_t と X^2_t の役割を入れかえて行なえば対称的な結果が言えて，$\tau^1 \geqq \tau^2$ が出る。 こうして (3.73) も分った。 (Q.E.D.)

Sem. on Probab.
Vol.53 1981年
P1-142

§4、確率発展方程式

偏微分方程式，特に発展方程式，にランダム項が加わるという形の方程式を考える場合も多い。その場合，方程式を確率微分方程式の形に表現しようとしたとき，前節で扱かった形に収まらない。そこで，この節では確率発展方程式について見ることにする。

可分な実 Hilbert 空間 H 及び K，H 上の c.B.m. B_t 等は前節までと同様に与えられているとする。このとき，A を K 上の closed operator として次の方程式を考えよう。

$$X_t = x + \int_0^t AX_s\,ds + \int_0^t G(X_s)\,dB_s \quad , \; t \geqq 0 \qquad (4.1)$$

こゝで G は $G : K \to \sigma_2(H, K)$ なる写像である。方程式 (4.1) は，前節におけると同様に，確率微分方程式の形に

$$dX_t = AX_t\,dt + G(X_t)\,dB_t \;, \quad t \geqq 0, \quad X_0 = x \qquad (4.2)$$

とも書くことにする。方程式 (4.1) 又は (4.2) を確率発展方程式と呼ぶ。

一般に A は非有界作用素の場合を想定しており，前節における drift 項 $a(x)$ についての条件を Ax は満たしていない。従って前節と同じ議論を上の方程式に適用することはできないし，又，A の定義域 $\mathcal{D}(A)$ 内に解が存在することも一般には期待できない。$\mathcal{D}(A)$ 内にある解についてはのちに見ることにし，こゝではまず，弱い意味での解の定義から始める。

A を closed operator と仮定したので，A の定義域 $\mathcal{D}(A)$ は K で稠密であり，又 A の dual operator A^* も定まって $\mathcal{D}(A^*)$ も K で稠密である。このことに注意して，次のように定義する。なお，この節では時間区間は $[0, \infty)$ とする。

Def. 4.1. (weak solution)　K-valued $\mathcal{F}_t$-adapted な L^2-process X_t が発展方程式 (4.1) 又は (4.2) の弱い解 (w-solution) であ

るとは、 X_t が次の条件 (i), (ii) を満たすときをいう。

(i) $E\left[\int_0^t \|G(X_s)\|_2^2 ds\right] < \infty \quad \text{for } \forall t \geq 0$ (4.3)

(ii) 任意の $y \in \mathcal{D}(A^*)$ と $t \geq 0$ に対して次式が成立する。

$$(y, X_t) = (y, x) + \int_0^t (A^* y, X_s) ds + \int_0^t \langle G^*(X_s) y, dB_s \rangle, \ (P\text{-a.s.}) \quad (4.4)$$

ここで $(\ ,\ )$ は K における内積を示し，最後の積分は，scalar-valued の確率積分（Def. 2.1）である。

作用素 A が class (C_0) の semi-group $\{T_t\}$ の generator になっている場合を考えよう。このときには A は closed operator になっているので上で与えた weak solution が考えられるが，それと同時に，(4.2) を発展方程式 $dX_t/dt = AX_t$ と関連づけて，次のような解の定義が考えられる。

<u>Def. 4.2.</u> (evolution solution) K-valued $\mathcal{F}_t$-adapted L^2-process X_t が方程式 (4.1) 又は (4.2) の発展解（e-solution）であるとは，X_t が，$t \geq 0$ を固定するごとに

$$X_t = T_t x + \int_0^t T_{t-s} G(X_s) dB_s, \quad (P\text{-a.s.}) \quad (4.5)$$

を満たしているときをいう。ただし，$\{T_t\}$ は A を generator に持つ class (C_0) の semi-group である。

以下，発展解について述べるときには，つねに，class (C_0) の semi-group $\{T_t\}$ が存在して、A が $\{T_t\}$ の generator になっていることを前提としているものとする。

上で定義した2種の解の間の関係を見ておこう。

<u>Th. 4.1.</u> 作用素 A が class (C_0) の semi-group $\{T_t\}$ の generator であるとき、(4.1) の発展解 X_t が条件 (4.3)，すなわち

$$E\left[\int_0^t \|G(X_s)\|_2^2 ds\right] < \infty \quad \text{for } \forall t \geqq 0$$

をみたしていれば，X_tは(4.1)の弱い解でもある．

定理の証明のためにLemmaを用意する。

Lemma 4.1. $\Phi(t,\omega)$を$\sigma_2(H,K)$-valued $\mathcal{F}_t$-adapted processで，次の可積分性の条件を満たしているものとする。

$$E\left[\int_0^t \|\Phi(s)\|_2^2 ds\right] < \infty \quad \text{for } \forall t \geqq 0$$

このとき

$$X_t = T_t x + \int_0^t T_{t-s}\Phi(s)\, dB_s \tag{4.6}$$

とおくと，X_tは，$y \in \mathcal{D}(A^*)$のときP-a.s.に

$$(y, X_t) = (y, x) + \int_0^t (A^* y, X_s) ds + \int_0^t \langle \Phi^*(s) y, dB_s \rangle \tag{4.7}$$

を満たす。

(Proof) (4.6)式の両辺と$y \in \mathcal{D}(A^*)$との内積をとって

$$(y, X_t) = (y, T_t x) + \int_0^t \langle \Phi^*(s) T_{t-s}^* y, dB_s \rangle \tag{4.8}$$

となる。一方(4.7)の右辺を(4.6)を使って変形して，

$$\begin{aligned}(4.7)\text{の右辺} &= (y, x) + \int_0^t (T_u^* A^* y, x) du \\ &\quad + \int_0^t \left\{\int_0^u \langle \Phi^*(s) T_{u-s}^* A^* y, dB_s \rangle\right\} du + \int_0^t \langle \Phi^*(s) y, dB_s \rangle \\ &= \langle T_t^* y, x \rangle + \int_0^t \left\{\int_0^u \langle \Phi^*(s) T_{u-s}^* A^* y, dB_s \rangle\right\} du \\ &\qquad + \int_0^t \langle \Phi^*(s) y, dB_s \rangle \end{aligned} \tag{4.9}$$

となる。ここで

$$\int_0^t A^* T_u^* y\, du = \int_0^t T_u^* A^* y\, du = T_t^* y - y$$

なる事実を使った。

(4.8) と (4.9) より, (4.6) を示すためには, 各 t ごとに次式の成立することを言えばよいことになる。

$$\int_0^t \langle \Phi^*(s) T^*_{t-s} y, dB_s \rangle = \int_0^t \left\{ \int_0^u \langle \Phi^*(s) T^*_{u-s} A^* y, dB_s \rangle \right\} du + \int_0^t \langle \Phi^*(s) y, dB_s \rangle \qquad (P\text{-a.s.}) \quad (4.10)$$

以下 (4.10) の証明を行なう。まず

$$\psi(u,s,\omega) = \begin{cases} \Phi^*(s) T^*_{u-s} A^* y, & \text{if } u \geq s \\ 0 & \text{if } u < s \end{cases}$$

とおくと, $\psi(u,s)$ は H-valued で $\mathcal{F}_s$-adapted であり

$$E\left[\int_0^t \int_0^t \|\psi\|_H^2 \, du\, ds\right] < \infty$$

である。従って, Fubini 型の定理 (Th. 2.1 in §2) により

$$\int_0^t \left\{ \int_0^t \langle \psi(u,s), dB_s \rangle \right\} du = \int_0^t \langle \int_0^t \psi(u,s) du, dB_s \rangle \qquad (P\text{-a.s})$$

が成立する。この式を $\psi(u,s)$ の定義式に戻してみると

$$\int_0^t \left\{ \int_0^u \langle \Phi^*(s) T^*_{u-s} A^* y, dB_s \rangle \right\} du = \int_0^t \langle \Phi^*(s) \int_s^t T^*_{u-s} A^* y\, du, dB_s \rangle \quad (4.11)$$

となる。(4.11) と次の等式

$$\int_s^t T^*_{u-s} A^* y\, du = \int_0^{t-s} T^*_u A^* y\, du = T^*_{t-s} y - y$$

とを使って (4.10) が得られる。 (Q.E.D)

(Proof of Th. 4.1) X_t を (4.1) の発展解とする。このとき, $\Phi(s) = G(X_s)$ とおいて Lemma 4.1 を使うと, $y \in \mathcal{D}(A^*)$ に対して次式が成立する。

$$\begin{aligned}(y, X_t) &= (y, x) + \int_0^t (A^* y, X_s) ds + \int_0^t \langle \Phi^*(s) y, dB_s \rangle \\ &= (y, x) + \int_0^t (A^* y, X_s) ds + \int_0^t \langle G^*(X_s) y, dB_s \rangle \quad (P\text{-a.s.})\end{aligned}$$

Sem. on Probab.
Vol.53 1981年
P1-142

この式は，X_t が (4.1) の弱い解であることを示している。

(Q.E.D.)

上の定理の逆について考えてみよう。すなわち，弱い解 X_t があったとき，これは発展解になっているだろうか。一般の場合については分っていないが，A が特別な形の場合には言えている場合もある。その1つとして次の定理を挙げておこう。

Th. 4.2. A が point spectrum を持つ self-adjoint operator であるとき，方程式 (4.1) の弱い解は (4.1) の発展解でもある。

証明の前に Lemma を1つ用意する。

Lemma 4.2. A が Th. 4.2 の仮定を満たしているものとし，$\Phi(t)$ を $\sigma_2(H,K)$-valued $\mathcal{F}_t$-adapted L^2-process とする。このとき，もしも K-valued process X_t が任意の $y \in \mathcal{D}(A^*) = \mathcal{D}(A)$ に対して

$$(y, X_t) = (y, x) + \int_0^t (Ay, X_s)\,ds + \int_0^t \langle \Phi^*(s) y, dB_s \rangle \quad (P\text{-a.s.}) \qquad (4.12)$$

を満たしているならば，X_t は次式で与えられる。

$$X_t = T_t x + \int_0^t T_{t-s}\Phi(s)\,dB_s \qquad (4.13)$$

(Proof) 仮定より，A の固有ベクトルよりなる K の c.o.n.s. $\{\xi_n\}$ がとれる。対応する固有値を $\{\lambda_n\}$ とおく。(4.12) より

$$(\xi_n, X_t) = (\xi_n, x) + \int_0^t \lambda_n (\xi_n, X_s)\,ds + \int_0^t \langle \Phi^*(s)\xi_n, dB_s \rangle \qquad (4.14)$$

$$(P\text{-a.s.}),\quad n = 1, 2, \cdots$$

以下，$t > 0$ を1つ固定して，$0 \leq s \leq t$ で考える。$x_s^n = (\xi_n, X_s)$ とおくと

$$x_s^n = x_0^n + \int_0^s \lambda_n x_u^n\,du + \int_0^s \langle \Phi^*(u)\xi_n, dB_u \rangle \qquad (4.15)$$

Sem. on Probab.
Vol.53 1981年
P1-142

である。 $f(s,x)=e^{\lambda_n(t-s)}x$, $y^n_s=f(s,x^n_s)$ とおいて，上の x^n_s と y^n_s に Itô-formula (Th. 2.3) を使うと

$$y^n_s=y^n_0+\int_0^s\{-\lambda_n e^{\lambda_n(t-u)}x^n_u+e^{\lambda_n(t-u)}(\lambda_n x^n_u)\}du$$
$$+\int_0^s\langle e^{\lambda_n(t-u)}\Phi^*(u)\xi_n, dB_u\rangle$$
$$=y^n_0+\int_0^s\langle\Phi^*(u)T_{t-u}\xi_n, dB_u\rangle \tag{4.16}$$

が得られる。 (4.16) 式において $s=t$ のときを考えると，$y^n_t=x^n_t$, $y^n_0=e^{\lambda_n t}x^n_0$ に注意して

$$x^n_t=e^{\lambda_n t}x^n_0+\int_0^t\langle\Phi^*(u)T_{t-u}\xi_n, dB_u\rangle$$
$$=(\xi_n, T_t x)+(\xi_n, \int_0^t T_{t-u}\Phi(u)dB_u)$$

となる。 こうして

$$(\xi_n, X_t)=(\xi_n, T_t x)+(\xi_n, \int_0^t T_{t-u}\Phi(u)dB_u) \tag{4.17}$$

が言えた。

t を固定した上で，(4.17) の成立する ω の全体を，各 n ごとに Ω_n とおく。 $P(\Omega_n)=1$ であり，$P(\bigcap_n\Omega_n)=1$ である。そして，$\{\xi_n\}$ が c.o.n.s. であることから，$\omega\in\bigcap_n\Omega_n$ のときには (4.17) より

$$X_t=T_t x+\int_0^t T_{t-u}\Phi(u)dB_u$$

が従がう。 こうして結論が言えた。 (Q.E.D.)

(Proof of Th. 4.2) X_t を (4.1) の弱い解とする。 定義より

$$E\left[\int_0^t\|G(X_s)\|_2^2 ds\right]<\infty \quad \text{for } \forall t\geq 0$$

となっているので，$\Phi(s)\equiv G(X_s)$ とおくと，$\Phi(s)$ は Lemma 4.2 の仮定を満たしている。 弱い解であると仮定しているので，任意の $y\in\mathcal{D}(A)$ に対して

$$(y, X_t) = (y, x) + \int_0^t (Ay, X_s)ds + \int_0^t \langle G^*(X_s)y, dB_s \rangle$$
$$= (y, x) + \int_0^t (Ay, X_s)ds + \int_0^t \langle \Phi^*(s)y, dB_s \rangle$$

となり，Lemma 4.2 を使って

$$X_t = T_t x + \int_0^t T_{t-s}\Phi(s)dB_s$$

が得られる。 $\Phi(s) = G(X_s)$ を代入して X_t が (4.1) の発展解であることが分る。 (Q.E.D.)

方程式 (4.1) の発展解の L^2-連続性については，次のことが言える。

<u>Th. 4.3.</u> X_t を (4.1) の発展解で，条件

$$E\left[\int_0^t \|G(X_s)\|_2^2 ds\right] < \infty, \quad \text{for } {}^\forall t \geq 0$$

を満たしているものとする。 このとき X_t は，$X : [0, \infty) \to L^2(\Omega \to K)$ なる写像とみたとき右連続である。

(Proof) $T > 0$ を1つ固定し，$0 \leq t < u \leq T$ の範囲で t, u を動かすものとする。 $\Phi(s) \equiv G(X_s)$ とおいて，次式をうる。

$$X_u - X_t = (T_u - T_t)x + \int_0^t \{T_{u-s} - T_{t-s}\}\Phi(s)dB_s + \int_t^u T_{u-s}\Phi(s)dB_s \qquad (4.18)$$

これより

$$E[\|X_u - X_t\|^2] \leqq 3\|(T_u - T_t)x\|^2 + 3E\left[\left\|(T_{u-t} - I)\int_0^t T_{t-s}\Phi(s)dB_s\right\|^2\right]$$
$$+ 3\int_t^u E[\|T_{u-s}\Phi(s)\|_2^2]ds \qquad (4.19)$$

が分る。 $\{T_t\}$ が class (C_0) の semi-group であることより，この式の右辺の第1項は $|u-t| \to 0$ としたとき0に収束する。 又，第3項も $|u-t| \to 0$ のとき0に収束する。 第2項につい

Sem. on Probab.
Vol.53 1981年
P1-142

て調べてみよう。

$$\begin{cases} \varphi_u(\omega) = \|(T_{u-t} - I)\int_0^t T_{t-s}\Phi(s)dB_s\|^2 \\ \varphi(\omega) = (Me^{\alpha T}+1)^2 \|\int_0^t T_{t-s}\Phi(s)\,dB_s\|^2 \end{cases} \tag{4.20}$$

とおく。 こゝで I は恒等写像であり，M 及び α は，$\{T_t\}$ が class (C_0) の semi-group であることから存在している $\|T_t\| \leqq Me^{\alpha t}$ を満たす定数である。 このとき

$$0 \leqq \varphi_u(\omega) \leqq \varphi(\omega)$$

であって，$\varphi(\omega)$ は P-可積分である。 そして $\{T_t\}$ の強連続性により

$$\varphi_u(\omega) \longrightarrow 0 \qquad (u \downarrow t)$$

である。 従って，有界収束の定理より

$$E[\varphi_u(\omega)] \longrightarrow 0 \quad (u \downarrow t) \tag{4.21}$$

が成りたつ。 こうして (4.19)式の右辺の第2項の収束が $u \downarrow t$ の場合に分って，以上から

$$(4.19) \text{ の右辺} \longrightarrow 0 \quad (u \downarrow t)$$

となり，定理の結論が言えた。 (Q.E.D.)

<u>Remark 4.1.</u> 上の定理の証明から分るように

$$X_t \text{ が } L^2\text{-連続}$$
$$\Longleftrightarrow \int_0^t (T_{u-s} - T_{t-s})\Phi(s)dB_s \to 0 \ (|u-t|\to 0) \quad \text{in } L^2(\Omega \to K)$$

であり，Prop. 2.2 により，これは次と同値である。

$$E\left[\int_0^t \|(T_{u-s} - T_{t-s})\Phi(s)\|_2^2\, ds\right] \to 0 \quad (|u-t|\to 0) \tag{4.22}$$

A と $G(x)$ に条件があるとき，(4.22) が言えることはしばしば起る。

Sem. on Probab.
Vol.53 1981年
P1-142

発展解の path の連続性については、のちに判定条件を調べることにする。

確率発展方程式の解の存在と一意性について、簡単な場合については次のように言える。

<u>Th. 4.4.</u> $G : K \to \sigma_2(H, K)$ が Lipschitz 連続であれば、方程式 (4.2) の発展解が存在する。 又、L^2-連続な解は、存在したとすれば一意的である。

(Proof) 逐次近似で解を構成する。 時間は有限区間 $[0,T]$ 上で考える。

まず $X_t^0 = T_t x$ とおき、X_t^n が定義されているとき X_t^{n+1} を

$$X_t^{n+1} = T_t x + \int_0^t T_{t-s} G(X_s^n) dB_s \tag{4.23}$$

により与え、X_t^n, $n=0,1,2,\cdots$ が定義される。 このとき、次の評価ができる。

$$E[\|X_t^{n+1} - X_t^n\|^2] = \int_0^t E[\|T_{t-s}(G(X_s^n) - G(X_s^{n-1}))\|_2^2] ds$$

$$\leqq C^2 L^2 \int_0^t E[\|X_s^n - X_s^{n-1}\|^2] ds \tag{4.24}$$

こゝで $C = Me^{\alpha T}$ であり、L は Lipschitz 定数である。

帰納法を使って、次の不等式を示そう。

$$E[\|X_t^{n+1} - X_t^n\|^2] \leqq \frac{(M_0 t)^{n+1}}{(n+1)!}, \quad n=0,1,2,\cdots \tag{4.25}$$

こゝで M_0 は、$M_0 = M_0(x, \|G(0)\|_2, C, L, T)$ なる定数である。

$n=0$ の場合には

$$E[\|X_t^1 - X_t^0\|^2] = E[\|\int_0^t T_{t-s} G(T_s x) dB_s\|^2]$$

$$= \int_0^t E[\|T_{t-s} G(T_s x)\|_2^2] ds \leqq C^2 \int_0^t \|G(T_s x)\|_2^2 ds$$

$$\leqq C^2 \int_0^t (\|G(0)\|_2 + L\|T_s x\|)^2 ds \leqq C^2 (\|G(0)\|_2 + LMe^{\alpha T})^2 t$$

となり，M_0 を $(x, \|G(0)\|_2, C, L, T)$ に応じて大きくとれば(4.25)が成立する。

次に，$n=m-1$ まで正しかったと仮定しよう。そのときは

$$E[\|X_t^{m+1}-X_t^m\|^2] \leqq C^2L^2\int_0^t E[\|X_s^m - X_s^{m-1}\|^2]ds$$

$$\leqq C^2L^2\frac{M_0^m}{m!}\int_0^t s^m ds = \frac{C^2L^2M_0^m t^{m+1}}{(m+1)!} \qquad (4.26)$$

となり，$M_0 \geqq C^2L^2$ にとってあれば，(4.26)の右辺は(4.25)の右辺より小となり，(4.25)が $n=m$ でも成立する。こうして，定数 M_0 を適当に大きくとっておけば，(4.25)の成立することが分った。

(4.25)より，$\{X_t^n\}$ は，t を fix するごとに $L^2(\Omega\to K)$ の元として収束している。その極限を X_t とおく。X_t は $\mathcal{F}_t$-adapted である。次いで，等式(X_t^{n+1} の定義式)

$$X_t^{n+1} = T_t x + \int_0^t T_{t-s}G(X_s^n)dB_s \qquad (4.23)$$

において，$n\to\infty$ としたときの極限を考えよう。上式の左辺は $L^2(\Omega\to K)$ の中で X_t に収束している。一方，右辺については次のことが言える。(4.25)より $\{X_\cdot^n\}$ は $L^2(\Omega\times[0,T]\to K)$ の中で $X_\cdot$ に収束しており，従って $\{T_{t-\cdot}G(X_\cdot^n)\}$ は，$L^2(\Omega\times[0,T]\to\sigma_2(H,K))$ の意味で $T_{t-\cdot}G(X_\cdot)$ に収束している。それ故，Cor. 2.1 により，

$$\int_0^t T_{t-s}G(X_s^n)dB_s \longrightarrow \int_0^t T_{t-s}G(X_s)dB_s \quad \text{in } L^2(\Omega\to K)$$

となる。こうして，(4.23)の極限が(4.5)となり，X_t が発展解であることが分った。

一意性については次のように見ればよい。いま，X_t, Y_t を共に L^2-連続な解として $Z_t = X_t - Y_t$ とおくと，

$$Z_t = \int_0^t T_{t-s}\{G(X_s)-G(Y_s)\}dB_s$$

より次の不等式が言える。

$$E[\|Z_t\|^2] = \int_0^t E[\|T_{t-s}(G(X_s)-G(Y_s))\|_2^2]\,ds$$
$$\leqq M^2 e^{2\alpha T} L^2 \int_0^t E[\|Z_s\|^2]\,ds$$

L^2-連続性の仮定より $E[\|Z_t\|^2]$ は連続な，Gronwall の Lemma により $E[\|Z_t\|^2]=0$ となり $X_t = Y_t$ (P-a.s.) となる。(Q.E.D.)

次に，方程式(4.2)の解が $\mathcal{D}(A)$ 内に存在するような場合を考察することにしよう。

$K_1 = \mathcal{D}(A)$ とおき，K_1 に新しい内積 $(\ ,\ )_1$ を次式で導入する。

$$(x,y)_1 = (x,y) + (Ax, Ay) \qquad \text{for } x, y \in K_1 = \mathcal{D}(A). \quad (4.27)$$

作用素 A は closed としていたから，K_1 は内積 $(\ ,\ )_1$ で閉じており，この内積により K_1 は Hilbert 空間になっている。この内積からきまる norm を $\|\cdot\|_1$ で示すことにする。

Def. 4.3. (s-solution) K_1-valued $\mathcal{F}_t$-adapted L^2-process X_t が，条件 $E[\int_0^t \|G(X_s)\|^2_{\sigma_2(H,K)} ds] < \infty$ for ${}^\forall t>0$

を満たし，各 t ごとに P-a.e. に (4.1) 式

$$X_t = x + \int_0^t AX_s\,ds + \int_0^t G(X_s)\,dB_s \qquad (4.1)$$

を満たしているとき，X_t を方程式 (4.1) 又は (4.2) の強い解 (strong solution) と呼ぶ。

はじめに，s-solution と発展解 (e-solution) との関係を見ておこう。そのために Lemma を1つ用意する。

Lemma 4.3. $\Phi(t)$ を $\sigma_2(H,K)$-valued $\mathcal{F}_t$-adapted process で

$$E[\int_0^t \|\Phi(s)\|^2_{\sigma_2(H,K)} ds] < \infty, \quad \text{for } {}^\forall t>0$$

が満たされているとする。このとき，次の (i) (ii) が成立する。

(i) 方程式

$$X_t = x + \int_0^t AX_s\,ds + \int_0^t \Phi(s)\,dB_s, \qquad x \in K_1 \tag{4.28}$$

が s-solution (i.e. K_1-valued solution) を持つならば, その解は,

$$X_t = T_t x + \int_0^t T_{t-s}\Phi(s)\,dB_s \tag{4.29}$$

で与えられる。

(ii). 条件

$$E\Big[\int_0^t \|T_{t-s}\Phi(s)\|^2_{\sigma_2(H,K)}\,ds\Big] < \infty \qquad \text{for } {}^\forall t \geq 0$$

も満たされているとき, (4.29) による X_t は (4.28) の強い解である。

(Proof) (i). X_t を (4.28) の s-solution とする。 また, $y \in \mathcal{D}(A^*)$ と $t > 0$ をそれぞれ固定して

$$f(u,x) = (y,\ T_{t-u}x), \qquad 0 \leqq u \leqq t,\ x \in K$$

とおく。 このとき f は Fréchet 微分可能で,

$$f'_x = T^*_{t-u}y, \quad f''_{xx} = 0$$

である。 時間微分は

$$f'_t = (y, -AT_{t-u}x)$$

となる。 従って, (4.28) の X_t とこの $f(t,x)$ に Itô-formula (Th. 2.4) が使えて, $\xi_u = f(u, X_u)$ とおくとき,

$$\begin{aligned}\xi_u - \xi_0 &= \int_0^u \{(y, -AT_{t-s}X_s) + (T^*_{t-s}y, AX_s)\}ds \\ &\quad + \int_0^u \langle \Phi^*(s) T^*_{t-s}y, dB_s\rangle \\ &= (y, \int_0^u T_{t-s}\Phi(s)\,dB_s) \end{aligned} \tag{4.30}$$

Sem. on Probab.
Vol.53 1981年
P1-142

となる。この式で $u=t$ とおくと，$\xi_t=(y,X_t)$，$\xi_0=(y,T_t x)$ より次式をうる。

$$(y,X_t)-(y,T_t x)=(y,\int_0^t T_{t-s}\Phi(s)\,dB_s) \qquad (4.31)$$

yは$\mathcal{D}(A^*)$内の任意の元であり，$\mathcal{D}(A^*)$はK内denseであったから(4.31)より(4.29)が従がう。（ωの除外集合について詳しく言えば次のようになる。$\{y_n, n=1,2,\cdots\}$を$\mathcal{D}(A^*)$の稠密なす算実列とし，各y_nに対して(4.31)の成立するωの全体をΩ_nとする。$P(\Omega_n)=1$である。$\Omega_0=\bigcap_n\Omega_n$とおけば，$P(\Omega_0)=1$で，$\omega\in\Omega_0$のとき(4.29)が成立している。）

(ii). まず，X_tが$K_1=\mathcal{D}(A)$内にあることは，仮定

$$E[\int_0^t \|T_{t-s}\Phi(s)\|^2_{\mathcal{S}_2(H,K_1)}ds<\infty$$

より，確率積分の定義から明らか。

いまX_tが(4.29)により与えられているので，Lemma 4.1によりX_tは(4.7)を満たす。ところで今の場合$X_s\in\mathcal{D}(A)$が言えているので，(4.7)は次式と同値である。

$$(y,X_t)=(y,x)+(y,\int_0^t AX_s\,ds)+(y,\int_0^t\Phi(s)\,dB_s),\ y\in\mathcal{D}(A^*) \qquad (4.32)$$

$\mathcal{D}(A^*)$がK内で稠密であることから，(i)の証明の最右の部分と同様にして，(4.32)より(4.28)の成立が従がう。(Q.E.D.)

上のLemmaを使って，次の定理が示せる。

<u>Th. 4.5.</u> 方程式(4.2)の強い解が存在したとすれば，その解は発展解でもある。

(Proof) X_tを(4.2)の強い解，すなわち

$$X_t=x+\int_0^t AX_s\,ds+\int_0^t G(X_s)\,dB_s\ , \qquad x\in K_1 \qquad (4.33)$$

であるとする。このとき$\Phi(s)=G(X_s)$とおくと，この$\Phi(s)$

Sem. on Probab.
Vol.53 1981年
P1-142

は Lemma 4.3 の仮定を満たしており，又，(4.33) は (4.28) の形になる。従って Lemma 4.3 (i) により X_t は (4.29) で与えられることになる。こゝで再び $\Phi(s)=G(X_s)$ を使って (4.29) をを書き直すと

$$X_t = T_t x + \int_0^t T_{t-s} G(X_s)\, dB_s$$

となり，X_t が発展解であることが分る。 (Q.E.D.)

strong solution の L^2-連続性について次のことが分る。

<u>Cor. 4.1.</u> 方程式 (4.2) の強い解は，K-valued process と見たとき，L^2-連続である。

(Proof) 強い解を X_t とおき，$\Phi(s)=G(X_s)$ とおく。$u<t$ として次の不等式が成立する。

$$E[\|X_t - X_u\|^2] \leqq 2|t-u|\int_u^t E[\|AX_s\|^2]ds + 2\int_u^t E[\|\Phi(s)\|^2_{\sigma_2(H,K)}]ds$$

$$\leqq 2|t-u|\int_u^t E[\|X_s\|_1^2]ds + 2\int_u^t E[\|\Phi(s)\|^2_{\sigma_2(H,K)}]ds \qquad (4.34)$$

こゝで $|t-u|\to 0$ とすると，(4.34) の右辺は 0 に収束する。従って，K-valued process としては L^2-連続である。 (Q.E.D.)

strong solution について，もう少し見ておこう。

<u>Th. 4.6.</u> 方程式 (4.2) の強い解は，K-norm で見るとき，連続な version を持つ。更にその version は，下の Remark 4.2 で述べるような意味で (4.2) の extended strong solution である。

(Proof) 時間区間を有限にして，[0, T] 上で見ることにする (T>0)。X_t を strong solution とすると，各 t で

$$X_t = x + \int_0^t AX_s ds + \int_0^t G(X_s) dB_s, \quad x \in K_1 \tag{4.35}$$

が成り立っている。 ここで、上式の右辺は P-a.s. に t の連続関数である。 実際、確率積分の項は、その定義から連続であり、又、第2項の積分項についても

$$E\left[\int_0^T \|AX_s\| ds\right] \leqq T^{\frac{1}{2}} \sqrt{E\left[\int_0^T \|AX_s\|^2 ds\right]}$$

$$\leqq T^{\frac{1}{2}} \sqrt{E\left[\int_0^T \|X_s\|_1^2 ds\right.} < \infty \tag{4.36}$$

より、 AX_s は P-a.s. に $[0,T]$ 上で s の可積分関数であり、その積分は t の連続関数である。

そこで、連続な process $\widehat{X_t}$ を次式で定義する。

$$\widetilde{X_t} \equiv x + \int_0^t AX_s ds + \int_0^t G(X_s) dB_s, \tag{4.37}$$

いま、 $\widehat{X_t}$ は P-a.e. に連続であるから、その除外集合を Ω_1 とおく。 そして、 $\widehat{X_t} = X_t$ (P-a.s.) に注意して、

$$\int_0^t A\widehat{X}_s ds + \int_0^t G(\widehat{X}_s) dB_s \quad と \quad \int_0^t AX_s ds + \int_0^t G(X_s) dB_s$$

の違いを検討してみる。

$\widehat{X_t} = X_t$ (P-a.s.) より $G(\widehat{X}_\cdot) = G(X_\cdot)$ in $L^2([0,T] \times \Omega \to \sigma_2(H,K))$ であり、確率積分の定義より、P-a.e. に

$$\int_0^t G(\widetilde{X_s}) dB_s = \int_0^t G(X_s) dB_s \quad \text{for } \forall t \in [0,T]$$

となっている。 この除外集合を Ω_2 としておく。 又、再度 $\widehat{X_t} = X_t$ (P-a.s.) より $\widehat{X}_\cdot(\cdot) = X_\cdot(\cdot)$ ($ds \times P(d\omega)$-a.s.) であり、従って $A\widehat{X}_\cdot(\cdot) = AX_\cdot(\cdot)$ ($ds \times P(d\omega)$-a.s.) である。 これより Fubini の定理から、P-a.e. の ω に対して $A\widehat{X}_\cdot = AX_\cdot$ (ds-a.s.) となり、 P-a.s. に

$$\int_0^t A\widehat{X}_s ds = \int_0^t AX_s ds \quad \text{for } \forall t \in [0,T]$$

となる。 この除外集合を Ω_3 とおく。

こうして，$\Omega_0=\bigcup_{i=1}^{n}\Omega_i$ とおくとき，$\omega\notin\Omega_0$ ならば

$$\int_0^t AX_s ds+\int_0^t G(X_s)dB_s=\int_0^t A\hat{X}_s ds+\int_0^t G(\hat{X}_s)dB_s \quad \text{for } t\in[0,T] \tag{4.38}$$

である。同時に，各 t ごとには $\hat{X}_t=X_t$ (P-a.s.) な，P-a.s. に

$$\hat{X}_t=X_t=x+\int_0^t AX_s ds+\int_0^t G(X_s)dB_s$$

$$=x+\int_0^t A\hat{X}_s ds+\int_0^t G(\hat{X}_s)dB_s \tag{4.39}$$

が言えたことになる。すなわち (4.1) の解である。(Q.E.D.)

<u>Remark 4.2.</u> 上の証明から分るように，$\omega\notin\Omega_0$ のとき $\hat{X}_t(\omega)$ は a.e. の t に対しては $\hat{X}_t(\omega)\in K_1=\mathcal{D}(A)$ であるが，すべての t について $\hat{X}_t(\omega)\in K_1$ かどうかは分らない。その意味で，上の $\hat{X}_t$ を extended strong solution と呼んでおこう。

<u>Th. 4.7.</u> 方程式 (4.2) において，$G: K\longrightarrow\sigma_2(H,K)$ は Lipschitz 連続であるとする。更に，特に $x\in K_1=\mathcal{D}(A)$ のときには，$G(x)\in\sigma_2(H,K_1)$ であって，G の定義域を K_1 上に制限したときには，G は $G: K_1\rightarrow\sigma_2(H,K_1)$ なる写像として Lipschitz 連続とする。このとき，次の (i) 及び (ii) が成立する。

(i) 初期値 $X_0=x$ を $x\in K_1$ に与えるとき，方程式 (4.2) の強い解が存在して，一意的である。

(ii) 任意の初期条件 $X_0=x\in K$ を与えるとき，(4.2) の L^2-連続な発展解が存在して，一意的である。

(Proof) (i). 方程式 (4.2) に対応した確率発展方程式

$$X_t=T_t x+\int_0^t T_{t-s}G(X_s)dB_s \tag{4.40}$$

を考えよう。作用素 T_t は，$T_tK_1\subset K_1$ をみたし，T_t を K_1 上に制限したときの operator norm を $\|T_t\|_1$ とすると，

$$\|T_t x\|_1^2=\|T_t x\|^2+\|AT_t x\|^2$$

$$\leq \|T_t\|^2 \|x\|^2 + \|T_t\|^2 \|Ax\|^2 = \|T_t\|^2 \|x\|_1^2$$

より，$\|T_t\|_1 \leqq \|T_t\|$ である。$(T_t - T_s)x$ についても同様に考察して，$\{T_t\}$ は K_1 上の class (C_0) の semi-group とみなせる。そして，G の K_1 上への制限は $G : K_1 \to \sigma_2(H, K_1)$ と仮定しているので，方程式 (4.40) は，$x \in K_1$ のとき K_1 上の確率発展方程式となっている。そこで，Th. 4.4 を空間 K_1 上の方程式に適用して，(4.40) の K_1-valued 発展解 X_t が存在して

$$E\left[\int_0^t \|X_s\|_1^2 ds\right] < \infty, \quad \text{for } \forall t > 0,$$

が満たされている。この X_t を使って $\Phi(s) \equiv G(X_s)$ とおくと，$\Phi(s)$ は Lemma 4.3 の (ii') のための仮定を満たしており，又上の (4.40) 式より，X_t が (4.29) の形であることが分る。従って，Lemma 4.3 の (ii') により，X_t は (4.28) の強い解となるが，方程式 (4.28) は，再び $\Phi(s) = G(X_s)$ により書き直すと，方程式 (4.2) となる。こうして X_t は (4.2) の強い解となり，強い解の存在が言えた。

次に一意性を述べよう。strong solution X_t は Th. 4.5 により発展解でもある。そして，Cor. 4.1 により，その解は K-valued process としては L^2-連続である。一方 Th. 4.4 により L^2-連続な発展解は一意的である。こうして一意性も言えた。

(ii). はじめに準備をしておく。初期値 x 及び y に対して，Th. 4.4 の証明中の逐次近似法により構成された発展解を，それぞれ X_t 及び Y_t とする。このとき，次の不等式が言える。

$$E[\|X_t - Y_t\|^2] \leqq 2M^2 e^{2(\alpha + M^2L^2)t} \|x - y\|^2 \tag{4.41}$$

ここで，M 及び α は，$\|T_t\| \leqq Me^{\alpha t}$ なる定数であり，L は Lipschitz 定数である。

不等式 (4.41) を証明しよう。Th. 4.4 の証明における逐次近似の定義式より

Sem. on Probab.
Vol.53 1981年
P1-142

$$X_t^0 - Y_t^0 = T_t(x-y)$$

$$X_t^{n+1} - Y_t^{n+1} = T_t(x-y) + \int_0^t T_{t-s}\big(G(X_s^n) - G(Y_s^n)\big)\,dB_s,\ n=0,1,\cdots$$

である。このとき、もしも

$$E[\|X_t^n - Y_t^n\|^2] \leqq 2M^2 e^{2\alpha t}\|x-y\|^2 \sum_{k=0}^{n} \frac{(2M^2L^2t)^k}{k!},\ n=0,1,\cdots \quad (4.42)$$

が示されれば、この式で $n\to\infty$ として (4.41) が示される。そこで、(4.42) を帰納法により示そう。

$n=0$ のときに正しいことは明らか。

次に、$n \leqq m$ のときは正しかったと仮定しよう。このとき、次の評価式が得られる。

$$
\begin{aligned}
&E[\|X_t^{m+1} - Y_t^{m+1}\|^2] \\
&\leqq 2E[\|T_t(x-y)\|^2] + 2E\Big[\Big\|\int_0^t T_{t-s}\big(G(X_s^m) - G(Y_s^m)\big)\,dB_s\Big\|\Big] \\
&\leqq 2M^2 e^{2\alpha t}\|x-y\|^2 + 2\int_0^t E[\|T_{t-s}\|^2 \|G(X_s^m) - G(Y_s^m)\|_2^2]\,ds \\
&\leqq 2M^2 e^{2\alpha t}\|x-y\|^2 + 2\int_0^t M^2 e^{2\alpha(t-s)} L^2 E[\|X_s^m - Y_s^m\|_2^2]\,ds \\
&\leqq 2M^2 e^{2\alpha t}\|x-y\|^2 + 2M^2L^2 \int_0^t e^{2\alpha(t-s)} \Big\{2M^2 e^{2\alpha s}\|x-y\|^2 \sum_{k=0}^{m} \frac{(2M^2L^2s)^k}{k!}\Big\}\,ds \\
&= 2M^2 e^{2\alpha t}\|x-y\|^2 \Big\{1 + \sum_{k=0}^{m} \frac{(2M^2L^2t)^{k+1}}{(k+1)!}\Big\}
\end{aligned}
\quad (4.43)
$$

この (4.43) 式の最後の式は、(4.42) の右辺において、$n=m+1$ としたものに等しい。こうして、帰納法により (4.42) が示された。従って (4.41) が証明された。

さて、(ii) の証明に戻ろう。$x\in K_1$ のときには、(i) の証明で見たように、逐次近似により得られた発展解が strong solution でもあり、一意的な L^2-連続な発展解でもあった。

次に、$x\notin K_1$ の場合を見よう。x を初期値として逐次近似により得られる発展解を X_t とする。一方、K_1 は K で稠密な、点列 $\{y^j, j=1,2,\cdots\}\subset K_1$ を、$y^j\to x$ in K $(j\to\infty)$ とれる。そして、y^j を初期値とする逐次近似による発展解を Y_t^j とし

Sem. on Probab.
Vol.53 1981年
P1-142

よう。(i)の証明で見たように，Y_t^δ は (4.2) の strong solution であり，又，K-valued process としては，L^2−連続な発展解である。そして，(4.41) により

$$E[\|Y_t^\delta - X_t\|^2] \leqq 2M^2 e^{2(\alpha+M^2L^2)t}\|y^\delta - x\|^2, \ \delta=1,2,\cdots \qquad (4.44)$$

が成立している。

時刻 t を有限区間 [0,T] 上に制限する。$t_0 \in [0,T]$ を1つ固定し，$\varepsilon>0$ を任意にとる。(4.44) により十分大なる δ をとるとき

$$\sqrt{E[\|Y_t^\delta - X_t\|^2]} < \varepsilon/3 \qquad \text{for } {}^\forall t \in [0,T] \qquad (4.45)$$

となっている。Y_t^δ は L^2−連続であったから，$\delta>0$ を十分小にとれば

$$\sqrt{E[\|Y_t^\delta - Y_{t_0}^\delta\|^2]} < \varepsilon/3 \qquad \text{for } |t-t_0|<\delta \qquad (4.46)$$

となるようにできる。このとき，$L^2(\Omega\to K)$ におけるノルムの三角不等式と (4.45) 及び (4.46) により

$$\sqrt{E[\|X_t - X_{t_0}\|^2]} < \varepsilon \quad \text{for } |t-t_0|<\delta, \ t\in[0,T] \qquad (4.47)$$

である。ε は任意であったから，(4.47) 式は，X_t が $t=t_0$ において L^2−連続であることを示している。又，T も任意に大きくとれるから，X_t の L^2−連続性が示せた。

以上から，L^2−連続な発展解の存在が分った。ところで，L^2−連続な発展解の一意性はすでに Th.4.4 により示されている。こうして (ii) が証明された。 (Q.E.D.)

例1. ここで，Th.4.7 が適用できる例を1つ挙げておこう。$K=H$ であって，A が負定値な self-adjoint 作用素であって，A^{-1} が完全連続になっているとする。このとき，A の固有値を $\{-\lambda_n, n=1,2,\cdots\}$，$0<\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \cdots$，とし，$\{e_n\}$ を対応する固有ベクトルとする。そして，$\{e_n\}$ が c.o.n.s. となってい

Sem. on Probab.
Vol.53 1981年
P1-142

るものとする。

このとき，$G : K \to \sigma_2(H,K) \equiv \sigma_2(H)$ が

$$G(x)y = \sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k)(y, e_k) e_k \ , \quad x, y \in H = K \qquad (*)$$

で与えられているとしよう。$G(x)$ の Hilbert-Schmidt ノルムを計算すると，

$$\|G(x)\|^2_{\sigma_2(H)} = \sum_k \|G(x)e_k\|^2 = \sum (x, e_k)^2 = \|x\|^2$$

となっている。又，$x \in H_1 = K_1 = \mathcal{D}(A)$ のときには

$$\|G(x)\|^2_{\sigma_2(H,H_1)} = \sum_k \|G(x)e_k\|_1^2 = \sum (x, e_k)^2 \|e_k\|_1^2$$

$$= \sum_k (x, e_k)^2 (1+\lambda_k^2) = \|x\|^2 + \|Ax\|^2 = \|x\|_1^2$$

となる。こうして，Th. 4.7 が適用できる例になっていることが分った。

なおこの例は，§6で扱かう，より一般的な形の方程式の特別な場合になっている。

発展解の path の連続性について見よう。ここでは，Prohorov の定理の適用法，あるいは一般化，について考えてみよう。

H を可分な実 Hilbert 空間とし，$\{e_n\}$ を1つの c.o.n.s. とする。このとき，π_k を $\{e_1, \dots, e_k\}$ で張られる H の部分空間への projection とし，$\pi_k^\perp$ をその直交補空間への projection とする。次に，$[0,T]$，$0<T<\infty$，上で定義された H-valued な連続関数の全体からなる関数空間 $C([0,T], H)$ を考え，norm を $\sup_{0 \le t \le T} \|f(t)\|_H$ で与える。コンパクト性に関して，次の Lemma が成り立つ。

Lemma 4.4. (Ascoli-Arzela)　$C([0,T], H)$ 内の部分集合 M が相対コンパクト (precompact) であるための必要十分条件は，次の (i) (ii) (iii) が成立することである。

(i) $\sup_{f\in M}\|f(0)\|<\infty$.

(ii) 各 $t\in[0,T]$ を固定するごとに次式が成り立つ。

$$\lim_{k\to\infty}\sup_{f\in M}\|\pi_k^{\perp}f(t)\|=0。$$

(iii) 各 $t\in[0,T]$ を固定するごとに、$\forall\varepsilon>0$ に対して $\delta>0$ が存在して

$$\sup_{f\in M,\ |s-t|<\delta}\|f(s)-f(t)\|<\varepsilon$$

とできる。

<u>Remark 4.3.</u> 上の条件 (iii) は"同程度連続性"を意味しており、これと (i) より"一様有界性"が従がう。このことと条件 (ii) をあわせると、$M(t)=\{f(t)\in H,\ f\in M\}$ とおくとき、$M(t)$ が H の precompact 集合となる。又、有界区間 $[0,T]$ の compact 性により、条件 (iii) からは"同程度一様連続性"が従がう。

(Proof of Lemma 4.4) <u>必要性.</u> M が $C([0,T],H)$ 内 precompact より、$M(t)=\{f(t)\in H,\ f\in M\}$ は H 内 precompact となる。これより (i) (ii) が従がう。

M が precompact より全有界でもある。すなわち、$\forall\varepsilon>0$ に対して

$$M\subset\bigcup_{i=1}^{n}U(f_i,\varepsilon/3)\quad,\ U(f,\varepsilon)\text{ は }C([0,T],H)\text{ 内の }f\text{ の }\varepsilon\text{ 近傍},$$

となるように $f_i\in M,\ i=1,2,\dots,n$, がとれる。有限個故

$$^{\exists}\delta>0,\quad |s-t|<\delta,\ s,t\in[0,T]\Rightarrow\|f_i(s)-f_i(t)\|<\varepsilon/3,\ i=1,\dots,n$$

とできる。このとき、$\forall f\in M$ に対して $f\in U(f_i,\varepsilon/3)$ とすると、$|s-t|<\delta,\ s,t\in[0,T]$, のとき

$$\|f(s)-f(t)\|\leqq\|f(s)-f_i(s)\|+\|f_i(s)-f_i(t)\|+\|f_i(t)-f(t)\|$$
$$<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$$

となり (iii) が言えた。

十分性　(iii) より、各 t で、$\forall\varepsilon>0$ に対して $\exists\delta=\delta(t,\varepsilon)>0$

$$|s-t|<\delta,\ s,t\in[0,T] \Rightarrow \|f(s)-f(t)\|<\varepsilon/3\ ,\ f\in M \tag{4.48}$$

となっている。有界区間 $[0,T]$ の compact 性から $\exists t_1,\cdots,t_m$

$$[0,T]\subset\bigcup_{i=1}^{m} U(t_i,\delta_i),\quad \delta_i=\delta(t_i,\varepsilon) \tag{4.49}$$

とできる。各 $t\in[0,T]$ に対して、(i) と (4.48) と (4.49) により $M(t)$ は H 内の有界集合であることが分る。更に、条件 (ii) とあわせて、$M(t)$ は H 内の precompact set である。従って $M(t)$ は全有界になる。このことから、各 $M(t_i)$, $i=1,\cdots,m$, に対して $M(t_i)$ の covering $\{I_{ij},\ j=1,\cdots,n_i\}$ で

$$M(t_i)\subset\bigcup_{j=1}^{n_i} I_{ij},\quad \|I_{ij}\|\equiv\sup_{h,h'\in I_{ij}}\|h-h'\| < \varepsilon/3 \tag{4.50}$$

なるものがとれる。

M の 2つの要素 f,g に対して、$f\sim g$ (同値) を

$$f\sim g \Leftrightarrow \text{すべての } i,\ i=1,2,\cdots,m, \text{ について } f(t_i) \text{ と } g(t_i) \text{ が同一の } I_{ij} \text{ に入る} \tag{4.51}$$

と定義して、同値類に分ける。同値類の数は有限個なので、それに番号をつけて、M_k, $k=1,\cdots,l$, とする。

$$M=\sum_{k=1}^{l} M_k,\qquad l\leqq n_1\times\cdots\times n_m$$

である。

各 M_k から1つづつ要素をとり出し、f_k, $k=1,\cdots,l$, とおく。いま任意の $f\in M$ と任意の $s\in[0,T]$ をとり、$f\in M_{k_0}$, $s\in U(t_{i_0},\varepsilon/3)$, としよう。このとき M_k の定め方から、(4.50) より

$$\|f(t_i)-f_{k_0}(t_i)\|<\varepsilon/3,\qquad i=1,\cdots,m \tag{4.52}$$

となっている。(4.48) と (4.52) を使って

$$\|f(s)-f_{k_0}(s)\| \leq \|f(s)-f(t_{i_0})\| + \|f(t_{i_0})-f_{k_0}(t_{i_0})\| + \|f_{k_0}(t_{i_0})-f_{k_0}(s)\|$$
$$\leq \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$$

が出る。 こうして、

$$M \subset \bigcup_{k=1}^{l} U(f_k;\varepsilon)$$

が示され、Mの全有界性が分った。 これで、Mがprecompactなことが言えたことになる。 (Q.E.D.)

Th. 4.8. (Tightness) $\{P^{(n)}, n=1,2,\cdots\}$ を $C([0,T],H)$ 上の確率測度の列で、次の (i) ~ (iii) の条件を満たしているとする。

(i) $\lim_{a\to\infty} \sup_n P^{(n)}(\|f(0)\|>a)=0$

(ii) $\lim_{k\to\infty} \sup_n P^{(n)}(\sup_{0\leq t\leq T}\|\pi_k^{\perp}f(t)\|>\varepsilon)=0$

(iii) $\forall k$, $k=1,2,\cdots$ と $\forall\varepsilon>0$ に対して

$$\lim_{\delta\to 0+} \sup_n P^{(n)}\left[\sup_{|s-t|<\delta}\|\pi_k f(t)-\pi_k f(s)\|\geq\varepsilon\right]=0$$

以上の仮定の下で、$\{P^{(n)}\}$ は tight である。

(Proof) 示すべきことは、次の命題である。

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists M\subset C([0,T],H),\quad M:\text{compact}$$
$$P^{(n)}(M)>1-\varepsilon,\quad n=1,2,\cdots \tag{4.53}$$

そこで、$\varepsilon>0$ を1つ任意に固定したとして、(4.53)の満たすMの存在を示すことにする。 以下、Nは、$N=1,2,\cdots$と動くものとする。 各Nに対して、条件 (ii) より $\exists k_N$,

$$k\geq k_N のとき\quad \sup_n P^{(n)}\left(\sup_t\|\pi_k^{\perp}f(t)\|\geq\frac{1}{N}\right)<\frac{\varepsilon}{2^{N+2}} \tag{4.54}$$

Sem. on Probab.
Vol.53 1981年
P1-142

とできる。このをk_Nとめて，(iii)を使うと，$^\exists\delta=\delta(N)>0$，

$$\sup_n P^{(n)}\Big(\sup_{|s-t|<\delta(N)}\|\pi_{k_N}f(s)-\pi_{k_N}f(t)\|\geqq\frac{1}{N}\Big)\leqq\frac{\varepsilon}{2^{N+2}} \tag{4.55}$$

となる。いま

$$M_N\equiv\left\{f\in C([0,T],H)\ ;\ \begin{array}{l}\sup\limits_{0\leq t\leq T}\|\pi_{k_N}^{\perp}f(t)\|\leqq\frac{1}{N},\\ \sup\limits_{|s-t|<\delta(N)}\|\pi_{k_N}f(s)-\pi_{k_N}f(t)\|\leqq\frac{1}{N}\end{array}\right\}$$

とおくと，(4.54)及び(4.55)より

$$\inf_n P^{(n)}(M_N)\geqq1-\frac{\varepsilon}{2^{N+2}}-\frac{\varepsilon}{2^{N+2}}=1-\frac{\varepsilon}{2^{N+1}} \tag{4.56}$$

が成立する。そこで

$$M'\equiv\bigcap_{N=1}^{\infty}M_N$$

とおくと，次の評価式が成り立っている。

$$\inf_n P^{(n)}(M')>1-\varepsilon/2 \tag{4.57}$$

次に条件(i)を使って，aを十分大きくとって

$$\inf P^{(n)}(\|f(0)\|>a)<\frac{\varepsilon}{2} \tag{4.58}$$

となるようにして，

$$M''=\{f:\|f(0)\|\leqq a\},\qquad M\equiv M'\cap M''$$

とおく。すると Lemma 4.1 (Ascoli-Arzelà) により Mは precompact である。そして，(4.57)と(4.58)より

$$\inf_n P^{(n)}(M)>1-\varepsilon$$

となり，(4.53)が示された。 (Q.E.D.)

上の Th.4.7 の条件(i)〜(iii)が満たされるための十分条件と

Sem. on Probab.
Vol.53 1981年
P1-142

して、次の命題に述べるような条件がある。

Prop. 4.1.

(a) Th. 4.8 の条件 (ii) が成立するための1つの十分条件は次の式が成立することである。

$$\lim_{k\to\infty} \sup_n E^{(n)}\left[\sup_{0\le t\le T} \|\pi_k^{\perp} f(t)\|^2\right] = 0 \qquad (4.59)$$

ここで $E^{(n)}[\ ]$ は $P^{(n)}$ についての期待値を示す。

(b) Th. 4.8 の条件 (iii) が成立するための1つの十分条件は次の条件が成立することである。(Kolmogorov-Prohorov)

各 k, $k=1,2,\cdots$, に対して

$\exists \gamma\ge 0$, $\exists \alpha>1$, $\exists C$

$$\sup_n E^{(n)}\left[\|\pi_k f(s)-\pi_k f(t)\|^{\gamma}\right] \leqq C|t-s|^{\alpha} \qquad (4.60)$$

が成り立つ。(γ, α, C は k に依存してよい。)

(c) Th. 4.8 の条件 (i) が仮定されているとき、次の条件は (i) (iii) が成り立つための十分条件である。

$\exists \gamma\ge 0$, $\exists \alpha>1$, $\exists C$, $\forall k$, $k=1,2,\cdots$ に対して

$$\sup_n E^{(n)}\left[\|\pi_k f(s)-\pi_k f(t)\|^{\gamma}\right] \leqq C|t-s|^{\alpha} \qquad (4.61)$$

であって、更に、$\exists \{\tilde{C}_k,\ k=1,2,\cdots\}$, $\tilde{C}_k\to 0\ (k\to\infty)$ で

$$\sup_n E^{(n)}\left[\|\pi_k^{\perp} f(s)-\pi_k^{\perp} f(t)\|^{\gamma}\right] \leqq \tilde{C}_k|t-s|^{\alpha},\ k=1,2,\cdots \qquad (4.62)$$

(Proof) (a). Tchebychev の Lemma を使うことにより、容易に示せる。

(b) k を固定するごとの命題である点に注意すると、各々の k に対しては、有限次元の場合の Kolmogorov-Prohorov の定理そのものである。(Billingsley[1] P. 95, Th. 12.3 参照)

(c). (iii) が言えることは、(4.61) により (b) と同様で

Sem. on Probab.
Vol.53 1981年
P1-142

ある。有限次元の場合に "(4.60) ⇒ (iii)" なる命題を示すのと同様にして，仮定 (4.62) より

$$\forall\varepsilon>0,\ \forall\eta>0 \text{ に対して } \exists\delta_k>0,\ k=1,2,\cdots$$

$$\sup_n P^{(n)}\Big(\sup_{|t-s|<\delta_k}\|\pi_k^{-1}f(s)-\pi_k^{-1}f(t)\|\geq\varepsilon\Big)<\eta \qquad (4.63)$$

が示せるが，このとき，δ_k は $\hat{c}_k$ に依存して決まる。その依存の仕方は，$\hat{c}_k$ が小さければ，δ_k はある程度大にとれる。i.e. $\delta_0>0$ を与えたとき，$\hat{c}_k$ が十分小さくなるように k を大きくとれば，$\delta_k>\delta_0$ となるようにとれる。こうして，ある k_0 が存在して，

$$k\geq k_0 \text{ のとき } \sup_n P^{(n)}\Big(\sup_{|s-t|<\delta_0}\|\pi_k^{-1}f(s)-\pi_k^{-1}f(t)\|\geq\varepsilon\Big)<\eta \qquad (4.64)$$

が成立する。そこで，N を $N\delta_0>T$ となるようにとれば，

$$\sup_n P^{(n)}\Big(\sup_{0\leq s,t\leq T}\|\pi_k^{-1}f(s)-\pi_k^{-1}f(t)\|\geq N\varepsilon\Big)$$

$$\leq\sup_n P^{(n)}\Big(\sup_{|s-t|<\delta_0}\|\pi_k^{-1}f(s)-\pi_k^{-1}f(t)\|\geq\varepsilon\Big)<\eta. \qquad (4.65)$$

となる。(4.65) と仮定 (i) より (ii) が従がう。 (Q.E.D.)

上に述べた Th.4.8 ないしは Prop.4.1 は，ある H-valued process X_t の path の連続性をいうのに，連続性の分っている process $X_t^{(n)}$ の $n\to\infty$ なる極限として X_t をとらえ，X_t^n に対応する確率測度 $P^{(n)}$ の tightness を言うことにより X_t の連続性を言うのに使われる。

これとは別に，直接に path の連続性を言うための１つの判定法として Kolmogorov の criterion があるので，それを述べておこう。

<u>Th.4.9.</u> X_t を H-valued L^2-process とする。もしも，定数 $\alpha\geq0$，$\beta>1$，$C>0$ が存在して

Sem. on Probab.
Vol.53 1981年
P1-142

$$E\left[\|X_t - X_s\|^\alpha\right] \leqq C|t-s|^\beta \quad \text{for } \forall t,s \tag{4.66}$$

が満たされているならば，X_t は continuous version を持つ。

(Proof) 有限次元の場合と同様にできる。すなわち，(4.66) より，$\forall \varepsilon>0$, $\forall \eta>0$ に対して $\exists \delta>0$

$$P\left(\sup_{|t-s|<\delta}\|X_t - X_s\| \geqq \varepsilon\right) < \eta$$

とできる。これを使って，ある可算集合 $S\ (\subset [0,T])$ をとって，X_t は S 上では P-a.s. に連続となる。そこで，X_t の version $\widetilde{X}_t$ を

$$\widetilde{X}_t = \lim_{\substack{s\to t \\ s\in S}} X_s$$

により定義すると，この $\widetilde{X}_t$ が求めるものである。(詳しくは，Bensousan [1] 等を参照せよ。) (Q.E.D.)

X_t が Gaussian process の場合を考えよう。$X_t - X_s$ は H-valued Gaussian random variable 故 covariance operator $Q(t,s)$ が対応している。そこで，$Q(t,s)$ は H 上の対称で positive な nuclear operator で，

$$\mathrm{Cov}\left[(X_t - X_s, x), (X_t - X_s, y)\right] = (x, Q(t,s)y), \quad x,y\in H, \tag{4.67}$$

である。trace norm を $\|Q\|_1$ で示すことにする。

<u>Cor. 4.2.</u> X_t を平均連続な H-valued Gaussian process とする。このとき，定数 C により

$$\|Q(t,s)\|_1 \leqq C\,|t-s|$$

となっているならば，X_t は continuous version を持つ。

(Proof) 平均を 0 としておいても，連続性の議論においては

Sem. on Probab.
Vol.53 1981年
P1-142

一般性を失わない。そのとき, $\|Q(t,s)\|_1 = E[\|X_t - X_s\|^2]$ である。t と s を固定し, $\{e_n\}$ を $Q(t,x)$ の固有ベクトルから成る H の c.o.n.s. とする。又, $\{\lambda_n\}$ を対応する固有値の系とする。このとき $\|Q(t,s)\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n$ である。

$Y \equiv X_t - X_s$ とおき, 次の計算をする。

$$E[\|Y\|^4] = E[(\sum_n (Y,e_n)^2)^2]$$

$$= E[\sum_n (Y,e_n)^4 + \sum_{n\neq m}(Y,e_n)^2(Y,e_m)^2]$$

$$\leqq \sum_n E[(Y,e_n)^4] + \sum_{n\neq m}\sqrt{E[(Y,e_n)^4]}\sqrt{E[(Y,e_m)^4]}$$

$$= \left(\sum_n \sqrt{E[(Y,e_n)^4]}\right)^2 \tag{4.68}$$

次に, $E[(Y,e_n)^2] = (e_n, Q(t,s)e_n) = \lambda_n$ に注意して, 又, Gaussian であることより

$$\sum_n \sqrt{E[(Y,e_n)^4]} = \sum_n \sqrt{3(E[(Y,e_n)^2])^2}$$

$$= \sqrt{3}\sum_n E[(Y,e_n)^2] = \sqrt{3}\sum_n \lambda_n \tag{4.69}$$

をうる。(4.68) と (4.69) より次の不等式が分る。

$$E[\|Y\|^4] \leqq \left(\sqrt{3}\sum\lambda_n\right)^2 = \left(\sqrt{3}\,\|Q(t,s)\|_1\right)^2$$

$$= 3\|Q(t,s)\|_1^2 \leqq 3C^2|t-s|^2 \tag{4.70}$$

こうして, Th.4.9 の (4.66) 式が, $\alpha=4$, $\beta=2$ として示せたので, continuous version を持つ。 (Q.E.D.)

§5. Ornstein-Uhlenbeck process

可分な実Hilbert空間H上の次の方程式を考えよう。

$$dX_t = AX_t\,dt + dB_t, \quad X_0 = x \in H \tag{5.1}$$

ここで、§4におけると同様に、Aはclass (C_0) のsemi-group $\{T_t\}$ のgeneratorであり、B_t はH上のc.B.m.である。この方程式を、§4における方程式(4.2)と比較してみると、拡散項の係数 $G(x)$ が $G(x) \equiv I \in \sigma_2(H) = \sigma_2(H, H)$ であり、H上の方程式として見たときには、§4において行なった議論をそのまま適用することはできない。しかし、Hを含む、より広いHilbert空間Kを適当にとって、方程式(5.1)を、新しい空間K上の方程式と見直すことにより、§4で扱かった方程式のクラスに入るようにできる可能性がある。これが可能なとき、そのようにして得られる(5.1)の解をOrnstein-Uhlenbeck processと呼ぶ。

まず、Aがself-adjoint operatorで、$-A$ が正定値であり $(-A)^{-1}$ が正のHilbert-Schmidt作用素である場合を考えよう。さて、H上のc.B.m. B_t はProp.1.2により、適当なBanach空間V上のH-B.m.として実現されているが、その証明から分るように、空間VとしてHilbert-Schmidt作用素 $(-A)^{-1}$ を使って定義される新しい内積

$$(x, y)_{-1} \equiv ((-A)^{-1}x, (-A)^{-1}y)$$

によるHのcompletionであるHilbert空間 H_{-1} を採用できる。

方程式(5.1)は、この新しいHilbert空間 H_{-1} 上の方程式として見直すことにし、次のように書こう。

$$dX_t = \bar{A}X_t\,dt + I\,dB_t, \quad X_0 = x \in H_{-1} \tag{5.2}$$

ここで、$\bar{A}$ は下に説明するAの拡張であり、$I = I_{H \to H_{-1}}$ は、$H \subset H_{-1}$ におけるHから H_{-1} への恒等写像である。このとき、

Sem. on Probab.
Vol.53 1981年
P1-142

$I \in \sigma_2(H, H_{-1})$ である。実際，I の Hilbert-Schmidt norm は次のように計算される。A が self-adjoint で，$(-A)^{-1}$ は正定値 Hilbert-Schmidt 型であるから，$-A$ は，正の実数からなる固有値の系 $0<\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \cdots$，と固有ベクトルの系 $\{e_n\}$ を持ち，

$$\|-A^{-1}\|^2_{\sigma_2(H,H)} = \sum_n \frac{1}{\lambda_n^2} < \infty$$

となっている。$\{e_n\}$ は H の c.o.n.s. であるようにとれているとしてよい。このとき，$I: H \to H_{-1}$ の Hilbert-Schmidt norm は

$$\|I\|^2_{\sigma_2(H,H_{-1})} = \sum_n \|e_n\|^2_{-1} = \sum \frac{1}{\lambda_n^2} = \|A^{-1}\|^2_{\sigma_2(H,H_{-1})} \quad (5.3)$$

となる。

また，作用素 $\bar{A}$ は，A の次のような拡張である。A は H 上の作用素であって

$$H_1 \equiv \mathcal{D}(A) = \{x \in H \,;\, \sum \lambda_n^2 (x, e_n)^2 < \infty\} = A^{-1}(H)$$

であるが，$H_1 \subset H \subset H_{-1}$ において，A を定義域が H_1 であるような H_{-1} 上の作用素と見る。こう見たときの A の閉拡大を $\bar{A}$ とおくと，$\bar{A}$ は $\mathcal{D}(\bar{A}) = H$ なる self-adjoint operator であって $\{-\lambda_n\}$ および $\{\lambda_n e_n\}$ がそれぞれ $\bar{A}$ の固有値と固有ベクトルの系であり，しかも $\{\lambda_n e_n\}$ は H_{-1} の c.o.n.s. になっている。

以上のことから，方程式 (5.2) は H_{-1} 上の確率発展方程式として見るとき，§4 で行なった議論を適用できる形になっており，§4 における Hilbert 空間 K に当るものが，ここでは H_{-1} であり，K_1 に当るものが $K_1 = \mathcal{D}(\bar{A}) = H$ であることも分る。ただし，$I \in \sigma_2(H, H_{-1})$ であるが，$I \notin \sigma_2(H) = \sigma_2(H, H)$ であるから，Th. 4.7 等は，そのままでは適用できないことを注意しておこう。

方程式 (5.2) の発展解について調べてみよう。発展解は

$$X_t = T_t x + \int_0^t T_{t-s}\, dB_s \quad (5.4)$$

Sem. on Probab.
Vol.53 1981年
P1-142

で与えられる。ここで、$\{T_t\}$ も H_{-1} 上の semi-group に拡張されているが、同じ記号のまゝ使うことにする。

X_t の L^2-連続性を言おう。Remark 4.1 により、$u>t$ として

$$\int_0^t \|T_{u-s}-T_{t-s}\|_2^2\, ds \longrightarrow 0 \qquad (|u-t|\to 0) \tag{5.5}$$

を言えばよい。Aの固有ベクトルからなるHのc.o.n.s. $\{e_n\}$ を使って計算すると、

$$\|T_{u-s}-T_{t-s}\|_2^2 = \sum_n \|(T_{u-s}-T_{t-s})e_n\|_{-1}^2$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{-\lambda_n(u-s)} - e^{-\lambda_n(t-s)}\right)^2 \frac{1}{\lambda_n^2} \tag{5.6}$$

より

$$\int_0^t \|T_{u-s}-T_{t-s}\|_2^2\, ds = \sum_n \frac{1}{\lambda_n^2}\frac{1}{2\lambda_n}\left\{\left(1-e^{-\lambda_n(u-t)}\right)^2 - \left(e^{-\lambda_n u}-e^{-\lambda_n t}\right)^2\right\}$$

$$\leqq \sum_n \frac{1}{2\lambda_n^3}\left(1-e^{-\lambda_n(u-t)}\right)^2 \leqq \sum_n \frac{1}{2\lambda_n^3}\left(1-e^{-\lambda_n(u-t)}\right)$$

$$\leqq \sum_n \frac{1}{2\lambda_n^3}\lambda_n|u-t| = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2}\right)|u-t| \tag{5.7}$$

をうる。これより (5.5) が言えるので、H_{-1}-valued process として X_t は L^2-連続であることが分った。

更に、X_t の path の連続性についても調べることができる。まず、(5.4) において、$T_t x$ は連続であるから、確率積分の項の連続性を言えば十分である。(注意. 確率積分の被積分関数の中に t が含まれているので、確率積分の項は martingale ではなく、従って連続性は自明でない。)

$$Y_t \equiv \int_0^t T_{t-s}\, dB_s$$

とおこう。Y_t は Gaussian であるから、Cor. 4.2 により、

$$\|Q(t,u)\|_1 = E\left[\|Y_u - Y_t\|_{-1}^2\right] \leqq c\,|u-t| \tag{5.8}$$

なる評価ができれば十分である。(5.8) が言えることを示そう。$u>t$ として次の計算ができる。

$$E\left[\|Y_u-Y_t\|_{-1}^2\right]=E\left[\left\|\int_0^u T_{u-s}\,dB_s-\int_0^t T_{t-s}\,dB_s\right\|^2\right]$$

$$=E\left[\left\|\int_0^t (T_{u-s}-T_{t-s})\,dB_s+\int_t^u T_{u-s}\,dB_s\right\|^2\right]$$

$$\leqq 2\left\{E\left[\left\|\int_0^t (T_{u-s}-T_{t-s})\,dB_s\right\|^2\right]+E\left[\left\|\int_t^u T_{u-s}\,dB_s\right\|^2\right]\right\}$$

$$=2\left\{\int_0^t \|T_{u-s}-T_{t-s}\|_2^2\,ds+\int_t^u \|T_{u-s}\|_2^2\,ds\right\} \qquad (5.9)$$

最後の式の第一項は (5.7) で見たものである。第2項についても前と同様の計算ができて

$$\int_t^u \|T_{u-s}\|_2^2\,ds=\frac{1}{2}\sum_n \frac{1}{\lambda_n^3}\left(1-e^{-2\lambda_n(u-t)}\right)$$

$$\leqq \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2}\right)|u-t| \qquad (5.10)$$

となる。(5.9) に (5.7) と (5.10) の結果を使って (5.8) の形の評価ができたので、path の連続性が言えた。

以上をまとめて、次の定理になる。

Th. 5.1. A が負定値 self-adjoint operator で、A^{-1} が Hilbert-Schmidt 型のとき、方程式 (5.1) の解である Ornstein-Uhlenbeck process は H_{-1}-valued process として L^2-連続であり、path の連続性も成り立つ。ただし、方程式 (5.1) を (5.2) と同一視して解釈している。

(5.4) によって与えられる X_t は、一般には H_{-1}-valued であって H-valued ではない。しかし、適当な条件の下では、初期条件が $X_0=x\in H$ のとき X_t は H-valued process となる可能性はある。その条件について調べてみる。

Th. 5.2. Aを $-A$ が正定値な self-adjoint 作用素で、A^{-1} が完全連続作用素となるものとする。このとき、方程式 (5.1) が H 内に発展解を持つための必要十分条件は、A^{-1} が nuclear operator であることである。

(Proof) 必要性。初期値 $x \in H$ に対して (5.1) の発展解 X_t が H内に存在したとする。A^{-1} が完全連続なことから、A の固有値 $\{-\lambda_n\}$, $0<\lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots$ と固有ベクトル $\{e_n\}$ の系があり、$\{e_n\}$ は H の c.o.n.s. になるようにとれる。方程式 (5.1) を H_{-1} 上の方程式とみて Th. 4.1 を使うと、X_t は (5.1) の弱い解でもある。従って

$$x_n(t) = (X_t, e_n) \quad , \quad n=1,2,\cdots \tag{5.11}$$

とおくと、$x_n(t)$ は次の方程式をみたす。

$$dx_n(t) = -\lambda_n x_n(t)\,dt + dB_t(e_n), \qquad x_n(0)=(x, e_n) \tag{5.12}$$

この方程式に、1次元のときの Itô-formula を使って

$$d(x_n^2(t)) = (-2\lambda_n x_n^2(t)+1)\,dt + 2x_n(t)\,dB_t(e_n) \tag{5.13}$$

がえられる。期待値をとって

$$\frac{dE[x_n^2(t)]}{dt} = -2\lambda_n E[x_n^2(t)] + 1 \tag{5.14}$$

となり、これを解いて

$$E[x_n^2(t)] = e^{-2\lambda_n t} E[x_n^2(0)] + \frac{1}{2\lambda_n}(1-e^{-2\lambda_n t}) \tag{5.15}$$

とうる。X_t が H-valued であると仮定したので、

$$\sum_{n=1}^{\infty} E[x_n^2(t)] = E[\|X_t\|^2] < \infty \tag{5.16}$$

であるが、(5.16) の収束のためには、(5.15) より

$$\sum_n \frac{1}{\lambda_n} < \infty \tag{5.17}$$

が必要十分条件であることが分る。 こうして，A^{-1} が nuclear operator であることになった。

十分性。 A^{-1} が nuclear operator であったとしよう。 そのときは，T_t についても次の評価ができる。

$$\|T_t\|^2_{\sigma_2(H)} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2\lambda_n t} < \infty$$

$$\int_0^t \|T_{t-s}\|^2_{\sigma_2(H)} ds = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\lambda_n}\left(1-e^{-2\lambda_n t}\right) \leqq \frac{1}{2}\|A^{-1}\|_1 < \infty \qquad (5.18)$$

これより，(5.4) で与えられる発展解が，$x \in H$ のときには，H-valued であることが分る。 (Q.E.D.)

以下，A^{-1} が nuclear である場合の H-valued process X_t について見ることにする。 X_t は発展解としていたが，実は strong solution でもあることが言える。

<u>Cor. 5.1.</u> 負定値な self-adjoint operator A が，A^{-1} は nuclear operator，となっているとき，初期値が $X_0 = x \in H$ である (5.1) の発展解 X_t は (5.1) (正確に言うと，(5.2)) の strong solution である。

(Proof) X_t は発展解であるから，Th. 4.1 により (5.2) の weak solution でもある。 従って，$\forall y \in H = \mathcal{D}(\bar{A})$ に対して

$$(y, X_t)_{-1} = (y, x)_{-1} + \int_0^t (\bar{A}y, X_s)_{-1} ds + (y, \int_0^t I\, dB_s)_{-1}$$

$$= (y, x)_{-1} + (y, \int_0^t \bar{A}X_s ds)_{-1} + (y, B_t)_{-1} \qquad (5.19)$$

が成り立っている。 H_{-1} は可分であり，H は H_{-1} で稠密であるから，(5.19) より，H_{-1} の要素として

$$X_t = x + \int_0^t \bar{A}X_s ds + \int_0^t I\, dB_s \qquad (P\text{-a.s.}) \qquad (5.20)$$

となっている。 こうして，結論をえた。 (Q.E.D.)

Sem. on Probab.
Vol.53 1981年
P1-142

Remark 5.1. 上の等式 (5.20) において，右辺の第2項及び第3項はいずれも H の要素ではない。上の結果は，その和は H 内に入っていることを意味している。

上で得られた strong solution の連続性について見よう。

Th.5.3. A を負定値な self-adjoint operator で，A^{-1} が nuclear であるものとする。このとき，方程式 (5.2) の strong solution X_t は，H-valued process として L^2-連続である。

(Proof) L^2-連続性を言うには，Remark 4.1 により，$u>t$ として

$$\int_0^t \| T_{u-s} - T_{t-s} \|^2_{\sigma_2(H)} ds \longrightarrow 0 \quad (|u-t| \to 0) \tag{5.21}$$

を言うことが必要十分であった。ところで，A^{-1} が Hilbert-Schmidt type のときに (5.7) を導いたのと同様の計算により，A^{-1} が nuclear のときには次の不等式がえられる。

$$\int_0^t \| T_{u-s} - T_{t-s} \|^2_{\sigma_2(H)} ds \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\lambda_n} (1 - e^{-\lambda_n (u-t)}) \tag{5.22}$$

この右辺は正項級数であって

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2\lambda_n}(1-e^{-\lambda_n(u-t)}) \downarrow 0 \quad (\text{as } (u-t) \downarrow 0) \\ \dfrac{1}{2\lambda_n}(1-e^{-\lambda_n(u-t)}) \leqq \dfrac{1}{2\lambda_n}, \quad \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\lambda_n} < \infty \end{cases} \tag{5.23}$$

より，$(u-t) \downarrow 0$ のとき 0 に収束することが分る。こうして (5.21) が言えたので，L^2-連続性が分った。 (Q.E.D.)

path の連続性については，A^{-1} が Hilbert-Schmidt 型のときに H_1-space 上で見たのと同様のことを H 上で議論することはできない。というのは，A^{-1} が nuclear のとき，H-norm の評価については (5.22) までは言えるが，そこからは

Sem. on Probab.
Vol.53 1981年
P1-142

$$\frac{1}{2\lambda_n}\left(1-e^{-\lambda_n(u-t)}\right) \leq |u-t|$$

以上の評価ができず，H_{-1} 上で見つけ出した式(5.10)に当る式が H 上では言えない。

そこで，Th. 4.8 を適用する方法で試みてみる。上で使ったと同じ記号を使って，$\{-\lambda_n\}$ をAの固有値，$\{e_n\}$ をAの固有ベクトルからなるHのc.o.n.s.とし，解 X_t に対して

$$X_n(t) = \sum_{k=1}^{n}(X_t, e_n)e_n$$

とおく。$X_n(t)$ は $\pi_n H$（注、π_n は $\{e_1, \cdots, e_n\}$ で張られる subspace への射影。§4で使った記号と同じものである。）上の process で、(5.12)より n-次元の Ornstein-Uhlenbeck process であるから連続な path を持っている。従って $X_n(t)$ により $C([0,T], H)$ 上の確率測度 $P^{(n)}$ が定まる。$\{P^{(n)}\}$ の tightness が言えれば，X_t の path の連続性が言えたことになる。

Th. 4.8 の条件(i), (ii), (iii)を，上の $\{P^{(n)}\}$ について検討してみる。

(i)は自明である。

(iii)は，k を1つとめたとき，$\pi_k P^{(n)} = P^{(k)}$ if $n \geq k$，より明らかである。

従って、あと示すべきは条件(ii)の成立である。条件(ii)は，今の場合，

$$x_j(t) = (X_t, e_j) \qquad j=1,2,\cdots$$

とおくと，次の条件と同値である。

$$P\left(\sup_{0\leq t\leq T}\sum_{j=k+1}^{\infty} x_j^2(t) > \varepsilon\right) \longrightarrow 0 \quad (\text{as } k\to\infty) \qquad (5.24)$$

(5.24)のためには次の条件が十分である。

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sup_{0\leq t\leq T} x_j^2(t)\right) < \infty \qquad P\text{-a.s.} \qquad (5.25)$$

D. Dawson は，(5.25) が成立するための1つの十分条件を求めて、次の結果を示している。

Th. 5.4. (D. Dawson [1]) Aを負定値な self-adjoint operator で，A^{-1} が nuclear なるものとする。Aの固有値 $\{-\lambda_n\}$ が定数 c, d, δ によって

$$c\,k^{1+\delta} \leqq \lambda_k \leqq d\,k^{1+\delta} \tag{5.26}$$

なる条件を満たしているならば，方程式 (5.1) の strong solution は，H-valued process として，連続な path を持っている。

以上の議論から分るように，Hilbert 空間 H 上の Ornstein-Uhlenbeck process は，その drift 項の作用素 A によって，解がのっている空間が H であったり，又は H 内には解は存在せず，より広い空間を考える必要があったりする。又，H より狭い空間に解が求まる場合もありうる。

$H=L^2([0,1])$ なる空間のときには，H の要素を string とみなし，Ornstein-Uhlenbeck process は string の random な運動を記述していると考えられる。そして，$A=-\sqrt{-\Delta}$ の場合については Y. Miyahara [3] で，H を広げた空間上でより詳しい議論がなされており，又，$A=\Delta$ の場合には，Funaki [1] により，解が $C([0,1])$ 内で求まることが示されている。

これまで，考える方程式は (5.1) の形のものを見てきたが，これを少し拡張した方程式

$$dX_t = AX_t\,dt + B\,dB_t, \qquad X_0 = x \in H, \tag{5.27}$$

もしばしば考えられる。ここで B は H 上の有界な線型作用素である。このとき

$$\tilde{B}_t \equiv \int_0^t B\,dB_s$$

とおくと，$\tilde{B}_t$ は $A^{-1}B^*BA^{-1}$ を covariance operator に持つ H_{-1}-

Sem. on Probab.
Vol.53 1981年
P1-142

valued Gaussian process である。特に B が Hilbert-Schmidt type のときには $\widehat{B}_t$ は H-valued process となり，H上で見るときには $C \equiv B^*B$ を covariance operator に持つ H-valued process となっている。このとき，$\widehat{B}_t$ は，しばしば covariance operator C の H 上の Brownian motion と呼ばれ，c. B. m. B_t の代りに，この $\widehat{B}_t$ を出発点にした議論も多くなされている。

Sem. on Probab.
Vol.53 1981年
P1-142

§6. 双一次型式の確率発展方程式

前節では, drift term が線型で, diffusion term の係数が定作用素である方程式を扱ったが, 本節では diffusion term の係数も線型である方程式を扱かう。 すなわち, 可分な実 Hilbert 空間 K 上の次の方程式である。

$$dX_t = AX_t dt + BX_t dB_t \ , \quad X_0 = x \in K \tag{6.1}$$

ここで, A は class (C_0) の semi-group $\{T_t\}$ の generator となっている closed operator であり, B は $B: x \to Bx \in \sigma_2(H, K)$, $x \in K$, なる線型作用素であり, B_t は H 上の c.B.m. である。

方程式 (6.1) の確率積分の項は, 積分型で書くと $\int_0^t BX_s dB_s$ という形をしており, これは X_t と B_t について共に linear と見れるので, 双一次型式 (bilinear form) と呼ぶことができ, このことから, 方程式もそのように呼ぶ。

2つの作用素 A と B に、次の仮定をおいて議論することにしよう。

Assumption 1) $B: K \to \sigma_2(H, K)$ は有界な線型写像である。

Assumption 2) $\{T_t\}$ は B と可換である。 すなわち

$$T_t((Bx)h) = B(T_t x)h \quad \text{for } \forall x \in K, \ \forall h \in H \tag{6.2}$$

が成立している。

Assumption 1) があるとき, Th. 4.4 により方程式 (6.1) の発展解の存在は保障されている。 解の一意性や連続性については, §4 の結果を直接には使えないが, 次に示すように、Assumption 2) があるときには解の連続性を証明することができる。

方程式 (6.1) の発展解を X_t とおこう。

$$X_t = T_t x + \int_0^t T_{t-s} BX_s dB_s$$

の右辺に, 再度この式を代入して、Assumption 2) を使い

Sem. on Probab.
Vol.53 1981年
P1-142

$$X_t = T_t x + \int_0^t T_{t-s_1} B\Big(T_{s_1} x + \int_0^{s_1} T_{s_1-s_2} B X_{s_2}\, dB_{s_2}\Big) dB_{s_1}$$

$$= T_t\Big(x + \int_0^t Bx\, dB_{s_1}\Big) + \int_0^t B\Big(\int_0^{s_1} B\, T_{t-s_2} X_{s_2}\, dB_{s_2}\Big) dB_{s_1} \tag{6.3}$$

をうる。これを繰返して

$$X_t = T_t(x + Y_t^1 + \cdots + Y_t^n) + Z_t^n \tag{6.4}$$

ただし

$$Y_t^n = \int_0^t B\Big(\int_0^{s} B\Big(\int_0^{s_2} \cdots \Big(\int_0^{s_{n-1}} Bx\, dB_{s_n}\Big) \cdots \Big) dB_{s_1}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{6.5}$$

$$Z_t^n = \int_0^t B\Big(\int_0^{s_1} B\Big(\cdots\Big(\int_0^{s_n} B\, T_{t-s_{n+1}} x\, dB_{s_{n+1}}\Big) \cdots \Big) dB_{s_1} \tag{6.6}$$

をうる。このとき，Bが有界と仮定されているので，Cを

$$\|Bx\|_{\sigma_2(H,K)} \leq C\|x\|$$

なる定数として，帰納的に次の評価ができる。

$$E[\|Y_t^n\|^2] \leq \frac{(Ct)^n}{n!}\|x\|^2 \tag{6.7}$$

$$E[\|Z_t^n\|^2] \leq \frac{(C\cdot t)^{n+1}}{(n+1)!} M^2 e^{2\alpha t}\|x\|^2 \tag{6.8}$$

ここで，M 及びαは，前と同じく，$\|T_t\| \leq M e^{\alpha t}$ なる定数である。

(6.7)より，$\sum_{n=1}^{\infty} Y_t^n$ は，tをとめたごとには $L^2(\Omega \to K)$ 内で収束しており，又，tも変数と見たときには，$L^2([0,T]\times\Omega \to K)$ 内で収束していることが分る。又，Z_t^n は，$n\to\infty$ としたとき，(6.8)により L^2-sense で 0に収束している。

こうして

$$Y_t \equiv x + \sum_{n=1}^{\infty} Y_t^n \tag{6.9}$$

とおくとき，(6.4)より，次式が分る。

$$X_t = T_t Y_t \tag{6.10}$$

さて，(6.9) 式における各 Y_t^n は (6.5) より各々確率積分で与えられており，K-valued continuous martingale である。Y_t はその極限であるから，Prop. 1.4 により K-valued continuous martingale である。X_t の連続性は次の評価式

$$\|X_u-X_t\| = \|T_uY_u - T_tY_t\|$$
$$\leq \|T_uY_u - T_uY_t\| + \|T_uY_t - T_tY_t\|$$
$$\leq M e^{\alpha T}\|Y_u-Y_t\| + \|(T_u-T_t)Y_t\| \qquad (6.11)$$

において，$u\to t$ のとき，第2項は，semi-group $\{T_t\}$ の強連続性により 0 に収束し，第1項は上に見たことより 0 に収束することから分る。

また，上の議論を振り返ってみると，方程式 (6.1) の発展解 X_t があったとすると，(6.5) と (6.9) を使って (6.10) と表現されていることになり，解の一意性が示されたことにもなっている。

上の Assumption 1), 2) の上に，更に次の仮定をおこう。

Assumption 1′) B の $K_1=\mathcal{D}(A)$ 上への制限は，K_1 から $\sigma_2(H,K_1)$ への有界な線型写像である。

この仮定のあるときには，Th. 4.7 が適用できて，方程式 (6.1) は，一意的な L^2-連続な発展解を持ち，さらに初期値 x が，$x\in K_1$ のときには strong solution を持つことが分る。又，$x\in K_1$ のとき $T_tx\in K_1$ であり $\|T_t\|_1 \leq \|T_t\|$ (Th. 4.7 の証明のはじめの部分を見よ) であって，さらに

$$\|T_ux-T_tx\|_1^2 = \|T_ux-T_tx\|^2 + \|T_uAx + T_tAx\|^2 \qquad (6.12)$$

より，$\{T_t\}$ は K_1 上の semi-group として強連続であることが分る。

こうして，Assumption 1′) と 2) があるとき，Assumption 1), 2) の下で K 上の方程式 (6.1) に対して行なったと同じ議論を，方程式 (6.1) を K_1 上の方程式とみて，K_1 上で平行して行なうこと

ができる。その結果、$x \in K_1$ のときの (6.1) の発展解は、K_1-norm の意味で連続な解であることになる。

以上をまとめて、次の定理が得られる。

Th. 6.1. (i) Assumption 1), 2) の下で、方程式 (6.1) の発展解が一意的に定まり、連続な path を持つ。

(ii) Assumption 1), 2) の上に、更に 1′) があるとき、初期値 x が K_1 内にあるならば、方程式 (6.1) は一意的な strong solution を持ち、その解は K_1-norm で見ても連続な path を持つ。

上の Assumption 1), 2), 1′) を満たしている A, B の例を挙げておこう (A. Shimizu [2] 参照)。

A を非負定値な self-adjoint operator とし、そのスペクトル分解で

$$A = \int_0^{\infty} -\lambda \, dE_\lambda \tag{6.13}$$

とする。又、B は、$[0, \infty)$ から H への有界な連続写像 $F(\lambda)$ により、

$$Bx = \int_0^{\infty} F(\lambda) \, dE_\lambda x, \quad x \in K \tag{6.14}$$

で与えられているものとする。ここで、$Bx \in \sigma_2(H, K)$ であるが、(6.14) 式の意味は、Bx が

$$(Bx)h = \int_0^{\infty} (F(\lambda), h)_H \, dE_\lambda x, \quad h \in H \tag{6.14′}$$

なる作用素であるということである。

Prop. 6.1. A 及び B がそれぞれ (6.13) 及び (6.14) で与えられているとき、Assumption 1), 1′), 2) が満たされている。

(Proof) 上の定義より、Bx は H から K への線型写像である。

Sem. on Probab.
Vol.53 1981年
P1-142

Bx の Hilbert-Schmidt norm を計算してみよう。$\{e_n\}$を H の1つの c.o.n.s. とし，C_1 を $\|F(\lambda)\|_H \leqq C_1$ なる定数として.

$$\|Bx\|^2_{\sigma_2(H,K)} = \sum_n \|(Bx)e_n\|_K^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty (F(\lambda), e_n)_H^2 \, d\|E_\lambda x\|^2$$

$$= \int_0^\infty \|F(\lambda)\|_H^2 \, d\|E_\lambda x\|^2 \leqq C_1^2 \|x\|^2 \qquad (6.15)$$

となる。これより $Bx \in \sigma_2(H, K)$ であって，$B : K \to \sigma_2(H, K)$ なる写像のノルムも $\|B\| \leqq C_1$ であることが分る。これで，Assumption 1) が言えた。

A が (6.13) の形をしているので，T_t は

$$T_t x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} dE_\lambda x, \quad x \in K \qquad (6.16)$$

で与えられており，これと B との可換性が分る。こうして，Assumption 2) が言えた。又，(6.13) と (6.14) の表現より，A と B も可換である。

次に $x \in K_1$ とするとき，

$$\|(Bx)h\|_1^2 = \|(Bx)h\|^2 + \|A(Bx)h\|^2$$

$$= \int_0^\infty (F(\lambda), h)_H^2 \, d\|E_\lambda x\|^2 + \int_0^\infty \lambda^2 (F(\lambda), h)_H^2 \, d\|E_\lambda x\|^2$$

$$\leqq C_1^2 \|h\|_H^2 \left(\|x\|^2 + \int_0^\infty \lambda^2 \, d\|E_\lambda x\|^2 \right)$$

$$= C_1^2 \|h\|_H^2 \|x\|_1^2 \qquad (6.17)$$

となり，$Bx : H \to K_1$，となっていることが分った。さらに，Bx の Hilbert-Schmidt normを計算してみると

$$\|Bx\|^2_{\sigma_2(H,K_1)} = \sum_n \|(Bx)e_n\|_1^2$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \|(Bx)e_n\|^2 + \sum_n \|A(Bx)e_n\|^2$$

$$= \int_0^\infty \|F(\lambda)\|_H^2 \, d\|E_\lambda x\|^2 + \int_0^\infty \lambda^2 \|F(\lambda)\|_H^2 \, d\|E_\lambda x\|^2$$

Sem. on Probab.
Vol.53 1981年
P1-142

$$\leq C_1^2(\|x\|^2 + \|Ax\|^2) = C_1^2 \|x\|_1^2 \qquad (6.18)$$

となり，これより Assumption 1′) が言える。 (Q.E.D.)

上の命題により，A，B が (6.13) 及び (6.14) で与えられているとき，Th. 6.1 が適用できることになる。なお，A. Shimizu [2] では，B が

$$(Bx)h = \sum_{k=1}^{\infty} (h, e_k) B_k x, \qquad B_k x = \int_0^{\infty} f_k(\lambda)\, dE_\lambda$$

の型に表現できる場合を論じているが，この形は，(6.14) の表現から，$f_k(\lambda) = (F(\lambda), e_k)_H$ とおいて書き直したものであることを注意しておこう。さらに，A. Shimizu は解の explicite な表現を導き，B が非有界（ただし，f_k には条件がつく）な場合も扱かっている。解の explicite な表現については，後に本稿の §8 でも触れる。

ここで，§4 の Th. 4.7 の下で与えた例（Th. 4.7 が適用できる場合の1例）の係数 A 及び $G(x)$ が，(6.13) 及び (6.14) の形に表現できることを注意しておこう。実際，E_λ 及び $F(\lambda)$ を，

$$E_\lambda x = \sum_{\lambda_k \leq \lambda} (x, e_k) e_k,$$

$$F(\lambda) = \begin{cases} e_k & \text{if } \lambda = \lambda_k, \\ \text{その他の点では，} F(\lambda) \text{ が連続で有界になるようにする。} \end{cases}$$

と取ればよい。ここで，$\{\lambda_k\}$ と $\{e_k\}$ は $-A$ の固有値と固有ベクトルである．

次に興味のある双一次型式の形をした方程式としては，Bx がある関数空間における積の作用素である場合である。次のような場合を考えよう。D を R^d 内の領域とし，$H = L^2(D)$ とおく。このとき，$X \in H$ による積の作用素を $X\cdot$ で示すことにする。すなわち，作用素 $X\cdot$ とは

Sem. on Probab.
Vol.53 1981年
P1-142

$$(X\cdot h)(x) = X(x)h(x), \quad h\in H, \quad x\in D$$

により定義される作用素で，その定義域は

$$\mathcal{D}(X\cdot) = \{h\in H\,;\, X(x)h(x)\in H\} \supset L^\infty(D)$$

である。

$H = L^2(D)$ 上の方程式

$$dX_t = AX_t dt + X_t\cdot dB_t, \qquad X_0 = x\in H \tag{6.19}$$

を考えよう。この方程式を，§4の方程式(4.2)において，$G(X) = X\cdot$ なる場合とみることはできるが，作用素 $X\cdot$ は H 上の有界な線型作用素ではなく、ましてや Hilbert-Schmidt type ではないので，§4における議論を適用することはできない。

方程式(6.19)を扱かえるようにする方法は2つ考えられる。1つは，空間 H を広げた空間を考え，そこで解を考えることである。しかし，§5の場合と異なり，のちに見るように，今の場合この方法はうまくいかない。H を広げるよりは，むしろ，作用素 $X\cdot$ の modifier を考える方が良いように思える。

2番目に考えられる方法は，作用素 A が強い安定性の条件をみたしており，そのために

$$\int_0^t T_{t-s}X_s\cdot dB_s$$

が意味を持つような場合に限定して扱かうことである。

いま，A^{-1} が Hilbert-Schmidt 型になっているとしよう。$-A$ の固有値を $\{\lambda_n\}$, $0<\lambda_1\leq\lambda_2\leq\cdots$, 対応する固有ベクトルからなる H の c.o.n.s. を $\{e_n\}$ とし，$|e_n(x)|\leq r$, $x\in D$, r はある定数，となっているとする。このとき，$X\cdot e_n$ は well-defined である。さらに，$T_tX\cdot$ の Hilbert-Schmidt norm を計算してみると

$$\|T_tX\cdot\|^2_{\sigma_2(H)} = \sum_n \|T_tX\cdot e_n\|^2$$
$$= \sum_n \Big\{\Big\|\sum_{m=1}^\infty e^{-\lambda_m t}(X\cdot e_n, e_m)e_m\Big\|^2\Big\}$$

Sem. on Probab.
Vol.53 1981年
P1-142

$$= \sum_{n,m=1}^{\infty} e^{-2\lambda_m t}(X\cdot e_n, e_m)^2 = \sum_{n,m} e^{-2\lambda_m t}(X\cdot e_m, e_n)^2$$

$$= \sum_m e^{-2\lambda_m t}\|X\cdot e_m\|^2 \leqq \gamma^2\|X\|^2 \sum_m e^{-2\lambda_m t} \qquad (6.20)$$

となっている。ここで，内積が積分で与えられているので

$$(X\cdot e_n, e_m)_H = \int_D X(x)e_n(x)e_m(x)dx = (X\cdot e_m, e_n)_H$$

となることを使った。(6.20)の最後の級数は，$t>0$ のとき収束するので，$T_t X\cdot$ が H 上の Hilbert-Schmidt type の作用素として well-defined であることが分る。

次に，確率積分が well-defined となるための条件を調べてみよう。(6.20) より

$$E\left[\int_0^t \|T_{t-s}X_s\cdot\|_2^2 ds\right] \leqq \gamma^2 \sum_{m=1}^{\infty}\int_0^t e^{-2\lambda_m(t-s)} E[\|X_s\|^2]ds, \quad (6.21)$$

となっている。いま，$E[\|X_s\|^2]$ が有界だとすると，

$$\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^t e^{-2\lambda_m(t-s)}ds = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2\lambda_m}(1-e^{-2\lambda_m t})$$

より，A^{-1} が nuclear operator のときには (6.21) が収束するので，確率積分

$$\int_0^t T_{t-s}X_s\cdot dB_s$$

が定まることになる。

このようにして，A に強い条件がついたとき，方程式 (6.19) の解が H 内に求まる可能性がある。その1例としては，D. Dawson [1] の Theorem 2 に示された例がある。

はじめに戻って，もう1つの，空間を拡げる方法について考察してみよう。話しを分り易くするために string model の場合を見ることにする。$H = L^2([0,\pi])$ として，方程式

$$dX_t = AX_t dt + X_t\cdot dB_t, \qquad X_0 = x \in H \qquad (6.22)$$

を見るが，ここで $A = -\sqrt{-\Delta}$ とし，Δ は Neumann boundary

Sem. on Probab.
Vol.53 1981年
P1-142

condition の Laplacian を示している。 このとき，$\{\lambda_j, j=0,1,\cdots\}$ と $\{\xi_0 = 1/\sqrt{\pi},\ \xi_j = \sqrt{2/\pi}\cos j\sigma,\ \sigma\in[0,\pi],\ j=1,2,\cdots\}$ とが，$-A$ の固有値の系と，固有関数からなる完全系とになっている。

H_0 を定数関数からなる H の部分空間とし，

$$\hat{H} \equiv \{\xi\in H,\ (\xi,\xi_0)=0\}$$

とおくと，$H = H_0 \oplus \hat{H}$ である。 A を $\hat{H}$ 上に制限したとき，$-A$ は正定値で，A^{-1} は Hilbert-Schmidt type になっている。そこで，新しい空間 $\hat{H}_{-\alpha}$，$\alpha>0$，を

$$(h_1, h_2)_{-\alpha} = \left((-A)^{-\alpha}h_1, (-A)^{-\alpha}h_2\right)_H$$

なる内積により $\hat{H}$ を完備化して得られる空間と定め，$\hat{H}_\alpha$ をその dual space とする。 そして

$$H_\alpha \equiv H_0 \oplus \hat{H}_\alpha, \quad -\infty<\alpha<\infty$$

とおくと，

$$\begin{cases} H_\alpha \subset H \subset H_{-\alpha}, & \alpha>0 \\ AH_\alpha \subset H_{\alpha-1},\ (AH_\alpha = \hat{H}_{\alpha-1}), & -\infty<\alpha<\infty, \end{cases} \qquad (6.23)$$

となっている。

以上の前提のもとで，積作用素 $X\cdot$ について，次のことが分る。

<u>Prop. 6.2.</u> (i) $X\cdot$ は H 上の有界作用素ではないが，$T_tX\cdot$，$t>0$，は H 上の Hilbert-Schmidt type の作用素として定義可能である。

(ii) $X\in H$ のとき，$X\cdot$ は H から $H_{-\alpha}$，$\alpha>1/2$，への有界作用素となっており，Hilbert-Schmidt type でもある。

(iii) $X\in H_{-\alpha}$，(α はある正数) であるが $X\notin H$ のとき，$T_tX\cdot$ は，β をどんなに大きくとっても $\sigma_2(H, H_{-\beta})$ の要素にはならない。

Sem. on Probab.
Vol.53 1981年
P1-142

(Proof) (i). いまの場合，不等式 (6.20) において $\lambda_m = m$ とおいた式が成立することになるので，結論をうる。

(ii). (6.20) の計算と同様にして

$$\|X\cdot\|^2_{\sigma_2(H,H_{-\alpha})} = \sum_{m=0}^{\infty}\|X\cdot\xi_m\|^2_{-\alpha} = \sum_{m,k=0}^{\infty} k^{-2\alpha}(X\cdot\xi_m,\xi_k)^2$$

$$= \sum_{m,k} k^{-2\alpha}(X\cdot\xi_k,\xi_m)^2 = \sum_k k^{-2\alpha}\|X\cdot\xi_k\|^2$$

$$\leqq \gamma^2\|X\|^2\sum_{k=0}^{\infty}k^{-2\alpha} < \infty \qquad (6.24)$$

が得られる。ただし，上式で $k=0$ のとき $k^{-2\alpha}=1$ と約束しているものとする。(6.24) より結論をうる。

(iii) $X=\sum a_n\xi_n$ と展開したとき，$a_n \geqq 0$，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 = \infty$ (i.e. $X \notin H$)，$\sum n^{-2\alpha}a_n^2 < \infty$ (i.e. $X \in H_{-\alpha}$) となっているものとしよう。このとき，$T_tX\cdot$ が $\sigma_2(H,H_{-\beta})$ の要素として well-defined になったと仮定してみる。(注．$T_tX\cdot h$ は $X\in H$，$h\in H$ のとき，(i) により，X と h について linear な作用素として well-defined であった。このlinearityを保ちつつ拡張ができた，と仮定する。) このとき，(6.20) 及び (6.24) の計算と同様にして

$$\|T_tX\cdot\|^2_{\sigma_2(H,H_{-\beta})} = \sum_{m=0}^{\infty}\|T_tX\cdot\xi_m\|^2_{-\beta} = \sum_{m,k}(T_tX\cdot\xi_m, k^{\beta}\xi_k)^2_{-\beta}$$

$$= \sum_{k,m} e^{-2kt}k^{-2\beta}\Big(\sum_n a_n(\xi_n\cdot\xi_m,\xi_k)\Big)^2 \qquad (6.25)$$

が得られる。ところで，ξ_j の形が分っているので，計算により

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\xi_n\xi_m,\xi_k) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}(a_{m+k}+a_{|m-k|}), & \text{if } m,k\geqq 1 \\ \frac{1}{\pi}a_{m+k}, & \text{if } m\cdot k=0,\ m+k\geqq 1 \\ \frac{1}{\pi}a_0 & \text{if } m=k=0 \end{cases} \qquad (6.26)$$

がおまる。この結果を (6.25) に代入し，$a_n \geqq 0$ の仮定を使って次の不等式が成り立つ。

$$\|T_t X\cdot\|^2_{\sigma_2(H, H_{-\beta})} \geq \sum_{k=0}^{\infty} e^{-2kt} k^{-2\beta} \frac{1}{\pi^2}\left(\sum_{m=0}^{\infty} a^2_{k+m}\right)$$
$$\geq \frac{1}{\pi^2}\sum_{m=0}^{\infty} a_m^2 = \infty . \qquad (6.27)$$

これより．$T_t X\cdot$ が Hilbert-Schmidt type であるような拡張は不可能なことが分る。 (Q.E.D.)

さて，もとの方程式 (6.19) に戻ってみよう。 (6.20) より $X\in H$ のとき

$$\int_0^t \|T_{t-s}X\cdot\|^2_{\sigma_2(H)}ds = \sum_m \int_0^t e^{-2\lambda_m(t-s)}\|X\cdot e_m\|^2 ds$$
$$= \sum_m \frac{1}{2\lambda_m}\|X\cdot e_m\|^2(1-e^{-2\lambda_m t}) \qquad (6.28)$$

となる。 従って、A^{-1} が nuclear でないときには，(6.28) は発散してしまい，対応する確率積分は H 内に収まらないので，(6.19) の解が H 内に存在することは期待できない。

実際，string の場合の方程式 (6.22) はその1例であって，A^{-1} が nuclear でない場合になっており，H 内に解はない。また，ある $H_{-\alpha}$, $\alpha>0$，内に解が存在したと仮定してみても，Prop. 6.2 の iii) により確率積分

$$\int_0^t T_{t-s}X_s\cdot dB_s$$

は $H_{-\beta}$ 内に収まらないので，結局 $H_{-\infty}=\bigcup_\beta H_{-\beta}$ 内に解をもとめることも期待できない。 こうして，(6.22) の解は，上のような空間の拡張の中には存在しない。

上に述べたことより，A に強い条件を仮定しないとき，(6.19) の解を適当な空間の中で見つけることはできそうにない。 そこで，(6.19) を近似した方程式でがまんすることにする。

(6.19) の近似として

$$dX_t = AX_t dt + f(X_t)\cdot dB_t , \quad X_0\in H, \qquad (6.29)$$

なる形の方程式が考えられる。 string の方程式 (6.22) の場合を考え、

$$dX_t = AX_t dt + f(X_t)\cdot dB_t, \qquad X_0 \in H = L^2([0,\pi]) \tag{6.30}$$

$$A = -\sqrt{-\Delta}, \quad f : H_{-\alpha} \to H$$

なる近似方程式についてみよう。

<u>Th. 6.2.</u> string の近似方程式 (6.30) において, $\alpha > 1/2$ で f は, $H_{-\alpha}$ から H への Lipschitz 連続な写像とする。 このとき方程式 (6.30) は $H_{-\alpha}$ 内に解を持つ。

(proof) $X \in H_{-\alpha}$ のとき $f(X) \in H$ 故, Prop. 6.2 の (ii) により $f(X)\cdot \in \sigma_2(H, H_{-\alpha})$ であって, (6.24) により

$$\| f(X)\cdot - f(Y)\cdot \|^2_{\sigma_2(H, H_{-\alpha})} \leqq r^2 \Big(\sum_{k=0}^{\infty} k^{-2\alpha} \Big) \| f(X) - f(Y) \|^2$$

$$\leqq \text{const.} \| X - Y \|^2_{-\alpha} \tag{6.31}$$

である。 これより, $f(X)\cdot$ は, $H_{-\alpha}$ から $\sigma_2(H, H_{-\alpha})$ への Lipschitz 連続な写像であることが分る。 従って、Th. 4.4 が適用できて、結論をうる。 (Q.E.D.)

この定理の仮定を満たす $f(X)$ の例としては

$$f(X)(\sigma) = \int_0^{\pi} \Gamma(\sigma, \sigma') X(\sigma') d\sigma' \quad , \ X \in H_{-1}, \ \Gamma \in H \otimes H_1$$

なる線型作用素が挙げられる。($\alpha = 1$ の場合である。) $f(X)$ としてこれを採用したときの方程式 (6.30) については、解の表現に関連して §8 の後半で再度触れることにする。

Sem. on Probab.
Vol.53 1981年
P1-142

§7. 確率発展方程式の解の安定性

この節では、前節で見た双一次型式の確率発展方程式の解の安定性について検討してみる。扱う方程式は、可分な実 Hilbert 空間 K 上の次の方程式である。

$$dX_t = AX_t\,dt + B(X_t)\,dB_t, \quad X_0 = x \in K \tag{7.1}$$

ここで、A は K 上の閉作用素で class (C_0) の semigroup $\{T_t\}$ の generator になっているものとし、B_t は可分な実 Hilbert 空間 H 上の c.B.m.、$B(\cdot)$ は K から $\mathcal{L}_2(H,K)$ への線型写像である。すなわち、方程式 (7.1) は前節の方程式 (6.1) と同じタイプのものであり、前節では Bx と書いたところを、本節では、他の記号との混同を避けるために $B(x)$ と書くことにする。$B(x)$ の線型性を条件式として書いておく。

$$B(\lambda x + \mu y) = \lambda B(x) + \mu B(y), \quad {}^\forall\lambda,\mu \in R^1,\ {}^\forall x, y \in K, \tag{7.2}$$

写像 $B(x)$ がさらに適当な条件を満たしているとき、方程式 (7.1) は K-valued の一意的な L^2-連続な発展解を持つ。この解の安定性を論ずるのが、本節の目的である。

方程式 (7.1) の安定性を論ずる前に、準備として、semi-group $\{T_t\}$ の安定性についてまとめておく。

<u>Def. 7.1.</u> class (C_0) の semi-group $\{T_t\}$ が安定であるとは、2つの正の定数 M_0 と α とにより

$$\|T_t\| \le M_0 e^{-\alpha t}, \quad t \ge 0 \tag{7.3}$$

が成立していることをいう。

<u>Prop. 7.1.</u> (R. Datko [1]) class (C_0) の semi-group $\{T_t\}$ が安定であるための必要十分条件は、次の不等式 (7.4) が成立することである。

Sem. on Probab.
Vol.53 1981年
P1-142

$$\int_0^\infty \|T_t x\|^2 dt < \infty \qquad \text{for } {}^\forall x \in K. \tag{7.4}$$

この命題を使って、次の結果が示せる。

<u>Prop. 7.2.</u> class (C_0) の semi-group $\{T_t\}$ について、次の条件 (i), (ii), (iii) は互に同値である。

(i) $\{T_t\}$ は安定である。

(ii) 任意の Hermitian operator $Q \geqq 0$ に対して、次の等式(7.5)を満たす Hermitian operator $P \geqq 0$ が存在する。

$$-2(PAx, x) = (Qx, x) \qquad \text{for } x \in \mathcal{D}(A) \tag{7.5}$$

ただし、A は $\{T_t\}$ の generator である。

(iii) ある1つの Hermitian operator $Q \geqq \delta I$ $(\delta > 0)$ に対して (7.5) をみたす Hermitian operator $P \geqq 0$ が存在する。

(Proof) $\{T_t\}$ が class (C_0) の semigroup であるとき、T_t の dual operator T_t^* からなる semi-group $\{T_t^*\}$ も class (C_0) となっていることを注意しておこう。

(i) $\Rightarrow$ (ii). Hermitian operator $P(t)$ を

$$P(t)x = \int_0^t T_s^* Q T_s x \, ds, \qquad x \in K \tag{7.6}$$

により定義する。このとき、次のことが言える。

1) $P(t)$ は非負定値で t について単調増加。
2) $P(t)$ は t の関数として有界で、$t \to \infty$ のとき

$$Px = \int_0^\infty T_s^* Q T_s x \, ds$$

なる Hermitian operator P に収束する。

1) は、定義式 (7.6) より明らかである。

Sem. on Probab.
Vol.53 1981年
P1-142

2) を示そう。まず $\|P(t)\|$ が $0 \leqq t < \infty$ で有界なことを見よう。そのために、次の評価をしておく。

$$|(P(t)x, y)|^2 = \left|\int_0^t (QT_s x, T_s y)ds\right|^2 \leqq \left(\int_0^t \|QT_s x\|\|T_s y\|ds\right)^2$$

$$\leqq C^2 \int_0^t \|T_s x\|^2 ds \int_0^t \|T_s y\|^2 ds \qquad (C = \|Q\|)$$

$$\leqq C^2 \int_0^\infty \|T_s x\|^2 ds \int_0^\infty \|T_s y\|^2 ds < \infty \tag{7.7}$$

こゝで、最后の積分が有限なことは、仮定(i)と Prop. 7.1 による。(7.7) より、x と y を固定するごとに $(P(t)x, y)$ は $0 \leq t < \infty$ において有界である。よって Banach-Steinhause の定理により、$\|P(t)\|$ は $0 \leq t < \infty$ で有界となる。

こうして、$P(t)$ は単調増加で有界であるから、$t \to \infty$ としたときの極限の存在が分り、$P(t)$ の形から、2) が言える。

次に、$V(x) = (Px, x)$ とおく。$x \in \mathcal{D}(A)$ のとき

$$V(T_t x) - V(x) = \int_0^\infty (T_{s+t}^* Q T_{s+t} x, x) ds - \int_0^\infty (T_s^* Q T_s x, x) ds$$

$$= -\int_0^t (T_s^* Q T_s x, x) ds \tag{7.8}$$

がなりたち、被積分関数 $(T_s^* Q T_s x, x)$ は s の連続関数であるので、(7.8) を微分して

$$\frac{dV(T_t x)}{dt} = -(T_t^* Q T_t x, x) \tag{7.9}$$

をうる。一方、A が $\{T_t\}$ の generator であることより、$x \in \mathcal{D}(A)$ のとき $T_t x \in \mathcal{D}(A)$ であって、$V(x) = (Px, x)$ より

$$\frac{dV(T_t x)}{dt} = (PAT_t x, T_t x) + (PT_t x, AT_t x)$$

$$= 2(T_t^* PAT_t x, x) \tag{7.10}$$

が成り立っている。(7.9) と (7.10) において、$t=0$ とおいた式より、(7.5) がえられる。

(ii) ⇒ (iii)，自明である。

(iii) ⇒ (i)。仮定 (iii) より決まる Hermitian operator P に対して，$V(x)=(Px,x)$，$x\in\mathcal{D}(A)$ とおく。この $V(x)$ に対して，上の (7.10) が成立している。((7.10) は，A が $\{T_t\}$ の generator であることのみから導かれている。) $x\in\mathcal{D}(A)$ のとき $T_tx\in\mathcal{D}(A)$ であるから，(7.5) と (7.10) より

$$\frac{dV(T_tx)}{dt}=-(QT_tx,T_tx) \tag{7.11}$$

となり，

$$V(T_tx)-V(x)=-\int_0^t(QT_sx,\ T_sx)ds$$

をうる。これより，次式が言える。

$$\begin{aligned}V(x)&=V(T_tx)+\int_0^t(QT_sx,\ T_sx)ds\\&\geq\int_0^t(QT_sx,T_sx)ds\ \geq\delta\int_0^t(T_sx,T_sx)ds\end{aligned} \tag{7.12}$$

この式で，$t\to\infty$ として

$$\int_0^\infty\|T_sx\|^2ds\ \leq\frac{1}{\delta}V(x)<\infty,\quad x\in\mathcal{D}(A) \tag{7.13}$$

が得られた。

次に，$x\notin\mathcal{D}(A)$ なる $x\in K$ に対しても，(7.13) の不等式が言えることを示そう。$\mathcal{D}(A)$ は K 内で稠密であるので，点列 $\{x_n\}\subset\mathcal{D}(A)$ を，$x_n\to x$ in K に選べる。又，$\{T_t\}$ が class (C_0) であることより，定数 M と ω が存在して

$$\|T_t\|\leq Me^{\omega t},\quad t\geq0$$

となっている。これより，任意に有限区間 $[0,T]$ を固定したとき，$[0,T]$ 上で t について一様に $T_tx_n\to T_tx$ $(n\to\infty)$ である。従って、次式が示された。

$$\int_0^T\|T_sx_n\|^2ds\longrightarrow\int_0^T\|T_sx\|^2ds\qquad(n\to\infty) \tag{7.14}$$

Sem. on Probab.
Vol.53 1981年
P1-142

一方，x_nに対しては(7.13)が言えているので，

$$\int_0^T \|T_s x_n\|^2 ds \leqq \frac{1}{\delta} V(x_n) \tag{7.15}$$

である。 $V(x)$ は連続であるから，(7.15) において $n\to\infty$ として、次の不等式が得られた。

$$\int_0^T \|T_s x\|^2 ds \leqq \frac{1}{\delta} V(x) \tag{7.16}$$

この式で，Tは任意であったから，任意の $x\in K$ に対して(7.13)が成立することになる。 従って，Prop.7.1 により $\{T_t\}$ は安定となる。 (Q.E.D.)

<u>Remark 7.1.</u> 1). R.Datka は，上の Prop.7.2 の (iii) で，$Q=I$ としたときの条件を，$\{T_t\}$ が安定であるための必要十分として挙げている。

2) 証明中の式(7.10) において，$PT_t x\in \mathcal{D}(A^*)$が言えているときには

$$\frac{dV}{dt}(T_t x) = (T_t^*(PA+A^*P)T_t x, x) \tag{7.10'}$$

となり，(7.5)式は

$$-((PA+A^*P)x, x) = (Qx, x) \tag{7.5'}$$

と，A と A^* について対称な形に表現できる。

3) semi-group $\{T_t\}$を，それに対応した K 上の発展方程式

$$\frac{dx_t}{dt} = Ax_t, \quad t>0, \qquad x_0 = x\in K. \tag{7.17}$$

と関係づけてみるとき，$\{T_t\}$ の安定の定義式(7.3)は，(7.17)の解 x_t が，$\|x_t\|\leqq M_0 e^{-\alpha t}\|x\|$ をみたすことと同値である。従って $\{T_t\}$ が安定ということは，"方程式 (7.17) の解が指数安定である" ということと同値になる。

さて，この節の目標である、確率発展方程式 (7.1) の解の安

Sem. on Probab.
Vol.53 1981年
P1-142

定性について見ることにしよう。 方程式は

$$dX_t = AX_t dt + B(X_t)dB_t \quad , \qquad X_0 = x \in K \tag{7.1}$$

で，$B(\cdot)$ は線型と仮定していた。 更に強い，次の仮定 a) b) をおくことにしよう。

a) $B : K \to \sigma_2(H, K)$ は有界な線型写像である。

b) $x \in K_1 = \mathcal{D}(A)$ のときには $B(x) \in \sigma_2(H, K_1)$ であって，B を K_1 に制限した写像は K_1 から $\sigma_2(H, K_1)$ への有界な連続写像である。 ここで，K_1 は、§4 におけると同様に、内積 $(x, y)_1 = (x, y) + (Ax, Ay)$ を持った Hilbert 空間である。

上の仮定があるとき，Th. 4.7 の (ii) により，L^2-連続な発展解が一意的に定まる。

安定の定義を次のように与える。

<u>Def. 7.2.</u> 任意の初期値 $X_0 = x \in K$ を与えたときの方程式 (7.1) の発展解 X_t^x が，つねに

$$E\left[\int_0^\infty \| X_t^x \|^2 dt\right] < \infty \tag{7.18}$$

を満たしているとき，方程式 (7.1) は安定であるという。

Prop. 7.2 に対応して次の定理が成り立つ。

<u>Th. 7.1.</u> 上の仮定 a) b) の下で，方程式 (7.1) に関する次の３つの命題は互に同値である。

(i) 方程式 (7.1) は安定である。

(ii) Q を K 上の非負定値 Hermitian operator とするとき，次の等式を満たす非負定値 Hermitian operator P が存在する。

Sem. on Probab.
Vol.53 1981年
P1-142

$$2(PAx, x) + \mathrm{Trace}\{B^*(x)PB(x)\} = -(Qx, x), \quad x \in D(A)=K_1, \quad (7.19)$$

(iii) ある1つの Hermitian operator $Q \geqq \delta I$ ($\delta > 0$) に対して、(7.19) を満たす非負定値 Hermitian operator P が存在する。

定理の証明の前に、Lemma を1つ用意する。

Lemma 7.1. X_t^x 及び X_t^y をそれぞれ、方程式 (7.1) の初期値が x 及び y の L^2-連続な発展解とする。このとき、次の不等式が成立する。

$$E[\|X_t^x - X_t^y\|^2] \leqq C e^{\beta t} \|x-y\|^2, \quad t \geqq 0 \qquad (7.20)$$

ここで、C 及び β は、$\|T_t\| \leqq M e^{\alpha t}$ なる定数 M, α と、$B(x)$ の Lipschitz 定数 L とから定まる定数である。

(Proof) Th. 4.7 の (ii) により方程式 (7.1) の L^2連続な発展解が一意的に定まっているが、その証明から分るように、解は逐次近似により構成されている。そして、逐次近似により構成された解に対しては (4.41)式、すなわち次式が言えている。

$$E[\|X_t^x - X_t^y\|^2] \leqq 2M^2 e^{2(\alpha+M^2L^2)t} \|x-y\|^2 \qquad (7.21)$$

この式より、$C = 2M^2$, $\beta = 2(\alpha + M^2L^2)$ とおいて (7.20) が得られる。 (Q.E.D.)

(Proof of Th. 7.1) (i) ⇒ (iii). 方程式 (7.1) が線型なことから、一意的な L^2-連続な発展解は、初期値に関して線型、すなわち $X_t^{x+y} = X_t^x + X_t^y$ となる。このことから、作用素 $P(t)$ を

$$(P(t)x, y) = E\left[\int_0^t (QX_s^x, X_s^y)\,ds\right], \quad x, y \in K \qquad (7.22)$$

を満たすものと定義すると、$P(t)$ は K 上の線型作用素として一

意的に定まる。そして，$P(t)$ が非負定値の Hermitian operator で単調増加になっていることは明らか。また，(1) より

$$|(P(t)x, y)| \leqq \|Q\| \sqrt{E[\int_0^t \|X_s^x\|^2 ds]} \sqrt{E[\int_0^t \|X_s^y\|^2 ds]}$$

$$\leqq \|Q\| \sqrt{E[\int_0^\infty \|X_s^x\|^2 ds]} \sqrt{E[\int_0^\infty \|X_s^y\|^2 ds} < \infty \qquad (7.23)$$

が言える。すなわち，$x, y \in K$ を固定するごとに $(P(t)x, y)$ は $0 \leq t < \infty$ で有界である。従って，Banach-Steinhouse の定理により $P(t)$ は $0 \leq t < \infty$ において一様に有界である。そして，$P(t)$ の単調性により

$$P \equiv \lim_{t \to \infty} P(t)$$

が定まって

$$(Px, y) = E[\int_0^\infty (X_s^x, X_s^y) ds] \qquad (7.24)$$

である。

このPを使って $V(x) = (Px, x)$ とおき，$\xi_t = V(X_t^x)$ とおく。いま初期値 $x \in K$ を，特に $x \in K_1 = \mathcal{D}(A)$ にとったとすると，仮定 b) があるので，Th.4.7の (i) の結果により，X_t^x は K_1-valued process であり，strong solution となっている。すなわち次の等式が成り立っている。

$$X_t^x = x + \int_0^t A X_s^x ds + \int_0^t B(X_s^x) dB_s \qquad (7.25)$$

ここで，$E[\sup_{0 \leq t \leq T} \|X_t^x\|^2]$ を評価してみよう。(7.25) より

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|X_t^x\|^2 \leqq 3\|x\|^2 + 3 \sup_{0 \leq t \leq T} \|\int_0^t A X_s^x ds\|^2 + 3 \sup_{0 \leq t \leq T} \|\int_0^t B(X_s^x) dB_s\|^2$$

$$\leqq 3\|x\|^2 + 3T\int_0^T \|AX_s^x\|^2 ds + 3 \sup_{0 \leq t \leq T} \|\int_0^t B(X_s^x) dB_s\|^2, \qquad (7.26)$$

が得られ，これより

$$E[\sup_{0 \leq t \leq T} \|X_t^x\|^2] \leqq 3\|x\|^2 + 3T\int_0^T E[\|X_s^x\|_1^2] ds +$$

Sem. on Probab.
Vol.53 1981年
P1-142

$$+12E\left[\int_0^T \|B(X_s^x)\|_2^2 ds\right] \quad < \infty \tag{7.27}$$

が得られる。ここで、右辺第3項の評価には、submartingale不等式を使っている。

さて、$|V(x)| = |(Px, x)| \leqq \|P\|\|x\|^2$ に注意すると

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |V(X_t^x)| \quad ; \quad \omega \text{ の可積分関数},$$

が言えたことになる。従って、Cor. 2. 2 (Itô-formula に関連した定理の系) を $\xi_t = V(X_t^x)$ と (7.25) 式に適用できて、次の結果をうる。

$$E[\xi_t] - \xi_0 = E\left[\int_0^t \{(2PX_s^x, AX_s^x) + \mathrm{Trace}[B^*(X_s^x)PB(X_s^x)]\} ds\right], \tag{7.28}$$

一方、ξ_t の定義と (7.24) より

$$E[\xi_t] - \xi_0 = E[V(X_t^x)] - V(x)$$

$$= E\left[\int_0^\infty (X_s^{X_t^x}, QX_s^{X_t^x}) ds\right] - E\left[\int_0^\infty (X_s^x, QX_s^x) ds\right]$$

$$= -E\left[\int_0^t (X_s^x, QX_s^x) ds\right] \tag{7.29}$$

となっている。

(7.28) と (7.29) を、時間 t について微分して

$$E[(X_t^x, 2PAX_t^x) + \mathrm{Trace}(B^*(X_t^x)PB(X_t^x))]$$

$$= -E[(X_t^x, QX_t^x)] \qquad \text{a.a. } t \geqq 0 \tag{7.30}$$

がえられる。ところで、Cor. 4.1 により、X_t^x は K の norm で見るとき、L^2-連続である。又、X_t^x は、方程式 (7.1) を K_1 上の方程式とみなして解いた炎展解でもあるので、Th. 4.3 を K_1 上の方程式 (7.1) に適用したものとすれば、X_t^x は K_1 の norm で見たとき、L^2-右連続である。従って、(7.30) 式の左辺は t の右連続関数であり、右辺は t の連続関数である。

Sem. on Probab.
Vol.53 1981年
P1-142

このことより，(7.30) の等号はすべての t, $t \geqq 0$, で成立していることになる。そこで，(7.30) 式で，$t=0$ の場合を見ると，丁度，(ii) の (7.19) 式になっている。

(ii) ⇒ (iii) 自明である。

(iii) ⇒ (i) (iii) の仮定により定まっている P に対して，$V(x) = (Px, x)$, $x \in K$, とおく。$x \in K_1$ のとき，上の (i) ⇒ (ii) の証明の中で行なったのと同じに，$\xi_t = V(X_t^x)$ と (7.25) に Cor. 2.2 を適用して (7.28) が得られる。そして，$X_s^x \in K_1$ より (7.19) を使って (7.28) を変形して

$$V(x) = E[V(X_t^x)] + E[\int_0^t (X_s^x, QX_s^x) ds]$$
$$\geqq \delta \ E[\int_0^t \|X_s^x\|^2 ds] \qquad (7.31)$$

が言える。こうして，$x \in K_1$ のときには

$$E[\int_0^\infty \|X_s^x\|^2 ds] \leqq \frac{1}{\delta} V(x) < \infty \qquad (7.32)$$

が示せた。

次に一般の $x \in K$ のときを見よう。K_1 は K で稠密であるから，$x_n \in K_1$, $x_n \to x$ in K $(n \to \infty)$ なる点列 $\{x_n\}$ がとれる。各 $x_n \in K_1$ に対しては，すでに (7.31)，すなわち

$$V(x_n) \geqq \delta \ E[\int_0^t \|X_s^{x_n}\|^2 ds] \qquad (7.33)$$

が言えている。又，Lemma 7.1 より

$$E[\|X_s^x - X_s^{x_n}\|^2] \leqq c\, e^{\beta s} \|x - x_n\|^2 \qquad (7.34)$$

となっており，この右辺は $n \to \infty$ のとき 0 に収束する。しかもその収束は，s が有界な区間内にあるとき，s について一様である。従って，(7.33) の不等式で $n \to \infty$ の極限移行をすると

$$V(x) \geqq \delta E\left[\int_0^t \|X_s^x\|^2 ds\right], \quad \text{for } {}^\forall x \in K, \qquad (7.35)$$

Sem. on Probab.
Vol.53 1981年
P1-142

が得られる。 こうして，任意の $x \in K$ に対して (7.32) が言えたので，(i) が示された。 (Q.E.D)

<u>Cor. 7.1.</u> 方程式 (7.1) が安定なとき，A を generator に持つ semi-group $\{T_t\}$ は安定である。

(Proof) Th. 7.1 より，次の式を満たす非負定値 Hermitian operator P が存在している。

$$2(PAx, x) + \mathrm{Trace}(B^*(x)PB(x)) = -\|x\|^2, \quad x \in K_1 \qquad (7.36)$$

$B(\cdot)$ が linear ゆえ，$\mathrm{Trace}(B^*(x)PB(x))$ は K 上の非負定値で有界な二次形式であることが分るので，それを (Rx, x) と表現する。 このとき，(7.36) は

$$2(PAx, x) = -((I+R)x, x), \quad x \in K_1 \qquad (7.37)$$

と表現され，Prop. 7.2 の (iii) が，$Q = I+R$ の場合に満たされている。 従って A を generator に持つ semi-group $\{T_t\}$ は安定である。 (Q.E.D.)

上の定理の簡単な応用例を見ておこう。 いま A は，self-adjoint で安定，すなわち，A を generator に持つ semi-group $\{T_t\}$ が安定とする。 このとき，Prop. 7.2 (ii) により

$$2(PAx, x) = -\|x\|^2, \qquad x \in \mathcal{D}(A) = K_1 \qquad (7.38)$$

をみたす Hermitian operator $P \geq 0$ が存在する。 この P に対して，

$$\mathrm{Trace}\{B^*(x)PB(x)\} = (Rx, x) \qquad (7.39)$$

となる Hermitian operator R が定まる。 $(R \geq 0)$。 このとき，もしも，ある正の定数 δ が存在して，条件

$$I - R \geq \delta I \qquad (7.40)$$

Sem. on Probab.
Vol.53 1981年
P1-142

が満たされているならば，(7.38) と (7.39) より

$$2(PAx,x) + \mathrm{Trace}\{B^*(x)PB(x)\} = -\|x\|^2 + (Rx,x)$$

$$= -((I-R)x,x) \tag{7.41}$$

となり，Th.7.1 の (iii) が言えたことになる。従って，方程式 (7.1) は安定となる。

いま，A は，$(-A)^{-1}$ が定義されるような作用素としよう。そのときには，(7.38) をみたす P としては，$P = \frac{1}{2}(-A)^{-1}$ を採用することができる。このとき，条件 (7.40) は

$$\mathrm{Trace}\{B^*(x)(-A)^{-1}B(x)\} \leqq (1-\delta)\|x\|^2 \tag{7.42}$$

となる。この条件を調べることは容易である。たとえば，$(-A)^{-1}$ が nuclear operator になっており，$B(x) = \varepsilon\|x\|I$ という形のとき，ε が十分小ならば (7.42) が言え，従って安定となる。

Sem. on Probab.
Vol.53 1981年
P1-142

§8. White noise Analysis.

考えている空間が、一般のHilbert空間の場合には c.B.m. B_t を出発点にして議論するのが妥当と思われるが、基礎になる空間Hが、$H=L^2(D)$, $D\subset\mathbb{R}^d$, のような具体的な空間の場合には、D上の white noise と関連づけて c.B.m. B_t を考えることができる。 その場合には、多重Wiener積分の理論、又は、white noise analysis を、Hilbert 空間の中に値をとる汎関数の場合に発展させられる。 詳しくは、Y. Miyahara [3] を参照してもらうことにし、この節では、その議論の要点のみを述べることにする。

Dを d-次元ユークリッド空間 R^d 内の領域とし、実Hilbert空間H及び$\mathcal{H}$を、それぞれ、

$$H=L^2(D) \quad , \qquad \mathcal{H}=L^2(D\times T), \quad T=(-\infty,\infty)$$

と定義する。 このとき、Gelfand triple

$$\mathcal{E}\subset\mathcal{H}=L^2(D\times T)\subset\mathcal{E}^*$$

を適当に1つ定め、$\mathcal{E}^*$ 上の確率測度 μ を、その特性関数 $C_\mu(\cdot)$ が

$$C_\mu(\eta)\equiv\int_{\mathcal{E}^*}e^{i\langle\eta,\omega\rangle}d\mu(\omega)=\exp\{-\tfrac{1}{2}\|\eta\|^2\},\quad \eta\in\mathcal{E} \qquad (8.1)$$

$$\|\eta\|^2=\int_{D\times T}|\eta|^2dx,$$

なるものと定める。 ここで、$\langle\eta,\omega\rangle$ は上の Gelfand triple における $\mathcal{E}$ と $\mathcal{E}^*$ との canonical bilinear form を示している。$\mathcal{B}$を $\mathcal{E}^*$ の Borel field として確率空間 $(\mathcal{E}^*,\mathcal{B},\mu)$ が定まるが、この確率空間 $(\mathcal{E}^*,\mathcal{B},\mu)$ を、"H上の white noise"、又は "パラメーター空間 D×T の white noise" と呼ぶ。

$\mathcal{B}_t$ を、$\{\langle\eta,\omega\rangle,\ \mathrm{supp}\{\eta\}\subset D\times(-\infty,t]\}$ より定まる $\mathcal{B}$の sub-σ-field とする。 いま、$\xi\in H$ に対して、$\xi\otimes\chi_{[0,t]}$ を

Sem. on Probab.
Vol.53 1981年
P1-142

考え，

$$B_t(\xi) \equiv \langle \xi \otimes \chi_{[0,t]}, \omega \rangle \tag{8.2}$$

とおく。ここで，$\xi\otimes\chi_{[0,t]}$ は一般に $\mathcal{E}$ の要素ではないので (8.2) の右辺は，このままでは定まらないが，次のような意味で well-defined である。$\eta = \xi\otimes\chi_{[0,t]} \in \mathcal{H}$ であり，$\mathcal{E}$ は $\mathcal{H}$ で稠密であるから，η_j, $j=1,2,\cdots$, $\eta_j \in \mathcal{E}$，を，各 η_j は $\mathcal{B}_t$-可測で，$\eta_j \to \eta$ in $\mathcal{H}$ $(j\to\infty)$ となるように選べる。このとき，$\langle \eta_j, \omega\rangle$ は，(8.1) による μ の定義から，$L^2(\mathcal{E}^*,\mu)$ 内の収束列になっている。そこで，この極限を (8.2) による定義とする。$L^2(\mathcal{E}^*,\mu)$ の要素としては，収束列によらず一意的に定まり，$\mathcal{B}_t$-可測なことも明らかであろう。

このようにして定義された $B_t(\xi)$ は，$H=L^2(D)$ 上の c.B.m. になっている。以下本節では，c.B.m. としては上に構成した B_t に限定して議論するものとする。そして，§1〜7. で行なった議論は，c.B.m. を上のように特定するとき，基礎の確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ に当るものを $(\mathcal{E}^*,\mathcal{B},\mu)$ として，すべて成り立っている。

さて，前節までに議論された K-valued process X_t はすべて $L^2(\Omega\to K, dP)$ の元であったから，いまの場合 $L^2(\mathcal{E}^*\to K, d\mu)$ の元ということになる。すなわち，H 上の white noise の K-valued functional ということになる。そこで，white noise の汎関数の空間 $L^2(\mathcal{E}^*, d\mu)$ 及び $L^2(\mathcal{E}^*\to K, d\mu)$ の解析から見てゆくことにしよう。

1. 空間 $(L^2)_D$

空間 $L^2(\mathcal{E}^*,\mathcal{B},\mu)$ は，領域 D に依存して決まっているので，この空間を $(L^2)_D$ と略記することにする。この空間の解析については，white noise analysis としてよく知られている。(T. Hida-N.-Ikeda [1]，T. Hida [1, 2])。必要な部分をまとめておこう。

Sem. on Probab.
Vol.53 1981年
P1-142

n次の Hermite polinomials で張られる $(L^2)_D$ の subspace を $\mathcal{H}_n$ とおく。このとき，$(L^2)_D$ は次のように直和分解される。

$$(L^2)_D = \sum_{n=0}^{\infty} \oplus \mathcal{H}_n \quad (\text{Wiener-Itô decomposition}) \tag{8.3}$$

次に変換 $\mathcal{T}$ を，$\phi \in (L^2)_D$ に対して

$$(\mathcal{T}\phi)(\eta) = \int_{\mathcal{E}^*} e^{i\langle \eta, \omega\rangle} \phi(\omega)\, d\mu(\omega), \qquad \eta \in \mathcal{E} \tag{8.4}$$

と定義する。$\mathcal{T}\phi$ は $\mathcal{E}$ 上の汎関数である。ϕ として，n次の Hermite polynomial $H_n(\langle \hat{\eta}, \omega\rangle/\sqrt{2})$，$\|\hat{\eta}\|=1$，をとったとき，(8.4) は次のように計算される。

$$(\mathcal{T}H_n(\langle \hat{\eta}, \omega\rangle/\sqrt{2}))(\eta) = C_\mu(\eta)(\sqrt{2}i)^n(\hat{\eta}, \eta)^n$$

$$= C_\mu(\eta)\, i^n \int\cdots\int_{(D\times T)^n} F(x_1, \dots, x_n)\, \eta^{n\otimes}(x_1, \dots, x_n)\, dx^n \tag{8.5}$$

$$F = 2^{n/2}\, \tilde{\eta}^{n\otimes}(x_1, \dots, x_n) \in \hat{L}^2((D\times T)^n) \tag{8.6}$$

$$\| H_n(\langle \hat{\eta}, \cdot\rangle/\sqrt{2})\|_{(L^2)_D} = (n!)^{1/2}\, \|F\|_{L^2((D\times T)^n)} \tag{8.7}$$

ここで，$\hat{L}^2$ は空間 L^2 内の対称な関数からなる subspace を示している。上の対応

$$H_n(\langle \hat{\eta}, \cdot\rangle/\sqrt{2}) \longleftrightarrow 2^{n/2}\, \tilde{\eta}^{n\otimes}(x_1, \dots, x_n)$$

は，$\mathcal{H}_n$ から $\hat{L}^2((D\times T)^n)$ の上への 1-1 な線型写像に拡張される。この写像を τ で示すことにする。全体をまとめて，次の結果が得られる。

$$\left.\begin{aligned} &(L^2)_D = \sum \oplus \mathcal{H}_n \cong \sum \oplus \sqrt{n!}\, \hat{L}^2((D\times T)^n) \\ &\tau : \phi \longrightarrow \tau\phi \in \hat{L}^2((D\times T)^n), \quad \phi \in \mathcal{H}_n, \ \text{1-1, onto} \end{aligned}\right\} \tag{8.8}$$

Sem. on Probab.
Vol.53 1981年
P1-142

$$(J\phi)(\eta) = i^n C_\mu(\eta) \int \cdots \int_{(D\times T)^n} \tau\phi(x_1, \ldots, x_n)\, \eta^{n\otimes}(x_1, \ldots, x_n)\, dx^n$$

$$\|\phi\|_{(L^2)_D} = \sqrt{n!}\, \|\tau\phi\|_{L^2((D\times T)^n)}$$

<u>Def. 8.1</u> 上の $\tau\phi$ のことを，ϕ の積分表現の核という。$\phi = \sum \oplus \phi_n$, $\phi_n \in \mathcal{H}_n$ のとき，各 $\tau\phi_n$ を，ϕ の n 次の表現核という。

2、多重 Wiener 積分と逐次積分． その 1。

上に述べた $(L^2)_D$ の分解とその表現は，以下に述べるような形で，多重 Wiener 積分と結びついている。

いま，$\{\xi_\alpha\}$ を $H = L^2(D)$ の 1 つの c.o.n.s. とし，$\{\zeta_\beta\}$ を $L^2(T)$ の 1 つの c.o.n.s. とする。このとき $\{\eta_j\} = \{\xi_\alpha \otimes \zeta_\beta\}$ は $\mathcal{H}$ の c.o.n.s. になる。又，$\{\eta_{j_1 j_2 \cdots j_n} \equiv \eta_{j_1} \otimes \cdots \otimes \eta_{j_n}\}$ は，$L^2((D\times T)^n)$ の c.o.n.s. である。

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \eta_{j_1 j_2 \cdots j_n}(x_1 \cdots x_n) = \eta_{j_1} \otimes \cdots \otimes \eta_{j_n}(x_1, \cdots x_n)$$

$$\eta_{j_k} = \xi_{\alpha_k} \otimes \zeta_{\beta_k}, \quad k = 1, \ldots, n$$

のとき，F の多重 Wiener 積分 $I(F) \equiv I_n(F)$ を

$$I(F) \equiv I_n(F) = \int \cdots \int \zeta_{\beta_1}(u_1) \cdots \zeta_{\beta_n}(u_n)\, dB_{u_1}(\xi_{\alpha_1}) \cdots dB_{u_n}(\xi_{\alpha_n}) \qquad (8.9)$$

により定義する。ここで，各 $B_{u_k}(\xi_{\alpha_k})$ は 1 次元 B.m. であり，異なった ξ_{α_k} に対しては互に独立である。従って，(8.9) の右辺は，有限個の 1 次元 B.m. に関する多重 Wiener 積分として well-defined である。(8.9) の右辺を計算して

$$I(F) = 2^{-n/2} \prod_j H_{k_j}(\langle \eta_j, w \rangle / \sqrt{2}), \quad \sum k_j = n \qquad (8.10)$$

が分る。ただし，k_j は $\eta_{j_1 \cdots j_n}$ の中に出てくる η_j の重複度である。

Sem. on Probab.
Vol.53 1981年
P1-142

上のような形のFは$L^2((D\times T)^n)$内で稠密であるから，(8.9)式による$I(F)$の定義を，Fについて線型であるように拡張して，$L^2((D\times T)^n)$上全体で$I(F)$が定義される。

Def. 8.2. 上のように定義された$I(F)$, $F\in L^2((D\times T)^n)$を，Fの多重Wiener積分と呼び，空間$\{I(F);\, F\in L^2((D\times T)^n)\}$をn次の多重Wiener積分の空間という。

$I(F)$の定義から

$$I(F)=I(\hat{F}) \quad , \quad \hat{F}: F\text{の対称化} \tag{8.11}$$

が分る。 又，(8.10)と(8.5)より次の定理がえられる。

Th. 8.1. $\{I(F);\, F\in L^2((D\times T)^n)\}=\{I(F);\, F\in \hat{L}^2((D\times T)^n)\}=\mathcal{H}_n$

であって，写像$I(\cdot)$を$\hat{L}^2((D\times T)^n)$上に制限したとき，Iはτの逆写像である。

これを，式で示せば次のようになる。

$$\left.\begin{aligned}
&\tau:\mathcal{H}_n\longrightarrow \hat{L}^2((D\times T)^n) \qquad \text{1-1, onto}\\
&I: L^2((D\times T)^n)\longrightarrow \mathcal{H}_n,\\
&I\circ\tau=id:\mathcal{H}_n\longrightarrow\mathcal{H}_n\\
&\|I(\hat{F})\|_{(L^2)_D}=(n!)^{1/2}\|\hat{F}\|_{L^2((D\times T)^n)},\quad \hat{F}\in\hat{L}^2((D\times T)^n)
\end{aligned}\right\} \tag{8.12}$$

次に，§2で定義したc.B.m. B_tに関する確率積分との関係について見ることにする。 そのために，$F\in L^2((D\times T)^n)$に対する逐次積分を定義しよう。 まずはじめに，階段関数に対して定義し，その定義を，$L^2((D\times T)^n)$上で連続な作用であるように拡張すればよい。 そこで，Fを階段関数とする。

$(x_2,\cdots,x_n)$ を固定し、$x_1=(x_1,t_1)$ の時刻 t_1 も固定したとき、$F((\cdot,t_1),x_2,\cdots,x_n)$ は $L^2(D)=H$ の要素である。従って、$t_1 \to F((\cdot,t_1),x_2,\cdots,x_n)$ なる対応は、$T=(-\infty,\infty)$ 上の H-valued な関数となり、§2 の定義に従って、$(x_2,\cdots,x_n)$ を固定したごとに、

$$\hat{I}_1(F)(x_2,\cdots,x_n) \equiv \int_{-\infty}^{t_2} \langle F((\cdot,t_1),x_2,\cdots,x_n), dB_{t_1}(\cdot)\rangle, \quad (8.13)$$

が定義され、$\mathcal{B}_{t_2}$-adapted である。そして

$$\int_{\mathcal{E}^*} |\hat{I}_1(F)(x_2,\cdots,x_n)|^2 d\mu(\omega) = \int_{-\infty}^{t_2} \|F((\cdot,t_1),x_2,\cdots,x_n)\|_H^2 dt_1$$

$$\leqq \|F(\cdot,x_2,\cdots,x_n)\|^2_{L^2(D\times T)} \quad (8.14)$$

である。(注、ここで時間区間が $(-\infty,\infty)$ になっているが、§2で $[0,\infty)$ 上で考えた積分の定義は、自然な形で、$(-\infty,\infty)$ 上でも定義される。) 次に、$(x_3,\cdots,x_n)$ を固定して、x_2 を変数とみて上と同様に確率積分を考えて、

$$\hat{I}_2(F)(x_3,\cdots,x_n) = \int_{-\infty}^{t_3} \langle \hat{I}_2(F)((\cdot,t_2),x_3,\cdots,x_n), dB_{t_2}(\cdot)\rangle$$

が定義される。

以下これを繰り返して、$\hat{I}_k(F)(x_{k+1},\cdots,x_n)$, $k=1,2,\cdots,n$ が定義され、

$$\hat{I}(F) \equiv \hat{I}_n(F)$$

とおくとき、(8.14) より

$$\|\hat{I}(F)\|^2_{(L^2)_D} \leqq \|F\|^2_{L^2((D\times T)^n)} \quad (8.15)$$

となる。上の手順中、(8.14) の積分が ∞ になるような点では定義されないことになるが、そのような点は測度0であるので、$\hat{I}(F)$は well-defined で、(8.15) が成立している。

定義から $\hat{I}(F)$ は F について linear で、(8.15) より $L^2((D\times T)^n)$ から $(L^2)_D$ への写像とみて有界である。従って、$\hat{I}(\cdot)$ の定

Sem. on Probab.
Vol.53 1981年
P1-142

義域を $\hat{I}(\cdot)$ が連続であるように $L^2((D\times T)^n)$ 上に拡げることができて、$\hat{I}(\cdot)$ は $L^2((D\times T)^n)$ から $(L^2)_D$ への有界な線型写像となる。

さて，$\{\eta_j\}$ を前と同じ $L^2((D\times T))=\mathcal{H}$ の c.o.n.s. とし，$F \in \hat{L}^2((D\times T)^n)$ が,

$$F(x_1,\cdots,x_n) = \widetilde{\eta_{j_1}\otimes\cdots\otimes\eta_{j_n}}(x_1,\cdots,x_n), \quad \sim \text{は対称化},$$

である場合に、$I(F)$ と $\hat{I}(F)$ を、定義に従って計算してみることにより

$$I(F) = n!\,\hat{I}(F)$$

が分る。 このような形の F が $\hat{L}^2((D\times T)^n)$ で稠密なことから、この等式は $\hat{L}^2((D\times T)^n)$ 全体で成立することになる。 こうして、次の定理が得られた。

<u>Th. 8.2.</u> $\hat{F} \in \hat{L}^2((D\times T)^n)$ に対して

$$\hat{I}(\hat{F}) = \frac{1}{n!}\, I(F) \tag{8.16}$$

$$\|\hat{I}(\hat{F})\|_{(L^2)_D} = (n!)^{-1/2}\,\|\hat{F}\|_{L^2((D\times T)^n)} \tag{8.17}$$

が成立する。

等式 (8.16) より，$\phi \in \mathcal{H}_n$ のとき，ϕ は次の表現を持つ。

$$\phi = I(\tau\phi) = n!\,\hat{I}(\tau\phi)$$

$$= n! \int\!\!\cdots\!\!\int_{t_1<t_2<\cdots<t_n} \langle(\tau\phi)(x_1,\cdots,x_n),\, dB_{t_1}\rangle,\cdots, dB_{t_n}\rangle \tag{8.18}$$

こうして，$(L^2)_D$ の要素は c.B.m. B_t による逐次積分の形の表現を持ち，定義 8.1 に述べた、"積分表現の核" とは，逐次積分の形の表現における被積分関数であることが分った。

Sem. on Probab.
Vol.53 1981年
P1-142

3、空間 $L^2(\mathcal{E}^* \to K)$。

空間 $(L^2)_D$ の代りに，可分な実Hilbert空間Kの中に値をとる汎関数の全体からなる空間 $L^2(\mathcal{E}^* \to K) \equiv L^2(\mathcal{E}^* \to K, \mu)$ を考え，この空間についても，$(L^2)_D$ に対して行なったと同様の表現を考えてみよう。

いま，$\Phi \in L^2(\mathcal{E}^* \to K)$，$y \in K$ とするとき，$(\Phi, y)_K \in (L^2)_D$ である。従って，(8.4) による変換 $\mathcal{T}$ を $(\Phi, y)_K$ に施すことことができ，その積分表現の核も定まる。それを具体的に見てゆこう。

$$\mathcal{H}_n(K) \equiv \{\Phi \in L^2(\mathcal{E}^* \to K)\ ;\ (\Phi, y)_K \in \mathcal{H}_n \ \text{for}\ {}^\forall y \in K\} \tag{8.19}$$

とおくとき，容易に次のことがたしかめられる。

$$L^2(\mathcal{E}^* \to K) = \sum \oplus \mathcal{H}_n(K), \quad (\text{Wiener-Itô decomposition}). \tag{8.20}$$

$\Phi \in \mathcal{H}_n(K)$ のとき，$(\Phi, y)_K \in \mathcal{H}_n$ より，(8.8) の結果から，$(\Phi, y)_K$ の積分表現の核 $\tau(\Phi, y)_K$ が定まる。ところで，Φ を1つ固定したとき，$\tau(\Phi, \cdot)_K$ は，Kから $\hat{L}^2((D\times T)^n)$ への線型写像になっている。この線型写像を $\tau\Phi$ で示そう。すなわち

$$\tau\Phi\ ;\ y \to (\tau\Phi)(y) \equiv \tau(\Phi, y)_K \in \hat{L}^2((D\times T)^n), \quad y \in K, \tag{8.21}$$

である。さらに，$\Phi \in \mathcal{H}_n(K)$ も動かして見るとき，τは

$$\tau : \Phi \to \tau\Phi \in \mathcal{L}(K \to \hat{L}^2((D\times T)^n)), \quad \Phi \in \mathcal{H}_n(K) \tag{8.22}$$

なる線型写像となる。ここで記号 $\mathcal{L}(K_1 \to K_2)$ は，K_1 から K_2 への有界な線型写像の全体からなる空間を示している。このとき，次の定理が成り立つ。

Th. 8.3. $\Phi \in \mathcal{H}_n(K)$ のとき，写像

$$\tau\Phi : K \to \hat{L}^2((D\times T)^n)$$

は Hilbert-Schmidt type で，その Hilbert-Schmidt norm は

$$\|\tau\Phi\|_{H\text{-}S} = (n!)^{-1/2}\,\|\Phi\|_{L^2(\mathcal{E}^*\to K)} \tag{8.23}$$

で与えられる。

(Proof) $\{e_\xi\}$ を K の c.o.n.s. としたとき，(8.8) を使って次の計算ができる。

$$\|\tau\Phi\|^2_{H\text{-}S} = \sum_\xi \|\tau(\Phi, e_\xi)_K\|^2_{L^2((D\times T)^n)}$$

$$= \sum_\xi \frac{1}{n!}\|(\Phi, e_\xi)_K\|^2_{(L^2)_D} = \frac{1}{n!}\|\Phi\|^2_{L^2(\mathcal{E}^*\to K)}.$$

この式より，定理が言える。 (Q.E.D.)

こうして，τ は $\mathcal{H}_n(K)$ から $\sigma_2(K, \hat{L}^2((D\times T)^n))$ への 1-1 の写像になっていることが分った。（のちに，onto 写像でもあることを示す。）

$\tau\Phi \in \sigma_2(K, \hat{L}^2((D\times T)^n))$ より，$\tau\Phi$ の共役な作用素 $(\tau\Phi)^*$ は $\sigma_2(\hat{L}^2((D\times T)^n), K)$ の要素であって，

$$\|(\tau\Phi)^*\|_{H\text{-}S} = \|\tau\Phi\|_{H\text{-}S}$$

である。 $\Phi\in\mathcal{H}_n(K)$ に対して $(\tau\Phi)^*$ を対応させる写像を τ^* で示そう。 すなわち

$$\tau^*: \Phi \to \tau^*\Phi \equiv (\tau\Phi)^* \in \sigma_2(\hat{L}^2((D\times T)^n), K),\ \Phi\in\mathcal{H}_n(K), \tag{8.24}$$

とする。 (8.23) より

$$\|\Phi\|_{L^2(\mathcal{E}^*\to K)} = \sqrt{n!}\,\|\tau^*\Phi\|_{H\text{-}S} \tag{8.25}$$

が成立している。

<u>Def. 8.3.</u> 写像 $\tau: \mathcal{H}_n(K) \longrightarrow \sigma_2(K, \hat{L}^2((D\times T)^n))$ を $\mathcal{H}_n(K)$ の第一表現と呼び，写像 $\tau^*: \mathcal{H}_n(K) \longrightarrow \sigma_2(\hat{L}^2((D\times T)^n), K)$ を

Sem. on Probab.
Vol.53 1981年
P1-142

$\mathcal{H}_n(K)$ の第二表現と呼ぶ。 又、$\Phi \in \mathcal{H}_n(K)$ に対して $\tau\Phi$ を Φ の第一表現, $\tau^*\Phi$ を Φ の第二表現と呼び、特に $\tau^*\Phi \in \sigma_2(\hat{L}^2((D\times T)^n), K)$ のことを, Φ の積分表現の核と呼ぶ。

この定義で, 積分表現の核と呼んだことの意味は, のちにはっきりする。

4、多重 Wiener 積分と逐次積分。 その2。

ここでは, Hilbert-Schmidt type の作用素に対して、多重 Wiener 積分と c.B.m. B_t による逐次積分とを定義して, 両者の関係, 及び表現との関係を明らかにする。

$S \in \sigma_2(L^2((D\times T)^n), K)$, $y \in K$, とするとき, $S^*y \in L^2((D\times T)^n)$ であるから, Def. 8.2 により S^*y の多重 Wiener 積分 $I(S^*y)$ が定義されている。 これに注意して、次の定義を与える。

<u>Def. 8.4.</u> $S \in \sigma_2(L^2((D\times T)^n), K)$ に対して, $I(S) \in L^2(\mathcal{E}^* \to K)$ を, 次式をみたすものと定義する。

$$(I(S), y)_K = I(S^*y) , \quad \text{for } \forall y \in K \tag{8.26}$$

そして, この $I(S)$ を S の多重 Wiener 積分と呼び, これを

$$I(S) = \int\cdots\int S\, dB_{t_1}\cdots dB_{t_n} \tag{8.27}$$

なる積分記号で示すことにする。 又, $\{I(S);\, S \in \sigma_2(L^2((D\times T)^n), K)\}$ を, n 次の多重 Wiener 積分の空間と呼ぶ。

<u>Remark 8.1.</u> $\hat{S} \in \sigma_2(\hat{L}^2((D\times T)^n), K)$ のときには, $\hat{S}^*y \in \hat{L}^2((D\times T)^n) \subset L^2((D\times T)^n)$ より $I(\hat{S}^*y)$ が定まり, 条件式

$$(I(\hat{S}), y)_K = I(\hat{S}^*y) \quad \text{for } \forall y \in K \tag{8.28}$$

により $I(\hat{S}) \in L^2(\mathcal{E}^* \to K)$ が一意的に定まる。 このI$(\hat{S})$ のことを、上と同様の記号で、

Sem. on Probab.
Vol.53 1981年
P1-142

$$I(\hat{\mathfrak{S}}) = \int \cdots \int \hat{\mathfrak{S}}\, dB_{t_1} \cdots dB_{t_n}$$

と書き、$\hat{\mathfrak{S}}$ の多重 Wiener 積分と呼ぶ。

すでに、$\mathfrak{S}^* y \in L^2((D \times T)^n)$ の積分表現に関しては、(8.11) ないしは (8.12) の結果が得られている。それらの結果を使うことにより、$I(\mathfrak{S})$ に関して次の結果が得られる。

Th. 8.4. (i) $\mathfrak{S} \in \sigma_2(L^2((D\times T)^n), K)$ のとき、$\mathfrak{S}$ の $\hat{L}^2((D\times T)^n)$ 上への制限を $\hat{\mathfrak{S}}$ とすれば

$$I(\mathfrak{S}) = I(\hat{\mathfrak{S}}) \tag{8.29}$$

が成立する。

(ii), 写像 $I : \sigma_2(L^2((D\times T)^n), K) \to L^2(\mathcal{E}^* \to K)$ は有界な線型写像であって、特に $\hat{\mathfrak{S}} \in \sigma_2(\hat{L}^2((D\times T)^n), K)$ に対しては

$$\| I(\hat{\mathfrak{S}}) \|_{L^2(\mathcal{E}^* \to K)} = \sqrt{n!}\, \| \hat{\mathfrak{S}} \|_{H\text{-}S} \tag{8.30}$$

が成立する。

(iii) $\Phi \in \mathcal{H}_n(K)$ のとき、Def. 8.3 による Φ の表現核 $\tau^*\Phi$ は $\tau^*\Phi \in \sigma_2(\hat{L}^2((D\times T)^n), K)$ であるが、このとき、

$$\Phi = I(\tau^*\Phi) = \int \cdots \int \tau^*\Phi\, dB_{t_1} \cdots dB_{t_n} \tag{8.31}$$

が成立する。すなわち、I は τ^* の逆写像である。

次いで、c.B.m. B_t による確率積分との関連を見ることにする。B_t は、本節のはじめに、$H = L^2(D)$ 上の white noise から構成された c.B.m. である。いま、$\mathfrak{S}(t, \omega) \in \sigma_2(H, K)$ が、§2 で述べたような可積分性と可測性の条件を満たしていれば、Def. 2.2 による確率積分 $\int_T \mathfrak{S}(t,\omega)\, dB_t$ が定義されて、$L^2(\mathcal{E}^* \to K)$ の要素になっている。

逐次積分を考えるための準備として、空間 $\sigma_2(H, K)$ の1つの

Sem. on Probab.
Vol.53 1981年
P1-142

表現を用意しよう。 $S \in \sigma_2(H, K)$ とすると，S は次の表現を持つ。

$$S\xi = \sum_{\gamma} \lambda_{\gamma} (\xi, \xi_{\gamma})_H e_{\gamma} , \quad \xi \in H \tag{8.32}$$

こゝで，$\{\xi_{\gamma}\}$ 及び $\{e_{\gamma}\}$ はそれぞれ H 及び K の1つの c.o.n.s. であって，$\lambda_{\gamma} \geq 0$ で，$\sum \lambda_{\gamma}^2 = \|S\|_{H\text{-}S}^2 < \infty$ である。 今、$H = L^2(D)$ なる関数空間に H を特定化しているので，$F \in L^2(D \to K, dx)$ を

$$F(x) \equiv \sum_{\gamma} \lambda_{\gamma} \xi_{\gamma}(x) e_{\gamma} , \quad x \in D \tag{8.33}$$

により与えると，(8.32) より

$$S\xi = \int_D F(x) \xi(x) dx , \quad \xi \in H = L^2(D) \tag{8.34}$$

が得られる。 又，norm についても

$$\|S\|_{H\text{-}S}^2 = \|F\|_{L^2(D \to K)}^2 \tag{8.35}$$

が計算により分る。

上とは逆に，$F \in L^2(D \to K, dx)$ に対して，(8.34) により H から K への作用素 S を定義すると，$S \in \sigma_2(H, K)$ であって，norm についての等式 (8.35) が成立する。

こうして，(8.34) の対応により $S \in \sigma_2(H, K)$ と $F \in L^2(D \to K)$ とが 1-1 に対応しており，この対応により $\sigma_2(H, K)$ と $L^2(D \to K)$ とが同型になることが言えた。 (8.34) の対応 $S \longleftrightarrow F$ において，S に対応する F を F_S，F に対応する S を S_F と書くことにしておこう。

上のような考察を行なうことにより，次の命題に示すような同値関係の存在が言える。

<u>Prop. 8.1.</u> (i). 上に見た (8.34) の対応，又はそれに類似の対応関係により，次の 1)～5) に示されるような同型関係が成り立つ。

Sem. on Probab.
Vol.53 1981年
P1-142

1) $\sigma_2(L^2(D^n), K) \cong L^2(D^n \to K)$

2) $\sigma_2(\hat{L}^2(D^n), K) \cong \hat{L}^2(D^n \to K)$

3) $\sigma_2(L^2((D\times T)^n), K) \cong L^2((D\times T)^n \to K)$

4) $\sigma_2(\hat{L}^2((D\times T)^n), K) \cong \hat{L}^2((D\times T)^n \to K)$

5) $L^2(T\times\mathcal{E}^* \to \sigma^2(L^2(D), K)) \cong L^2(T\times\mathcal{E}^* \to L^2(D\to K))$
$\cong L^2(\mathcal{E}^*\times(D\times T) \to K)$

(ii) $\mathcal{S}(t,\omega) \in L^2(T\times\mathcal{E}^* \to \sigma_2(L^2(D), K))$ が，$S(t,\cdot)$ は $\mathcal{B}_t$－可測，となっているとき，Def. 2.2 に従って確率積分

$$\hat{I}(\mathcal{S}) \equiv \int_T \mathcal{S}(t)\,dB_t$$

が定義されているが，このとき

$$E[\|\hat{I}(S)\|_K^2] = \int_T E[\|\mathcal{S}(t)\|_{H\text{-}S}^2]\,dt = \int_{D\times T} E[\|F_{\mathcal{S}}(x)\|_K^2]\,dx \qquad (8.36)$$

が成立する。

以上の準備の下で，Def. 2.2 による確率積分の逐次積分を考えることができる。$\mathcal{S} \in \sigma_2(L^2((D\times T)^n), K)$ なる $\mathcal{S}$ を1つとり出そう。Prop. 8.1 (i) の 3) の同型関係より，$\mathcal{S} \in L^2((D\times T)^n \to K)$ とみなそう。（記号を簡単にするため，$F_{\mathcal{S}}$ と書くべきところも $\mathcal{S}$ のまゝで使うことにする。）はじめに，$\mathcal{S}$ は階段関数になっていたと仮定しておこう。$(x_2, \cdots, x_n)$ を固定したとき，$\mathcal{S}(\cdot, x_2, \cdots, x_n) \in L^2((D\times T) \to K)$ であるが，同型関係

$$\begin{aligned} L^2((D\times T)\to K) &\cong L^2(T \to L^2(D\to K)) \\ &\cong L^2(T\to\sigma_2(L^2(D), K)) = L^2(T\to\sigma_2(H, K)) \end{aligned} \qquad (8.37)$$

により，$\mathcal{S} \in L^2(T\to\sigma_2(H, K))$ とみなして，$\mathcal{S}^{x_2\cdots x_n}_{(t_1)}$ と書こう。このとき，確率積分

$$\hat{I}_1(\mathcal{S})(x_2, \cdots, x_n) = \int_{-\infty}^{t_2} \mathcal{S}^{x_2\cdots x_n}_{(t_1)}\,dB_{t_1} \qquad (8.38)$$

が定義されて，

$$\hat{I}_1(S) \in L^2(\mathcal{E}^* \to L^2((D\times T)^{n-1} \to K)) \cong L^2(\mathcal{E}^* \times (D\times T)^{n-1} \to K) \qquad (8.39)$$

が容易に分る。

次に，$(x_3, \cdots, x_n)$ を固定したとき，x_2 の関数として

$$\hat{I}_1(S) \in L^2(\mathcal{E}^* \to L^2((D\times T) \to K)) \cong L^2(T\times \mathcal{E}^* \to \sigma^2(H, K)) \qquad (8.40)$$

と見れるので，

$$\hat{I}_2(S)(x_3, \cdots, x_n) \equiv \int_{-\infty}^{t_3} \hat{I}_1(S)(x_2, \cdots, x_n)\, dB_{t_2}(x_2) \qquad (8.41)$$

が定義できる。

以下，これを繰り返して $\hat{I}_k(S)(x_{k+1}, \cdots, x_n)$ が定義され，最後に

$$\hat{I}(S) \equiv \hat{I}_n(S) \quad \in L^2(\mathcal{E}^* \to K)$$

が定まる。

上の定義より，$S \to \hat{I}(S)$ なる対応は，線型で有界となっているので，定義域を，自然な形で，$\sigma_2(L^2((D\times T)^n), K)$ 全体に拡張することができる。

<u>Def. 8.5.</u> 上の $\hat{I}(S)$ を，$S \in \sigma_2(L^2((D\times T)^n), K) \cong L^2((D\times T)^n \to K)$ の遂次積分と呼び，

$$\hat{I}(S) = \int \cdots \int_{t_1 < \cdots < t_n} S(x_1, \cdots, x_n)\, dB_{t_1}(x_1) \cdots dB_{t_n}(x_n)$$

なる記号で示す。

<u>Remark 8.2.</u> 次の関係

$$\begin{array}{ccc} \sigma_2(\hat{L}^2((D\times T)^n), K) & \cong & \hat{L}^2((D\times T)^n \to K) \\ & & \cap \\ \sigma_2(L^2((D\times T)^n), K) & \cong & L^2((D\times T)^n \to K) \end{array}$$

により，$\hat{S} \in \sigma_2(\hat{L}^2((D\times T)^n), K)$ に対しても $\hat{I}(\hat{S})$ が定義されていることになる。

さて，いま定義した逐次積分 $\hat{I}(S)$ と，前に定義してあった多重 Wiener 積分 $I(S)$ とは，次の定理に述べる関係がある。

Th. 8.5. $\hat{S} \in \sigma_2(\hat{L}^2((D\times T)^n), K)$ のとき

$$I(\hat{S}) = n!\,\hat{I}(\hat{S}) \tag{8.42}$$

が成立している。

以上で得られた結果を式で書いてまとめると，次のようになる。

$$\left.\begin{aligned}
&L^2(\mathcal{E}^* \to K) = \sum \oplus \mathcal{H}_n(K)\\
&\mathcal{H}_n(K) \cong \sqrt{n!}\,\sigma_2(\hat{L}^2((D\times T)^n), K) \cong \sqrt{n!}\,\hat{L}^2((D\times T)^n \to K)\\
&\tau^* : \Phi \to \tau^*\Phi \in \sigma_2(\hat{L}^2((D\times T)^n), K) \cong \hat{L}^2((D\times T)^n \to K),\\
&\qquad \Phi \in \mathcal{H}_n(K)\\
&I : \hat{S} \to I(\hat{S}) = n!\,\hat{I}(\hat{S}) = n! \int\!\cdots\!\int_{t_1<\cdots<t_n} \hat{S}\, dB_{t_1}\cdots dB_{t_n}\\
&\qquad \hat{S} \in \sigma_2(\hat{L}^2((D\times T)^n), K) \cong \hat{L}^2((D\times T)^n \to K)\\
&I \circ \tau^* = id\ ;\ \mathcal{H}_n(K) \to \mathcal{H}_n(K)
\end{aligned}\right\} \tag{8.43}$$

以上，White noise analysis の考え方の基礎を，Hilbert空間の値をとる汎関数に関して考察してきた。この節の残りの部分では，上の議論を使って，§5 及び §6 で扱かった方程式の解の表現等を考えてみる。

まず，§5で扱った Ornstein-Uhlenbeck process についてみよう。方程式は

Sem. on Probab.
Vol.53 1981年
P1-142

$$dX_t = AX_t\,dt + dB_t,\ t>0. \qquad X_0 = x \in H \tag{8.44}$$

であったが、こゝでは、$H=L^2(D)$ としている。Th.5.2 により、A^{-1} が nuclear になる場合には、H内に発展解が存在していた。それを X_t とおくと、X_t は

$$X_t = T_t x + \int_0^t T_{t-s}\,dB_s \tag{8.45}$$

の形をしているので、この X_t を、$X_t \in L^2(\mathcal{E}^* \to H) = \sum \oplus \mathcal{H}_n(H)$ とみて、(8.43) の表現と比較してみる。X_t の n次の表現の核を $S_n(t)$ とおくと、

$$\left.\begin{aligned}
S_0(t) &= T_t x \\
S_1(t) &= \chi_{[0,t]}(t_1)\, T_{t-t_1} \sim \chi_{[0,t]}(t_1) \sum_n (T_{t-t_1}\xi_n)(x)\,\xi_n \\
&\qquad = \chi_{[0,t]}(t_1) \sum_n e^{-\lambda_n(t-t_1)}\,\xi_n(x)\,\xi_n \\
S_n(t) &\equiv 0, \qquad n \geqq 2,
\end{aligned}\right\} \tag{8.46}$$

である。ただし、$\{\xi_n\}$ は Aの固有ベクトルからなる Hのc.o.n.s.であり、$\{\lambda_n\}$ は、$-A$ の固有値である。

A^{-1} が nuclear でない場合には、H内には解は存在していないが、A^{-1} が Hilbert-Schmidt type のときには、Th.5.1 より、H_{-1} 内に解が求まる。その表現の核も (8.46) と同じになる。ただし、$S_n(t)$ は $S_n(t) \in \hat{L}^2((D\times T)^n \to H_{-1})$ と見直す必要があり、又、(8.46) の級数の収束も、H_{-1} で見る必要がある。

次に、§6 で扱かった process についてみよう。そのために、確率積分を繰り返すことによって、表現の核がどのように変化するか見ておく必要がある。基本的な計算式は、次の Lemma により与えられる。

Lemma 8.1. $H=L^2(D)$ であり，Kは可分な実Hilbert 空間とする。そして，$\Phi \in L^2(T\times\mathcal{E}^* \to \sigma_2(H,K))$ が次の条件 (i) (ii) を満たしているものとする。

(i) $\Phi(t,\omega)$ は $\mathcal{B}_t$-adapted である。

(ii) tをとめるごとに，$\Phi(t,\cdot) \in L^2(\mathcal{E}^* \to \sigma_2(H,K))$ であって，その Wiener-Itô 分解は次式で与えられているとする。

$$\Phi(t,\cdot) = \sum_n \Phi_n(t), \qquad \Phi_n(t) \in \mathcal{H}_n(\sigma_2(H,K)),$$

$$\Phi_n(t) = n! \int \cdots \int_{t_1<\cdots<t_n} S_n(t)\, dB_{t_1} \cdots dB_{t_n} . \tag{8.47}$$

ここで，表現の核 $S_n(t)$ は $S_n(t) \in \hat{L}^2((D\times T)^n \to \sigma_2(H,K))$ であるが，Prop. 8.1 (i) におけると同様の同型関係

$$\hat{L}^2((D\times T)^n \to \sigma_2(H,K)) \cong \hat{L}^2((D\times T)^n \to L^2(D\to K)) \cong \hat{L}^2((D\times T)^n \times D \to K)$$

により，

$$S_n(t) = S_n(t;x_1,\cdots,x_n;\xi) \in K \tag{8.48}$$

$$x_j \in D\times T,\ j=1,\cdots,n, \qquad \xi \in D$$

なる K-valued function とみなす。

以上の前提の下で，

$$\int_0^t \Phi(s)\, dB_s \in L^2(\mathcal{E}^* \to K)$$

の Wiener-Itô 分解の $\mathcal{H}_{n+1}(K)$-component は $\int_0^t \Phi_n(s)\,dB_s$ であって，その核 $F_{n+1}(t)$ は

$$F_{n+1}(t) = \frac{1}{n+1}\chi_{[0,t]}(t_{n+1})\, S_n(t_{n+1};x_1,\cdots,x_n;\xi_{n+1}) \tag{8.49}$$

$$\text{if } t_1 \le t_2 \le \cdots \le t_{n+1}$$

を，$(D\times T)^{n+1}$ 上へ，対称関数となるように拡張した関数である。ただし，$F_{n+1}(t) \in \hat{L}^2((D\times T)^{n+1}; K)$ なる見方をしている。

(Proof) $\displaystyle\int_0^t \Phi(s)\,dB_s = \sum \int_0^t \Phi_n(s)\,dB_s$

であるから，各 $\int_0^t \Phi_n(s)\,dB_s$ の表現の核を見ればよい。(8.47) より，

$$\int_0^t \Phi_n(s)\,dB_s = \int_0^t n!\Big(\underset{t_1<\cdots<t_n}{\int\cdots\int} \delta_n(s\,;x_1,\ldots,x_n\,;x)\,dB_{t_1}\cdots dB_{t_n}\Big)\,dB_s(x)$$

$$= n!\underset{0\le t_1\le\cdots\le t_{n+1}\le t}{\int\cdots\int} \delta_n(t_{n+1}\,;x_1,\ldots,x_n\,;x_{n+1})\,dB_{t_1}\cdots dB_{t_{n+1}}$$

$$= (n+1)!\underset{t_1\le\cdots\le t_{n+1}}{\int\cdots\int} \frac{1}{n+1}\chi_{[0,t]}\,\delta_n(t_{n+1}\,;x_1,\ldots,x_n\,;x_{n+1})\,dB_{t_1}\cdots dB_{t_{n+1}} \tag{8.50}$$

となる。これより $\int_0^t \Phi_n(s)\,dB_s \in \mathcal{H}_{n+1}(K)$ で，その核の形が (8.49) であることも分った。 (Q.E.D.)

さて，§6 の Th.6.1 の下で扱った例，について見てみよう。方程式は

$$dX_t = AX_t\,dt + BX_t\,dB_t\ ,\quad X_0 = x\in K \tag{8.51}$$

であり，ここで A, B は (6.13) 及び (6.14)，すなわち

$$A = -\int_0^\infty \lambda\,dE_\lambda\ ,\quad B = \int_0^\infty F(\lambda)\,dE_\lambda\ ,\quad F(\lambda)\in H = L^2(D)\ ;\ 連続$$

で与えられているとする。(8.51) の発展方程式の形は

$$X_t = T_t x + \int_0^t T_{t-s}BX_s\,dB_s \tag{8.52}$$

である。ここで，$T_t = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\,dE_\lambda$ である。

いま，X_t の n 次の表現の核を $F_n(t)$ とおくと，$T_{t-s}BX_s$ の n 次の核は

$$T_{t-s}BF_n(s) = \int_0^\infty e^{-\lambda(t-s)}F(\lambda,x)\,dE_\lambda\,F_n(s\,;x_1,\ldots,x_n) \tag{8.53}$$

である。従って，Lemma 8.1 により，$\int_0^t T_{t-s}BX_s\,dB_s$ の $(n+1)$

Sem. on Probab.
Vol.53 1981年
P1-142

次の核は

$$\frac{1}{n+1}\chi_{[0,t]}^{(n+1)\otimes}\int_t^\infty e^{-\lambda(t-t_{n+1})}F(\lambda, x_{n+1})\,dE_\lambda\, F_n(t_{n+1}; x_1, \ldots, x_n) \tag{8.54}$$

となっている。初期条件 $X_0 = x \in K$ より

$$F_0(t) = T_t x \tag{8.55}$$

であり、以下、(8.54) と (8.55) より

$$F_n(t; x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n!}\chi_{[0,t]}^{n\otimes}\int_0^\infty F(\lambda, x_1)\cdots F(\lambda, x_n)e^{-\lambda t}\,dE_\lambda x, \tag{8.56}$$

が得られる。

さて、X_t の Wiener-Itô decomposition を

$$X_t = \sum X_t^n, \qquad X_t^n \in \mathcal{H}_n(K)$$

としておくとき、定義から、(y, X_t^n) の核は $(y, F_n(t))$ であり

$$(y, F_n) = \frac{1}{n!}\chi_{[0,t]}^{n\otimes}\int_0^\infty F(\lambda, x_1)\cdots F(\lambda, x_n)e^{-\lambda t}\,d(E_\lambda x, y) \tag{8.57}$$

となる。すなわち

$$(y, X_t^n) = n!\,\hat{I}((y, F_n(t)))$$

$$= n!\int\cdots\int_{t_1<\cdots<t_n} < \frac{1}{n!}\chi_{[0,t]}^{n\otimes}\int_0^\infty F(\lambda, x_1)\cdots F(\lambda, x_n)e^{-\lambda t}\,d(E_\lambda x, y),$$

$$dB_{t_1}>, dB_{t_2}> \cdots, dB_{t_n}> \tag{8.58}$$

である。この式に Fubini 型の定理 (Th. 2.1) を使って

$$(y, X_t^n) = n!\int_0^\infty\left\{\int_{t_1<\cdots<t_n}<, \cdots\int< \frac{1}{n!}\chi_{[0,t]}^{n\otimes}F(\lambda, x_1)\cdots F(\lambda, x_n), dB_{t_1}>, \ldots, dB_{t_n}>\right\}$$

$$\times e^{-\lambda t}\,d(E_\lambda x, y) \tag{8.59}$$

が得られ、従って

$$X_t^n = n!\int_0^\infty\left\{\int_{t_1<\cdots<t_n}<, \cdots\int< \frac{1}{n!}\chi_{[0,t]}^{n\otimes}F(\lambda, x_1)\cdots F(\lambda, x_n), dB_{t_1}>\cdots, dB_{t_n}>\right\}e^{-\lambda t}\,dE_\lambda x \tag{8.60}$$

となる。ところで，(8.60) の確率積分の部分は，

$$n!\,\hat{I}\Big(\frac{1}{n!}\chi_{[0,t]}^{n\otimes} F(\lambda,x_1)\cdots F(\lambda,x_n)\Big) = I\Big(\frac{1}{n!}\chi_{[0,t]}^{n\otimes} F(\lambda,x_1)\cdots F(\lambda,x_n)\Big)$$

であるが，これは，公式 (8.10) と Hermite polinomial の性質を使って書き直すと

$$H_n\big(B_t(F(\lambda))\,;\,t\|F(\lambda)\|^2\big)$$

となる。こうして

$$X_t^n = \int_0^\infty H_n\big(B_t(F(\lambda))\,;\,t\|F(\lambda)\|^2\big)e^{-\lambda t}\,dE_\lambda x \tag{8.61}$$

が得られる。

(8.61) 式の右辺からなる級数が収束しているとき，X_t は次の形に表現されることになる。

$$\begin{aligned} X_t &= \sum_{n=0}^\infty X_t^n \\ &= T_t\Big\{\int_0^\infty\Big[\sum_{n=0}^\infty H_n\big(B_t(F(\lambda))\,;\,t\|F(\lambda)\|^2\big)\Big]dE_\lambda x \\ &= T_t\int_0^\infty \exp\Big\{B_t(F(\lambda))-\frac{1}{2}t\|F(\lambda)\|^2\Big\}\,dE_\lambda x \end{aligned} \tag{8.62}$$

この形は，A. Shimizu [2] で得られている explicite な formula と一致している。以上，我々の設定の下で，A. Shimizu の扱った例の解の表現を見た。

§6 で考察したもう1つの (6.22) についても見ておこう。

$$dX_t = AX_t\,dt + X_t\cdot dB_t\ ,\quad X_0\in H,\quad H=L^2([0,\pi]) \tag{6.22}$$

であった。そこで述べたように，この方程式は，そのままでは解が存在しないので，diffusion 項の係数 $X_t\cdot$ を修正した方程式を扱うことにする。すなわち，次の方程式

$$dX_t = AX_t\,dt + \Big(\int_0^\pi \Gamma(\sigma,\sigma')X(\sigma')\,d\sigma'\Big)\cdot dB_t(\sigma) \tag{8.63}$$

を考える。 ここで，A は §6. (6.22) の下で述べた $A=-\sqrt{-\Delta}$ なる作用素であり，Γ は $\Gamma\in H\otimes H_1$ とする。（H_1 等の空間についても §6 におけると同様とする。） このとき，Th. 6.2 により，方程式 (8.63) は H_{-1} 内に解を持つ。

さて，(8.63) の発展方程式の形は

$$X_t = T_t x + \int_0^t T_{t-s}\left\{\left(\int_0^\pi \Gamma(\sigma,\sigma')X_s(\sigma')d\sigma'\right)\cdot\right\} dB_s \qquad (8.64)$$

である。 そこで，この式の確率積分の項の表現の核がどうなるかを示べる必要がある。 以下，$[0,\pi]=D$ とおく。

次の 2 つの Lemma は，ほとんど明らかであろう。

<u>Lemma 8.2.</u> $X\in L^2(\mathcal{E}^*\to H_{-1})$ の表現の核が $\{F_n,\ n=0,1,2\cdots\}$, $F_n\in \hat{L}^2((D\times T)^n\to H_{-1})$，とするとき，

$$\int_0^\pi \Gamma(\cdot,\sigma')X(\sigma')d\sigma' \in L^2(\mathcal{E}^*\to H)$$

の表現の核は

$$\left\{\int_0^\pi \Gamma(\cdot,\sigma')F_n(x_1,\dots,x_n;\sigma')\,d\sigma' \in \hat{L}^2((D\times T)^n\to H),\ n=0,1,2,\dots\right\}$$

である。

<u>Lemma 8.3.</u> $Z\in L^2(\mathcal{E}^*\to \sigma_2(H,H_{-1}))$ の表現核が $\{J_n,\ n=0,1,2,\cdots\}$, $J_n\in L^2(\widehat{(D\times T)^n}\times D\to H_{-1})\cong \hat{L}^2((D\times T)^n\to\sigma_2(H,H_{-1}))$，であるとき，

$$T_t\circ Z \in L^2(\mathcal{E}^*\to \sigma_2(H,H_{-1}))$$

の表現核は

$$\left\{T_t J_n \in L^2(\widehat{(D\times T)^n}\times D\to H_{-1}),\ n=0,1,2,\dots\right\}$$

である。

さらに，積作用素については，次の Lemma が言える。

Sem. on Probab.
Vol.53 1981年
P1-142

<u>Lemma 8.4.</u> $Y \in L^2(\mathcal{E}^* \to H)$ の表現の核が $\{G_n,\ n=0,1,2,\cdots\}$,

$$G_n \in \hat{L}^2((D\times T)^n \to H) \cong \sigma_2(\hat{L}^2((D\times T)^n), H)$$

であるとき，積作用素 $Y\cdot \in L^2(\mathcal{E}^* \to \sigma_2(H, H_{-1}))$ の表現核は，

$$G_n(x_1,\dots,x_n;x)\sum_{j=0}^{\infty}\xi_j(x)\xi_j \in L^2(\widehat{(D\times T)^n}\times D \to H_{-1}) \tag{8.65}$$

$$\cong \hat{L}^2((D\times T)^n \to \sigma_2(H, H_{-1})),\quad n=0,1,\cdots$$

である。 ここで，$\{\xi_j\}$ は A の固有ベクトルからなる H の c.o.n.s. である。

<u>Remark 8.3.</u> $|\xi_j(x)| \leqq \sqrt{2/\pi}$ より $\sum_{j=0}^{\infty}\xi_j(x)\xi_j \in H_{-1}$ である。

(Proof of Lemma 8.4) Y の $\mathcal{H}_n(H)$-component を Y_n とし，$Y\cdot\xi$, $\xi\in H_{-1}$, の $\mathcal{H}_n(H_{-1})$-component を $(Y\cdot\xi)_n$ とおく。 定義に従って計算すると，

$$(Y_n\cdot\xi, \xi_j) = (Y_n, \xi\cdot\xi_j) = (I(G_n), \xi\cdot\xi_j) = I(G_n^*(\xi\cdot\xi_j))$$

$$= I\left(\int_0^{\pi} G_n(x_1,\dots,x_n;\sigma)\xi(\sigma)\xi_j(\sigma)\,d\sigma\right)$$

となる。 これより

$$Y_n\cdot\xi = I\left(\sum_{j=0}^{\infty}\left\{\int_0^{\pi} G_n(x_1,\dots,x_n;\sigma)\xi(\sigma)\xi_j(\sigma)\,d\sigma\right\}\xi_j\right)$$

が分り，従って

$$Y\cdot\xi = \sum_n Y_n\cdot\xi = \sum_n I\left(\sum_{j=0}^{\infty}\left\{\int_0^{\pi} G_n(x_1,\dots,x_n;\sigma)\xi(\sigma)\xi_j(\sigma)\,d\sigma\right\}\xi_j\right)$$

となり，両辺の第 n-component を比較して $(Y\cdot\xi)_n$ の核が (8.65) であることが分る。 (Q.E.D)

以上の Lemma を使って，上の方程式 (8.63) の解 X_t の表現の核を求めることができる。 今，X_t の表現の核を $\{F_n(t;x_1,\dots,x_n;\cdot),\ n=0,1,\cdots\}$ とおくと，Lemma 8.2, 8.3, 8.4

Sem. on Probab.
Vol.53 1981年
P1-142

により

$$T_{t-s}\left\{\left(\int_0^\pi \Gamma(\sigma,\sigma')X_s(\sigma')d\sigma'\right)\cdot\right\} \in L^2(\mathcal{E}^*\to\sigma_2(H,H_{-1}))$$

の表現の核は

$$T_{t-s}\left\{\int_0^\pi \Gamma(x,\sigma')F_n(s;x_1,\dots,x_n;\sigma')d\sigma' \sum \xi_j(x)\xi_j\right\}$$

$$=\int_0^\pi \Gamma(x,\sigma')F_n(s;x_1,\dots x_n;\sigma')d\sigma'\sum_{j=0}^\infty \xi_j(x)e^{-j(t-s)}\xi_j \qquad (8.66)$$

$$n=0,1,2,\cdots$$

である。従って、Lemma 8.1 を使い、(8.64) の右辺の積分核をもとめることができて次の方程式をうる。

$$F_0(t;\cdot)=T_tX_0$$

$$F_{n+1}(t;x_1,\dots,x_n;\cdot)$$

$$=\frac{1}{n+1}\chi^{(n+1)\otimes}_{[0,t]}\int_0^\pi\Gamma(x_{n+1},\sigma')F_n(t_{n+1};x_1,\dots,x_n;\sigma')d\sigma'\times$$

$$\times\left\{\sum_{j=0}^\infty \xi_j(x_{n+1})e^{-j(t-t_{n+1})}\xi_j\right\}, \qquad (8.67)$$

$$t_1\le t_2\le\cdots\le t_{n+1},\quad n=0,1,2,\cdots$$

この式より、初期値 X_0 が与えられたとき、順次 $F_0, F_1, \cdots$ が定まる。

さて、X_t の表現核 $\{F_n(t);\ t=0,1,2,\cdots\}$ が定まったとしたとき、$\eta\in\mathcal{E}$ に対して $U_n(t;\eta)\in H_{-1}$ を次式で定義する。

$$U_n(t;\eta)=\int\cdots\int F_n(t;x_1,\dots,x_n;\cdot)\eta^{n\otimes}(x_1,\dots x_n)dx^n \qquad (8.68)$$

この変換の意味は、$(L^2)_D$ の変換 $\mathcal{T}$ の定義式 (8.4) と、$\mathcal{T}$ による積分式 (8.8) とを見ると、だいたい分るだろう。ただし、$(L^2)_D$ でなく $L^2(\mathcal{E}^*\to H_{-1})$ における対応物をとったものとしてながめること。このことから $U_n(t;\eta)$ から、$U(t;\eta)$ を

$$U(t;\eta)=\sum_{n=0}^\infty U_n(t;\eta) \qquad (8.69)$$

と定義する。

$U_n(t;\eta)$ 及び $U(t;\eta)$ を $\mathcal{E}$ 上の汎関数として見るとき，$U(t;\cdot)$ が与えられると $\{U_n(t;\cdot), n=0,1,\cdots\}$ が定まり，$U_n(t;\cdot)$ より $F_n(t)$ が定まる。こうして，核 $\{F_n(t); n=0,1,\cdots\}$ は $\{U(t;\eta), \eta\in\mathcal{E}\}$ により一意的に定まることになる。又

$$\{\eta;\eta=\xi\otimes\zeta\in\mathcal{E}, \xi\in H=L^2(D), \zeta\in L^2(T)\}$$

は $\mathcal{E}$ 内で稠密であるから，$\{F_n(t), n=0,1,\cdots\}$ は，$\{U(t;\eta), \eta=\xi\otimes\zeta\in\mathcal{E}\}$ が分れば決定されることになる。

こうして，方程式 (8.63) を解くことは $\{U(t;\eta); \eta=\xi\otimes\zeta\in\mathcal{E}\}$ を決定することと同値になる。そこで，$U(t;\eta)$ についての方程式を導いてみよう。

Th.8.6. $\eta=\xi\otimes\zeta\in\mathcal{E}$ に対して，$U(t;\eta)$ は H_{-1} 上の次の方程式の解である。

$$\begin{cases} \dfrac{dU(t;\eta)}{dt} = AU(t;\eta) + \zeta(t)G(\xi)U(t;\eta), \quad t>0, \\ U(0;\eta)=X_0 \end{cases} \tag{8.70}$$

ここで，$G(\xi)$ は Γ ($=\Gamma(\cdot,\cdot)$ より定まる積分作用素) と ξ より次式により定まる H_{-1} 上の作用素である。

$$G(\xi)h = (\Gamma h)\cdot\xi, \quad h\in H_{-1} \tag{8.71}$$

この定理の証明は，$\Gamma(\sigma,\sigma')$ を

$$\Gamma(\sigma,\sigma') = \sum_{k,i=0}^{\infty} a_{ki}\, \xi_k(\sigma)\, \xi_i(\sigma')$$

と表現しておいて計算することになり，複雑になるので，省略する，Y. Miyahara [3] の Th.5.5 を見よ。

定理の (8.70) 式及び (8.71) 式をみると，元の方程式 (8.63) の $\Gamma X_t\cdot dB_t$ の部分が $(\Gamma U(t;\eta))\cdot\xi$ に対応していることが分る。方程式 (8.70) は random な方程式 (8.63) を変換し

Sem. on Probab.
Vol.53 1981年
P1-142

てdeterministicな方程式系に導いたものであるが，その際，bilinear formと呼ばれた確率積分の項が，deterministicな方程式(8.70)では，たしかにbilinearになっていることを注意しておこう。

表現核を使って，covariance functionの特徴づけもできるが，それについては，Y. Miyahara [4]で扱かわれていることを述べて，本稿では割愛する。

Sem. on Probab.
Vol.53 1981年
P1-142

参考文献

本文中に引用したもののほか、著者が参考にしたもの、あるいは特に関係が深いと思われるものを挙げた。

A.V. Balakrishnan [1], Stochastic Optimization Theory in Hilbert Spaces 1, Applied Mathematics and Optimization, Vol.1, No.2(1974), 97-120.

__________ [2], Stochastic Bilinear Partial Differential Equations, Proc. U.S.-Italy Conference on Variable Structure Systems, Oregon(1974).

__________ [3], Applied Functional Analysis, Springer(1976).

A. Bensoussan [1], Filtrage Optimal des Systemes Lineaires, Dunod, Paris(1971).

A. Bensoussan and R. Temam [1], Équations aux dérivees partielles stochastiques non linéaires (1), Israel J. Math. Vol.11 (1972), 95-129.

__________ [2], Équations stochastiques du type Navier Stokes, J. Func. Anal. Vol.13(1973), 195-222.

P. Billingsley [1], Convergence of Probability Measures,John Wiley & Sons(1968).

A.T. Bharucha-Reid [1], Random Intefral Equations, Academic Press(1972).

R.F. Curtain [1], A Survey of Infinite-Dimensional Filtering, SIAM Review Vol.17, No.3(1975), 395-411.

__________ [2], Estimation Theory for Abstract Evolution Equations Excited by General White Noise Processes, SIAM J. Control and Optimization, Vol.14, No.6(1976), 1124-1150.

__________ [3], Liner Stochastic Itô Equations in Hilbert Space, Lecture Notes in Control and Information Science, Vol.16(1979), 61-84.

R.F. Curtain and R.L. Falb [1], Itô's Lemma in Infinite Dimensions, J. Math. Anal. Appl., Vol.31(1970), 434-448.

__________ [2], Stochastic Differential Equations in Hilbert Space, J. Differential Equations, Vol.10(1971), 412-430.

Sem. on Probab.
Vol.53 1981年
P1-142

Yu.L. Daletskii [1], Infinite-dimensional Elliptic Operators and Parabolic Equations Connected with them, Russian Mathematical Surveys, Vol.22(1967), 1-53.

R. Datko [1], Extending a Theorem of A.M. Liapunov to Hilbert Space, J. Mathematical Analysis and Applications, Vol. 32(1970), 610-616.

D.A. Dawson [1], Stochastic Evolution Equations, Mathematical Biosciences, Vol.15(1972), 287-316.

__________ [2], Stochastic Evolution Equations and Related Measure Processes, J. Multivariate Analysis, Vol.5(1975), 1-55.

__________ [3], The Critical measure Diffusion Process, Z. Wahr. Vol.49(1977), 125-145.

__________ [4], Qualitative Behavior of Geostochastic Systems, Stochastic Processes and their Applications, Vol.10 (1980), 1-31.

D.A. Dawson and H. Salehi [1], Spatially Homogeneous Random Evolutions, J. Multivariate Analysis, Vol.10(1980), 141-180.

P.L. Falb [1], Infinite Dimensional Filtering: the Kalman-Bucy Filter in Hilbert Space, Inf. and Control, Vol.11(1967), 102-137.

A. Friedman [1], Stochastic Differential Equations and Applications, Vol.1 aand Vol.2, Academic Precc(1975).

T. Funaki [1], Construction of a Solution of Random Transport Equation wity Boundary Condition, J. Math. Soc. Japan, Vol.31(1979), 719-744.

__________ [2], Random Time Evolution of Strings and Related Stochastic Evolution Equation, to appear in Nagoya Math. J.

I.M. Gelfand and N.Ya. Vilenkin [1], Generalized Functions, Vol.4, Academic Press(1964).

L. Gross [1], Abstract Wiener Space, Proc. of 5th Berkeley Sympos. Math. Stat. Prob., Vol.2, Part 1(1967), 31-42.

__________ [2], Potential Theory on Hilbert Space, J. Funct. Analysis, Vol.1, No.2(1968), 123-181.

Y. Hasegawa [1], Lévy's Functional Analysis in Terms of an Infinite Dimensional Brownian Motion 1, 2, to appear in

Sem. on Probab.
Vol.53 1981年
P1-142

Osaka J. M.

Z. Haba [1], Functional Equations for Extended Hadrons, J. Math. Phys., Vol.18, No.11(1977), 2133-2137.

U.G. Haussmann [1], Asymptotic Stability of the Linear Itô Equation in Infinite Dimensions, J. Math. Anal. Appl., Vol.65(1978), 219-235.

T. Hida [1], Analysis of Brownian Functionals, Carleton Math. Lecture Notes No.13(1975).

__________ [2], Brownian Motion, Springer(1980).

T. Hida and N. Ikeda [1], Analysis on Hilbert Space with Reproducing Kernel Arising from Multiple Wiener Integral, Proc. 5th Berkeley Symp. on Math. Statst. and Prob., Vol.2, Part 1(1967), 117-143.

T. Hida and L. Streit [1], On Quanrum Theory in Terms of White Noise, Nagoya Math. J., Vol.68(1977), 21-34.

R.A. Holley and D.W. Stroock [1], Generalized Ornstein-Uhlenbeck Processes and Infinite Particle Branching Brownian Motions, Publ. RIMS Kyoto Univ., Vol.14(1978), 741-788.

A. Ichikawa [1], Linear Stochastic Evolution Equations in Hilbert Space, J. Diff. Eq., Vol.28(1978), 266-277.

K. Itô [1], Stochastic Analysis in Infinite Dimensions, Stochastic Analysis, Academic Press(1978), 187-197.

__________ [2], 無限個の粒子の運動, 数理研講究録, Vol.367(1979), 1-33.

G. Kallianpur [1], Stochastic Filtering Theory, Springer(1980).

G. Kallianpur and C. Striebel [1], Stochastic Differential Equations Occurring in the Estimation of Continuous Parameter Stochastic Processes, Theory of Probability and its Applications, Vol.14(1969), 567-594.

N.V. Krylov and B.L. Rozovskii [1], On Stochastic Evolution Equations, Sovremennye Problemy Matematiki 14, Itogi Nauki i Tekhniki(1979).

I. Kubo and S. Takenaka [1], Calculus on Gaussian White Noise I, II., Proc. Japan Acad., 56A(1980), 376-380, 411-416.

H. Kunita [1], Stochastic Integrals Based on Martingales Taking Values in Hilbert Space, Nagoya Math. J., Vol.38(1970), 41-52.

H.-H. Kuo [1], Stochastic Integrals in Abstract Wiener Space, Pac. J. Math., Vol.41(1972), 469-483.

__________ [2], Stochastic Integrals in Abstract Wiener Space (II); Regularity Properties, Nagoya Math. J., Vol.50 (1973), 89-116.

__________ [3], Differential and Stochastic Equations in Abstract Wiener Space, J. Functional Analysis, Vol.12 (1973), 246-256.

__________ [4], Gaussian Measures in Banach Spaces, Lecture Notrs in Math., Vol.463, Springer(1975).

R.S. Liptser and A.N. Shiryayev [1], Statistics of Random Processes; 1 General Theory, 2 Applications, Springer (1978).

R. Marcus [1], Parabolic Itô Equations, Trans. Amer. Math. Soc., Vol.198(1974), 177-190.

H.P. Mckean, Jr. [1], Stochastic Integrals, Academic Press(1969).

M. Metivier [1], Intégrale stochastíque par rapport à des processus à valeurs dans un espace de Banach réflexif, Theory of Probability and its Application, Vol.19, No.4 (1974), 787-816.

Y. Miyahara [1], Stochastic Differential Equations in Hilbert Space, OIKONOMIKA (Nagoya City University), Vol.14, No.1 (1977), 37-47.

__________ [2], Stability of Linesr Stochastic Differential Equations in Hilbert Space, Information, Decision and Control in Dynamic Socio-Economics, Bunshindo/Kinokuniya, Tokyo(1978), 237-252.

__________ [3], Infinite Dimensional Langevin Equation and Fokker-Planck Equation, Nagoya Math. J., Vol.81(1981), 177-223.

__________ [4], White Noise Analysis and an Application to Stochastic Differential Equations in Hilbert Space, to appear.

S. Mizuno [1], On Some Infinite Dimensional Martingale Problems and Related Stochastic Evolution Equations, Carleton Univ.(1978).

S. Ogawa [1], A Partial Differential Equation with the White Noise as a Coefficient, Z. Wahr., Vol.28(1973), 53-71.

K.R. Parthasarathy [1], Probability Measures on Metric Spaces, Academic Press(1967).

Sem. on Probab.
Vol.53 1981年
P1-142

B.L. Rozovskii [1], On Stochastic Differential Equations with Partial Derivatives, Math. Sb. Vol.96(1975), 314-341.

B.L. Rozovskii and A. Shimizu [1], Smoothness of Solutions of Stochastic Evolution Equations and the Existence of a Filtering Transition Density, to appear.

T. Shiga and A. Shimizu [1], Infinite Dimensional Stochastic Differential Equations and their Applications, J. Math. Kyoto Univ., Vol.20, No.3(1980), 395-416.

I. Shigekawa [1], Derivatives of Wiener Functionals and Absolute Continuity of Induced Measures, J. Math. Kyoto Univ., Vol.20, No.2(1980), 263-289.

A. Shimizu [1], Construction of a solution of a certain Ecolution Equation I, II, Nagoya Math. J., Vol.66(1977), 23-36, Vol.71(1978), 181-198.

__________ [2], Construction of a Solution of Linear Stochastic Evolution Equations on a Hilbert Space, Proccdings of the International Symposium on Stochastic Differential Equations, Kyoto(1976), 385-395.

A.V. Skorohod [1], Integration in Hilbert Space, Springer(1974).

渡辺信三 [1], 確率微分方程式, 産業図書 (1975).

Xia Dao-xing [1], Measure and Integration Theory on Infinite-Dimensional Spaces, Academic Press(1972).

M. Yor [1], Existence et unicité de diffusions à valeurs dans un espace de Hilbert, Annales de l'Institut Henri Poincare, Section B, Vol.10, No.1(1974),55-88.

K. Yosida [1], Functional Analysis, Springer(1965).

Sem. on Probab.
Vol.53 1981年
P1-142

１９８１年１１月　確率論セミナー発行