Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

SEMINAR ON PROBABILITY

Vol. 50

エルゴード理論ウインタースクール講義録

1980年 3月 於 山 中 湖

1 9 8 1

確 率 論 セ ミ ナ ー

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

前書き

この講義録は、1980年3月23日～26日、山中湖畔で開かれたエルゴード理論ウィンター・スクールの講義ノートを聴講していた大学院生の人達にまとめてもらったものです。一応、講師の方々も原稿に目を通されたようではありますが、まとめにあたっての責任は講師諸氏よりも、むしろ記録者にありますことを最初におことわりしておきます。

ウィンター・スクールの趣旨は、エルゴード理論の最近の話題を大学院生を中心とした若い人々や専門外の人々に解説し、その講義録を作り、それは専門家にとっても価値の高いものであるようにということでした。その趣旨に賛同して下さった三講師、講義の記録を担当して下さった大学院の方々、それに広い分野・階層の聴講者の方々のおかげで、このウィンター・スクールは成りたちました。

ここに、講義録を Seminar on Probability Vol.50 として出版できる運びになったことはうれしいかぎりです。お願いした講師、講義題名、講義録の執筆者は下記の通りです。

村田　博　「無限粒子系の力学系」　(関口大資)

釜江哲朗　「Combinatorial number theory への ergodic theory の応用」　(伊達山正人)

高橋陽一郎　「Chaos と平衡測度」　(笹野一洋)。

記録のため、このウィンター・スクールの運営に関して付記しておきますと、会場（筑波大学山中共同研修所）の収容人数の制約上、聴講者の募集は、若手、非専門家を優先して選別する可能性のあることを宣言して行いましたが、現実には幸運にも申込み者全員（約50名）に参加して頂くことが出来ました。講義は7日間に渡って毎日午前中1 時間ずつ三コマを、朝起きの順を考慮して、村田、釜江、高橋氏の順番にお願いし、午後は3 時までを復習時間、3 時～5 時を質問の時間とし、毎日の講義をその日に消化出来るよう配慮しました。また夜は参加者の自発的なセミナーや討論会が開かれることを期待して、世話人側としては何も企画せず自由時間としました。この質問時間と夜の自由時間がいかに有効に使われるかが、ウィンター・スクールの成功の鍵であろうと考えておりましたが、予想通り活発に運営され、若い参加者にとっては講義の内容とともに強い刺激になったことと信じています。

最後に、このスクールを思いたったのは、宇敷重広氏からうかがったイタリヤの夏の学校や山口昌哉教授の催された京都の夏の学校に刺激されてでしたが、今後各分野において、特色ある春・夏・秋・冬の学校が開かれるようになれば有意義ではないかと思います。その意

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

味でも、1981年3月に浦川肇・竹中茂夫両氏によって企画されている古典力学の春の学校の成功を期待しております。

1980 年 12 月

エルゴード理論ウィンター・スクール世話人

十時東生

森 真

(文責) 久保 泉

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

目　　次

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

無限粒子の力学系

慶応義塾大学
関口資大

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

§1 無限粒子系

（同一種の）無限個の粒子の運動に対応する方程式（ある種の無限次元発展方程式）をたて，その方程式の解の存在とその性質を解析するという方向の仕事は最近の10〜15年の間に数多く発表され，統計力学的観点から見ても非常に興味深い。しかしながら，単に無限粒子系と言ってもモデルが多種多様で，それに対応して数学的定式化も異なってくる。そこで，ここでは

(1) 各粒子は $\mathbb{R}^\nu$ を運動する（連続系）

(2) ポテンシャルは２体間力のみによって与えられ，古典力学に従う運動をする

のような *Hamiltonian* の正準方程式に限って考える。

〈1〉 *Phase space* について

質点系の *Phase space* $\mathcal{X}$ を次のものとする。

$$\mathcal{X} = \left\{ x=(q_i,p_i)_{i\in I} \;\middle|\; \begin{array}{l} q_i, p_i \in \mathbb{R}^\nu,\ \forall i \in I \subset \mathbb{Z},\ q_i \neq q_j \text{ for } i \neq j \\ N(x,\Delta) = \#\{i \mid q_i \in \Delta\} < \infty \text{ for } \forall \Delta \subset \mathbb{R}^\nu \text{ bdd} \end{array} \right\} \Big/ \sim$$

: *the set of all locally finite configurations*
（*Polish space* : [17]）

Remark 1. "$\sim$" は同値類で分けることを意味する。つまり粒子の番号付けをおこなわないでみた配置であると理解する。

Remark 2. "$N(x,\Delta)<\infty$ for $\forall\Delta\subset\mathbb{R}^\nu$ bdd" が *locally finite* を表わしている。

以降 $\mathcal{X}$ の適当な部分集合について解の構成などを行なっていく。

〈2〉 *Potential* について

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

potentialは次のようなpair potentialとする。

$$\Phi : \mathbb{R}^{\nu} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

even function, translation invariant

以降このΦに"finite range""long range""hard core"などの条件をつけていく。

〈3〉Hamiltonianについて

"formal"に次のようにおく。
$x = (q_i, p_i)_{i \in I}$に対して

$$H(x) = \frac{1}{2m} \sum_{i \in I} |p_i|^2 + \sum_{\substack{i<j \\ i,j \in I}} \Phi(q_i - q_j)$$

とする。

Remark. ここで"formal"と言ったのはこの$H(x)$の収束が一般には保証されないからである。

〈4〉Equation of motionについて

この講義全体を通じて運動方程式はΦが滑らかな場合次の形（正準方程式系）で与えられるものとする。

$$(1-1)\quad \begin{cases} \dfrac{dq_i(t)}{dt} = \dfrac{1}{m} p_i(t) \left(= \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \right) \\ \dfrac{dp_i(t)}{dt} = \sum_{j \neq i} F(q_i(t) - q_j(t)) \left(= -\dfrac{\partial H}{\partial q_i} \right) \\ q_i(0) = q_i,\ p_i(0) = p_i \quad \text{ただし } F = -\mathrm{grad}\,\Phi \end{cases}$$

又(1−1)をΦに関する適当な滑らかさの仮定の下で積分形に直すと，

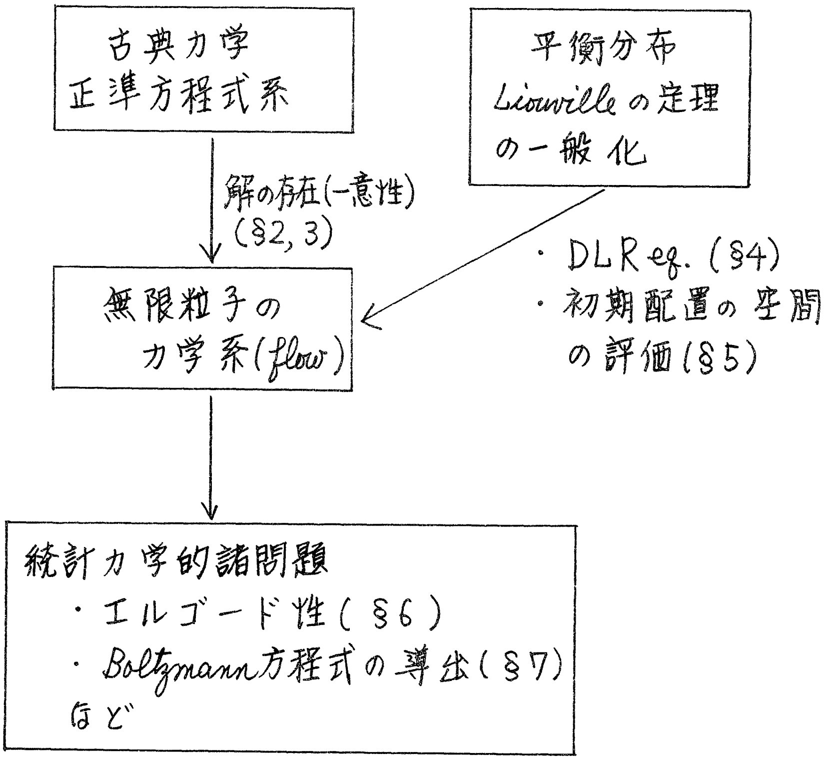
$$(1-2)\qquad q_i(t) = q_i + \frac{p_i}{m} t + \frac{1}{m} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \left\{ \sum_{j \neq i} F(q_i(t_2) - q_j(t_2)) \right\}$$

となり，さらに

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

$$q_i(t) = q_i + \frac{p_i}{m} t + \frac{1}{m}\int_0^t dt_1\,(t-t_1)\sum_{j\neq i} F\left(q_i(t_1) - q_j(t_1)\right)$$

となる。



Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

§2 解の構成 I（Lanford [18] の方法）

〈1〉 finite range potential の場合

次の事を仮定する。

$\Phi \in C^3(\mathbb{R}^\nu)$, finite range (interaction)

Remark Φ が finite range であるとは、有界な $R \in \mathbb{R}^+$ に対して

$$\Phi(q) \equiv 0 \quad \text{if} \quad |q| > R$$

ということである。

以下では F は Lipschitz condition をみたすことも仮定する。

任意の自然数 s に対して Λ_s は原点中心の半径 s の球を表わす。

<u>定義</u> $x^{(s)}(t) = (q_i^{(s)}(t), p_i^{(s)}(t))_{i \in I}$ は次の２つの条件をみたす解とする。

(a) もし、q_i が Λ_s の外側（$|q_i| > s$）ならば $q_i^{(s)}(t)$, $p_i^{(s)}(t)$ は constant である。（従って $p_i^{(s)}(t) \equiv 0$）

(b) もし、q_i が Λ_s の内側（$|q_i| \leqq s$）ならば次の法則に従って動き、

$$(2-1) \quad \begin{cases} \dfrac{d q_i^{(s)}(t)}{dt} = \dfrac{p_i^{(s)}(t)}{m} \\ \dfrac{d p_i^{(s)}(t)}{dt} = \displaystyle\sum_{j \neq i} F(q_i^{(s)}(t) - q_j^{(s)}(t)) \\ \text{ただし初期配置 } x^{(s)}(0) = x = (q_i, p_i)_i \end{cases}$$

かつ、Λ_s の境界では弾性反射する。

Remark (2-1)式では Λ_s の内側の粒子に対して Λ_s の外側の粒子からの影響も考慮してある。

そこでこの $x^{(s)}(t)$ に対して $T_{(s)}^t x$ を定義する。

<u>定義</u> $\mathcal{X}$ 上の one-parameter group of mappings $T_{(s)}^t$ を

$$T_{(s)}^t x \equiv x^{(s)}(t), \quad x^{(s)}(0) = x \in \mathcal{X}$$

と定義する。

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

$$\log_+(q) \equiv \log(|q| \vee e)$$

とおくと、次の3つの不等式が成立することに注意する。

$$\log_+(a+b) \leqq \log_+(a) + \log_+(b)$$
$$\log_+(a \cdot b) \leqq \log_+(a) + \log_+(b)$$
$$\log_+(a) \leqq |a| \qquad \text{if } |a| \geqq 1$$

<u>定義</u> $\forall x \in \mathfrak{X}$ に対して

$$B(x) \equiv \sup_i \frac{|P_i|/m}{\log_+(q_i)}$$

$$\overline{B_{(s)}}(x) \equiv \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} B(T_{(s)}^t x)$$

$$\overline{B_\infty}(x) \equiv \liminf_{s \to \infty} \overline{B_{(s)}}(x)$$

とする。

これを使って$\mathfrak{X}$の部分集合$\mathfrak{X}_0$を次のようにする。

$$\mathfrak{X}_0 \equiv \{x \in \mathfrak{X} \mid \overline{B_\infty}(x) < \infty\}$$

<u>定理1</u> $\mathfrak{X}_0$上の *one-parameter group of mappings* T_tが存在して、$\forall x \in \mathfrak{X}_0$に対して$T_t x = x(t)$とおくと、$x(t)$は$x(0)=x$を初期配置とする(1—1)の解である。

証明 (i) $\overline{B_\infty}(x) = \liminf_{s\to\infty} \overline{B_{(s)}}(x)$であるから、$\overline{B_\infty}$が有界であるということと、$\forall n$に対して

$$\overline{B_{(s_n)}}(x) \leqq b$$

であるような$\{s_n\} \nearrow \infty$, $b(<\infty)$が存在することと同値である。

一方、$t \geqq 0$に対して

$$\left|\int_0^t \frac{|dq_i^{(s)}(u)/du|}{\log_+(q_i^{(s)}(u))} du\right| \leqq \int_0^t \sup_i \frac{|P_i^{(s)}(u)/m|}{\log_+(q_i^{(s)}(u))} du$$
$$\leqq \pi(1+\tau^2)\overline{B_{(s)}}(x) \qquad \forall s,\ \forall t \in [0,\tau]$$

が成立する。なぜならば、$t \leqq \tau$に対して

$$\pi(1+\tau^2)\overline{B_{(s)}}(x) \geqq \int_0^t \frac{1+\tau^2}{1+u^2} B(T_{(s)}^u x)\, du \geqq \int_0^t B(T_{(s)}^u x)\, du$$

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

が成立するからである。

$t<0$ の時も同様にして

$$\left|\int_0^t \frac{|dq_i^{(s)}(u)/du|}{\log_+(q_i^{(s)}(u))}du\right| \leqq \pi(1+\tau^2)\overline{B}_{(s)}(x) \quad \forall s,\ \forall t\in[-\tau,0)$$

が成立する。従って、$\forall s$, $|t|\leqq\tau$ において

$$\left|\int_0^t \frac{|dq_i^{(s)}(u)/du|}{\log_+(q_i^{(s)}(u))}du\right| \leqq \pi(1+\tau^2)\overline{B}_{(s)}(x)$$

となる。ここで$\{s\}$のかわりに$\{s_m\}$をとると

$$\begin{aligned}\left|\int_0^t \frac{|dq_i^{(s_m)}(u)/du|}{\log_+(q_i^{(s_m)}(u))}du\right| &\leqq \pi(1+\tau^2)\overline{B}_{(s_m)}(x)\\ &\leqq \pi(1+\tau^2)b \quad \forall m,\ \forall i,\ \forall |t|\leqq\tau\end{aligned}$$

が成立する。

次の補題を使う。

<u>補題</u> $\forall b>0$ に対して正定数$M(b)$が存在して、任意の連続的微分可能な$\mathbb{R}^\nu$一値関数qで

$$\left|\int_{t_1}^{t_2}\frac{|dq/dt|}{\log_+(q)}dt\right| \leqq b$$

をみたすならばつねに

$$|q(t_2)-q(t_1)| \leqq M(b)\log_+(q(t_1))$$

となるようにできる。

補題からある$M(=M(\tau,b))$が存在して

(2—2) $\quad |q_i^{(s_m)}(t)-q_i| \leqq M\log_+(q_i) \quad \forall m,\ \forall i,\ \forall |t|\leqq\tau$

が言える。(2—2)式の意味するところは、時間$t\in[-\tau,\tau]$では任意の粒子iは高々$M\log_+(q_i)$しか動かないということである。

(ii) $\{p_i^{(s_m)}(t)\,;\,|t|\leqq\tau\}_{m=1}^{\infty}$ は同程度連続、一様有界なことを示す。iとτをfixして、便宜的に

$$F_i^{(s)}(t)=\sum_{j\neq i}F(q_i^{(s)}(t)-q_j^{(s)}(t))$$

と記すと、第i番目の粒子がΛ_{s_m}に衝突するまでは

$$\frac{dp_i^{(s_m)}(t)}{dt}=F_i^{(s_m)}(t)$$

が成立している。

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

そこでnを

$$S_n > |q_i| + M\log_+(q_i)$$

をみたすように十分大きくとるならば(2―2)より第i番目の粒子は$[-\tau, \tau]$でΛ_{S_n}に衝突することはない。

一方

$$F(q_i^{(S_n)}(t) - q_j^{(S_n)}(t)) \neq 0$$

をみたすjは

$$|q_j| - M\log_+(q_j) \leqq |q_i| + M\log_+(q_i) + R$$

R : *finite range* の幅

をみたさねばならない。なぜならば

$$|q_i^{(S_n)}(t) - q_j^{(S_n)}(t)| \leqq R \qquad \forall t \in [-\tau, \tau]$$

$$R \geqq |q_i - q_j| - M\log_+(q_i) - M\log_+(q_j) \qquad \text{（補題から）}$$

であることよりわかる。

ところが$\mathcal{X}$が*locally finite*であるから、これをみたすjは有限個しかない。これをNとおくと、明らかに

$$|F_i^{(S_n)}(t)| \leqq N\|F\|_\infty$$

となる。ただし

$$\|F\|_\infty = \sup_q |F(q)|$$

である。

ゆえにiとτを*fix*しておくと

$$\left|\frac{dP_i^{(S_n)}(t)}{dt}\right| \leqq N\|F\|_\infty < \infty$$

が$|t| \leqq \tau$と十分大きなnに対して成立する。従って$\{P_i^{(S_n)}(t); |t| \leqq \tau\}_{n=1}^{\infty}$は同程度連続、一様有界となる。

(iii) Ascolli－Arzelàの定理を使うことによって$\{S_n\}_{n=1,2,\ldots}$の部分列$\{L_\ell\}_{\ell=1,2,\ldots}$が存在して$\{P_i^{(L_\ell)}\}_{\ell=1,2,\ldots}$は一様収束するようにできるから各$i$に対して、

$$P_i(t) = \lim_{\ell\to\infty} P_i^{(L_\ell)}(t), \quad \forall |t| \leqq \tau$$

が定義できる。従って$P_i(t)$の存在がわかる。

(iv) 最後に$q_i(t)$の存在を言う。

nを十分大きくとると、第i粒子は$|t| \leqq \tau$ではΛ_{S_n}の境界に達し

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

ていない。従って運動方程式

$$q_i^{(S_m)}(t) = q_i + \frac{1}{m}\int_0^t p_i^{(S_m)}(t_1)dt_1$$

が成り立つ。(iii)で取った部分列に沿って $n \longrightarrow \infty$ とすると上式の右辺はまた $\forall i$ と $|t| \leqq T$ に対して一様収束するから，その極限を $q_i(t)$ とおくと，

$$q_i(t) = q_i + \frac{1}{m}\int_0^t p_i(t_1)dt_1$$

となる。同様にして

$$p_i^{(S_m)}(t) = p_i + \int_0^t dt_1 \sum_{j \neq i}\left(F\left(q_i^{(S_m)}(t) - q_j^{(S_m)}(t)\right)\right) \tag{2—3}$$

に対して $\{q_j^{(S_m)}\}_{m=1,2,\cdots}$ の部分列の一様収束性，F の連続性，j についての和の一様収束性を使い，(2—3)で $n \longrightarrow \infty$ とすると，

$$p_i(t) = p_i + \int_0^t dt_1 \sum_{j \neq i}\left(F(q_i(t) - q_j(t))\right)$$

を得る。

従って極限 $x(t) \equiv (q_i(t), p_i(t))_{i=1,2,\cdots}$ は与えられた運動方程式の積分形をみたしているので解となる。

（証明終）

最後に補題の証明を加える。

証明 (i) $t_1 \leqq t_2$ の時

$$q_{max} \equiv \max_{t_1 \leqq t \leqq t_2} |q(t) - q(t_1)|$$

とすると，

$$q(t) \leqq q_{max} + |q(t_1)| \qquad \text{if} \quad t_1 \leqq t \leqq t_2$$

となる。$\log_+(\cdot)$ の性質から

$$\log_+(q(t)) \leqq \log_+(q_{max}) + \log_+(q(t_1))$$

となる。これを仮定に代入すると，

$$\int_{t_1}^{t} \frac{|dq/dt|}{\log_+(q_{max}) + \log_+(q(t_1))} dt \leqq \int_{t_1}^{t} \frac{|dq/dt|}{\log_+(q(t))} dt$$

$$\leqq b \qquad t_1 \leqq \forall t \leqq t_2$$

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

が成立する。従って

$$\int_{t_1}^{t}\left|\frac{dg}{dt}\right|dt \leqq b\{\log_+(g_{max})+\log_+(g(t_1))\}$$

となる。ところが一般に

$$\left|\int_{t_1}^{t}\frac{dg}{dt}dt\right| \leqq \int_{t_1}^{t}\left|\frac{dg}{dt}\right|dt$$

であるから

$$|g(t)-g(t_1)| \leqq b\{\log_+(g_{max})+\log_+(g(t_1))\}$$

となり，ゆえに

(2―4) $$g_{max} \leqq b\{\log_+(g_{max})+\log_+(g(t_1))\}$$

となる。

ここで$\log_+(\cdot)$という関数について考えてみると，$\forall\varepsilon>0$に対して，あるAが存在して

$$\log_+(x) \leqq A+\varepsilon x \quad (x \geqq 0)$$

とすることができる。これを(2―4)に使い変形すると，

$$(1-b\varepsilon)g_{max} \leqq Ab + b\log_+(g(t_1))$$

となる。$b\varepsilon<1$ となるようにεを十分小さくとっておくと，

$$g_{max} \leqq \frac{Ab}{1-b\varepsilon}+\frac{b}{1-b\varepsilon}\log_+(g(t_1))$$

となる。ここで

$$B=B(b)\equiv\frac{Ab}{1-b\varepsilon}, \quad C=C(b)\equiv\frac{b}{1-b\varepsilon}$$

とおくと

$$\begin{aligned} g_{max} &\leqq B + C\log_+(g(t_1)) \\ &= \log_+(g(t_1))\left[\frac{B}{\log_+(g(t_1))}+C\right] \\ &\leqq \log_+(g(t_1))\cdot(B+C) \qquad (\log_+(g(t_1)) \geqq 1 \text{より}) \end{aligned}$$

となる。

$$M = B + C$$

とおくと，

$$g_{max} \leqq M\log_+(g(t_1))$$

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

ゆえに

$$|q(t_2)-q(t_1)| \leqq M \log_+(q(t_1))$$

となる。

(ii) $t_1 > t_2$ の時

$$q_{max} \equiv \max_{t_2 \leqq t \leqq t_1} |q(t)-q(t_1)|$$

とおき

$$|q(t)| \leqq q_{max} + |q(t_1)| \quad \text{if} \quad t_2 \leqq t \leqq t_1$$

に注意すると,

$$\int_t^{t_1} \frac{|dq/dt|}{\log_+(q_{max}) + \log_+(q(t_1))} dt \leqq \int_t^{t_1} \frac{|dq/dt|}{\log_+(q(t))} dt$$
$$\leqq b \qquad t_2 \leqq {}^\forall t \leqq t_1$$

となる。従って

$$q_{max} \leqq b\{\log_+(q_{max}) + \log_+(q(t_1))\}$$

となる。後は(i)と同様にする。

（証明終）

解の一意性について述べておく。

$\Delta(\alpha)$; $\alpha(\in \mathbb{Z}^\nu)$ 中心の $\mathbb{R}^\nu$ の単位立方体

$N(x;\Delta(\alpha))$; 初期配置 $x=(q_i,p_i)_{i\in I}$ で $\Delta(\alpha)$ 内に入っている粒子の数

今 $\mathcal{X}$ の部分空間 $\mathcal{X}_1$ を次のように定義する。

$$\mathcal{X}_1 \equiv \left\{ x \in \mathcal{X} \;\middle|\; {}^\exists \sigma > 0 \text{ s.t. } \sup_\alpha \frac{N(x;\Delta(\alpha))}{[\log_+(\alpha)]^\sigma} < \infty \right\}$$

<u>定理2</u>　F: Lipschitz continuous, finite range (R)
${}^\forall x \in \mathcal{X}_1$ に対して $[0, {}^\forall \tau]$ 上の運動方程式(1—1)の解で,
$x(0)=x$ かつ

$$(2—5) \qquad \sup_{0\leqq t\leqq \tau} \sup_i \frac{|q_i(t)-q_i|}{\log_+(q_i)} < \infty$$

をみたす解は高々1つしか存在しない。

証明 (o) (2—5)をみたす解 $x^{(1)}(t)$, $x^{(2)}(t)$ の2つが存在したと仮定する。Mを十分大きく取れば,

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

(2—6) $\quad |q_i^{(\ell)}(t) - q_i| \leqq M \log_+(q_i) \qquad \ell = 1, 2 \quad \forall t \in [0, \tau],\ \forall i$

とできる。そこで，

$$F_i^{(\ell)}(u) \equiv \sum_{j \neq i} F(q_i^{(\ell)}(u) - q_j^{(\ell)}(u))$$

とおくと(1—1)は次の積分形になる。

$$q_i^{(\ell)}(t) = q_i + \frac{t}{m} p_i + \frac{1}{m}\int_0^t ds \int_0^s du\, F_i^{(\ell)}(u) \qquad \ell = 1, 2,\ \forall t \in [0, \tau]$$

すると

(2—7) $\quad q_i^{(1)}(t) - q_i^{(2)}(t) = \frac{1}{m}\int_0^t ds \int_0^s du \left[F_i^{(1)}(u) - F_i^{(2)}(u)\right] \qquad \forall t \in [0, \tau]$

となる。ここでは

$$|q_i^{(1)}(t) - q_i^{(2)}(t)| = 0 \qquad \forall t \in [0, \tau]$$

を言う。

i を fix して考える。

$$|q_i| \leqq r$$

となるような r に対して，

(2—8) $\quad r_1 = r_1(r) \equiv \sup\{ s\,;\, s - M \log_+(s) \leqq r + M \log_+(r) + R \}$

とする。

(i) $|q_j| \geqq r_1$ の時 $F(q_i^{(\ell)}(t) - q_j^{(\ell)}(t))$ について調べる。

(2—6)より

$$\begin{aligned} |q_i^{(\ell)}(t)| &\leqq M \log_+(q_i) + |q_i| \\ &\leqq M \log_+(r) + r \qquad \ell = 1, 2 \quad \forall t \in [0, \tau] \end{aligned}$$

となる。同様にして

$$\begin{aligned} |q_j^{(\ell)}(t)| &\geqq |q_j| - M \log_+(q_j) \\ &\geqq r + M \log_+(r) + R \\ &\geqq |q_i^{(\ell)}(t)| + R \qquad \ell = 1, 2 \quad \forall t \in [0, \tau] \end{aligned}$$

となる。ゆえに

$$|q_j^{(\ell)}(t) - q_i^{(\ell)}(t)| \geqq R \qquad \ell = 1, 2 \quad \forall t \in [0, \tau]$$

となる。従って(i)の時は *finite range* R より，

$$F(q_i^{(\ell)}(t) - q_j^{(\ell)}(t)) = 0 \qquad \ell = 1, 2 \quad \forall t \in [0, \tau]$$

となる。

(ii) $|q_j| \leqq r_1$ の時 $F(q_i^{(\ell)}(t) - q_j^{(\ell)}(t))$ について調べる。

(2—8)のr_1の取り方から

$$\sup_{r} \frac{\log_+(r_1(r))}{\log_+(r)} < \infty$$

がわかる。従って$M'>M$なるM'が存在して，

$$|q_j^{(\ell)}(t) - q_j| \leqq M' \log_+(r) \qquad \ell = 1,2 \quad \forall t \in [0,\tau]$$

となる。ゆえに，

$$|q_i^{(\ell)}(t) - q_j^{(\ell)}(t)| \geqq |q_i - q_j| - 2M'\log_+(r)$$

であるから，iを fix しておいた時

$$|q_i - q_j| \geqq 2M'\log_+(r) + R$$

をみたすjについては、finite range Rより，

$$F(q_i^{(\ell)}(t) - q_j^{(\ell)}(t)) = 0 \qquad \ell = 1,2 \quad \forall t \in [0,\tau]$$

となる。

(iii) $F(q_i^{(\ell)}(t) - q_j^{(\ell)}(t)) \neq 0$となる$j$の個数を調べる。

$$\begin{aligned}
&\# \{j ; |q_i - q_j| < 2M'\log_+(r) + R\} \\
&\leqq \mathrm{const}\, \underbrace{\{2M'\log_+(r) + R\}^{\nu}}_{\text{球の体積}} \times \underbrace{\{\log_+(|q_i| + 2M'\log_+(r) + R)\}^{\sigma}}_{\text{球の中の粒子の最大密度}} \\
&\leqq \mathrm{const}\,(\log_+(r))^{\nu+\sigma}
\end{aligned}$$

$x \in \mathcal{X}_1$であるから，ある$\sigma > 0$が存在して

$$\sup \frac{N(x;\Delta(\alpha))}{[\log_+(\alpha)]^{\sigma}} < \infty$$

をみたしているから球の中の粒子の最大密度は評価できる。

この const を N とおくと，$F(q_i^{(\ell)}(t) - q_j^{(\ell)}(t)) \neq 0$となる$j$の個数は高々$N(\log_+(r))^{\nu+\sigma}$個である。（$\ell = 1,2 \quad \forall t \in [0,\tau]$）

(iv) (2—7)より

$$(2\text{—}9) \qquad |q_i^{(1)}(t) - q_i^{(2)}(t)| \leqq \frac{1}{m}\int_0^t ds \int_0^s du \left|F_i^{(1)}(u) - F_i^{(2)}(u)\right| \qquad \forall t \in [0,\tau]$$

である。そこで

$$\begin{aligned}
|F_i^{(1)}(t) - F_i^{(2)}(t)| &\leqq \left|\sum_{j \neq i} \{F(q_i^{(1)}(t) - q_j^{(1)}(t)) - F(q_i^{(2)}(t) - q_j^{(2)}(t))\}\right| \\
&\leqq N(\log_+(r))^{\nu+\sigma} \cdot L \cdot \sup_{j : |q_j| \leqq r_1} \left|(q_i^{(1)}(t) - q_j^{(1)}(t)) - (q_i^{(2)}(t) - q_j^{(2)}(t))\right| \\
&\leqq 2NL(\log_+(r))^{\nu+\sigma} \sup_{j : |q_j| \leqq r_1} \left|q_j^{(1)}(t) - q_j^{(2)}(t)\right|
\end{aligned}$$

となる。ただし L は Lipschitz constant である。

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

(V) $$\delta(r,t) \equiv \sup_{i;|q_i|\leqq r}\left\{\left|q_i^{(1)}(t)-q_i^{(2)}(t)\right|\right\}$$
とおき，$\delta(r,t)$を評価する。
$$\delta(r,t) \leqq 2M\log_+(q_i) \leqq 2M\log_+(r)$$
は明らかに成り立つ。
(2—9)の両辺の$\sup$をとる。
$$\sup_{i;|q_i|\leqq r}\left\{\left|q_i^{(1)}(t)-q_i^{(2)}(t)\right|\right\} \leqq \frac{1}{m}\int_0^t ds\int_0^s du \sup_{i;|q_i|\leqq r}\left|F_i^{(1)}(u)-F_i^{(2)}(u)\right|$$
$$\forall t \in [0,\tau]$$
(iV)より
$$\delta(r,t) \leqq \frac{1}{m}\int_0^t ds\int_0^s du\left[2NL(\log_+(r))^{\nu+\sigma}\sup_{j;|q_j|\leqq r_1}\left|q_j^{(1)}(u)-q_j^{(2)}(u)\right|\right]$$
$$\forall t \in [0,\tau]$$
となる。そこで
$$A=\frac{2NL}{m}, \quad \sigma'=\nu+\sigma$$
とおくと，
(2—10) $$\delta(r,t) \leqq A(\log_+(r))^{\sigma'}\int_0^t ds\int_0^s \delta(r_1(r),u)\,du$$
となる。
ここで
$$r_0 = r$$
$$r_{n+1}=r_1(r_n)=\sup\{S\,;\,S-M\log_+(S) \leqq r_n+M\log_+(r_n)+R\}$$
$$n=0,1,2,\cdots$$
とおくと，(2—10)より
$$\delta(r_0,t)=A(\log_+(r))^{\sigma'}\int_0^t dt_1\int_0^{t_1}\delta(r_1,t_2)\,dt_2$$
$$\delta(r_1,t_2)=A(\log_+(r_1))^{\sigma'}\int_0^{t_2} dt_3\int_0^{t_3}\delta(r_2,t_4)\,dt_4$$
$$\vdots$$
$$\delta(r_{n-1},t_{2n-2})=A(\log_+(r_{n-1}))^{\sigma'}\int_0^{t_{2n-2}} dt_{2n-1}\int_0^{t_{2n-1}}\delta(r_n,t_{2n})\,dt_{2n}$$
となる。

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

従って

$$\delta(r,t) \leqq A^n \prod_{i=0}^{n-1} (\log_+(r_i))^{\sigma'} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{2n-1}} dt_{2n}\, \delta(r_n, t_{2n})$$

(2—11) $$\leqq A^n \prod_{i=0}^{n-1} (\log_+(r_i))^{\sigma'} \cdot 2M \log_+(r_n) \frac{t^{2n}}{(2n)!}$$

がわかる。

(vi) 最後に

$$|g_i^{(1)}(t) - g_i^{(2)}(t)| = 0$$

を言う。

さて,

$$(\sqrt{r_n}+1)^2 - M\log_+(\sqrt{r_n}+1)^2$$
$$\geqq r_n + \sqrt{r_n} - 2M\log_+(\sqrt{r_n}+1)$$
$$\geqq r_n + M\log_+(r_n) + R$$
$$\geqq r_{n+1} - M\log_+(r_{n+1}) \qquad n: 十分大の時$$

であるから

$$r_{n+1} \leqq (\sqrt{r_n}+1)^2 \qquad n: 十分大の時$$

となる。ゆえに,

(2—12) $$r_n = O(n^2)$$

がわかる。

次に

$$(2n)! \geqq (n!)^2$$

を使い(2—11)を変形すると,

$$\delta(r,t) \leqq 2M \prod_{i=0}^{n-1} \frac{A t^2 (\log_+(r_i))^{\sigma'}}{i^2} \cdot \frac{\log_+(r_n)}{n^2}$$

となる。又,(2—12)より

$$\frac{(\log_+(r_n))^{\sigma'}}{n^2} = \frac{(\log_+(r_n))^{\sigma'}}{(r_n^{\frac{1}{\sigma'}})^{\sigma'}} \cdot \frac{r_n}{n^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

がわかるから $\delta(r,t) \xrightarrow{n\to\infty} 0$

となる。ゆえに

$$|g_i^{(1)}(t) - g_i^{(2)}(t)| = 0 \qquad \forall i,\ \forall t \in [0,\tau]$$

が言える。 (証明終)

〈2〉 long range potential の場合

finite range でない potential について得られている結果を紹介する。

次の事を仮定する。

$$
(*)\quad \begin{cases} (a) & |\Phi(q)| \leqq \chi(|q|) \quad \forall q \\ (b) & |F(q)| = |-\mathrm{grad}\,\Phi(q)| \leqq \chi(|q|) \quad \forall q \\ (c) & \int_0^\infty r^{\nu-1}\chi(r)\,dr < \infty \end{cases}
$$

をみたす有界，非増加な関数 $\chi(|q|)$ が存在する。

さらに

$$
\mathcal{X}_0' = \left\{ x \in \mathcal{X}_0 \;\middle|\; \sup_s \frac{N(x;\Lambda_s)}{s^\nu} < \infty \right\}
$$

なる集合 $\mathcal{X}_0'$ を考え，ここで解を構成する。

> 定理3 （Lanford [18]）
> Φ は(*)の条件をみたし，F が Lipschitz condition をみたし，かつ $C'(\mathbb{R}^\nu)$ 級とする。この時，任意の $x \in \mathcal{X}_0'$ に対して $x = x(0)$ を初期配置にもつ運動方程式(1—1)の解が存在する。

long range potential の場合一意性についての結果は今のところ得られていない。

Remark （$\nu = 1$ の場合の Lanford [16]の結果）

$F(r) = -\Phi'(r)$: even, Lipschitz cont., compact support と仮定し，初期配置の空間

$$
\left\{ x \in \mathcal{X} \;\middle|\; |x| \equiv \sup_i \frac{|P_i|/m}{\log_+(q_i)} \vee \sup\left\{ \frac{N(x;(\alpha,\beta))}{\beta-\alpha} : \beta-\alpha > \log_+\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \right\} < \infty \right\}
$$

の上で解の存在と，$|x(t)|$: locally bounded の中での一意性を示した。（適当なノルム空間での iteration を用いている所が前述の方法と較べておもしろい。）

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

§ 3 解の構成 II（ Sinai [37]の方法 ）

ここでは Sinai のいわゆる“ cluster property ”を利用する方法によって特に hard core（ $d>0$ ）を持つ粒子系に対する解の構成法を述べる。理解を容易にするために一次元とする。

potential と phase space を次のものとする。

○ pair interaction potential U ;

(A)

(1) $U(r)\begin{cases} \equiv \infty & \text{if} \quad 0 \leqq |r| \leqq d \quad (\textit{hard core}) \\ < \infty & \text{if} \quad |r| > d \end{cases}$

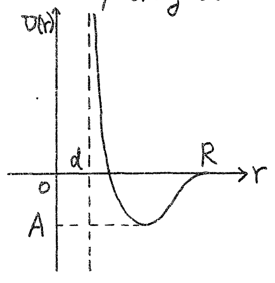
(2) $U(r) \in C^1((d,\infty)\cup(-\infty,-d))$

(3) $U(r) \geqq A > -\infty$

(4) $U(r) \equiv 0 \quad \text{if } |r| \geqq R > d \quad (\textit{finite range})$

(5) $\lim_{r\to d} U(r) = \infty$

(6) U' : Lipschitz continuous



○ phase space

$\mathcal{X}$: the set of all locally finite configuration

とする時、ここでの phase space を次のようにする。

$$\mathcal{X}_d = \{ x \in \mathcal{X} \mid |q_i - q_j| > d \text{ for } i \neq j \}, \quad d>0$$

: the phase space of infinitely many particles with hard spheres

解の構成を次のようにする。

番号付け : $\min\{i \mid q_i > 0\}$ なる粒子に番号“ 0 ”を与え，正の方向にむかって $1, 2, \cdots$，負の方向にむかって $-1, -2, \cdots$ と番号をつける。

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

初期配置 $x=(q_i,p_i)_{i\in I}$ $(\in\mathcal{X}_d)$ に対して，$|j|>n$ なる番号をもった粒子を固定しておいた時の $|i|\leqq n$ なる番号の粒子の運動方程式は次のように与えられる。

$$(3-1)\quad \begin{cases} \dfrac{dq_i(t)}{dt}=\dfrac{p_i(t)}{m} \\ \dfrac{dp_i(t)}{dt}=-\displaystyle\sum_{|j|\leqq n}U'(|q_i(t)-q_j(t)|)-\sum_{|j|>n}U'(|q_i(t)-q_j|) \end{cases}$$

<u>定義</u>　$T_t^{(n)}x\equiv x^{(n)}(t)=\{q_i^{(n)}(t),\,p_i^{(n)}(t)\}_{i\in I}$ を，初期条件 $x^{(n)}(0)=x$ をみたす(3—1)の解とする。　（§2と記号を混同）

次のような初期配置の空間 $\mathcal{X}_d(C_1,C_2)$ の中で解の構成を行なう。C_1，$C_2>0$ に対し

$$\mathcal{X}_d(C_1,C_2)=\left\{x\in\mathcal{X}_d \;\middle|\; \begin{array}{l} {}^{\exists}n_0(x)\,;\,{}^{\forall}n\geqq n_0(x) \text{ に対して次の (1),(2)が成立する。} \\ (1)\ P_n(x)\equiv\displaystyle\max_{|t|\leqq 1}\max_{|i|\leqq n}|p_i^{(n)}(t)|\leqq C_1\sqrt{\log n} \\ (2)\ -n\leqq{}^{\exists}i_n'<-\dfrac{n}{2},\ \dfrac{n}{2}\leqq{}^{\exists}i_n''<n \\ \qquad \text{s.t. } \min(q_{i_n'+1}-q_{i_n'},\,q_{i_n''+1}-q_{i_n''})\geqq C_2\log n \end{array}\right\}$$

<u>定理４</u>　${}^{\forall}x\in\mathcal{X}_d(C_1,C_2)$ に対して，初期条件 $x(0)=x$ を持ち，$|t|\leqq 1$ で

$$\begin{cases} \dfrac{dq_i(t)}{dt}=\dfrac{p_i(t)}{m} \\ \dfrac{dp_i(t)}{dt}=-\displaystyle\sum_{j\neq i}U'(|q_i(t)-q_j(t)|) \end{cases}$$

をみたす解 $x(t)\equiv T_tx$ が存在する。

証明　$\bar{n}$ を

$$C_2\log n-\frac{2C_1}{m}\sqrt{\log 2n}>R \qquad \text{for } {}^{\forall}n\geqq\bar{n}$$

をみたす自然数にとる。

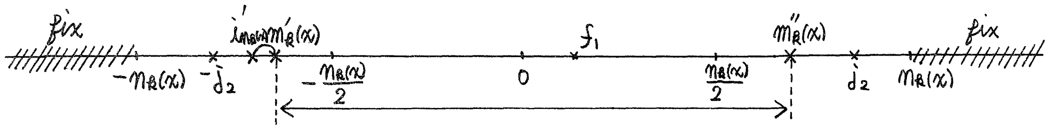
そこで $x\,(\in\mathcal{X}_d(C_1,C_2))$ に対して $\{n_k(x)\}_{k=0,1,\cdots}$，$\{m_k'(x)\}_{k=1,2,\cdots}$，$\{m_k''(x)\}_{k=1,2,\cdots}$ を次のように作る。

$$n_1(x)=\max(n_0(x),\,\bar{n})$$
$$n_k(x)=2^{k-1}n_1(x) \qquad k=2,3,\cdots$$

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

$$m'_k(x) = i'_{n_k(x)} + 1 \ , \quad m''_k(x) = i''_{n_k(x)} \qquad k=1,2,\cdots$$

各 k ごとに状況は図のようになっている。



$|j|>n_k(x)$ の粒子を fix しておく。

今，$m'_k(x) \leqq f_1 \leqq m''_k(x)$ を選ぶと、この番号 f_1 の粒子と $-n_k(x) \leqq j_2 < m'_k(x)$（または $m''_k(x) < j_2 \leqq n_k(x)$）なる番号 j_2 の粒子の間の距離は，

$$\left| g_{f_1}^{n_k(x)}(t) - g_{j_2}^{n_k(x)}(t) \right| > R \ , \ |t| \leqq 1$$

をみたす。

なぜならば $n_k(x)$ の取り方から

$$C_2 \log n_k(x) - \frac{2C_1}{m}\sqrt{\log 2n_k(x)} > R$$

が成立していることに注意する。

今，$-n_k(x) \leqq j_2 < m'_k(x)$ の時を考える。すると，

$$\begin{aligned}
\left| g_{f_1}^{n_k(x)}(t) - g_{j_2}^{n_k(x)}(t) \right| &\geqq \left| g_{m'_k(x)}^{n_k(x)}(t) - g_{i'_{n_k(x)}}^{n_k(x)}(t) \right| \\
&\geqq \left| g_{m'_k(x)}^{n_k(x)}(0) - g_{i'_{n_k(x)}}^{n_k(x)}(0) \right| - \left| g_{m'_k(x)}^{n_k(x)}(t) - g_{m'_k(x)}^{n_k(x)}(0) \right| - \left| g_{i'_{n_k(x)}}^{n_k(x)}(t) - g_{i'_{n_k(x)}}^{n_k(x)}(0) \right| \\
&\geqq C_2 \log n_k(x) - \frac{2C_1}{m}\sqrt{\log n_k(x)} \\
&> R \quad (\text{by } (1), (2))
\end{aligned}$$

$m''_k(x) < j_2 \leqq n_k(x)$ の時も同様にする。

従って，$|j|>n_k(x)$ の粒子を fix しておいた時，$m'_k(x) \leqq f_1 \leqq m''_k(x)$ の間の粒子群は残りの粒子との間では，互いに影響を及ぼし合わない。

次に k を $k+1$ にする。つまり，$|j|>n_{k+1}(x)$ の粒子を fix しておく。この時，$m'_k(x) \leqq f_1 \leqq m''_k(x)$ なる番号 f_1 をもつ粒子と，$-n_{k+1}(x) \leqq j_3 < m'_k(x)$（または $m''_k(x) < j_3 \leqq n_{k+1}(x)$）の番号 j_3 の粒子と

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

の間の距離は例えば，$-n_{k+1}(x) \leqq j_3 < m_k'(x)$ の時

$$\begin{aligned}
&\left| q_{f_1}^{n_{k+1}(x)}(t) - q_{j_3}^{n_{k+1}(x)}(t) \right| \geqq \left| q_{m_k'(x)}^{n_{k+1}(x)}(t) - q_{i_{n_k}'(x)}^{n_{k+1}(x)}(t) \right| \\
&\geqq \left| q_{m_k'(x)}^{n_{k+1}(x)}(0) - q_{i_{n_k}'(x)}^{n_{k+1}(x)}(0) \right| - \left| q_{m_k'(x)}^{n_{k+1}(x)}(t) - q_{i_{n_k}(x)}^{n_{k+1}(x)}(0) \right| - \left| q_{i_{n_k}'(x)}^{n_{k+1}(x)}(t) - q_{i_{n_k}'(x)}^{n_{k+1}(x)}(0) \right| \\
&\geqq C_2 \log n_k(x) - \frac{2C_1}{m}\sqrt{\log n_{k+1}(x)} \\
&= C_2 \log n_k(x) - \frac{2C_1}{m}\sqrt{\log 2 n_k(x)} \\
&> R \quad , |t| \leqq 1
\end{aligned}$$

従って，$|j| > n_{k+1}(x)$ の粒子を fix しておいた時も $m_k'(x) \leqq f_1 \leqq m_k''(x)$ の間の粒子群は残りの粒子との間では，互いに影響を及ぼし合わない。

従って，$\forall k \in \mathbb{N}$ と，$\forall l > k$ に対して $m_k'(x) \leqq f_1 \leqq m_k''(x)$ なる番号 f_1 をもつ粒子の運動は，$|t| \leqq 1$ の範囲では $|j| > n_l(x)$ なる番号 j をもつ粒子達を固定しても，l のとり方によらず一定である。

ゆえに，$|t| \leqq 1$ で k ごとに $m_k'(x) \leqq j \leqq m_k''(x)$ なる任意の番号 j に対して運動をきめることができる。従って，$\forall x \in \mathcal{X}_d(C_1, C_2)$ に対して $|t| \leqq 1$ で $T_t x = x(t)$ が存在するようにできる。

（証明終）

上で作った T_t ($|t| \leqq 1$) はもし，

$$-1 \leqq t_1, t_2, t_1 + t_2 \leqq 1$$

ならば

$$T_{t_1} T_{t_2} = T_{t_1 + t_2}$$

となる。このことに注意すると，一般の $t \in \mathbb{R}$ に対しては

$$\overline{\mathcal{X}_d(C_1, C_2)} \equiv \bigcap_{p=-\infty}^{\infty} T_1^p \left(\mathcal{X}_d(C_1, C_2) \right)$$

$$T_t x \equiv T_{t-[t]} \circ T_1^{[t]} x , \qquad x \in \overline{\mathcal{X}_d(C_1, C_2)}$$

とすればよい。

Remark 1. （多次元の場合の Sinai [38] の結果）

$U(q) = U(|q|)$ とみて，$C^2((d, \infty))$, finite range (R), hard core ($d > 0$) かつ

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

$$r \longrightarrow d \text{の時} \quad U(r) \sim \frac{\mathrm{Const}}{(r-d)^{\nu_1}},\ U'(r) \sim \frac{\mathrm{Const}}{(r-d)^{\nu_2}}$$
$$(\exists \nu_1, \nu_2 > 0)$$

の仮定の下で，一次元と同様の条件をみたす初期配置に対して，cluster property を証明し，それを用いて解を構成した。

Remark 2. Lanford の適当なノルム空間での iteration による方法と，Sinai の maximum velocity の評価を併用することにより，hard core ($d \geq 0$)，long range（可積分性の条件は当然はいる），$C^2((d,\infty))$ クラスの potential 型に対して，解が構成されている（Presutti et al. [30]）が，一般化された反面，解の構成のできた初期配置の空間が具体的でない。

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

§4 Gibbs 測度——DLR方程式

$\mathbb{R}^\nu$の任意の bdd. Borel set Λに対して（grand canonical な）Gibbs ensemble を定義する。

定義　○ $\mathcal{X}_\Lambda \equiv \sum_{n=0}^{\infty} (\Lambda\times\mathbb{R}^\nu)^n/\sim$ （＝Λ内の有限粒子の配列の空間）

○ $\pi_{\Lambda_2}^{\Lambda_1} : \mathcal{X}_{\Lambda_1} \longrightarrow \mathcal{X}_{\Lambda_2}$ for $\Lambda_2\subset\Lambda_1$

$\pi_\Lambda : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}_\Lambda$ natural projection

Remark. "/ "の意味はΛ内の同一の場所には2つ以上の粒子が占めないという意味である。

定義　$\beta>0$, μ: real, $\Lambda\subset\mathbb{R}^\nu$ bdd.
に対して，P_Λが grand canonical Gibbs ensemble on $\mathcal{X}_\Lambda$
(with the inverse temperature β and chemical potential μ)
$\Longleftrightarrow$

P_Λが$\mathcal{X}_\Lambda$上の probability measure かつ$\mathcal{X}_\Lambda$上の Lebesgue measure λ_Λに対する density が

$$P(x\mid\beta,\mu,\Lambda)=\Xi^{-1}(\beta,\mu,\Lambda)\exp\{-\beta H(x)+\beta\mu N_\Lambda(x)\}$$

で与えられるものを言う。

Remark 1　$\lambda_\Lambda(A)=\dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_{\tilde A} dq_1\cdots dq_n\,dp_1\cdots dp_n$ for $A\subset(\Lambda\times\mathbb{R})^n/\sim$

$\tilde A$: A の pre-image

Remark 2　$N_\Lambda(x)$: Λ内の粒子数 $=N(x,\Lambda)$

Remark 3

$$\Xi(\beta,\mu,\Lambda)=\int_{\mathcal{X}_\Lambda}\exp\{-\beta H(x)+\beta\mu N_\Lambda(x)\}\,d\lambda_\Lambda(x)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_{(\Lambda\times\mathbb{R}^\nu)^n}\exp\Big\{-\beta\Big(\frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{n}|p_i|^2+\sum_{1\le i<j\le n}\Phi(q_i-q_j)\Big)+\beta\mu n\Big\}dq_1\cdots dq_n\,dp_1\cdots dp_n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}e^{\beta\mu n}\Big(\frac{2m\pi}{\beta}\Big)^{\frac{n\nu}{2}}\int_{\Lambda^n}dq_1\cdots dq_n\,dp_1\cdots dp_n\exp\Big\{-\beta\sum_{1\le i<j\le n}\Phi(q_i-q_j)\Big\}$$

normalizing constant $\Xi(\beta,\mu,\Lambda)$が発散しないようにするには，例

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

えばポテンシャルに関して次の条件を加えると十分である。
○ポテンシャルエネルギーUが(*thermodynamically*) <u>*stable*</u>, すなわち，全てのnと全ての$q_1,\cdots,q_n\in\mathbb{R}^\nu$に対して，

$$U(q_1,\cdots,q_n)\geqq -nB$$

なる定数Bが存在することである。

実際

$$\Xi(\beta,\mu,\Lambda)\leqq\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}e^{\beta\mu n}\left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{\frac{n\nu}{2}}\int_\Lambda\cdots\int_\Lambda exp(\beta nB)\,dq_1\cdots dq_n$$

$$=exp\left\{e^{\beta\mu+\beta B}\left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{\frac{\nu}{2}}V(\Lambda)\right\},\quad\left(V(\Lambda)=\int_\Lambda dq\right)$$

となる。

さて，上の$\{P_\Lambda\}_{\Lambda:bdd}$をもとにして$\mathcal{X}$上の*probability measure*を定義したいのであるが，$\{P_\Lambda\}_{\Lambda:bdd}$は*measure*の系として一般には*consistent*ではない。このことをみてみる。
$\Lambda\subset\mathbb{R}^\nu$の任意の*bdd. Borel set* を2つに分割する。

$$\Lambda=\Lambda_1\cup\Lambda_2,\qquad\Lambda_1\cap\Lambda_2=\phi$$

すると，

$$\mathcal{X}_\Lambda\simeq\mathcal{X}_{\Lambda_1}\times\mathcal{X}_{\Lambda_2}\quad(\textit{Borel isomorphism})$$

となる。この時，$x\in\mathcal{X}_\Lambda$は$y\in\mathcal{X}_{\Lambda_1}$, $z\in\mathcal{X}_{\Lambda_2}$で表わせる。
すると，

$$H(x)=H(y)+H(z)+W(y,z),\quad W(y,z)=\sum_{q_i\in y}\sum_{q_j\in z}\Phi(q_i-q_j)$$

となる。そこで$\pi^\Lambda_{\Lambda_1}\circ P_\Lambda$の$\lambda_{\Lambda_1}$に対する*density*は

$$\Xi^{-1}(\beta,\mu,\Lambda)\int_{\mathcal{X}_{\Lambda_2}}exp\{-\beta H(y\cup z)+\beta\mu N_\Lambda(y\cup z)\}\,d\lambda_{\Lambda_2}(z)$$

$$=\Xi^{-1}(\beta,\mu,\Lambda)exp\{-\beta H(y)+\beta\mu N_{\Lambda_1}(y)\}$$
$$\times\int_{\mathcal{X}_{\Lambda_2}}exp\{-\beta H(z)+\beta\mu N_{\Lambda_2}(z)\}exp\{-\beta W(y,z)\}\,d\lambda_{\Lambda_2}(z)$$

ところが，P_{Λ_1}のλ_{Λ_1}に対する*density*は，

$$\Xi^{-1}(\beta,\mu,\Lambda_1)\,exp\{-\beta H(y)+\beta\mu N_{\Lambda_1}(y)\}$$

であるから，$\pi^\Lambda_{\Lambda_1}\circ P_\Lambda\neq P_{\Lambda_1}$となる。

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

ゆえに$\{P_\Lambda\}_{\Lambda:bdd}$はconsistentでない。(ただし，$\Phi$がnon-interacting functionならばconsistentである。)

次にinteracting systemの場合でも次のような時にはconsistentになることをみよう。ある適当な部分列$\{\Lambda_i\}_i \nearrow \mathbb{R}^\nu$をとってきて,

$$P^{\Lambda_1} = \lim_{\substack{\Lambda_i \nearrow \mathbb{R}^\nu \\ \Lambda_1 \subset \Lambda_i}} \pi^{\Lambda_i}_{\Lambda_1} \circ P_{\Lambda_i}$$

とする。そして，もし全ての bdd. Borel set Λ_1に対して、この極限が存在するならば極限測度$\{P^\Lambda\}$はconsistentになる。(一般にはこのような$\{P^\Lambda\}$は存在するがuniqueには定まらない。)形式的にこのことをみておく。 $\Lambda_1' \subset \Lambda$とする。

$$P^{\Lambda_1'} = \lim_{\substack{\Lambda \nearrow \mathbb{R}^\nu \\ \Lambda_1' \subset \Lambda}} \pi^{\Lambda}_{\Lambda_1'} \circ P_\Lambda = \lim_{\substack{\Lambda \nearrow \mathbb{R}^\nu \\ \Lambda_1' \subset \Lambda}} \pi^{\Lambda_1}_{\Lambda_1'} \circ \pi^{\Lambda}_{\Lambda_1} \circ P_\Lambda$$

$$= \pi^{\Lambda_1}_{\Lambda_1'} \Big(\lim_{\substack{\Lambda \nearrow \mathbb{R}^\nu \\ \Lambda_1' \subset \Lambda}} \pi^{\Lambda}_{\Lambda_1} \circ P_\Lambda \Big) = \pi^{\Lambda_1}_{\Lambda_1'} \circ P^{\Lambda_1}$$

このconsistentな系に対して，拡張定理によって定まる$\mathfrak{X}$上のprob. meas. のdensityはどうなるであろうか？

$\Lambda \subset \mathbb{R}^\nu$ bdd. に対して$\Lambda \supset \Lambda_1$なる$\Lambda_1$と$\Lambda_2 = \Lambda - \Lambda_1$を考える。$y \in \mathfrak{X}_{\Lambda_1}$，$z \in \mathfrak{X}_{\Lambda_2}$とし，$z$が与えられた下での$\mathfrak{X}_{\Lambda_1}$上の条件付確率分布の$\lambda_{\Lambda_1}$に対するdensityを考えると，

$$\frac{\exp\{-\beta H(y) - \beta H(z) - \beta W(y,z) + \beta\mu N_{\Lambda_1}(y) + \beta\mu N_{\Lambda_2}(z)\}}{\int_{\mathfrak{X}_{\Lambda_1}} \exp\{-\beta H(y) - \beta H(z) - \beta W(y,z) + \beta\mu N_{\Lambda_1}(y) + \beta\mu N_{\Lambda_2}(z)\} d\lambda_{\Lambda_1}(y)}$$
$$= \frac{\exp\{-\beta H(y) - \beta W(y,z) + \beta\mu N_{\Lambda_1}(y)\}}{\int_{\mathfrak{X}_{\Lambda_1}} \exp\{-\beta H(y) - \beta W(y,z) + \beta\mu N_{\Lambda_1}(y)\} d\lambda_{\Lambda_1}(y)}$$

となる。そこで

$$\Xi(\beta,\mu,\Lambda_1|z) = \int_{\mathfrak{X}_{\Lambda_1}} \exp\{-\beta H(y) - \beta W(y,z) + \beta\mu N_{\Lambda_1}(y)\} d\lambda_1(y)$$

とおくと，$z \in \mathfrak{X}_{\Lambda_2}$が与えられた下での$\mathfrak{X}_{\Lambda_1}$上の条件付確率分布は,

$$\Xi^{-1}(\beta,\mu,\Lambda_1|z) \exp\{-\beta H(y) - \beta W(y,z) + \beta\mu N_{\Lambda_1}(y)\} d\lambda_1(y)$$

となる。

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

これをもとにして，次の定義を与えよう。
interaction Φ，inverse temperature β，chemical potential μ が与えられた時の Gibbs state on $\mathfrak{X}$ for β, μ を

$$\mathcal{G}_{\beta,\mu}(\Phi)$$

と記す。

<u>定義</u>（Gibbs state）

$\mathfrak{X}$ 上の prob. meas. P が $\mathcal{G}_{\beta,\mu}(\Phi)$ に入る。

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$

$\forall\Lambda \subset \mathbb{R}^{\nu}$ bdd Borel に対して $z \in \mathfrak{X}_{\Lambda^c}$ が与えられた下での $\mathfrak{X}_{\Lambda}$ 上の条件付確率が

$$(4\text{—}1) \qquad \Xi^{-1}(\beta,\mu,\Lambda|z)\exp\{-\beta H(y)-\beta W(y,z)+\beta\mu N_{\Delta_1}(y)\}\,d\lambda_{\Delta_1}(y)$$

で与えられるものである。ただし，$\Xi(\beta,\mu,\Lambda|z)$ は normalizing constant， see [18] .

$\overset{同値}{\Longleftrightarrow}$

$$\int_{\mathfrak{X}} P(dx)\varphi(x)=\int_{\mathfrak{X}_{\Lambda^c}} P(dz)\left\{\varphi(z)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\beta\mu n}}{n!}\int_{(\Lambda\times\mathbb{R}^{\nu})^n} dy\,\varphi(y\cdot z)\exp\{-\beta H(y)-\beta W(y,z)\}\right\}$$

$$\text{for} \quad \forall\varphi \in L^1(\mathfrak{X}, \mathcal{B}(\mathfrak{X}), P)$$

〈 D L R equation 〉　　　see [3], [20], [40]

Remark. 上の定義は Φ が stable かつ次の意味で lower regular である場合には well-defined である。

<u>定義</u>（ lower regular ）

potential Φ: lower regular

$\Longleftrightarrow$

十分大きな $|q|$ に対して

$$\Phi(q) \geq -\chi(|q|)$$

なる不等式をみたし、$\chi(r)$ は非負，非増加な関数でかつ

$$\int^{\infty} r^{\nu-1}\chi(r)\,dr < \infty$$

をみたす。

実際 (4—1) を well-defined にするために $W(y,z)$ の収束性をみる。

このために次の集合Nを考える。

$$N=\left\{x\in\mathcal{X}\;\middle|\;\sup_{r\in Z^+}\left(\frac{1}{r^\nu}\sum_{\alpha:|\alpha|\le r} n_\alpha^2(x)\right)=\infty\right\}$$

$n_\alpha(x)$: $\alpha\in Z_\nu$ 中心の単位立方体中の粒子数

$-W(y,z)$, ($y\in\mathcal{X}_\Lambda$, $z\in\mathcal{X}_{\Lambda^c}$, $\Lambda\subset\mathbb{R}^\nu$ bdd)の収束について, locally finite だから

$$y=(q_i,p_i)_{i=1,2,\cdots,n}\;,\qquad z=(q_j',p_j')_j$$

とおける。従って

$$-\sum_j\Phi(q_i-q_j')<\infty$$

が言えれば十分である。そこで,

$$\Phi(r_0)\ge-\chi(r_0)$$

が成立するような十分大きなr_0をとる。すると,

$$-\sum_j\Phi(q_i-q_j')=-\sum_{j:|q_i-q_j'|\le r_0}\Phi(q_i-q_j')-\sum_{j:|q_i-q_j'|>r_0}\Phi(q_i-q_j')$$

であるから、$\mathcal{X}$の locally finiteness を使い, 右辺第二項の収束性だけをみてやれば十分である。

そこで, $x\in N^c$とすると, lower regular より

$$-\sum_{j:|q_i-q_j'|>r_0}\Phi(q_i-q_j')=-\sum_{k=0}^\infty\sum_{j:r_k<|q_i-q_j'|\le r_{k+1}}\Phi(q_i-q_j')\le C\sum_{k=0}^\infty(2^kr_0)^\nu\chi(2^kr_0)$$

がわかる。ただし, $\{r_k\}_{k=0,1,\cdots}$はq_i中心の半径($r_k=2r_{k-1}$, $k=1,2,\cdots$)である。一方, 仮定より

$$\sum_{k=0}^\infty(2^kr_0)^\nu\chi(2^kr_0)\le\int_{r_0}^\infty r^{\nu-1}\chi(r)\,dr<\infty$$

がわかるので

$$-\sum_{j:|q_i-q_j'|>r_0}\Phi(q_i-q_j')<\infty$$

となる。(詳細は[18]をみよ)

このことを使うと, $\Xi(\beta,\mu,\Lambda|z)$が有界であることもわかる。もちろん, stable, lower regular は仮定されている。これをみる。

$$\Xi(\beta,\mu,\Lambda|z)=\int_{\mathscr{X}_\Lambda} exp\{-\beta H(y)-\beta W(y,z)+\beta\mu N_\Lambda(y)\}d\lambda_1(z)$$

$$\leqq \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}e^{\beta\mu n}\left(\frac{2m\pi}{\beta}\right)^{\frac{n\nu}{2}}\int_\Lambda\cdots\int_\Lambda dq_1\cdots dq_n\, exp\left\{-\beta\sum_{1\leqq i<j\leqq n}\Phi(q_i-q_j)-\beta\sum_{i=1}^{n}\sum_j\Phi(q_i-q_j')\right\}$$

$$\leqq \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}e^{\beta\mu n}\left(\frac{2m\pi}{\beta}\right)\int_\Lambda\cdots\int_\Lambda e^{\beta nB}C\,dq_1\cdots dq_n$$

$$=C\,exp\left\{e^{\beta\mu+\beta B}\left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{\frac{\nu}{2}}V(\Lambda)\right\}<\infty,\quad exp\left\{-\beta\sum_{i=1}^{n}\sum_j\Phi(q_i-q_j')\right\}\leqq C$$

最後に用語としてよく使われる次のことばを定義しておく。

<u>定義</u> (*superstable*)

ポテンシャルΦ：*superstable*

$\Longleftrightarrow$

ポテンシャルエネルギーUが全てのnと全ての$q_1,\cdots q_n$に対して，次の式をみたす定数$A(>0)$，Bが存在することである。

$$U(q)\geqq -Bn(q)+A\sum_\alpha n_\alpha^2(q)$$

これは後につかう" *Ruelle's estimate* "の中で使われる。

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

§5 Gibbs 測度――初期配置の空間の大きさ

§4で定義したGibbs state $P \in \mathcal{G}_{\beta,\mu}(\Phi)$ に関してLanfordの初期配置の空間$\mathcal{X}_0$, $\mathcal{X}_1$やSinaiの$\mathcal{X}_d(C_1, C_2)$がfull measureであることを調べる。

> <u>定理5</u>　Φ : superstable, lower regular, $C^1(\mathbb{R}^\nu)$級
> 　　　　　F : Lipschitz continuous
> この時, $\forall P \in \mathcal{G}_{\beta,\mu}(\Phi)$は$T^*_{(s)}$不変である。
> 　　　　（$T^*_{(s)}$はLanfordの解の構成に使ったflow）

証明　$\mathcal{X} \simeq \mathcal{X}_{\Lambda_s} \times \mathcal{X}_{\Lambda_s^c}$ に注意して，関数fとしてΛ_sの内部の粒子のみに依存した有界な任意の可測関数とする。この時,

$$\int_{\mathcal{X}} f(x)\,dP(x) = \int_{\mathcal{X}} f(T^*_{(s)}x)\,dP(x)$$

を示せば十分である。

$$\int_{\mathcal{X}} f(T^*_{(s)}x)\,dP(x)$$

$$= \int_{\mathcal{X}_{\Lambda_s^c}} P_{\Lambda_s^c}(dy) \int_{\mathcal{X}_{\Lambda_s}} P(dz\,|\,y)\, f(T^*_{(s)}(z\cdot y))$$

$$= \int_{\mathcal{X}_{\Lambda_s^c}} P_{\Lambda_s^c}(dy) \int_{\mathcal{X}_{\Lambda_s}} P(dz\,|\,y)\, \hat{f}(T^*_{(s)}z) \qquad ; f(z\cdot y) = \hat{f}(z) \text{ とおく}$$

$$= \int_{\mathcal{X}_{\Lambda_s^c}} P_{\Lambda_s^c}(dy) \int_{\mathcal{X}_{\Lambda_s}} \hat{f}(T^*_{(s)}z)\, \Xi^{-1}(\beta,\mu,\Lambda_s|y)\, exp\{-\beta H(z|y) + \beta\mu N_{\Lambda_s}(z)\}\, d\lambda_{\Lambda_s}(z)$$

$$= \int_{\mathcal{X}_{\Lambda_s^c}} P_{\Lambda_s^c}(dy) \int_{\mathcal{X}_{\Lambda_s}} \hat{f}(T^*_{(s)}z)\, \Xi^{-1}(\beta,\mu,\Lambda_s|y)\, exp\{-\beta H(T^*_{(s)}z|y) + \beta\mu N_{\Lambda_s}(T^*_{(s)}z)\}\, d\lambda_{\Lambda_s}(z)$$

（エネルギー保存と, Λ_s内の粒子数一定より）

$$= \int_{\mathcal{X}_{\Lambda_s^c}} P_{\Lambda_s^c}(dy) \int_{\mathcal{X}_{\Lambda_s}} \hat{f}(z')\, \Xi^{-1}(\beta,\mu,\Lambda_s|y)\, exp\{-\beta H(z'|y) + \beta\mu N_{\Lambda_s}(z')\}\, d\lambda_{\Lambda_s}(z')$$

（Liouvilleの定理）

$$= \int_{\mathcal{X}_{\Lambda_s^c}} P_{\Lambda_s^c}(dy) \int_{\mathcal{X}_{\Lambda_s}} P(dz\,|\,y)\, \hat{f}(z) = \int_{\mathcal{X}} f(x)\,dP(x)$$

（証明終）

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

ここで次の定理のために関数の形を確認しておく。
$\forall x \in \mathfrak{X}$ に対して，

$$\circ B(x) = \sup_i \frac{|P_i|/m}{\log_+(q_i)}$$

$$\circ \overline{B}_{(s)}(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} B(T^t_{(s)} x)$$

$$\circ \overline{B}_{\infty}(x) = \liminf_{s\to\infty} \overline{B}_{(s)}(x)$$

である。

<u>定理 6</u>　　Φ : superstable, lower regular, $C^1(\mathbb{R}^\nu)$ 級
　　　　　　F : Lipschitz continuous
この時，$\forall P \in \mathcal{G}_{\beta,\mu}(\Phi)$ に対して

$$P(\mathfrak{X}_0) = 1$$

となる。

証明 (0)　　$\mathfrak{X}_0 = \{x \in \mathfrak{X} \mid \overline{B}_\infty(x) < \infty\}$
であるから，

$$\int_{\mathfrak{X}} \overline{B}_\infty(x)\, dP(x) < \infty$$

が示されれば十分である。

(i)　$\int_{\mathfrak{X}} \overline{B}_\infty(x)\, dP(x) \leqq \int_{\mathfrak{X}} B(x)\, dP(x)$ を示す。

定義から

$$\int_{\mathfrak{X}} \overline{B}_\infty(x) dP(x) = \int_{\mathfrak{X}} \liminf_{s\to\infty} \overline{B}_{(s)}(x)\, dP(x)$$

$$\leqq \liminf_{s\to\infty} \int_{\mathfrak{X}} \overline{B}_{(s)}(x)\, dP(x)$$

となる。一方，

$$\int_{\mathfrak{X}} \overline{B}_{(s)}(x) dP(x) = \int_{\mathfrak{X}} dP(x) \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} B(T^t_{(s)} x)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{1}{\pi} \int_{\mathfrak{X}} \frac{1}{1+t^2} B(x)\, dP(x) \qquad \text{(定理 5 より)}$$

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

$$= \int_{\mathfrak{X}} B(x)\, dP(x)$$

であるから

$$\int_{\mathfrak{X}} \overline{B}_\infty(x)\, dP(x) \leqq \int_{\mathfrak{X}} B(x)\, dP(x)$$

がわかる。

そこで，$B(x)$ が P に関して可積分であることを示せば十分である。

(ii) 次のような関数を考える。

$$\tilde{B}(x) = \sup_{\alpha \in \mathbb{Z}^\nu} \frac{\tilde{B}_\alpha(x)}{\log_+(\alpha)}, \quad \tilde{B}_\alpha(x) = \max_{q_i \in \Delta(\alpha)} \left| \frac{p_i}{m} \right|$$

$\Delta(\alpha)$：$\alpha \in \mathbb{Z}^\nu$ 中心の単位立方体

すると，$\forall q_i \in \Delta(\alpha)$ に対して，ある C が存在して

$$\log_+(q_i) \geqq \frac{1}{C} \log_+(\alpha)$$

とできることは容易にわかる。これを利用して，

$$B(x) = \sup_i \frac{|p_i|/m}{\log_+(q_i)} = \sup_{\alpha \in \mathbb{Z}^\nu} \max_{q_i \in \Delta(\alpha)} \frac{|p_i|/m}{\log_+(q_i)}$$

$$\leqq C \sup_{\alpha \in \mathbb{Z}^\nu} \frac{\max_{q_i \in \Delta(\alpha)} |p_i|/m}{\log_+(\alpha)} = C\, \tilde{B}(x)$$

従って，今度は $\tilde{B}(x)$ が P に関して可積分であることを示せば十分である。

(iii) $P(x \in \mathfrak{X} \mid \tilde{B}_\alpha(x) \geqq \lambda)$ を評価する。

$P_n^{(\alpha)}$：$\Delta(\alpha)$ にちょうど n 個の粒子が入る確率とする。

すると，λ を十分大きくとっておくと，次の評価ができる。

$$P(x \in \mathfrak{X} \mid \tilde{B}_\alpha(x) \geqq \lambda)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\alpha)} \times \begin{pmatrix} \Delta(\alpha) \text{にちょうど} n \text{個の粒子が入るという} \\ \text{条件の下で最大速度が} \lambda \text{以上となる確率} \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\alpha)} \times \left\{ 1 - \left(1 - C_1 \int_{|P_1| \geqq \lambda} e^{-C_2 P_1^2} dP_1 \right)^n \right\}$$

$$\leq \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\alpha)} \times \left\{ 1-\left(1-C_1\int_{|P_1|\geq\lambda} P_1 e^{-C_2P_1^2} dP_1\right)^n \right\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\alpha)} \times \left\{ 1-\left(1-C_3 e^{-C_2\lambda^2}\right)^n \right\} \qquad ;\ C_3=\frac{C_1}{C_2}$$

$$\leq C_3 e^{-C_2\lambda^2} \sum_{n=0}^{\infty} n P_n^{(\alpha)} \qquad ;\ \lambda が十分大$$

ところが
" Φ が *superstable*, *lower regular* ならば, $\sum_{n=0}^{\infty} n P_n^{(\alpha)}$ は α によらず一様有界である. "
ということがわかっている。これを " *Ruelle's estimate* " と呼ぶ。

see [32]

従って,

$$P(x\in\mathfrak{X}\ |\ \tilde{B}_\alpha(x)\geq\lambda) \leq C_4 e^{-C_2\lambda^2}$$

となる。(C_1, C_2, C_3, C_4 は m, β のみに *depend* した正の数)

(iv) $P(x\in\mathfrak{X}\ |\ \tilde{B}(x)>\lambda)$ を評価する。

λ を十分大きくすると,

$$C_2\lambda^2 \log_+^2(\alpha) \geq C_2\lambda^2 + \log_+^2(\alpha)$$

が成り立つ。これに注意すると,

$$P(x\in\mathfrak{X}\ \tilde{B}(x)>\lambda) = P\left(x\in\mathfrak{X}\ \middle|\ \sup_{\alpha\in\mathbb{Z}^\nu} \frac{\tilde{B}_\alpha(x)}{\log_+(\alpha)} > \lambda\right)$$

$$\leq \sum_{\alpha} P(x\in\mathfrak{X}\ |\ \tilde{B}_\alpha(x)\geq\lambda\log_+(\alpha))$$

$$\leq C_4 \sum_{\alpha} e^{-C_2\lambda^2\log_+^2(\alpha)} \qquad ;\ \text{(iii)より}$$

$$\leq C_4 e^{-C_2\lambda^2} \sum_{\alpha} e^{-\log_+^2(\alpha)}$$

となる。そこで, $\sum_{\alpha} e^{-\log_+^2(\alpha)}$ を評価する。

$$\sum_{\alpha} e^{-\log_+^2(\alpha)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ (2k)^\nu - (2(k-1))^\nu \right\} e^{-\log_+^2(k)}$$

$$\leq 2^\nu \sum_{k=1}^{\infty} k^\nu e^{-\log_+^2(k)} = 2^\nu \left\{ \sum_{k=1}^{[e^{\nu+2}]} k^\nu e^{-\log_+^2(k)} + \sum_{k=[e^{\nu+2}]}^{\infty} k^\nu e^{-\log_+^2(k)} \right\}$$

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

$$\leqq 2^{\nu}\left\{\sum_{k=1}^{[e^{\nu+2}]} k^{\nu} e^{-\log_+^2(k)} + \sum_{k=1}^{\infty} k^{\nu} e^{-(\nu+2)\log_+^2(k)}\right\}$$

$$\leqq 2^{\nu}\left\{\sum_{k=1}^{[e^{\nu+2}]} k^{\nu} e^{-\log_+^2(k)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right\} < \infty$$

従って，

$$P(x \in \mathfrak{X} \mid \tilde{B}(x) > \lambda) \leqq C_5 e^{-C_2\lambda^2}$$

（ C_5 は m, β だけに depend した数 ）

となる。

(V) 最後に $\tilde{B}(x)$ が P に関して可積分であることを示す。

$$A_k = \{x \in \mathfrak{X} \mid k < \tilde{B}(x) \leqq k+1\} \quad k = 0, 1, 2, \cdots$$

とおく。すると，λ を十分に大きくとると，

$$\int_{\mathfrak{X}} \tilde{B}(x)\,dP(x) = \sum_{k=0}^{\lambda}\int_{A_k} \tilde{B}(x)\,dP(x) + \sum_{k=\lambda+1}^{\infty}\int_{A_k} \tilde{B}(x)\,dP(x)$$

$$\leqq \sum_{k=0}^{\lambda}\int_{A_k} \tilde{B}(x)\,dP(x) + \sum_{k=\lambda+1}^{\infty}(k+1)\int_{A_k} dP(x)$$

$$\leqq \sum_{k=0}^{\lambda}\int_{A_k} \tilde{B}(x)\,dP(x) + \sum_{k=\lambda+1}^{\infty}(k+1)P(\tilde{B}(x) > k)$$

$$\leqq \sum_{k=0}^{\lambda}\int_{A_k} \tilde{B}(x)\,dP(x) + \sum_{k=\lambda+1}^{\infty}(k+1)C_5 e^{-C_2 k^2}$$

$$< \infty$$

となる。ゆえに，

$$\int_{\mathfrak{X}} \tilde{B}(x)\,dP(x) < \infty$$

が言えた。

（証明終）

Remark. Φ, F に関する仮定は定理 6 と同じとする。この時，$\forall P \in \mathcal{G}_{B.M}(\Phi)$ に対して，$P(\mathfrak{X}_1) = 1$ となる。

（指針）

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

$$\sup_{\alpha\in\mathbb{Z}^\nu}\frac{N(x;\Delta(\alpha))}{[\log_+(\alpha)]^{\frac{1}{2}}}<\infty \quad P\text{-a.e.}$$

を示すことによってでてくる。

Sinai のモデルについて考えてみる。

$P\in\mathcal{G}_{\beta,\mu}(U)$ が，番号 $|i|>n$ をもつ粒子を固定した下での，番号 $|i|\leqq n$ をもつ粒子についての条件付分布を考えた時，密度

$$\tilde{\Xi}^{-1}(\beta,\mu)\exp\Big\{-\beta\Big(\sum_{|i|\leq n}\frac{p_i^2}{2}+\sum_{\substack{|i_1|\leq n\\|i_2|\leq n}}U(|q_{i_1}-q_{i_2}|)+\sum_{\substack{|i_1|\leq n\\|j|>n}}U(|q_{i_1}-q_j|)\Big)\Big\}$$

をもつことに注意する。

__定理7__ （ Sinai [37]）

U は §3 の(A)をみたす。この時，この U から生成される Gibbs state を P とする。すると，${}^{\exists}C_1, C_2>0$ に対して，

$$P(\mathcal{X}_d(C_1,C_2))=1$$

となる。

__方針__ n : given に対して，

$$N_n'=\Big\{x\in\mathcal{X}_d \;\Big|\; q_{i+1}-q_i<C_2\log n \text{ for } \begin{array}{l} i=-n,\cdots-[\frac{n}{2}] \\ \text{or } i=[\frac{n}{2}],\cdots n\end{array}\Big\}$$

$$N_n''=\Big\{x\in\mathcal{X}_d \;\Big|\; \max_{\substack{0\leqq t\leqq 1\\|i|\leqq n}}|p_i(t)|>C_1\sqrt{\log n}\Big\}$$

$$N_n'''=\Big\{x\in\mathcal{X}_d \;\Big|\; \max_{\substack{-1\leqq t\leqq 0\\|i|\leqq n}}|p_i(t)|>C_1\sqrt{\log n}\Big\}$$

とおく時，C_1 を十分大，C_2 を十分小として，

$$(*)\quad \begin{cases}\sum_n P(N_n')<\infty\\ \sum_n P(N_n'')<\infty\\ \sum_n P(N_n''')<\infty\end{cases}$$

をいえば Borel-Cantelli より定理を得る。

Remark 1. hard rods 系（$R=d>0$）の場合に上のことを考えれば，P は位置に関しては幅 d をもつ Poisson 分布，運動量に関しては正規分布なる直積分布だから(*)の事実は容易にわかるだろう。

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

Remark 2. §3 の Remark 1 の多次元の場合において，density が十分低いという条件の下で一次元と同様の条件をみたす初期配置の空間が full measure であることを示した。（ Sinai [38] ）

今まで導入してきた解の存在する初期配置の空間 $\mathfrak{X}_0, \mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_d(c_1,c_2)$ 等を総称して $\bar{\mathfrak{X}}$ とすると，$\bar{\mathfrak{X}}$ は $\mathfrak{X}$ の Borel 部分集合として Lebesgue 空間となっており，

$T_t : \bar{\mathfrak{X}} \longrightarrow \bar{\mathfrak{X}}$　(t, x) につき可測な one-parameter group かつ P を保つ

であるから

$$(\bar{\mathfrak{X}}, P, \{T_t\})$$

は（次の§の意味で）力学系となる。

（ c.f. [17], [41] ）

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

§6 力学系とエルゴード性

<u>定義</u>（力学系）

T_t が $(\mathfrak{X}, P)$ 上の automorphism (mod. 0) の one-parameter group をなす時 $(\mathfrak{X}, P, T_t)$ を力学系という。

<u>定義</u>（ergodic）

力学系 $(\mathfrak{X}, P, T_t)$ が ergodic である。

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t f(T_s x)\,ds = \int_{\mathfrak{X}} f(x)\,dP \qquad P\text{-a.e.}$$

$$\forall f \in L^1(\mathfrak{X}, P)$$

$\overset{\text{同値}}{\Longleftrightarrow}$

$P(T_t A \triangle A) = 0$ for $\forall t \in \mathbb{R}$

$\Longrightarrow$ $P(A) = 0$ or 1 $\qquad \forall A$：可測集合

<u>定義</u>（可測分割）

$(\mathfrak{X}, P)$ の分割 $\xi = \{C_\xi\}$ が可測分割である。

$\Longleftrightarrow$

$\exists\{\Gamma_n\}$; 高々可算個の元からなる可測集合の系

s.t. $C_\xi \cap \Gamma_n = \phi$ a.e. or $C_\xi \cap \Gamma_n = \phi$ a.e.

for $\forall C_\xi \in \xi$, $n = 1, 2, \cdots$

<u>定義</u>（K-system）

力学系 $(\mathfrak{X}, P, T_t)$ が K-system である。

$\Longleftrightarrow$

次の3つの条件をみたす $(\mathfrak{X}, \mathcal{B}(\mathfrak{X}))$ の可測分割 ξ（K-分割という）が存在する。

(1) $T_t\xi \geq \xi$ mod 0. $t \geq 0$ （$\xi \geq \eta \Leftrightarrow \xi$ は η の細分）

(2) $\bigvee_t T_t\xi = \varepsilon$ mod 0. （ε は $\mathfrak{X}$ の各点への分割）

(3) $\bigwedge_t T_t\xi = \nu$ mod 0. （ν は $\mathfrak{X}$ のみを元とする分割）

Remark. K-system $\Longrightarrow$ (all order) mixing $\Longrightarrow$ ergodic

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

無限粒子の力学系 $(\mathfrak{X}, P, T_t)$ に対して，それが ergodic になるだろうということは Boltzmann－Gibbs の仮説もあって広く信じられているようであるが，実際に rigorous に証明されているのは ideal gas（$\Phi \equiv 0$；Volkovyskii－Sinai [42]）と次に述べる1次元 hard rods 系のみで，potential に smooth な部分のある場合には何もわかっていない。

定理8（Sinai [35]）
1次元 hard rod 系 $(R = d > 0)$ は K－system である。

（証明の概略）(0) 初期配置が $x = (q_i, p_i)_{i \in I}$ であるような無限個の hard rods が与えられた時

$$\hat{q}_i = q_i - id \;, \quad \hat{p}_i = p_i \qquad i \in I$$

を ideal gas model に対する初期配置 $\hat{x} = (\hat{q}_i, \hat{p}_i)_i$ とみなすと，ideal gas での t 時間後の配置 $\hat{x}(t) = (\hat{q}_i(t), \hat{p}_i(t))_i$ は配置としては，

$$\hat{q}_i(t) = \hat{q}_i + t\hat{p}_i \;, \quad \hat{p}_i(t) = p_i \qquad i \in I$$

に等しい。（番号付けが"衝突"ごとに変化してしまうことに注意）この $\hat{x}(t)$ を用いると，hard rods 系の t 時刻後の配置 $x(t) = (q_i(t), p_i(t))_i$ は次のように書ける。

$$\begin{cases} q_i(t) = q_i + tp_i + d\left(n^+_{(\hat{q}_i, \hat{p}_i)}(t) - n^-_{(\hat{q}_i, \hat{p}_i)}(t)\right) \\ p_i(t) = p_i \end{cases}$$

ただし，$n^+_{(\hat{q}_i, \hat{p}_i)}(t)$，$n^-_{(\hat{q}_i, \hat{p}_i)}(t)$ はそれぞれ ideal gas において第 i 粒子が時刻 $0 \sim t$ の間で他の粒子を追い越した，他の粒子に追い抜かれた回数。

この時，次の補題が本質的。

補題．
$$p_i > 0 \Longrightarrow \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t}\left(n^+_{(\hat{q}_i, \hat{p}_i)}(t) - n^-_{(\hat{q}_i, \hat{p}_i)}(t)\right) > 0 \quad P\text{-a.e.}\, x$$

$$従って \quad \lim_{t \to \infty} q_i(t) = +\infty \qquad P\text{-a.e.}\, x$$

（速度分布が正規であることが本質的）

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

(i) K－分割の構成

<u>定義</u> $\bar{t}$ が $x \in \mathcal{X}_d$ に対する“0－通過時間”

$\Longleftrightarrow$

(1) $\exists i \in \mathbb{Z}$: $q_i(\bar{t})=0$ かつ $\bar{t}$ は2粒子の衝突時間でない

or

(2) $\bar{t}$ は次の意味で2粒子の衝突時間：

$\exists i, j$: $p_i > p_j$ かつ $q_i(\bar{t}-0) < 0 < q_j(\bar{t}-0)$

$$\left.\begin{array}{ll} (1)\text{の場合は} & p_i \\ (2)\text{の場合は} & p_i,\ p_j,\ q_i(\bar{t}-0),\ q_j(\bar{t}-0) \end{array}\right\} \text{を } \bar{t} \text{ の characteristic}$$

という。

<u>定義</u> $x, x' \in \mathcal{X}_d$ が分割 ξ の同一元に属する。

$\Longleftrightarrow$

x, x' に対応して定まるそれぞれの<u>非負の</u>0－通過時間の列とその0－通過時間の characteristic が全く一致する。

(ii) ξ が K－分割であること。

K－分割の定義にある(1)～(3)を証明しなければならない。詳細は[34]を参照して頂くことにして，直観的な把握のためには次のことに注意すればよい。

- P-a.e. x に対し，x の全粒子は0－通過時間をもつ.（上の補題より）
- $T_t\xi$ の同一元に属する2つの configuration に対しては<u>時刻 t 以降</u>の0－通過時間の列とその characteristic が一致していなければならない。

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

§7 Boltzmann方程式の導出——BBGKY hierarchy

（同一種の）非常に多くの粒子系に対して，その粒子密度の時間発展がみたす方程式として，Boltzmann によって提唱されたBoltzmann 方程式がある。Boltzmann は可逆的な古典力学に従う衝突過程からいわば非可逆性のあらわれである“H－定理”をみたすBoltzmann 方程式を導くため，

“Stosszahlansatz”（Hypothesis of molecular chaos）

の仮定をした。ここではBoltzmann 方程式の解を，有限粒子系に対する粒子密度の時間発展の適当な意味での無限粒子系への移行で得られるものとして特徴づけることで，逆にBoltzmann 方程式を正当化することをLanford [18] の考えにそって，gas of hard spheres の場合に述べる。

〈Boltzmann 方程式〉（gas of hard spheres）

$\Lambda\times\mathbb{R}^{\nu}$を$(\vec{q},\vec{p})$中心の小さなセル$\Delta\vec{q}\Delta\vec{p}$に分割し，占拠数を正の関数$f$によって与える。（$\Lambda\subset\mathbb{R}^{\nu}$: bdd）

$$f_i=\int_{\Delta_i}f(\vec{q},\vec{p})d\vec{q}d\vec{p}\qquad \text{ただし}\int_{\Lambda\times\mathbb{R}^{\nu}}f(\vec{q},\vec{p})d\vec{q}d\vec{p}=1$$

$\{\Delta_i\}_{i=1}^{n}$：$\Lambda\times\mathbb{R}^{\nu}$の有限個の分割

そこで今，

$$\frac{n_{\Delta i}(x)}{n}\approx\int_{\Delta_i}f(\vec{q},\vec{p})d\vec{q}d\vec{p}\qquad \forall i$$

なる初期配置xをとったときに，t時間後に

$$\frac{n_{\Delta i}(x(t))}{n}\approx\int_{\Delta_i}f_t(\vec{q},\vec{p})d\vec{q}d\vec{p}\qquad \forall i$$

なる別の関数f_tがみつけられると仮定する。そこで，f_tの運動方程式（i.e. $\partial f_t/\partial t$）をみちびきだしたいわけである。

微小時間δtの間の変化δfは，粒子が一様な速度で直線上を動いた時におこる変化$(\delta f)_{flow}$，衝突の際におこる変化$(\delta f)_{collision}$の２つにわけられる。

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

$$\delta f = (\delta f)_{flow} + (\delta f)_{collision}$$

すると，

$$(\delta f)_{flow} = f_{t+\delta t}(\vec{q}, \vec{p}) - f_t(\vec{q}, \vec{p}) = -\left\langle \frac{\vec{p}}{m}, \frac{\partial f_t}{\partial \vec{q}}(\vec{q}, \vec{p}) \right\rangle \delta t$$

となる。一方 collision part の方はさらに2つにわけられる。

$$(\delta f)_{collision} = (\delta f)_{in} - (\delta f)_{out}$$

$(\delta f)_{in}$：衝突後に粒子が$(\vec{q}, \vec{p})$の近傍に入ってくる
$(\delta f)_{out}$：衝突後に粒子が$(\vec{q}, \vec{p})$の近傍から出ていく

従って，$(\delta f)_{in}$，$(\delta f)_{out}$ について調べれば δf はわかる。
以後次元を3，粒子の直径を d として議論していく。

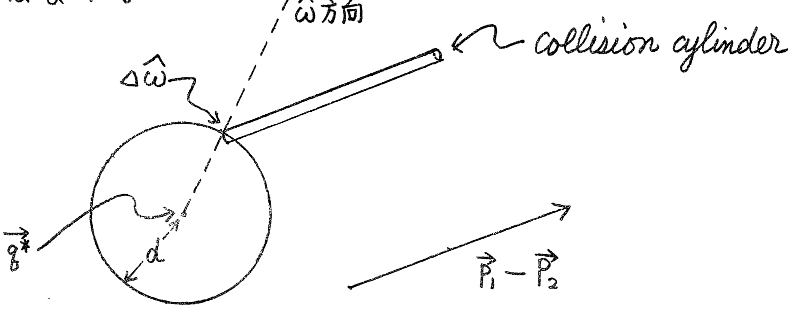
$\Delta\vec{q}$：$\vec{q}$を含む position space 上の小さな領域
$\Delta\vec{p}$：$\vec{p}$を含む momentum space 上の小さな領域
$\Delta\hat{\omega}$：単位球上の小さな領域
（$\hat{\omega}$は衝突の際1から2へ向う単位ベクトル）

次のような衝突回数を考える。

（時間 δt 内で，場所$\Delta\vec{q}$で，$\Delta\vec{p}_1$と$\Delta\vec{p}_2$の incoming momenta の間で$\Delta\hat{\omega}$方向にモーメントが変化する衝突回数）

＝（$\Delta\vec{q}\Delta\vec{p}_1$内の粒子数）×（この種の衝突が起こる割合）

今$\vec{q}^*$と$\Delta\vec{p}_1$ 内のモーメントをもったある特定の粒子が $\Delta\vec{p}_2$ 内のモーメントをもった別の粒子と衝突して $\Delta\hat{\omega}$ 方向にモーメントがかわるという衝突を考えるのに，次のような collision cylinder を考えればよい。



Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

すると，

$$(\text{collision cylinder の体積}) = d^2|\Delta\hat{\omega}|\left\langle \frac{\vec{p}_1 - \vec{p}_2}{m}\delta t,\ \hat{\omega} \right\rangle$$

となる。ここで決定的な仮定をおく。これは，

Stosszahlansatz (*Hypothesis of molecular chaos*)

の名で呼ばれている。

"*Stosszahlansatz*"

$$\begin{pmatrix} \text{モーメントが } \Delta\vec{p}_1 \text{ の中に入っていて、このような} \\ \text{collision cylinder の中に入っている粒子数} \end{pmatrix}$$

$$= (\text{collision cylinder の全体積}) \times (nf(\vec{q}, \vec{p}_2)\Delta\vec{p}_2)$$

$$= \left\{ nf(\vec{q}, \vec{p}_1)\Delta\vec{q}\Delta\vec{p}_1 \times d^2\delta t|\Delta\hat{\omega}|\left\langle \frac{\vec{p}_1 - \vec{p}_2}{m}, \hat{\omega} \right\rangle \right\} \times \left\{ nf(\vec{q}, \vec{p}_2)\Delta\vec{p}_2 \right\}$$

以上のことから $\vec{p}_1$，$\vec{p}_2$ を *incoming momentum*，$\vec{p}_1{}'$，$\vec{p}_2{}'$ を *outgoing momentum* とすると，

$$n(\delta f)_{out}\Delta\vec{q}\Delta\vec{p}_1 = nf(\vec{q}, \vec{p}_1)\Delta\vec{q}\Delta\vec{p}_1 \sum_{\substack{\hat{\omega}, \vec{p}_2 \\ \langle \hat{\omega}, \vec{p}_1 - \vec{p}_2 \rangle \geq 0}} d^2\delta t|\Delta\hat{\omega}|\left\langle \frac{\vec{p}_1 - \vec{p}_2}{m}, \hat{\omega} \right\rangle nf(\vec{q}, \vec{p}_2)\Delta\vec{p}_2$$

となり，Σ を $\int$ にかきかえ，共通項を消去すると，

$$(\delta f)_{out}(\vec{q}, \vec{p}_1) = nd^2\delta t \int_{\langle \hat{\omega}, \vec{p}_1 - \vec{p}_2 \rangle \geq 0} d\hat{\omega}\, d\vec{p}_2 \left\langle \frac{\vec{p}_1 - \vec{p}_2}{m}, \hat{\omega} \right\rangle f(\vec{q}, \vec{p}_1) f(\vec{q}, \vec{p}_2)$$

同様にして，

$$(\delta f)_{in}(\vec{q}, \vec{p}_1) = nd^2\delta t \int_{\langle \hat{\omega}, \vec{p}_1 - \vec{p}_2 \rangle \geq 0} d\hat{\omega}\, d\vec{p}_2 \left\langle \frac{\vec{p}_1 - \vec{p}_2}{m}, \hat{\omega} \right\rangle f(\vec{q}, \vec{p}_1{}') f(\vec{q}, \vec{p}_2{}')$$

となる。従って <u>*Boltzmann* 方程式</u>は次のようになる。

(7—1)
$$\frac{\partial}{\partial t} f_t(\vec{q}, \vec{p}_1) = -\left\langle \frac{\vec{p}_1}{m}, \frac{\partial}{\partial \vec{q}} f_t(\vec{q}, \vec{p}_1) \right\rangle$$
$$+ nd^2 \int_{\substack{\hat{\omega}, \vec{p}_2 \\ \langle \hat{\omega}, \vec{p}_1 - \vec{p}_2 \rangle \geq 0}} d\vec{p}_2\, d\hat{\omega} \left\langle \frac{\vec{p}_1 - \vec{p}_2}{m}, \hat{\omega} \right\rangle \left[f_t(\vec{q}, \vec{p}_1{}') f_t(\vec{q}, \vec{p}_2{}') - f_t(\vec{q}, \vec{p}_1) f_t(\vec{q}, \vec{p}_2) \right]$$

ただし，$\vec{p}_1{}' = \vec{p}_1 - \langle \vec{p}_1 - \vec{p}_2, \hat{\omega} \rangle \hat{\omega}$，$\vec{p}_2{}' = \vec{p}_2 + \langle \vec{p}_1 - \vec{p}_2, \hat{\omega} \rangle \hat{\omega}$

n：粒子数

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

Remark. (7—1)式は position space Λ 内でたてているので $\partial\Lambda$ では，反射条件によって運動量保存は期待できない。

〈 Boltzmann—Grad limit 〉

Boltzmann 方程式は本来，稀薄であるが多粒子系気体に対して考えられたものであるから固定した Λ に対して，粒子数 n を無限大にし，かつ直径 d を 0 に近ずけた時の極限状態の時に意味をもってくるであろう。そこで，(7—1)の右辺第2項に nd^2 の要素があることを考慮して，極限の取り方を次のようにしてみよう。

Λ: fix の下で $n \longrightarrow \infty$，$d \longrightarrow 0$ かつ $nd^2 \longrightarrow$ (正の定数)

これを Boltzmann Grad limit という。

これは次のような mean free path λ の評価に便利である。mean free path は，1つの粒子が他の粒子と衝突することなしに進める平均距離だと考えられる。

$$\pi d^2 \lambda \approx \frac{V(\Lambda)}{n}$$

ゆえに，

$$\lambda \approx \frac{V(\Lambda)}{\pi n d^2}$$

となる。

〈 H—定理 〉

$\Lambda \times \mathbb{R}^3$ 上の任意の正の関数 $f(\vec{q}, \vec{p})$ に対して，

$$H(f) \equiv \int_{\Lambda \times \mathbb{R}^3} d\vec{q}\, d\vec{p}\, f(\vec{q}, \vec{p}) \log f(\vec{q}, \vec{p})$$

とおく。そこで，もし $f_t(\vec{q}, \vec{p})$ が Boltzmann 方程式の解とすると，

$$\frac{d}{dt} H(f_t) \leqq 0$$

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

が成り立つ。ただし，等号成立は

$$f = g(\vec{q})\exp\left[-\beta(\vec{p}-\vec{p}_0)^2\right];$$ $\beta, \vec{p}_0$ は $\vec{q}$ の関数であり，$\vec{p}$ には依存しない。

に限る。これを，H－定理という。

また，$H(f_t)$ は t に関して下から有界なことも，エネルギー保存則と Jensen の不等式からわかる。以上のことから，$H(f_t)$ は t に関して単調減少関数で下に有界であることがわかるので，

$$\lim_{t\to\infty} f_t$$

が存在して，それが Maxwell 分布であるということが推測できる。このことは，Boltzmann 方程式の任意の解は，時間が十分たつと Maxwell 分布に近づくことを意味している。

さらに，H－定理は分子の力学系には可逆性がないことを示している。その原因は，Boltzmann 方程式をたてた時につかった Stosszahlansatz にある。

〈BBGKY－hierarchy〉

。smooth force

$x_i = (\vec{q}_i, \vec{p}_i)$ に対して，$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in (\Lambda \times \mathbb{R}^3)^n$ とかくことにする。$(\Lambda \times \mathbb{R}^3)^n$ 上の probability measure で Lebesgue measure に関する density が，

$$u(x) = u(x_1, x_2, \cdots, x_n)\ ;\ C^1\text{級, 座標の入れかえで不変}$$

で与えられるものを考えよう。これの t 時刻後の density $u_t(x)$（T^t による image measure の density）は，Lebesgue measure を保つから，

$$u_t(x) = u(T^{-t}x) \qquad T^t\,;\ \Lambda\text{内の}n\text{粒子の運動(境界条件つき)}$$

となり，

$$(7\text{—}2)\qquad \frac{\partial u_t(x)}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{n}\left\langle \frac{\vec{p}_i}{m}, \frac{\partial u_t}{\partial \vec{q}_i}\right\rangle + \sum_{i\neq j}\left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial \vec{q}_i}(\vec{q}_i - \vec{q}_j), \frac{\partial u_t}{\partial \vec{p}_i}\right\rangle$$

$$\equiv H_n u_t(x) \qquad \langle\ \text{Liouville operator}\ \rangle$$

となる。

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

<u>定義</u> (*correlation function*)

$$(7\text{—}3) \qquad \rho_j(t;x_1,\cdots,x_j) \equiv n(n-1)\cdots(n-j+1)\int_{(\Delta\times\mathbb{R}^3)^{n-j}} dx_{j+1}\cdots dx_n\, \mu_t(x_1,\cdots,x_n)$$

$$j=1,2,\cdots,n$$

Remark. $\displaystyle\int_{\underbrace{\Delta\times\cdots\times\Delta}_{j}} dx_1\cdots dx_j\, \rho_j(t;x_1,\cdots,x_j) = E(n_\Delta(n_\Delta-1)\cdots(n_\Delta-j+1))$

n_Δ; △内の粒子数

そこで(7—3)をtで微分すると,

$$(7\text{—}4) \qquad \frac{\partial}{\partial t}\rho_j(t) = H_j\rho_j(t) + C_{j,j+1}\rho_{j+1}(t) \qquad j=1,2,\cdots,n$$

ただし $\displaystyle C_{j,j+1}\rho_{j+1}(t) = \sum_{i=1}^{j}\int dx_{j+1}\left\langle \frac{\partial\Phi(\vec{q}_i-\vec{q}_{j+1})}{\partial\vec{q}_i}, \frac{\partial}{\partial\vec{p}_i}\rho_{j+1}(t)\right\rangle$

となる。これを <u>B B G K Y *hierarchy*</u> という。
(*Bogoliubov*, *Born*, *Green*, *Kirkwood* and *Yvon*)
Remark $j=n$ の時の(7—4)は(7—2)になる。
(i.e. $\rho_{n+1}(t)\equiv\rho_{n+2}(t)\equiv\cdots\equiv 0$)

○ <u>*gas of hard spheres*</u> の場合の修正 (c.f. 高橋 [39])

smooth force の場合と比べての難しさは, 時間発展が不連続であるから, 時間tに関して微分が不可能なことにある。そこで *hard sphere phase space* を定義しなおすことによって, その難しさを取りのぞく。

衝突の瞬間そのモーメントは *income* から *outgo* へ一瞬のうちにかわる。そこで2つの *phase point* $x^{(1)}$と$x^{(2)}$——*income collision configuration* のうちいくつかを *outgo configuration* におきかえただけ異なっている——は同じ *phase point* として考える。いいかえると, 元の *phase space* のうちで上のような, *phase point* を同一視することによって新しい *phase space* を作る。

そこで, *smooth force* を持った粒子の時と同じような形の, B B G K Y *hierarchy* を *hard sphere* の場合にもつくる。

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

$$(7\text{—}5)\qquad \frac{\partial}{\partial t}\rho_j(t)=H_j\rho_j(t)+C_{j,j+1}\rho_{j+1}(t)\qquad j=1,2,\cdots,n$$

ただし $$(C_{j,j+1}\rho_{j+1})(x_1,\cdots,x_j)=d^2\sum_{i=1}^{j}\int_{S^2\times\mathbb{R}^3}d\vec{p}_{j+1}d\hat{\omega}\left\langle\hat{\omega},\frac{\vec{p}_{j+1}-\vec{p}_i}{m}\right\rangle$$
$$\times\rho_{j+1}(t;x_1,\cdots,x_j,(\vec{q}_i+d\hat{\omega},\vec{p}_{j+1}))$$

H：弾性衝突のみを考えた時の j 粒子に対する Liouville operator

この式の証明は，[44]を御覧下さい。

特に(7—5)で $j=1$ とし，$(\vec{q}_1,\vec{p}_1,\vec{q}_1+d\cdot\hat{\omega},\vec{p}_2)$ と $(\vec{q}_1,\vec{p}_1{}',\vec{q}_1+d\hat{\omega},\vec{p}_2{}')$ を同一視することに注意すると，(ただし，$\vec{p}_1{}'=\vec{p}_1-\langle\vec{p}_1-\vec{p}_2,\hat{\omega}\rangle\hat{\omega}$ $\vec{p}_2{}'=\vec{p}_2+\langle\vec{p}_1-\vec{p}_2,\hat{\omega}\rangle\hat{\omega}$ である)

$$(7\text{—}6)\qquad \frac{\partial}{\partial t}\rho_1(t;x_1)=-\left\langle\frac{\vec{p}_1}{m},\frac{\partial}{\partial\vec{q}_1}\rho_1(t;x_1)\right\rangle$$
$$+d^2\int_{\langle\hat{\omega},\vec{p}_1-\vec{p}_2\rangle\geq 0}d\vec{p}_2d\hat{\omega}\left\langle\hat{\omega},\frac{\vec{p}_1-\vec{p}_2}{m}\right\rangle\cdot\left\{\rho_2(t;\vec{q}_1,\vec{p}_1{}',\vec{q}_1-d\cdot\hat{\omega},\vec{p}_2{}')-\rho_2(t;\vec{q}_1,\vec{p}_1,\vec{q}_1+d\cdot\hat{\omega},\vec{p}_2)\right\}$$

となる。そこで，(7—6)で次の3つのことを仮定すると Boltzmann 方程式になる。

(a) $\rho_2(t;x_1,x_2)=\rho_1(t,x_1)\rho_1(t,x_2)$ 〈Factorization Assumption〉

(b) $\rho_1(t;x)=nf(t;x)$ 〈Rescaling〉

(c) $n\longrightarrow\infty,\ d\longrightarrow 0,\ nd^2\longrightarrow\text{const}$ 〈Boltzmann-Grad limit〉

従って Boltzmann 方程式は Factorization Assumption が正当化できるという条件の下での BBGKY hierarchy の極限として formal には得られるということがわかる。

Remark. (7—5)から(7—6)を導く時に incoming collision point にかきなおして導いた。これを，outgoing collision point にしてしまうと Boltzmann 方程式はでないで，collision term の符号を変えたものがでる。

〈Boltzmann hierarchy〉

Boltzmann 方程式とBBGKY hierarchy との関係を Boltzmann 方程式と，Boltzmann hierarchy とを結びつけることによって，みていく。

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

$f_1(t;x)$をBoltzmann方程式の解とし，

$$(7-7) \qquad f_j(t;x_1,\cdots,x_j)=\prod_{i=1}^{j} f_1(t;x_i)$$

を仮定すると，$f_j(t)$は次の関係式をみたす。

$$(7-8) \qquad \frac{\partial}{\partial t} f_j(t)=H_j^{(0)} f_j(t)+C_{j,j+1}^{(0)} f_j(t)$$

ただし $H_j^{(0)}=-\sum_{i=1}^{j}\left\langle \frac{\vec{p}_i}{m}, \frac{\partial}{\partial \vec{q}_i}\right\rangle$

$$\left(C_{j,j+1}^{(0)} f_{j+1}\right)(x_1,\cdots,x_j)=nd^2\sum_{i=1}^{j}\int_{\langle\hat{\omega},\vec{p}_i-\vec{p}_{j+1}\rangle\geq 0} d\hat{\omega}\, d\vec{p}_{j+1}\left\langle \hat{\omega}, \frac{\vec{p}_i-\vec{p}_{j+1}}{m}\right\rangle$$

$$\times\left\{f_{j+1}(x_1,\cdots,x_{i-1},\vec{q}_i,\vec{p}_i{}',\cdots,\vec{q}_i,\vec{p}_{j+1}{}')-f_{j+1}(x_1,\cdots,x_{i-1},\vec{q}_i,\vec{p}_i,\cdots,\vec{q}_i,\vec{p}_{j+1})\right\}$$

$$\vec{p}_i{}'=\vec{p}_i-\langle\vec{p}_i-\vec{p}_{j+1},\hat{\omega}\rangle\hat{\omega}$$

$$\vec{p}_{j+1}{}'=\vec{p}_i+\langle\vec{p}_i-\vec{p}_{j+1},\hat{\omega}\rangle\hat{\omega}$$

(7—8)をBoltzmann hierarchyという。

又，逆に(7—7)が(7—8)をみたしている時に$f_1(t;x)$はBoltzmann方程式の解になることもわかる。

結論として，Boltzmann方程式はBoltzmann hierarchyとFactorization condition (7—7)と同値である。

〈Lanfordのidea〉

Liouville方程式から出発したＢＢＧＫＹ hierarchyと，それに対応するであろうBoltzmann hierarchyを同時に考え，Boltzmann-Grad limitを介して両者を結びつけることによってBoltzmann方程式を（Stosszahlansatzを用いずに）導き出すことは，19世紀末におけるBoltzmann方程式の正当性に関する大論争を思うにつけなおさら意義深いことであろう。

Lanford [18] は，このstoryを数学的にrigorousにしようとした。得られている結果は後述のように，収束が言えるのは，local（tについて）であり，かつ初期条件にある種の一様性の仮定が置かれている点で，不十分であろうと思われるが，収束を扱う関数空間を明確にしたという点で興味深い。Lanford

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

の program を順を追って紹介してみよう。

○まず Boltzmann-Grad limit の下では correlation function $\{\rho_j\}$ は発散するので，

$$f_j^{(d)}(x_1,\cdots,x_j)\equiv n^{-j}\rho_j^{(d)}(x_1,\cdots,x_j) \quad (t\text{も入れても同様})$$

ととり直し BBGKY hierarchy (7—5)を，

$$\frac{d}{dt}\underline{f}^{(d)}(t)=H^{(d)}\underline{f}^{(d)}(t)+C^{(d)}\underline{f}^{(d)}(t)\ ,\quad \underline{f}^{(d)}=(f_j^{(d)}) \tag{7—9}$$

と書いておく。(ただし collision operator $C^{(d)}$ の定義にあらわれる(7—5)の右辺の係数が nd^2 に変わっていることに注意。)

$$(S^{(d)}\underline{f})_j(x_1,\cdots,x_j)\equiv f_j(T^{-t}(x_1,\cdots,x_j))\ ,\quad f=(f_j)$$

を用いると，(7—9)の formal solution は，

$$\underline{f}^{(d)}(t)=S^{(d)}(t)\underline{f}^{(d)}(0)+\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t dt_1\int_0^{t_1}dt_2\cdots\int_0^{t_{k-1}}dt_k\,S^{(d)}(t-t_1)C^{(d)}S^{(d)}(t_1-t_2)\cdots C^{(d)}S^{(d)}(t_k)\underline{f}^{(d)}(0) \tag{7—10}$$

で与えられる。同様に free flow operator $S^{(0)}(t)$ を

$$(S^{(0)}(t)\underline{f})_j(x_1,\cdots,x_j)\equiv f_j(\vec{q}_1-t\frac{\vec{p}_1}{m},\vec{p}_1,\cdots,\vec{q}_j-t\frac{\vec{p}_j}{m},\vec{p}_j)$$

と定義すれば，Boltzmann hierarchy (7－8)の formal solution は

$$\underline{f}^{(0)}(t)=S^{(0)}(t)\underline{f}^{(0)}(0)+\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t dt_1\int_0^{t_1}dt_2\cdots\int_0^{t_{k-1}}dt_k\,S^{(0)}(t-t_1)C^{(0)}S^{(0)}(t_1-t_2)\cdots C^{(0)}S^{(0)}(t_k)\underline{f}^{(0)}(0)$$

で与えられる。これらの無限級数の収束を保証する関数空間として次の定義を与える。

<u>定義</u>

○ $\displaystyle {}_j\|f\|_\beta\equiv\sup_{x_1,\cdots,x_j\in\Lambda\times\mathbb{R}^3}\frac{f(x_1,\cdots,x_j)}{\prod_{i=1}^{j}\sigma_\beta(\vec{p}_i)}$ for $f:(\Lambda\times\mathbb{R}^3)^j\longrightarrow\mathbb{R}$

ただし $\beta>0$，$\displaystyle \sigma_\beta(\vec{p})=\left(\frac{\beta}{2\pi m}\right)^{\frac{3}{2}}\exp\left[-\frac{\beta}{2m}|\vec{p}^{\,2}|\right]$

○ $\displaystyle \|\underline{f}\|_{z,\beta}\equiv\sup_j\frac{{}_j\|f_j\|_\beta}{z^j}$ for $f=(f_j)$, $z>0$

○ $Y_{z,\beta}=\left\{\underline{f}=(f_j)\ \middle|\ \|\underline{f}\|_{z,\beta}<\infty\right\}$

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

Remark. $S^{(d)}(t)$, $S^{(0)}(t)$ は $Y_{z,\beta}$ 上の isometry

命題 $\beta > \beta' > 0$, $z' > \left(\frac{\beta}{\beta'}\right)^{\frac{3}{2}} z$

$$\Rightarrow {}^{\exists}A = A\left(\frac{\beta'}{\beta}, \frac{z'}{z}\right) \text{ (independent on } k, \beta, d, n, z)$$

$$\text{s.t. } \| S^{(d)}(t-t_1) C^{(d)} S^{(d)}(t_1 - t_2) \cdots C^{(d)} S^{(d)}(t_k) \underline{f} \|_{z',\beta'}$$
$$\leqq k! [A\pi n d^2 z (m\beta/3)^{-\frac{1}{2}}]^k \| \underline{f} \|_{z,\beta}$$
$$\forall k \geqq 1, \quad \forall \underline{f} \in Y_{z,\beta}$$

$t_0 \equiv [A\pi n d^2 z (m\beta/3)^{-\frac{1}{2}}]^{-1}$ とおくことにより（nd^2 : const. としておく），次の系を得る。

系 上で選んだ $z, z', \beta, \beta', t_0$ に対して，

$$\underline{f}^{(d)}(0) \in Y_{z,\beta}, \quad |t| \leqq t_0 \Longrightarrow (7\text{—}10) \text{ は } Y_{z',\beta'} \text{ の元として収束する。}$$
（d に関して一様収束）

全く同様の評価により，

$$\underline{f}^{(0)}(0) \in Y_{z,\beta}, \quad |t| \leqq t_0 \Longrightarrow (7\text{—}11) \text{ も } Y_{z',\beta'} \text{ の元として収束する。}$$

定理 9 （Lanford [18]）

(C1) ${}^{\exists}z, \beta > 0$: $\| \underline{f}^{(d)} \|_{z,\beta}$ が d に関して一様有界

(C2) ${}^{\exists}f_j^{(0)} \in C((\Lambda \times \mathbb{R}^3)^j)$: $\lim_{d \to 0} f_j^{(d)}(x_1, \cdots, x_j) = f_j^{(0)}(x_1, \cdots, x_j)$ （広義一様）

$\Longrightarrow$ (a) $\lim_{d \to 0} f_j^{(d)}(t; x_1, \cdots, x_j) = f_j^{(0)}(t; x_1, \cdots, x_j)$ a.e. ${}^{\forall}j$, ${}^{\forall}0 < t < t_0$

(b) $(f_j^{(0)}(t))$ は Boltzmann hierarchy の generalized solution

(c) 更に，

$$f_j^{(0)}(x_1, \cdots, x_j) = \prod_{i=1}^{j} f_1^{(0)}(x_i)$$

ならば

$$f_j^{(0)}(t; x_1, \cdots, x_j) = \prod_{i=1}^{j} f_1^{(0)}(t; x_i)$$

であり，従って $f_1^{(0)}(t; x_1)$ は Boltzmann 方程式(7—1)をみたす。

（方針） 各 $k \geqq 1$, $t_0 > t > t_1 > \cdots > t_k > 0$ に対して，

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

$$\lim_{\alpha\to 0} S^{(\alpha)}(t-t_1)\,C^{(\alpha)}S^{(\alpha)}(t_1-t_2)\cdots C^{(\alpha)}S^{(\alpha)}(t_k)\,\underline{f}^{(\alpha)}$$
$$= S^{(0)}(t-t_1)\,C^{(0)}S^{(0)}(t_1-t_2)\cdots C^{(0)}S^{(0)}(t_k)\,\underline{f}^{(0)} \quad \text{a.e.}$$

を示せばよい。特に、$k=1$ の時に示すのが本質的であるが、そのためには、$S^{(\alpha)}(t-t_1)\,C^{(\alpha)}S^{(\alpha)}(t_1)\,\underline{f}^{(\alpha)}$ を定義にもどって $\alpha\to 0$ の時の挙動を考察する必要がある。

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

文献表 (CMP : Commun.math.phys.)

[1] M.Aizenman, S.Goldstein & J.L.Lebowitz; Conditional equilibrium and the equivalence of microcanonical and grandcanonical ensembles in the thermodynamics limit, CMP 62(1978) 279-302.

[2] N.N.Bogolioubov; Problems of dynamical theory in statistical physics, Studies in statistical mechanics I (ed.Boer & Uhlenbeck) North Holland '62.

[3] R.L.Dobrushin; Gibbsian random fields for lattice systems with pair interactions, Funct.Anal.Appl. 2(1968), 291-301.

[4] ———— & J.Fritz; Non-equilibrium dynamics of one-dimensional infinite particle systems with a hard core interaction, CMP 55(1977), 275-292.

[5] ————; Non-equilibrium dynamics of two-dimensional infinite particle systems with a singular interaction, CMP 57(1977), 67-81.

[6] ———— & B.Tirozzi; The central limit theorem and the problem of equivalence of ensembles, CMP 54(1977), 173-192.

[7] G.Gallavotti, O.E.Lanford III & J.L.Lebowitz; thermodynamic limit of time-dependent correlation functions for one-dimensional systems, J.Math.Phys. 11(1970), 2898-2905.

[8] H.O.Georgii; Canonical and grand canonical Gibbs states for continuum systems, CMP 48(1976), 31-51.

[9] ————; Canonical Gibbs measures, Springer Lecture Notes in Math.760, 1979.

[10] B.M.Gurevich, Ya.G.Sinai & Yu.M.Suhov; On invariant measures of dynamical systems of one-dimensional statistical mechanics, Russian Math.Surveys 28(1973), 49-86.

[11] ———— & Yu.M.Suhov; Stationary solutions of the Bologolioubov hierarchy equations in classical statistical mechanics 1,2,3, CMP 49(1976), 63-96, 54(1977), 81-96, 56(1977), 225-236.

[12] A.Haitov; Limiting equivalence of various ensembles for one-dimensional statistical systems, Transactions Moscow Math. Soc. 28(1973), 213-256.

[13] A.M.Halfina; The limiting equivalence of the canonical and grand canonical ensembles (low density case), Math.USSR Sbor. 9(1969), 1-52.

[14] R.A.Holley & D.W.Stroock; Nearest neighbor birth and death processes on the real line, Acta Math.140(1978), 103-154.

[15] F.G.King; BBGKY hierarchy for positive potentials, Ph.D Dissertation, Dept. of Math. Univ. of California of Berkeley (1975).

[16] O.E.Lanford III; The classical mechanics of one-dimensional systems of infinitely many particles I, CMP 9(1968), 169-191.

[17] ————; ibid.II Kinetic theory, CMP 11(1968), 257-292.

[18] ————; Time evolution of large classical systems, Proc. Batelle Rencontres on Dynamical Systems (ed.Moser), Springer Lecture Notes in Physics 38(1975), 1-111.

[19] ————; On a derivation of the Bolzmann equation, Intern. Conf. on Dynamical Systems in Math. Phys. Astérisque 40(1976), 117-137.

[20] ———— & D.Ruelle; Observables at infinity and states with short range correlations in statistical mechanics, CMP 13(1969), 194-215.

[21] C.Marchioro, A.Pellegrinotti & E.Presutti; Existence of time evolution for ν-dimensional statistical mechanics, CMP 40 (1975), 175-185.

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

[22] R.A.Minlos; Gibbs limit distribution, Funct.Anal.Appl. 1(1967), 141-150.
[23] ――――――; Regularity of the Gibbs limit distribution, Funct. Anal.Appl. 1(1967), 206-217.
[24] ――――――; Lectures on statistical physics, Russian Math. Surveys 23(1968), 137-196.
[25] ―――――― & A.M.Halfina; Two-dimensional limit theorem for the particle number and energy in the grand canonical ensemble, Math.USSR Izv. 4(1970), 1183-1202.
[26] ―――――― & A.Haitov; Equivalence in the limit of thermodynamic ensembles in the case of one-dimensional classical systems, Funct.Anal.Appl 6(1972), 337-338.
[27] O.de Pazzis; Ergodic properties of a semi-infinite hard rods system, CMP 22(1971), 121-132.
[28] ――――――; Dynamical theory of a bidimensional system with an infinite numbers of degrees of freedom, CMP 29(1973), 113-130.
[29] C.Preston; Canonical and microcanonical Gibbs states, Z.Wahr. verw.Geb. 46(1979), 125-158.
[30] E.Presutti, M.Pulvirenti & B.Tirozzi; Time evolution of infinite classical systems with singular, long range, two body interactions, CMP 47(1976), 81-95.
[31] D.Ruelle; Statistical Mechanics, Rigorous Results, Benjamin 1969.
[32] ――――――; Superstable interactions in classical statistical mechanics, CMP 18(1970), 127-159.
[33] T.Shiga; Some problems related to Gibbs states, canonical Gibbs states and Markovian time evolutions, Z.Wahr.verw.Geb. 39 (1977), 339-352.
[34] 志賀徳造 「無限粒子の力学系の構成 I」, 村田 博「同 II」 京都大学数理解析研究所講究録 216 「力学系の理論」 1974, 135-155.

[35] Ya.G.Sinai; Ergodic properties of a gas of one-dimensional hard rods with an infinite number of degrees of freedom, Funct. Anal.Appl. 6(1972), 35-43.
[36] ――――――; Gibbs measures in ergodic theory, Russian Math. Surveys 27(1972)
[37] ――――――; Construction of the dynamics for one-dimensional systems of statistical mechanics, Theor.Math.Phys. 11(1972), 487-494.
[38] ――――――; The construction of cluster dynamics for dynamic systems of statistical mechanics, Moscow Univ. Math. Bull. 29(1974), 124-129.
[39] Y.Takahashi; A class of solutions of Bogolioubov system of equations for classical statistical mechanics of hard core potentials, Sci. Papers of College of Gen. Education Univ. of Tokyo 26(1976), 15-26.
[40] 高橋陽一郎; 「Gibbs 測度の特徴づけ」 Seminor on Prob. 46, 1977.
[41] 十時東生; 「エルゴード理論入門」 共立 1971.
[42] K.L.Volkovyskii & Ya.G.Sinai; Ergodic properties of an ideal gas with an infinite number of degrees of freedom, Funct.Anal. Appl. 5(1971), 185-187.
[43] 谷口礼偉; 「Nearest neighbor potential をもつ一次元無限粒子系の構成」 広島大学修士論文 (1979).

- - - - - 追加 -

[44] C.Cercignani; On the Bolzmann equation for rigid spheres, Transport Theory and Statistical Physics 2(1972), 211-225.
[45] O.E.Lanford III; Time dependent phenomina in statistical mechanics, Springer Lecture Notes in Physics 116(1979), 103-118.

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

Combinatorial number theory への Ergodic theory の応用

釜江哲朗述

伊達山正人記

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

§1. 準備

コンパクト距離空間X上の複素数値連続関数の全体を$C(X)$で表わす．Xのボレル集合Y上の確率測度をμとする．$\tilde{\mu}(B)=\mu(B\cap Y)$ （BはXのボレル集合）によってX上の確率測度$\tilde{\mu}$が定まる．以後$\tilde{\mu}$のかわりにμを用いる．コンパクト距離空間XとYの直積空間$X\times Y$からX，Yの上への自然な射影をそれぞれπ_X，π_Yで表わす．$X\times Y$上の確率測度λに対して，

$$\lambda|_X(B)=\lambda(\pi_X^{-1}B) \qquad (B\text{は}X\text{のボレル集合})$$
$$\lambda|_Y(B)=\lambda(\pi_Y^{-1}B) \qquad (B\text{は}Y\text{のボレル集合})$$

によってX上の確率測度$\lambda|_X$，Y上の確率測度$\lambda|_Y$を決める．$\mathbb{N}$は0を含む自然数の全体，$\mathbb{Z}$は整数の全体，$\mathbb{R}$は実数の全体，$\mathbb{C}$は複素数の全体を表わす．

定義1 Xはコンパクト距離空間，TはXからそれ自身の上への可測写像とする．このとき(X,T)を可測力学系とよぶ．とくにTが連続写像のとき(X,T)を位相力学系とよぶ．μをX上の確率測度で，Tがμ－保測変換とするとき，(X,T,μ)は測度力学系であるという．

定義2 Xはコンパクト距離空間，fは$\mathbb{N}=\{0,1,2,\cdots\}$から$X$への写像とする．$X^{\mathbb{N}}$上の推移変換$T$を，$(T\omega)(n)=\omega(n)$ $(\omega=(\omega(0),\omega(1),\cdots),\ n\in\mathbb{N})$によって定義する．写像$f:\mathbb{N}\to X$を$(f(0),f(1),\cdots)\in X^{\mathbb{N}}$と同一視することができる．集合$Y=\overline{\{T^nf\,;\,n\in\mathbb{N}\}}$は$X^{\mathbb{N}}$の閉部分空間である（以後$f:\mathbb{N}\to X$と，点$(f(0),f(1),\cdots)\in X^{\mathbb{N}}$は同じ記号で書かれる．）．このとき，$(Y,T)$を写像$f$に対応する位相力学系という．また，$Y$上の$T$－不変確率測度$\mu$に対して，$\mathbb{N}$の部分列$\{N_j\}_{j=0}^{\infty}$が存在して，

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}F(T^nf)=\int F\,d\mu \qquad (F\in C(Y))$$

をみたすとき，(Y,T,μ)を写像fに対応する測度力学系とよぶ．

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

定義3 (X,T) は可測力学系とする．点 $x \in X$ が quasi-regular であるとは，任意の $f \in C(X)$ に対して，

$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(T^n x)$ が存在することをいう．このとき，$C(X)$ 上の線形汎関数 L を　$L(f)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(T^n x)$　で定義すれば，$f \geq 0$ のとき　$L(f) \geq 0$，かつ $L(1)=1$ であるから，リースの表現定理によって，

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(T^n x) = \int f\,d\mu \qquad (f \in C(X))$$

をみたす X 上の確率測度 μ が唯一つ存在する．以後このような μ を μ_x で表わす．

定理1.1 (X,T) は可測力学系とする．Quasi-regular な点 $x \in X$ と，有界な μ_x-a.s. 連続関数 f に対して，

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(T^n x) = \int f\,d\mu_x$$

が成立する．

証明]　$x \in X$ は定理の中のものとする．f は有界かつ μ_x a.s. 連続関数とする．このとき，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$1-\varepsilon < \mu_x(X_\varepsilon) \leq \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} 1_{X_\varepsilon}(T^n x)$　（1_{X_ε} は X_ε の定義関数）で，$f|X_\varepsilon$ が連続であるように X のコンパクト集合 X_ε をえらぶことができる．実際，f は μ_x-a.s. 連続関数で，X は，コンパクトだから，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\mu_x(X_1) > 1-\varepsilon$ かつ f が X_1 の各点で連続となるようにコンパクト集合 X_1 をえらぶことができる．x が周期点のとき，$\mu_x(X_1) = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} 1_{X_1}(T^n x)$ なることは容易にわかる．このとき $X_\varepsilon = X_1$ とおけばよい．x が非周期点のとき，$U_k = \{y \in X ; d(X_1, y) < \frac{1}{k}\}$　$(k \geq 1)$ とおく（ただし d は X の距離）．任意の $k \geq 1$ に対して，$f_k \in C(X)$ を $0 \leq f_k \leq 1$，$f_k|X_1 = 1$，$f_k|X-U_k = 0$ なるようにとる．このとき整数 $N_k > 0$ が存在して，

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f_k(T^n x) > \mu_x(X_1) - \frac{1}{k} \qquad (N \geq N_k).$$

いま$\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$は単調増大としてよい．$X_\varepsilon = X_1 \cup \bigcup_{k=1}^{\infty}\left(\bigcup_{n=0}^{N_{k+1}} \{T^n x\} \cap U_k\right)$とおく．明らかに差集合$X_\varepsilon \setminus X_1$の点はすべて孤立点である．故に，$X_\varepsilon$はコンパクトで，$f|X_\varepsilon$は連続である．一方，任意の$n = 0, 1, \cdots, N_{k+1}$に対して，$f_k(T^n x) = 0$あるいは$f_k \in X_\varepsilon$の少なくとも一方は成立するから，

$$\begin{aligned}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} 1_{X_\varepsilon}(T^n x) &\geq \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f_k(T^n x)\\ &> \mu_x(X_1) - \frac{1}{k} \qquad (N_k \leq N \leq N_{k+1}).\end{aligned}$$

故に，$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} 1_{X_\varepsilon}(T^n x) \geq \mu_x(X_1)$．　xは非周期点だから，$\mu_x(T^n x) = 0$　$(n \in \mathbb{N})$　が成立する．よって$\mu_x(X_\varepsilon) = \mu_x(X_1)$である．

ウリゾーンの拡張定理によって$f'|X_\varepsilon = f|X_\varepsilon$かつ$\|f'\| \leq \sup_{x\in X}|f(x)| \equiv M < \infty$，なる$f' \in C(X)$が存在する．今，$n \in \mathbb{N}$に対して，

$$\begin{aligned}\left|\int f\,d\mu_x - \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(T^n x)\right| \leq &\left|\int f\,d\mu_x - \int f'\,d\mu_x\right|\\ &+ \left|\int f'\,d\mu_x - \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f'(T^n x)\right|\\ &+ \left|\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f'(T^n x) - \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(T^n x)\right|.\end{aligned}$$

右辺で，第一項$\leq 2M\varepsilon$，第二項$\to 0$ $(N\to\infty)$ かつ，第三項$\leq 2M\left(1 - \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}(T^n x)\right) < 2M\varepsilon$ である．よって，

$$\overline{\lim_{N\to\infty}}\left|\int f\,d\mu_x - \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(T^n x)\right| \leq 4M\varepsilon.$$

εは任意であったから　$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(T^n x) = \int f\,d\mu_x$が成立する．

定理 1.2　(X, T, μ)はエルゴード的な測度力学系とする．このとき，μ-a.s. $x \in X$ は quasi-regular で，かつ$\mu_x = \mu$である．

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

証明] エルゴード定理と$C(X)$の可分性を使って証明できる。実際，Dを$C(X)$の可算な稠密集合とする．任意の$f\in D$に対して，$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}f(T^n x)=\int f d\mu \quad (x\in X_f)$，$\mu(X_f)=1$なる部分集合$X_f\subset X$が存在する．$D$は可算であるから，$X_0=\bigcap_{f\in D}X_f$は可測で，$\mu(X_0)=1$である．このとき

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}f(T^n x)=\int f d\mu \qquad (x\in X_0,\ f\in C(X))$$

が成立する。故に，すべての$x\in X_0$は quasi-regular で，$\mu_x=\mu$ をみたす．

定理 1.3 (X,T)は位相力学系とする．このときT-不変確率測度が，少なくとも1っ存在する．

証明] $x\in X$をとる．前のようにDを$C(X)$の可算な稠密集合とする．対角線論法によって，$\mathbb{N}$の部分列$\{N_j\}$を，任意の$f\in D$に対して $\lim_{j\to\infty}\frac{1}{N_j}\sum_{n=0}^{N_j-1}f(T^n x)$ が存在するようにとる．このとき，任意の$f\in C(X)$に対して，$\lim_{j\to\infty}\frac{1}{N_j}\sum_{n=0}^{N_j-1}f(T^n x)$ が存在する。故に，リースの表現定理によって，

$$\int f d\mu=\lim_{j\to\infty}\frac{1}{N_j}\sum_{n=0}^{N_j-1}f(T^n x) \qquad f\in C(X)$$

なる確率測度μが唯一つ存在する．μは明らかにT-不変確率測度である。

定義4 位相力学系(X,T)が minimal であるとは，T-不変な閉集合Y $(TY\subset Y)$が，Xか空集合ϕに限ることである．

定義5 (X,T)は可測力学系，$\overline{T}^{\mathbb{N}}$は$X^{\mathbb{N}}$上の推移変換とする．$\varphi: X\to X^{\mathbb{N}}$を$\varphi(x)=(T^n x\,;\,n\in\mathbb{N})\ (x\in X)$によって定義し，$\overline{X}=\overline{\{\varphi(x)\,;\,x\in X\}}$とおくとき，$\overline{X}$は$X^{\mathbb{N}}$の$\overline{T}$-不変閉集合である．このとき，位相力学系$(\overline{X},\overline{T})$を$(X,T)$の完備化であるという．写像$\varphi$によって$X$は$\overline{X}$の中に，ボレル集合とし

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

て埋め込まれる。以後，簡単のために，$x\in X$ と $\varphi(x)\in X^{\mathbb{N}}$ とを同一視して考える。また $\overline{X}$ から X の上へのカノニカルな射影 $(x_n ; n\in\mathbb{N})\longmapsto x_0$ が存在する。

定義 6 可測力学系 (X,T) が uniquely ergodic であるとは，(X,T) の完備化 $(\overline{X},\overline{T})$ が uniquely ergodic であって唯一つの $\overline{T}$－不変確率測度 μ が，$\mu(X)=1$ をみたすことをいう。また，このとき測度力学系 (X,T,μ) は uniquely ergodic であるという。

定理 1.4 測度力学系 (X,T,μ) は uniquely ergodic とする。このとき，有界な μ－a.s. 連続関数 f に対して，

$$(*)\quad \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(T^n x)\longrightarrow\int f\,d\mu \quad (n\to\infty)$$

かつ，この収束は，$x\in X$ に関して一様である。

証明］ $X\subset\overline{X}$ と考えることにより μ を $\overline{X}$ 上の確率測度とみなす。π を $\overline{X}$ から X へのカノニカルな射影とする。このとき，$\bar{f}=f\circ\pi$ は $\overline{X}$ 上の有界な μ－a.s 連続関数となる。$(*)$ を否定する。このとき，部分列 $\{N_j\}_{j=0}^{\infty}\subset\mathbb{N}$ および $\{x_j\}_{j=0}^{\infty}\subset X$ が存在して，

$$\left|\frac{1}{N_j}\sum_{n=0}^{N_j-1} f(T^n x_j)-\int f\,d\mu\right|\geqq\varepsilon .$$

故に

$$(**)\quad \left|\frac{1}{N_j}\sum_{n=0}^{N_j-1}\bar{f}(\overline{T}^n x_j)-\int\bar{f}\,d\mu\right|\geqq\varepsilon .$$

このとき，必要ならば部分列をとることにより（定理 1.3 の対角線論法と同様にして），すべての $g\in C(\overline{X})$ に対して，$\lim_{N_j\to\infty}\frac{1}{N_j}\sum_{n=0}^{N_j-1} g(\overline{T}^n x_j)$ が存在すると考えることができる。このとき，リースの表現定理によって，$\overline{X}$ 上に

$$\int g\,d\nu=\lim_{N_j\to\infty}\frac{1}{N_j}\sum_{n=0}^{N_j-1} g(\overline{T}^n x_j) \qquad (\forall g\in C(\overline{X}))$$

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

なる$\bar{T}$－不変確率測度νが存在する．他方，(X, T, μ)が uniquely ergodic であることより $\nu=\mu$ となる。ところで$\bar{f}$は有界且つμ－a.s. 連続関数であるから

$$\int \bar{f}\, d\mu = \int \bar{f}\, d\nu = \lim_{N_j \to \infty} \frac{1}{N_j} \sum_{n=0}^{N_j - 1} \bar{f}(\bar{T}^n x_j)$$

が成立する．これは (**) に反する。

定理 1.5 (X, T)，(Y, S) は可則力学系，$\varphi : X \xrightarrow{onto} Y$ は連続で，次の図式が可換であるとする。

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & X \\ \varphi \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \varphi \\ Y & \xrightarrow[S]{} & Y \end{array}$$

このとき，(X, T) が uniquely ergodic ならば，(Y, S) も uniquelly ergodic である．

証明　(X, T)，(Y, S) の完備化を それぞれ$(\bar{X}, \bar{T})$，$(\bar{Y}, \bar{S})$とする．$\bar{\varphi} : \bar{X} \xrightarrow{onto} \bar{Y}$ を $\bar{\varphi}(\bar{x}) = (\varphi(\bar{x}(0)), \varphi(\bar{x}(1)), \cdots)$ $(\bar{x} = (\bar{x}(0), \bar{x}(1), \cdots) \in \bar{X})$ によって定義する．明らかに，$\bar{\varphi}$ は連続，$\bar{\varphi}\bar{T} = \bar{S}\bar{\varphi}$，そして $\bar{\varphi}(\bar{X}) = \bar{Y}$ である．(X, T) は uniquely ergodic であるから，$\bar{X}$上の$\bar{T}$－不変確率測度μが存在して $\mu(X)=1$ である．故に$\bar{Y}$上の$\bar{S}$－不変確率測度は$\bar{\varphi}\mu$ に限る。実際$\bar{\varphi}\mu$ 以外に，$\bar{S}$－不変確率測度νが存在するならば，$\nu \neq \bar{\varphi}\mu$ なるエルゴード的な$\bar{S}$－不変確率測度νが存在する．このとき，

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(\bar{S}^n y) = \int f\, d\nu \qquad (f \in C(\bar{Y}))$$

をみたす $\bar{y} \in \bar{Y}$が存在する．今 $\bar{x} \in \bar{\varphi}^{-1}(\bar{y})$ をとると，定理1.3 の証明の仕方と同様にして，部分列$\{N_j\}_{j=0}^{\infty} \subset \mathbb{N}$と，$\bar{T}$－不変確率測度$\nu'$が存在して

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

$$\int f\,d\nu' = \lim_{j\to\infty}\frac{1}{N_j}\sum_{n=0}^{N_j-1} f(\overline{T}^n\overline{x}) \qquad (f\in C(\overline{X}))。$$

ところが，$g\in C(\overline{Y})$ に対して，$\int g\,d(\overline{\varphi}\nu') = \lim_{j\to\infty}\frac{1}{N_j}\sum_{n=0}^{N_j-1} g(\overline{S}^n\overline{\varphi}\overline{x}) = \lim_{j\to\infty}\frac{1}{N_j}\sum_{n=0}^{N_j-1} g(\overline{S}^n\overline{y}) = \int g\,d\nu$. よって $\overline{\varphi}\nu'=\nu\neq\overline{\varphi}\mu$，すなわち $\nu'\neq\mu$．これは$(\overline{X},\overline{T})$が *uniquely ergodic* であることに反する．よって，$(\overline{Y},\overline{S})$は *uniquely ergodic* で唯一つの$\overline{S}$－不変確率測度$\overline{\varphi}\mu$ は $\overline{\varphi}\mu(Y)=\mu(X)=1$ をみたす．故に (X,T) は *uniquely ergodic* である．

定義7 Xはコンパクト距離空間とする．写像$x:\mathbb{N}\to X$が *uniquely ergodic* であるとは，xに対応する位相力学系が *uniquely ergodic* であることである。

定理1.6 XとYはコンパクト距離空間で，(X,T)は *uniquely ergodic* な可測力学系とする．写像 $g:X\xrightarrow{onto}Y$は連続とする．このとき，任意の固定した$x\in X^{\mathbb{N}}$ に対して，写像 $g_x: n\to g(T^n x)$ は *uniquely ergodic* である．

証明] $Y^{\mathbb{N}}$ 上の推移変換$\overline{S}$に対して，$Z=\overline{\{\overline{S}^n(g_x(k);k\in\mathbb{N});n\in\mathbb{N}\}}$ は$Y^{\mathbb{N}}$上の$\overline{S}$－不変閉集合である．位相力学系$(Z,\overline{S})$はg_xに対応する位相力学系である．仮定によって (X,T) は *uniquely ergodic* であるから，(X,T) の完備化$(\overline{X},\overline{T})$も *uniquely ergodic* である．

$$\varphi((x(0),x(1),\cdots)) = (g(x(0)),g(x(1)),\cdots) \qquad (x\in X^{\mathbb{N}})$$

によって写像$\overline{\varphi}:X^{\mathbb{N}}\to Y^{\mathbb{N}}$ を定義すると，次の図式が可換になる．

$$\begin{tikzcd}
\overline{X} \arrow[r, "\overline{T}"] \arrow[d, "\overline{\varphi}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \overline{X} \arrow[d, "\overline{\varphi}"] \\
\overline{Y} \arrow[r, "\overline{S}"'] & \overline{Y}
\end{tikzcd}$$

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

閉集合 Z の定義により，$\varphi^{-1}Z \subset \bar{X}$ で，$\bar{T}(\bar{\varphi}^{-1}Z) \subset \bar{\varphi}^{-1}Z$ となる．故に，$(\bar{\varphi}^{-1}Z, \bar{T})$ は uniquely ergodic である．定理1.5によって，$(Z, \bar{S})$ は uniquely ergodic である．

定義8 (X, T, μ) と (Y, S, ν) を測度力学系とする．写像 φ: $X \to$ onto Y は連続で $\varphi\mu = \nu$，かつ $\varphi T = S\varphi$ が成立するものとする．このとき (X, T, μ) は (Y, S, ν) の拡大であるという．$(\bar{X}, \bar{T})$，$(\bar{Y}, \bar{S})$ を，それぞれ可測力学系 (X, T)，(Y, S) の完備化とする．写像 $\bar{\varphi}$: $X^{\mathbb{N}} \to Y^{\mathbb{N}}$ を，

$$\bar{\varphi}(x) = (\varphi(x(n)) ;\ n \in \mathbb{N}) \qquad (x = (x(n) ; n \in \mathbb{N}) \in X^{\mathbb{N}})$$

によって定義する．このとき $\bar{\varphi}(\bar{X}) = \bar{Y}$ が成立する．確率測度 μ，ν はそれぞれ $\bar{X}$，$\bar{Y}$ 上の確率測度とみなすことができる．(X, T, μ) が（(Y, S, ν) と φ に関して）relatively uniquely ergodic であるとは，$\bar{X}$ 上の $\bar{T}$-不変確率測度 λ で $\bar{\varphi}\lambda = \nu$ なる λ は μ に限ることを言う．

定理1.7 (Y, S, ν) は エルゴード的な測度力学系，(X, T, μ) は測度力学系とする．写像 φ: $X \to$ onto Y は連続であるとする．このとき (X, T, μ) が（(Y, S, ν) と φ に関して）relatively uniquely ergodic ならば (X, T, μ) はエルゴード的である．

証明] (X, T, μ) がエルゴード的でないと仮定して矛盾を導く．仮定によって，T-不変確率測度 $\mu_1 \neq \mu_2$ が存在して，

$$\mu = \alpha\mu_1 + (1-\alpha)\mu_2 \qquad (0 < \alpha < 1).$$

写像 $\bar{\varphi}$ は定義8の中の如くとする．このとき，$\bar{\varphi}\mu = \alpha\bar{\varphi}\mu_1 + (1-\alpha)\mu_2$ で，$\bar{\varphi}\mu$ はエルゴード的であるから，$\bar{\varphi}\mu_1 = \bar{\varphi}\mu_2 = \varphi\mu$ となる．ところで，(X, T, μ) は relatively uniquely ergodic であるから，$\mu_1 = \mu_2 = \mu$ となる．これは矛盾である．

定理1.8 二つの測度力学系 (X, T, μ) と (Y, S, ν) を考える．写像 φ: $X \to$ onto Y は連続であるとする．もし，(Y, S, ν) が

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

uniquely ergodic で (X,T,μ) が（(Y,S,ν) と φ に関して）relatively uniquely ergodic であれば，(X,T,ν) は uniquely ergodic である．

証明］ $(\bar{X},\bar{T})$，$(\bar{Y},\bar{S})$ をそれぞれ，(X,T)，$(Y\ S)$ の完備化とする．(Y,S,ν) が uniquely ergodic だから，任意の $\bar{T}$－不変確率測度 λ は，$\bar{\varphi}\lambda=\mu$ をみたす．ここで写像 $\bar{\varphi}:X^{\mathbb{N}}\to Y^{\mathbb{N}}$ は，$\bar{\varphi}((x(0),x(1),\cdots))=(\varphi(x(0)),\varphi(x(1)),\cdots)$ $(x=(x(n);n\in\mathbb{N})\in X^{\mathbb{N}}$ によって定義されたものである．(X,T,μ) は relatively uniquely ergodic であるから，$\bar{\varphi}\lambda=\nu$ をみたす λ は μ に限る．故に，$(\bar{X},\bar{T},\mu)$ は uniquely ergodic である．$1=\nu(Y)=\bar{\varphi}\lambda(Y)=\mu(\varphi^{-1}Y)=\mu(X)$ であるから (X,T,μ) は uniquely ergodic である。

定義 9 (X,T,μ)，(Y,S,ν) は測度力学系であるとする．$X\times Y$ 上の $T\times S$－不変確率測度 λ が $\lambda|_X=\mu$，$\lambda|_Y=\nu$ をみたすとき，$\lambda=\mu\times\nu$ であるとする．このとき (X,T,μ) と (Y,S,ν) は disjoint であるといい，$(X,T,\mu)\perp\!\!\!\perp(Y,S,\nu)$ で表わす．

定理 1.9 (X,T,μ)，(Y,S,ν) は uniquely ergodic な測度力学系とする．このとき

$$(X,T,\mu)\perp\!\!\!\perp(Y,S,\nu)$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$(X\times Y,T\times S,\mu\times\nu)\text{ は uniquely ergodic である．}$$

証明］ $\Leftarrow$)； $(X\times Y,T\times S,\mu\times\nu)$ が uniquely ergodic であれば $X\times Y$ 上の $T\times S$－不変確率測度は $\mu\times\nu$ に限る．故に，$(X,T,\mu)\perp\!\!\!\perp(Y,S,\nu)$ である．

$\Rightarrow$)： 可測力学系 (X,T)，(Y,S) 及び $(X\times Y,T\times S)$ の完備化を，それぞれ $(\bar{X},\bar{T})$，$(\bar{Y},\bar{S})$ 及び $(\overline{X\times Y},\overline{T\times S})$ で表わす．$(\overline{X\times Y},\overline{T\times S})=(\bar{X}\times\bar{Y},\bar{T}\times\bar{S})$ は容易に示される．λ を $\bar{X}\times\bar{Y}$

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

上の，$\bar{T}\times\bar{S}$-不変確率測度とする．仮定によって(X, T, μ)，(Y, S, ν)は uniquely ergodicであるから，位相力学系$(\bar{X}, \bar{T})$，$(\bar{Y}, \bar{S})$も，それぞれ uniquely ergodic である．故に$\lambda_{|X}=\mu$，$\lambda_{|Y}=\nu$ が成立する．(X, T, μ) Ш (Y, S, ν)であるから$\lambda=\mu\times\nu$でなくてはならない．

定義 10　(X, T, μ)を測度力学系とする．$f\in L^2(X)$が$f(Tx)=\lambda f(x)$　$(\lambda\in\mathbb{C})$をみたすとき，λをTの固有値，fをλの固有関数という。Tの固有値の全体を$Sp(T)$で表わす．

定理 1.10　ハール確率測度λをもつ距離付け可能なコンパクト・アーベル群をGとする．$G=\overline{\{n\theta\,;\,n\in N\}}$をみたす$\theta\in G$が存在したとする．G上の同相写像Tは，$Tg=g+\theta$　$(g\in G)$をみたしているとき，測度力学系(G, T, λ)は uniquely ergodic で$Sp(T)=\{\chi(\theta)\,;\,\chi$ は Gの指標$\}$である．

証明]　(G, T, λ)が uniquely ergodic であることは，$G=\overline{\{n\theta\,;\,n\in N\}}$なることと，ハール測度の定義から明らかである．$\chi(Tx)=\chi(\theta)\chi(x)$　(χはGの指標)が成立する．逆に$f\in L^2(G)$に対して$f(Tg)=c\,f(g)$　$(c\in\mathbb{C})$が成立したとする．fは$f=\sum_{\chi}a_\chi\chi$　(χはGの指標，$a_\chi\in\mathbb{C}$)なるフーリエ展開をもつ．$f(Tg)=\sum_{\chi}a_\chi\chi(\theta)\chi(g)$である．フーリエ展開の一意性から，$c\,a_\chi=a_\chi\chi(\theta)$．よって$a_\chi\neq0$なるすべての$\chi$について，$\chi(\theta)=c$が成立する．

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

§2. 群拡大のエルゴード性

定義11 (X, T, μ)は測度力学系，Gはハール確率測度λをもつ距離づけ可能なコンパクト群，写像$\varphi: X \to G$は可測であるとする。$T_\varphi(x, g) = (Tx, \varphi(x)g)$，$x \in X$，$g \in G$によって$X \times G$上の$\mu \times \lambda$-保測変換$T_\varphi$を定義する．このとき測度力学系$(X \times G, T_\varphi, \mu \times \lambda)$を$(X, T, \mu)$の$(G, \varphi, \lambda)$による群拡大であるという．

定理2.1 (X, T, μ)，G, λ, φは定義の中のごとくとする．測度力学系(X, T, μ)がエルゴード的であれば，次の(1)，(2)，(3)は互いに同値である．

(1) 群拡大$(X \times G, T_\varphi, \mu \times \lambda)$はエルゴード的．

(2) $X \times G$上のT_φ-不変確率測度νが$\nu|_X = \mu$をみたすならば，$\nu = \mu \times \lambda$．

(3) $I \neq \chi$をGのn次既約ユニタリー表現であるとする．n次行列$f = (f_{ij})$ $(f_{ij} \in L^\infty(X, \mu)$，$i, j = 1, 2, \cdots, n)$に対して，

$$f(Tx) = \chi(\varphi(x))f(x)$$

が成立するならば$f(x) = 0$ μ-a.s である．

証明] (1)⇒(2)：　集合$A = \{\nu : \nu$はT_φ-不変確率測度，$\nu|_X = \mu\}$が$\mu \times \lambda$以外の点を含めば，$\mu \times \lambda$以外のエルゴード的な確率測度νをもつ．実際，Aは凸コンパクト集合(弱位相に関して)であるから，Aが$\mu \times \lambda$以外の点を含めば，端点$\nu \neq \mu \times \lambda$を含む．$\nu$がエルゴード的でなければ二つの異なる$T_\varphi$-不変確率測度$\nu_1$，$\nu_2$が存在して，

$$\nu = \alpha\nu_1 + (1-\alpha)\nu_2 \qquad (0 < \alpha < 1)$$

と表わされる．故に$\mu = \nu|_X = \alpha\nu_1|_X + (1-\alpha)\nu_2|_X$．仮定によって$(X, T, \mu)$はエルゴード的であるから，$\nu_1|_X = \nu_2|_X = \mu$．故に$\nu_1, \nu_2 \in A$．これは$\nu$が$A$の端点であることに反する．よ

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

ってνはエルゴード的でなくてはならない．

$\mu\times\lambda$ はエルゴード的であるから，定理1、2によって，$\mu\times\lambda$ -a.s $(x,g)\in X\times G$ は quasi-regular で $\mu_{(x,g)}=\nu$ をみたす。同様にして，ν-a.s $(x,g)\in X\times G$ は quasi-regular で，$\mu_{(x,g)}=\nu$ をみたす．$\mu\times\lambda|_X=\nu|_X=\mu$ であるから，$x_0\in X$, $g_1,g_2\in G$ が存在して，$\mu_{(x_0,g_1)}=\mu\times\lambda$，$\mu_{(x_0,g_2)}=\nu$ となる．変換 $R:X\times G\to X\times G$ を，$R(x,g)=(x,gg_1^{-1}g_2)$ $(x\in X,\ g\in G)$ なるものとする．このときハール確率測度λは右移動に関して不変であるから，任意の $f\in C(X)$ に対して，

$$
\begin{aligned}
\int f\,d(\mu\times\lambda) &= \int R\cdot f\,d(\mu\times\lambda)\\
&= \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}(R\cdot f)\,(T_\varphi^n(x_0,g_1))\\
&= \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}f(RT_\varphi^n(x_0,g_1))\\
&= \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}f(T_\varphi^n(x_0,g_2)).
\end{aligned}
$$

故に，$\nu=\mu_{(x_0,g_2)}=\mu\times\lambda$ となる．これは矛盾である．

(2) ⇒ (1)；　今，$X\times G$ 上の T_φ-不変確率測度 ν_1, ν_2 に対して，

$$\mu\times\lambda=\alpha\nu_1+(1-\alpha)\nu_2 \qquad (0<\alpha<1)$$

が成立したとする．このとき，$\mu=(\mu\times\lambda)|_X=\alpha\nu_1|_X+(1-\alpha)\nu_2|_X=\mu$．(2) により，$\nu_1=\nu_2=\mu\times\lambda$．故に $(X\times G,T_\varphi,\mu\times\lambda)$ はエルゴード的である．

(1) ⇒ (3)；　今，$f\neq 0$ $(f=(f_{ij}),\ f_{ij}\in L^\infty(X,\mu),\ i,j=1,2,\cdots,n)$ と，n 次既約ユニタリー表現 $\chi\neq I$ に対して，$f(Tx)=\chi(\varphi(x))f(x)$ が成立したとする。ここで可測写像 $F:G\to GL(n;\mathbb{C})$ を，$F(x,g)=\chi(g^{-1})f(x)$ $(x\in X,\ g\in G)$ によって定義する．このとき，$F\neq$ 定数行列．さらに，

$$
\begin{aligned}
F(T_\varphi(x,g)) &= F(Tx,\varphi(x)g)\\
&= \chi(g^{-1})\chi(\varphi(x)^{-1})f(Tx)
\end{aligned}
$$

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

$$= \chi(g^{-1})\chi(\varphi(x)^{-1})\chi(\varphi(x))f(x)$$

$$= \chi(g^{-1})f(x)$$

$$= F(x,g).$$

故に，F は T_φ－不変である．これは $(X\times G, T_\varphi, \mu\times\lambda)$ がエルゴード的であるという仮定(2)に矛盾する．

(3) ⇒ (1)； $(X\times G, T_\varphi, \mu\times\lambda)$ はエルゴード的でないと仮定する．このとき，

$$F(x,g) = F(T_\varphi(x,g)) \qquad \mu\times\lambda-a.s.$$

をみたす 定数 $\neq F\in L^\infty(X\times G)$ が存在する．このとき，$\chi\neq I$ なる G の既約ユニタリー表現 χ が存在して，$f(x)$

$=\int F(x,g)\chi(g)d\lambda \neq$ 零行列 となる．実際すべての $\chi\neq I$ に対して $f(x)\equiv$ 零行列ならば，ピーター・ワイルの定理により，$\mu-a.s.$ x に対して $F(x,\cdot)\equiv$ 定数．このとき写像 $x\longrightarrow F(x,\cdot)$ $(x\in X)$ は，T－不変である．(X,T,μ) はエルゴード的だから，$F=$ 定数．これは矛盾である．

さらに，

$$f(Tx) = \int F(Tx,g)\chi(g)d\lambda$$

$$= \int F(Tx,\varphi(x)g)\chi(\varphi(x)g)d\lambda$$

$$= \chi(\varphi(x))\int F(T_\varphi(x,g))\chi(g)d\lambda$$

$$= \chi(\varphi(x))f(x) \qquad (x\in X)$$

(上の積分は成分ごとに行なったもの)．故に，仮定(3)に矛盾するから，$(X\times G, T_\varphi, \mu\times\lambda)$ はエルゴード的である．

定理 2.2 (X,T,μ)，G，φ，T_φ は定理 2.1 と同じであるとする．とくに，$\varphi: X\to G$ は $\mu-a.s.$ 連続であると仮定する．このとき，定理 2.1 の条件(1)，(2)，(3)は次の条件(4)と同値であ

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

る．
(4) $(X\times G, T_\varphi, \mu\times\lambda)$ は $((X,T,\mu)$ と projection $\pi: X\times G\to X$ に関して) relatively uniquely ergodic である．

証明] 定理1.7によって (4)⇒(1) は明らか (φ が μ-a.s. 連続であることは使わない)．

(2)⇒(4)：可測力学系 (X,T)，$(X\times G, T_\varphi)$ の完備化をそれぞれ $(\bar{X},\bar{T})$，$(\bar{X}\times\bar{G},\bar{T}_\varphi)$ で表わす．写像 $\pi: X\times G\to X$，写像 $\bar{\pi}:(X\times G)^{\mathbb{N}}\to X^{\mathbb{N}}$ は，それぞれ自然な射影とする．$\overline{X\times G}$ 上の T_φ-不変確率測度 ν が $\bar{\pi}\nu=\mu$ をみたすならば，$\nu=\mu\times\lambda$ に限ることを言う．X のボレル集合 X_0 を，$TX_0\subset X_0$，$\mu(X_0)=1$，さらに $\varphi|_{X_0}$ は連続となるように選ぶ。$\bar{\pi}\nu=\mu$ だから，$\nu(\bar{\pi}^{-1}(X_0)\cap\overline{(X\times G)})=1$．

$$(*)\quad \bar{\pi}^{-1}(X_0)\cap\overline{(X\times G)}\subset X_0\times G$$

が成立したとする．このとき，$\nu(X_0\times G)=1$．故に $\nu=\mu\times\lambda$ を得る．

今から (*) を示す．任意の点 $(x,g)\in\bar{\pi}^{-1}(X_0)\cap\overline{(X\times G)}$ $(x\in X^{\mathbb{N}}, g\in G^{\mathbb{N}})$ をとる．$(x,g)\in\bar{\pi}^{-1}(X_0)$ であるから $x(n)=T^n x(0)$ $(n\in\mathbb{N})$．$\overline{(X\times G)}$ の定義より，$X_0\times G$ の点列 $\{(x^k,g^k)\}_{k=1}^{\infty}$ が存在して $(x^k,g^k)\to(x,g)$ $(k\to\infty)$ となる．

$$T_\varphi^n(x^k,g^k)=(T^n x^k, \varphi(T^{n-1}x^k)\varphi(T^{n-2}x^k)\cdots\varphi(x^k)g^k)$$
$$(n\in\mathbb{N},\ k\in\mathbb{N})$$

であるから，すべての $n\in\mathbb{N}$ に対して，

$$T^n x^k\to T^n x(0)\qquad(k\to\infty)$$
$$\varphi(T^{n-1}x^k)\varphi(T^{n-2}x^k)\cdots\varphi(x^k)g^k\to g(n)\qquad(k\to\infty).$$

$T^{n-1}x^k, T^{n-2}x^k,\cdots,x^k\in X_0$ $(k\in\mathbb{N})$ かつ $T^i x(0)\in X_0$ $(i=0,1,2,\cdots,n-1)$ であるから，$\varphi|_{X_0}$ の連続性より

$$g(n)=\varphi(T^{n-1}x(0))\varphi(T^{n-2}x(0))\cdots\varphi(x(0))g(0)\qquad(n\in\mathbb{N}).$$

故に，$(x,g)\in X_0\times G$ となり (*) は証明された。

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

定理2.3 任意の整数 $k\geq 0$ と $k+1$ 個の距離付け可能なコンパクト連結アーベル群 $G_0, G_1, \cdots G_k$ を考える．写像 $\varphi_i: G_{i-1}\xrightarrow{\text{onto}} G_i$ $(i=1,\cdots,k)$ は準同型で，$\theta\in G_0$ は $\overline{\{n\theta : n\in N\}}=G_0$ をみたすとする．今，直積位相群 $G_0\times G_1\times\cdots\times G_k$ 上のアフィン変換 T_k を，

$$T_k(g_0, g_1, \cdots, g_k)=(g_0+\theta, g_1+\varphi_1(g_1), \cdots, g_k+\varphi_k(g_k))$$
$$(g_i\in G_i,\ i=0,1,\cdots,k)$$

なるものとすれば，位相力学系 $(G_0\times G_1\times\cdots\times G_k, T_k, \lambda_0\times\lambda_1\times\cdots\times\lambda_k)$（ただし，$\lambda_i$ $(i=0,1,\cdots,k)$ は G_i のハール確率測度）は uniquely ergodic である．

証明] k に関する帰納法によって証明される．$k=0$ のときは，定理1.10によって (G_0, T_0, λ_0) は uniquely ergodic である．$k-1$ のとき $(G_0\times G_1\times\cdots\times G_{k-1}, T_{k-1}, \lambda_0\times\lambda_1\times\cdots\times\lambda_{k-1})$ が uniquely ergodic であると仮定する．写像 $\varphi: G_0\times G_1\times\cdots\times G_{k-1}\to G_k$ を $\varphi(g_0, g_1, \cdots, g_{k-1})=\varphi_k(g_{k-1})$ $(g_i\in G_i,\ i=0,1,\cdots,k-1)$ によって定義する．このとき $(G_0\times G_1\times\cdots\times G_k, T_k, \lambda_0\times\lambda_1\times\cdots\times\lambda_{k-1})$ は $(G_0\times G_1\times\cdots\times G_{k-1}, T_{k-1}, \lambda_0\times\lambda_1\times\cdots\times\lambda_{k-1})$ の (G_k, φ) による群拡大である．結論を得るために，定理2.1の条件(3)が成立することを示す．条件(3)が成立したとすれば，定理1.8によって $(G_0\times G_1\times\cdots\times G_k, T_k, \lambda_0\times\lambda_1\times\cdots\times\lambda_k)$ は uniquely ergodic となる．従って，今から(3)が成立することを証明する．

今，$f(T_{k-1}g)=\chi(\varphi(g))f(g)$ $(g\in G_0\times G_1\times\cdots\times G_{k-1})$ をみたす $0\neq f\in L^\infty(G_0\times G_1\times\cdots\times G_{k-1})$ と，G_k の指標 $\chi\neq 1$ が存在すると仮定する．但し φ_k を φ と記す．$G_0\times G_1\times\cdots\times G_{k-1}$ 上の準同型 τ を，

$$\tau(g_0, g_1, \cdots, g_{k-1})=(g_0, g_1+\varphi_1(g_0), \cdots, g_{k-1}+\varphi_{k-1}(g_{k-2}))$$
$$(g_i\in G_i,\ i=0,1,\cdots,k-1)$$

で定義し，$G_0\times G_1\times\cdots\times G_k$ の元 $(\theta, 0, \cdots, 0)$ を θ で表わす．このとき，$T_{k-1}g=\tau g+\theta$ $(g\in G_0\times G_1\times\cdots\times G_{k-1})$．$f$ は，

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

$$f=\sum_{\xi}a_\xi \xi \qquad (\xi \text{ は } G_0\times G_1\times\cdots\times G_{k-1} \text{ の指標}, a_\xi\in\mathbb{C})$$

なるフーリエ展開をもつ。$f(T_{k-1}g)=\chi(\varphi(g))f(g)$ $(g\in G_0\times G_1\times\cdots\times G_{k-1})$ であるから，

$$\sum_{\xi}a_\xi \xi(\theta)\xi_\tau(g)=\sum_{\xi}a_\xi\chi(\varphi(g))\xi(g)$$

ただし $\xi_\tau(g)=\xi(\tau g)$．フーリエ展開の一意性により，$a_\xi\xi(\theta)=a_{\chi_\varphi^{-1}\xi_\tau}$ （ただし $\chi_\varphi(g)=\chi(\varphi(g))$）．故に

$$|a_\xi|=|a_{\chi_\varphi^{-1}\xi_\tau}|=|a_{\chi_\varphi^{-1}\chi_{\varphi\tau}^{-1}\xi_{\tau^2}}|=\cdots \quad .$$

パーセバルの不等式によって，$\sum_\xi|a_\xi|^2<\infty$．$f\neq 0$だから $a_\xi\neq 0$ なる ξ がとれる．このとき，

$$(*)\quad \xi=\chi_\varphi^{-1}\chi_{\varphi\tau}^{-1}\cdots\chi_{\varphi\tau^{n-1}}^{-1}\xi_{\tau^n}$$

なる $n\geq 1$ が存在する．$G_0\times G_1\times\cdots\times G_{k-1}$ の指標 ξ は G_i の指標 ξ_i を用いて

$$\xi(g)=\xi_0(g_0)\xi_1(g_1)\cdots\xi_{k-1}(g_{k-1})$$
$$(g=(g_0,g_1,\cdots,g_{k-1}),\ g_i\in G_i,\ i=0,1,\cdots,k-1)$$

で表わされる．$\xi_0(g_0)\cdots\xi_{k-2}(g_{k-2})=A(g_0,\cdots,g_{k-2})$ とおくと，$\xi(g)=\xi_{k-1}(g_{k-1})\cdot A(g_0,\cdots,g_{k-2})$ と書ける．同様な方法によって，$\xi_{\tau^n}(g)=\xi_{k-1}(g_{k-1})\cdot B(g_0,\cdots,g_{k-2})$，$\chi_{\varphi\tau^i}(g)=\chi(\varphi_k(g_{k-1}))\times C_i(g_0,\cdots,g_{k-2})$ $(i=0,1,\cdots,k-1)$ と表わすことができる．この表わし方を使ったとき(*)は

$$(**)\quad \xi_{k-1}(g_{k-1})=\chi(\varphi_k(g_{k-1}))^{-n}\xi_{k-1}(g_{k-1})D(g_0,\cdots,g_{k-2})$$

と書ける．(**) から $\chi(\varphi_k(g_{k-1}))^n=1$ を得る．$\varphi_k G_{k-1}=G_k$ だから，$\chi^n=1$．G_kは連結であるから，$\chi=1$ である．故に定理2.1 の条件(3)が成立した．

定義12 実数列 $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$ $(0\leq\alpha_n<1)$が，

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

m に関して一様に

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} I_{[0,t)}(\alpha_{n+m}) = t \qquad (\forall t \in [0,1))$$

をみたすとき，数列 $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ は well distributed であるという．$x\in\mathbb{R}$ に対して，$[x]$ は x を越えない最大の整数とし，$\{x\}=x-[x]$ と定義する．

定理2.4　$P(x)$（$\neq$ 定数）を最高係数が無理数の実係数多項式とする．自然な射影 $\pi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ に対して，$\tilde{P}(n)=\pi P(n)$ とおく．このとき，写像 $\tilde{P}:\mathbb{N}\to\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ に対応する位相力学系は，uniquely ergodic で $\{\{P(n)\}\}_{n=0}^{\infty}$ は well distributed である．

証明]　$P(x)=a_k x^k + a_{k-1}x^{k}+\cdots+a_1 x + a_0$ と表わすとき，剰余の定理を利用して

$$P(n)=b_k\binom{n}{k}+b_{k-1}\binom{n}{k-1}+\cdots+b_1\binom{n}{1}+b_0\binom{n}{0}$$

と表わすことができる．$b_k=k!a_k$ であるから，b_k は無理数である．定理2.3において，$G_0=G_1=\cdots=G_{k-1}=\mathbb{R}/\mathbb{Z}$，$\theta=b_k$ そして，写像 $\varphi_i: G_{i-1}\to G_i$ $(1\leq i\leq k-1)$ は恒等写像とする．

$$T(x_0,x_1,\cdots,x_k)=(x_0+b_k, x_1+x_0,\cdots,x_{k-1}+x_{k-2})$$
$$(x_j\in\mathbb{R}/\mathbb{Z},\ 0\leq j\leq k-1)$$

によって写像 $T:(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^k\to(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^k$ を定義する．このとき，$((\mathbb{R}/\mathbb{Z})^k, T, \lambda^k)$ は uniquely ergodic である（ただし λ は，$\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 上のハール確率測度)．写像 $\pi_k(x_0,\cdots,x_{k-1})=x_{k-1}$ $(x_i\in\mathbb{R}/\mathbb{Z},\ i=0,1,\cdots,k-1)$ によって

$$\tilde{P}(n)=\pi_k(T^n(b_{k-1},\cdots,b_0))$$

を得るから，定理1.6によって，$\tilde{P}(n)$ は uniquely ergodic であることがわかる．後半の証明は定理1.4から容易にえられる．

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

定義13 直積位相空間 $\mathbb{Z}_2=\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ に次のようにして群構造を定義する. $x, y\in\mathbb{Z}_2$ ($x=(x_0,x_1,\cdots)$, $y=(y_0,y_1,\cdots)$) に対して, $z=(z_0,z_1,\cdots)=x+y$ は,

$$
\begin{aligned}
&z_0=x_0+y_0 \pmod 2\\
&t_1=(x_0+y_0-z_0)/2\\
&\left.\begin{aligned}
&z_n=x_n+y_n+t_n \pmod 2\\
&t_{n+1}=(x_n+y_n+t_n-z_n)/2
\end{aligned}\right\}\ (n\geqq 1)
\end{aligned}
$$

なるものとする. 実際に, 群 $\mathbb{Z}_2$ はコンパクト・アーベル群であることが容易にわかる. このような位相群 $\mathbb{Z}_2$ は 2-進群であるとよばれる. $n\in\mathbb{N}$ に対して, 組 $(e_0,e_1,\cdots)$ ($e_i\in\{0,1\}$, $i\in\mathbb{N}$) が一意的に存在して, $n=\sum_{i=0}^{\infty}e_i2^i$ と表わすことができる. 従って, $n\longmapsto(e_0,e_1,\cdots)$ なる対応によって, n と $(e_0,e_1,\cdots)$ を同一視する.

定理 2.5 $\mathbb{Z}_2$ を2進数群, $\{-1,1\}$ を剰余群とする変換, $T:\mathbb{Z}_2\to\mathbb{Z}_2$ を $T(x)=x+1$ ($x\in\mathbb{Z}_2$, $1=(1,0,0,\cdots)$) によって写像 $\varphi:\mathbb{Z}_2\longrightarrow\{-1,1\}$ を

$$
\varphi(x)\begin{cases}(-1)^{\min\{n\,;\,x_n=0\}+1} & x\neq(1,1,\cdots)\\[2em] 1 & x=(1,1,\cdots)\end{cases}
$$

によって定義する. このとき測度力学系 $(\mathbb{Z}_2,T,\lambda)$ の $(\{-1,1\},\varphi)$ による群拡大 $(\mathbb{Z}_2\times\{-1,1\},T_\varphi,\lambda\times\nu)$ は uniquely ergodic である(ただし, λ,ν は それぞれ $\mathbb{Z}_2$, $\{-1,1\}$ 上のハール確率測度である). さらに写像 $\pi:\mathbb{Z}_2\times\{-1,1\}\longrightarrow\{-1,1\}$ は, 自然な射影とするとき, 関数 $n\longmapsto\pi(T_\varphi^n(0,1))$ は uniquely ergodic である. この関数は, Morse sequence と呼ばれている.

証明] $f(x+1)=\varphi(x)f(x)$ (λ-a.s.) をみたす $\mathbb{Z}_2$ 上の有界可測関数 f があったとする. $|f(x+1)|=|f(x)|$ で $(\mathbb{Z}_2,T,\lambda)$ は

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

エルゴード的であるから，$|f(x)|=$定数 $(\lambda\text{-a.s.})$．一般性を失うことなく，$|f(x)|=1$ $(\lambda\text{-a.s})$ と仮定できる。任意の $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$ に対して $n\in\mathbb{N}$ と

$$\int|f(x)-g(x)|^2d\lambda<\varepsilon$$

をみたす $\mathbb{Z}_2$ 上の有界関数 $g(x)=g(x_0,x_1,\cdots,x_{n-1})$ が存在する(ここで g は $(x_0,x_1,\cdots,x_{n-1})$ だけに意味のある関数である).
$x=(x_0,x_1,\cdots)\in\mathbb{Z}_2$ が $x_n=x_{n+1}=0$ をみたすとき，

$$\prod_{i=0}^{2^{n+1}-1}\varphi(x+i)=-1 \qquad (\varphi(x+i) \text{ の } i \text{ は } \mathbb{Z}_2 \text{ の点})$$

が成立する．実際 $x'=(x_0,x_1,\cdots,x_{n+1},0,0,\cdots)$ とおけば，$0<x'<2^n$ かつ

$$\begin{aligned}
\prod_{i=0}^{2^{n+1}-1}\varphi(x+i)&=\prod_{i=0}^{2^{n+1}-1}\varphi(x'+i)\\
&=\prod_{i=0}^{2^{n+1}-x'-1}\varphi(x'+i)\cdot\prod_{i=2^{n+1}-x'-1}^{2^{n+1}-1}\varphi(x'+i)\\
&=\prod_{i=x'}^{2^{n+1}-1}\varphi(i)\cdot\prod_{i=0}^{x'-1}\varphi(2^{n+1}+i)\\
&=\prod_{i=0}^{2^{n+1}-1}\varphi(i)\\
&=\prod_{i=0}^{2^n-1}\varphi(i)\cdot\prod_{i=0}^{2^n-1}\varphi(2^n+1)\\
&=\Big(\prod_{i=0}^{2^n-2}\varphi(i)\Big)^2(-1)\\
&=-1.
\end{aligned}$$

これを使ったとき，$f(x+2^{n+1})=-f(x)$ をうる。故に，$\varepsilon>0$

$$\begin{aligned}
\varepsilon&>\int_{x_n=0}|f(x)-g(x)|^2d\lambda\\
&=\int_{x_n=x_{n+1}=0}(|f(x)-g(x)|^2-|f(x)+g(x)|^2)d\lambda\\
&=\int_{x_n=x_{n+1}=0}2|f(x)|^2d\lambda\\
&=\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

これは矛盾である．故に関数方程式 $f(x+1)=\varphi(x)f(x)$ (λ-a.s) をみたす有界可測関数 $f(\neq 0)$ は存在しない。従って，定理2.2から T_φ は uniquely ergodic であることがえられる．定理2.5の後半は，定理1.6より明らかである．

定理2.6 $\mathbb{Z}_2$, T, $\{-1,1\}$ は定理2.5と同じであるとする．特に関数 $\varphi(x)$ は次の形のものとする。

$$\varphi(x)=\begin{cases}(-1)^{\max(\min\{x_n;\ x_n=0\}-1,\ 0)+x_{t(x)+1}} & x\neq(1,1,\cdots)\\ 1 & x=(1,1,\cdots)\end{cases}$$

このとき，$(\mathbb{Z}_2, T, \lambda)$ の $(\{-1,1\}, \varphi)$ による群拡大 $(\mathbb{Z}_2\times\{-1,1\}, T_\varphi, \lambda\times\nu)$ は uniquely ergodic である．さらに，$\mathbb{N}$ 上の関数 $n\mapsto\pi(T_\varphi^n(0,1))$ も uniquely ergodic である．(この関数は Rudin-Shapiro sequence とよばれている。)

証明は定理2.5と同様にしてできる．

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

§3 群拡大と disjointness.

定義14 (X,T,λ), (X',T',λ') は測度力学系とする。
(X',T',λ') が (X,T,λ) 上で可解であるとは, $n\in\mathbb{N}$ と測度力学系の列 (X_i,T_i,λ_i) $(i=0,1,\cdots n)$, とコンパクト・アーベル群 G_i $(i=1,2,\cdots,n)$, さらに可測写像 $\varphi_i : X_{i-1}\to G_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$ が存在して,
$(X_0,T_0,\lambda_0)=(X,T,\lambda)$, $(X_n,T_n,\lambda_n)=(X',T',\lambda')$ で
(X_i,T_i,λ_i) は $(X_{i-1},T_{i-1},\lambda_{i-1})$ の (G_i,φ_i) による群拡大 $(1\leq i\leq n)$ と成ることである。

定理3.1 (X,T,μ), (Y,S,ν) は測度力学系とする。(X',T',μ'), (Y',S',ν') はともにエルゴード的な測度力学系で, それぞれ, (X,T,μ), (Y,S,ν) 上で可解であるとする。このとき,

$$(X',T',\mu')\perp\!\!\!\perp(Y',S',\nu')$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$(X,T,\mu)\perp\!\!\!\perp(Y,S,\nu),\ \text{かつ}\ Sp(T')\cap Sp(S')=\{1\}$$

証明] $(X',T',\mu')\perp\!\!\!\perp(Y',S',\nu')$ のとき, $(X,T,\mu)\perp\!\!\!\perp(Y,S,\nu)$ であることが知られている([2])から $\Leftarrow$) を示せば十分である。

証明に対して, (X',T',μ'), (Y',S',μ') がそれぞれ, 次のようなものの場合に帰着される。$(X',T',\mu')=(X\times G,T_\varphi,\mu\times\lambda_G)$, $(Y',S',\nu')=(Y\times H,S_\psi,\mu\times\lambda_H)$ とおく。ただし, G, H は, 距離付け可能なコンパクト・アーベル群, λ_G, λ_H はそれぞれ G, H 上のハール確率測度, $\varphi:X\to G$, $\psi:X\to H$ はともに可測とする。P は $X\times G\times Y\times H$ 上の $T_\varphi\times S_\psi$-不変確率測度で, $P|_{X\times G}=\mu\times\lambda_G$, $P|_{Y\times H}=\nu\times\lambda_H$ をみたしているとする。このような P に対して $P=\mu\times\lambda_G\times\nu\times\lambda_H$ を示せば

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

よい。このためには任意の $a\in C(X)$, $b\in C(Y)$, G, H 上の指標 ξ および η に対して

$$(\#)\ \int a(x)\xi(g)\bar{b}(y)\bar{\eta}(h)\,dP(x,g,y,h)$$

$$=\int a(x)\xi(g)\bar{b}(y)\bar{\eta}(h)\,d\mu(x)\,d\lambda_G(g)\,d\nu(y)\,d\lambda_H(h)$$

を示せばよい。$T \perp\!\!\!\perp S$ であるから，$P|_{X\times Y}=\mu\times\nu$ となっている。故に $\xi=\eta=1$ のときには (#) は成立している。$\xi\neq1$ または $\eta\neq1$ が成立する場合について (#) の左辺が 0 になることをいえばよい。

$$A=\left|\int a\xi\bar{b}\bar{\eta}\,dP\right|^2$$

$$=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N^2}\left|\int\sum_{n=0}^{N-1}T_\varphi^n(a\xi)S_\psi^n(b\eta)\,dP\right|^2$$

$$\leq\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N^2}\int\left|\sum_{n=0}^{N-1}T_\varphi^n(a\xi)S_\psi^n(\overline{b\eta})\,dP\right|^2$$

$$=\lim_{N\to\infty}\mathrm{Re}\,\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\int T_\varphi^n(a\xi)\,\overline{a\xi}\,S_\psi^n(\overline{b\eta})\,b\eta\,dP$$

$$=\lim_{N\to\infty}\mathrm{Re}\,\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\int a(T^nx)\bar{a}(x)\xi\Big(\sum_{i=0}^{n-1}\varphi T^ix\Big)$$

$$\times\bar{b}(S^ny)b(y)\bar{\eta}\Big(\sum_{i=0}^{n-1}\psi S^iy\Big)dP$$

$$=\lim_{N\to\infty}\mathrm{Re}\,\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\int T_\varphi^n(a\xi)\,\overline{a\xi}\,d(\mu\times\lambda_G)$$

$$\times\int S_\psi^n(\overline{b\eta})\,b\eta\,d(\nu\times\lambda_H)$$

ここで正定値関数 $\alpha:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$, $\beta:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ を

$$\alpha(n)=\begin{cases}\int T_\varphi^n(a\xi)\,\overline{a\xi}\,d(\mu\times\lambda_G) & n\geq0\\ \int T_\varphi^{-n}(\overline{a\xi})\,a\xi\,d(\mu\times\lambda_G) & n<0\end{cases}$$

$$\beta(n)=\begin{cases}\int S_\psi^n(b\eta)\,\overline{b\eta}\,d(\mu\times\lambda_H) & n\geq0\\ \int S_\psi^{-n}(\overline{b\eta})\,b\eta\,d(\nu\times\lambda_H) & n<0\end{cases}$$

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

で定めると，区間 $[0,1)$ 上のスペクトル測度 $\Lambda_\alpha, \Lambda_\beta$ で，

$$\alpha(n)=\int e^{2\pi i}d\Lambda_\alpha(x) \qquad n\in\mathbb{Z}$$

$$\beta(n)=\int e^{2\pi i}d\Lambda_\beta(x) \qquad n\in\mathbb{Z}$$

を満たすものが存在する．このとき

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\int T_\varphi^n(a\xi)\overline{a\xi}\,d(\mu\times\lambda_G)\int S_\psi^n(\overline{b\eta})\,b\eta\,d(\nu\times\lambda_H)$$

$$=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\alpha(n)\overline{\beta(n)}=\lim_{N\to\infty}\int\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}e^{2\pi i n(x-y)}d\Lambda_\alpha(x)d\Lambda_\beta(y)$$

$$=\int_{x=y}d\Lambda_\alpha(x)\,d\Lambda_\beta(y)$$

$$=\sum_{[0,1)}\Lambda_\alpha(\{x\})\Lambda_\beta(\{x\})$$

$\Lambda_\alpha(\{x\})>0$，$\Lambda_\beta(\{x\})>0$ ならば，$e^{2\pi i x}\in S_p(T_\varphi)\cap S_p(S_\psi)=\{1\}$ であるから，$\Lambda_\alpha(\{x\})\Lambda_\beta(\{x\})>0$ なるのは $x=0$ のときだけである．以上によって $A=0$ が示された．

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

§4 一様分布の誤差評価

定義15 前と同じように，Xはコンパクト距離空間，写像$T: X \to_{onto} X$は，同相写像とする。連続関数$\varphi: X\times\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$が

$$\varphi(x, n+m) = \varphi(x, n) + \varphi(T^n x, m) \qquad (x\in X,\ n, m\in\mathbb{Z})$$

をみたすとき，φはコサイクルであるという。連続関数$\varphi: X\times\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$に対して

$$\varphi(x, n) = f(T^n x) - f(x) \qquad (x\in X,\ n\in\mathbb{Z})$$

をみたす連続関数$f: X\to\mathbb{R}$が存在するとき，φはコバウンダリーであるという。

定理4.1 (X, T)がminimalで可逆な($T: X\to X$は同相写像)位相力学系であるとする．このとき任意の有界なコサイクルはコバウンダリーである．

証明　連続関数$\varphi: X\times\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$は$(X, T)$の有界なコサイクルとする。変換$T_\varphi: X\times\mathbb{R} \to X\times\mathbb{R}$を

$$T_\varphi(x, t) = (Tx,\ t+\varphi(x, 1)) \qquad (x\in X,\ t\in\mathbb{R})$$

によって定義する．明らかに，

$$T_\varphi^n(x, t) = (T^n x,\ t+\varphi(x, n))$$

である。任意の$x_0\in X$に対して

$$X_0 = \overline{\{T_\varphi^n(x_0, 0)\ ;\ n\in\mathbb{Z}\}}$$

とおく，このときφは連続関数だから，X_0は有界閉集合; i.e, X_0はコンパクトである．故に(Ω, T_φ)がminimalであるT_φー不変($T_\varphi\Omega = \Omega \neq \phi$)な$X_0$の部分集合が存在する。写像$\pi: X\times\mathbb{R}\to X$は自然な射影とするとき，$\pi T_\varphi = T$ (on $X\times\mathbb{R}$)

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

であるから，$\pi\Omega = X$ がえられる。今から φ はコバウンダリーであることを示す。任意の $x \in X$ に対して，$(x,t) \in \Omega$ をみたす $t \in \mathbb{R}$ は唯一つであることに注意せよ。実際に，(x,t_1)，$(x,t_2) \in \Omega$ で $t_1 \neq t_2$ なるものがあったとする。(Ω, T_φ) は minimal であるから，$T_\varphi^{k_n}(x,t_1) \to (x,t_2)$ $(n \to \infty)$ とできる。$T_\varphi^{k_n}(x,t_1) = (T^{k_n}x, t_1 + \varphi(x,k_n))$ であるから，

$$\varphi(x,k_n) \to t_2 - t_1 \qquad (n \to \infty).$$

故に，$T_\varphi^{k_n}(x,t_2) \to (x, t_2 - (t_2 - t_1)) \in \Omega$ そして，

$$T_\varphi^{k_n}(x, t_1 + (t_2 - t_1)) \to (x, t_2 + 2(t_2 - t_1)) \in \Omega.$$

このことをくり返すとき，無限大に発散する列 $\{t_2 + n(t_2 - t_1)\}$ が存在する。これは，Ω がコンパクトであることに反する。

任意の $x \in X$ に対して $(x,t) \in \Omega$ なる t を $t = f(x)$ とおく。このとき Ω はコンパクトであるから，f は連続である。実際に，$\pi : \Omega \to X$ は上への同型写像であるから，$\pi^{-1}(x) = (x, f(x))$ $(x \in X)$ より求まる。今，任意の $x \in X$ と任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して，

$$T_\varphi^n(x, f(x)) = (T^n x, f(T^n x) + \varphi(x,n)).$$

故に，$f(x) = f(T^n x) + \varphi(x,n)$；i.e. φ はコバウンダリーであることが得られた。

定理4.2 θ は無理数，α は実数で，$0 < t < 1$ とする。このとき次は同値である。

$$\sup \left| \sum_{n=0}^{N-1} 1_{[0,t)}(\{\alpha + n\theta\}) - Nt \right| < \infty$$

$\iff$

$k \in \mathbb{Z}$ が存在して，$t = \{k\theta\}$ と表わせる。

証明 $\Leftarrow)$：$k \in \mathbb{Z}$ が存在して $t = \{k\theta\}$ であるとする。このとき，任意の $\beta \in \mathbb{R}$，任意の $N \geq 0$ に対して

$$(*) \quad \sum_{n=0}^{N-1} 1_{[0,t)}(\{\beta + nk\theta\}) = \sum_{n=0}^{N-1} 1_{[0,t)}(\{\beta + nt\}).$$

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

$\beta - t < r \leq \beta + (N-1)t$ をみたす任意の整数 r に対して，$\beta + nt \in [r, r+t)$ をみたす n（但し，nは $0 \leq n \leq N$ をみたす整数）が唯一つ存在する。また，これ以外の整数 r に対しては，このような n は存在しない。故に

$$\sum_{n=0}^{N-1} 1_{[0,t)}(\{\beta + nt\}) = \sum_{r\in\mathbb{Z}} \sum_{n=0}^{N-1} 1_{[r,r+t)}(\beta + nt)$$

$$= \sum_{\substack{r\in\mathbb{Z} \\ \beta - t < r \leq \beta+(N-1)t}} 1 \qquad = [Nt] \text{ or } [Nt]+1$$

他方，(*)の左辺は次のように計算できる。

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{N-1} 1_{[0,t)}(\{\beta+nt\})\,d\beta = \sum_{n=0}^{N-1} \int_0^1 1_{[0,t)}(\{\beta+nt\})\,d\beta$$

$$= N\int_0^1 1_{[0,t)}(\{\beta\})\,d\beta$$

$$= Nt.$$

故に，$\left|\sum_{n=0}^{N-1} 1_{[0,t)}(\{\beta+nt\}) - Nt\right| \leq 1.$

$k > 0$ のとき，任意の，$0 < \alpha < 1$ に対して，

$$(**) \quad \left|\sum_{n=0}^{N-1} 1_{[0,t)}(\{\alpha + n\theta\}) - Nt\right|$$

$$\leq \sum_{r=0}^{k-1} \left| \sum_{n=0}^{[\frac{N-r-1}{k}]} 1_{[0,t)}(\{(\alpha + r\theta) + nk\theta\}) - \left(\left[\frac{n-r-1}{k}\right]+1\right)t \right|$$

$$\leq k < \infty$$

$k < 0$ のときは，θ の代わりに $-\theta$ とおいて，$t = \{(-k)(-\theta)\}$ について上と同じようにして (**) を得る。

⇒)： $\sup \left|\sum_{n=0}^{N-1} 1_{[0,t)}(\{\alpha+n\theta\}) - Nt\right| < \infty$，及び任意の $k \in \mathbb{Z}$ に対して，$t \neq \{k\theta\}$ と仮定して，矛盾を導びけばよい。

区間 $[0,1)$ から $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ への 1-1 可測写像 ξ，ξ_1，ξ_2 を，次のように定義する。任意の $\beta \in [0,1)$ に対して，

$$\xi(\beta) = (1_{[0,t)}(\{\beta+n\theta\})\,;\, n \in \mathbb{Z}),$$
$$\xi_1(\beta) = (1_{(0,t]}(\{\beta+n\theta\})\,;\, n \in \mathbb{Z}),$$

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

$$\xi_2(\beta) = (I_{[0,t]}(\{\beta + n\theta\});\ n \in \mathbb{Z}).$$

$[0,1)$ の可測集合

$$B_1 = \{\beta \in [0,1);\ \xi(\beta) \neq \xi_1(\beta)\},\quad B_2 = \{\beta \in [0,1);\ \xi(\beta) \neq \xi_2(\beta)\}$$

に対して，

$$B_0 = [0,1) \setminus (B_1 \cup B_2),\quad X = \xi[0,1) \cup \xi_1(B_1) \cup \xi_2(B_2)$$

とおく．このとき X は，閉集合である．実際に $\{\xi(\beta_k)\}_{k=1}^{\infty}$ は，$\xi[0,1)$ の収束列で $\xi(\beta_k) \to x \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ $(k \to \infty)$ であるとする．$[0,1)$ はコンパクトであるから，$\beta_{k_i} \to \beta \in [0,1]$ $(i \to \infty)$ なる部分列 $\{\beta_{k_i}\}$ が存在する．$\beta \in B_0$ のとき，すなわち $\{\beta + n\theta\} \neq 0$，$\{\beta + nt\} \neq t$ $(\forall n \in \mathbb{Z})$ であるとき，$\xi(\beta_k) \to \xi(\beta)$ $(k \to \infty)$ である．故に，$x \in X$．また $\beta \in B_1$ のとき，すなわち $\{\beta + n_0\theta\} = 0$ なる $n_0 \in \mathbb{Z}$ が存在する。このとき，仮定より $\{\beta + n\theta\} \notin \{0, t\}$ $(n_0 \neq \forall n \in \mathbb{Z})$ が成立する。故に部分列 $\{k_i'\} \subset \{k_i\}$ が存在して $\xi(\beta_{k_i'}) \to \xi(\beta)$ $(i \to \infty)$，あるいは $\xi(\beta_{k_i'}) \to \xi_1(\beta)$ $(i \to \infty)$ が成立する．$\beta = 1$ のときも同様にして $\xi(\beta_k) \to \xi(0)$ あるいは $\xi_1(0)$ に収束する。故に $x \in X$．$\beta \in B_2$ のときも同様にして $x \in X$．従って $\overline{\xi([0,1))} \subset X$。同様な方法で $\overline{\xi_1(B_1)} \subset X$，$\overline{\xi_2(B_2)} \subset X$ が得られる。これは，X が閉集合であることを示している．

変換 $T: \{0,1\}^{\mathbb{Z}} \to \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ は推移変換であるとき，$TX = X$ なることは容易にえられる．ところで位相力学系 (X, T) は minimal である．このことは容易にえられる．また θ は無理数だから任意の $\beta \in [0,1)$ に対して $\{\beta + n\theta;\ n \in \mathbb{Z}\}$ は $[0,1)$ で稠密である．故に任意の $\gamma \in [0,1)$ に対して，$\{\beta + n_j\theta\} \uparrow \gamma$ $(j \to \infty)$ なる $\mathbb{N}$ の部分列 $\{n_j\}$ が存在する。さらに $\{\beta + n_j\theta\} \uparrow \gamma$，あるいは $\{\beta + n_j\theta\} \downarrow \gamma$ なる部分列をとることもできる．このとき，

$$\xi(\{\beta + n_j\theta\}) \to \begin{cases} \xi(\gamma) & \gamma \in B_0 \\ \xi(\gamma) & \gamma \in B_1 \text{ かつ } \{\beta + n_j\theta\} \downarrow \gamma \\ \xi(\gamma) & \gamma \in B_2 \text{ かつ } \{\beta + n_j\theta\} \uparrow \gamma \end{cases}$$

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

$$\begin{cases} \xi_1(\gamma) & \gamma \in B_1 \text{ かつ } \{\beta + n_j\theta\} \uparrow \gamma \\ \xi_2(\gamma) & \gamma \in B_2 \text{ かつ } \{\beta + n_j\theta\} \downarrow \gamma \end{cases}$$

$$(j \to \infty)$$

(ただし $\{\beta+n_j\theta\}\uparrow 1$ なるとき $\{\beta+n_j\theta\}\uparrow 0$ と見る). よって, $\overline{\{T^n\xi(\{\beta\}; n\in\mathbb{Z}\}} = X$ $(\beta\in[0,1))$. 同様にして, $\overline{\{T^n\xi_1(\{\beta\}); n\in\mathbb{Z}\}} = \overline{\{T^n\xi_2(\{\beta\}); n\in\mathbb{Z}\}} = X$ $(\beta\in[0,1))$ が得られる. これは (X, T) が minimal であることを示している.

Minimal な力学系 (X,T) 上に写像 $\varphi; X\times\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ を次のように定義する; 任意の $x\in X$ と, 任意の $n\in\mathbb{Z}$ に対して

$$\varphi(x,n) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{n-1}(x(i)-t) & n\geq 0 \\ -\sum_{i=n}^{-1}(x(i)-t) & n<0 \end{cases}$$

φ はコサイクルであることは容易にわかる。$n\geq 0$ に対して,

$$\sum_{i=0}^{n-1} I_{[0,t)}(\{\beta+i\theta\}) - nt = \varphi(\xi(\beta), n).$$

仮定より, $\sup_{n\geq 0}|\varphi(\xi(\beta), n)| < \infty$. (X, T) は minimal であるから, 任意の $x\in X$ に対して, $T^k\xi(\beta)\to x$ $(k\to\infty)$ なる数列 $\{k\}$ が存在する. φ は明らかに連続である.

$$\begin{aligned} |\varphi(x,n)| &= |\lim_{k\to\infty}\varphi(T^k\xi(\beta), n)| \\ &= |\lim_{n\to\infty}(\varphi(\xi(\beta), n+k) - \varphi(\xi(\beta), k)| \\ &< \infty \end{aligned}$$

$n<\infty$ に対しても $|\varphi(x,n)|<\infty$ が得られる. 故に φ は有界なコサイクルである. 定理4.1 によって

$$\varphi(x,n) = f(T^n x) - f(x) \qquad (x\in X,\ n\in\mathbb{Z})$$

なる連続関数 $f: X\to\mathbb{R}$ が存在する; i.e. φ はコバウンダリーである. 今, 我々の仮定が矛盾であることが示される. $x=\xi(0)$ $\bar{x}=\xi_1(0)$ とおく. このとき, $x(0)=1$, $\bar{x}(0)=0$ である. θ は

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

無理数だから $\{n\theta\} \neq 0$ $(0 \neq {}^\forall n \in \mathbb{Z})$. 故に $x(n) = \overline{x(n)}$ $(0 \neq {}^\forall n \in \mathbb{Z})$ でなくてはならない。

$$\varphi(x, n) = \begin{cases} \varphi(\bar{x}, n) + 1 & n \geq 1 \\ \varphi(\bar{x}, n) & n \leq 0 \end{cases} \qquad (x \in X,\ n \in \mathbb{Z})$$

なる関係から，任意の $n \geq 1$ に対して，

$$\begin{aligned} f(T^n x) - f(T^{-n} x) &= \varphi(x, n) - \varphi(x, -n) \\ &= \varphi(\bar{x}, n) - \varphi(\bar{x}, -n) + 1 \\ &= \varphi(T^n \bar{x}) - f(T^{-n} \bar{x}) + 1. \end{aligned}$$

故に，

$$(*) \quad \{f(T^n x) - f(T^n \bar{x})\} + \{f(T^{-n} x) - f(T^{-n} x)\} = 1.$$

明らかに，$|T^n x - T^n \bar{x}| \to 0$ $(n \to \pm\infty)$ で，f は連続であるから，(*) の右辺は $n \to \infty$ なるとき 0 に収束する。これは矛盾であるから我々の目的が達成された。

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

§5 Van der Waerden の定理.

この節では，$\mathbb{N}$ は自然数全体の集合（$\mathbb{N}=\{1,2,\cdots\}$）とする．

定理 5.1 $\{S_i\}_{i=1}^{k}$ を $\mathbb{N}$ の任意の有限分割（$S_i \cap S_j = \phi$ $(i \neq j)$，$\bigcup_{i=1}^{k} S_i = \mathbb{N}$）とする．このとき，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，$a \in \mathbb{N}$，$b \in \mathbb{N}$，$1 \leq i \leq k$ が存在して，長さ $n+1$ の等差数列 $\{a, a+b, \cdots, nb\}$ が S_i に含まれる．

定理 5.1 は次の補題 5.2 から容易に証明できる．

補題 5.2 (X, d) はコンパクト距離空間であるとする．任意の $n \in \mathbb{N}$ を固定する．写像 $T_i : X \to$ onto $(1 \leq i \leq n)$ は同相写像で，$T_i T_j = T_j T_i$ $(1 \leq i, j \leq n)$ をみたしているものとする．このとき，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$x \in X$，$b \in \mathbb{N}$ が存在して，$d(T_i^b x, x) < \varepsilon$ $(1 \leq i \leq n)$ とできる．

補題 5.2 が成立するとして，定理 5.1 を証明しよう．$k \geq 2$ は定理 5.1 の中のように選んで，$\Sigma = \{1, 2, \cdots, k\}$ とおく．変換 $T : \Sigma^{\mathbb{Z}} \to \Sigma^{\mathbb{Z}}$ は推移変換であるとする（ここで Σ に離散距離が導入されているものとする．このとき $\Sigma^{\mathbb{Z}}$ はコンパクト距離空間である）.

$$x_0(n) = \begin{cases} j & n \in S_j \\ 1 & n \leq 0 \end{cases}$$

によって $\Sigma^{\mathbb{Z}}$ の点 $x_0 = (\cdots, x_0(-1), x_0(0), x_0(1), \cdots)$ を定義する．このとき $X = \bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{\{T^n x_0 ; n \geq m\}}$ は T－不変集合で，$X \neq \phi$. 定理 5.1 の結論を得るために，$T_i = T^i$ $(1 \leq i \leq n)$ とおく．補題 5.2 によって，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$x \in X$，$b \in \mathbb{N}$ が存在して，$d(T_i^b x, x) < \varepsilon$ $(1 \leq i \leq n)$ が成立する．ε が十分に小さいとすれば，明らかに，

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

$$(*) \quad x(ib) = (T^{ib}x)(0) = x(0) \qquad (1 \leq i \leq n).$$

集合 X の定義から，$d(T^a x_0, x)$ が十分小さいように $a \in \mathbb{N}$ を選ぶことができる．このとき，

$$(**)\begin{cases} x_0(a) = (T^a x_0)(0) = x(0) \\ x_0(a+b) = (T^a x_0)(b) = x(b) \\ \cdots\cdots \\ x_0(a+nb) = (T^a x_0)(nb) = x(nb). \end{cases}$$

(*) と (**) から $\{a, a+b, \cdots, a+nb\} \subset S_{x(0)}$ がいえる．定理 5.1 が証明された。

補題 5.2 を証明するために準備をする．

定義 16 コンパクト距離空間 X から，それ自身の上への同相写像の全体 $H(X)$ は群をなす．G を $H(X)$ の部分群とする．集合 $Y \subset X$ が $gY \subset Y$ $(g \in G)$ をみたすのは，Y が空集合かあるいは $Y = X$ のときに限るとき，(X, G) は minimal であるという。

定義 17 X，G は定義 16 のものとする．写像 $T: X \xrightarrow{onto} X$ は同相写像，Δ は X の閉部分集合であるとする．位相力学系 (X, T) が次の (i)，(ii)，(iii) をみたすとき，Δ は (X, T) に関して，homogeneous であるという．

(i) $g\Delta = \Delta \quad (g \in G)$

(ii) $gT = Tg$ on $X \quad (g \in G)$

(iii) (Δ, G) は minimal．

補題 5.3 (Δ, G) が minimal であれば，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，

$$\inf_{1 \leq i \leq N} d(g_i x, y) < \varepsilon \qquad (\forall x, \forall y \in \Delta)$$

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

をみたす $N\in\mathbb{N}$ と N 個の点 $g_1, g_2, \cdots, g_N \in G$ が存在する。

証明] $\{V_k\}_{k=1}^{L}$ $(\mathrm{diam}\,V_k<\varepsilon)$ は Δ の有限開被覆とする。$1\leq k\leq L$ なる k に対して，$\bigcup_{g\in G} g^{-1}V_k$ は，Δ の G-不変開集合で (Δ, G) は minimal であるから，$\bigcup_{g\in G} g^{-1}V_k=\Delta$。$\Delta$ はコンパクトであるから，$\bigcup_{i=1}^{N} g_i^{-1}V_k=\Delta$ $(1\leq {}^\forall k\leq L)$ なる有限集合 $\{g_1,\cdots,g_N\}\subset G$ が存在する。任意の $x, y\in\Delta$ に対して，$y\in V_k$ なる k $(1\leq k\leq L)$ が存在して，$x\in g_i^{-1}V_k$ となる g_i が存在する。故に，$y, g_i x\in V_k$。$\mathrm{diam}(V_k)<\varepsilon$ であるから $d(g_i x, y)<\varepsilon$ である。

補題5.4 Δ は，(X,T) に関して homogeneous であるとする。このとき

(I) 任意の $\varepsilon>0$ に対して，$d(T^n\Delta, \Delta)<\varepsilon$ なる $n\in\mathbb{N}$ が存在する。

$\Rightarrow$

(II) 任意の $\varepsilon>0$ に対して，$d(T^n x, x)<\varepsilon$ なる $n\in\mathbb{N}$ と $x\in\Delta$ が存在する。

証明] 二つの部分に分けて証明される。

1) (I)を仮定する。任意の $\varepsilon>0$，任意の $y\in\Delta$ に対して $d(T^n x, y)<\varepsilon$ なる $n\in\mathbb{N}$ と $x\in\Delta$ が存在する。

実際，(I)によって $d(T^n x, y)$ が小さくなるように特に $d(g_i T^n x_0, g_i y_0)<\varepsilon$ $(1\leq {}^\forall i\leq N)$ となるように $x_0, y_0\in\Delta$ がえらべる。ここで，g_i $(1\leq i\leq N)$ は補題5.3でえらばれたものとする。補題5.3を使ったとき，$d(g_i y_0, y)<\varepsilon$ となる i $(1\leq i\leq N)$ が存在する。$x=g_i x_0$ とおくと $g_i T^n x_0=T^n g_i x_0=T^n x$。故に $d(T^n x, g_i y_0)<\varepsilon$，任意の $y\in\Delta$ に対して $d(T^n x, y)\leq d(T^n x, g_i y_0)+d(g_i y_0, y)<2\varepsilon$。結論がえられた。

2) (I)$\Rightarrow$(II)を示す。$\varepsilon>0$ を固定する。任意の $z_0\in\Delta$ に対して，$d(T^{n_1} z_1, z_1)<\varepsilon$ なる $n_1\in\mathbb{N}$ と $z_1\in\Delta$ が存在する。

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

$$\eta_1 = \varepsilon - d(T^{n_1}z_1, z_2)$$

とおき，$\varepsilon_2 > 0$ を

$$d(x, y) < \varepsilon_2 \Rightarrow d(T^{n_1}x, T^{n_1}y) < \eta_1$$

となるようにえらぶ．1)によって，

$$d(T^{n_2}z_2, z_1) < \varepsilon_2$$

をみたす $z_2 \in \Delta$ と，$n_2 \in \mathbb{N}$ が存在する．従って

$$\begin{aligned} d(T^{n_1+n_2}z_2, z_0) &\leq d(T^{n_1+n_2}z_2, T^{n_1}z_1) + d(T^{n_1}z_1, z_0) \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

$$\eta_2 = \min\{\varepsilon - d(T^{n_1+n_2}z_2, T^{n_1}z_1) - d(T^{n_1}z_1, z_0), \\ \varepsilon - d(T^{n_2}z_2, z_1)\}$$

とおき，$\varepsilon_3 > 0$ を

$$\begin{aligned} d(x, y) < \varepsilon_3 \Rightarrow\ & d(T^{n_1+n_2}x, T^{n_1+n_2}y) < \eta_2, \\ & d(T^{n_2}x, T^{n_2}y) < \eta_2 \end{aligned}$$

をみたすように選ぶことができる．1)によって，

$$d(T^{n_3}z_3, z_2) < \varepsilon_3$$

となる $n_3 \in \mathbb{N}$ と $z_3 \in \Delta$ が存在して，

$$\begin{aligned} d(T^{n_1+n_2+n_3}z_3, z_0) &\leq d(T^{n_1+n_2+n_3}z_3, T^{n_1+n_2}z_2) \\ &\quad + d(T^{n_1+n_2}z_2, T^{n_1}z_1) + d(T^{n_1}z_1, z_0) \\ &< \varepsilon, \end{aligned}$$

そして，

$$\begin{aligned} d(T^{n_2+n_3}z_3, z_1) &\leq d(T^{n_2+n_3}z_3, T^{n_2}z_2) + d(T^{n_2}z_2, z_1) \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

帰納法を使って，

$$d(T^{n_{i+1}+n_{i+2}+\cdots+n_j}z_j, z_i) < \varepsilon \qquad (0 \leq i \leq j)$$

をみたす $n_1, n_2, \cdots \in \mathbb{N}$ と, $z_0, z_1, \cdots \in \Delta$ をえらぶことができる. Δ はコンパクトであるから, $d(z_i, z_j) < \varepsilon$ となる $i<j$ が存在する。ここで $n = n_{i+1} + \cdots + n_j$ とおくとき, $d(T^n z_j, z_j) < 2\varepsilon$ である.

補題5.2の証明] Gを変換T_i $(1 \le i \le n)$ から生成されるアーベル群とする, Zorn の補題によって, Xの閉部分集合$X' \neq \phi$が存在して, (X', G) は minimal となる. 記号を簡単にするために, (X, G) が minimalであると仮定して証明する. $n=1$ のとき; i.e. $G = \{T_1^j; j \in \mathbb{Z}\}$ のとき, 任意の$x \in X$ に対して, $\overline{\{T_1^j x; j \in \mathbb{Z}\}} = X$. 故に, $d(T_1^b x, x) < \varepsilon$ なる $b \in \mathbb{N}$が存在する. $n-1$のとき補題5.2が成立すると仮定しよう.

$\varepsilon > 0$ を固定し, X^nはXのn個の直積を表わすとする.

$$\Delta = \{(x, \cdots, x) \in X^n ; x \in X\}$$
$$T = T_1 \times T_2 \times \cdots \times T_n \quad \text{on } X^n$$
$$\hat{T}_j = T_j \times T_j \times \cdots \times T_j \quad \text{on } X^n \quad (1 \le j \le n)$$

とおく. 明らかに, $\hat{T}_j \Delta = \Delta$ $(1 \le j \le n)$, $\hat{G}$を$\hat{T}_j$ $(1 \le j \le n)$ によって生成されるアーベル群とする. $(\Delta, \hat{G})$と(X, G)は同型であることは明らか. 故に, $(\Delta, \hat{G})$ は minimalである. Δは(X^n, T)に関して homogeneous であることは容易にわかる.

変換, $T_1 T_n^{-1}, T_2 T_n^{-1}, \cdots, T_{n-1} T_n^{-1}$ に関して, 帰納法の仮定を使うとき,

$$d(T_i^b T_n^{-b} x, x) < \varepsilon \qquad (1 \le i \le n-1)$$

なる $x \in X$ と $b \in \mathbb{N}$が存在する。

$$\bar{x} = (x, \cdots, x) \in \Delta,$$
$$\bar{z} = (T_n^{-b} x, \cdots, T_n^{-b} x) \in \Delta$$

とおく. このとき

$$\bar{d}(T^b \bar{z}, \bar{x}) = \max_{1 \le i \le n} d(T_i^b T_n^{-b} x, x) < \varepsilon$$

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

であるから，$\bar{d}(T^b\Delta, \Delta) < \varepsilon$. 今補題5.4を使ったとき，$d(T^n\bar{x}, \bar{x}) < \varepsilon$ なる $n \in \mathbb{N}$ と $\bar{x} \in \Delta$ をみつけることができる．故に，$d(T_i^n x, x) < \varepsilon$ $(1 \leq i \leq n)$ が得られた．補題5.2が証明された．

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

§6 文献

[1] H. Furstenberg, Strictly ergodicity and transformations of the torus, Amer. J. Math. 83 (1961), 573-601.

[2] ――――――, Disjointness in ergodic theory, minimal sets and a problem in diophantine approximation, Math. Systems Theory 1 (1967), 1-49.

[3] ――――――, H. Keynes and L. Shapiro, Prime flows in topological dynamics, Israel J. Math. 14 (1973), 26-38.

[4] ――――――, Ergodic behavior of diagonal measures and a theorem of Szemerédi on arithmetic progressions, J. Analyse Math. 31 (1977), 204-256.

[5] ――――――, and B. Weiss, Topological dynamics and combinatorial number theory, J. Analyse Math. 34 (1978), 61-85.

[6] ――――――, and Y. Katznelson, An ergodic Szemerédi theorem for commuting transformations, J. Analyse Math 34 (1978), 275-291.

[7] P. R. Halmos, Lectures on Ergodic Theory, Publ. Math. Soc. Japan, 1956.

[8] S. Kakutani, Strictly ergodic symbolic dynamical systems, Proc. 6 th Berkeley symposium on mathematical statics and probability 2 (1970).

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

[9] T. Kamae, Subsequences of normal sequences, Israel J. Math. 16 (1973), 121–149

[10] ————, Sum of digits to different bases and mutual singularity of their spectral measures, Osaka J. Math. 3 (1978), 569-574

[11] J.C. Oxtoby, Ergodic sets, Bull. Amer. Math. Soc. 58 (1952), 116–136.

[12] W. Rudin, Some theorems on Fourier coefficients, Proc. Amer. Math. Soc. 10 (1959), 855-859.

[13] W. A. Veech, Finite group extension of irrational rotations, Israel J. Math. 21 (1975), 240-259.

[14] ————, Topological dynamics, Bull. Amer. Math. Soc. 83 (1977), 775-830.

[15] ————, Ergodic theory and uniform distribution, Soc. Math. France Asterisque 61 (1979),

[16] H. Weyl, Über die Gleichverteilung von Zahlen mod Eins, Math. Ann (1916), 313-352.

[17] N. Wiener, Generalized harmonic analysis, Acta Math. 55 (1930), 117-258.

[18] F.J. Hahn, On affine transformations of compact abelian groups, Amer. J. Math. 85 (1963), 428-446.

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

CHAOS と平衡測度

高橋陽一郎 述

目次.

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

このNoteは 1980年3月17日～同23日に行なわれたエルゴード理論ウインター・スクールに於ける、高橋陽一郎氏の講義の記録である。

この講義は、主として、

高橋陽一郎，"区間力学系のカオスと周期点"

（都立大数学教室セミナー報告）

に基づいて行なわれた。それを見ても明らかなように，内容は余りに豊富であり，それら全てを完全に記録するのは，スペイス、並びに記録者の能力からみて、不可能である。故に，このNoteでは，講義内容のうちのいくつかを詳細に述べ，残り大部分は簡単に記すにとどめた。

なお、必要な知識は、なるべく本文中に順次述べてゆく様にしたが，metrical entropyについては最後の節にAppendixとしてまとめた。

また，文章のみを羅列することはできるだけ避け，記号等を使用して、なるべく見易い書き方にしたつもりである。が、結果的には却って見にくくなってしまったかもしれない。さらに、誤り，不完全な記述等は全て記録者の責任である。読者各位の寛容を切望する次第。

最後に，原稿に眼を通して下さった高橋陽一郎氏，様々のアドバイスをくださった多数の方々，そして遅れること甚だしい原稿を辛抱強く待って下さった久保泉氏に感謝の意を表する。

1980.11.17.

記録者.

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

§1. シャルコフスキー（Šharkovskii）の定理

シャルコフスキーの定理（Th. 1-1, 1-2）は，区間からそれ自身への連続写像について，周期点の共存条件 i.e. ある周期点の存在が他の周期点の存在を保証するという状況を示す定理である。

<u>def</u> 集合 X からそれ自身への写像 $f: X \to X$ について，
$f^0 \triangleq id$（Xの恒等写像），$f^n \triangleq f \circ f^{n-1}$ $(n=1,2,\cdots)$ とおく。
このとき，

◎ $x \in X$ が f の<u>固定点</u>（fixed point） $\Leftrightarrow$ $fx = x$；

◎ $x \in X$ が f の<u>周期</u> p の<u>周期点</u>（periodic point of period p），【或いは，p-<u>周期点</u>（p-periodic point）】$\Leftrightarrow$ $f^p x = x$，かつ $f^i x \neq x$ $(\forall i = 1, 2, \cdots, p-1)$；

◎ $x \in X$ が f の p-周期点のとき，その orbit $C = \{f^i x \,;\, i \in \mathbb{N}\} = \{x, fx, \ldots, f^{p-1}x\}$ を <u>p-cycle</u> という。

以下，次の記号を使う；

◎ $\mathrm{Fix}(X, f) = \mathrm{Fix}(f) \triangleq \{f \text{の} \forall \text{固定点}\} = \{x \in X \,;\, fx = x\}$；

◎ $\mathrm{Per}(X, f, n) = \mathrm{Per}(X, n) \triangleq \{f \text{の} \forall n\text{-周期点}\}$
$$= \mathrm{Fix}(f^n) \setminus \bigcup_{0<m<n} \mathrm{Fix}(f^m)\,;$$

◎ $\Gamma_n(X, f) = \Gamma_n(X) \triangleq \{f \text{の} \forall\, n\text{-cycle}\}$
$$= \{\, \{f^i x \,;\, 0 \leq i < n\} \,;\, x \in \mathrm{Per}(X, f, n)\}.$$

<u>def</u> $\mathbb{N} = \{1, 2, \cdots\}$ 上の次の様な順序 $\vdash$ を，<u>Šharkovskii order</u> という；

$3 \vdash 5 \vdash 7 \vdash 9 \vdash \cdots\cdots$	【全ての奇数 > 1】
$\vdash 6 \vdash 10 \vdash 14 \vdash 18 \vdash \cdots\cdots$	【$2 \times$（全ての奇数 > 1）】
$\vdash 12 \vdash 20 \vdash 28 \vdash 36 \vdash \cdots\cdots$	【$2^2 \times$（全ての奇数 > 1）】
$\vdots$	$\vdots$
$\cdots\cdots \vdash 2^n \vdash 2^{n-1} \vdash \cdots\cdots \vdash 4 \vdash 2 \vdash 1$。	【2の巾乗】

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

<u>Theorem 1-1</u>.（本来のŠharkovskiiの定理）[Šh], [Št].

有界閉区間 $J \subset \mathbb{R}$ 上の連続写像 $f: J \to J$ が k-cycle を持つならば，$k \triangleright l$ なる任意の l について，l-cycle が存在する。

<u>Theorem 1-2.</u>（Šharkovskiiの定理の精密化）.

Th. 1-1 と同じ J, f について，

(i) f が k-cycle（k；奇数 >1）をもつならば，次のⓐ,ⓑのいずれかを満たす k-周期点 x が存在する；

$$(\text{り})\begin{cases} \text{ⓐ} \quad f^{k-2}x < f^{k-4}x < \cdots\cdots < f^3x < fx < x = f^kx < \cdots\cdots < f^{k-3}x < f^{k-1}x, \\ \text{ⓑ} \quad f^{k-2}x > f^{k-4}x > \cdots > f^3x > fx > x = f^kx > \cdots\cdots > f^{k-3}x > f^{k-1}x. \end{cases}$$

(ii) f が k-cycle（$k = 2^n \cdot l$；$n \geq 0$, l = 奇数）をもてば，次の様な k-cycle $C = \{p_1, p_2, \cdots, p_k\}$（$p_1 < p_2 < \cdots < p_k$）が存在する；

$\forall m$；$1 \leqq m \leqq n$，$\forall (\varepsilon_j)_{j=1,2,\cdots,m} \in \{0, 1\}^m$ に対して

$C_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m} \triangleq \{p_i ; \sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j / 2^j < i/k \leqq \sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j / 2^j + \frac{1}{2^m}\}$ とおくとき，

(1) $f^{2^{m-1}}$ は，$C_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_{m-1} 0}$ を $C_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_{m-1} 1}$ に，$C_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_{m-1} 1}$ を $C_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_{m-1} 0}$ にうつす。とくに，各 $C_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m}$ は f^{2^m} の $2^{n-m} \cdot l$-cycle である。

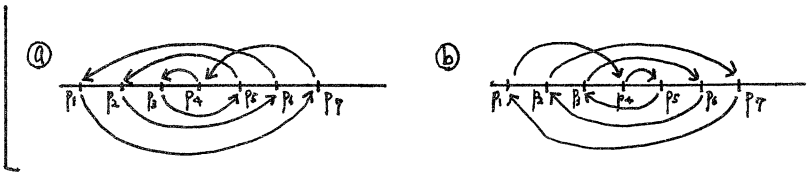
(2) $l > 1$ ならば，各 $C_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n}$ は f^{2^n} の l-cycle で上の(り)のⓐまたはⓑをみたす。

[例えば，$k = 12 = 2^2 \cdot 3$ のとき；
$C_{00} = \{p_1, p_2, p_3\}$，$C_{01} = \{p_4, p_5, p_6\}$，$C_{10} = \{p_7, p_8, p_9\}$，$C_{11} = \{p_{10}, p_{11}, p_{12}\}$.
$C_0 = C_{00} \cup C_{01}$，$C_1 = C_{10} \cup C_{11}$；
$f C_{00} = C_{10}$ or C_{11}，$f C_{01} = C_{10}$ or C_{11}，$f^2 C_{00} = C_{01}$，$f^2 C_{01} = C_{00}$，
$f^2 C_{10} = C_{11}$，$f^2 C_{11} = C_{10}$，$f C_0 = C_1$，$f C_1 = C_0$；
各 C_{ij} は f^4-不変で，それらは，f^4 の 3-cycle で(り)をみたす。

<u>def</u> Th 1-2. に述べた様な cycle を <u>揺らぐサイクル</u>（Oscillating Cycle）という。

[例えば，oscillating 7-cycle は次の様な動き方をする；

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158



Lemma 1-3. $K, L \subset J$（閉区間）が $f(K) \supset L$ をみたすなら，$\exists K' \subset K$（閉区間）s.t. $f(K') = L$。

∵）$L = [a, b]$ とする。$C \triangleq f^{-1}(a) \cap K$，$D \triangleq f^{-1}(b) \cap K$ とおくと，C, D 共に compact，かつ $C \cap D = \phi$。故に C と D との距離を attain する2点が存在する。即ち

$\exists x \in C$；$\exists y \in D$；s.t. $|x - y| = \inf\{|z - w|; z \in C, w \in D\}$。

x と y とを端点とする閉区間 K' が求めるもの。 $\square$

Lemma 1-4. (i) J の閉区間 J_n $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ が $f(J_n) \supset J_{n+1}$ $(\forall n)$ をみたすならば，$\exists x \in J_0$；$f^n x \in J_n$ $(\forall n)$.

(ii) とくに，$\exists p$；$\forall n$；$J_{n+p} = J_n$ ならば，(i) の x は $f^p x = x$ をみたすようにとれる。

(iii) さらに，$J_0, J_1, \cdots, J_{p-1}$ が互いに交わらないならば，(ii) の x は f の p-周期点。

∵）(i) Lemma 1-3 を帰納的に使って，J_0 の閉区間 K_n $(n = 0, 1, \cdots)$ で次をみたすものがとれる；

$K_0 = J_0 \supset K_1 \supset \cdots\cdots$；$f^n K_n = J_n$；$\forall j \in \{0, 1, \cdots, n\}$ について，$f^j K_n \subset J_j$。

compact set J_0 の有限交叉性より，$\bigcap_{n=0}^{\infty} K_n \neq \phi$。この集合の任意の元 x は，(i) の結論をみたす。

(ii) (i) の証明の中で，K_p は，$\forall j = 0, 1, \cdots, p$；$f^j K_p \subset J_j$ かつ，$f^p K_p = J_p = J_0 \supset K_p$ をみたす。故に中間値の定理より，$\exists x \in K_p \subset J_0$；$f^p x = x$。この x が求めるもの。

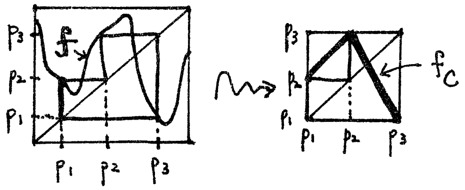
(iii) もしも $f^r x = x$ $(r < p)$ とすると $J_0 \ni x = f^r x \in J_r$。とこ

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

ころが，仮定より $J_0 \cap J_k = \phi$。矛盾。 $\square$

<u>def</u> f の k-cycle $C = \{p_1 < p_2 < \cdots < p_k\}$ について，f の（C に関する）<u>線形化</u> $f_C : J_C \to J_C$ を次で定義する；

$$\begin{cases} J_C \triangleq [p_1, p_k] \subset J \\ f_C(p_j) \triangleq f(p_j) \in C \quad (\forall j) \\ f_C|_{[p_i, p_{i+1}]} \text{ は線形} \quad (\forall i)。 \end{cases}$$



<u>def</u> 以下，cycle $C = \{p_1 < p_2 < \cdots < p_k\}$ について，
$I_1 \triangleq [p_1, p_2]$，$I_2 \triangleq [p_2, p_3]$，……，$I_{k-1} \triangleq [p_{k-1}, p_k]$ とおく。

<u>Remark</u> $f(I_m) \supset f_C(I_m)$ $(\forall m)$。

<u>Lemma 1-5.</u> $\{I_{i_m}\}_{m \geq 0}$ $(1 \leq i_m \leq k-1)$ について，
$\exists x \in J_C$; $f_C^m x \in I_{i_m}$ $(\forall m)$ かつ $f_C^p x = x$
$\Rightarrow \exists y \in J$; $f^m y \in I_{i_m}$ $(\forall m)$ かつ $f^p y = y$。

∵) ① $\exists m$; $f_C^m x \in C$ のとき； $lp \geq m$ なる l をえらぶと，$x = f_C^{lp} x = f_C^{lp-m}(f_C^m x) \in f_C^{lp-m} C = C$． 故に $x \in C$。このときは，$y = x$ が求める点。
② ①でなければ，$\forall m$; $f_C^m x \in \mathrm{int}\, I_{i_m}$。このことから，$\forall m$; $f_C(I_{i_m}) \supset I_{i_{m+1}}$。故に，$f(I_{i_m}) \supset f_C(I_{i_m}) \supset I_{i_{m+1}}$。さらに $\forall n$: $I_{i_{n+p}} = I_{i_n}$ がわかるから，Lemma 1-4.(ii) により求める y の存在が言える。 $\square$

<u>Th 1-1, 1-2 の証明.</u>
$k = 1$ or 2 のときに，定理の帰結が成立するのは明らか。故に，以下 $k \geq 3$ とする。
証明は，いくつかの step に分けて行なう。

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

1° $C=\{p_1<p_2<\cdots<p_k\}$ を k-cycle とするとき，

(イ) $\exists m\in\{1,2,\cdots,k-1\}$; $f_C I_m\supset I_m$, $f_C p_m\geqq p_{m+1}$, $f_C p_{m+1}\leqq p_m$.

(ロ) $\exists \varepsilon=1$ or -1; $f_C I_m\supset I_m\cup I_{m+\varepsilon}$.

(ハ) $f_C^{k-2} I_m=\bigcup_{\alpha=1}^{k-1} I_\alpha=J_C$.

∵) (イ) $\forall m$; $f_C I_m\not\supset I_m$ と仮定する。$f_C p_1>p_2$ 故，$f_C I_1\not\supset I_1$ なるためには，$f_C p_2>p_2$ でなくてはならない。以下帰納的に，$\forall m$; $f_C p_m>p_m$. とくに $f_C p_k>p_k$ --- 矛盾。故に，$\exists m$; $f_C p_m>p_m$ & $f_C p_{m+1}<p_m$. このとき，$f_C I_m\supset I_m$.

(ロ) 結論を否定すると，$f_C|I_m$ は線形故，$f_C I_m=I_m$. 即ち，$f_C p_m=p_{m+1}$ & $f_C p_{m+1}=p_m$. このとき $\{p_m,p_{m+1}\}$ は 2-cycle となり，$k\geqq 3$ に矛盾。

(ハ) $f_C I_m\subseteqq f_C^2 I_m\subseteqq\cdots\subseteqq f_C^{k-2} I_m$ において；
"$\#(f_C^i I_m\cap C)=l\leqq k-1 \Longrightarrow \#(f_C^{i+1} I_m\cap C)=l+1$"

∵) $\#(f_C^{i+1} I_m\cap C)=l$ ならば，$f_C|_{f_C^i I_m\cap C}$ が order $\leqq l<k$ の巡回置換となり，C が k-cycle であることに矛盾。//

今，(ロ)より．$\#(f_C I_m\cap C)\geqq 3$ 故，$\#(f_C^{k-2} I_m\cap C)\geqq 3+(k-3)=k$ となり，$f_C^{k-2} I_m\cap C=C$. 即ち，$f_C^{k-2} I_m=\bigcup_{\alpha=1}^{k-1} I_\alpha=J_C$ □

2° 1°で求めた I_m について，k が奇数ならば，

(※) $\exists j\neq m$; $f I_j\supset I_m$.

∵) (※)が成立しないとする；i.e. $\forall j\neq m$: $f I_j\not\supset I_m$ とする。
claim. $\forall i\leqq m$; $f p_i\geqq p_{m+1}$，かつ $\forall i\geqq m+1$; $f p_i\leqq p_m$.

∵) 1°(イ)より，$f p_m\geqq p_{m+1}$. 仮定より特に $f(I_{m-1})\not\supset I_m$ 故，$f p_{m-1}\geqq p_{m+1}$ でなくてはならない。以下帰納的に，前半が示される。後半も同様。 ◁

claim より，$f(\{p_1,\cdots,p_m\})=\{p_{m+1},\cdots,p_k\}$. $f|C$ は bijective 故，両辺の個数を比較して，$m=k-m$. ∴ $k=2m$（偶数）となって仮定に矛盾する。 □

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

3° (*) ⇒ $\forall p \geqq k-1$; f は p-周期点をもつ。

∵) $f_c^{k-2} I_m \supset J_c \supset I_j$ (I_j は(*)をみたす) 故, $f^{k-2} I_m \supset I_j$.
$l \triangleq \min\{q ; f^q I_m \supset I_j\}$ ($l \leqq k-2$) とおく。このとき, $\exists\{i_0, i_1, \cdots, i_l\}$ ($1 \leqq i_j \leqq k-1$) s.t. $i_0 = m$, $i_l = j$, $f(I_{i_{n-1}}) \supset I_{i_n}$ ($\forall n = 1, 2, \cdots, l$)。今, $\forall p \geqq l+1$ について, p-per.pt. の存在を言う。f はもともと k-周期点をもつから, $p \neq k$ の場合を考えればよい。区間列 $\{J_{i_n}\}_{n=0,1,\cdots}$ を次で定義する。

$$\begin{cases} n=0,1,\cdots,l \text{ について, } J_{i_n} \triangleq I_{i_n}\,; \quad n=l+1,\cdots,p-1 \text{ について,} \\ J_{i_n} \triangleq I_{i_0}, \text{ 以下. } J_{i_{n+p}} = J_{i_n} \quad (n=0,1,2,\cdots) \text{。} \end{cases}$$

$\{J_{i_n}\}$ に対して Lemma 1-4(ii) を適用すれば,

$$\exists x \in J_0 \,; \begin{cases} f^n x \in I_{i_n} \ (n=0,1,\cdots,l), \ f^n x \in I_{i_0} \ (n=l+1,\cdots,p) \\ \text{かつ } f^p x = x. \end{cases}$$

この x の周期が p であることは, $J_i \cap I_j = \phi$ or $J_i \cap I_j \subset C = k$-cycle といることから証明できる。$l+1 \leqq k-1$ 故, 3° が O.K. □

4° f が奇数($\geqq 3$)周期点をもつとする。f の周期点の周期のうち最小の奇数($\geqq 3$)を k とする。このとき, f の k-cycle は oscillating cycle である。

∵) 3° の証明により, $\forall p \geqq l+1$ に対して f は p-cycle をもつ。然るに k は最小奇数周期故 $k-1 = l+1$, 即ち, $k-2 = l$. 故に 3° の証明中の $i_0, i_1, \cdots, i_l$ として, $1, 2, \cdots, k-1$ が丁度1度ずつ表われる。

① $f I_{i_0} \supset I_\alpha$ なる α は i_0, i_1 に限る。($i_1 = i_0 + \varepsilon$).

∵) もしも, $\exists s \neq 0, 1$; $f I_{i_0} \supset I_{i_s}$ とするならば, 区間列 $I_{i_0}, I_{i_s}, I_{i_{s+1}}, \cdots, I_{i_l}, I_{i_0}, \cdots$ に Lemma 1-4 を適用して, 周期 $\leqq k-2$ なる奇数周期点が存在することになり, k のとり方に矛盾. △

② $f I_{i_1} \supset I_\beta$ なる β は i_2 に限り, さらに, $i_2 = m - \varepsilon$.

∵) β が i_2 に限ることは ① と同様にして証明できる。さらに, $\varepsilon = 1$ のとき, $f\, p_{m+1} = p_m$ 故, $f\, I_{m+\varepsilon} \supset I_\beta$ なる β が唯1つにな

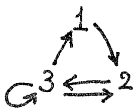
Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

るためには，$fp_{m+2}=p_{m-1}$ でなくてはならない。故に $i_2=m-1$。
$\varepsilon=-1$ のときにも同様にして，$i_2=m+1$。以上まとめて，$i_2=m-\varepsilon$。△

③ 以下同様にして，$i_3=m+2\varepsilon$，$i_4=m-2\varepsilon$，------ がわかり，結局，C は oscillating cycle にならざるを得ない。□

<u>def</u> k-cycle $C=\{p_1,\cdots,p_k\}$ に対して，$1,2,\cdots,k-1$ を頂点とし，$fI_\alpha\supset I_\beta$ のとき頂点 α と β とを矢印 $\alpha\to\beta$ で結んで得られる図式を C の graph ということにする。

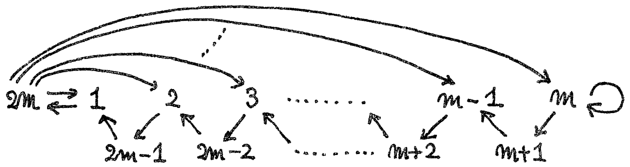
［例えば，$C=\{p_1,p_2,p_3,p_4\}$，$fp_1=p_2$，$fp_2=p_3$，$fp_3=p_4$，$fp_4=p_1$ のとき，C の graph は次の図式；



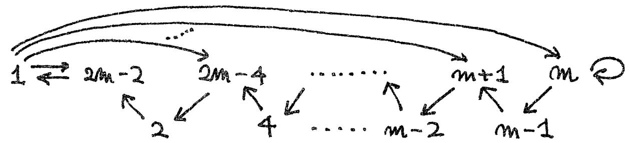
<u>5°</u> f が奇数($\geqq 3$)周期点をもつなら，任意の偶数 l について f は l-周期点をもつ。

∵) f の最小奇数($\geqq 3$)周期［これを k とする］の cycle は，4° により，oscillating cycle である。この cycle の graph は次のいずれかである；

ⓐ $k=2m+1$，$\varepsilon=1$；



ⓑ $k=2m-1$，$\varepsilon=-1$；



。

ⓐの場合，$\forall 2n\leqq k-3$ に対して，区間列 $I_{2m}, I_n, I_{k-n}, I_{n-1},\cdots, I_{2m-1}, I_1, I_{2m},\cdots$ に Lemma 1-4 を適用して，$2n$-周期点の存在が言える。一方，$\forall 2n\geqq k-2$ に対しても，3° により，$2n$-周期点が存在。ⓑの場合も同様。□

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

6° Cをk-cycle ($k=2^n \cdot l$)とする。ここでkに次の仮定をおく;

仮定 kは Šharkovskii order に関して最初に表われる。

i.e. $\left(\begin{array}{l} 0 \leqq \forall n' < n \quad \text{or} \quad n=n' \text{ かつ } 3 \leqq \forall l' (\text{奇数}) < l \quad \text{に対して}, \\ f \text{ は } 2^{n'} \cdot l' \text{-cycle をもたない。} \end{array}\right.$

このとき、

(i) $f^{2^{m-1}} C_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_{m-1} 0} = C_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_{m-1} 1}$ & $f^{2^{m-1}} C_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_{m-1} 1} = C_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_{m-1} 0}$ $(1 \leqq \forall m \leqq n)$

(ii) $l \geqq 3$ ならば、各$C_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n}$は$f^{2^n}$の oscillating l-cycle。

∵) もし、Cから作った$I_1, I_2, \cdots, I_{k-1}$に対して(*)が成立すれば、3°より、$f$は$(k-1)$-cycle をもつ。$k-1$は奇数故、上の、$k$に対する仮定に反する。故に、(*)は成立しない。このとき、2°の証明と同様に、$fC_0 = C_1$, $fC_1 = C_0$が示される。以下帰納的に(i)が証明される。さらに、4°をf^{2^n}に適用することにより(ii)も証明される。□

7° fが2^n-周期点をもてば、2^{n-1}-周期点をもつ。

∵) 4-周期点の存在が2-周期点の存在を導くことを言えば、帰納的に7°が示される。

$C = \{p_1 < p_2 < p_3 < p_4\}$を4-cycleとする。$C$が(*)をみたすならば、3°により3-周期点が存在し、さらに5°により、2-周期点が存在する。一方、Cが(*)をみたさないときには、$f[p_1, p_2] \supset [p_3, p_4]$, $f[p_3, p_4] \supset [p_1, p_2]$となる。故に、2-周期点が存在する。□

以上で、Th 1-1 は完全に証明されている。Th 1-2 も、kが Šharkovskii order で最初に表われている場合には、4°, 6°により証明されていることに注意する。

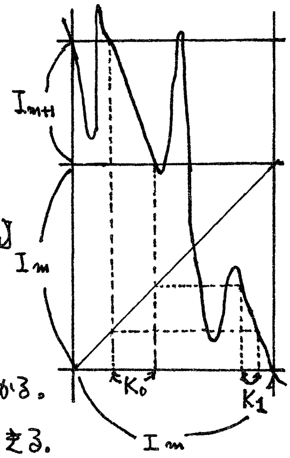
Th 1-2 (i) の証明

fがk-cycle (k;奇数>1)をもつとする。fのもつ最小奇

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

数(≧3)周期の周期軌道は，4°により，oscillating cycleである。以下，その cycle が(H)ⓐを満たす場合を考える；i.e. 周期が $2m+1$ で，$\varepsilon=1$。（ⓑの場合の証明も同様.） $fI_m \supset I_{m+1}$ 故，Lemma 1-3より，I_mの閉部分区間K_0で，$fK_0 = I_{m+1}$ なるものがとれる。（K_0が一意的に定まらないときは，$\max K_0$が最小になるようにK_0をえらぶ。）以下I_mの閉部分区間列 $K_1, K_2, \cdots\cdots$ を次をみたすようにとる；

$$\begin{cases} fK_{2i} = K_{2i-1} ; & \max K_{2i} \text{ が最小 } (i \geqq 1), \\ fK_{2i+1} = K_{2i} ; & \min K_{2i+1} \text{ が最大 } (i \geqq 0). \end{cases}$$



このとき K_i $(i=0,1,2\cdots)$ は互いに交わらない閉区間で，$fK_{i+1}=K_i$ を満たすから，区間列

$K_{2i+1} \to K_{2i} \to \cdots\cdots \to K_1 \to K_0 \to I_{m+1} \to I_{m+2} \to \cdots \to I_{2m} \to I_m [\![2K_{2i+1}]\!]$

に対してLemma 1-4を適用すれば，$(2m+1+2i)$-cycle が存在することがわかる。各K_iを位置関係を考えれば，その cycle が oscillating であることがわかる。$k=2m+1+2i$ なる i を考えれば，求める主張が証明できる。

$\square$

Th 1-2 (ii) の証明は省略する。 $\square$

奇数周期軌道の存在は，"snap-back repeller"の存在と等しい。詳しく述べると次の様になる；

<u>Theorem 1-6</u>　区間Jの連続写像 $f: J \to J$ について，次の2条件は同値

(i)　fが奇数(≧3)周期の周期点をもつ．

(ii)　次の(a),(b)をみたす不動点qか，或いは，(a')(b')をみたす 2-cycle $\{\underline{p}, \overline{p}\}$ が存在する；

(a)　qは不安定(unstable)不動点である；即ち，$\exists U_0 =$ a nbd of q s.t. $\forall U \subset U_0$: a nbd. of q ; $U \subset fU$ かつ $(\exists n>0)$ $f^n U \supset U_0$。

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

(b) $\exists N \geq 1$, $\exists q_1 \in f^N U_0$; $\begin{cases} q_1 \neq q, \ f q_1 = q, & \text{かつ} \\ \exists U_1 : \text{nbd of } q_1 \text{ s.t.} \begin{cases} \overline{U_1} \cap \overline{U_0} = \phi, \ U_1 \subset f^N U_0, \\ U_0 \supset \text{int } f U_1 \ni q. \end{cases} \end{cases}$

<u>NB.</u> このような q を <u>*snap-back repeller*</u> という。[M].

(a′) $f\underline{p} = \overline{p}$, $f\overline{p} = \underline{p}$ $(\underline{p} < \overline{p})$ で、2-cycle $\{\underline{p}, \overline{p}\}$ は（少くとも）外側に不安定。即ち、$\exists U_0 = \text{nbd of } \{\underline{p}, \overline{p}\}$ s.t. $\forall U \subset U_0 : \text{nbd of } \{\underline{p}, \overline{p}\}$ に対して、$f U \cap (\underline{p}, \overline{p})^c \supset U \cap (\underline{p}, \overline{p})^c$、かつ $\exists n > 0$; $f^n(U \cap (\underline{p}, \overline{p})^c)$ は $U_0 \cap (\underline{p}, \overline{p})^c$ をふくむ。

(b′) $\exists N \geq 1$, $\exists \underline{p}_1, \overline{p}_1 \in f^N(U_0 \cap (\underline{p}, \overline{p})^c)$ s.t.
$f\overline{p}_1 = \overline{p}$, $f\underline{p}_1 = \underline{p}$, $\overline{p}_1 \neq \overline{p}$, $\underline{p}_1 \neq \underline{p}$, かつ $\exists U_1 = \text{nbd of } \{\overline{p}_1, \underline{p}_1\}$ s.t.
$\overline{U_1} \cap \overline{U_0} = \phi$, $U_1 \cap (\underline{p}_1, \overline{p}_1)^c \subset f^N(U_0 \cap (\underline{p}, \overline{p})^c)$, $U_0 \supset \text{int } f U_1 \supset \{\underline{p}, \overline{p}\}$.

$\because$)

(i) $\Rightarrow$ (ii); f が奇数(≥ 3)周期点をもつとき、oscillating cycle が存在する。Th 1-2 (i) の証明で述べた様な K_i $(i = 0, 1, \cdots)$ をとる。このとき $\max K_0 \leq \max K_2 \leq \cdots \leq \min K_3 \leq \min K_1$ である。$\underline{p} \triangleq \lim_{i\to\infty} \max K_{2i}$, $\overline{p} \triangleq \lim_{i\to\infty} \min K_{2i+1}$ とおけば、$\underline{p} \leq \overline{p}$.

① $\underline{p} = \overline{p}$ ($= q$ とおく) のとき; q に十分近い点 y を考える。$y \in \exists K_i$ のとき、$f^{i+1} y \in I_{m+1}$ となり、$f^{i+1} y$ は q から十分離れる。y が K_i と K_{i+2} の間にある場合も、($fy \in K_{i+1}$) or (fy は K_{i+1} よりも q から遠いところにある) から、j が十分大なら、$f^j y$ は q から十分離れる。いずれにせよ、条件(a) がみたされ、てきとうな i について $f^i U_0 \supset I_{m+1}$ なるように $U_0 \subset I_m$ をとることができる。このとき、$f I_{2m} \supset I_m \supset U_0$, $f^{i+2m-2} U_0 \supset I_{2m}$ 故、(b) をみたす q_1 が I_{2m} の中にとることができる。

② $\underline{p} \neq \overline{p}$ のとき; $\{\underline{p}, \overline{p}\}$ が 2-cycle で、(a′)(b′) をみたすことが ① と同様にして言える。

(ii) $\Rightarrow$ (i); (a)(b) をみたす不動点 q が存在したとする。必要なら U_1 をとりなおして、$f U_1$ が q の open nbd になっているとしてよい。

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

(b)をみたすNのうち最小のものを改めてNとおく。さらに、$U \triangleq fU_1$ に対して(a)をみたすnのうち最小のものを改めてnとおく。Lemma 1-3 を何度か使えば、$\forall k \geqq 0$ に対して、次の様な閉区間族 I_j がとれる；

$$\begin{cases} q_1 \in \operatorname{int} I_0 \subset U_1, \quad I_i \triangleq f^i I_0 \ (i=1,2,\cdots,k+N+1) \text{ とするとき、} \\ q_0 \in \operatorname{int} I_1 \subset I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots \subseteq I_{k+1} = \overline{U_0}, \quad I_{k+N} = f^{N-1}\overline{U_0} \ni q_1, \\ I_{k+N+1} = f^N \overline{U_0} \supset \overline{U_1} \supset I_0 。\end{cases}$$

Lemma 1-4 より、$(k+N+1)$-周期点が存在する。kは任意故、特に、奇数周期点が存在する。

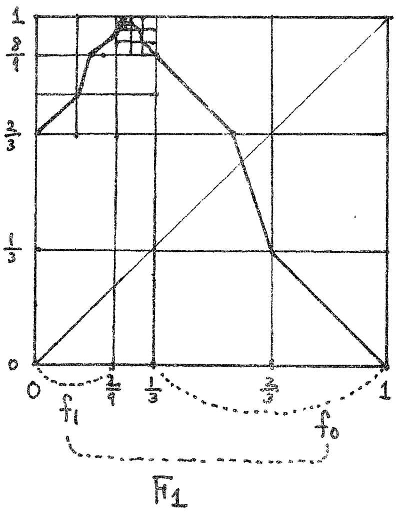
(a')(b') をみたす Ω-cycle が存在する場合も同様にして、奇数($\geqq 3$)周期点の存在が結論できる。 □

以上で Šharkovskii の定理に関する記述を終える。この節の最後に、いくつかの例を述べておくことにする。

Examples

1° (2巾周期のみの例)

$f_0 ; [\frac{1}{3}, 1] \to [1, 1]$ を



$$f_0(x) = \begin{cases} -x + \frac{11}{9} & (\frac{1}{3} \leqq x \leqq \frac{5}{9}) \\ -3x + \frac{7}{3} & (\frac{5}{9} \leqq x \leqq \frac{2}{3}) \\ -x + 1 & (\frac{2}{3} \leqq x \leqq 1) \end{cases}$$ で定義する。

f_0のグラフを$1/3$倍して、左右を反対にして、$[0, \frac{2}{9}] \times [\frac{2}{3}, 1]$ にうめこむ。こうやってできる写像を $f_1 : [0, \frac{2}{9}] \to [\frac{2}{3}, 1]$ とする。

$F_1 : [0, \frac{2}{9}] \cup [\frac{1}{3}, 1] \to [0, 1]$ を $F_1 | [0, \frac{2}{9}] = f_1$, $F_1 | [\frac{1}{3}, 1] = f_0$ によって定義する。

F_1のグラフを$1/9$倍して $[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \times [\frac{8}{9}, 1]$ にうめこんでえられる写像を F_2とする。以下同様にして、写像 F_i $(i=3,4,\cdots)$ を次の様に定める。

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

$$\begin{cases} F_i : \left[\frac{2}{9}\left(1+\frac{1}{9}+\cdots+\left(\frac{1}{9}\right)^{i-2}\right), \frac{2}{9}\left(1+\frac{1}{9}+\cdots+\left(\frac{1}{9}\right)^{i-1}\right)\right] \cup \left[\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{9^{i-1}}\right), \frac{1}{3}-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{9}+\cdots+\left(\frac{1}{9}\right)^{i-2}\right)\right] \\ \qquad \longrightarrow \left[1-\left(\frac{1}{9}\right)^{i-1}, 1\right]. \\ F_i \text{のグラフを } 9^{i-1} \text{ 倍したグラフは, } F_1 \text{ のグラフに等しい。} \end{cases}$$

このとき;

<u>claim</u> $f(x) = F_i(x)$ (if $x \in$ domain of F_i) によって $f:[0,1] \to [0,1]$ を定めれば, f は, 2巾周期点しかもたない。

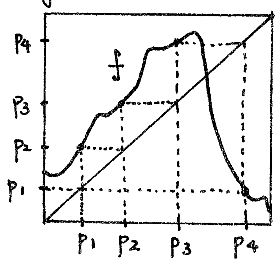
∵)

f^2 のグラフは, $[0, \frac{1}{3}]$, $[\frac{2}{3}, 1]$ 上で各々, f のグラフと相似になり, かつ, $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ 上の f の周期点は, 不動点に限ることがわかる。故に, f が $2^n \cdot l$−周期点 ($l \geqq 3$ 奇数) をもてば, f は l−周期点をもつ。ところが, f によって, 区間 $[0, \frac{7}{12}]$ は区間 $[\frac{7}{12}, 1]$ に, 区間 $[\frac{7}{12}, 1]$ は区間 $[0, \frac{7}{12}]$ にうつる。($x = \frac{7}{12}$ は f の不動点). 故に, f は奇数周期点を持ち得ず, l−周期点の存在に矛盾。 $\triangle$

<u>Remark</u> $\forall n, \forall l$ について; $\mathrm{Per}([0,1], f) \triangleq \bigcup_{n \geq 1} \mathrm{Per}([0,1], f, n) = \{k \in \mathbb{N} ; k \dashv 2^n \cdot l\}$ なる $f:[0,1] \to [0,1]$ を構成することができる。

<u>2° (昇る周期軌道)</u>

<u>def</u> k-cycle $\{p_1 < p_2 < \cdots < p_k\}$ が f の <u>昇る k-cycle</u>
$\Leftrightarrow$ $p_i = f^{i-1} p_1$ $(i = 2, 3, \cdots, k)$



(昇る4-cycle)

昇る k-cycle は, f の k-cycles の中でも, 最も複雑なものであると言うことができる。
すなわち;

<u>Proposition 1-7.</u> f が昇る k-cycle ($k \geqq 3$) を持てば, $\forall l \leqq k$ について, f は昇る l-cycle をもつ。特に, $\mathrm{Per}([0,1], f) = \mathbb{N}$。

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

∵) 或る k-cycle について，その graph（see. Th 1-1, 1-2 の証明の $4°$ と $5°$ の間の def）は，次の様になる；

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & 2 \arrow[r] & 3 \arrow[r] & \cdots\cdots \arrow[r] & k-1 \arrow[loop right] \arrow[llll, bend left] \arrow[lll, bend left] \arrow[ll, bend left] \arrow[l, dotted, bend left]
\end{tikzcd}$$

区間列 $I_{k-1} \to I_{k-l} \to I_{k-l+1} \to \cdots\cdots \to I_{k-2} \to I_{k-1}$ に対して Lemma 1-4 を適用すればよい。 $\square$

REMARK.

f が必ずしも連続でない場合にも，Šharkovskii の定理と類似のことが成立することがある。 例えば $\beta > 1$ に対して $f_\beta : [0,1] \to [0,1]$ を，$fx \equiv \beta x \pmod{\mathbb{Z}}$ で定めれば，$\mathbb{N}$ の次の様な order に関して，Šharkovskii の定理と同様のことが f_β に対して成立する；

$$2 \vdash 3 \vdash 4 \vdash 5 \vdash \cdots\cdots \vdash 1。$$

REMARK.

S^1 上の写像については，Šharkovskii の定理は必ずしも成立しない。

§1. 終.

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

§2. 実現と位相的エントロピー.

この節では, 区間の(連続)写像を, より性質の調べ易い, "シフト"に"実現"し, それを用いて, 写像の性質 --- 特に, 位相的エントロピーと呼ばれる量 --- を調べてゆく。

先ず, 次の2つの例を考える。

① $f:[0,1)\to[0,1)$ を $fx\equiv 2x \pmod{\mathbb{Z}}$ によって定義する。一方, $x\in[0,1)$ を2進展開する;

$$x = a_0/2 + a_1/2^2 + a_2/2^3 + \cdots \qquad (a_i=a_i(x)\in\{0,1\})。$$

このとき $(a_0,a_1,\cdots)$ と f とが次の様に関係付けられる;

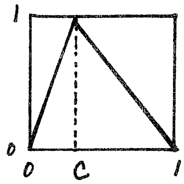
$$a_0=a_0(x)=[2x], \qquad a_n=a_n(x)=a_0(f^n x)\quad (n\geqq 1).$$

そして, $x\in[0,1)$ と, 片側無限数列 $\pi(x)\triangleq(a_0(x),a_1(x),\cdots\cdots)\in\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ とが対応付けられ, さらに,

$$\pi(fx)=(a_0(fx),a_1(fx),\cdots)=(a_1(x),a_2(x),\cdots)$$

が成立する。この意味で, $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ 上の写像 $(a_0,a_1,\cdots)\mapsto(a_1,a_2,\cdots\cdots)$ は, f を"実現"していると見なせる。

② $f:[0,1]\to[0,1]$ を, $fx=\begin{cases} x/c & (0\leqq x\leqq c)\\ (x-1)/(c-1) & (c\leqq x\leqq 1)\end{cases}$



で定義する。【$0<c<1$】

このとき $x\in[0,1]$ は, f に対応して次の様に展開される;

$$x=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\prod_{i=0}^{n-1}(c-a_i) \qquad (\text{但 } \textstyle\sum_{\phi}=0,\ \prod_{\phi}=1 \text{ と約束する})。$$

ここで

$$a_0=a_0(x)\triangleq \begin{cases}0 & (0\leqq x\leqq c)\\ 1 & (c<x\leqq 1)\end{cases}, \qquad a_n=a_n(x)\triangleq a_0(f^n x)\quad (n\geqq 1).$$

∵) $fx=(x-a_0(x))/(c-a_0(x))$ と書けるから, $f^n x=(f^{n-1}x-a_{n-1}(x))/(c-a_{n-1}(x))$.
これを順次使うと; $f^n x = a_0(x)+a_1(x)(c-a_0(x))+\cdots+a_{n-1}(x)(c-a_{n-2}(x))\cdots(c-a_0(x))$
$+(f^n x)(c-a_{n-1}(x))\cdots(c-a_0(x))$。最後の項は $n\to\infty$ のとき 0 に収束するから, 上の展開がo.k. △

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

この展開によって，$x \in [0,1]$ と $(a_0(x), a_1(x), \cdots) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ とが対応し，①と同様なことが言える。故に，これも亦，"実現"と見なすことができる。

以上の例を念頭におきつつ，一般の場合を考えてゆく。まず，写像を"実現する場"として shift を定義する。

def 有限集合 A (with discrete topology) を以下固定する。A の元を alphabet と呼ぶ。A の元の（正方向への）片側無限数列全体 $A^{\mathbb{N}} \triangleq \{ \omega = (\omega_0, \omega_1, \cdots) ; \omega_i \in A \}$ を考える。（$A^{\mathbb{N}}$ には，A の topology の product topology を入れておく。）$A^{\mathbb{N}}$ の元 ω の第 i 成分を，ω_i 或るいは $\omega(i)$ で表わす。さらに，$A^{\mathbb{N}}$ 上の連続な（$\#A$-to-one）写像 $\sigma : A^{\mathbb{N}} \to A^{\mathbb{N}}$ を，

$(\sigma\omega)(i) = \omega(i+1)$

によって定義して，(full) shift と呼ぶ。

def $A^{\mathbb{N}}$ の部分集合 X が σ-不変（σ-invariant）
$\Leftrightarrow \quad \sigma X = X$.

def $A^{\mathbb{N}}$ の σ-invariant closed subset X について，σ の X への制限 $\sigma|X$ を再び σ と書くことにして，pair (X, σ) を shift, symbolic dynamics, subshift etc. と呼ぶ。【単に X を，そう呼ぶこともある。】

def $\omega \in A^{\mathbb{N}}$ について，

$\omega(I) \triangleq (\omega(i))_{i \in I} \quad (I \subset \mathbb{R})$ とおく。とくに，

$\omega[0,n) \triangleq (\omega(0), \omega(1), \cdots, \omega(n-1))$ を長さ n の単語（word）という。word u に対して，$|u|$ で，その長さを表わすことにし，u できまる cylinder set $[u]$ を次の様におく；

$[u] \triangleq \{ \omega \in A^{\mathbb{N}} ; (\omega(0), \omega(1), \cdots, \omega(|u|-1)) = u \}$。

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

NB cylinder set は $A^{\mathbb{N}}$ の clopen (= closed & open) subset である。

次に、位相的エントロピーを一般の位相力学系に対して定義する。

def compact metric space X と、それ上の連続写像 $T: X \to X$ に対して、pair (X, T) を 位相力学系 (topological dynamical system) と言う。

def (位相的エントロピー)
(X, T) を位相力学系とする。
① X の open cover α に対して、α に関する (X, T) の位相的エントロピー を次式で定義する；

$$ent(X, T, \alpha) \triangleq \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log N\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\alpha\right) \qquad \text{---(1)}.$$

但 ◎ log は、2 を底とするものとする。(以下、これに対応して、$\exp x = 2^x$ とする。)
◎ open covers $\alpha = \{U_i\}_i$, $\beta = \{V_j\}_j$ に対して；
$\alpha \vee \beta \triangleq \{U_i \cap V_j\}_{i,j}$ (帰納的に $\bigvee_{k=1}^{n} \alpha_k$ が定義できる).
$T^{-1}\alpha \triangleq \{T^{-1}U_i\}_i$
$N(\alpha) \triangleq \min\{\#\beta \,;\, \beta \text{ は } \alpha \text{ の subcover}\}$.

Remark. $N(\alpha \vee \beta) \leqq N(\alpha) \cdot N(\beta)$ 故、(1)式の limit が存在し、かつそれは inf に等しい。特に、$< \infty$。

$$ent(X, T, \alpha) = \inf_{n} \frac{1}{n} \log N\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\alpha\right) \qquad \text{---(2)}.$$

② (X, T) の【或るいは、単に、T の】位相的エントロピー (topological entropy) を次式で定義する；

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

$$\mathrm{ent}(X,T) \triangleq \sup\{\mathrm{ent}(X,T,\alpha)\ ;\ \alpha = \text{open cover of } X\} \quad ---(3).$$

__Remark.__ (X,T)の位相的エントロピーを、$\mathrm{ent}(T)$, $h_{top}(X,T)$, $h_{top}(T)$, $h(T)$, $h(X,T)$ 等と書くこともある。

__Remark.__ X は compact 故，(3)式の sup は __finite__ open cover についてのみとればよい。

__def__ 位相力学系 (X_i, T_i) $(i=1,2)$ が __同型__ (isomorphic)，或るいは，__(位相的) 共役__ ((topologically) conjugate)
$\Longleftrightarrow$ $\exists\varphi : X_1 \to X_2$: homeo. s.t. $\varphi\circ T_1 = T_2\circ\varphi$。

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{\varphi} & X_2 \\ T_1\downarrow & \circlearrowright & \downarrow T_2 \\ X_1 & \xrightarrow[\varphi]{} & X_2 \end{array}.$$

__Theorem 2-1.__ 位相的エントロピーは，同型に関する不変量。即ち，(X_1, T_1) と (X_2, T_2) とが同型ならば，$\mathrm{ent}(X_1,T_1) = \mathrm{ent}(X_2,T_2)$。

∵) 定義より明らかである。 □

次に symbolic dynamics (X,σ) の位相的エントロピーについて考える。

__def__ symbolic dynamics (X,σ) に対して，__canonical cover__ (或るいは，__canonical partition__) と呼ばれる X の open cover (これは，同時に，partition ともなっている) α_0 を次で定義する；

$$\alpha_0 \triangleq \{[a]\cap X\ ;\ a\in A\}.$$

__Theorem 2-2.__ symbolic dynamics (X,σ) について，

$$\mathrm{ent}(X,\sigma) = \mathrm{ent}(X,\sigma,\alpha_0)\ 。$$

∵) X には product topology (の induced topology) を入れたのだから，Lebesgue の covering lemma を用いれば，$\forall\alpha$ = open cover of X に対して，$\exists N;\ \bigvee_{i=0}^{N-1}\sigma^{-i}\alpha_0$ は α の細分。 (但，open covers β, γ に対して，β が γ の細分 $\Leftrightarrow$ $\beta = \beta\vee\gamma$ $\Leftrightarrow$ $\forall B\in\beta$; $\exists C\in\gamma$: $B\subset C$)。 さて，ent の定義より明らかに，

β が γ の細分 $\Rightarrow$ $\mathrm{ent}(X,\sigma,\beta) \geqq \mathrm{ent}(X,\sigma,\gamma)$。

故に，

$$\begin{aligned}
\mathrm{ent}(X,\sigma,\alpha) &\leqq \mathrm{ent}(X,\sigma,\bigvee_{i=0}^{N-1}\sigma^{-i}\alpha_0) \\
&= \lim \frac{1}{n}\log N\left(\bigvee_{j=0}^{n-1}\sigma^{-j}\left(\bigvee_{i=0}^{N-1}\sigma^{-i}\alpha_0\right)\right) \\
&= \lim \frac{1}{n}\log N\left(\bigvee_{k=0}^{n+N-1}\sigma^{-k}\alpha_0\right) \\
&= \lim \frac{n+N}{n}\cdot\frac{1}{n+N}\log N\left(\bigvee_{k=0}^{n+N-1}\sigma^{-k}\alpha_0\right) \\
&= \mathrm{ent}(X,\sigma,\alpha_0)。
\end{aligned}$$

α は任意故， $\mathrm{ent}(X,\sigma) \leqq \mathrm{ent}(X,\sigma,\alpha_0)$

逆の不等式は，定義より明白。 □

NB 一般に，top. dyn. sys. (X, φ) について，X の open cover α が $\bigvee_{i=0}^{n-1}\varphi^{-i}\alpha \longrightarrow$ (各点分割) $(n\to\infty)$ ならば，$\mathrm{ent}(X,\varphi) = \mathrm{ent}(X,\varphi,\alpha)$ が成立する，という定理がある。 上は，この定理の特殊な場合に他ならない。

def subshift X について，

$W_n(X) \triangleq \{\omega[0,n)\ ;\ \omega\in X\}$

Remark 2-3. $\#W_n(X) = N(\bigvee_{i=0}^{n-1}\sigma^{-i}\alpha_0)$

[e.g. $X = A^{\mathbb{N}}$ ならば，$W_n(X) = A^{\{0,1,\cdots,n-1\}}$. $\therefore\ \#W_n(X) = (\#A)^n$.
故に，Th 2-2 より，$\mathrm{ent}(A^{\mathbb{N}},\sigma) = \log\#A$.]

subshift のうちでも特に重要なのが，次に定義する Markov subshift である。

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

def　$p \in \mathbb{N}$ を fix する。A^{p+1} の部分集合 W に対して，

$$\mathcal{M}(W) \triangleq \{\omega \in A^{\mathbb{N}} ; (\omega(n), \omega(n+1), \cdots, \omega(n+p)) \in W \text{ for } \forall n \geq 0\}$$

とおく。このとき $\mathcal{M}(W)$ は σ-invariant closed subset of $A^{\mathbb{N}}$.
subshift $(\mathcal{M}(W), \sigma)$ を，W の定める p重 Markov shift という。
一般に，subshift (X, σ) が，$X = \mathcal{M}(W_{p+1}(X))$ をみたすとき，
p重 Markov shift という。とくに $p=1$ のとき，simple Markov shift という。

def　$W \subset A \times A$ の定める simple Markov shift に対して，次の様な $\#A \times \#A$ - 行列 M を対応させることができる；

$$M = (M_{ab})_{a,b \in A} ; \qquad M_{ab} = \begin{cases} 1 & \text{if } (a,b) \in W, \\ 0 & \text{otherwise}. \end{cases}$$

逆に，0 または 1 を成分とする任意の正方行列から，simple Markov shift を定めることができる。

この様な行列を，simple Markov shift の構造行列 (structure matrix) という。

Proposition 2-4.　p重 Markov shift ($\forall p \geq 2$) は simple Markov shift とみなせる。即ち，p重 Markov shift は，ある simple Markov shift と topologically conjugate.

$\because$) $(\mathcal{M}(W), \sigma)$ を p重 Markov shift とする。$A^p = A^{\{0,1,\cdots,p-1\}}$ を alphabet とする simple Markov shift $(\mathcal{M}(W'), \sigma)$ を次の様に定義する。

先ず，$A^p \times A^p$ の部分集合 W' を；$(u_0, \cdots, u_{p-1}), (v_0, \cdots, v_{p-1}) \in A^p$ について，

$$((u_0, \cdots, u_{p-1}), (v_0, \cdots, v_{p-1})) \in W' \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = v_0, u_2 = v_1, \cdots, u_{p-1} = v_{p-2}, \\ \text{かつ} \\ (u_0, u_1, \cdots, u_{p-1}, v_{p-1}) \in W \end{cases}$$

によって定義する。このとき，
$((A^p)^{\mathbb{N}}, \sigma)$ の subshift $(\mathcal{M}(W'), \sigma)$ は simple Markov shift。

さらに、写像

$$\mathcal{M}(W) \ni (u_0, u_1, \cdots\cdots) \longmapsto$$

$$((u_0, u_1, \cdots, u_{p-1}), (u_1, u_2, \cdots, u_p), (u_2, u_3, \cdots, u_{p-1}), \cdots) \in \mathcal{M}(W^p)$$

が、$(\mathcal{M}(W), \sigma)$ と $(\mathcal{M}(W^p), \sigma)$ との間の topological conjugacy を与える。 □

<u>Proposition 2-5.</u> M を structure matrix とする simple Markov shift (X, σ) に対して、

$$\# W_n(X) = (M^{n-1}\mathbb{1}, \mathbb{1}) = \sum_{a,b} (M^{n-1})_{ab} \text{ 。}$$

但、$(\ ,\ )$ は $\mathbb{R}^{\# A}$ のふつうの内積、M^{n-1} は行列としての、M の $(n-1)$ 乗、$(\ )_{ab}$ は行列の (a,b)-成分。$\mathbb{1} = {}^t(1,1,1,\cdots,1)$.

∵) 明らかであろう。 □

<u>Proposition 2-6.</u> M を structure matrix とする simple Markov shift (X, σ) について、

$$\# \mathrm{Fix}\,(X, \sigma^n) = \mathrm{Tr}\, M^n \qquad (M^n \text{のトレース})\text{。}$$

∵) $\omega \in X$ について、

$$\omega \in \mathrm{Fix}\,(X, \sigma^n) \iff \omega(l+n) = \omega(l) \quad (\forall l = 0, 1, 2, \cdots)$$

故に、

$$\# \mathrm{Fix}\,(X, \sigma^n) = \# \{ \omega[0, n+1) \,;\, \omega \in X,\ \omega(0) = \omega(n) \} \text{。}$$

このことから、主張は明白。 □

simple Markov shift の位相的エントロピーは、簡単に表わすことができる。即ち、

<u>Theorem 2-7.</u> M を structure matrix とする shift (X, σ) について、

$$\mathrm{ent}\,(X, \sigma) = \log \lambda .$$

但、λ は M の Perron-Frobenius root.（$\lambda \leqq 1$ のとき、$\log \lambda = 0$ と約束する).

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

<u>Remark.</u> 念のため <u>Perron-Frobenius の定理</u>を述べておく。証明は，[G],[岩],[杉] etc. を参照されたい。

1° 非負正方行列 $A=(a_{ij})_{i,j=1,2,\cdots,n}$ $(\forall i,j;\ a_{ij}\geqq 0)$ には，非負（とくに実数の）固有値 α が存在し，A のいかなる固有値 β に対しても，$|\beta|\leqq\alpha$。（α を A の Perron-Frobenius root という。）

2° とくに，A が irreducible (i.e. $\forall i,j;\ \exists N=N(i,j)>0;\ (A^N)_{ij}>0$) のとき，$\alpha\gneqq 0$。さらに α に対応する固有ベクトルとして，各成分が全て正なるものがとれる。（α は simple な固有値）

3° とくに，$\exists N\geqq 1;\ A^N>0$ (i.e. $\forall i,j;\ (A^N)_{ij}>0$) のとき，<u>$\alpha$ 以外の</u>任意の固有値 β について，$|\beta|\lneqq\alpha$。

<u>Th.2-7 の証明</u>.

2-2, 2-3, 2-5 により，

$$\mathrm{ent}(X,\sigma)=\lim\frac{1}{n}\log(M^{n-1}\mathbb{1},\mathbb{1})=\lim\frac{1}{n}\log\sum_{a,b}(M^{n-1})_{a,b}\ .$$

一方，M は，【M を 1 次変換の，ある基底に関する表現だと思った時，基底の各元の順序を適当に入れかえてできる基底に関して】次の様なかたちをしていると思ってよい；(see [G],[岩],[杉] etc.)

$$\begin{pmatrix} M_1 & & & \\ & M_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ * & & & M_s \end{pmatrix}$$

【各 M_i は正方行列で，irreducible か，零行列】

このとき，

$$\begin{cases}(M\text{ の Perron-Frobenius root})=\max\limits_i\,(M_i\text{ の Perron-Frobenius root}),\\ \lim\frac{1}{n}\log(M^{n-1}\mathbb{1},\mathbb{1})=\max\limits_i\,\lim\frac{1}{n}\log(M_i^{n-1}\mathbb{1},\mathbb{1})\ .\end{cases}$$

故に，M 自身が irreducible のときを考えれば十分。このとき，M の Perron-Frobenius root $\alpha>0$ に対する正の固有ベクトルを $x={}^t(x_1,\cdots,x_s)$ とする；$Mx=\alpha x$。$\therefore\ \sum_b(M^{n-1})_{ab}x_b=x_a\cdot\lambda^{n-1}$。$\max x_i\equiv\overline{x}>0$，$\min x_i\equiv\underline{x}>0$ とおくと，$\sum_{a,b}(M^{n-1})_{ab}\underline{x}\leqq\sum_{a,b}(M^{n-1})_{ab}x_b\leqq\sum_{a,b}(M^{n-1})_{ab}\overline{x}$。$\lim\frac{1}{n}\log$ を施せば，主張がえられる。 □

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

以上が，"表現の場"としてのshiftの話であった。次に，区間上の力学系を，如何にしてshiftに表現してゆくか？について述べる。

以下，$f: J \to J$ を，閉区間 $J=[0,1]$ 上の連続写像とし，次の仮定をみたすものとする；

<u>仮定</u>　$0={}^{\exists}c_0 < {}^{\exists}c_1 < {}^{\exists}c_2 < \cdots < {}^{\exists}c_\ell = 1$. s.t. $\forall i$ について；
$f|I_i$ （但 $I_i \triangleq [c_{i-1}, c_i]$）は単調非減少か，単調非増加。
さらに，ℓ は，この仮定をみたすもののうち最小なものとする。

<u>def</u>　上の様な ℓ を，$lap(f)$ と書き，f の <u>lap number</u> という。また，各 $I_i = [c_{i-1}, c_i]$ のことを <u>lap interval</u> という。
<u>NB</u>　lap interval のとり方は一意的には定まらない。

<u>def</u>　$x \in J$ について，$x \in \mathrm{int}\, I_a$ （$1 \leqq a \leqq \ell$）のとき $a_0(x) = a$ とおき，さらに，$a_n(x) \triangleq a_0(f^n x)$ （$n \geqq 1$）とおく。
<u>NB</u>　$f^n x \in \{c_0, c_1, \cdots, c_\ell\}$ のとき，$a_n(x)$ は定義されない。

<u>def</u>　$\forall n \geqq 0$ について $a_n(x)$ が定義できる様な x 全体を J^0 とする。即ち，

$$J^0 \triangleq J \setminus \bigcup_{n \geqq 0} f^{-n}(\{c_0, c_1, \cdots, c_\ell\})$$

<u>def</u>　$\pi = \pi_f : J^0 \longrightarrow A^{\mathbb{N}}$ を，

$$\pi(x) \triangleq (a_0(x), a_1(x), a_2(x), \cdots\cdots)$$

で定義し，その像の（$A^{\mathbb{N}}$ における）閉包を $X = X_f$ とおく；

$$X = X_f \triangleq \overline{\pi(J^0)}.$$

<u>def</u>　X_f 上に次の様な order $\prec = \prec_f$ を入れる；

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

$\omega \prec \omega'$

$\Leftrightarrow$ (i) $\omega = \omega'$; 或るいは.

(ii) $\exists n \geq 0$; $\begin{cases} \omega(i) = \omega'(i) \quad (0 \leq {}^\forall i < n), \text{ かつ,} \\ \begin{cases} \varepsilon(\omega(0)\omega(1)\cdots\omega(n-1)) > 0 \text{ のとき, } \omega(n) < \omega'(n). \\ \quad '' \qquad\qquad '' \qquad < 0 \text{ のとき } \omega(n) > \omega'(n). \end{cases} \end{cases}$

但, $a \in A$ について, $f|I_a$ が単調非減少のとき $\varepsilon(a) = 1$, $f|I_a$ が単調非増加のとき $\varepsilon(a) = -1$ によって $\varepsilon(\cdot)$ を定義し, さらに,

$$\varepsilon(a_0 a_1 \cdots a_{n-1}) \triangleq \varepsilon(a_0)\cdot\varepsilon(a_1)\cdots\varepsilon(a_{n-1})$$

とおいた。

即ち, $I_{a_0 a_1 \cdots a_{n-1}} \triangleq \bigcap_{i=0}^{n-1} f^{-i}(I_{a_i})$ とおくとき;

$\begin{cases} \varepsilon(a_0 a_1 \cdots a_{n-1}) > 0 \Leftrightarrow f^n \text{ が } I_{a_1 a_2 \cdots a_{n-1}} \text{ 上, 単調非減少。} \\ \quad '' \qquad < 0 \Leftrightarrow \quad '' \qquad '' \qquad \text{単調非増加。} \end{cases}$

Remark 2-8. $\pi_f : J^0 \longrightarrow X_f$ は, J^0 のふつうの order $\leq$ と, X_f 上の order $\prec_f$ とに関して order preserving である; 即ち,

$x, x' \in J_0$, $x \leq x'$ (resp. $x \lneqq x'$) $\Longrightarrow \pi x \prec \pi x'$ (resp. $\pi x \precneqq \pi x'$)。

特に. X_f は. $\pi_f(J^0)$ を order $\prec$ に関して completion したものと一致する。

次に, $\pi = \pi_f$ の"逆写像"と言うべきものを考えたい。そのために, 次の定義から始める。

def $\omega \in X_f$ に対して, $R(\omega) \triangleq \bigcap_{n=0}^{\infty} f^{-n}(I_{\omega(n)})$.

Proposition 2-9. (i) ${}^\forall \omega \in X_f$; $R(\omega) \neq \phi$。さらに. $R(\omega)$ は, J の閉部分区間か, 或るいは. 1点のみからなる集合である。

(ii) $\omega \prec \omega' \Rightarrow \max R(\omega) \leq \min R(\omega')$

(iii) $J = \bigcup_{\omega \in X_f} R(\omega)$.

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

∵)

(i); $X_f = \overline{\pi_f(J^\circ)}$ 故, $\forall \omega \in X_f$ に対して次が成立する;
$\forall n \geqq 0$; $\exists x_n \in J^\circ$: $\omega[0,n) = \pi(x_n)[0,n)$.
故に, $R(\omega[0,n)) \triangleq \bigcap_{i=0}^{n-1} f^{-i} I_{\omega(i)}$ は, Jの, 空でない閉部分区間で, 明らかに, $R(\omega[0,1)) \supseteqq R(\omega[0,2)) \supseteqq R(\omega[0,3)) \supseteqq \cdots\cdots$。
有限交叉性により, $R(\omega) = \bigcap_{n\geq 1}^{\infty} R(\omega[0,n)) \neq \phi$. これが閉部分区間か1点のみになるのは明らか。

(ii); 明らか。

(iii); $\forall x \in J$ について, $\exists \omega \in X_f$: $x \in R(\omega)$ を言えばよい。
$x \in J^\circ$ の場合, $x \in R(\pi(x))$ 故, $\omega = \pi(x)$ が上をみたす。
$x \in J \setminus J^\circ$ の場合を考える。$f^n x \in \{c_0, c_1, \cdots, c_l\}$ なる最小の n をとると, $x \in \bigcap_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\mathrm{Int}\, I_{a_i(x)})$。 $\bigcap_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\mathrm{Int}\, I_{a_i(x)})$ と, x をふくむ $\bigcup_{i\geqq n} f^{-i}(\{c_0,\cdots,c_l\})$ の連結成分との infinimum を y とする。
このとき, 十分小さな $\forall \varepsilon > 0$ に対して, $y-\varepsilon \in J^\circ$, かつ $\pi(y-\varepsilon)[0,n) = \pi(x)[0,n)$。 以上により, $\omega \triangleq \sup_{\varepsilon>0} \pi(y-\varepsilon)$ とすれば, この $\omega \in X_f$ が求める条件をみたす。 □

def $X^\circ = X_f^\circ \triangleq \{\omega \in X_f ; \# R(\omega) = 1\}$ とおき, $P = P_f : X_f^\circ \to J$ を, $\{P(\omega)\} = R(\omega)$ によって定義する。

Proposition 2-10. (i) $X_f \setminus X_f^\circ$ は高々可算集合。
(ii) $P : X_f^\circ \longrightarrow J$ は連続写像。

∵) (i) Baire の定理より O.K.
(ii) P は X_f の order $<$ と, J の order $\leqq$ とに関して単調 (P.2-9.(iii)) 故, 連続性は明白。 □

以上で, (J, f) を (X_f, σ) で"実現"することができた。
これらの位相的エントロピーの間には, 次の関係が成立する。

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

Theorem 2-11.

(i) $\mathrm{ent}(X_f, \sigma) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathrm{lap}(f^n)$,

(ii) $\mathrm{ent}(J, f) = \mathrm{ent}(X_f, \sigma)$。

∵)

(i); $\mathrm{lap}(f^n) = \# W_n(X_f)$ 故, 2-2, 2-3 より明らか。

(ii); [$\leqq$ の証明]. J の任意の open cover $\mathcal{U}$ に対して, $\mathcal{U}_a \triangleq \{U \in \mathcal{U};\ U \cap I_a \neq \phi\}$ $(a \in A)$ とおく。 $\forall a_0 a_1 \cdots a_{n-1} \in W_n(X_f)$ について, f^m は $I_{a_0 a_1 \cdots a_{n-1}}$ 上単調 $(1 \leqq \forall m \leqq n)$ 故, $I_{a_0 a_1 \cdots a_{n-1}}$ は高々 $\prod_{m=0}^{n-1}(\#\mathcal{U}_{a_m} + 1)$ 個の, $\bigvee_{m=0}^{n-1} f^{-m}\mathcal{U}$ の元によって覆うことができる。 故に, $k \triangleq \max\{\#\mathcal{U}_a + 1;\ a \in A\}$ とおけば,

$$N\left(\bigvee_{m=0}^{n-1} f^{-m}\mathcal{U}\right) \leqq k \cdot n \cdot \# W_n(X_f).$$

故に,

$$\begin{aligned}\mathrm{ent}(J, f, \mathcal{U}) &= \lim \frac{1}{n} \log N\left(\bigvee_{m=0}^{n-1} f^{-m}\mathcal{U}\right)\\ &\leqq \lim \frac{1}{n} \log \# W_n(X_f)\\ &= \mathrm{ent}(X_f, \sigma)。\end{aligned}$$

[$\geqq$ の証明] 証明には Kolmogorov - Sinai invariant $h_\mu(\cdot)$ を使う。定義や性質については, 最終章 (Appendix) を参照されたい。

μ を (X_f, σ) の maximal entropy を attain する σ-invariant measure とする;

$$h_\mu(X_f, \sigma) = \mathrm{ent}(X_f, \sigma) \qquad (\text{see A-8}).$$

$\mathrm{ent}(X_f, \sigma) \gneqq 0$ のとき, $X_f \setminus X_f^\circ$ が高々可算集合故, $\mathrm{supp}\,\mu \subset X_f^\circ$. P は X_f° 上 injective 故, $\mathrm{ent}(J, f) \geqq h_{P_*\mu}(J, f) = h_\mu(X_f, \sigma) = \mathrm{ent}(X_f, \sigma)$。

$\mathrm{ent}(X_f, \sigma) = 0$ のときは, $\geqq$ は明らか。

$\square$

§2.終.

§3. Fredholm 行列式と sky-scraper.

shift (X,σ) の topological entropy は, X が Markov のときには, その structure matrix の Perron-Frobenius root を用いて表わされた。この節では, より一般の shift について, ある種の zeta function を用いて topological entropy を求める。

def shift (X,σ) について

$$D_X(z) \triangleq \exp\left\{-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}\cdot \#\mathrm{Fix}(X,\sigma^n)\right\} \qquad (z\in\mathbb{C}).$$

Theorem 3-1.

(i) 任意の shift (X,σ) に対して

$$D_X(z) = \prod_{m=1}^{\infty}(1-z^m)^{\#\mathrm{P}_m(X)}.$$

(ii) M を structure Matrix とする Markov shift (X,σ) について,

$\det(I - zM) = D_X(z)$. (I は単位行列)。

とくに, $\exp\{-\mathrm{ent}(X,\sigma)\}$ は $D_X(z)$ の最小非負零点。

∵) (i) $n\cdot\#\mathrm{P}_n(X) = \#\mathrm{Per}(X,n)$, $\#\mathrm{Fix}(X,\sigma^n) = \sum_{m|n}\#\mathrm{Per}(X,\sigma^m)$ だから,

$$\exp\left\{-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}\#\mathrm{Fix}(X,\sigma^n)\right\} = \exp\left\{-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}\sum_{m|n} m\cdot\#\mathrm{P}_m(X)\right\}$$

$$= \exp\left\{-\sum_{m=1}^{\infty}\#\mathrm{P}_m(X)\cdot\sum_{l=1}^{\infty}\frac{z^{ml}}{l}\right\} = \exp\left\{\sum_{m=1}^{\infty}\#\mathrm{P}_m(X)\cdot\log(1-z^m)\right\}$$

$$= \prod_{m=1}^{\infty}(1-z^m)^{\#\mathrm{P}_m(X)}.$$

(ii) 一般に, 行列 A について, $\det(\exp A) = \exp(\mathrm{Tr}.A)$ であるから.

$$\det(I-zM) = \det(\exp(\log(I-zM))) = \exp\mathrm{Tr}(\log(I-zM))$$

$$= \exp\mathrm{Tr}\left(\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{(zM)^n}{n}\right) = \exp\left\{-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}\cdot\mathrm{Tr}\,M^n\right\}.$$

ところが. $\#\mathrm{Fix}(X,\sigma^n) = \mathrm{Tr}\,M^n$ (2-6) 故, $\det(I-zM) = D_X(z)$ が証明される。

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

さらに，

λ が $D_X(z)$ の最小非負零点

$\Leftrightarrow$ λ が $1/D_X(z)$ の最大収束半径

$\Leftrightarrow$ $1/\lambda = \overline{\lim} \sqrt[n]{\#\mathrm{Fix}(X,\sigma^n)/n} = \overline{\lim} \sqrt[n]{\#\mathrm{Fix}(X,\sigma^n)} = \overline{\lim} \sqrt[n]{\mathrm{Tr}\, M^n}$

[ところが，$\overline{\lim} \sqrt[n]{\mathrm{Tr}\, M^n}$ は M の Perron-Frobenius root 故，2-7より]

$\Leftrightarrow$ $1/\lambda = \exp(\mathrm{ent}(X,\sigma))$

$\Leftrightarrow$ $\lambda = \exp(-\mathrm{ent}(X,\sigma))$. $\square$

<u>def</u> topological dynamical system (Y,σ) と，関数 $\theta : Y \to \mathbb{N}^* = \{1,2,3,\cdots\}$ に対して，次の様にして得られる $(Y^\theta, \sigma^\theta)$ を，

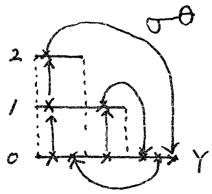
(Y,σ) を <u>base dynamics</u>
θ を <u>ceiling function</u>
とする．

<u>tower</u>, <u>sky-scraper</u>, <u>special endomorphism</u> 等という；

$Y^\theta \triangleq \{(i,\xi) \in \mathbb{N} \times Y ;\ \xi \in Y,\ i \in \{0,1,\cdots,\theta(\xi)-1\}.\}$,

σ^θ は，Y^θ 上に次の様にして定義される map：

$$\sigma^\theta(i,\xi) = \begin{cases} (i+1,\xi) & \text{if } i < \theta(\xi)-1 \\ (0,\sigma\xi) & \text{if } i = \theta(\xi)-1 . \end{cases}$$



tower の"逆操作"として，次が考えられる；

<u>def</u> topological dynamical system (X,σ) と，X の subset E について，次の様にして得られる (X_E, σ_E) を，E上への <u>derived dynamics</u> と言う；

$X_E \triangleq \{\omega \in E ;\ \#\{i ;\ \sigma^i \omega \in E\} = \infty\}$

<u>NB</u> σ が invertible (i.e. σ が homeo.) のとき，

$X_E \triangleq \{\omega \in E ;\ \#\{i \geq 0 : \sigma^i\omega \in E\} = \#\{i < 0 ; \sigma^i \omega \in E\} = \infty\}$

とする。

$\omega \in X_E$ について，$H_E(\omega) \triangleq \min\{i > 0 ;\ \sigma^i \omega \in E\}$ とおき，

$\sigma_E : X_E \to X_E$ を，$\sigma_E(\omega) = \sigma^{H_E(\omega)}(\omega)$ で定義する。

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

<u>Remark</u>. σ^θ, σ_E は連続になるとは限らない。

以下話をすすめてゆくには, two-sided shift を考えた方がよい。

<u>def</u> $A^{\mathbb{Z}} \triangleq \{\omega = (\cdots, \omega(-1), \omega(0), \omega(1), \cdots) \ ; \ \omega(i) \in A\}$ 上に, $(\sigma\omega)(i) = \omega(i+1)$ で与えられる shift $\sigma ; A^{\mathbb{Z}} \to A^{\mathbb{Z}}$ を考える。$A^{\mathbb{Z}}$ の σ-invariant closed subset X について, topological dynamical system (X, σ) 【$\sigma = \sigma|X$】 を, <u>両側シフト</u> (two-sided shift) という。【two-sided shift では, σ は homeo. である】

仮定 以下, この節では, <u>two-sided</u> shift のみを考える。

<u>Remark.</u> (one-sided) shift と, two-sided shift とは, 次の様に対応がつけられる;

one-sided shift (X, σ) に対して, two-sided shift $(\tilde{X}, \sigma)$ が,

$\tilde{X} \triangleq \{\omega \in A^{\mathbb{Z}} \ ; \ (\omega(n), \omega(n+1), \cdots) \in X \quad (\forall n \in \mathbb{Z})\}$

によって定義される。逆に, two-sided shift $(\tilde{X}, \sigma)$ に対して one-sided shift (X, σ) が

$X \triangleq \{(\omega(0), \omega(1), \cdots\cdots) \ ; \ \omega \in \tilde{X}\}$

によって定義される。

この時, $\# W_n(X) = \# W_n(\tilde{X})$ 故, $\mathrm{ent}(X, \sigma) = \mathrm{ent}(\tilde{X}, \sigma)$。

<u>def</u> shift (X, σ) について,

$W(X) \triangleq \bigcup_n W_n(X)$,

<u>def</u> shift (X, σ) について, $B \subset W(X)$ が次の条件をみたすとき, B を (X, σ) の <u>orbit base</u> という;

(i) $\forall \omega \in X$ に対して, $(\cdots, b_{-1}, b_0, b_1, \cdots) \in B^{\mathbb{Z}}$ および $0 \leq i < |b_0|$ なる整数 i が一意的にきまり, 下の ☆ をみたす;

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

$\star \begin{cases} \omega = \cdots b_{-1} b_0 b_1 \cdots\cdots \text{（ブロック } b_i \text{ を並べてできる sequence）} \\ \text{但，} \quad b_0 = (c_0, c_1, \cdots, c_{|b_0|-1}) \text{ とするとき，} \quad \omega(0) = c_i \end{cases}$

かつ，

(ii) $\forall b_j \in B$ $(j \in \mathbb{Z})$, $\forall i \in [0, |b_0|) \cap \mathbb{Z}$ について，☆によってきまる sequence ω は，X の元である。

この2条件は次と同値である；

$Y = B^{\mathbb{Z}}$ とし，$\theta : Y \to \mathbb{N}^+$ を $\theta(\eta) = |b_0|$ $(\eta = (\cdots, b_{-1}, b_0, b_1, \cdots))$ によって定めるとき，次の map $\varphi : Y^\theta \to X$ が bijective である。

$\varphi(i, \eta) = \sigma^i(\cdots b_{-1} b_0 b_1 \cdots)$ 但 $\eta = (\cdots, b_{-1}, b_0, b_1, \cdots)$ であり，右辺の sequence $(\cdots b_{-1} b_0 b_1 \cdots)$ の第0座標は，b_0 の最初の alphabet。

注 今の場合，$Y = B^{\mathbb{Z}}$ が totally disconnected 故，θ は連続で，$(Y^\theta, \sigma^\theta)$ は topological dynamical system となる。さらに φ は，$(Y^\theta, \sigma^\theta)$ と，(X, σ) との間の topological conjugacy を与える。

orbit base をもつ shift については，$D_X(z)$ が簡単に計算できる。即ち；

<u>Theorem 3-2.</u> shift (X, σ) が orbit base B をもつとき，

$$D_X(z) = 1 - \sum_{b \in B} z^{|b|}.$$

∵) $\omega = \varphi(i, (\cdots, b_{-1}, b_0, b_1, \cdots)) = \sigma^i(\cdots b_{-1} b_0 b_1 \cdots)$ について，

$\omega \in \mathrm{Fix}(X, \sigma^n) \Leftrightarrow \exists k ; \begin{cases} |b_0| + |b_1| + \cdots + |b_{k-1}| = n, \text{ かつ.} \\ b_{m+k} = b_m \quad (\forall m \in \mathbb{Z}) \end{cases}$

であることに注意すれば，$i \in [0, |b_0|) \cap \mathbb{Z}$（$|b_0|$ コの値を取り得る）故，

$$\# \mathrm{Fix}(X, \sigma^n) = \sum_k \Bigg(\sum_{\substack{|b_0| + |b_1| + \cdots + |b_{k-1}| = n \\ (b_0, b_1, \cdots, b_{k-1}) \in B^k}} |b_0| \Bigg) \quad 。$$

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

故に,

$$\left(\frac{d}{dz}D_X(z)\right)\Big/D_X(z) = -\sum_n \#\mathrm{Fix}(X,\sigma^n)\cdot z^{n-1}$$
$$= -\sum_k \sum_{(b_0,\cdots,b_{k-1})\in B^k} |b_0|\cdot z^{|b_0|+\cdots+|b_{k-1}|-1}$$
$$= -\sum_k \sum |b_0|\cdot z^{|b_0|-1}\cdot z^{|b_1|+\cdots+|b_{k-1}|}$$
$$= \left(\frac{d}{dz}\left(1-\sum_{b\in B} z^{|b|}\right)\right)\Big/\left(1-\sum_{b\in B} z^{|b|}\right)$$

さらに,

$D_X(0) = 1$ 故, $\quad D_X(z) = 1-\sum_{b\in B} z^{|b|}$ □

次にこのThの応用として, 行列 M から定まる shift (X,σ) の $D_X(z) = \det(I-zM)$ の(ある場合には)簡単な計算方法を紹介する。

$\boxed{\det(I-zM)\text{ の計算方法}}$

$M = (M_{ab})_{a,b\in A}$ を structure matrix とする, alphabets A 上の Markov shift (X,σ) を考える。

<u>def</u> $X(a) \triangleq \{\omega\in X;\ \#\{i\geq 0;\ \omega(i)=a\} = \#\{i\leqq 0;\ \omega(i)=a\} = \infty\}$,

$X\hat{a} \triangleq \{\omega\in X;\ \forall i\in\mathbb{Z};\ \omega(i)\neq a\}$

但 これらは共に, X の, σ-invariant closed subsets.

<u>Lemma 3-3.</u> 一般に, topological dynamical system (X,φ) について,

(i) X_1, X_2 が X の φ-invariant subsets で. $X_1\cup X_2 = X$ ならば.

$\mathrm{ent}(X,\varphi) = \max\{\mathrm{ent}(X_1,\varphi|X_1),\ \mathrm{ent}(X_2,\varphi|X_2)\}$.

さらに, $X_1\cap X_2 = \phi$ ならば,

$D_X(z) = D_{X_1}(z)\cdot D_{X_2}(z)$.

(ii) φ の non-wandering set $\Omega(\varphi)$ について,

$\mathrm{ent}(X,\varphi) = \mathrm{ent}(\Omega(\varphi),\varphi|\Omega(\varphi))$.

かつ,

$D_X(z) = D_{\Omega(\varphi)}(z)$.

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

∵) ent については、[B] の第2節を参照。一方、$X_1 \cap X_2$ なら $\mathrm{Fix}(X,\varphi^n) = \mathrm{Fix}(X_1,(\varphi|X_1)^n) \cup \mathrm{Fix}(X_2,(\varphi|X_2)^n)$ であり、また、$\mathrm{Fix}(X,\varphi^n) \subset \Omega(\varphi)$ 故、$D_X(z)$ に関する主張は明白。□

今の場合、$\Omega(\sigma) \subset X(a) \cup X_{\hat{a}}$ かつ、$X(a) \cap X_{\hat{a}} = \phi$ 故、

$$D_X(z) = D_{X(a)}(z) \cdot D_{X_{\hat{a}}}(z).$$

ここで、$X(a)$ の orbit base $\mathbb{B}$ として、

$$\mathbb{B} = \{a a_1 a_2 \cdots a_\ell \ ;\ a_i \neq a\ (\forall i) \text{ かつ, } M_{aa_1} = M_{a_2a_3} = \cdots = M_{a_{\ell-1}a_\ell} = M_{a_\ell a} = 1\}$$

をとることができるから、3-2より、$D_{X(a)}$ は計算できる。

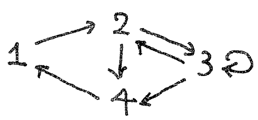
以下、X から $X(a)$ を作った操作を、$X_{\hat{a}}$ に施して $X_{\hat{a}} = X_{\hat{a}}(b) \cup (X_{\hat{a}})_{\hat{b}}$ とし、$D_{X_{\hat{a}}(b)}$ が計算できる。以下、この操作を inductive に行えば、3-3 より、$D_X(z)$ が計算できることになる。例えば；

Example

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ を structure matrix とする shift (X, σ) について

$\det(I - zM) = D_X(z)$ を求めてみる。

行列 M に対応して、$M_{ab} = 1$ のとき $a \to b$ と書くことにすれば、次の図式が得られる；



。

上の a として、先ず 3 をとると $X(a) = X(3)$ の orbit base として次の $\mathbb{B}$ をとることができる。

$$\mathbb{B} = \{3,\ 32(412)^n\ (n = 0, 1, 2, \cdots),\ 3(412)^m\ (m = 1, 2, 3, \cdots)\}.$$

故に、3-2 より、

$$D_{X(3)}(z) = 1 - z - \sum_{n=0}^{\infty} z^{2+3n} - \sum_{m=1}^{\infty} z^{1+3m}$$
$$= (1 - z - z^2 - z^3) / (1 - z^3).$$

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

一方，$Y = X_{\hat{3}}$ を考える。Yに対応する図式は，

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & 2 \arrow[d] \\ & 4 \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

。

故に，$D_Y(z)$ を計算するのに，b として，例えば 1 を採用すると，
$Y(b) = Y(1) = Y$，かつ，その orbit base は $\{124\}$．故に，

$$D_Y(z) = D_{Y(1)}(z) = 1 - z^3。$$

以上により，

$$D_X(z) = \det(I - zM) = D_{X(3)}(z) \cdot D_Y(z) = 1 - z - z^2 - z^3$$

NB 上と類似な方法によって，非負整数係数行列Mについても，$\det(I - zM)$ が計算できる。

Th 3-1 (ii) の最後の事実は，orbit base をもつ shift に対しても成立する。即ち；

Theorem 3-3. shift (X, σ) が orbit base $\mathcal{B}$ をもつとき，$D_X(z)$ の最小非負零点は，$\exp\{-\mathrm{ent}(X, \sigma)\}$ に一致する。

∵) $B_N \triangleq \{b \in B ; |b| \leq N\}$, $I_N \triangleq \{|b| ; b \in B_N^c \triangleq B - B_N\}$ とおき，X の open cover β_N を，

$$\beta_N \triangleq \{[b] \cap X ; b \in B_N\} \cup \{X \cap (\bigcup_{b \in B_N} ([b] \cap X))^c\}$$

によって定義する。このとき，$\omega \in X$ が $\beta_N \vee \sigma^{-1}\beta_N \vee \cdots \vee \sigma^{-(n-1)}\beta_N$ の一つの元にふくまれることは，次のことに対応する；

$$\omega[0, \infty) = c_0 b_1 c_1 b_2 c_2 \cdots\cdots c_k b_k c_{k+1} \cdots\cdots$$

ここで，$k \geq 0$; $b_1, b_2, \cdots \in B_N$; $c_0, c_1, c_2, \cdots$ は B_N に入らない words. さらに，$|c_0| \geq 0$, $|c_j| \in \{0\} \cup \bar{I}_N$。但，$\bar{I}_N \triangleq I_N \cup (I_N + I_N) \cup \cdots\cdots = \{l_1 + l_2 + \cdots\cdots + l_q ; l_i \in I_N ; q = 1, 2, 3, \cdots\}$。
n と k とは，次の様に対応する；

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

$$\begin{cases} |C_{k+1}| \geqq 1 & \Rightarrow |C_0| + \cdots + |C_{k+1}| + |b_1| + \cdots + |b_k| = n \\ |C_{k+1}| = 0 & \Rightarrow |C_0| + \cdots + |C_k| + |b_1| + \cdots + |b_{k-1}| < n \leqq |C_0| + \cdots + |C_k| + |b_1| + \cdots + |b_k|. \end{cases}$$

さて、巾級数全体に、"$\Sigma a_i z^i \ll \Sigma b_i z^i \Leftrightarrow \forall i ; a_i \leqq b_i$" によって (partial) order $\ll$ を入れることにすると、上記より、

$$A_N(z) \triangleq \sum z^n \cdot N^+\left(\bigvee_{m=0}^{n-1} \sigma^{-m}\beta_N\right)$$

$$\ll \sum_{\substack{i_0 \geqq 0,\ i_{k+1} \geqq 1 \\ i_j \in \{0\} \cup \bar{I}_N \\ (j=1,2,\cdots,k) \\ b_j \in B_N,\ k \geqq 0}} z^{i_0 + \cdots + i_{k+1} + |b_0| + \cdots + |b_k|} + \sum_{\substack{i_0 \geqq 0 \\ i_j \in \{0\} \cup \bar{I}_N \\ (j=1,2,\cdots,k) \\ b_j \in B_N,\ 1 \leqq r \leqq |b_k|,\ k>0}} z^{i_0 + \cdots + i_k + |b_1| + \cdots + |b_{k-1}| + r}$$

$$= \frac{z}{(1-z)^2} \cdot \frac{1}{1 - f_{B_N}(z)\, g_N(z)} + \frac{1}{1-z} \cdot \frac{1}{1 - f_{B_N}(z) \cdot g_N(z)} \cdot g_N(z) \cdot \frac{|B_N| - f_{B_N}(z)}{1-z}.$$

但、$f_{B_N}(z) \triangleq \sum_{b \in B_N} z^{|b|}$，$g_N(z) \triangleq 1 + \sum_{n \in \bar{I}_N} z^n \ll 1 + \frac{z^{N+1}}{1-z}$。

ここで、$\exp\{-ent(X, \sigma, \beta_N)\}$ は、ent の定義より、$A_N(z)$ の収束半径で、それは、$B_N \neq \phi$ のとき、$\leqq 1$。 ∴ これは、$1 - f_{B_N}(z) \cdot g_N(z)$ の最小零点。 $N \to \infty$ とすれば、$1 - f_{B_N}(z) g_N(z)$ の最小零点は、$1 - \sum_{b \in B} z^{|b|} = D_X(z)$ (see 3-2) の最小零点に収束する。 一方、$N \to \infty$ のとき、$ent(X, \sigma, \beta_N) \longrightarrow ent(X, \sigma)$ は明白。 故に Th 3-3 が証明できた。 □

§3. 終

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

§4. 数論的変換.

§2 で触れた様に, 2進展開には $f:[0,1)\to[0,1)$ s.t $fx\equiv 2x\,(\mathbb{Z})$ が対応した。これを一般化して, $\beta>1$ に対して, β 進展開を考える;

$$(\beta):\quad x=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)\cdot\beta^{-(n+1)}\qquad \text{但}.\ a_n(x)\in\{0,1,\cdots,s-1\}$$

s は, $s-1<\beta\leqq s$ なる整数.

これに対応するのが, 次の $f_\beta:[0,1)\to[0,1)$ である;

<u>def</u> $f_\beta:[0,1)\longrightarrow[0,1)$; <u>β-transformation</u>

$$x\longmapsto\{\beta x\}$$

但, ここで, $y\in\mathbb{R}$ について $\{y\}\triangleq y-[y]=y$ の小数部分.

2進展開の場合と同様に, $a_0(x)\triangleq[\beta x]$, $a_n(x)\triangleq a_0(f_\beta^n x)$ $(n=1,2,\cdots)$ によって定義される $a_0(x), a_1(x),\cdots$ は, 上の (β) をみたす。

以下, f_β を shift として表現し, それにより f_β の性質を調べてゆく。

<u>def</u> $\pi:[0,1)\longrightarrow A^{\mathbb{N}}$

$$x\longmapsto\pi(x)\triangleq(a_n(x))_{n=0,1,2,\cdots}$$

但 $\begin{cases}\pi \text{ は連続写像}.\\ A\triangleq\{0,1,\cdots,s-1\}\end{cases}$

<u>def</u> $A^{\mathbb{N}}$ に order $\prec$ を次のように入れる;

$$\omega\prec\omega' \iff \omega=\omega' \text{ or } \exists n;\ \omega_i=\omega_i'\ (\forall i<n)\ \&\ \omega_n<\omega_n'.$$

このとき π は order-preserving ; i.e.

$$x\leqq x' \text{ in } [0,1) \implies \pi(x)\prec\pi(x') \text{ in } A^{\mathbb{N}}.$$

さらに, π は injective である。

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

<u>def</u> $\zeta = \zeta_\beta \triangleq \lim_{x \uparrow 1} (a_n(x))_{n\geq 0} = \sup_{x\in[0,1)} (a_n(x))_{n\geq 0} \in A^{\mathbb{N}}$
とおき，
$X = X_\beta = X_{f_\beta} \triangleq \{\omega \in A^{\mathbb{N}};\ \forall n \geq 0:\ \sigma^n\omega < \zeta\}$ （σ は $A^{\mathbb{N}}$ 上の shift ）とおく。

<u>def</u> $\rho = \rho_\beta : X_\beta \to \mathbb{R}$ を，$\rho(\omega) \triangleq \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n \cdot \beta^{-(n+1)}$ で定義する。

<u>Theorem 4-1.</u> X_β は σ-invariant closed subset of $A^{\mathbb{N}}$ で，(X_β, σ) は，$([0,1), f_\beta)$ の実現である。

∵) X_β が σ-invariant, closed なることは，定義より明白。
$\forall n \geq 0$, $\forall x \in [0,1)$ について，$f_\beta^n x < 1$ 故，π が order-preserving であることより，$\pi[0,1) \subset X_\beta$．

$x \in [0,1)$ について，$\rho_\beta(\pi(x)) = x$；さらに，$\rho_\beta(\zeta) = 1$ 故，$\rho_\beta(X_\beta) = [0,1]$．

ρ_β は明らかに連続であり，可算個の点をのぞいて injective．即ち（詳しく言えば）；

$x \in [0,1)$ について，

$\#\rho^{-1}(x) \geq 2$

$\Leftrightarrow \exists n;\ x = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \beta^{-(i+1)} + (a_n+1)\beta^{-(n+1)}$

（このとき，$\rho^{-1}x = \begin{cases} (a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n+1, 0, 0, \cdots\cdots), \\ (a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n, \zeta_\beta(1), \zeta_\beta(1), \cdots) \end{cases}$ ）．

さらに，$\pi \circ f_\beta = \sigma \circ \pi$，$\rho \circ \sigma = f_\beta \circ \rho$ が成立することも明らか。
故に，主張が証明された。 □

以下，X_β の性質を調べてゆくのであるが，$\beta \in \mathbb{N}$ のとき，X_β は明らかに full shift であるから，以下，$\beta \notin \mathbb{N}$ とする。

X_β が Markov であるための条件は次の Prop. によりあたえられる。

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

Prop 4-2.

(i) (X_β, σ) が p重 Markov & q重 Markov でない $(1 \leqq \forall q \leqq p-1)$

$\Leftrightarrow$ (ii) ζ が周期 $p+1$ で周期的. (i.e. $\sigma^{p+1}\zeta = \zeta$ & $\sigma^i \zeta \neq \zeta$ $(1 \leqq \forall i \leqq p)$)

$\Leftrightarrow$ (iii) $\exists a_i$ $(i=0,1,2,\cdots,p\ ;\ 0 \leqq a_i < s)$

s.t. $\left\{ \begin{array}{ll} \text{a)} & 1-\beta^{-(p+1)} = \sum_{j=0}^{p} a_j \beta^{-(j+1)} \\ \text{b)} & 1-\beta^{-(p+1)} > \sum_{j=0}^{p} a_{j+k} \beta^{-(j+1)} \quad (\forall k=1,2,\cdots,p) \end{array} \right.$

[但, $a_{n+p+1} \triangleq a_n$ $(\forall n \geqq 0)$]

∵)

$I_i \triangleq [\frac{i}{\beta}, \frac{i+1}{\beta})$ $(i=0,1,2,\cdots,s-2)$, $I_{s-1} \triangleq [\frac{s-1}{\beta}, 1)$ とおき, $[0,1)$ の partition $\mathcal{J}$ を, $\mathcal{J} = \{I_i\ ;\ i=0,1,\cdots,s-1\}$ によって定める。このとき, " $a_n(x) = i \Leftrightarrow f_\beta^n x \in I_i$ " であることに注意する。さらに, $\bar{f}_i : \bar{I}_i \to \mathbb{R}$ を $\bar{f}_i(x) = f(x)$ $(x \in I_i)$, $\bar{f}_i(\sup I_i) = \sup\{f(y) : y \in I_i\}$ によって定め, 多−対−多の対応 $\bar{f} : [0,1] \to [0,1]$ を $\bar{f}(x) = \bar{f}_i(x)$ $(x \in \bar{I}_i)$ によって定めておく。また, I_iの端点達の集合を C とおく; $C = \{0, \frac{1}{\beta}, \frac{2}{\beta}, \cdots, \frac{s-1}{\beta}, 1\}$。

このとき,

X_β が p重 Markov

$\Leftrightarrow$ f_β は, partition $\mathcal{J} \vee f^{-1}\mathcal{J} \vee \cdots \vee f^{-p+1}\mathcal{J}$ に関して Markov map;

$\left(\begin{array}{l} \text{i.e. } \forall A \in \mathcal{J} \vee \cdots \vee f^{-p+1}\mathcal{J}\ ;\ \exists B_\alpha\ (\alpha = 1,2,\cdots,n(A)) \in \mathcal{J} \vee \cdots \vee f^{-p+1}\mathcal{J} \text{ s.t.} \\ \qquad f A = \bigcup_\alpha B_\alpha . \end{array} \right)$

$\Leftrightarrow$ $\bar{f}(C \cup \bar{f}^{-1}C \cup \cdots \cup \bar{f}^{-p+1}C) \subset C \cup \bar{f}^{-1}C \cup \cdots \cup \bar{f}^{-p+1}C$.

$\Leftrightarrow$ $\bar{f}C \subset C \cup \bar{f}^{-1}C \cup \cdots \cup \bar{f}^{-p+1}C$.

$\Leftrightarrow$ $\bar{f}(1) \in C \cup \bar{f}^{-1}C \cup \cdots \cup \bar{f}^{-p+1}C$.

であることは容易にわかる。

故に,

X_β が (i) をみたす

$\Leftrightarrow$ $\bar{f}(1) \in (C \cup \bar{f}^{-1}C \cup \cdots \cup \bar{f}^{-p+1}C) \setminus (C \cup \bar{f}^{-1}C \cup \cdots \cup \bar{f}^{-p+2}C)$

$\Leftrightarrow$ $\bar{f}(1) \in \bar{f}^{-p+1}C \setminus (C \cup \bar{f}^{-1}C \cup \cdots \cup \bar{f}^{-p+2}C)$

$\Leftrightarrow$ $\bar{f}^p(1) \in C$ かつ $\bar{f}^q \notin C$ $(1 \leqq \forall q \leqq p-1)$. ------- (iv) とおく。

ここで, $\bar{f}_i$ は全て単調増加故, $\bar{f}^p(1)$ は, 0 とはなり得ない。

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

さらに，$f^{-1}(1) = \{\frac{1}{\beta}, \frac{2}{\beta}, \cdots, \frac{s-1}{\beta}\}$ 故，$f^{p}(1)=1$ ならば，$f^{p-1}(1) \in \{\frac{1}{\beta}, \frac{2}{\beta}, \cdots, \frac{s-1}{\beta}\} \subset C$．故に

(iv) が成立

$\Leftrightarrow f^{p}(1) \in \{\frac{1}{\beta}, \frac{2}{\beta}, \cdots, \frac{s-1}{\beta}\}$，かつ $f^{q}(1) \notin C \ (1 \leqq {}^{\forall}q \leqq p-1)$

$\Leftrightarrow f^{p+1}(1) = 1$，かつ $f^{q}(1) \neq 1 \quad (1 \leqq {}^{\forall}q \leqq p)$

$\Leftrightarrow$ (ii) が成立。

さて，(ii) が成立するとしよう。このとき

$$1 = \rho(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \xi(n) \cdot \beta^{-(n+1)} = \sum_{n=0}^{p} \xi(n) \cdot \beta^{-(n+1)} + \sum_{n \geqq p+1} \xi(n) \cdot \beta^{-(n+1)}$$

$$= \sum_{n=0}^{p} \xi(n) \beta^{-(n+1)} + \sum_{n=0}^{\infty} \xi(n+p+1) \cdot \beta^{-(n+p+2)}$$

$$= \sum_{n=0}^{p} \xi(n) \beta^{-(n+1)} + \sum_{n=0}^{\infty} \xi(n) \cdot \beta^{-(n+1)} \cdot \beta^{-(p+1)} \quad (\text{ここで } \xi \text{ の周期性を用いた})$$

$$= \sum_{n=0}^{p} \xi(n) \beta^{-(n+1)} + \beta^{-(p+1)} \cdot 1 \qquad \left(\sum_{n=0}^{\infty} \xi(n) \beta^{-(n+1)} = \rho(\xi) = 1\right).$$

以上で，(iii) a) が導かれた。さらに，${}^{\forall}q \leqq p$; $\sigma^{i}\xi \neq \xi$ より，(iii) b) が導かれる。

逆に，(iii) が成立するとき，$\xi = (a_0, a_1, \cdots, a_p, a_0, a_1, \cdots, a_p, \cdots\cdots)$ が ξ_β に対応し，(ii) が成立する。 □

<u>Prop. 4-3.</u> X_β が Markov でないとき，

$\exists \beta(p) \quad (p = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$ s.t. $\begin{cases} \beta(p) \downarrow \beta \ (p \to \infty) \\ X_{\beta(p)} \text{ は } p \text{ 重 Markov.} \end{cases}$

とくに，

$X_{\beta(1)} \supsetneqq X_{\beta(2)} \supsetneqq \cdots\cdots \supset \bigcap_{p=1}^{\infty} X_{\beta(p)} = X_\beta$．即ち，$X_\beta$ は Markov shift で近似することができる。

$\because$) $1 = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \cdot \beta^{-(j+1)}$ とする。${}^{\forall}p = 1, 2, 3, \cdots$ について，

$1 = \sum_{j=0}^{p} a_j \beta^{-(j+1)} + \beta^{-(p+1)}$ の根 $\beta(p)$ で，

$0 < \beta(1)^{-1} < \beta(2)^{-1} < \cdots\cdots < \beta(p)^{-1} < \cdots\cdots \nearrow \beta^{-1}$ なるものがとれるから，

前半は O.K.（各 $X_{\beta(p)}$ は P. 4-2 より，p 重 Markov）．

さらに，一般に，"$\beta > \alpha \Rightarrow X_\beta \supset X_\alpha$" であり，さらに，$X_\alpha = \bigcap_{\beta > \alpha} X_\beta$ が成立するから，後半も O.K. □

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

この節の最後として，X_β の orbit base と，$D_{f_\beta}(z)=D_{X_\beta}(z)$ とを求めておくことにする。

def one sided shift X について，
$u\in W(X)$ が free $\Leftrightarrow$ $\forall\omega\in X$; $u\cdot\omega\in X$

Theorem 4-4.

X_β に対応する two-sided shift $\tilde{X}_\beta=\{\omega\in A^{\mathbb{Z}};(\omega(n),\cdots)\in X_\beta(\forall n)\}$ の orbit base として次の様な $B\subset W(X_\beta)$ をとることができる。

(i) X_β が Markov でないとき；
$B=\{\zeta[0,n)a\ ;\ 0\leqq n\leqq\infty,\ 0\leqq a\lneqq\zeta(n)\}$.

(ii) X_β が p重Markov，かつ q重Markov でない $(\forall q<p)$ とき；
$B=\{\zeta[0,n)a\ ;\ 0\leqq n\leqq p,\ 0\leqq a\lneqq\zeta(n)\}\cup\{\zeta[0,p+1)\}$

∵)

一般に，one-sided shift X について，$B\subset W(X)$ が次のⒶ，Ⓑを満たせば，B が $\tilde{X}$ の orbit base になることは明白であろう；

Ⓐ；$\forall b=(b_0,\cdots,b_{n-1})\in B$ について，
A-1 b は free.
A-2 $(b_0,\cdots,b_{n-i})$ は free でない。 $(\forall i\geqq 2)$

Ⓑ；$\forall\omega\in X$ は，$\omega=b\cdot c\cdot d\cdots\cdots$ $(b,c,d,\cdots\in B)$ なる形に書ける。

以下，このⒶ，Ⓑが成立することを証する。

(i)の場合

A-1 ；$\forall u\in X_\beta$ について，$\sigma^i(\zeta[0,n)a\cdot u)\prec\zeta$ $(\forall i\geqq 0)$ を言えばよい。$0\leqq i\leqq n-1$ のとき，$\sigma^i(\zeta[0,n)a\cdot u)=\zeta(i)\zeta(i+1)\cdots\zeta(n-1)\cdot a\cdot u(0)\cdot u(1)\cdots\cdots\prec\zeta(i)\zeta(i+1)\cdots\zeta(n-1)\zeta(n)\cdots=\sigma^i\zeta\prec\zeta$ （ここで $a\lneqq\zeta(n)$ であることを用いた。）。$i=n$ の

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

とき，$\sigma^i(\zeta[0,n)a\cdot u) = a\cdot u(0)u(1)\cdots < \zeta$ （$\because a \lneq \zeta(n) \leqq \zeta(0)$）。
$i \geqq n+1$ のとき，$\sigma^i(\zeta[0,n)a u) = \sigma^{n+1-i}u < \zeta$（$\because u \in X_\beta$）。故に，
(A-1) は O.K.

(A-2)；$\zeta[0,n)$ が free でないこと（$\forall n \geqq 1$）を言えばよい。
仮定より，X_β は $(n-1)$重Markov でないから，$\sigma^n\zeta \neq \zeta$. i.e.
$\exists i$; $\zeta(i) \neq \zeta(n+i)$ & $\forall j<i$; $\zeta(j) = \zeta(n+j)$. このとき，
$\zeta[0,n)\zeta \neq \zeta$ となり，$\zeta[0,n)\zeta \notin X_\beta$. $\therefore$ $\zeta[0,n)$ は
free でない。

(B)；明白。

<u>(ii) の場合.</u>

(A-1)；(i) の場合と同様にして，$\zeta[0,n)a$ は free である。
さらに，$\sigma^{p+1}\zeta = \zeta$ だから，$\zeta[0,p+1)$ が free になることは
やさしい。

(A-2)；上に述べた様に，$\zeta[0,n)$ が free $\Leftrightarrow$ $\sigma^n\zeta = \zeta$.
である。X_βは p重Markov かつ q重Markov でない（$\forall q<p$）こ
とより，$\zeta[0,n)$ が free になるのは n が $p+1$ の倍数である
ときに限る。

(B)；$\omega = \zeta[0,n_0)a_0\cdot\zeta[0,n_1)a_1\cdot\cdots$ （$n_i \geqq 0$, $0 \leqq a_i < \zeta(n_i)$）
とかける ことは明白。ここで $\sigma^{p+1}\zeta = \zeta$ 故，この書き方に
あらわれる $\zeta[0,n_i)$ のうち，$n_i \geqq p+1$ なるものは，$\zeta[0,n_i) =$
$\zeta[0,p+1)\zeta[0,n_i-(p+1))$ と書ける。故に $\forall\omega \in X_\beta$ は，B の
元を用いて書き表わされる。 $\square$

この Theorem 4-4 と，§3の Theorem 3-2 とから，$D_{X_\beta}(z)$
は簡単に計算される。

<u>Corollary 4-5</u>

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

(i) X_β が Markov でないとき；

$$D_{f_\beta}(z) = D_{X_\beta}(z) = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \zeta(n)\, z^{n+1} .$$

(ii) X_β が p 重 Markov，かつ q 重 Markov でない $(\forall q < p)$ とき；

$$D_{f_\beta}(z) = D_{X_\beta}(z) = 1 - \sum_{n=0}^{p-1} \zeta(n)\, z^{n+1} - (\zeta(p)+1)\cdot z^{p+1} 。$$

§4. 終

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

§5. Šharkovskii の定理の精密化；cycle の type.

<u>def</u> f の n-cycle $C=\{p_1<p_2<\cdots<p_n\}$ に対して、C の <u>type</u> $\tau=\tau(C)\in\mathfrak{S}_n$ (n 次対称群) を次で def する；

$$f(p_i)=p_{\tau(i)} \quad (i=1,2,\ldots,n).$$

区間力学系については、その entropy は、$P=\{\forall\text{cycle}\}$ の元の type によって決定されてしまう。即ち、

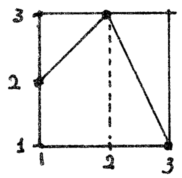
<u>Theorem 5-1.</u> $\mathrm{ent}(J,f)=\sup\{\eta(\tau(C));\ C\in P(J,f)\}$,

但、ここで、

$$\begin{cases} \eta(\tau)\triangleq \mathrm{ent}(I_\tau, f_\tau) \\ I_\tau \triangleq [1,n] \quad (\tau\in\mathfrak{S}_n \text{ のとき}), \\ f_\tau \text{ は } I_\tau\to I_\tau \text{ なる連続写像で、次をみたす；} \end{cases}$$

$f_\tau(i)=\tau(i) \quad (i=1,2,\ldots,n)$, $f_\tau|_{[i,i+1]}$ は linear.

(e.g. $\tau=(1,2,3)$ ならば、f_τ の graph は、


)

∵) 略。see [高], [P]. □

<u>def</u> P (或るいは $\bigcup_n \mathfrak{S}_n$) 上に次の様な (partial) order $\vdash$ を入れる；

$\tau\vdash\tau' \Leftrightarrow$ type τ の cycle が存在すれば、type τ' の cycle も存在する。

<u>注</u> f がひと山変換のときは、$\vdash$ は、total order となる。証明は、矢張、[高]、[P] を参照。

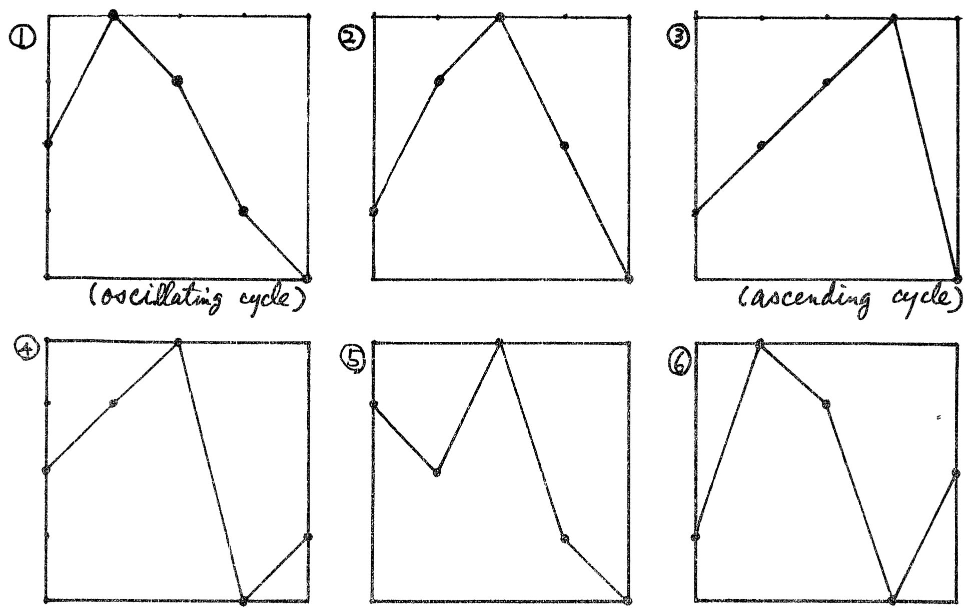
<u>問題</u> $\vdash$ を決定せよ！

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

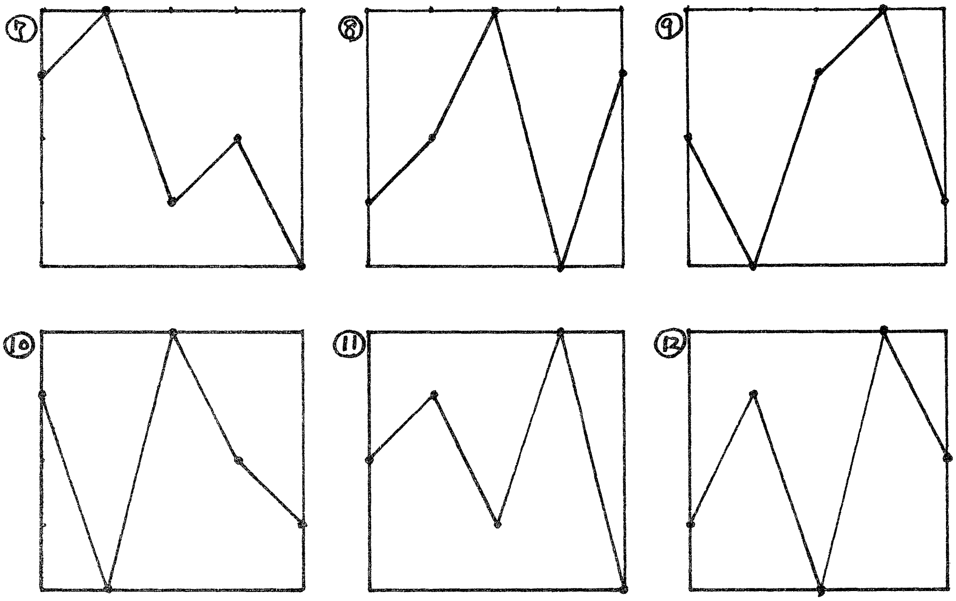
Ex 5-cycle について，その entropy 等をしらべてみる。
5-cycle は，orientation reversing conjugacy を除いて，次の12通りである；

	type	lap数（増減型）	特性多項式
①	(13425) ≅ (15324)	2 (+−)	$1-z-z^2+z^3-z^4$
②	(12435) ≅ (15423)	2 (+−)	$1-z-z^2-z^3+z^4$
③	(12345) ≅ (15432)	2 (+−)	$1-z-z^2-z^3-z^4$
④	(13524) ≅ (14235)	3 (+−+)	$1-z-z^2-z^3-z^4$
⑤	(14235) ≅ (15243)	3 (−+−)	$1-z-z^2-z^3-z^4$
⑥	(12534) ≅ (13254)	3 (+−+)	$1-z-3z^2+z^3+z^4$
⑦	(14325) ≅ (15234)	4 (+−+−)	$1-z-3z^2+z^3+z^4$
⑧	(12354) ≅ (13254)	3 (+−+)	$1-z-3z^2-3z^3-z^4$
⑨	(13452) ≅ (14532)	3 (−+−)	$1-3z+z^2+z^3+z^4$
⑩	(14352) ≅ (14523)	3 (−+−)	$1-3z+z^2+z^3-z^4$
⑪	(13245) ≅ (15342)	4 (+−+−)	$1-3z+z^2-z^3+z^4$
⑫	(12453) ≅ (13542)	4 (+−+−)	$1-3z-z^2+3z^3+z^4$

対応するグラフ；

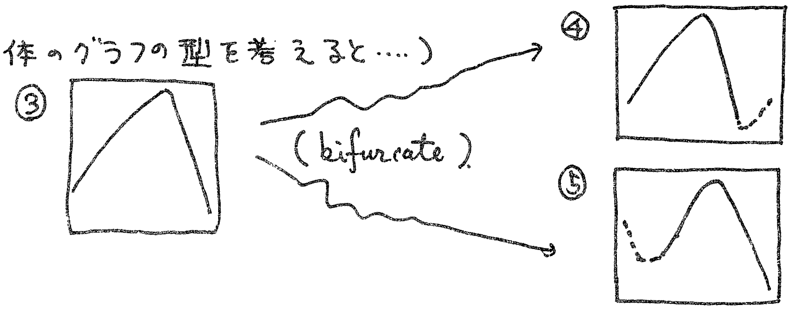


Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158



ここで，③,④,⑤の Periodic point の個数及び entropy が，各々 lap 数（増減型もふくめて）が相異なるにもかかわらず，3つ共，等しいことに注目したい。（同様のことが⑥,⑦にもあてはまる。）即ち，より複雑な lap 数（増減型）をもつ periodic orbit のうち，最も簡単なものは，より簡単なものによって attain されているということである。例えば，lap 数が3で，増減型(＋－＋)をもつもののうち最もかんたんな④が，lap 数が2の③によって，周期点数や，entropy が attain されている。このことは，③の bifurcation として④,⑤が得られることと関係があるかもしれない。(?)（下図参照）.

（大体のグラフの型を考えると….）



85.終

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

§6. 平衡測度と変分原理.

古典統計力学において考えられてきた Gibbs ensemble (1次元格子系の)に対応するものとして、平衡測度が考えられる。この節では、shift に対して、平衡測度を考えてゆく。

(X, σ) 【$X \subset A^{\mathbb{Z}}$】: subshift: に対して、

<u>def</u> $\mathcal{I}(X) \triangleq \{ {}^\forall \sigma\text{-invariant Borel probability measure on } X \}$

<u>def</u> $\mathcal{C}(X) \triangleq \{ {}^\forall f : X \to \mathbb{R} : \text{continuous function} \}$

<u>def</u> $U \in \mathcal{C}(X)$ に対して、

$P(X, U) \triangleq \max_{\mu \in \mathcal{I}(X)} \{ h_\mu(X, \sigma) - \int U \, d\mu \}$;(topological) <u>pressure</u>.

<u>NB</u> $h_\mu(X, \sigma)$ は μ にかんして upper semi-cont. 故 上で max とかいた。

さらに、

上において、max を attain する $\mu \in \mathcal{I}(X)$ を、U に関する X 上の <u>平衡測度(平衡状態)</u>【equilibrium measure (equilibrium state)】という。

$\mathcal{E}(X, U) \triangleq \{ \mu \in \mathcal{I}(X) ; \mu \text{ is an equilibrium measure for } U \}$

<u>NB</u> $U \equiv 0$ のとき、A-3 より、$P(X, U) = \text{ent}(X, \sigma)$.

<u>Remark.</u> 本来、$P(X, U)$ は別な方法で定義する。(see Th 6-3.) この場合、上の $P(X, U)$ の定義式が、定理として導かれる。その意味で、上の $P(X, U)$ の定義式を <u>変分原理</u> という。

先ず、最初に、X が simple Markov shift で、X 上の関数 $U(\omega)$ が、$\omega = (\omega_0, \omega_1, \cdots)$ の最初の座標 ω_0 のみに depend する場合を考える;
$U(\omega) = U(\omega_0)$.

<u>Theorem 6-1</u>

(i)　X が A 上の simple Markov shift, $U(\omega) = U(\omega_0)$ のとき, $\mu \in \mathcal{E}(X, U)$ ならば,

$$(*)\begin{cases} \exists (\pi_a)_{a\in A} \ ; \ \pi_a \geqq 0, \ \sum_a \pi_a = 1. \\ \exists (p_{ab})_{a,b\in A}; \ p_{ab} \geqq 0, \ \sum_b p_{ab} = 1 \\ \text{s.t.} \quad \forall (a_0, \cdots, a_{n-1}) \in W_n(X) \ ; \ \mu([a_0, \cdots, a_{n-1}]) = \pi_{a_0} p_{a_0a_1} p_{a_1a_2} \cdots p_{a_{n-2}a_{n-1}}. \end{cases}$$

(ii)　さらに, X が irreducible (i.e. X の structure matrix が irreducible) ならば, $\mathcal{E}(X, U)$ は ただ1つの元 $\mu_{X,U}$ からなり, $\mu_{X,U}$ は次をみたす;

$$L_{ab} = \begin{cases} \exp(-U(a,b)) & \text{if } (ab) \in W_2(X). \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

によって行列 $(L_{ab})_{a,b\in A}$ を定める。(X が irreducible ならば行列 (L_{ab}) もまた irreducible である。)
(L_{ab}) の Perron-Frobenius root λ に対応する (L_{ab}) の右 (resp 左) 固有ベクトルを $(x_a)_{a\in A}$ (resp. $(y_a)_{a\in A}$) とするとき,

$$\pi_a \triangleq x_a y_a \Big/ \sum_{b\in A} x_b y_b, \quad p_{ab} \triangleq L_{ab} x_b / \lambda x_a$$

によって与えられる (π_a), (p_{ab}) から, $(*)$ の様に定まる measure が $\mu_{X,U}$ である。

さらに, このとき,

$$P(X, U) = \log \lambda.$$

def　$(*)$ をみたす measure μ を <u>Markov measure</u> という。

∵)　A-6 より,

$$h_\mu(X, \sigma) = \inf_n \sum_{\substack{u b \in W_n(X) \\ b \in A}} -\mu[ub] \cdot \log \frac{\mu[ub]}{\mu[u]}$$

$$\leqq \sum_{\substack{a, b\in A \\ ab \in W_2(X)}} -\mu[ab] \log \frac{\mu[ab]}{\mu[a]}.$$

measure $\tilde{\mu}$ を, μ を用いて, 次で定義する;

$p_{ab} = \frac{\mu[ab]}{\mu[b]}$, $\pi_a = \mu[a]$ とするとき, $\tilde{\mu}[a_0 \cdots a_n] \triangleq \pi_{a_0} p_{a_0a_1} \cdots p_{a_{n-1}a_n}$.

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

このとき，

$$h_{\tilde{\mu}}(X,\sigma) = \inf_n \sum_{a_1\cdots a_n b \in W_{n+1}(X)} -\tilde{\mu}[a_1\cdots a_n b] \log \frac{\tilde{\mu}[a_1\cdots a_n b]}{\tilde{\mu}[a_1\cdots a_n]}$$

$$= \inf_n \sum_{a_1\cdots a_n b \in W_{n+1}(X)} -\pi_{a_1} p_{a_1a_2} p_{a_2a_3} \cdots p_{a_n b} \cdot \log p_{a_n b}$$

（ここで，$\sum_a \pi_a p_{ab} = \pi_b$ を用いると）．

$$= \sum_{a,b} -\pi_a p_{ab} \log p_{ab}$$

一方，

$$\int U d\mu = \int U(\omega_0) d\mu = \sum_a U(a)\pi_a = \sum_{ab} U(ab)\pi_a p_{ab} = \int U d\tilde{\mu}$$

以上より，

$$h_\mu(X,\sigma) - \int U d\mu \leqq -\sum_{ab} \mu[ab] \log \frac{\mu[ab]}{\mu[a]} - \sum_{ab} U(ab)\pi_a p_{ab}$$

$$= -\sum_{ab} \pi_a p_{ab} \log p_{ab} - \sum_{ab} \pi_a p_{ab} U(ab)$$

$$= h_{\tilde{\mu}}(X,\sigma) - \int U d\tilde{\mu}.$$

さて，ここで，

<u>claim</u>：（＊）$\Longleftrightarrow$ $h_\mu(X,\sigma) = -\sum_{ab} \mu[ab]\cdot \log \frac{\mu[ab]}{\mu[a]}$.

∵）．$\Rightarrow$）明白

$\Leftarrow$）．$\phi(x) \triangleq -x\log x$ は．狭義の上に凸な関数故，

$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \phi(x_i) \leqq \phi(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i)$ （$\alpha_i \gneqq 0$，$\sum \alpha_i = 1$）において

等号が成立するのは．$x_1 = x_2 = \cdots x_n$ の場合に限ることに

注意すれば，右辺が成立するとき，

$\forall a_0$ ：$\mu[a_0\cdots a_n]/\mu[a_0\cdots a_{n-1}]$ が a_0 によらないことがわかる。

これを $p_{a_{n-1}a_n}$ とおくことにより，n にかんする induction

で（＊）が導かれる。 $\triangle$

以上により，

$\mu \in \mathcal{E}(X,U) \Rightarrow \mu = \tilde{\mu} \Rightarrow \mu$ は（＊）をみたす；（i）が証明された。

(ii) （i）により，μ として．Markov measure のみを考えればよい；

$h_\mu(X,\sigma) - \int U d\mu = -\sum_{ab} \pi_a p_{ab} \log p_{ab} - \sum_{ab} U(ab)\pi_a p_{ab}$ ……（＃）とおく。

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

今，$\forall x=(x_a)_{a\in A}>0$ を考え，㊕に，余分な項をはさみこむ；

$$㊕=\Big[\sum_{ab}\pi_a p_{ab}\Big(\log\frac{(\exp-U(ab))x_b}{\sum_{c\in A}(\exp-U(ac))x_c}-\log p_{ab}\Big)\Big]$$

$$+\Big[\sum_{ab}\pi_a p_{ab}\log\sum_{c\in A}(\exp-U(ac))x_c-\sum_{ab}\pi_a p_{ab}x_b\Big]$$

ここで，

(第1の[ ]) $\leqq 0$

$\because$) $\log x\leqq\log e\cdot(x-1)$ $(\forall x)$ 故，$\forall p_b, q_b$; $p_b>0, q_b>0, \sum_b p_b=1$, $\sum_b q_b=1$；について，

$\sum_b p_b(\log q_b-\log p_b)\leqq 0$ 《等号成立 $\Leftrightarrow$ $\forall b$: $p_b=q_b$》

が得られる。 この式を apply すれば ただちに O.K. //

(第2の[ ]) $=\sum\pi_a\cdot\log\Big[\big(\sum_c(\exp-U(ac))x_c\big)/x_a\Big]$

$\because$) $\sum_b\pi_a p_{ab}=\pi_a$, $\sum_a\pi_a p_{ab}=\pi_b$. より明白. //

故に，

$$㊕\leqq\sum\pi_a\log\Big[\big(\sum_c\exp(-U(ac))x_c\big)/x_a\Big]$$

$$\leqq\log\max_a\big(\sum_c\exp(-U(ac))x_c\big)/x_a\quad\big(\because\ \sum_a\pi_a=1\big)$$

最後の式を ㊏ とおく。

さて，一般に，irreducible non-negative matrix A の Perron-Frobenius root $\lambda(A)$ は次式で与えられる；[G].

$$\lambda(A)=\inf_{x=(x_i)>0}\max_i\frac{(Ax)_i}{x_i}.$$

これを使えば，㊏ において $x>0$ は任意だったから，

$$㊏\leqq\log\lambda(L)\quad;\ 但\quad L=(L_{ab}).$$

以上をまとめれば，

$$h_\mu(X.\sigma)-\int U\,d\mu\leqq\log\lambda(L).$$

ここで μ が等号をみたす (i.e. $\mu=\mu_{X.U}$) ならば，(ii) の主張する条件を満たさざるを得ないことを見るのは容易である。 □

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

次にこの定理を，X が p 重 Markov で，$U(\omega)$ が $(\omega_0,\cdots,\omega_{q-1})$ のみに depend する【$U(\omega)=U(\omega_0,\omega_1,\cdots,\omega_{q-1})$】の場合に考えてみる。このとき，alphabets A^r【$r=\max\{p,q\}$】上の shift を考えることにより，Th 6-1 は，次の Th 6-2 の形になることが容易にわかる。

<u>Theorem 6-2</u>

(i) (X,σ) が p 重 Markov で，$U(\omega)=U(\omega_0,\cdots,\omega_{q-1})$ のとき，$\mu\in\mathcal{E}(X,U)$ ならば，μ は r-Markov【$r=\max\{p,q\}$】である；

i.e.
$$\left\{\begin{array}{l} \exists(\pi_u)_{u\in W_r(X)}\ ;\ \sum_u \pi_u=1,\ \pi_u\geqq 0 \\ \exists(p_{uv})_{u,v\in W_r(X)}\ ;\ \sum_v p_{uv}=1,\ p_{uv}\geqq 0 \\ \text{s.t.} \\ \quad \mu[a_0,\cdots,a_{n-1}] = \pi_{u_0}p_{u_0u_1}\cdots\cdots p_{u_{n-r-1}u_{n-r}}. \\ \qquad\quad 但，\ u_i=(a_i,a_{i+1},\cdots,a_{i+r-1})\quad (i=0,1,\cdots,n-r) \end{array}\right.$$

(ii) (X,σ) が irreducible ならば，$\mathcal{E}(X,U)$ はただ1つの元 $\mu_{X,U}$ からなる。$\mu_{X,U}$ は次をみたす；

$$L_{u,v}\triangleq\begin{cases}\exp(-U(a_0,\cdots,a_r)) & \text{if } \begin{array}{l}(a_0,\cdots,a_r)\in W_{r+1}(X),\\ u=(a_0,\cdots,a_{r-1}),\ v=(a_1,\cdots,a_r)\end{array}\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

によってきまる行列 $L=(L_{uv})_{u,v\in W_r(X)}$ の Perron-Frobenius root $\lambda(L)$ に対応する左（resp 右）固有ベクトル $(y_u)_{u\in W_r(X)}$ (resp. $(x_u)_{u\in W_r(X)}$) に対して，$\mu_{X,U}$ は，

$$\pi_u\triangleq x_uy_u/\sum_v x_vy_v\quad,\quad p_{uv}\triangleq L_{uv}x_v/\lambda x_u$$

により，(i) の様にきまる measure である。

さらに，このとき，

$$P(X,U) = \log\lambda(L).$$

この節の始めに述べた様に，本来は，$P(X,U)$ は，次の operator $\mathcal{L}_{X,U}$ によって定義されるものである。

def subshift $X \subset A^{\mathbb{N}}$ と、$U \in \mathcal{C}(X)$ について、operator

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{X,U} : \mathcal{C}(X) \to \mathcal{C}(X)$$

を次で定義する；

$$(\mathcal{L}_{X,U}\varphi)(\omega) = \sum_{\omega' \in \sigma^{-1}\omega \cap X} \exp(-U(\omega')) \cdot \varphi(\omega') \qquad [\![\varphi \in \mathcal{C}(X)]\!]$$

NB $$(\mathcal{L}^n\varphi)(\omega) = \sum_{\omega' \in \sigma^{-n}\omega \cap X} \exp\left(-\sum_{i=0}^{n-1} U(\sigma^i\omega')\right) \cdot \varphi(\omega').$$

def $\varphi \in \mathcal{C}(X)$ について、

$$\|\varphi\| \triangleq \max_{\omega \in X} |\varphi(\omega)| .$$

さらに、

$$\|\mathcal{L}_{X.U}\| \triangleq \sup_{\|\varphi\| \leq 1} \|\mathcal{L}_{X.U}\varphi\|.$$

Theorem 6-3. (X,σ) : subshift, $U \in \mathcal{C}(X)$ について、

(i) $$P(X,U) = \lim_n \frac{1}{n} \log \|\mathcal{L}^n_{X.U}\| \quad \text{---- ①}$$ (右辺を)

$$= \inf_n \frac{1}{n} \log \|\mathcal{L}^n_{X.U}\| \quad \text{---- ②}$$

$$= \lim_n \frac{1}{n} \log \sum_{u \in W_n(X)} \inf_{\omega \in [u]} \exp\left(-\sum_{i=0}^{n-1} U(\sigma^i\omega)\right) \text{--- ③}$$

$$= \lim_n \frac{1}{n} \log \sum_{u \in W_n(X)} \sup_{\omega \in [u]} \exp\left(-\sum_{i=0}^{n-1} U(\sigma^i\omega)\right) \text{--- ④}$$ (とおく)

(ii) $\mathcal{E}(X,U) \neq \phi$.

∵) 先ず(i)を証明する；

$\boxed{1}$ $\log\|\mathcal{L}^n\| + \log\|\mathcal{L}^m\| \geq \log\|\mathcal{L}^{n+m}\|$ より、① が存在し、それは、② に等しい。

$\boxed{2}$ 今、$\sum_{u \in W_n(X)} \sup_{\omega \in [u]} \exp\left(-\sum_{i=0}^{n-1} U(\sigma^i\omega)\right) \triangleq P_n(U)$ とおく。

$k \in \mathbb{R}$ に対して、$P_n(U-k) = e^{nk} \cdot P(U)$ であるから、$U \leq 0$ と仮定してよい。このとき、容易にわかる様に、

$$P_{n+m}(U) \leq P_n(U) \cdot P_m(U).$$

∴④ が存在する。(これは実は、$\inf \frac{1}{n} \log P_n(U)$ に等しい。)

さらに、$\sum_{u \in W_n(X)} \inf_{\omega \in [u]} \exp.\left(-\sum_{i=0}^{n-1} U(\sigma^i\omega)\right) \triangleq Q_n(U)$ とおき、

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

$$\mathrm{osc}_n\ (U) = \max_{u\in W_n(X)} \sup_{\omega,\omega'\in[u]\cap X} |U(\omega) - U(\omega')|$$ とおけば，

$$\exp(-\sum_{i=1}^{n}\mathrm{osc}_i(U)) \leqq \sup_{\omega\in[u]} \exp(-\Sigma U(\sigma^i\omega)) \Big/ \inf_{\omega\in[u]} \exp(-\Sigma U(\sigma^i\omega))$$
$$\leqq \exp(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{osc}_i(U))$$

$$\therefore\ \left|\frac{1}{n}\log P_n(U) - \frac{1}{n}\log Q_n(U)\right| \leqq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{osc}_i(U)。$$

ここで，U は continuous 故，$\mathrm{osc}_i(U) \to 0\ (i\to\infty)$．

とくに $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{osc}_i(U) \to 0\ (n\to\infty)$．

$\therefore$ ③ = ④ が成立する。

$\boxed{3}$ $\|\mathcal{L}^n\| \geqq \|\mathcal{L}^n 1\| = \sup_{\omega} \sum_{\omega'\in\sigma^{-n}\omega\cap X} \exp(-\sum_{i=0}^{n-1}U(\sigma^i\omega'))$

$$\geqq \sum_{\omega'\in\sigma^{-n}\omega\cap X} \exp(-\sum_{i=0}^{n-1}U(\sigma^i\omega')) \qquad (\forall\omega)$$

$$= \sum_{\substack{u\in W_n(X)\\ u\cdot\omega\in X}} \exp(-\sum_{i=0}^{n-1}U(\sigma^i(u\cdot\omega))) \qquad (\forall\omega)$$

$$\geqq \sum_{u\in W_n(X)} \inf_{\xi\in[u]} \exp(-\sum_{i=0}^{n-1}U(\sigma^i\xi)) \qquad \therefore ① \geqq ③$$

$\boxed{4}$ $\|\varphi\| \leqq 1$ なる $\forall\varphi$ について，

$$\|\mathcal{L}^n\varphi\| = \sup_{\omega}\left|\sum_{\omega'\in\sigma^{-n}\omega\cap X} \exp(-\sum_{i=0}^{n-1}U(\sigma^i\omega'))\varphi(\omega')\right|$$

$$\leqq \sup_{\omega}\sum_{\omega'\in\sigma^{-n}\omega\cap X} \left|\exp(-\sum_{i=0}^{n-1}U(\sigma^i\omega'))\right|\cdot|\varphi(\omega')|$$

$$\leqq \sup_{\omega}\sum_{\omega'\in\sigma^{-n}\omega\cap X} \exp(-\sum_{i=0}^{n-1}U(\sigma^i\omega'))$$

$$= \sup_{\omega}\sum_{\substack{u\in W_n(X)\\ u\cdot\omega\in X}} \exp(-\sum_{i=0}^{n-1}U(\sigma^i(u\cdot\omega)))$$

$$\leqq \sum_{u\in W_n(X)} \sup_{\omega} \exp(-\sum_{i=0}^{n-1}U(\sigma^i(u\cdot\omega)))$$

$$= \sum_{u\in W_n(X)} \sup_{\xi\in[u]} \exp(-\sum_{i=0}^{n-1}U(\sigma^i\xi)) \qquad \therefore ① \leqq ④.$$

以上で，一般に，(i)の右辺①〜④が存在して，全て等しいことがわかった。

$\boxed{5}$ X = p-重 Markov，$U(\omega) = U(\omega_0,\cdots,\omega_{q-1})$ のときの Th. の証明。

X が irreducible のときのみを考えればよい。Th.6-2 により，

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

$$P(X,U) = \log \lambda(L) = \lim_n \frac{1}{n} \log \Big(\sum_{u,v} (L^{n-1})_{uv} \Big).$$

ここで，

$$\sum_{u,v} (L^{n-1})_{uv} = \sum_{u_0, u_1, \cdots, u_{n-1}} L_{u_0 u_1} \cdot L_{u_1 u_2} \cdots\cdots L_{u_{n-2} u_{n-1}}$$

$$= \sum_{(a_0, \cdots\cdots, a_{n-1}) \in W_n(X)} \exp\Big(-\sum_{i=0}^{n-1} U(a_i, a_{i+1}, \cdots, a_{r+i})\Big)$$

故に，$P(X,U) = ③ = ④$．　この場合，Th 6-2 より．$\mathcal{E}(X.U) \neq \phi$

$\boxed{6}$ X が p 重 Markov，U が一般の場合の Th の証明．

$U_k(\omega) \triangleq \inf\{U(\omega') \,;\, \omega'[0,k) = \omega[0,k)\}$ とおくと，

$U_k \in \mathcal{C}(X)$，$U_k \leq U \leq U_k + \mathrm{osc}_k U$，$U_k \nearrow U \ (k \to \infty)$

このとき，$\forall n$ について，$\mathcal{L}^n_{X,U_k} \searrow \mathcal{L}^n_{X,U} \ (k \to \infty)$．

$\therefore$ 両辺の norm をとって，$\inf_n \frac{1}{n} \log$ をとれば O.K.

さらに，$\mu_k \in \mathcal{E}(X.U_k) \subset \mathcal{I}(X)$ $(k=1,2,\cdots)$ について．(必要なら{μ_k}の subsequence をとって)　$\exists \mu \in \mathcal{I}(X)$; $\mu_k \longrightarrow \mu \ (k \to \infty)$．

claim　$\mu \in \mathcal{E}(X.U)$，とくに，$\mathcal{E}(X.U) \neq \phi$．

$\because$) $P(X,U) \leq P(X.U_k) = h_{\mu_k}(\sigma) - \int U_k d\mu_k \leq h_{\mu_k}(\sigma) - \int U d\mu_k - \mathrm{osc}_k(U)$.

$\therefore$ $P(X.U) \leq \overline{\lim}\, h_{\mu_k}(\sigma) - \int U d\mu \leq h_\mu(\sigma) - \int U d\mu$.

$\therefore$ $\mu \in \mathcal{E}(X,U)$．　$\triangle$

$\boxed{7}$ X, U 共に一般の場合の定理の証明。

$X^p \triangleq \mathcal{M}(W_{p+1}(X))$ とおくと，X^p は p 重 Markov で，$X^p \searrow X \ (p \to \infty)$.

このとき，$\forall U \in \mathcal{C}(X)$ について．$\exists U^p \in \mathcal{C}(X^p)$ s.t.

$U^p|_X = U \ (\forall p)$　かつ，$\forall p_1 \leq \forall p_2$ について，$U^{p_2}|X^{p_1} = U^{p_1}$．

ここで．$\mathcal{L}_{X^p,U^p}$ と $\mathcal{L}_{X,U}$ とを比較すれば，(i) が X, U においても成立することがわかる。

さらに $\mu^p \in \mathcal{E}(X^p, U^p) \subset \mathcal{I}(X')$ を各 p について1つづつえらび，必要ならば subsequence をとって，$\exists \mu \in \mathcal{I}(X')$; $\mu^p \to \mu \ (p \to \infty)$ としておくと，$X^p \searrow X \ (p \to \infty)$ 故，$\mathrm{supp}\,\mu \subset X$．さらに．

$P(X.U) \leq P(X^p.U^p) = h_{\mu^p} - \int U^p d\mu^p$　より，

$P(X.U) \leq \overline{\lim}\, h_{\mu^p} - \int U d\mu \leq h_\mu - \int U d\mu \leq P(X.U)$.

$\therefore$ $\mu \in \mathcal{E}(X.U)$。　とくに．$\mathcal{E}(X.U) \neq \phi$　$\square$

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

Remark. 一般に $\#\mathcal{E}(X, U) = 1$ とは限らない。

shift 上での変分原理，平衡測度の問題は，それ自体，興味があるとも言えるが，色々な力学系を shift に表現することにより，それらの力学系の変分原理，平衡測度の問題を考えることに（応用としての）おもしろさがある。例えば，若くして夭逝した Rufus Bowen（1947 - 1978）は，Axiom A diffeo, Anosov diffeo. に関して，basic set を Markov shift に実現することにより，basic set が attractor になるための条件，漸近測度の存在，riemannian volume と absolutely continuous な invariant measure の存在，等について，興味ある結果を出している。[Bowen] を参照されたい。

ここでは，区間力学系との関係について，"おはなし" 程度に述べておくことにする。

$J = [0,1]$ 上の連続写像 $f: J \to J$ を考える。（微分可能性等の条件は，以下無視して話をすすめる）。

$d\mu(x) = \varphi(x)\,dx$ （$\varphi \geq 0$，dx は J の Lebesgue measure）なる形の measure μ が f-invariant であるための必要十分条件は明らかに，$\sum_{y \in f^{-1}(x)} \varphi(y) / |f'(y)| = \varphi(x)$。今，$(J, f)$ の realization を (X_f, σ) とする。《$\pi : J^\circ \to X_f$，$\rho : X_f^\circ \to J$》このとき，
$U(\omega) \triangleq \log |f'(\rho\omega)|$，$\tilde{\varphi}(\omega) = \varphi(\rho_f \omega)$ によって，X 上のかんすう U, $\tilde{\varphi}$ を定めれば，上に書いた φ の条件は，丁度，

$$\mathcal{L}_{X,U}\, \tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}$$

に対応する。故に，$\mathcal{L}_{X,U}$ の固有値問題，平衡測度を求めることは，不変密度かんすうを求めることの拡張である。

類似のおはなしとして，[高]′ にある結果を書いておく。

$$D_f(z) \triangleq \exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \sum_{x \in \widetilde{\mathrm{Fix}}(f^n)} \frac{1}{|(f^n)'(x)|}\right)$$ 【但，$\widetilde{\mathrm{Fix}}(f^n)$ は，$\mathrm{Fix}(f^n)$ の連結成分からなる集合。】を考え，その収束半径を $\exp(-P(f))$

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

とする； $P(f) = \overline{\lim}\ \frac{1}{n} \log \sum_{x \in \mathrm{Fix}(f^n)} \frac{1}{|(f^n)'(x)|}$ 。これらについて次が成立；

<u>Prop.</u> f が unimodal linear transformation（後述）ならば，

(i) $P(f) = \sup_{\mu : f\text{-invariant}} \{ h_\mu(J.f) - \int \log |f'| d\mu \} \geq 0$

(ii) $P(f) > 0 \iff$ 窓（後述）

(iii) $P(f) = 0 \iff$ observable chaos（後述）.

<u>Theorem.</u> f が $x = c \in (0,1)$ 以外で C^1 級の連続写像のとき，

(i) $f'(x) > 0$ if $x < c$ & $f'(x) < 0$ if $x > c$ ならば．

$$\sup \{ h_\mu(f) - \int \log |f'| d\mu \} = \log \rho(\mathcal{L}_f) \geq P(f)$$

但，$\rho(\mathcal{L}_f)$ は，

$$(\mathcal{L}_f \varphi)(x) \triangleq \sum_{y \in f^{-1}(x)} \frac{\varphi(y)}{|f'(y)|}$$

によってきまる operator $\mathcal{L}_f : \mathcal{C}(dx) \to \mathcal{C}(dx)$ の spectral radius.

(ii) (i) の仮定に加えて，さらに，$\exists \lim_{x \uparrow c} f'(x) > 0 > \exists \lim_{x \downarrow c} f'(x)$ ならば，

$$\begin{cases} \sup \{ h_\mu(f) - \log |f'| d\mu \} = P(f) > 0 . \\ P(f) > 0 \iff \text{periodic attractor が存在する。} \end{cases}$$

§6.終。

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

§7. カオス，窓，島

この節では，話の都合上，表題の諸概念について，定義を述べておく。

簡単のため，J を有界閉区間，f を J から J への連続写像とし，区間力学系 (J, f) を考えることにする。

<u>def</u> (J, f) が <u>Li-Yorke の chaos</u> [LY].

$\Leftrightarrow \exists S \subset J$; $\#S = \#\mathbb{R}$. such that

(i) S は周期点を含まない。

(ii) $\forall x, y \in S$; $x \neq y \Rightarrow \begin{cases} \overline{\lim}\ |f^n x - f^n y| > 0 \\ \underline{\lim}\ |f^n x - f^n y| = 0 \end{cases}$.

(iii) $\left.\begin{matrix} \forall p = f \text{の周期点} \\ \forall x \in S \end{matrix}\right\}$ について，$\overline{\lim}\ |f^n x - f^n p| > 0$ 。

実は，"chaos" という言葉の定義は，未だ，確定していない。上の Li と Yorke による定義が "chaos" という言葉を使った最初であると思われる。これ以後，(或るいは過去の類似の概念を見つけ出して，) 様々な "chaos" の定義が与えられている。(余談：日本では，京大の山口昌哉先生が "これが chaos だ" と認めれば，それが "choas" と言われる。---- らしい???)

ここでは，次の定義をもって，"chaos" と呼ぶことにする。

<u>def</u> (Totoki) [To]

(J, f) が <u>pseudo-Markov</u>

$\Leftrightarrow \exists (X, \sigma)$: irreducible Markov shift

$\exists K_u \subset J$ for $\forall u \in W \triangleq \bigcup_n W_n(X, \sigma) = \{X \text{ の word 全体}\}$

s.t.

(i) $K_u \subset J$ は compact，かつ，$\overline{\mathrm{int}\, K_u} = K_u \ (\neq \phi)$ $(\forall u)$.

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

(ii) $f|_{K_{a_1\cdots a_n}}$; $K_{a_1\cdots a_n} \to K_{a_2\cdots a_n}$ は surjective $(\forall a_1\cdots a_n \in W)$

(iii) $\forall n > \forall m$, $\forall a_1\cdots a_n \in W$ について,

$K_{a_1\cdots a_m a_{m+1}\cdots a_n} \subset K_{a_1\cdots a_m}$

NB ふつう, 1次元空間の場合, K_u として, 閉区間をとる。

def (Oono) [OO].

(J, f) が formal chaos

$\Leftrightarrow$ (J, f) が pseudo-Markov で, かつ, 対応する (X, σ) が, 混合的である; i.e. $\forall U, \forall V \subset X$ (open) について, $\exists N = N(U,V) \in \mathbb{N}$ s.t. $\forall n \geqq N$; $\sigma^{-n} U \cap V \neq \phi$。

NB X が simple Markov のとき, (X, σ) が混合的であることと, 次は同値;

M を X の structure matrix とするとき, $\exists N$; $M^N > 0$。

このNoteでは chaos については これ以上, ふれないことにする。が, 現在, "chaos" ということが, 可成, 興味をひいていることは, 事実である。

def μ : J 上の probability measure ; が, (J, f) の asymptotic measure

$\Leftrightarrow$ $\exists E \subset J$; (E の Lebesgue measure) > 0 : such that

$\forall x \in E$; $\lim_{n} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \delta_{f^i x} = \mu$.

但, δ_y は y 上の Dirac measure ; i.e. $\int \varphi \, d\delta_y = \varphi(y)$.

def (J, f) が observable chaos

$\Leftrightarrow$ $\exists \mu$; asymptotic measure : s.t. (J, f, μ) が mixing.

(i.e. $\forall A, B \subset J$: measurable : $\lim [\mu(f^{-n}A \cap B) - \mu(A)\mu(B)] = 0$)

(即ち，十分に複雑な様相が．物理系として観測できる．ということである。)

<u>def</u> (J, f) が <u>窓</u>(window) の状態にある．

$\Leftrightarrow$ $\exists N \subset J$; (NのLebesgue measure) $= 0$.

$\exists C \subset J$; stable periodic orbit

s.t. $\forall x \in J \setminus N$; $\lim_{n\to\infty} d(f^n x, C) = 0$

<u>def</u> (J, f) が <u>島</u>(island) である。或るいは，島 $J_1, \cdots, J_n$ をもつ

$\Leftrightarrow$ イ) $\forall J_i$ は．f^n-invariant closed subinterval で，(J_iの長さ) > 0.

さらに，f は $\{J_1, \cdots, J_n\}$ 上の巡回置換をひきおこす。

(i.e. $f(J_i) = J_{i+1 \,(\mathrm{mod}\, n)}$).

ロ) $\exists \mu$; Lebesgue measure と絶対連続な f-invariant measure.

s.t. $\begin{cases} \mathrm{supp}\,\mu = J_1 \cup J_2 \cup \cdots \cup J_n \\ (J_i, f^n, \mu) \text{ は mixing.} \quad (\forall i). \end{cases}$

ハ) $\exists N$; (Nの Lebesgue measure) $= 0$. s.t.

$\forall x \in J \setminus N$; $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \delta_{f^i x} = \mu$.

87.終

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

§8. Unimodal Linear Transformation

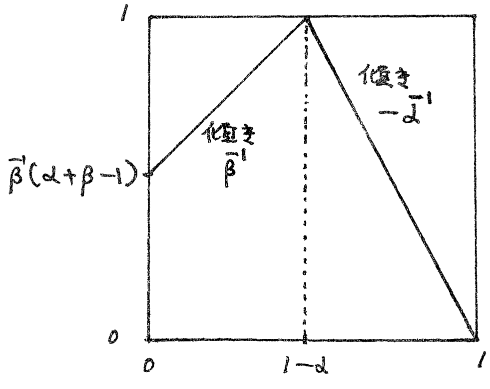
Unimodal Linear Transformation は，区間上の写像としては，おそらく最も簡単なものである。が，しかし，その定義の簡単さにもかかわらず，この写像には充分に複雑な現象が表われている，ということが［ITN］によって調べられている。その現象の解明の課程に於いて，このNoteで述べてきた方法（"実現" etc.）が極めて有効に用いられている。

このNoteでは，それらの結果をまとめるだけにとどめる。詳細は，［ITN］，［高］を参照されたい。

<u>def</u> 2つの parameter $\alpha, \beta > 0$ に対して

$$f_{\alpha,\beta}\, x \triangleq \begin{cases} \beta^{-1}(\alpha+\beta-1+x) & (0 \leqq x \leqq 1-\alpha) \\ \alpha^{-1}(1-x) & (1-\alpha \leqq x \leqq 1) \end{cases}$$

で定義される $f_{\alpha\beta} : [0,1] \to [0,1]$ を，<u>Unimodal Linear Transformation</u> という。

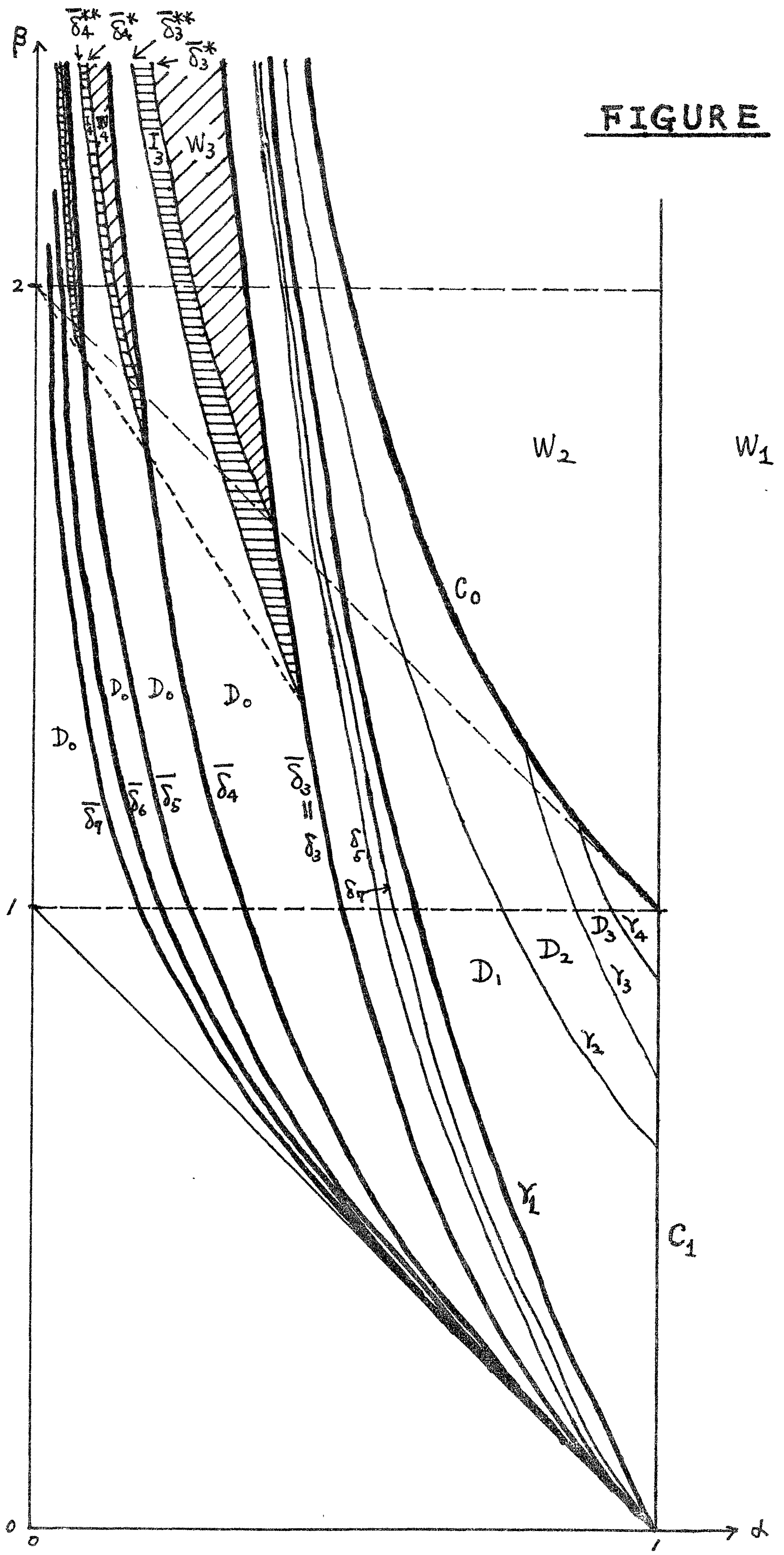


parameter α, β が，
$\alpha+\beta<1$
を満たす時には，$f_{\alpha\beta}$ が定義されないので，以下，$\alpha+\beta \geqq 1$ とする。

parameter (α,β) 〖$\in \mathbb{R}^2$ と思う〗 のとり得る値を次の様にわける。（Figure 参照）

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

FIGURE



Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

$$\begin{cases} C_0\,;\ \alpha\beta = 1 \ \& \ \alpha < 1. \\ C_1\,;\ \alpha = 1,\ 0 < \beta \leqq 1. \\ W_1\,;\ \alpha > 1. \\ W_2\,;\ \alpha\beta > 1,\ 0 < \alpha < 1,\ \beta > 1. \end{cases}$$

以下，全て，

$$\alpha\beta \leqq 1,\quad 0 < \alpha \leqq 1,\quad \beta > 0,\quad \alpha + \beta \geqq 1$$

なる範囲内で考えることにする。

γ_n; $\alpha^{i_n}\beta^{i_{n-1}}(\alpha+\beta) = 1$, where $i_n = [2^{n+1}/3]$ $(n \geqq 1)$

D_n; γ_n と γ_{n+1} との間の領域 $(n \geqq 1)$

δ_k; $1 - \alpha = \beta \cdot P_{k-2}(\alpha)$ $(k = \text{odd} \geqq 3)$

(where $P_k(\alpha) \triangleq \alpha - \alpha^2 + \alpha^3 - \cdots - \alpha^{k-1} + \alpha^k$.)

$\overline{\delta_k}$; $1 = \alpha(1 + \beta + \cdots + \beta^{k-2})$ $(k = 3, 4, \cdots)$

NB: $\delta_3 = \overline{\delta_3}$

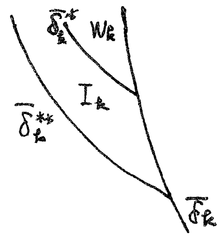
$\overline{\delta_k}^*$; $\beta^{k-1}\alpha = 1$ & $\overline{\delta_k}$ より下. $(k = 3, 4, \cdots)$

$\overline{\delta_k}^{**}$; $\alpha(\alpha+\beta)\beta^{k-2} = 1$ & $\overline{\delta_k}$ より下 $(k = 3, 4, \cdots)$

W_k; $\overline{\delta_k}$ と $\overline{\delta_k}^*$ とに囲まれた領域

I_k; $\overline{\delta_k}$ と $\overline{\delta_k}^*$ と，$\overline{\delta_k}^{**}$ とに囲まれた領域

D_0; γ_1 より下の領域から，$\bigcup_{k\geqq 3}(W_k \cup I_k)$ を除いた部分。



以上で，$\alpha + \beta \geqq 1$ なる $\alpha, \beta > 0$ が全て出現している。
さらに，δ_k に関係して，

$$I\,\delta_{n,k} \triangleq 1 - \alpha^{p_n}\beta^{p_{n-1}} = \alpha^{2p_{n-1}}\beta^{2p_{n-2}} P_{k-2}(\alpha^{p_n}\beta^{p_{n-1}})$$

と定める。但

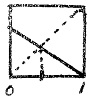
$$p_n \triangleq \frac{1}{3}\left(2^{n+1} + (-1)^n\right) \qquad (n \geqq 1).$$

このとき，(α, β) が上の，どの集合に属するかによって，$f_{\alpha\beta}$ の性質が次の様にわかる：

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

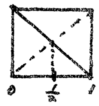
① 周期点について；

・W_1 では，唯1つの安定不動点をもつ：



・$\alpha=1$ のとき，1つの不動点をもち，それ以外は全て2-周期点：

・W_2 では，不安定不動点1つと，周期2の安定周期点のみが存在する。



・C_0 では，不安定不動点1つと，周期4の周期軌道のみが存在する。

・γ_n では，$2^n\cdot l$-周期点（$\forall l=1,2,3,\cdots$）は存在するが，$2^{n-1}\times(\text{odd}\geq 3)$-周期点はない。

・D_n（$n\geq 1$；γ_n, γ_{n+1} 上の点はふくまない）では，$2^n\times(\text{odd}\geq 3)$-周期点はあるが，$2^{n-1}\times(\text{odd}\geq 3)$-周期点はない。

・δ_k では，oscillating k-cycle があり，δ_k と δ_{k+2} との間では，oscillating $(k+2)$-cycle はあるが，oscillating k-cycle はない。即ち，δ_k は，oscillating k-cycle の出現境界である。（同様な意味で，$\delta_{n,k}$ は，$2^n\cdot k$-oscillating-cycle の出現境界である。）

・$\overline{\delta_k}$ 及びその左下側では，ascending k-cycle が存在する。

② topological entropy について；　（ent ≡ ent $f_{\alpha,\beta}$）

・W_1, W_2, C_0, C_1 上．**ent** $=0$

・γ_n 上で　**ent** $=\frac{1}{2^n}\log 2$

・D_n では，ent $\in \left[\frac{1}{2^{n+1}}\log 2, \frac{1}{2^n}\log 2\right]$

・δ_k 上で，ent $=\log t_k$

　但，t_k は $t^k-2t^{k-2}-1=0$ の唯一の正根．

・$\delta_{n,k}$ 上で，ent $=\frac{1}{2^n}\log t_k$

・$\overline{\delta_k}$ 上で，ent $=\log \overline{t_k}$

　但，$\overline{t_k}$ は $t^k-2t^{k-1}+1=0$ の唯一の正根。

・$W_k\cup I_k$ 上で，ent $=\log \overline{t_k}$

・$\alpha+\beta=1$ 上で，ent $=\log 2$

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

<u>Remark</u>. $2 = \lim_k \overline{t_k} > \cdots > \overline{t_5} > \overline{t_4} > \overline{t_3} = t_3 > t_5 > t_7 > \cdots$
$> \lim_k t_k = \sqrt{2}$.

③ invariant measure について; ($f \triangleq f_{\alpha,\beta}$)

- $C_0, C_1, \overline{\delta_k}^*$ 以外の全ての場合, asymptotic measure が存在する; $\mu = {}^{\exists}\lim \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \delta_{f^i x}$ (dx-a.e. x)
- W_k ($k=1,2,3,\cdots$) では, attracting k-cycle があり, asymptotic measure はその cycle 上の uniform measure.
  (但, W_k ($k \geq 3$) は $\overline{\delta_k}^*$ をふくまないものとする)
  とくに, W_k ($k \geq 3$) は window.
- I_k ($k \geq 3$) では, asymptotic measure μ は Lebesgue measure dx に関して density fn φ をもつ; $\mu = \varphi\, dx$.
  (但, I_k は $\overline{\delta_k}^{**}$, $\overline{\delta_k}^*$, $\overline{\delta_k}$ をふくむものとする).
  さらに, supp μ は k 個の disjoint intervals (これらを, $J_1, \cdots, J_k$ とおく) の和集合にふくまれる; supp $\mu \subset J_1 \cup \cdots \cup J_k$.
  また, 各 $(J_j, \varphi dx, f^k)$ は mixing. とくに, I_k では, island.
  NB $f^k_{\alpha,\beta} | J_j \cong f_{\alpha^2 \beta^{k-2}, \alpha\beta^{k-1}}$ ($\forall j$).
- D_n ($n \geq 0$) では, μ は density fn φ をもつ; $\mu = \varphi dx$.
  さらに, supp μ は 2^n 個の区間からなり, その各々の上で, f^{2^n} は mixing で, entropy は正。

- 上に述べたうち, density fn φ が存在する場合, φ は次の様に書ける;

$$\varphi(x) = A \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot 1(x > f^n_{\alpha,\beta} 0).$$

但. $\begin{cases} A = \text{正規化定数} \\ a_0 = \alpha \\ a_n = (-\alpha)^{p_n} \beta^{q_n} \cdots\cdots \begin{cases} p_n = \#\{i;\ 0 \leq i < n,\ f^i_{\alpha,\beta} 0 \geq 1-\alpha\} \\ q_n = n - p_n \end{cases} \end{cases}$

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

④ Chaos について；

- $W_1 \cup W_2$ 以外では，　$\exists n \geq 1$: f^n は formal chaos
- $W_3 \cup W_4 \cup \cdots$ では，　f は formal chaos だが
  $\forall n \geq 1$; f^n は observable chaos でない。
- $I_3 \cup I_4 \cup \cdots$ では，　$\exists n \geq 1$; f^n は observable chaos. だが
  f はそうでない。
- D_0 では，　f が observable chaos.

$\square$

さらに，平衡測度に関しては，unimodal linear transf. の場合，次の定理が成立する。

<u>Theorem</u>　unimodal linear transformation $f = f_{\alpha,\beta}$ について，

(i)　$D_f(z) \triangleq \exp\left\{-\sum_{n=1}^{\infty} z^n/n \cdot \sum_{x \in \widetilde{Fix}(f^n)} \dfrac{1}{|(f^n)'(x)|}\right\}$

但. $\widetilde{Fix}(f^n) \triangleq \pi_0(Fix(f^n))$.

$P(f) \triangleq \sup\{h_\mu(f) - \int \log|f'|\,d\mu \;;\; \mu = f\text{-invariant}\}$

とおくとき，

$\exp\{-P(f)\}$ は，$D_f(z)$ の最小正零点。

(ii)　asymptotic measure μ_f が存在するとき，

$P(f) = h_{\mu_f}(f) - \int \log|f'|\,d\mu_f$

(iii)　$P(f) > 0$ ならば，μ_f は Lebesgue measure にかんして absolutely continuous でない。

(iv)　$P(f) = 0$ ならば，μ_f は Lebesgue measure にかんして，absolutely continuous で，$\mu_f = \varphi_f\,dx$ とするとき，$\mathrm{supp}\,\varphi_f$ の connected component の個数は，$e^{-P(f)}$ の $D_f(z)$ の零点としての多重度に等しい。 $\square$

§8. 終.

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

§Appendix.

この節では、本文中に使った Kolmogorov-Sinai invariant, 即ち metrical entropy についてまとめておく。証明は [W][DGS] etc. 参照。

(Ω, μ) を Borel probability measure space, $f : (\Omega, \mu) \to (\Omega, \mu)$ を measure preserving transformation とする。

<u>def</u> Ω の measurable subsets による countable partition α について
$$H(\alpha) = H_\mu(\alpha) \triangleq \sum_{A \in \alpha} -\mu(A) \log \mu(A).$$ (但; $0 \cdot \log 0 = 0$ とする)

＊以下. partition としては, $H(\alpha) < \infty$ なるもののみを考える。

<u>def</u> $h_\mu(\Omega, f, \alpha) \triangleq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H_\mu(\alpha \vee f^{-1}\alpha \vee \cdots \vee f^{-n+1}\alpha)$ を, α に関する (Ω, f) の <u>metrical entropy</u> という。但, ここで,
$\alpha \vee \beta \triangleq \{A \cap B \,;\, A \in \alpha, B \in \beta\}$, $f^{-1}\alpha \triangleq \{f^{-1}A \,;\, A \in \alpha\}$.
<u>NB</u> 上の limit は存在して, inf に等しく, 有限。

<u>def</u> $h_\mu(\Omega, f) = h_\mu(f) \triangleq \sup_\alpha h_\mu(\Omega, f, \alpha)$ を, (Ω, f) の <u>Kolmogorov-Sinai invariant</u>, <u>metrical entropy</u>, <u>measure-theoretic entropy</u> 等という。

<u>def</u> finite partition α が (Ω, μ, f) の <u>generator</u>
$\Leftrightarrow$ $\alpha \vee f^{-1}\alpha \vee \cdots\cdots =$ (各点分割) $[\bmod_\mu 0]$.

<u>Theorem A-1.</u> α: generator $\Rightarrow h_\mu(\Omega, f) = h_\mu(\Omega, f, \mu)$.

<u>Remark A-2.</u> A 上の subshift (X, σ) について, canonical partition $\alpha_0 = \{[a] \cap X \,;\, a \in A\}$ は generator である。特に,
$h_\mu(X, \sigma) = h_\mu(X, \sigma, \alpha_0)$.

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

Theorem A-3. (Variational Principle) (Ω, f) が compact space 上の topological dynamical system のとき，

$$\mathrm{ent}(\Omega, f) = \sup\{h_\mu(\Omega, f)\ ;\ \mu \text{ は } f\text{-invariant Borel. prob. meas.}\}$$

ここで，ergodic な μ のみに関して sup をとっても．O.K.

def $\mathcal{E}(\Omega, f) \triangleq \{\mu\ ;\ \mathrm{ent}(\Omega, f) = h_\mu(\Omega, f)\}$; equilibrium measures.

def Ω の partitions α, β に対して，

$$h_\mu(\alpha|\beta) \triangleq \sum_{B\in\beta} \mu(B)\cdot\Big(\sum_{A\in\alpha} -\frac{\mu(A\cap B)}{\mu(B)} \log \frac{\mu(A\cap B)}{\mu(B)}\Big)$$
$$= \sum_{A\in\alpha,\, B\in\beta} -\mu(A\cap B) \log \frac{\mu(A\cap B)}{\mu(B)}$$
$$= H(\alpha\vee\beta) - H(\beta).$$

Theorem A-4.

$$h_\mu(\Omega, f) = \lim_{n\to\infty} h\Big(\alpha \,\Big|\, \bigvee_{i=1}^{n} f^{-i}\alpha\Big)$$
$$= \inf_n h\Big(\alpha \,\Big|\, \bigvee_{i=1}^{n} f^{-i}\alpha\Big)。$$

以下，特に subshift (X, σ) の metrical entropy について考える。先ず，A-2，A-4 により，

Theorem A-5.

$$h_\mu(X, \sigma) = h_\mu(X, \sigma, \alpha_0)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{a_0\cdots a_{n-1}\in W_n(X)} -\mu[a_0\cdots a_{n-1}] \log \mu[a_0\cdots a_{n-1}]$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{a_0\cdots a_{n-1}\in W_n(X)} -\mu[a_0\cdots a_{n-1}] \log \frac{\mu[a_0\cdots a_{n-1}]}{\mu[a_1\cdots a_{n-1}]}.$$

ここで，lim を inf におきかえても O.K.

Remark A-6.

上の式 (A-5) は，さらに書き換えることができて，

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

$$h_\mu(X,\sigma) = \lim_{n\to\infty} \sum_{a_0a_1\cdots a_{n-1}\in W_n(X)} -\mu[a_0\cdots a_{n-1}] \log \frac{\mu[a_0\cdots a_{n-1}]}{\mu[a_0\cdots a_{n-2}]}$$

とも書ける。この場合も lim を inf でおきかえてよい。

<u>Theorem A-7.</u> metrical entropy を, invariant Borel prob. measures 全体の space (vague topology を入れて, topological space と思う) から $\mathbb{R}$ への関数だと思う。このとき次が成立;

関数 $h : \mu \longmapsto h(\mu) \triangleq h_\mu(X,\sigma)$ は,

(i) affine である。即ち, $h(t\mu+(1-t)\lambda) = t\,h(\mu)+(1-t)\,h(\lambda)$
$(\forall \mu,\lambda\ ;\ 0 \leqq \forall t \leqq 1)$

(ii) upper semi-continuous である。即ち,
$\mu_n \longrightarrow \mu \quad \Rightarrow \quad \overline{\lim_n}\, h(\mu_n) \leqq h(\mu)$。

<u>Theorem A-8.</u> $\forall$subshift (X,σ) について, $\mathcal{E}(X,\sigma) \neq \phi$。

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

REFERENCES

参考文献として，特に本文中に引用したもののみをあげておく。

[高] 高橋陽一郎，区間力学系のカオスと周期点，都立大学数学教室セミナー報告（1980）.

[高′] ——————，一次元力学系のカオスとゼータ函数，力学系理論と関連諸分野の総合的研究，昭和54年度記録集（1980. Feb.）.

[岩] 岩堀長慶，線型不等式とその応用，岩波講座基礎数学，線型代数 vii.（1977）

[杉] 杉浦光夫，Jordan標準形と単因子論 II，岩波講座基礎数学，線型代数 ii.（1977）

[B] Bowen, R., Topological Entropy and Axiom A, Proc. Symp. Pure Math., A.M.S, 14 (1970), 23–41.

[Bowen] ——————, Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms, Springer Lecture Notes in Math., 470 (1975).

[DGS] Denker, M., Grillenberger, C., and Sigmund, K., Ergodic Theory on Compact Spaces, Springer Lec. Notes in Math. 527 (1976).

[G] Gantmacher, F.R., The Theory of Matrices, II, Chelsea.(1959).

[ITN] Ito, Sh., Tanaka, S., and Nakada, H., On Unimodal Linear Transformations and Chaos, Proc. Jap. Acad. 55, Ser. A. (1979), 231-236, and. Tokyo. J. Math. 2 (1979). 221-239, 241-259.

[M] Marotto, F. R., Snap-Back Repellers Imply Chaos in $\mathbb{R}^n$, J. Math. Analys. Appl. 63 (1978), 199-223.

[OO] Oono, Y., and. Oshikawa, M., Chaos in C^0-Endomorphism of Interval, Prog. Theor. Phys. 64 (1980), 54.

[Šh] Šharkovskii, A. N., Coexistence of Cycles of a Continuous Map of a Line into Itself, Ukrain. Mat. Ž. 16 (1964), 61-71. (in Russian).

[Št] Štefan, P., A Theorem of Šarkovskii on the Existence of Periodic Orbits of Continuous Endomorphisms of the Real Line, Commun. Math. Phys. 54 (1977), 237-248.

[T] Takahashi, Y., A Formula for Topological Entropy of One-dimensional Dynamics, Scientific Papers of the College of General Education, University of Tokyo, 30 (1980) 11-22.

[To] Totoki, H., Pseudo-Markov Transformations, Ann. Polon. Math. 41 (1982).

[W] Walters, P., Ergodic Theory — Introductory Lectures, Springer Lecture Notes in Math. 458 (1975).

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

［高］ は，言うまでもなく，このNote全体の参考となる。この本の参考文献も参照されたい。

［DGS］，［W］ は，エルゴード理論一般の参考書。［DGS］は辞書的なまとめ。［W］は，題名にもある如く，簡明な入門書。

［G］，［岩］，［杉］，は，Perron - Frobenius の定理について記述がある。特に［G］が詳しい。

［Št］ は，［Šh］にある証明の不備を補充したもので，oscill. cycle についても触れてある。

［Bowen］ は，Axiom A diffeomorphism のエルゴード理論を展開してあるレクチャー・ノートである。最初のほうに，shift の equillibrium state について述べてあるが，このNoteの第6章の内容を越えていない。

［高'］ は，1980年1月に名古屋で行われたシンポジウムの記録集である。

Sem. on Probab.
Vol.50 1981年
P1-158

1981年2月 確率論セミナー発行