Sem. on Probab.
Vol.46 1977年
P1-89

SEMINAR ON PROBABILITY

Vol. 46

Gibbs 測度の特徴づけ

高 橋 陽 一 郎

1 9 7 7

確 率 論 セ ミ ナ ー

Sem. on Probab.
Vol.46 1977年
P1-89

このノートでは，point process（あるいは，random poi[illegible]組の中で，Gibbsian fieldsをとらえることを目標とし，その範囲でのpoint processesの一般論を紹介する。

最近，古典統計力学は，解析力学が微分方程式論であるという意味で，確率論てあると言われ始めているが，そこにはいくつかの大きな問題と数学的な諸問題がある。例えば，統計力学の教科書を開くとき，次のような表現にしばしば出あう：非常に多数の粒子からなる系の力学（mechanics）の巨視的な性質は，平衡状態の下では，（グランド）カノニカルアンサンブル平均（=Gibbsian fieldに関する平均）として定まる。この命題は，少くとも

——————— Gibbs場に対する力学系のエルゴード定理の検証

——————— 力学系の種々の不変測度の中でGibbs場の特にもつ意味

という大きな問題を含み，さらに，その前提として，位相力学系（正しくは，区分的に滑らかな力学系）としての構成の問題があるが，それさえも，いくつかの例外*)を除けば，平衡下での稀薄気体の分子運動論に相当する測度論的な力学系が，かなり一般に構成されているにすぎない。

そこで，上のような本来の問題から離れて，数学的対象としてのGibbs場というものを取り出して考えてみよう。その主な定義あるいは特徴づけは，

(イ) 有限な系の無限体積極限

(ロ) DRLの条件つき確率

(ハ) 変分原理（自由エネルギー最大）

(ニ) KMS条件：Hamiltonianの局所摂動に関する安定性，力学系の自己随伴性（可逆性）

などがある。ただし，これらの特徴づけが，すべての場合，即ち，

---

*) 調和振子を除けば，Dobrushin-Fritzの結果がある。上の(ニ)とも関連しての摂動に関する安定性，あるいはBoltzmann方程式や流体力学の方程式などとの関連を考える上では，非平衡下の力学系（dynamical system）の構成の問題は避け得ないはずである。

Sem. on Probab.
Vol.46 1977年
P1-89

格子系・連続系，古典統計・量子統計について確立されているかどうか筆者は知らない。エルゴード理論と一次元格子系の古典統計力学との類比（あるいは“同型”！）から考えれば，(イ),(ロ),(ハ)共に（そしておそらくは，何らかの意味で（ニ）も？）Gibbs場は，ポテンシャルによる“空間の歪み”の下で，空間の一様な場であることを意味していることは，ここで注意しておくべきであろう（[26],[27]）。

ところで，ユークリッド空間上の局所有限な粒子の配置（configuration）の空間の（“歪み”なしの）一様な測度は，ポテンシャルのない場合，即ち，Poisson場であり，これには，このノートでまとめたように，いくつかの美しい特徴づけがある。上に述べた(イ)ー(ニ)によって，（それらの同値性が完成されたとして）個々のポテンシャルに対するGibbs場が了解されたとしても，Poisson場を自明なものとして含むGibbs場というrandom point fieldsのクラスは何かという（数学的）疑問が残る。これに対する一つの解答は，

（ホ） Palm測度の絶対連続性

である。これは，ポテンシャルが古典的な二体間ポテンシャルの時（中心力である必要はない）に，point processの一般論でPalm測度と対をなす基本概念である相関測度（正しくは，その密度函数である相関測度）に対するKirkwood-Salsburg方程式による特徴づけの自然な一般化にもなっている（§5）。

この“ブルバキ流”のクラスとしての特徴づけは，もちろん具体的な本来の問題には結びつきそうもない。しかし，例えば，局所有限なハミルトン力学系が位相力学系として定義されていることを仮定すれば（これは未だ一次元でしか示されていないが），時間発展によって，Gibbs場のクラスが保存されることも示される。ここからもう一つの時間発展の記述法であるBBGKY hierarchy（N.N.Bogolioubov の Studies in Statistical Mechanics I（ed. J. de Boer, G.E.Uhlenbeck, 1962）の中の論文 Problems of a dynamical theory in statistical physics, O.E.Lanford III Dynamical Systems, Theory and Applications (Springer.

Sem. on Probab.
Vol.46 1977年
P1-89

Lecture Notes in Physics 38,1975)の中の論説, Takahashi 東大教養学部紀要 1976)の定常解としての平衡測度(=時間発展を記述するポテンシャルに対する Gibbs 測度)としての Гуревич と Сухов の特徴づけまではほんの一歩である。しかし,定常解のすべてが平衡測度になるわけではないようで(Ю.Сухов の話)(ニ)と対応して,次の問題もまだ完全に解決できているわけではない。

(ヘ) BBGKY 方程式系の定常解としての特徴づけ

なお, random point field でなければ Palm 測度は定義されないが,適当な修正をして定義し直せば,(ホ)によって, Markov 場や Gauss 場を Gibbs 場と見ることも可能なようである。

ノートを整理し,清書する段階では,全面的に黒田耕嗣氏にお世話になった。また彼の suggestion もあり,粒子配置の空間やその上の場の位相に関する証明などを,教育大においての話('75 冬学期)に加えたが不十分かと思う。巻末の文献で補って頂きたい。なお, point process については,それが種々の観点で様々な興味から論じられてきているためか,標準的な用語が確定していないように思われる。最も重要な概念である相関測度と Palm 測度についてさえも,例えば後者は, Хинчин や Kendall の名で呼ばれることもある。ここでは [6] (正しくはその原形である同名の technical report の形の講義録)のことば使いに多くを依存し,一方で統計力学での用語を流用したことをお断りしておく。また, §5 のかなりの部分については, [18] の樋口保成氏によるまとまったノートを利用させてもらったが, Renyi-Kallenberg の補題(§1, Lemma 2)によって証明が簡単になったことは,この補題の単純さから見て驚くべきことかも知れない(この補題の呼び方も [6] によっている)。一次元古典統計力学が"trivial"であることを示す例として,最後に transfer matrix による方法を紹介した。それが連分数(一般に"数論的")変換の測度論的研究における Gauss や Kuzmin に始まる方法と"同じ"であることは説明を要しないことと思う。

Sem. on Probab.
Vol.46 1977年
P1-89

目　　次

Sem. on Probab.
Vol.46 1977年
P1-89

§1 Point process

以下 空間 R は特に断わらない限り局所 compact で可算基をもつ Hausdorff 空間とする.

Def 1

R 上の非負整数値 Radon measure m を locally finite configuration over R と呼び, R 上の locally finite configurations の全体を $Q = Q(R)$ で表わす.

このとき, Q は Radon measures の作る空間 $C_c(R)'$ における弱閉集合となる. ($C_c(R)$ は R 上の compact な support をもつ連続関数のつくる Fréchet 空間)

Q 上の相対位相は, 従って,

$$(1) \qquad Q \ni m \longmapsto \langle m, \varphi \rangle = \int \varphi(x)\, m(dx) \qquad \varphi \in C_c(R)$$

を連続にする最弱位相である. この位相から定まる Borel σ-algebra ($=$ Baire σ-algebra) $\mathcal{F}$ は次の様な形の集合 Γ から generate される Q 上の σ-algebra $\mathcal{B}$ と一致する.

特に $\mathcal{B}$ は可算基をもつ σ-algebra であり従って任意の $\mathcal{B}$ 上の Borel 測度に関して完備化すれば Lebesgue 空間が得られる.

$$(2) \qquad \Gamma = \{ m \in Q \ ; \ m(E_i) = n_i \quad (i = 1, 2, \cdots, k) \}$$

ただし $k = 1, 2, \cdots$; $n_i = 0, 1, 2, \cdots$

$E_1, \ \cdots, E_k$ は互に素な R の Borel subsets.

Sem. on Probab.
Vol.46 1977年
P1-89

実際 先ず E_i を compact 集合に制限しても生成される σ-algebra は $\mathcal{B}$ に一致する事に注意すれば、(1) の連続性より

$$m \longmapsto m(K) \qquad (K \subset R : \text{compact})$$

は位相的 Borel 関数である事から、(2) が位相的 Borel 集合である事がわかる。

逆を見よう。明らかに Borel 集合 E_i と $\alpha_i \geq 0$ $(i = 1, 2, \cdots k)$ を fix すると、

$$Q \ni m \longmapsto \sum_{i=1}^{k} \alpha_i\, m(E_i) \quad \in [0, \infty]$$

は $\mathcal{B}$ 可測である。ところで この形の関数によって連続関数 (1) は一様近似される。故に (1) は $\mathcal{B}$ 可測関数である。

注 1 R が compact であれば、Q は次の空間と自然に(位相をこめて)同一視される

$$\bigcup_{n \geq 0} \tilde{R}_n \qquad \text{ただし } \tilde{R}_n \text{ は } R^n = R \times \cdots \times R \text{ の対称化}$$

$\tilde{R}_0$ は一点集合.

即ち $\tilde{R}_n = R^n / n$次対称群

注 2 E を R の Borel 集合とし、(2) で $E_i \subset E$ $(\forall i)$ と制限して得られる σ-algebra を $\mathcal{B}_E$ と書くことにすれば

i) $E \subset F \implies \mathcal{B}_E \subset \mathcal{B}_F$

ii) $\mathcal{B} = \bigvee_{K \cdot \text{compact}} \mathcal{B}_K$

である事は自明であろう.

Sem. on Probab.
Vol.46 1977年
P1-89

また

iii) $\qquad Q = {}^{\bullet}\varinjlim Q(K) \qquad (K : \text{compact})$

特に Q の compact 集合 C があれば

$$\{ m \text{ の } K \text{ への制限} \ : \ m \in C \}$$

は $Q(K)$ の（弱）compact 集合である．

Def 2

Q 値の random variable ξ を R 上の random counting measure あるいは point process という．又 $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ を確率空間とし，$\xi(\omega) \in Q$ とする時，ξ の分布則 $\mu(\Gamma) = P(\xi(\omega) \in \Gamma)$ を counting measure という事もある。

注　random point process はその Laplace 変換

(3) $\qquad L(\varphi) \equiv E[\, e^{-\langle \xi, \varphi \rangle} \,] \qquad \varphi \in C_c^+(R)$

によって一意的に定まる．実際，(3) の値を $C_c^+(R)$ 上定める事は任意の非負 Borel 関数 φ に対して定める事と同値である．（Lebesgue の定理）．よって，(2) の形の集合 Γ の測度が L から一意的に定まる．

逆に，(3) で定義された $L(\varphi)$ が自動的にみたす性質

(4) $\qquad (-1)^n \Delta_{\varphi_1} \cdots \Delta_{\varphi_n} L(\varphi_0) \geq 0 \qquad \forall \varphi_0, \varphi_1, \cdots \varphi_n \in C_c^+(R)$

$\qquad$ 但し $\quad \Delta_{\varphi_1} L(\varphi_0) = L(\varphi_0 + \varphi_1) - L(\varphi_0)$

を仮定すれば，連続関数 L は Q 上の測度を定義する．

Sem. on Probab.
Vol.46 1977年
P1-89

例． λ-Poisson measure について．

λ を R 上の non-negative Radon measure とし

$$\Gamma = \{ m \in Q \; ; \; m(E_i) = n_i \quad i = 1, 2, \cdots, k \} \quad (E_i : \text{disjoint})$$

に対して

$$\mu(\Gamma) = \prod_{i=1}^{k} \frac{\lambda(E_i)^{n_i}}{n_i !} \cdot e^{-\lambda(E_i)}$$

とおくと μ は Q 上の probability measure に拡張される事が以下でわかる．この measure を λ に associate した Poisson measure と呼び π_λ で表わす．又 λ を π_λ の intensity measure という事である．

λ-Poisson measure についていくつかの性質を導きながら存在を示そう．

1) $\lambda(R) < \infty$ の時

$\bigcup_{n \geq 0} R^n$ 上の測度 $\tilde{\pi}_\lambda$ を

$$\tilde{\pi}_\lambda = \begin{cases} \text{unit point mass on } R^0 = (\text{一点集合}) \\ \dfrac{\lambda^{\otimes n}}{n!} \quad \text{on } R^n \quad (n \geq 1) \end{cases}$$

と定義すれば，対称な測度であるから $\bigcup_{n \geq 0} R_n$ 上の測度 $\bar{\pi}_\lambda$ を誘導する．よって Q 上の測度 π_λ が存在する．
さらに

$$(5) \qquad \int_Q \pi_\lambda(dm)\, e^{-\langle m, \varphi \rangle} = \exp\left\{ -\int_R (1 - e^{-\varphi(x)})\, \lambda(dx) \right\} \qquad \forall \varphi \in C^+(R)$$

が成立する．

Sem. on Probab.
Vol.46 1977年
P1-89

(5) の証明

$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}$ $\alpha_i \geq 0$ $\{E_i\}$: R 上の Borel sets で互いに disjoint の時について示せばよい。

$$左辺 = \int \pi_\lambda(dm)\, e^{-\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle m, \chi_{E_i} \rangle} = \int \pi_\lambda(dm)\, e^{-\sum_{i=1}^{n} \alpha_i m(E_i)}$$

$$= \sum_{k_1, \cdots, k_n} e^{-\sum_{i=1}^{n} \alpha_i k_i} \pi_\lambda(m(E_1) = k_1, \cdots, m(E_n) = k_n)$$

$$= \sum_{k_1, \cdots, k_n} \prod_{i=1}^{n} e^{-\alpha_i k_i} \pi_\lambda(m(E_i) = k_i)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\alpha_i k} \pi_\lambda(m(E_i) = k)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda(E_i)} \cdot \frac{(\lambda(E_i)\, e^{-\alpha_i})^k}{k!}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \exp\{\lambda(E_i)(e^{-\alpha_i} - 1)\}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \exp\{-\int (1 - e^{-\alpha_i \chi_{E_i}(x)})\, \lambda(dx)\}$$

一方

$$右辺 = \exp\{-\sum_{i=1}^{n} \int_{E_i} (1 - e^{-\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}(x)})\, \lambda(dx)\}$$

$$= \exp\{-\sum_{i=1}^{n} \int_{E_i} (1 - e^{-\alpha_i})\, \lambda(dx)\}$$

$$= \exp\{-\sum_{i=1}^{n} \int_{R} (1 - e^{-\alpha_i \chi_{E_i}(x)})\, \lambda(dx)\}$$

左辺 = 右辺

Sem. on Probab.
Vol.46 1977年
P1-89

2) $\lambda(R)=\infty$ の時

$K\subset R$: compact に対して $\lambda'(E)=\lambda(E\cap K)$ とおくと $\lambda'(R)<\infty$
よって $f\in C_c(R)$ $\mathrm{supp}\, f\subset K$ の時

$$\int \pi_\lambda(dm)\ e^{-\langle m,f\rangle} = \int \pi_{\lambda'}(dm)\ e^{-\langle m,f\rangle}$$ が成り立つ.

$\lambda'(R)<\infty$ であるから より $K\uparrow R$ とすれば

$$\int \pi_\lambda(dm)\ e^{-\langle m,f\rangle} = \exp\left\{-\int_R (1-e^{-f(x)})\,\lambda(dx)\right\}$$

が成り立つ.

3) ξ : λ-Poisson に従う Q 値 random variable とする時

$$E\langle \xi, f\rangle = \langle \lambda, f\rangle \qquad \text{for } {}^\forall f\in C_c(R)$$

が成り立つ. これを symbolical に $E\xi=\lambda$ と書く.

proof)

$$E\langle \xi, f\rangle = E\left[\int_R f(x)\,\xi(dx)\right]$$

$$= -\frac{d}{dt}E\left[\exp\left\{-t\int_R f(x)\,\xi(dx)\right\}\right]_{t=0}$$

$$= -\frac{d}{dt}\left\{\int e^{-\langle \xi, tf\rangle}\,\pi_\lambda(d\xi)\right\}_{t=0}$$

$$= -\frac{d}{dt}\left\{\exp\left(-\int_R (1-e^{-tf(x)})\,\lambda(dx)\right)\right\}_{t=0}$$

$$= \int_R f(x)\,\lambda(dx) = \langle \lambda, f\rangle$$

Sem. on Probab.
Vol.46 1977年
P1-89

4) $f_i \in C_c(R)$ $(i=1 \cdots n)$ が互いに disjoint な support をもつ時

$$E\left(\prod_{i=1}^{n} \langle \xi , f_i \rangle \right) = \prod_{i=1}^{n} \langle \lambda , f_i \rangle$$

が成立する.

5) λ が σ-finite な Borel 測度で compact set K に対して必ずしも $\lambda(K) < \infty$ とならなくても Poisson 測度 π_λ は定義できる. (compact set の役割を

$$\{ K : \text{compact} \quad \lambda(K) < \infty \}$$

におきかえてみよ)

Def 3.

ξ : R 上の random counting measure

$\{E_i\}_{i=1}^{n}$ が互いに disjoint

$\Longrightarrow$ $\{ \omega \in \Omega : \xi(\omega)(E_i) = k_i \}_{i=1}^{n}$ が独立

となる時 ξ は regionary independent であるという.

Def 4

1) R 上の random counting measure ξ が atomic

$\rightleftarrows$ $\exists a \in R$ $P(\xi(\{a\}) > 0) > 0$

2) $P(\exists a \in R : \xi(\{a\}) \geq 2) > 0$ の時 random counting measure ξ は多重点をもつという. 多重点をもたない事を orderly simple という.

Sem. on Probab.
Vol.46 1977年
P1-89

注

$m \in Q$ が多重点を持たないときには、m と可算点集合

$$\{x \in R \ ; \ m(\{x\}) > 0\}$$

とは同一視される。本来、この場合に、配置（configuration）という言葉が用いられる。

Prop 1 （Korolyuk）

μ : mean λ をもつ counting measure

この時 次の a) 〜 c) は互いに同値

a) μ : 多重点をもたない。 i.e. $\mu(\exists x \in R \ ; \ \xi(x) \geq 2) = 0$.

b) $\hat{\lambda}(E) \equiv \sup\{\sum_i \mu(\xi(E_i) > 0) \ ; \ \sum E_i = E\}$ とおくと

$\hat{\lambda}(E) = \lambda(E)$ for $\forall E$: bounded in R

c) $\lambda_1(E) \equiv \sup\{\sum_i \mu(\xi(E_i) = 1) \ ; \ \sum E_i = E\}$ とおくと

$\lambda_1(E) = \lambda(E)$ for $\forall E$: bounded in R.

(proof)

1° $\lambda_1(E) \leq \hat{\lambda}(E) \leq \lambda(E)$ for $\forall E$: bounded を示す。

∵) $\lambda_1(E)$ $\hat{\lambda}(E)$ の定義より $\lambda_1(E) \leq \hat{\lambda}(E)$ は明らか

$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(\xi(E_i) = n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} n\,\mu(\xi(E_i) = n) = \mu(\xi(E_i))$ より

$\mu(\xi(E_i) > 0) \leq \mu(\xi(E_i))$

∴ $\sum_i \mu(\xi(E_i) > 0) \leq \mu(\xi(E)) = \lambda(E)$

∴ $\hat{\lambda}(E) \leq \lambda(E)$

以下 E を bounded set in R とし

$\{E_{n,i} \ ; \ i = 1, 2, \cdots, k_n\}$ を各要素が直径 $\frac{1}{n}$ の sets から成る E の partition とし、$\{E_{n+1,i} \ ; \ i = 1, 2, \cdots, k_{n+1}\}$ は $\{E_{n,i} \ ; \ i = 1, 2, \cdots, k_n\}$ の細分になる様にする。

Sem. on Probab.
Vol.46 1977年
P1-89

2° a) ⟶ c) ⟶ $\mathscr{a}$) を示す。

1° より c) ⟶ $\mathscr{a}$) は明らか.

a) ⟶ c) を示す.

$p \geq 1$: integer とする.

$$\mu(\xi(E) \wedge p) = \mu((\textstyle\sum_i \xi(E_{n,i})) \wedge p)$$
$$= \mu(\textstyle\sum_i \xi(E_{n,i}) \wedge p \ ;\ \xi(E_{n,i}) \leq 1 \ \ \forall i) + \mu(\textstyle\sum_i \xi(E_{n,i}) \wedge p \ ;\ \exists i \ ;\ \xi(E_{n,i}) \geq 2)$$
$$\leq \mu(\textstyle\sum_i \xi(E_{n,i}) \ ;\ \xi(E_{n,i}) \leq 1 \ \ \forall i) + p\ \mu(\exists i \ ;\ \xi(E_{n,i}) \geq 2)$$
$$\leq \textstyle\sum_i \mu(\xi(E_{n,i}) = 1) + p\ \mu(\exists i \ ;\ \xi(E_{n,i}) \geq 2)$$
$$\leq \lambda_1(E) + p\ \overline{\lim}_{n\to\infty} \mu(\exists i \ ;\ \xi(E_{n,i}) \geq 2)$$
$$= \lambda_1(E) \qquad (\because \mu \text{ は 多重点 をもたないから})$$

p は任意であるから $\mu(\xi(E)) \leq \lambda_1(E)$

$\therefore\ \lambda(E) \leq \lambda_1(E)$ よって c) がいえた.

3° $\mathscr{a}$) ⟶ a) を示す.

$$\lambda(E) - \sum_{i=1}^{k_n} \mu(\xi(E_{n,i}) > 0) = \mu(\xi(E)) - \sum_{i=1}^{k_n} \mu(\xi(E_{n,i}) > 0)$$
$$= \sum_{i=1}^{k_n} \mu(\xi(E_{n,i})) - \sum_{i=1}^{k_n} \mu(\xi(E_{n,i}) > 0)$$
$$= \sum_{i=1}^{k_n} \sum_{k=1}^{\infty} k\ \mu(\xi(E_{n,i}) = k) - \sum_{i=1}^{k_n} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(\xi(E_{n,i}) = k)$$
$$= \sum_{i=1}^{k_n} \sum_{k=1}^{\infty} (k-1)\ \mu(\xi(E_{n,i}) = k)$$
$$\geq \sum_{i=1}^{k_n} \mu(\xi(E_{n,i}) \geq 2)$$
$$\geq \mu(\exists i \ ;\ \xi(E_{n,i}) \geq 2) \qquad (1)$$

一般に $E = E_1 + E_2$ の時

$$\mu(\xi(E) > 0) = \mu(\xi(E_1) > 0 \text{ or } \xi(E_2) > 0)$$
$$\leq \mu(\xi(E_1) > 0) + \mu(\xi(E_2) > 0)$$

このことより $\sum_{i=1}^{k_n} \mu(\xi(E_{n,i}) > 0) \leq \sum_{i=1}^{k_{n+1}} \mu(\xi(E_{n+1,i}) > 0)$

$$\hat{\lambda}(E) \equiv \sup(\textstyle\sum_i \mu(\xi(E_i) > 0) \ ;\ \sum E_i = E) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k_n} \mu(\xi(E_{n,i}) > 0) \qquad (2)$$

(1) において $n \to \infty$ とするとき (2) を用いる事により

$$\lambda(E) - \hat{\lambda}(E) \geq \lim_{n\to\infty} \mu(\exists i \ ;\ \xi(E_{n,i}) \geq 2) = \mu(\exists x \in R \ ;\ \xi(x) \geq 2)$$

$\mathscr{a}$) より $\lambda(E) = \hat{\lambda}(E)$ だから $\mu(\exists x \in R \ ;\ \xi(x) \geq 2) = 0$

Sem. on Probab.
Vol.46 1977年
P1-89

Characterization of Poisson measure (I)

Renyi と Kallenberg による次の Lemma は後でしばしば用いられる。

Lemma 2 (Renyi Kallenberg)

R の有界可測な subsets のつくる algebra $\mathcal{A}$ が、R の Borel σ-algebra $\mathcal{B}(R)$ を生成しているとする。もし random process ξ が多重点をもたないならば

$$x(A) = P(\xi(A)=0) \qquad A\in\mathcal{A}$$

によって ξ の分布は一意に定まる。

---

proof)

前に述べた様に $\mathcal{B} = \vee \mathcal{B}_K$ (K : compact) であった。

明らかに $\mathcal{B} = \vee \mathcal{B}_A$ ($A\in\mathcal{A}$) でもある。

よって $A_0\in\mathcal{A}$ として $\mathcal{B}_{A_0}$ 上で $\{x(A) : A\subset A_0 \ \ A\in\mathcal{A}\}$ によって ξ の分布が一意に定まる事を見ればよい。

ところで、$\mathcal{A}$ は R の σ-alg $\mathcal{B}$ を生成しているのであるから (R 上の適当な metric に関して) 直径の任意に小さい元を含む。さらに $\mathcal{A}$ は algebra ゆえ 任意の $p>0$ に対して、A_0 の分割

$$A_0 = \bigcup_{i=1}^{N_p} A_i^p \qquad A_i^p\in\mathcal{A} \qquad \mathrm{diam}\ A_i^p < \frac{1}{p}$$

なるものが存在する。さらに、この分割は $p=1, 2, \cdots$ に対して細分列と仮定してよい。

今

$$\Omega_p = \{ m\in\Omega \ ; \ m(A_i^p)\le 1 \quad (i=1, \cdots N_p)\}$$

とおくと

A_i^p の closure が compact である事から 容易に ξ が多重点をもたない事と

$$P(\xi\in\Omega_p) \longrightarrow 1 \qquad (\text{as } p\to\infty)$$

は同値である事がわかる。

Sem. on Probab.
Vol.46 1977年
P1-89

さて

$$\{ m \in Q \ ; \ m(A) = 0 \} \qquad A \in \mathcal{A} \quad A \subset A_0$$

は明らかに各 Ω_p 上 $\mathcal{B}_{A_0}$ を生成しているから

Q 上ほとんど到る所で $\mathcal{B}_{A_0}$ を生成する.

<u>*Lemma 3*</u> (*A. Renyi*)

$\exists \lambda$: Radon meas , ≥ 0 , non atomic

s.t. $P(\xi(E) \geq 2) \leq \alpha(\lambda(E))$ for $\forall E \in \mathcal{B}(R)$

$\Longrightarrow$ ξ は多重点をもたない

ここで

$\alpha : [0, \infty] \longrightarrow [0, \infty]$ なる関数で. $\alpha(x)/x \downarrow 0$ (∞ $x \to \infty$) を満たす.

---

proof)

K を $\mathbb{R}$ の compact set とする.

$\forall x \in K$ $\forall \varepsilon > 0$ に対して

$\exists U_x$: x の開近傍 ; $\forall U \subset U_x$ $U \in \mathcal{B}(R)$ に対して

$$\frac{\alpha(\lambda(U))}{\lambda(U)} < \varepsilon$$ をみたす.

$\therefore$ $P(\xi(U) \geq 2) \leq \varepsilon \lambda(U)$ for $\forall U \subset U_x$ $U \in \mathcal{B}(R)$ (1)

$K \subset \bigcup_{x \in K} K_x$ で K は compact だから

$\exists x_1, \cdots, x_n \in K$; $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$

Sem. on Probab.
Vol.46　1977年
P1-89

$A_1 = U_{x_1} \cap K$

$A_2 = (U_{x_2} \cap K) \setminus U_{x_1}$　----

$A_n = (U_{x_n} \cap K) \setminus (U_{x_1} \cup U_{x_2} \cup \cdots \cup U_{x_{n-1}})$　とおくと

$K = \sum_{i=1}^{n} A_i$　となる.

$A_i \subset U_{x_i}$ であるから (1) より　$P(\xi(A_i) \geq 2) < \varepsilon\lambda(A_i)$　(2)

$\therefore$　$P(\exists x \in K\ ;\ \xi(x) \geq 2) \leq \sum_{i=1}^{n} P(\xi(A_i) \geq 2)$

$< \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \lambda(A_i)$　($\because$ (2) より)

$= \varepsilon\lambda(K)$

ε は任意だから　$P(\exists x \in K\ ;\ \xi(x) \geq 2) = 0$

R は σ-compact だから　$P(\exists x \in R\ ;\ \xi(x) \geq 2) = 0$

$\therefore$　ξ は多重点をもたない.

Th 4　(A. Renyi)

ξ : 多重点をもたない counting measure

$\exists \lambda$: ≥ 0 Radon measure s.t. $P\{\xi(E) = 0\} = e^{-\lambda(E)}$　$E \in \mathcal{B}(R)$

$\Longrightarrow$　ξ : λ-Poisson

(Proof)

$\tilde{\xi}$ を λ-Poisson に従う counting measure とすると

$P(\tilde{\xi}(E) = 0) = e^{-\lambda(E)}$

であるから Lemma 2 より　ξ : λ-Poisson

Sem. on Probab.
Vol.46 1977年
P1-89

Cor to Th 4 (original form of Renyi's theorem)

$\exists \lambda$: ≥ 0 Radon measure

s.t. α) $\chi(E) \equiv P(\xi(E)=0) = e^{-\lambda(E)}$ for $\forall E \in \mathcal{B}(R)$

β) $P(\xi(E) \geq 2) \leq \alpha(\lambda(E))$ with $\alpha(t)/t \downarrow 0$ ($as\ t \downarrow 0$)

$\Longrightarrow$ ξ : λ - Poisson

Th 5 (Prekopa)

ξ : counting measure

ξ : λ - Poisson に従う. λ : non atomic

$\Longleftrightarrow$ a) and b) and c)

a) ξ : non atomic

b) ξ : 多重点をもたない

c) ξ : regionally independent

(proof)

$\Longrightarrow$ c) は λ - Poisson meas の定義より明らか.

a) $\forall x \in R$ に対して $P(\xi(x)>0) = \sum_{k=1}^{\infty} P(\xi(x)=k)$

$P(\xi(x)=k) = e^{-\lambda(x)} \frac{1}{k!} (\lambda(x))^k = 0$ ($\because$ λ : non atomic)

$\therefore$ $P(\xi(x)>0) = 0$

b) $\forall E \in \mathcal{B}(R)$ に対して

$P(\xi(E) \geq 2)$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda(E)^k}{k!} e^{-\lambda(E)} = e^{-\lambda(E)} (e^{\lambda(E)} - 1 - \lambda(E))$$

$\alpha(t) = e^{-t}(e^t - 1 - t)$ とおくと

$$\frac{\alpha(t)}{t} = e^{-t} \frac{e^t - 1}{t} - e^{-t} \downarrow 0$$

Lemma 3 より λ - Poisson meas ξ は多重点をもたない.

Sem. on Probab.
Vol.46 1977年
P1-89

逆に a) b) c) が成り立つ

$\Longrightarrow$ $\lambda(E) = -\log P(\xi(E)=0)$ E : Borel set in $\mathbb{R}$ とする.

c) より ξ は regionally independent であるから

$E_1 \cap E_2 = \phi$ のとき

$\lambda(E_1 \cup E_2) = -\log P(\xi(E_1)=0, \xi(E_2)=0)$

$= -\log P(\xi(E_1)=0) - \log P(\xi(E_2)=0)$

$= \lambda(E_1) + \lambda(E_2)$

よって $\lambda(\cdot)$ は $\mathbb{R}$ 上の有限加法的な measure となる.

i) $\lambda(A) < \infty$ for $\forall A$: compact in R

ii) $A_n \downarrow \phi \Rightarrow \lambda(A_n) \downarrow 0$

を示せば $\lambda(\cdot)$ は $\mathbb{R}$ 上の Radon measure となる.

まず i) を示す.

A : compact in $\mathbb{R}$. $\lambda(A) = \infty$ とする.

今 $A = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$ $\quad diam(B_i) \leq \frac{1}{2} diam(A)$ $(i=1,2\cdots n)$

をみたす closed sets $\{B_i\}_{i=1}^{n}$ を選ぶと, $^{\exists}B_{i_0} \to \lambda(B_{i_0}) = \infty$

$A_1 = B_{i_0}$ とおき, 同様の議論をくり返すと

$^{\exists}\{A_k\}$: a sequence of compact sets

$\ni A \supset A_1 \supset A_2 \supset \cdots$, $diam(A_k) \longrightarrow 0$, $\lambda(A_k) = \infty$

$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \{a\}$: 一点集合となり

$$\lambda(\{a\}) = -\log P(\xi(a)=0) = -\log \int \chi_{\xi(a)=0}(\xi)\, P(d\xi)$$

$$= -\log \int \lim_{k\to\infty} \chi_{\xi(A_k)=0}(\xi)\, P(d\xi) = -\lim_{k\to\infty} \log P(\xi(A_k)=0)$$

$$= \lim_{k\to\infty} \lambda(A_k) = \infty$$

$\therefore$ $P(\xi(a)=0) = 0$ $\quad\therefore$ $P(\xi(a)>0) = 1$

これは ξ が non atomic であるという仮定に反する.

よって i) が示された.

Sem. on Probab.
Vol.46 1977年
P1-89

次に ii) を示す. $A_n \downarrow \phi$ の時

$$\lambda(A_n) = -\log P(\xi(A_n)=0) = -\log \int_Q \chi_{\xi(A_n)=0}(\xi)\, P(d\xi)$$

$$\longrightarrow -\log P(Q) = 0$$

又 ξ は non atomic であるから $\forall a \in R$ に対して $P(\xi(a)>0) = 0$

$\therefore \quad P(\xi(a)=0) = 1$

$\therefore \quad \lambda(\{a\}) = -\log P(\xi(a)=0) = 0$

よって λ は non atomic な Radon measure となる.

$$P(\xi(A)=0) = e^{-\lambda(A)} \qquad A \in \mathcal{B}(R)$$

であり a) より ξ は多重点をとらないから, Lemma 2 より ξ は λ-Poisson に従う.

Sem. on Probab.
Vol.46 1977年
P1-89

§ 2. Regionally independent random Radon measure

$\xi(\omega)$ が R 上の Radon measure, ≥ 0 となる時 ξ を random Radon measure と呼ぶ。特に、$\xi(\omega)(E)$ $(E \in \mathcal{B}(R))$ が整数値をとる時、ξ を counting measure と呼ぶ。

$f \in C_c^+(R)$ に対して

$$L_\xi(f) = E\left[e^{-\langle \xi, f \rangle}\right]$$

を random Radon measure ξ の Laplace transform と呼ぶ。

ここで

$$\langle \xi, f \rangle = \int f(x)\, \xi(dx) = \sum_i n_i f(x_i)$$

<u>注</u> $L_\xi(f)$ は $\{x : f(x) > 0\}$ が bounded set となる様な任意の non-negative bounded Borel function f に対して自然に定義できる。

特に $f = \sum_{i=1}^n t_i \chi_{E_i}$　$t_i > 0$　$\{E_i\}$: disjoint の時

$$L_\xi(f) = E\left[e^{-\sum_{i=1}^n t_i \xi(E_i)}\right] \equiv \Lambda(t_1, \cdots, t_n, E_1, \cdots, E_n)$$

は random variables $\xi(E_1), \cdots, \xi(E_n)$ の結合 Laplace transform となる。よって $L_\xi(f)$ が与えられると $P(\xi(E_k) = i_k \ (k = 1, 2, \cdots, n))$ が与えられる。故に $C_c^+(R)$ 上の汎関数 $L_\xi(f)$ と ξ の分布は 1対1 に対応する。

Sem. on Probab.
Vol.46 1977年
P1-89

注 1

$\xi_n \longrightarrow \xi$ in law

$\Longleftrightarrow \quad L_{\xi_n}(f) \longrightarrow L_\xi(f) \quad \text{for } {}^\forall f \in C_c^+(R)$

注 2

ξ : regionally independent

$\longrightarrow \quad \xi = \xi_a + \xi_n$ と分解される.

ここで i) $\xi_a \perp\!\!\!\perp \xi_n$

ii) ${}^\exists A$: countable set ; $\xi_n(A) = 0 \quad \xi_a(A^c) = 0$ a.e.

iii) ξ_n : non-atomic で regionally independent

∵) $A \equiv \{ x \in R \ ; \ E[e^{-\xi(x)}] < 1 \}$

$= \{ x \in R \ ; \ P(\xi(x) > 0) > 0 \}$ (ξ の atom の全体)

とおくと A は countable set となる.

$\xi_n(E) = (E \cap A^c)$

$\xi_a(E) = (E \cap A)$ とおけばよい.

Recall that, if X is a random variable $\in [0, \infty]$, then followings are equivalent.

a) X : infinitely divisible

i.e. $L(z) \equiv [e^{-zX}]$ とおくと ${}^\forall n \geq 2$ に対して

${}^\exists L_n$: Laplace transform ; $L(z) = L_n(z)^n$

b) For ${}^\forall \varepsilon > 0$,

${}^\exists X_1, \cdots, X_n \ \perp\!\!\!\perp, \geq 0 \ \ni \ X = X_1 + \cdots + X_n \quad P(X_i \geq \varepsilon) \leq \varepsilon$

c) ${}^\exists N$: non-negative finite measure on $[0, \infty]$

$$\ni \quad E[e^{-zX}] = \exp\left\{ -\int_{[0,\infty]} \frac{1 - e^{-zs}}{1 - e^{-s}} N(ds) \right\}$$

Sem. on Probab.
Vol.46 1977年
P1-89

ただし

$$\frac{1-e^{-ts}}{1-e^{-s}} = \begin{cases} t & s=0 \\ 0 & s=\infty \end{cases}$$ と約束する

注3

$$P(X=\infty) = e^{-N(\infty)}$$

$$P(X=0) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad N(0)>0 \\ \exp\left\{-\int_{[0,\infty]} \frac{N(ds)}{1-e^{-s}}\right\} & \text{if} \quad N(0)=0 \end{cases}$$

$$E(X) = \begin{cases} \infty & \text{if} \quad N(\infty)>0 \\ \int_{[0,\infty]} \frac{s}{1-e^{-s}} N(ds) & \text{if} \quad N(\infty)=0 \end{cases}$$

Th 1 (Kingmann Completely random measure)

ξ : non atomic regionally independent random Radon measure ≥ 0

$\Longrightarrow$ $\exists N$: Borel measure ≥ 0 on $R \times [0, \infty]$

s.t. $$E[e^{-\langle \xi, f\rangle}] = \exp\left\{-\int_{R\times[0,\infty]} \frac{1-e^{-sf(x)}}{1-e^{-s}} N(dx\,ds)\right\} \tag{1}$$

for $^{\forall} f \in C_c^+(R)$

(proof)

1° $A \subset R$: bounded Borel set

$\longrightarrow$ $\xi(A)$: infinitely divisible

∵) $A = \sum_{i=1}^n A_i$ と partition とすると

$\xi(A) = \sum_{i=1}^n \xi(A_i)$ となり ξ は regionally independent であるから

$\xi(A_i)$ $i=1,2,\ldots,n$ は互いに独立.

Sem. on Probab.
Vol.46 1977年
P1-89

$\forall \varepsilon > 0$ に対して $P(\xi(A_i) \geq \varepsilon) \leq \varepsilon$ となる様に $\{A_i\}$ をとる事ができれば、$\xi(A)$ は infinitely divisible となる。このためには

$1 - E[e^{-\xi(A_i)}] \leq \varepsilon(1 - e^{-\varepsilon})$

となる様に $\{A_i\}$ がとれればよい。

ところが ξ は non-atomic であるから、

$$E[e^{-\xi(A)}] \longrightarrow 1 \quad \text{as} \quad \text{diam } A \longrightarrow 0$$

よって各 A_i の直径を十分小さくとれば上の不等式が成立する。

2° $\xi(A)$ は infinitely divisible であるから c) より

$\exists N_A$: finite measure on $[0, \infty]$

$$; \quad E[e^{-t\xi(A)}] = \exp\left\{ - \int_{[0\ \infty]} \frac{1 - e^{-ts}}{1 - e^{-s}} N_A(ds) \right\}$$

A : bounded である時 $\xi(A) < \infty$ a.e.

となり $N_A(\infty) = 0$ となる。

又 $A \cap B = \emptyset$ の時 $N_{A \cup B} = N_A + N_B$ (2)

∵) ξ regionally independent

$A_n \uparrow A$ の時 $N_{A_n} \longrightarrow N_A$ (3)

∵) $\lim_n E[e^{-t\xi(A_n)}] = E[e^{-t\xi(A)}]$ (monotone convergence th)

より $$\int_{[0\ \infty]} \frac{1 - e^{-ts}}{1 - e^{-s}} N_{A_n}(ds) \longrightarrow \int_{[0,\ \infty]} \frac{1 - e^{-ts}}{1 - e^{-s}} N_A(ds)$$

(2) (3) より

$\exists N$: Borel measure ≥ 0 on $R \times [0, \infty)$

s.t. $N_A(ds) = N(A \times ds)$

後は (1) が成り立つ事を示せばよい

f が simple function であるとき (1) を示せばよい。

Sem. on Probab.
Vol.46 1977年
P1-89

$f(x) = \sum_{i=1}^{n} z_i \chi_{E_i}(x) \qquad \{E_i\}$: disjoint　とする.

$$右辺 = \exp\left\{ -\sum_i \int_{E_i \times [0,\infty)} \frac{1 - e^{-s \sum_{j=1}^{n} z_j \chi_{E_j}(x)}}{1 - e^{-s}} N(dx\, ds) \right\}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \exp\left\{ - \int_{E_i \times [0\ \infty)} \frac{1 - e^{-s z_i}}{1 - e^{-s}} N(dx\, ds) \right\}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \exp\left\{ - \int_{[0,\infty)} \frac{1 - e^{-s z_i}}{1 - e^{-s}} N_{E_i}(ds) \right\}$$

$$左辺 = E\left[\prod_{i=1}^{n} e^{-z_i \xi(E_i)} \right] = \prod_{i=1}^{n} E\left[e^{-z_i \xi(E_i)} \right]$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \exp\left\{ - \int_{[0,\infty]} \frac{1 - e^{-z_i s}}{1 - e^{-s}} N_{E_i}(ds) \right\}$$

よって (1) が示された.

Sem. on Probab.
Vol.46 1977年
P1-89

§3 Palm measure

この§では Palm measure の定義を与え，そのいくつかの性質を示し その後で Poisson measure の一つの characterization について述べる．そして最後に correlation function について論ずる．

Palm measure の定義

$\mathcal{Q}$: R 上の configurations の全体

μ : $\mathcal{Q}$ 上の prob meas

さらに μ は mean λ をもつとする．

つまり R 上の Radon meas λ が存在して

(1) $$\int \mu(d\xi)\langle \xi, f\rangle = \langle \lambda \ f\rangle \qquad \text{for } {}^{\forall} f \in C_c^+(R)$$

が成立している．

今 $\mathcal{Q} \times R$ 上の測度

(2) $$M(d\xi\, dx) = \mu(d\xi)\,\xi(dx)$$

（μ の master meas と呼ぶ事がある）を考える．これは

$$\{(\xi, x) \in \mathcal{Q} \times R \mid \xi \ni x\}$$

を support としているが，$\mathcal{Q} \times R$ 上の可測分割

$$\mathfrak{Z} = \{C_x = [(\xi, x) \mid \xi \ni x] \ ; \ x \in R\}$$

に関する条件附測度 M^x が，λ-a.e. $x \in R$ に対して定まる．M^x は $\mathcal{Q} \times R$ 上の測度に拡張される．

このとき、集合 $\{(\xi, x) \mid \xi \ni x\}$ の $Q \times R$ から Q への射影による像 $Q^x = \{\xi \mid \xi \ni x\} \subset Q$ の上に誘導される測度を μ^x とすると

$$(3) \qquad \iint \mu(d\xi)\, \xi(dx)\; u(\xi, x) = \iint \lambda(dx)\, \mu^x(d\xi)\; u(\xi, x)$$

$$\text{for } {}^{\forall} u(\xi, x) : \text{非負可測関数}$$

なる関係式が成り立つ。

実際、測度空間 $(\Omega, \mathcal{B}, M)$ の分割 $\mathfrak{z}$ による商空間を $(\Omega/\mathfrak{z}, \mathcal{B}_{\mathfrak{z}}, P_{\mathfrak{z}})$ とすると

$$\iint \mu(d\xi)\, \xi(dx)\; u(\xi, x) = \int_{\Omega/\mathfrak{z}} P_{\mathfrak{z}}(dC_x) \iint u(\xi, y)\, M^x(d\xi\, dy)$$

$$= \int_{\Omega/\mathfrak{z}} P_{\mathfrak{z}}(dC_x) \int u(\xi, x)\; \mu^x(d\xi)$$

$$= \iint \mu(d\zeta)\, \zeta(dx) \int u(\xi, x)\, \mu^x(d\xi)$$

$$= \iint \lambda(dx)\; \mu^x(d\xi)\; u(\xi, x)$$

注　通常の条件付測度は例えば Rohlin (1949) では Lebesgue 空間上の確率測度に対して定義されている。今の場合の証明のためには R の各 compact subset K に対して $M(Q \times K) < \infty$ であるから先ず λ a.e $x \in K$ に対しての M^x の存在をみればよい。

Sem. on Probab.
Vol.46 1977年
P1-89

Def 1

μ^x を μ の Palm measure と呼ぶ.

$u(\xi, x)$ として特に

$$u(\xi, x) = \begin{cases} 1 & x \in \xi \\ 0 & x \notin \xi \end{cases}$$ とおくと

$$\int \xi(dx)\ u(\xi, x)\ \varphi(x) = \int \xi(dx)\ \varphi(x) \qquad \text{for } \forall \varphi \in C_c^+(R)$$

(3) より

$$\iint \lambda(dx)\ \mu^x(d\xi)\ u(\xi, x)\ \varphi(x) = \iint \mu(d\xi)\ \xi(dx)\ u(\xi, x)\ \varphi(x)$$

$$= \iint \mu(d\xi)\ \xi(dx)\ \varphi(x) \qquad (\because \text{ 上式より})$$

$$= \int \lambda(dx)\ \varphi(x)$$

$\therefore$ $\int \mu^x(d\xi)\ u(\xi, x) = 1$ λ-a.e. x

故に

(4) $\mu^x(\xi \ni x) = 1$

(4) は μ^x が $\xi \ni x$ となる configurations の上に support がある事を示している.

Sem. on Probab.
Vol.46 1977年
P1-89

次に Palm measure に関する基本的な性質について述べよう.

Prop 1

μ : prob meas on Q で mean λ をもつとする

$$\int_{\xi(U)\geq 2} \mu(d\xi)\, \xi(U) = o(\lambda(U)) \quad \text{as } U : \text{open set} \searrow \{x\} \quad \text{for } \lambda\text{-a.e. } x$$

$$\longrightarrow \quad \mu(F \mid \xi(U)>0) \longrightarrow \int \mu^x(d\xi) F(\xi)$$

as U : open set $\searrow \{x\}$ for λ-a.e. x, $\forall F$: bounded Borel

---

(proof)

$\mu(F : \xi(U)>0)$

$$= \mu(F(\xi)\xi(U) \ ; \ \xi(U)>0) - \mu(F(\xi)(\xi(U)-1) \ ; \ \xi(U)>0)$$

The first term $= \int_Q F(\xi)\xi(U)\,\mu(d\xi) = \int \mu(d\xi) \int \xi(dx)\, F(\xi)\, \chi_U(x)$

$$= \int \chi_U(x)\, \mu^x(F)\, \lambda(dx) = \int_U \mu^x(F)\, \lambda(dx)$$

The Second term $= \mu(F(\xi)(\xi(U)-1) \ : \ \xi(U)\geq 2)$

$$\leq \|F\|_\infty\, \mu(\xi(U)-1 \ : \ \xi(U)\geq 2)$$

$$\leq \|F\|_\infty\, o(\lambda(U))$$

$\mu(\xi(U)>0)$

$$= \mu(\xi(U) \ ; \ \xi(U)>0) - \mu(\xi(U)-1 \ ; \ \xi(U)>0)$$

$$= \int_U \lambda(dx) + o(\lambda(U))$$

$$= \lambda(U) + o(\lambda(U))$$

Sem. on Probab.
Vol.46 1977年
P1-89

$$\therefore \quad \mu(F \mid \xi(U) > 0)$$

$$= \frac{\mu(F(\xi)\ ;\ \xi(U) > 0)}{\mu(\xi(U) > 0)}$$

$$= \frac{\int_U \mu^x(F)\,\lambda(dx) + o(\lambda(U))}{\lambda(U) + o(\lambda(U))} = \frac{\frac{1}{\lambda(U)}\int_U \mu^x(F)\,\lambda(dx) + \frac{o(\lambda(U))}{\lambda(U)}}{1 + \frac{o(\lambda(U))}{\lambda(U)}}$$

$$\xrightarrow[U \downarrow \{x\}]{} \mu^x(F) = \int \mu^x(d\xi)\,F(\xi)$$

Prop 2

μ : λ - Poisson である時

$$\mu^x(e^{-\langle \xi, \varphi \rangle}) = e^{-\varphi(x)}\,\mu(e^{-\langle \xi, \varphi \rangle}) \qquad \lambda\text{-a.e.}\,x \quad \text{となる.}$$

(proof)

μ は λ - Poisson であるから

$$\int \mu(d\xi)\ e^{-\langle \xi, \varphi \rangle} = \exp\left\{-\int (1 - e^{-\varphi(x)})\,\lambda(dx)\right\}$$

この関係式を用いると

$$\iint \mu(d\xi)\,\xi(dx)\ \psi(x)\ e^{-\langle \xi, \varphi \rangle} = -\frac{d}{dt}\int \mu(d\xi)\ e^{-\langle \xi, \varphi + t\psi \rangle}\Big|_{t=0+}$$

$$= -\frac{d}{dt}\exp\left\{-\int (1 - e^{-\varphi(x) - t\psi(x)})\,\lambda(dx)\right\}\Big|_{t=0+}$$

$$= \int \psi(x)\ e^{-\varphi(x)}\,\lambda(dx)\ \exp\left\{-\int (1 - e^{-\varphi(x)})\,\lambda(dx)\right\}$$

$$= \iint \lambda(dx)\,\mu(d\xi)\ \psi(x)\ e^{-\varphi(x)}\ e^{-\langle \xi, \varphi \rangle}$$

Sem. on Probab.
Vol.46 1977年
P1-89

一方

$$\text{上式の左辺} = \iint \lambda(dx)\, \mu^x(d\xi)\, \varphi(x)\, e^{-\langle \xi, \varphi \rangle}$$

であるから

$$\mu^x\left(e^{-\langle \xi, \varphi \rangle}\right) = e^{-\varphi(x)}\, \mu\left(e^{-\langle \xi, \varphi \rangle}\right)$$ が成り立つ.

注.

$$\Delta_x(\xi) = \begin{cases} 1 & \xi : \xi(x) = 1 \quad \xi(y) = 0 \quad \text{for } \forall y \neq x. \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

とおくと Prop 2 より μ が λ-Poisson であるとき. $\mu^x = \mu * \Delta_x$ となる事がわかる.

Prop 3

$\varphi \in C_c^+(R)$

F : bounded Borel function on Q である時

$$\int_{\langle \xi, \varphi \rangle > 0} \mu(d\xi)\, F(\xi) = \int \lambda(dx)\, \varphi(x)\, \mu^x\left(\frac{F(\xi)}{\langle \xi, \varphi \rangle}\right)$$ が成り立つ.

特に,

$$\varphi(x) = \chi_E(x), \quad F(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{if } \xi(E) = k \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$ とおくと

$$\mu(\xi(E) = k) = \frac{1}{k} \int_E \lambda(dx)\, \mu^x(\xi(E) = k) \qquad (k \geq 1)$$ が成り立つ.

(proof)

$$-\frac{d}{dt} \mu\left(F(\xi)\, e^{-t\langle \xi, \varphi \rangle}\right) = \mu\left(\langle \xi, \varphi \rangle F(\xi)\, e^{-t\langle \xi, \varphi \rangle}\right)$$

$$= \iint \lambda(dx)\, \mu^x(d\xi)\, \varphi(x)\, F(\xi)\, e^{-t\langle \xi, \varphi \rangle}$$

Sem. on Probab.
Vol.46 1977年
P1-89

両辺を 0 から t まで積分する事により

$$\mu\left(F(\xi)\left(1-e^{-t\langle\xi,\varphi\rangle}\right)\right)=\iint\lambda(dx)\,\varphi(x)\,\mu^x(d\xi)\,F(\xi)\,\frac{1-e^{-t\langle\xi,\varphi\rangle}}{\langle\xi,\varphi\rangle}$$

ここで $t\to\infty$ とすると proposition が えられる。

Prop 4 (Mecke - Jagers)

μ と $(\lambda,\ \mu^x : x\in R)$ とは 1 対 1 に対応する.

(proof)

$\mu_1,\ \mu_2$ が 同じ $(\lambda,\ \mu^x : x\in R)$ をもつとき, $\mu_1=\mu_2$ となる事を示す。
この事を示すためには 次の様な関数 $a(x,\xi)$ があればよい。

$$\int\xi(dx)\,a(x,\xi)=1 \qquad a(x,\xi)\geq 0 \qquad (1)$$

∵)
$$\int\mu_1(d\xi)\,F(\xi)=\int\mu_1(d\xi)\,F(\xi)\int\xi(dx)\,a(x,\xi)$$

$$=\int\lambda(dx)\int\mu^x(d\xi)\,F(\xi)\,a(x,\xi)=\int\mu_2(d\xi)\,F(\xi)\int\xi(dx)\,a(x,\xi)$$

$$=\int\mu_2(d\xi)\,F(\xi)$$

$\sum_n E_n=R$ を partition として (E_n : bdd Borel)

$$b(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^n\,\xi(E_n)} & \text{if}\quad \xi(E_n)>0\\[2ex] 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

とおき. $b(x,\xi)$ を normalize したものを $a(x,\xi)$ とすればよい

Sem. on Probab.
Vol.46 1977年
P1-89

Palm measure on groups

群の上の定常な random point measure に関する Palm measure を考えてみよう.

G を局所 compact, Hausdorff, 可算基をもつ位相群とし, $x, y \in G$ に対して左右からの作用を

$$L_x y = xy \qquad R_x y = yx$$

と書く. G 上の左不変な Haar 測度を m ($L_x^* m = m$) とすれば, 右不変な Haar 測度 m' ($R_x^* m' = m'$) はモジュールと呼ばれる関数 $\Delta(x)$ によって

$$m'(dx) = \Delta(x)\, m(dx)$$

と書ける.

G 上の random point field μ が $\forall x \in G$ に対して左不変であるとき, 即ち

$$\int (L_x \mu)(d\xi) F(\xi) = \int \mu(d\xi) F(\xi) \qquad \forall F : \text{bdd Borel}$$

が成立するとき, μ は stationary であるということにする. ただし

$$\int (L_x \mu)(d\xi)\, F(\xi) = \int \mu(d\xi)\, F(L_x \xi)$$

$$\int (L_x \xi)(dy)\, \varphi(y) = \int \xi(dy)\, (L_x \varphi)(y)$$

$$L_x \varphi(y) = \varphi(L_x y)$$

Sem. on Probab.
Vol.46 1977年
P1-89

Prop 5

μ : G 上の random point field

μ が stationary で mean λ をもつ

$\Longrightarrow$ i) $\lambda = m$ (定数倍を除いて)

ii) $\exists \mu^0$: prob meas on G ; $\mu^x = L_x \mu^0$ m. a.e. x

($\mu^0 = \mu^e$ と思える e : unit element of G)

(proof)

i) λ が G 上の左側不変な Haar measure となる事を言えばよい.

φ : ≥ 0, Borel function on G とする.

$\forall y \in G$ に対して

$$\int L_y\lambda(dx)\ \varphi(x) = \int \lambda(dx)\ \varphi(L_y x) = \int \mu(d\xi)\int \xi(dx)\ \varphi(L_y x)$$

$$= \int \mu(d\xi) < L_y\xi, \varphi > = \int L_y\mu(d\xi) < \xi, \varphi >$$

$$= \int \mu(d\xi) < \xi, \varphi > \qquad (\because \mu : \text{stationary})$$

$$= \int \lambda(dx)\ \varphi(x)$$

$\therefore$ $L_y\lambda = \lambda$ for $\forall y \in G$

$\therefore$ λ は左側不変な Haar measure

ii) この証明のために次の Lemma を用いる.

Lemma

$$(L_x\mu)^y = L_x(\mu^{x^{-1}y}) \qquad \lambda \otimes \lambda \quad a.e. \ (x, y)$$

この Lemma を用いて ii) を証明してから後に, この Lemma を示す.

Sem. on Probab.
Vol.46 1977年
P1-89

Palm meas. μ^x は λ-a.e. x に対して定義されているから μ^{x_0} が定義されている $x_0 \in G$ をとり

$$\mu^0 = L_{x_0^{-1}} \mu^{x_0}$$

とおくと

$$L_x \mu^0 = L_{x x_0^{-1}} \mu^{x_0} = L_{x x_0^{-1}} \left(\mu^{(x x_0^{-1})^{-1} x} \right)$$

$$= (L_{x x_0^{-1}} \mu)^x = \mu^x \qquad (\because \ \mu : \text{stationary})$$

$\therefore$ λ-a.e. x に対して $\mu^x = L_x \mu^0$

Proof of lemma

$u(x, \xi)$: ≥ 0 Borel function

$$\int \lambda(dy) \int (L_x\mu)^y(d\xi) \ u(y, \xi) = \int (L_x\mu)(d\xi) \int \xi(dy) \ u(y, \xi)$$

$$= \int \mu(d\xi) \int L_x\xi(dy) \ u(y, L_x\xi)$$

$$= \int \mu(d\xi) \int \xi(dy) \ u(L_x y, L_x \xi)$$

$$= \int \lambda(dy) \int \mu^y(d\xi) \ u(L_x y, L_x \xi)$$

$$= \int L_x\lambda(dy) \int \mu^{x^{-1}y}(d\xi) \ u(y, L_x\xi)$$

$$= \int \lambda(dy) \int \mu^{x^{-1}y}(d\xi) \ u(y, L_x\xi) \qquad (\because \ \lambda : \text{左側不変な Haar meas})$$

$$= \int \lambda(dy) \int L_x(\mu^{x^{-1}y})(d\xi) \ u(y, \xi)$$

$$\therefore \quad (L_x\mu)^y = L_x(\mu^{x^{-1}y}) \qquad \lambda \otimes \lambda \ \text{a.e.} \ (x, y)$$

Sem. on Probab.
Vol.46 1977年
P1-89

Cor

μ : stationary とすると

$$\iint \mu(d\xi)\, \xi(dx)\, u(x,\xi) = \iint \mu^{\circ}(d\xi)\, \lambda(dx)\, u^{*}(x,\xi)$$

ここで $u^{*}(x,\xi) = u(x, \angle_x \xi)$

∵) 左辺 $= \int \lambda(dx) \int \mu^{x}(d\xi)\, u(x,\xi)$

$$= \int \lambda(dx) \int \angle_x \mu^{\circ}(d\xi)\, u(x,\xi)$$

$$= \int \lambda(dx) \int \mu^{\circ}(d\xi)\, u(x, \angle_x \xi)$$

Prop 5 より μ が stationary な時 Palm measure はすべての $x \in G$ に対して定まっていると考えてよく，歴史的に $\mu^{\circ} = \mu^{e}$ を Palm meas という．

又 $u^{+}(x,\xi) \equiv u(x, \angle_{x^{-1}} \xi)$ とすると上式は

$$\iint \mu^{\circ}(d\xi)\, \lambda(dx)\, u(x,\xi) = \iint \mu(d\xi)\, \xi(dx)\, u^{+}(x,\xi)$$

と書かれる．

特に $\varphi(x) \geq 0$ $\int \lambda(dx)\, \varphi(x) = 1$ ととると

任意の bounded Borel function $F(\xi)$ に対して上式より

$$\int \mu^{\circ}(d\xi)\, F(\xi) = \iint \mu(d\xi)\, \xi(dx)\, \varphi(x)\, F(\angle_{x^{-1}} \xi)$$

なる式が成り立つ．stationary な場合にはこれを定義式とみてよい．

特に $G = \mathbb{R}$ $\lambda(dx) = \lambda\, dx$ $\varphi(x) = \frac{1}{\lambda} \chi_{[0,1]}(x)$ とおくと

上式より

$$\int_{\Omega^{\circ}} \mu^{\circ}(d\xi)\, F(\xi) = \int_{\Omega} \mu(d\xi) \int_{0}^{1} \xi(dx)\, F(\angle_{x^{-1}} \xi)$$

が成り立つ．

ここで Ω° : 原点に粒子がある configurations の全体

Sem. on Probab.
Vol.46 1977年
P1-89

Characterization of Poisson measure (II)

ここでは、Palm meas を用いて Poisson meas を characterize する事を考える.

Th 6

μ : random point field with mean λ

この時

μ が λ-Poisson $\Longleftrightarrow$ $\mu^x = \mu * \Delta_x$

(proof)

$\Longrightarrow$ はすでに示した. (Prop 2 より)

$\Longleftarrow$ $\forall E \in \mathcal{B}(R)$ に対して

$$
\begin{aligned}
&\mu(\xi(E) \geq 2) \\
&\leq \int \mu(d\xi)\, \xi(E)\, \chi_{\xi(E)\geq 2}(\xi) \\
&= \int_E \lambda(dx) \int \mu^x(d\xi)\, \chi_{\xi(E)\geq 2}(\xi) \\
&= \int_E \lambda(dx) \iint \mu(d\xi)\, \Delta_x(d\eta)\, \chi_{\xi(E)\geq 2}(\xi+\eta) \\
&= \int_E \lambda(dx) \int \mu(d\xi)\, \chi_{\xi(E)\geq 2}(\xi+\delta_x) \\
&= \int_E \lambda(dx)\, \mu(\xi(E) \geq 1) \\
&= \lambda(E)\, \mu(\xi(E) \geq 1) \\
&\leq \lambda(E)^2
\end{aligned}
$$

$\therefore$ §1 の Lemma 3 より μ は多重点をもたない.

Sem. on Probab.
Vol.46 1977年
P1-89

Prop 3 より

$$\mu(\xi(E)=k) = \frac{1}{k}\int_E \lambda(dx)\ \mu^x(\xi(E)=k)$$

$$= \frac{1}{k}\int_E \lambda(dx)\ \mu(\xi(E)=k-1)$$

$$= \frac{1}{k}\ \lambda(E)\ \mu(\xi(E)=k-1)$$

$$\therefore\quad \mu(\xi(E)=k) = \frac{\lambda(E)^k}{k!}\ \mu(\xi(E)=0)$$

E が bounded の時

$\mu(\xi(E)<\infty)=1$ であるから

$$\mu(\xi(E)=0)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda(E)^k}{k!} = 1$$

$$\therefore\quad \mu(\xi(E)=0) = e^{-\lambda(E)}$$

$$\therefore\quad \mu(\xi(E)=k) = \frac{\lambda(E)^k}{k!}\ e^{-\lambda(E)}$$

よって Renyi Kallenberg の lemma により μ は λ - Poisson

注

Q は 測度の足算に関して自然に半群の構造をとっているから. これに関する convolution を $*$ で表わす.

Sem. on Probab.
Vol.46 1977年
P1-89

<u>Prop 7</u> (O. Kallenberg Z. für W '75)

μ_n $n \geq 1$; random point field with mean λ_n

μ ; 〃 λ とする.

この時、以下の3条件のどの2つからも残りの1つが出る.

i) $\mu_n \longrightarrow \mu$ (weakly convergence)

ii) $\lambda_n \longrightarrow \lambda$

iii) $\mu_n^{\varphi} \longrightarrow \mu^{\varphi}$ $\forall \varphi \in C_c^+(R)$

ここで

$$\int \mu^{\varphi}(d\xi)\, F(\xi) = \frac{\int \mu(d\xi) \int \xi(dx)\, \varphi(x)\, F(\xi)}{\int \lambda(dx)\, \varphi(x)}$$

<u>注</u> φ を δ-function にとると $\mu^{\varphi} = \mu^{x}$: Palm meas.

(proof)

i) ii) $\Longrightarrow$ iii)

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$: 確率空間.

μ_n を分布にもつ Q-valued random variable を ξ_n

μ を分布 〃 ξ とすると

i) より $\xi_n \longrightarrow \xi$ in law

$$E[F(\xi_n) \langle \xi_n, \varphi \rangle] = E[G(\xi_n) ; |G(\xi_n)| \leq c] + E[G(\xi_n) ; |G(\xi_n)| > c]$$

ここで $G(\xi) = F(\xi) \langle \xi, \varphi \rangle$ とおいた.

i) より $E[G(\xi_n) ; |G(\xi_n)| \leq c] \longrightarrow E[G(\xi) ; |G(\xi)| \leq c]$

又 $E[G(\xi_n) ; |G(\xi_n)| > c] \longrightarrow 0$ uniformely in n as $c \to \infty$

これらの事と ii) より iii) が言える.

ii) iii) $\Longrightarrow$ i)

λ_n λ は Radon meas だから

$E(\xi_n(K)) = \lambda_n(K) < \infty$

$E(\xi(K)) = \lambda(K) < \infty$

$\therefore$ $P(\xi_n(K) < +\infty) = P(\xi(K) < \infty) = 1$

Sem. on Probab.
Vol.46 1977年
P1-89

$\varphi \in C_c^+(R)$

$$\frac{d}{dt} E[e^{-t\langle \xi_n, \varphi\rangle}] = -E[\langle \xi_n, \varphi\rangle e^{-t\langle \xi_n, \varphi\rangle}]$$

$$= -\langle \lambda_n, \varphi\rangle \int \mu_n^{\varphi}(d\eta)\, e^{-t\langle \eta, \varphi\rangle}$$

$$\longrightarrow -\langle \lambda, \varphi\rangle \int \mu^{\varphi}(d\eta)\, e^{-t\langle \eta, \varphi\rangle} \qquad (\because \text{ ii) iii) より})$$

$$= \frac{d}{dt} E[e^{-t\langle \xi, \varphi\rangle}]$$

$\therefore \quad E[e^{-t\langle \xi_n, \varphi\rangle}] \longrightarrow E[e^{-t\langle \xi, \varphi\rangle}] \quad$ as $n \to \infty$

$\therefore \quad \int \mu_n(d\xi)\, e^{-\langle \xi, \varphi\rangle} \xrightarrow[\text{as } n\to\infty]{} \int \mu(d\xi)\, e^{-\langle \xi, \varphi\rangle} \quad$ for $\forall \varphi \in C_c^+(R)$

よって $F(\xi) = e^{-\langle \xi, \varphi\rangle}$ なる関数については i) が言えた。
ところで $e^{-\langle \xi, \varphi\rangle}$ の形の線型結合で表わされる関数の全体は algebra をなし、かつ Q の点を分離するから、Stone Weierstrass の定理により Q 上の連続関数はこの様な関数によって近似される。
故にこの事より i) が言える

i) iii) $\Rightarrow$ ii)

$\varphi \in C_c^+(R)$ として

$$F(\xi) = \frac{1}{1 + \langle \xi, \varphi\rangle}$$

i) より $\mu_n^{\varphi}(F) \longrightarrow \mu^{\varphi}(F)$ より

$$\langle \lambda_n, \varphi\rangle \longrightarrow \frac{\mu(\langle \xi, \varphi\rangle / 1 + \langle \xi, \varphi\rangle)}{\mu^{\varphi}(F)} = \langle \lambda, \varphi\rangle$$

$\therefore \quad \lambda_n \longrightarrow \lambda$

よって ii) がいえた。

Sem. on Probab.
Vol.46 1977年
P1-89

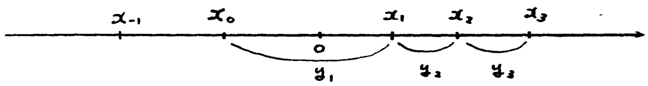
Point process over real line

$\mathbb{R}^1$ 上の configuration ξ に対して、

$$\xi : \quad \cdots < x_{-2} < x_{-1} < x_0 \le 0 < x_1 < x_2 < \cdots$$

と表わし さらに

$$\begin{cases} y_k = x_k - x_{k-1} \\ u = x_1 \end{cases} \qquad \text{とおく.}$$



又 $s \in \mathbb{R}^1$ に対して、

$$\{x_k^{(s)}\} \quad : \quad \cdots < x_0^{(s)} \le s < x_1^{(s)} < x_2^{(s)} < \cdots$$

と表わす。

<u>Prop 8</u> (Palm - Khintchine formula)

μ を $\mathbb{R}^1$ 上の point process とすると $\mathbb{R}^1$ 上の measure λ が存在して

$$\mu(\xi(s,t) > n, A) = \int_{(s,t)} \lambda(dx)\, \mu^x(\xi(x,t) = n, A)$$

$$= \int_{(s,t)} \lambda(dx)\, \mu^x(\xi(s,t) = n, A) \qquad A \in \mathcal{B} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$$

が成りたつ.

特に μ が stationary である時には μ^x は μ^0 の translate となる.

Sem. on Probab.
Vol.46 1977年
P1-89

Proof)

$n \geq 0$ $m \geq 0$ を任意にとる

$$\mu(\xi(s,t) = n+m+1, A)$$

$$= \mu(x_{n+1}^{(s)} < t, \xi(x_{n+1}^{(s)}, t) = m, A)$$

$$= \int_{A \cap [\xi(x_{n+1}^{(s)}, t) = m]} \mu(d\xi) \chi_{[x_{n+1}^{(s)} < t]}(\xi)$$

$$= \int_{A \cap [\xi(x_{n+1}^{(s)}, t) = m]} \mu(d\xi) \int \xi(dx) \chi(x_n^{(s)} < x \leq x_{n+1}^{(s)} < t)(x)$$

$$= \int \lambda(dx) \int_{A \cap [\xi(x_{n+1}^{(s)}, t) = m]} \mu^x(d\xi) \chi(x_n^{(s)} < x \leq x_{n+1}^{(s)} < t)(x)$$

$$= \int_{(s,t)} \lambda(dx) \mu^x(\xi(s,x) = n. \xi(x,t) = m, A)$$

上式において m について加えると

$$\mu(\xi(s,t) > n, A) = \int_{(s,t)} \lambda(dx) \mu^x(\xi(s,x) = n, A)$$

又 n について加えると

$$\mu(\xi(s,t) > m, A) = \int_{(s,t)} \lambda(dx) \mu^x(\xi(x,t) = m, A)$$

Sem. on Probab.
Vol.46 1977年
P1-89

__Prop 9.__ (Characterization of Poisson point process.)

μ を多重点をもたない $\mathbb{R}^1$ 上の point process とする。
non atomic な mean λ が存在し
$\forall x \geq t$ に対して

$$\mu^x(A) = \mu(A) \qquad \text{if} \quad A \in \mathcal{B}_{(-\infty, t)} = \mathcal{F}_t$$

が成り立つならば μ は Poisson point process である

(proof)

$\mathbb{R}^1$ の Borel set I に対して

$$\chi(I) = \mu(\xi(I) = 0) \qquad \text{とおく。}$$

Prop 8 より。

$$\mu(\xi(s,t) > 0) = \int_{(s,t)} \lambda(dx)\ \mu^x(\xi(s,x) = 0)$$

$$= \int_{(s,t)} \lambda(dx)\ \mu(\xi(s,x) = 0) \qquad (\because\ [\xi(s,x) = 0] \in \mathcal{F}_{x-0}$$

$$= \int_{(s,t)} \lambda(dx)\ \chi(s,x) \qquad \text{--------} \ ①$$

① より

$$1 - \chi(s,t) = \int_{(s,t)} \lambda(dx)\ \chi(s,x) \qquad \text{-------} \ ②$$

② より先ず $\chi(\phi) = 1$ が成り立つ。又 λ は non atomic だから

$$\chi(s,t) = e^{-\lambda(s,t)} \qquad \text{となる。}$$

μ は多重点をもたないから。Renyi - Kallenberg の lemma より μ は λ - Poisson.

注． λ が atom をもつ場合。Bernoulli と Poisson 測度の直積となる

Sem. on Probab.
Vol.46 1977年
P1-89

以後 stationary な場合を考える.

まず次の Lemma に注意しよう

Lemma 10

i) $x_k^{(t)}(\xi + x) = x_j^{(t)}(\xi) + x$

iff $t - x_{j-k+1}^{(t)}(\xi) < x \le t - x_{j-k}^{(t)}(\xi)$

ii) $x_k^{(t)} = x_{k-i}^{(0)}$

$$i = \begin{cases} \xi(0,t] & t > 0 \\ -\xi(t,0] & t < 0 \end{cases}$$

proof. 略.

Prop 11

μ : stationary point process over $\mathbb{R}^1$ とする時

任意の $k \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\int \mu(d\xi)\ \varphi(\xi) = \int \mu^0(d\xi) \int_{x_k(\xi)}^{x_{k+1}(\xi)} \lambda\ \varphi(\xi - x)\,dx$$

が成り立つ

---

proof)

$a_n(x, \xi) \equiv \chi_{(x_{n-1}(\xi),\, x_n(\xi)]}(x)$ とおくと

$a_n(x, \xi + x) = \chi_{(x_{n-1}(\xi+x),\, x_n(\xi+x)]}(x)$

$x_{n-1}(\xi + x) < x \le x_n(\xi + x)$

$\rightleftarrows$ $(\xi + x)(0, x] = n-1$ or $(\xi + x)(x, 0] = 1-n$ $(n \le 1)$

$\rightleftarrows$ $\xi(-x, 0] = n-1$ or $\xi(0, -x] = 1-n$ $(n \le 1)$

Sem. on Probab.
Vol.46 1977年
P1-89

$$\rightleftarrows \quad x_{-n+1}(\xi) \leq -x < x_{-n+2}(\xi)$$

$$\therefore \quad a_n(x, x+\xi) = \chi\left(-x_{-n+1}(\xi) \geq x > -x_{-n+2}(\xi)\right) \quad \cdots\cdots \quad ①$$

よって ① より $\varphi(\xi) \geq 0$ に対して

$$\int \mu(d\xi)\ \varphi(\xi)$$

$$= \int \mu(d\xi) \int \xi(dx)\ a_n(x, \xi)\ \varphi(\xi)$$

$$= \int \lambda\, dx \int \mu^x(d\xi)\ a_n(x, \xi)\ \varphi(\xi)$$

$$= \int \lambda\, dx \int \mu^0(d\xi)\ a_n(x, \xi+x)\ \varphi(\xi+x) \qquad (\because\ \mu : \text{stationary})$$

$$= \int \mu^0(d\xi) \int_{-x_{-n+2}(\xi)}^{-x_{-n+1}(\xi)} \lambda\ \varphi(\xi+x)\ dx \qquad (\because\ ①\ より)$$

$$= \int \mu^0(d\xi) \int_{x_{-n+1}(\xi)}^{x_{-n+2}(\xi)} \lambda\ \varphi(\xi-x)\ dx$$

$k = -n+1$ とすればよい

Sem. on Probab.
Vol.46 1977年
P1-89

$\mathbb{R}^1$ 上の configuration $\xi = (\cdots < x_{-1} < x_0 \le 0 < x_1 < x_2 < \cdots)$ に対して

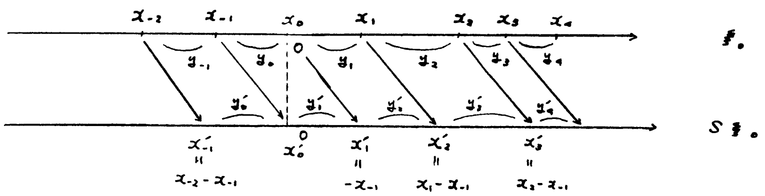
$$Q^0 = \{ \xi \in Q \ ; \ x_0 = 0 \}$$

とおく.

次に変換 $S : Q^0 \longrightarrow Q^0$ を.

$$(S\xi^0)_k = (\xi^0)_{k-1} - (\xi^0)_{-1}$$

によって定義する.



$\xi^0 \longleftrightarrow \eta = (y_k = x_k - x_{k-1})_k$

$S\xi^0 \longleftrightarrow \eta' = (y'_k = y_{k-1})_k$

$\xi^0 \in Q^0$ に対して

$$\theta(\xi^0) = x_1(\xi^0)$$

とおき

$$\Omega = \{ (\xi^0, u) \mid \xi^0 \in Q^0 , \ 0 < u < \theta(\xi^0) \}$$

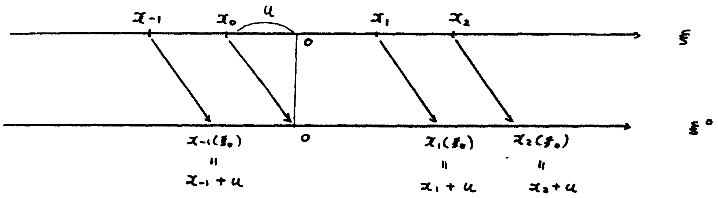
とおくと Ω と Q とは

$$\Omega \ni (\xi^0, u) \longleftrightarrow \xi = \xi^0 - u \in Q$$

Sem. on Probab.
Vol.46 1977年
P1-89

$$\begin{cases} u = -x_0(\xi) \\ \xi^0 = \xi - x_0(\xi) \end{cases}$$

なる対応で 1対1 に対応する。



$$T_t : Q \longrightarrow Q \quad を$$
$$\xi \longmapsto \xi + t$$

で定義するとき次の命題が成り立つ。

<u>Prop 12</u>

$\nu \doteqdot \mu^0$ $Y = Q^0$ とおくと

ν は S-不変である。即ち、(Q, μ, T_t) は

(Y, ν, S) を basic automorphism とし $\theta(\xi^0) = x_1(\xi^0)$

を ceiling function とする special flow で表現できる。

(proof)

ψ を Q^0 上の任意の real valued Borel 関数とし

$$\varphi(\xi) = \frac{\psi(\xi - x_0(\xi))}{x_1(\xi) - x_0(\xi)} \qquad \xi \in Q$$

とおく。

Sem. on Probab.
Vol.46 1977年
P1-89

Prop 11 より. $\forall k \in \mathbb{Z}$ に対して.

$$I \equiv \int_Q \mu(d\xi)\ \varphi(\xi)$$

$$= \int_Q \mu^\circ(d\xi) \int_{x_k(\xi)}^{x_{k+1}(\xi)} \lambda\, dx\ \varphi(\xi - x) \qquad \text{------} \quad ①$$

$x_{-1}(\xi) \leq x < x_0(\xi)$ の時

$$\varphi(\xi - x) = \frac{\psi(\xi - x_{-1}(\xi))}{x_0(\xi) - x_{-1}(\xi)} \qquad \text{----} \quad ②$$

$x_0(\xi) \leq x < x_1(\xi)$ の時

$$\varphi(\xi - x) = \frac{\psi(\xi - x_0(\xi))}{x_1(\xi) - x_0(\xi)} \qquad \text{-----} \quad ③$$

① において $k = -1$ として ② を用いると

$$I = \int_{Q^\circ} \mu^\circ(d\xi^\circ) \int_{x_{-1}(\xi^\circ)}^{x_0(\xi^\circ)} \lambda\, dx \ \frac{\psi(\xi - x_0(\xi^\circ))}{x_1(\xi^\circ) - x_0(\xi^\circ)}$$

$$= \int_{Q^\circ} \mu^\circ(d\xi^\circ)\ \lambda\ \psi(S\xi^\circ)$$

$$= \lambda \int_{Q^\circ} \nu(d\xi^\circ)\ \psi(S\xi^\circ)$$

又一方 ① において $k = 0$ として ③ を用いると

$$I = \int_{Q^\circ} \mu^\circ(d\xi^\circ) \int_{x_0(\xi^\circ)}^{x_1(\xi^\circ)} \lambda\, dx \ \frac{\psi(\xi^\circ - x_0(\xi^\circ))}{x_1(\xi^\circ) - x_0(\xi^\circ)}$$

$$= \int_{Q^\circ} \mu^\circ(d\xi^\circ)\ \lambda\ \psi(\xi) \qquad (\because\ x_0(\xi^\circ) = 0)$$

$$= \lambda \int_{Q^\circ} \nu(d\xi^\circ)\ \psi(\xi^\circ)$$

Sem. on Probab.
Vol.46 1977年
P1-89

$$\therefore \int_{\Omega^\circ} \nu(d\xi^\circ)\ \varphi(S\xi^\circ) = \int_{\Omega^\circ} \nu(d\xi^\circ)\ \varphi(\xi^\circ)$$

$\therefore$ ν は S-不変.

Example 1

G を random variable $Y \geq 0$ の分布関数 とすると,
$G(0+) = 0$ $G(+\infty) = 1$ で, G は 単調増加, 右連続
である.

$$X_n = Y_0 + Y_1 + \cdots + Y_n \qquad n \geq 0$$

において Y_0 を 非負な random variable とし $Y_1, \cdots, Y_n$
を Y と同分布とし $Y_0, Y_1, \cdots, Y_n$ は互いに独立であると
する.

$\{X_n\}$ を定常な random point process とするとき. Y_0 の
分布 F は どの様になるであろうか. ?

μ でもって point process $\xi = \{X_n ; n \geq 0\}$ の分布
を表わせば. μ は定常であるとしているので μ の mean は
$\lambda\, dx$ $0 < \lambda < \infty$ と表わされる.

$$F(t) = P(Y_0 \leq t)$$

$$= \mu(\xi(0, t] > 0)$$

$$= \int_0^t \lambda\, dx\ \mu^x(\xi(x, t] = 0)$$

$$= \lambda \int_0^t dx\ \mu^\circ(\xi(0, t-x] = 0)$$

Sem. on Probab.
Vol.46 1977年
P1-89

$$= \lambda \int_0^t dx \quad P(Y_1 > t - x)$$

$$= \lambda \int_0^t dx \quad (1 - P(Y \leq t - x))$$

$$= \lambda \int_0^t dx \quad (1 - G(t - x))$$

$$= \lambda \int_0^t (1 - G(x))\, dx$$

$F(+\infty) = 1$ より

$$\lambda = \frac{1}{\int_0^\infty (1 - G(x))\, dx} = \frac{1}{\int_0^\infty x\, G'(x)\, dx}$$

$$= \frac{1}{E(Y)}$$

$$\therefore \quad F(t) = \frac{1}{E(Y)} \int_0^t (1 - G(x))\, dx$$

となり Y_0 の分布関数がえられた。

Example 2 (hard rod system)

Poisson 場は密度一定の下の質点系の有界領域での一様分布の無限体積局限とみる事ができた。即ち

$$\mu_V(dx) = \frac{d^N x}{\int_{V^N} d^N x} \qquad x \in R^\nu$$

とおくとき $V \uparrow R^\nu$ $\frac{N}{|V|} \longrightarrow \lambda \in (0, \infty)$ のときの μ_V の極限が λ に附随した Poisson 場であった。ここでは実数直線上の長さ $a > 0$ の剛体棒の一様分布の無限体積局限を考えてみる。区間 $V = [-L, L]$ 上の N 粒子の一様分布は、区間 $[-L, L - Na]$ 上

Sem. on Probab.
Vol.46 1977年
P1-89

の N 質点の一様分布を考え、左から順に質点を長さ a の棒におきかえ、他粒子を右に a だけずらしたものである。このとき棒の系の密度は

$$\rho = \frac{N}{|V|} = \frac{N}{2L}$$

質点系の密度は、

$$\lambda = \frac{N}{2L - Na} = \frac{\rho}{1 - \rho a}$$

である。

ゆえに極限の分布は定常であり隣り合う粒子間の分布は分布関数は

$$G(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < a \\ e^{-\lambda(x-a)} & x \geq a \end{cases}$$

で与えられる。この時 $[0, +\infty)$ の上の最左端の粒子の位置の分布関数 $F(x)$ を求めれば極限分布はすべて求まる。Example 1 によれば

$$F(x) = \frac{\int_0^x (1 - G(y))\,dy}{\int_0^\infty (1 - G(y))\,dy}$$

即ち

$$F(x) = \begin{cases} \rho x & 0 \leq x < a \\ 1 - \dfrac{1}{1-\rho a} e^{-\lambda(x-a)} & x \geq a \end{cases}$$

$$G(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < a \\ e^{-\frac{\rho}{1-\rho a}(x-a)} & x \geq a \end{cases}$$

Sem. on Probab.
Vol.46 1977年
P1-89

§4 "高階" の Palm measure と moments

この節でも，考える point field は多重点をもたないものとしておく．random point field ξ に対して，ξ^n をその直積

$$\langle \xi^n, \varphi_n \rangle = \sum_{x_1 \cdots x_n \in \xi} \varphi_n (x_1, \cdots, x_n)$$

とし

$$\langle \xi_n\ \varphi_n \rangle = \sum_{\substack{x_1 \cdots x_n \in \xi \\ \text{互に異なる}}} \varphi_n (x_1, \cdots, x_n)$$

とおく

<u>*Def 2*</u>

ξ^n の平均測度 $\lambda^{(n)} = \mu(\xi^n)$ が存在すれば，これを ξ の n 次 moment 測度と呼び，ξ_n の平均測度 $\lambda_n = \mu(\xi_n)$ を ξ の n 次相関測度 correlation measure と呼ぶ．

例 λ - Poisson の場合．

$$\lambda_n = \lambda^{\otimes n}$$

しかし

$$\lambda^{(2)}(dx_1\, dx_2) = \lambda(dx_1)\lambda(dx_2) + \lambda(dx_1)\delta(x_1, dx_2)$$

$$\begin{aligned}\lambda^{(3)}(dx_1\, dx_2\, dx_3) &= \lambda(dx_1)\lambda(dx_2)\lambda(dx_3) + \lambda(dx_3)\lambda(dx_1)\delta(x_1, dx_2) \\ &+ \lambda(dx_1)\lambda(dx_2)\delta(x_2, dx_3) + \lambda(dx_2)\lambda(dx_3)\delta(x_3, dx_1) \\ &+ \lambda(dx_1)\delta(x_1, dx_2)\delta(x_1\ dx_3)\end{aligned}$$

etc.

proof. φ_n として support が対角部分にあるものをとれば regionary independence より明らか

Sem. on Probab.
Vol.46 1977年
P1-89

注　一般に λ_n が存在すれば $\lambda^{(n)}$ も存在する.

Lemma 2

n 次の平均測度 $\lambda^{(n)}$ が存在する

$\Longrightarrow$ 次の様な meas $\mu^{x_1,\cdots,x_n}$ が $\lambda^{(n)}$ - a.e. $(x_1,\cdots,x_n)$ に対して存在する.

$$\int \mu(d\xi) < \xi^n, \varphi_n > F(\xi) = \int \lambda^{(n)}(dx_1,\cdots,dx_n)\, \varphi_n(x_1,\cdots x_n) \int \mu^{x_1\cdots x_n}(d\xi)\, F(\xi)$$

F bdd Borel

proof.　μ^x の場合と同様.

注　対角成分の外では $\lambda^{(n)} = \lambda_n$ であるから $x_1,\cdots,x_n$ が互いに異なる時, $\mu^{x_1,\cdots,x_n}$ は λ_n に関して定義されたと思ってよい

Def 3　$\mu^{x_1\cdots x_n}$ を n 階の Palm 測度と呼ぶ.

注　$\mu^{x_1,\cdots x_n}$ は $x_1\cdots x_n$ に関し対称. そして
$\xi \ni x_1,\cdots x_n$　$\mu^{x_1\cdots x_n}$ - a.s.

以下 $\tilde{\mu}^{x_1\cdots x_n}$ で $\mu^{x_1\cdots x_n}$ から n 個の点 $x_1\cdots x_n$ を除いた場を表わす. 即ち

$$\int \mu^{x_1\cdots x_n}(d\xi)\, F(\xi) = \int \tilde{\mu}^{x_1\cdots x_n}(d\xi)\, F(\xi \cup \{x_1,\cdots,x_n\})$$

Sem. on Probab.
Vol.46 1977年
P1-89

注1

$$<\xi^{(2)}, f_2> = <\xi_2, f_2> + <\xi, f_1> \qquad f_2 \in C_c^+(R \times R)$$

ただし $\qquad f_1(x) = f_2(x, x)$

注2 $\quad \lambda^{(n)} = \mu(\xi^n)$ とは $\forall f_n \in C_c^+(R \times \cdots \times R)$ に対して次式が成立する事.

$$\int \mu(d\xi) <\xi^n, f_n> = \int \lambda^{(n)}(dx_1 \cdots dx_n) \; f_n(x_1 \cdots x_n)$$

Prop 4

random point field μ が n 次の moment をもてば

$1 \leq m < n$ の時

$$\mu^{x_1 \cdots x_n} = (\mu^{x_1 \cdots x_m})^{x_{m+1} \cdots x_n} \qquad \lambda_n - a.e.$$

さらに $\mu^{x_1 \cdots x_m}$ の ℓ 次の平均 $\lambda_\ell^{x_1 \cdots x_m}$ も存在して

$$\lambda_n(dx_1 \cdots dx_n) = \lambda_m(dx_1 \cdots dx_m) \, \lambda_{n-m}^{x_1 \cdots x_m}(dx_{m+1} \cdots dx_n)$$

(proof) $\quad n = 2$ として示す

$f_2(x, y) \in C_c^+(R \times R)$

$f_2(x, x) = 0 \qquad$ for $\forall x \in R \qquad$ とすると

$$\int \mu(d\xi) <\xi_2, f_2> F(\xi) = \int \mu(d\xi) <\xi^{(2)}, f_2> F(\xi)$$

$$= \int \lambda^{(2)}(dx\, dy) \; f_2(x, y) \int \bar{\mu}^{x, y}(d\xi) \; F(\xi) \qquad (1)$$

一方

$$\int \mu(d\xi) <\xi_2, f_2> F(\xi) = \int \mu(d\xi) \int \xi(dx) \left(\int \xi(dy) \; f_2(x, y) \right) F(\xi)$$

$$= \int \lambda(dx) \int \mu^x(d\xi) \int \xi(dy) \; f_2(x, y) \; F(\xi) \qquad (2)$$

Sem. on Probab.
Vol.46 1977年
P1-89

特に $F(\xi) \equiv 1$ とおくと (1) (2) より.

$$\int \lambda_2(dx\,dy)\ f_2(x,y) = \int \lambda^{(2)}(dx\,dy)\ f_2(x,y)$$

$$= \int \lambda(dx) \int \mu^x(d\xi) \int \xi(dy)\ f_2(x,y) \qquad (3)$$

よって λ-a.e. x に対して

$\int \mu^x(d\xi) \int \xi(dy)\ f_2(x,y)$ が存在する.

$\therefore$ $\exists \lambda^x$: mean of μ^x λ-a.e. x

そして $\lambda_2(dx\,dy) = \lambda(dx)\ \lambda^x(dy)$

再び (1). (2) より

$$\int \lambda_2(dx\,dy)\ f_2(x,y) \int \bar{\mu}^{x,y}(d\xi)\ F(\xi)$$

$$= \int \lambda(dx) \int \mu^x(d\xi) \int \xi(dy)\ f_2(x,y)\ F(\xi)$$

$$= \int \lambda(dx) \int \lambda^x(dy)\ f_2(x,y) \int (\mu^x)^y(d\xi)\ F(\xi)$$

$\therefore$ λ_2-a.e. (x,y) に対して $\bar{\mu}^{x,y} = (\mu^x)^y$

<u>Cor</u> $(\mu^x)^y = (\mu^y)^x$

<u>注.</u> $\mu^{x,y}(\xi \supset \{x,y\}) = 1$

Sem. on Probab.
Vol.46 1977年
P1-89

注

Laplace 変換

$$\mathcal{L}(\varphi) = \mu(e^{-\langle \xi, \varphi \rangle}) \qquad \mathcal{L}^x(\varphi) = \mu^x(e^{-\langle \xi, \varphi \rangle})$$

を用いれば

$$\lambda(dx)\,\mathcal{L}^x(\varphi) = \mathcal{L}'(\varphi) \quad \left(= \frac{\delta \mathcal{L}(\varphi)}{\delta \varphi} \right)$$

である。ここで $\mathcal{L}'$ は $\mathcal{L}$ の Fréchet 微分である。
即ち μ^x は偏微係数として解釈してよいわけで、$\lambda(dx)$ を基準として変分法の記号を用いれば

$$\mathcal{L}^x(\varphi) = \frac{\delta \mathcal{L}(\varphi)}{\delta \varphi(x)}$$

とも書ける。この意味で $(\mu^x)^y = (\mu^y)^x \; (= \mu^{x,y})$ は偏微分の交換である。

今場 μ は任意の次数の moment をもつものとしよう。
μ の相関測度を $\lambda_n \;\; n \geq 1$ とすると対応

$$\mu \text{ on configuration space} \longmapsto \left(\frac{\lambda_n}{n!} \right)_{n \geq 0} \text{ on } \bigcup R_n$$

がえられる。ただし λ_0 は一点集合 R_0 上の単位質量
この対応は次の様な場合単射である事がわかる。

Sem. on Probab.
Vol.46 1977年
P1-89

Prop 5

i) $\int \mu(d\xi)\, \langle \xi_n, f_n \rangle = \langle \lambda_n, f_n \rangle \qquad (f_n \in C_c^+(R^n))$

なる Radon meas $\lambda_n \geq 0$ が存在する. (for $\forall n \geq 1$)

ii) $\forall K$: compact subset of R に対して

$$\frac{1}{n!} \lambda_n(K^n) \longrightarrow 0 \quad \text{as} \quad n \to \infty$$

i) and ii) が成り立つ. $\Longrightarrow$

$\forall \varphi \in C_c^+(R)$ に対して

$$\int \mu(d\xi)\, e^{-\langle \xi, \varphi \rangle} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \lambda_n(dx_1 \cdots dx_n) \prod_{j=1}^{n} \left(e^{-\varphi(x_j)} - 1 \right)$$

ここで $n=0$ の項 summarand $= 1$

(proof)

$\varphi \in C_c^+(R)$ $\quad$ supp $\varphi = K$ とおく.

$\xi \in Q$ に対して $\quad I = I_\xi = \xi \cap K$

$$e^{-\langle \xi, \varphi \rangle} = \prod_{x \in I} e^{-\varphi(x)} = \sum_{J \subset I} \prod_{x \in J} \left(e^{-\varphi(x)} - 1 \right)$$

∵) 一般に $\prod_{x \in I} (a_x + 1) = \sum_{J \subset I} \prod_{x \in J} a_x$ であるから

よって

$$e^{-\langle \xi, \varphi \rangle} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\substack{J \subset I \\ |J| = m}} \prod_{x \in J} \left(e^{-\varphi(x)} - 1 \right)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \langle \xi_m, f_m \rangle \qquad (1)$$

ここで $\quad f_m(x_1, x_2, \cdots, x_m) = \prod_{i=1}^{m} \left(e^{-\varphi(x_i)} - 1 \right)$

$e^{-\varphi(x)} - 1 < 0$ であるから (1) の級数は交代級数.

Sem. on Probab.
Vol.46 1977年
P1-89

$$\therefore \int \mu(d\xi)\, e^{-\langle \xi, \varphi \rangle} = \int \mu(d\xi) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \langle \xi_m, f_m \rangle$$

$$= \sum_{m=0}^{N} \frac{1}{m!} \int \mu(d\xi) \langle \xi_m, f_m \rangle + \int \mu(d\xi) \sum_{m=N+1}^{\infty} \frac{1}{m!} \langle \xi_m, f_m \rangle$$

ここで

$$\left| \int \mu(d\xi) \sum_{m=N+1}^{\infty} \frac{1}{m!} \langle \xi_m, f_m \rangle \right| \leq \int \mu(d\xi) \left| \sum_{m=N+1}^{\infty} \frac{1}{m!} \langle \xi_m, f_m \rangle \right|$$

$$\leq \int \mu(d\xi) \frac{1}{N!} | \langle \xi_N, f_N \rangle |$$

$$\leq \frac{\lambda_N(K^N)}{N!} \longrightarrow 0 \quad \text{as } N \to \infty \quad (\text{ア ii) より})$$

$$\therefore \int \mu(d\xi)\, e^{-\langle \xi, \varphi \rangle} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \int \mu(d\xi) \langle \xi_m, f_m \rangle$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \langle \lambda_m, f_m \rangle$$

λ-Poisson 測度の場合 上の公式は

$$\int \mu(d\xi)\, e^{-\langle \xi, \varphi \rangle} = \exp\left\{ \int (e^{-\varphi(x)} - 1)\, \lambda(dx) \right\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \cdots \int \lambda(dx_1) \cdots \lambda(dx_n) \prod_{i=1}^{n} (e^{-\varphi(x_i)} - 1)$$

を示している。一般に大きな空間 $\bigcup R_n$ 上の測度 Λ に対して

$$\lambda_n = n!\, \Lambda |_{R_n}$$

を相関測度としてもつ場 μ が存在するためのよい判定条件があれば有用であるが、知られていない様である。

Sem. on Probab.
Vol.46 1977年
P1-89

correlation function について

以下 R 上に基準となる Radon meas dx (これを Lebesgue measure と呼ぶ) があるものとし、R が countable でないときには、non atomic であるとする。

μ : R 上の random counting measure

μ が n 次の moment λ_n をもち $\lambda_n(dx_1\cdots dx_n)$ が $dx_1\cdots dx_n$ に関して絶対連続で

$$\lambda_n(dx_1\cdots dx_n) = \rho_n(x_1,\cdots,x_n)\,dx_1\cdots dx_n$$

なる ρ_n が存在する時、$\rho_n(x_1,\cdots,x_n)$ を μ の n 次の correlation function と呼ぶ。

注　$\underline{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ とおき

$\lambda_n(d\underline{x}) = \rho_n(\underline{x})\,d^n\underline{x}$ と表わす事にする。

f を $\bigcup_{n=0}^{\infty} R^n$ 上の non negative Borel function とし

1) $$\int f(\underline{x})\,d\underline{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\int_{R^n} f(\underline{x})\,d^n\underline{x}$$

2) $$\int^{K} f(\underline{x})\,d\underline{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\int_{K^n} f(\underline{x})\,d^n\underline{x} \qquad K \subset R$$

3) $$\int^{-K} f(\underline{x})\,d\underline{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\int_{K^n} f(\underline{x})\,d^n\underline{x}$$

とおく。

Sem. on Probab.
Vol.46 1977年
P1-89

Prop 6

$\exists C > 0$; $|f(\underline{x})| \leq C^n$ $(\underline{x} \in R^n)$ の時

1) K, L : compact で $K \cap L = \phi$ の時

$$\int^L d\underline{x} \int^K d\underline{y}\ f(\underline{x} \cdot \underline{y}) = \int^{K \cup L} f(\underline{x})\, d\underline{x}$$

2) $$\int^{-K} d\underline{x} \int^K d\underline{y}\ f(\underline{x} \cdot \underline{y}) = 1$$

3) $$\int^K d\underline{x}\ e^{-\langle \underline{x}, \varphi \rangle} f(\underline{x}) = \int^K d\underline{x}\ (e^{-\varphi} - 1)^{\wedge}(\underline{x}) \int^K d\underline{y}\ f(\underline{x} \cdot \underline{y})$$

for $\forall \varphi \in C_c^+(R)$

(Proof)

Stone Weierstrass の定理により $f(\underline{x}) = e^{-\langle \underline{x}, \psi \rangle}$ $\psi \in C_c^+(R)$ の時について示せばよいが、このときは自明

Prop 7

$\bigcup_{n=0}^{\infty} K^n$ 上の prob meas μ が $d\underline{x}$ に関して密度 $\sigma(\underline{x})$ をもてば、μ は correlation function ρ をもっていて

$$\rho(\underline{x}) = \int^K \sigma(\underline{x} \cdot \underline{y})\, d\underline{y}$$

逆に μ が correlation function ρ をもち

$|\rho(\underline{x})| \leq C^n$ $(\underline{x} \in R^n)$ for some const C

$\Longrightarrow$ $\sigma(\underline{x}) = \int^{-K} \rho(\underline{x} \cdot \underline{y})\, d\underline{y}$ は μ の $d\underline{x}$ に関する密度となる.

(proof)

後半と同様だから前半を示す.

Sem. on Probab.
Vol.46 1977年
P1-89

$$\int \lambda_n(d\underline{x})\, f_n(\underline{x})$$

$$= \int \mu(d\underline{x}) \quad \langle \underline{x}_n \,,\, f_n \rangle$$

$$= \int^K d\underline{x} \quad \sigma(\underline{x}) \quad \langle \underline{x}_n \,,\, f_n \rangle$$

$$= \sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{m!} \int_{K^m} d^m\underline{x} \quad \sigma(\underline{x}) \; \langle \underline{x}_n \,,\, f_n \rangle$$

$$= \sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{m!} \int_{K^m} \sum f_n(x_{i_1} \cdots x_{i_n})\, \sigma(x_1 \cdots x_m)\, dx_1 \cdots dx_m$$

$$= \sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{m!} \binom{m}{n} (m-n)! \int_{K^n} f_n(x_1 \cdots x_n)\, dx_1 \cdots dx_n \int_{K^{m-n}} \sigma(x_1 \cdots x_m)\, dx_{n+1} \cdots dx_m$$

$$= \sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{(m-n)!} \int d^n\underline{x} \quad f_n(\underline{x}) \int_{K^{m-n}} d^{m-n}\underline{y} \quad \sigma(\underline{x}\cdot\underline{y})$$

$$= \int d^n\underline{x} \quad f_n(\underline{x}) \int^K d\underline{y} \quad \sigma(\underline{x}\cdot\underline{y})$$

よって

$$\rho(\underline{x}) = \int^K d\underline{y} \quad \sigma(\underline{x}\cdot\underline{y})$$ となる。

Sem. on Probab.
Vol.46 1977年
P1-89

次節においては、このノートの目的である Gibbs 場を取り扱う。しかし Gibbs 場は今まで定義してきた意味での場ではない。

Def

R 上の mark S をもつ random point field ξ とは次の様な pair (ξ_0, π) のことである。

1) ξ_0 は R 上の random point field

2) $\pi : \xi_0 \longrightarrow S$

この定義は次の様に言い換えてもよい。marked random point field ξ とは base space R と mark space S の直積 $R \times S$ 上の random point field で条件

$$\xi(\{x\} \times S) \leq 1 \qquad (\forall x \in R)$$

をみたすものである。

実際

$$\xi = \{(x, \pi(x)) \mid x \in \xi_0\}$$

とおけばよい。逆は

$$\xi_0(E) = \xi(E \times S) \qquad (E \subset R)$$

$$\pi(x) = s \quad \text{if} \quad x \in \xi_0 \quad \text{and} \quad \xi(\{(x, s)\}) = 1$$

このとき前と同様の方法で、今までの Palm 測度 $\mu^{(x,s)}$ とは別に、測度 λ と μ^x (λ-a.e. x) を

$$\int \mu(d\xi) \int \xi_0(dx)\, u(x, \xi) = \int \lambda(dx) \int \mu^x(d\xi)\, u(x, \xi)$$

によって定めることができる。この測度 μ^x を通常、marked point process の Palm 測度という。

Sem. on Probab.
Vol.46 1977年
P1-89

§5 Gibbsian random fields.

平衡状態の統計力学において、物理量の時間平均は Gibbs ensemble（=確率空間）での時間平均に置き換えられることを通常仮定している。（ensemble の例については下の例を参照）このエルゴード仮説を検証するという大問題はさておき、以下では、この Gibbs 状態（=確率分布）を random point field の立場から特徴付けることを目標とする。
（格子系の場合は Seminar on Probability vol 38 宮本宗実 を参照されたい。）

<u>canonical ensemble</u>

$K \subset \mathbb{R}^3$ を bounded region とし

$$\mathcal{X}(K, N) = \{ (q_i, p_i) \ ; \ q_i \in K \quad p_i \in \mathbb{R}^3 \ (i = 1 \cdots N) \}$$

上に次の様な確率測度 μ を入れる.

$$\mu(A) = \frac{1}{Z(K, N)} \int_A \exp\{ -\beta \sum \Phi(|q_i - q_j|) - \tfrac{1}{2}\beta \sum |p_i|^2 \} \, d^N q \, d^N p$$

$A \subset \mathcal{X}(K, N)$ で $\Phi(r)$ は potential function

又

$$Z(K, N) = \int_{\mathcal{X}(K, N)} \exp\{ -\beta \sum \Phi(|q_i - q_j|) - \tfrac{1}{2}\beta \sum |p_i|^2 \} \, d^N q \, d^N p$$

を分配関数 partition function と呼ぶ.

この時 確率空間 $(\mathcal{X}(K, N), \mu)$ を canonical ensemble と呼ぶ.

Sem. on Probab.
Vol.46 1977年
P1-89

<u>grand canonical ensemble</u>

$$\mathfrak{X} = \bigcup_{n=0}^{\infty} K^n$$

$z > 0$ を activity とし、

$$\int \mu(d\mathbf{x})\, F(\mathbf{x}) = \frac{1}{\Xi_{z,K}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \int_{K^n} e^{-\beta \sum \Phi(|x_i - x_j|)}\, F(x_1 \cdots x_n)\, d^n x$$

によって与えられる確率空間 $(\mathfrak{X}, \mu)$ を grandcanonical ensemble と呼ぶ。但しここで

$$\Xi_{z,K} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \int_{K^n} e^{-\beta \sum \Phi(|x_i - x_j|)}\, d^n x \quad < \infty$$

を 大分配関数 grand partition function と呼ぶ。

伝統的な意味での Gibbs 状態には、この他に microcanonical ensemble（energy surface 上の一様分布）があるが、以下で取り扱うのは、configuration space 上のもので、極限 Gibbs 状態と呼ばれるものである。最も古典的な意味での極限 Gibbs 測度は領域 K が全空間 R^ν に増大する時の領域 K 上の grandcanonical ensemble の弱極限点の事である。極限が複数ある時には相の共存を示しているものと解釈される。

極限 Gibbs 測度（以下単に Gibbs 測度という）の定義及び特徴付けとしては次の様なものが知られている。

イ) 境界条件つきの有界領域上の grandcanonical Gibbs 測度の弱位相に関する極限点（の凸包の点）

ロ) Dobrushin（及び Lanford - Ruelle）による条件付測度による定義（以下の (C)．(D)．(E)）

Sem. on Probab.
Vol.46 1977年
P1-89

ハ) Kirkwood - Salsburg 方程式をみたす相関関数をもつ測度.

ここでは, イ) ロ) ハ) との関連を含めて, 最も弱いしかし一般的に成立する

"Palm 測度の絶対連続性"

の形で Gibbs 測度をとらえることにする.

なお 最近,

ニ) K.M.S 状態として Gibbs 状態をとらえることが見い出されている.

Sem. on Probab.
Vol.46 1977年
P1-89

R : locally compact, Hausdorff, 2-nd countability をみたす

Q : R 上の configurations の作る空間

前に述べた様に $Q_0 \subset Q$ が

1) 閉集合

2) $\xi \in Q_0$, $x \in \xi \Longrightarrow \xi \setminus x \in Q_0$

のとき、configuration space と呼ぶ。

Def 1

空間 $\{(x, \xi) \mid \xi \in Q_0, x \in R, x\cdot\xi \in Q_0\}$ 上で定義された関数 $U(x|\xi) \in (-\infty, +\infty)$ が（一般化された）potential function であるとは

$$(*) \qquad U(x|y\cdot\xi) + U(y|\xi) = U(y|x\cdot\xi) + U(x|\xi)$$

が $x\cdot y\cdot\xi \in Q_0$ の時成立する事をいう。

このとき定義域の外で

$$U(x|\xi) = \infty$$

とおくことにすれば、$U(x|\xi) \in (-\infty, +\infty]$ は $+\infty = +\infty$ を許した意味で (*) が成立する。

example 1

$\Phi(r)$ を中心力 potential として

$$U(x|\xi) = -\log C + \beta \sum_{y \in \xi} \Phi(|q(x) - q(y)|) + \frac{1}{2}\beta |p(x)|^2$$

$$x = (q(x), p(x))$$

とおくと $U(x|\xi)$ は一般化された potential となる。

Sem. on Probab.
Vol.46 1977年
P1-89

$$U(x_1\cdot x_2|\xi) \equiv U(x_1|x_2\cdot\xi) + U(x_2|\xi)$$

$$(= U(x_2|x_1\cdot\xi) + U(x_1|\xi)$$

と定義し、一般の $\underline{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ に対しては inductive に

$$U(\underline{x}|\xi) \equiv U(x_1\cdots x_{n-1}|x_n\cdot\xi) + U(x_n|\xi)$$

と定義する。

$U(\underline{x}|\xi)$ は $\underline{x}$ の外側の configuration が ξ である時 $\underline{x}$ のもつ energy を表わしていると考えられる。

Def 2

Q上の確率測度 μ が D.R.L (Dobrushin, Ruelle, Lanford) の意味で potential U に関して Gibbsian であるとは、任意の compact set K 任意の非負 Borel 関数 F に対して次の (c) が成り立つ事

$$\text{(c)}\qquad \mu(F|\mathcal{B}_{K^c})(\xi) = \frac{1}{\Xi_K(\xi)}\int^K d\underline{x}\; e^{-U(\underline{x}|\xi_{K^c})}F(\underline{x}\cdot\xi_{K^c}) \qquad \text{a.e. } \mu$$

ただし、ここで

$$\Xi_K(\xi) = \int^K d\underline{x}\; e^{-U(\underline{x}|\xi_{K^c})}$$

又 $E\subset R$ に対して前と同様に $\mathcal{B}_E = \sigma(\xi|_E)$

example 2

$U(x|\xi)$ を example 1 におけるものと同じものをとり compact set L をとると、grand canonical ensemble μ_L は L において D.R.L の意味で U に関して Gibbsian となる

∵) μ_L は $\mathcal{X}_L = \bigcup_{n=0}^{\infty} L^n$ 上の確率測度で

$$\int d\mu_L(d\underline{x})\, F(\underline{x}) = \frac{1}{\Xi_{z,L}}\int^L e^{-U(\underline{x})}\, F(\underline{x})\, d\underline{x}$$

Sem. on Probab.
Vol.46 1977年
P1-89

$$\Xi_{z,L} = \int^{L} e^{-U(\underline{x})} \, d\underline{x}$$

$$U(\underline{x}) = -n \log z + \sum_{1\leq i<j\leq n} \beta \Phi(|q_i - q_j|) + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \beta |p_i|^2$$

で与えられるものである.

$L \supset K$: compact とする時

(1) $$\mu_L(F \mid \mathcal{B}_{K^c})(\underline{y}) = \frac{1}{\Xi_K(\underline{y})} \int^{K} d\underline{x} \; e^{-U(\underline{x} \mid \underline{y}_{K^c})} F(\underline{x} \cdot \underline{y}_{K^c})$$ を示せばよい.

(2) $$\Xi_K(\underline{y}) = \int^{K} d\underline{x} \; e^{-U(\underline{x} \mid \underline{y}_{K^c})}$$

(1) の右辺は明らかに $\mathcal{B}_{K^c}$ - measurable であるから

(3) $$\int F(\underline{y}) \, d\mu_L(\underline{y}) = \int d\mu_L(\underline{y}) \frac{1}{\Xi_K(\underline{y})} \int^{K} d\underline{x} \; e^{-U(\underline{x} \mid \underline{y}_{K^c})} F(\underline{x} \cdot \underline{y}_{K^c})$$

を示せばよい

(3) の左辺 $$= \frac{1}{\Xi_{z,L}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{L^n} e^{-U(x_1, \cdots, x_n)} F(x_1, \cdots x_n) \, dx_1 \cdots dx_n$$

$$= \frac{1}{\Xi_{z,L}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{n!} \binom{n}{m} \int_{K^m} e^{-U(\underline{x})} d\underline{x} \int_{(L-K)^{n-m}} d\underline{y} \; e^{-U(\underline{x} \mid \underline{y})} F(\underline{x} \cdot \underline{y})$$

$$= \frac{1}{\Xi_{z,L}} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{m!\,(n-m)!} \int_{K^m} e^{-U(\underline{x})} d\underline{x} \int_{(L\setminus K)^{n-m}} d\underline{y} \; e^{-U(\underline{x} \mid \underline{y})} F(\underline{x} \cdot \underline{y})$$

$$= \frac{1}{\Xi_{z,L}} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{m!\,\ell!} \int_{K^m} e^{-U(\underline{x})} d\underline{x} \int_{(L\setminus K)^{\ell}} d\underline{y} \; e^{-U(\underline{x} \mid \underline{y})} F(\underline{x} \cdot \underline{y})$$

$$= \frac{1}{\Xi_{z,L}} \int^{K} d\underline{x} \; e^{-U(\underline{x})} \int^{L\setminus K} d\underline{y} \; e^{-U(\underline{x} \mid \underline{y})} F(\underline{x} \cdot \underline{y})$$

(3) の右辺 $$= \frac{1}{\Xi_{z,L}} \int^{L} d\underline{y} \; e^{-U(\underline{y})} \frac{1}{\Xi_K(\underline{y})} \int^{K} d\underline{x} \; e^{-U(\underline{x} \mid \underline{y}_{K^c})} F(\underline{x} \cdot \underline{y}_{K^c})$$

$$= \frac{1}{\Xi_{z,L}} \int^{L\setminus K} d\underline{y} \int^{K} d\underline{x}' \; e^{-U(\underline{y} \cdot \underline{x}')} \frac{1}{\Xi_K(\underline{y})} \int^{K} d\underline{x} \; e^{-U(\underline{x} \mid \underline{y})} F(\underline{x} \cdot \underline{y})$$

$$= \frac{1}{\Xi_{z,L}} \int^{L\setminus K} d\underline{y} \; e^{-U(\underline{y})} \int^{K} d\underline{x} \; e^{-U(\underline{x} \mid \underline{y})} F(\underline{x} \cdot \underline{y})$$

Sem. on Probab.
Vol.46 1977年
P1-89

<u>Prop 3</u>

Def 2 における条件 (c) は次の条件 (E) と同値

$$(c) \qquad \mu(F \mid \mathcal{B}_{K^c})(\xi) = \frac{1}{\Xi_K(\xi)} \int^K d\zeta\, e^{-U(\zeta \mid \xi_{K^c})} F(\zeta \cdot \xi_{K^c}) \qquad \mu\text{-a.e. } \xi.$$

$$(E) \qquad \int \mu(d\xi)\, F(\xi) = \int_{\eta(K)=0} \mu(d\eta) \int^K d\zeta\, e^{-U(\zeta \mid \eta)} F(\zeta \cdot \eta)$$

(Ruelle's equilibrium equation)

---

proof)

c) $\Longrightarrow$ (E)

c) において

$$F(\xi) = \begin{cases} 1 & \xi(K) = 0 \\ 0 & \xi(K) \neq 0 \end{cases} \qquad \text{とおくと}$$

$$\mu(\xi(K) = 0 \mid \mathcal{B}_{K^c})(\xi) = \frac{1}{\Xi_K(\xi)} \qquad (1)$$

$$g(\xi) = \int^K d\zeta\, e^{-U(\zeta \mid \xi_{K^c})} F(\zeta \cdot \xi_{K^c}) \qquad (2) \qquad \text{とおくと}$$

$g(\xi)$: $\mathcal{B}_{K^c}$ - measurable

$$\int \mu(d\xi)\, F(\xi) = \int \mu(d\xi) \frac{1}{\Xi_K(\xi)} g(\xi)$$

$$= \int \mu(d\xi)\, \mu(\xi(K) = 0 \mid \mathcal{B}_{K^c})(\xi)\, g(\xi) \qquad (\because (1) \text{ より})$$

$$= \int \mu(d\xi)\, \chi_{\xi(K)=0}(\xi)\, g(\xi) \qquad (\because g(\xi) : \mathcal{B}_{K^c}\text{-measble})$$

$$= \int_{\eta(K)=0} \mu(d\eta) \int^K d\zeta\, e^{-U(\zeta \mid \eta_{K^c})} F(\zeta \cdot \eta_{K^c})$$

$$= \int_{\eta(K)=0} \mu(d\eta) \int^K d\zeta\, e^{-U(\zeta \mid \eta)} F(\zeta \cdot \eta)$$

Sem. on Probab.
Vol.46 1977年
P1-89

(E) $\longrightarrow$ (c)

(E) において F として $G(\xi) = G(\xi_{K^c})$ なる関数をとると

$$\int \mu(d\xi)\, G(\xi) = \int_{\eta(K)=0} \mu(d\eta)\, \Xi_K(\eta)\, G(\eta) \tag{3}$$

なる関係式が成り立つ．

$$G(\xi) = \frac{1}{\Xi_K(\xi)} \int^K d\underline{x}\; e^{-U(\underline{x}\mid\xi_{K^c})} F(\underline{x}\cdot\xi_{K^c})$$ とおくと

$G(\xi) = G(\xi_{K^c})$ であるから (3) より

$$\begin{aligned}\int \mu(d\xi)\, G(\xi) &= \int_{\eta(K)=0} \mu(d\eta)\, \Xi_K(\eta)\, G(\eta)\\ &= \int_{\eta(K)=0} \mu(d\eta) \int^K d\underline{x}\; e^{-U(\underline{x}\mid\eta)} F(\underline{x}\cdot\eta)\\ &= \int \mu(d\eta)\, F(\eta) \qquad (\because \ \text{(E) より})\end{aligned}$$

$\therefore \quad \mu(F \mid \mathcal{B}_{K^c})(\xi) = G(\xi)$

Def 4

Q 上の prob meas μ が Gibbs であるとは，

任意の compact set K に対して，μ の $\mathcal{B}_K$ 上への proj μ_K が $d\underline{x}$ に関して絶対連続で，密度関数 σ_K が

(D) $$\sigma_K(\underline{x}) = \int_{\eta(K)=0} \mu(d\eta)\; e^{-U(\underline{x}\mid\eta)} \qquad \left(\underline{x} \in \bigcup_{n=0}^{\infty} K^n\right)$$

で与えられる事である．

Sem. on Probab.
Vol.46 1977年
P1-89

注.

E) $\Longrightarrow$ D) が成り立つ.

∵) E) において $F(\xi) = G(\xi_K)$ とおくと

$$\int \mu(d\xi)\, G(\xi_K) = \int_{\eta(K)=0} \mu(d\eta) \int^K d\underline{x}\, e^{-U(\underline{x}|\eta)}\, G(\underline{x})$$

$$= \int^K d\underline{x}\, G(\underline{x}) \int_{\eta(K)=0} \mu(d\eta)\, e^{-U(\underline{x}|\eta)}$$

$$\therefore \int \mu_K(d\underline{x})\, G(\underline{x}) = \int^K d\underline{x}\, G(\underline{x}) \int_{\eta(K)=0} \mu(d\eta)\, e^{-U(\underline{x}|\eta)}$$

よって μ_K は $d\underline{x}$ に関して絶対連続で その密度関数 $\sigma_K(\underline{x})$ は

$$\sigma_K(\underline{x}) = \int_{\eta(K)=0} \mu(d\eta)\, e^{-U(\underline{x}|\eta)}$$

とかける.

Prop 5

$\exists\, Q_0 \subset Q$; $\mu(Q_0) = 1$

s.t. $e^{-U(\underline{x}|\xi)}$ が bounded continuous on Q_0

の時には. (C) $\Longleftrightarrow$ (D) $\Longleftrightarrow$ (E) となる.

(proof)

D) $\longrightarrow$ C) を示せばよい.

$K \subset L \subset R$ で K, L : compact であるとする.

$\underline{y} \subset L \setminus K$

$$\mu_L(F \mid \mathcal{B}_{K^c})(\underline{y}) = \frac{\int^K \sigma_L(\underline{x}\cdot\underline{y})\, F(\underline{x}\cdot\underline{y})\, d\underline{x}}{\int^K \sigma_L(\underline{x}'\cdot\underline{y})\, d\underline{x}'}$$

Sem. on Probab.
Vol.46 1977年
P1-89

$$
= \frac{\displaystyle\int^{K} d\underline{\xi}\ F(\underline{\xi}\cdot\underline{\zeta}) \int_{\eta(L)=0} \mu(d\eta)\ e^{-U(\underline{\xi}\cdot\underline{\zeta}\mid\eta)}}{\displaystyle\int^{K} d\underline{\xi}' \int_{\eta(L)=0} \mu(d\eta)\ e^{-U(\underline{\xi}'\cdot\underline{\zeta}\mid\eta)}}
$$

$$
= \frac{\displaystyle\int_{\eta(L)=0} \mu(d\eta)\ e^{-U(\underline{\zeta}\mid\eta)} \int^{K} d\underline{\xi}\ e^{-U(\underline{\xi}\mid\underline{\zeta}\cdot\eta)}\ F(\underline{\xi}\cdot\underline{\zeta})}{\displaystyle\int_{\eta(L)=0} \mu(d\eta)\ e^{-U(\underline{\zeta}\mid\eta)} \int^{K} d\underline{\xi}'\ e^{-U(\underline{\xi}'\mid\underline{\zeta}\cdot\eta)}}
$$

$\underline{\zeta}\cdot\eta = \xi_{K^c}$ 　 $\underline{\zeta} = \xi_{L\setminus K}$ とおいて $L \uparrow R$ とすると

$\mu(F \mid \mathcal{B}_{K^c})(\xi)$

$$
= \frac{\displaystyle\int_{\eta(L)=0} \mu(d\eta)\ e^{-U(\xi_{L\setminus K}\mid\eta)} \int^{K} e^{-U(\underline{\xi}\mid\xi_{K^c})}\ F(\underline{\xi}\cdot\xi_{K^c})\ d\underline{\xi}}{\displaystyle\int_{\eta(L)=0} \mu(d\eta)\ e^{-U(\xi_{L\setminus K}\mid\eta)}\ \Xi_K(\xi)}
$$

$$
= \frac{\displaystyle\int^{K} e^{-U(\underline{\xi}\mid\xi_{K^c})}\ F(\underline{\xi}\cdot\xi_{K^c})\ d\underline{\xi}}{\Xi_K(\xi)}
$$

よって c) がいえた.

Sem. on Probab.
Vol.46 1977年
P1-89

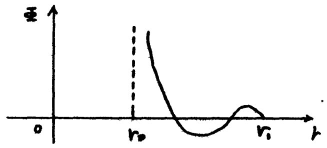
次に述べる定理6は積分の収束の問題を除けば常に成立するものである。しかしこの定理の逆の定理7を成立するための自然な条件の一つは、定数 C に対して

$$(**) \qquad e^{-U(\underline{x}|\xi)} \le C^n \quad \text{if} \quad \underline{x} = (x_1, \cdots, x_n)$$

が成立する事である。

<u>example</u>

$\Phi(r)$ として hard core, finite range なものをとると上の条件 (**) が満たされる



以下 (**) を仮定しておく。

<u>Th 6</u>

random point field μ が potential function U に対して Gibbsian であるとする。このとき

i) μ の correlation function ρ が存在する。

ii) 任意の非負 Borel 関数 $F(\xi)$ に対して

$$\rho(\underline{x}) \int \mu^{\underline{x}}(d\xi) F(\xi) = \int \mu(d\xi)\, e^{-U(\underline{x}|\xi)} F(\underline{x}\cdot\xi)$$

が成り立つ。特に

$$\rho(\underline{x}) \int \mu^{\underline{x}}(d\xi)\, e^{-U(\underline{y}|\xi)} = \int \mu(d\xi)\, e^{-U(\underline{x}\cdot\underline{y}|\xi)}$$

(proof)

μ は Gibbsian であるから compact set K に対して μ_K は $d\underline{x}$ に関して絶対連続で密度関数が、

Sem. on Probab.
Vol.46 1977年
P1-89

$$\sigma_K(\underline{x}) = \int_{\eta(K)=0} \mu(d\eta)\, e^{-U(\underline{x}|\eta)}$$

と書ける

$\underline{x} \subset K$ に対して

$$\rho(\underline{x}) = \int^K \sigma_K(\underline{x}\cdot\underline{y})\, d\underline{y}$$

とおくと (**) より $\rho(\underline{x}) \leq e^{c(K)} e^{|\underline{x}|}$ となり ρ は収束する.

$\lambda_n(d^n\underline{x}) = \rho(\underline{x})\, d^n\underline{x}$ によって λ_n を定義すると

λ_n は n 次の moment となり. ρ は μ の correlation function となる.

次に ii) を示す

μ が n 次の moment をもつ事がわかったから Palm meas $\mu^{\underline{x}}$ が存在する.

$\underline{x} \subset K$ の時

$$\sigma_K(\underline{x}) = \rho(\underline{x})\, \mu^{\underline{x}}(\xi_K = \underline{x}) \qquad (1)$$

∵)

$\varphi_n(x_1 \cdot\ x_n)$: 非負 Borel symmetric で

$\exists i$; $x_i \notin K$ ならば $\varphi_n(x_1\ \ x_n) = 0$ とする

$$\int_{K^n} d^n\underline{x}\ \sigma_K(\underline{x})\, \varphi_n(\underline{x}) = \frac{1}{n!}\int_{K^n} d^n\underline{x}\ \sigma_K(\underline{x}) \langle \underline{x}, \varphi_n\rangle$$

$$= \int \mu_K(d\xi) \langle \xi_n, \varphi_n\rangle\, \chi_{(\xi(K)=n)}(\xi)$$

$$= \int \mu(d\xi) \langle \xi_n\ \varphi_n\rangle\, \chi_{(\xi(K)=n)}(\xi)$$

$$= \int \lambda_n(d\underline{x})\, \varphi_n(\underline{x}) \int \mu^{\underline{x}}(d\xi)\, \chi_{(\xi(K)=n)}(\xi)$$

$$= \int d^n\underline{x}\ \rho(\underline{x})\, \mu^{\underline{x}}(\xi(K)=n)\, \varphi_n(\underline{x})$$

より (1) がえられる

Sem. on Probab.
Vol.46 1977年
P1-89

$$\lambda_{n+m}(d\underline{x}\ d\underline{y}) = \lambda_n(d\underline{x})\ \lambda_m^{\underline{x}}(d\underline{y}) \qquad (2)$$

($\lambda_m^{\underline{x}}$: $\mu^{\underline{x}}$ の moment measure)

なる関係を用いると、$\underline{x} \subset K$ を仮定せず一般の

$\underline{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ に対して

$$\rho(\underline{x})\ \mu^{\underline{x}}(\xi(K) = n)$$

$$= \lim_{\substack{U \searrow \underline{x} \\ U\ :\ \underline{x}\ の\ \mathrm{neighborhood}}} \rho(\underline{x})\ \mu^{\underline{x}}(\xi(K \cup U) = n)$$

(∵ $\mu^{\underline{x}}$ の moment measure は全て $\underline{x}$ の外で絶対連続)

$$= \lim_{U \searrow \underline{x}} \sigma_{K \cup U}(\underline{x}) \qquad (∵ (1) より)$$

$$= \lim_{U \searrow \underline{x}} \mu(e^{-U(\underline{x}|\cdot)}\ ;\ \xi(K \cup U) = 0)$$

$$= \mu(e^{-U(\underline{x}|\cdot)}\ ;\ \xi(K) = 0)$$

∴ $^\forall \underline{x} \in R^n$ に対して $\rho(\underline{x})\hat{\mu}^{\underline{x}}(\xi(K) = 0) = \mu(e^{-U(\underline{x}|\cdot)}\ ;\ \xi(K) = 0)$

for $^\forall K$: bdd Borel

ここで

$$\int \mu^{\underline{x}}(d\xi)\ F(\xi) = \int \hat{\mu}^{\underline{x}}(d\xi)\ F(\underline{x} \cdot \xi)$$

故に Renyi - Kallenberg の Lemma により

$$\rho(\underline{x})\ \hat{\mu}^{\underline{x}} = \mu(e^{-U(\underline{x}|\cdot)}\ ;\ \cdot)$$

よって ii) が示された。

Sem. on Probab.
Vol.46　1977年
P1-89

注　この定理は、Gibbs場に対して

(a)　$\rho(\xi)\,\tilde{\mu}^{\xi} = \mu(e^{-U(\xi|\cdot)}, \cdot)$

を示している。

即ち

(b)　$\tilde{\mu}^{\xi} \ll \mu$

として potential は

(c)　$$\frac{d\tilde{\mu}^{\xi}}{d\mu} = \frac{e^{-U(\xi|\cdot)}}{\rho(\xi)}$$

によって逆に与えられる。

Poisson場の時には、$\tilde{\mu}^{\xi} = \mu$ であったことを思い起せば、a)は有限個の粒子の状態を与えて他粒子を観測してももとの測度と絶対連続である程度に粒子が互に独立な場に近いものと解釈でき、（非有界な）空間の上の"一様測度"であるPoisson場を含む自然な場のクラスとして（一般化された）Gibbs場がとらえられることを示している。

さらに以下に見る様にGibbs場の諸性質は収束の問題を無視すればすべてこの絶対連続性から出る。

(★)　μ : random point field で全ての moment をもつ。特に $n=1$ の時には

$\lambda_1(dx) = \rho(x)\,dx$　　dx : 非負 non-atomic Radon meas on R

でありさらに次の関係式が成り立っているとする

$$\rho(x)\int \mu^{x}(d\xi)\, u(x,\xi) = \int \mu(d\xi)\, e^{-U(x|\xi)}\, u(x, x\cdot\xi)$$

u : 非負 Borel 関数

Sem. on Probab.
Vol.46 1977年
P1-89

(∗∗) 任意の compact set K に対して
$\lambda_n(K^n) \leq C_K^n$ for $^\forall n \in \mathbb{N}$
となる定数 C_K が存在する.

Th 7

random point field μ が上の2つの条件(∗)と(∗∗)をみたすとする.
この時次の i) ii) が成立する

i) $\lambda_n(d^n \underline{x}) \ll d^n \underline{x}$ で

$\rho(\underline{x}) = \dfrac{\lambda_n(d^n \underline{x})}{d^n \underline{x}}$ とおくと, 非負 Borel 関数 $u(x, \xi)$ に対して

$$\rho(\underline{x}) \int \mu^{\underline{x}}(d\xi)\, u(\underline{x}, \xi) = \int \mu(d\xi)\, e^{-U(\underline{x}|\xi)}\, u(\underline{x}, \underline{x}\cdot\xi)$$

が成立する.

ii) μ は U を potential とする Gibbsian random field である.
つまり μ_K が density σ_K をもち

$$\sigma_K(\underline{x}) = \int_{\xi(K)=0} \mu(d\xi)\, e^{-U(\underline{x}|\xi)}$$

注. 特に U が連続ならば μ は Dobrushin の意味でも Gibbsian

(proof)

$\underline{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ として n に関する induction で示す.
$n = 1$ の時は仮定より明らか.
$n = 2$ の時を示せば十分.

Sem. on Probab.
Vol.46 1977年
P1-89

$$\iiint \lambda_2(dx_1\, dx_2)\ \mu^{x_1, x_2}(d\xi)\ u(x_1, x_2, \xi)$$

$$= \iiint \mu(d\xi)\ \xi_2(dx_1\, dx_2)\ u(x_1, x_2, \xi)$$

$$= \iint \mu(d\xi)\ \xi(dx_1) \int \xi(dx_2)\ u(x_1, x_2, \xi)$$

$$= \iint dx_1\ \rho(x_1)\ \mu^{x_1}(d\xi) \int \xi(dx_2)\ u(x_1, x_2, \xi) \qquad (\because \text{Palm meas の def})$$

$$= \iint dx_1\ \mu(d\xi)\ e^{-U(x_1|\xi)} \int \xi(dx_2)\ u(x_1, x_2, x_1\cdot\xi) \qquad (\because \text{induction の 仮定})$$

$$= \int dx_1 \iint \mu(d\xi)\ \xi(dx_2)\ e^{-U(x_1|\xi)}\ u(x_1, x_2, x_1\cdot\xi)$$

$$= \int dx_1 \iint dx_2\ \rho(x_2)\ \mu^{x_2}(d\xi)\ e^{-U(x_1|\xi)}\ u(x_1, x_2, x_1\cdot\xi)$$

$$= \iiint dx_1\, dx_2\ \mu(d\xi)\ e^{-U(x_2|\xi)}\ e^{-U(x_1|x_2\cdot\xi)}\ u(x_1, x_2 : x_1\, x_2\cdot\xi)$$

$$= \iiint dx_1\, dx_2\ \mu(d\xi)\ e^{-U(x_1\cdot x_2|\xi)}\ u(x_1\cdot x_2 ; x_1\cdot x_2\cdot\xi)$$

これより $\lambda_2(dx_1\, dx_2) \ll dx_1 dx_2$

$\lambda_2(dx_1, dx_2) = \rho(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2$ とおくと

$$\rho(x_1, x_2) \int \mu^{x_1, x_2}(d\xi)\ u(x_1, x_2 : \xi) = \int \mu(d\xi)\ e^{-U(x_1\, x_2|\xi)}\ u(x_1\, x_2 ; x_1\cdot x_2\cdot\xi)$$

ii)

$$\sigma_K(\underline{x}) = \rho(\underline{x})\ \hat{\mu}^{\underline{x}}(\xi(K) = 0)$$

$$= \int_{\xi(K)=0} \mu(d\xi)\ e^{-U(\underline{x}|\xi)}$$

Sem. on Probab.
Vol.46 1977年
P1-89

Cor

仮定 (*) (**) の下で

$$\text{(K.S)} \qquad \rho(\underline{x}\cdot\underline{y}) = \rho(\underline{x})\int \mu^{\underline{x}}(d\xi)\, e^{-U(\underline{y}|\xi)}$$

が成り立つ.

∵) i) より

$$\rho(\underline{x})\int \mu^{\underline{x}}(d\xi) F(\xi) = \int \mu(d\xi)\, e^{-U(\underline{x}|\xi)} F(\underline{x}\cdot\xi)$$

$F(\xi) = e^{-U(\underline{y}|\xi)}$ とおけばよい.

注 これは Kirkwood − Salsburg 方程式の一般化である. 実際 U が example 1 の場合, 即ち 二体 potential で定まる場合には 右辺を前節の Prop で展開すれば

$$\lambda^{\underline{x}}(d\underline{y}) = \frac{\lambda(d\underline{x}\,d\underline{y})}{\lambda(d\underline{x})} = \frac{\rho(\underline{x}\,\underline{y})}{\rho(\underline{x})}\, d\underline{y}$$

であったから

$$\rho(\underline{x}\cdot\underline{y}) = e^{-U(\underline{x})}\int \rho(\underline{y}\cdot\underline{z})\cdot\prod\left(e^{-W_{\underline{x}}(z_i)}-1\right) d\underline{z}$$

をえる. ただし

$$\begin{aligned} W_{\underline{x}}(z) &= U(z\,|\,\underline{x}) - U(z\,|\,\phi) \\ &= \sum \Phi(z, x_i) \end{aligned}$$

Sem. on Probab.
Vol.46 1977年
P1-89

Appendix : Transfer matrix method

一次元の場合のGibbs場はかなり広いクラスのpotentialに対して一意に定まる。これはtransfer matrixを用いる事によって構成することができ、この方法によれば、空間の平行移動に関するエルゴード性などは見やすくなる。以下、この方法を紹介しておく。
（格子系 $A^{\mathbb{Z}}$ （$A=\{0,1\}$ など）の場合は Ruelle [19] 参照）

この節で考えるpotentialは多体potential Φ_n $(n \geq 1)$ によって与えられるものとし次の仮定をおく。

(1) $$V(x_0 \mid x_1, x_2 \cdots) = \sum_n \sum_{0<k_1<k_2<\cdots<k_{n-1}} \Phi_n(x_0, x_{k_1}, \cdots, x_{k_{n-1}})$$

とおくと長さ r_0 の hard rods の作る右半直線 $[0, \infty)$ 上の configuration space $Q[0,\infty)$ 上

$$e^{-V(x_0 \mid x_1, x_2, \cdots)} \quad \text{は連続かつ正}$$

さらに、

(2) $$\sum_{\substack{\min X < 0 \\ \max X \geq r_1}} |\Phi(X)| < +\infty \qquad (\exists\, r_1 > r_0)$$

(3) $$\varepsilon(r) = \sum_{\substack{\min X < 0 \\ \max X \geq r}} \mathrm{diam}\, X \, |\Phi(X)| \longrightarrow 0 \qquad (\mathrm{as}\ r \to \infty)$$

がみたされているとする

Sem. on Probab.
Vol.46 1977年
P1-89

compact 集合 $Q[0,\infty)$ 上の連続関数の作る Banach 空間 $\mathcal{C} = \mathcal{C}(Q[0,\infty))$ 上の作用素 $\mathcal{L}^t$ を

(4) $$\mathcal{L}^t f(\xi) = \int_{Q[0,t)} e^{-U(\underline{x}\mid\tau_t\xi)} f(\underline{x}\cdot\tau_t\xi)\,d\underline{x}$$

$$f\in\mathcal{C} \qquad \xi\in Q[0,\infty) \qquad t>0$$

によって定義する。ここで前と同様に

$$d\underline{x} = \frac{1}{n!}dx_1\cdots dx_n \qquad (\underline{x}=(x_1,\cdots,x_n) \text{ の時})$$

又 τ_t は空間の平行移動

$$\tau_t\xi = \{x+t \mid x\in\xi\}$$

従って $(\mathcal{L}^t)_{t>0}$ は半群をなし、そしてこの時次の定理が成り立つ。

Th

$Q[0,\infty)$ 上の確率 Borel 測度 ρ、実数 λ、及び $h\in\mathcal{C}$ が存在し次の性質をみたす。

(0) $h(\xi)>0 \quad \forall\xi\in Q[0,\infty)$

$\rho(G)>0 \quad \forall G\subset Q[0,\infty)$: open

(i). $\mathcal{L}^t h = e^{\lambda t} h \qquad \rho\cdot\mathcal{L}^t = e^{\lambda t}\rho$

(ii) $\forall f\in\mathcal{C}$ に対して $\mathcal{C}$ の norm で

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\lambda t}\mathcal{L}^t f = \left(\int\rho(d\xi)\,f(\xi)\right)h$$

(iii) $\forall u\in\mathcal{C}'$ に対して $\mathcal{C}'$ の弱位相で

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\lambda t}\,u\cdot\mathcal{L}^t = \left(\int u(d\xi)\,h(\xi)\right)\rho$$

Sem. on Probab.
Vol.46 1977年
P1-89

(iv) $\mu(d\xi) = h(\xi)\, P(d\xi)$ とおけば これは $Q[0,\infty)$ 上の平行移動 $(\tau_t)_{t>0}$ に関して不変. さらに

$$\int \mu(d\xi)\, f(\xi)\, g(\tau_t \xi) = \int \mu(d\xi)\, \bar{\mathcal{L}}^t f(\xi)\, g(\xi)$$

ただし

$$\bar{\mathcal{L}}^t f(\xi) = \frac{1}{h(\xi)}\, e^{-\lambda t}\, \mathcal{L}^t(hf)$$

この定理の意味する所を見ておこう. 先ず

$$\Xi([0,t]) \equiv \int_{Q[0,t]} e^{-U(\underline{x})}\, d\underline{x}$$

$$= \int_{Q[0\ t]} e^{-V(\underline{x}\mid\phi)}\, d\underline{x}$$

$$= \mathcal{L}^t 1(\phi)$$

であるから (o) (ii) より 特に thermodynamic pressure $P(\Phi)$ は

$$P(\Phi) \equiv \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \Xi([0,t]) = \lambda$$

で与えられる.

Sem. on Probab.
Vol.46 1977年
P1-89

次に $f \in C(Q(-\infty, +\infty))$ が $Q[t_1, t_2]$ のみに depend する tame function とすれば、t^- が十分小で t^+ が十分大であるとき.

$$\int_{Q[t^-, t^+]} e^{-U(\underline{x})} f(\underline{x})\, d\underline{x}$$

$$= \int_{Q[0, t^+ - t^-]} e^{-V(\underline{x}|\phi)} f(\tau_{-t^-} \underline{x})\, d\underline{x}$$

$$= \mathcal{L}^{t^+ - t^-} (f \circ \tau_{-t^-})(\phi)$$

$$= \mathcal{L}^{t^+ - t_1} (f \circ \tau_{-t_1} \mathcal{L}^{t_1 - t^-} 1)(\phi)$$

従って

$$\lim_{\substack{t^- \to -\infty \\ t^+ \to +\infty}} \frac{\int_{Q[t^-, t^+]} e^{-U(\underline{x})} f(\underline{x})\, d\underline{x}}{\int_{Q[t^-, t^+]} e^{-U(\underline{x})}\, d\underline{x}}$$

$$= \lim_{\substack{t^- \to -\infty \\ t^+ \to +\infty}} \frac{\mathcal{L}^{t^+ - t_1} (f \circ \tau_{-t_1} \mathcal{L}^{t_1 - t^-} 1)(\phi)}{\mathcal{L}^{t^+ - t^-} 1 (\phi)}$$

$$= \lim_{\substack{t^- \to -\infty \\ t^+ \to +\infty}} \frac{e^{-\lambda(t^+ - t_1)} \mathcal{L}^{t^+ - t_1} (f \circ \tau_{-t_1} e^{-\lambda(t_1 - t^-)} \mathcal{L}^{t_1 - t^-} 1)(\phi)}{e^{-\lambda(t^+ - t^-)} \mathcal{L}^{t^+ - t^-} 1 (\phi)}$$

$$= \lim_{t^+ \to \infty} \frac{e^{-\lambda(t^+ - t_1)} \mathcal{L}^{t^+ - t_1} (f \circ \tau_{-t_1} h)(\phi)}{h(\phi)}$$

$$= \int \rho(d\xi)\, f(\tau_{-t_1} \xi)\, h(\xi) = \int \mu(d\xi)\, f(\tau_{-t_1} \xi)$$

Sem. on Probab.
Vol.46 1977年
P1-89

これは、極限 Gibbs 測度が μ を translation τ_t によって $Q(-\infty, +\infty)$ に自然に拡張した測度である事を示している。よって (ii) (iv) に注意すれば

Cor 上の仮定をみたす極限 Gibbs 測度は一意で（従って translation invariant であって）translation に関して mixing である。

定理の証明に入る前に、空間の translation に関するエルゴード性について述べておく。上の議論からわかる様に translation τ_t の dual operator が $e^{-\lambda t}\mathcal{L}^t$ になるから $t \to \infty$ での収束の速さが混合性の度合を示している。

定理の条件 iii) から力学系 $(Q[0,\infty), \mu, \tau_t)$（あるいはその $Q(-\infty, \infty)$ への自然な拡張）が K-system である事が示される。さらに以下に述べる（部分的な）証明を見直せば Bernoulli である事と、一様混合性の条件を確めることがわかる。

Proof of the theorem

証明は非負行列に対する Perron-Frobenius の定理の証明の改良による。面倒な評価を避けるために、ポテンシャル Φ は finite range 即ち

$$\exists r > 0 \quad \Phi(X) = 0 \quad (\mathrm{diam}\, X > r \text{ のとき})$$

と仮定しておく。

Sem. on Probab.
Vol.46 1977年
P1-89

0° $\forall t$ に対して $\mathcal{L}^t : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ は非負有界作用素であるから compact 集合 $Q[0,\infty)$ 上の確率測度 u に対する写像

$$u \longmapsto \frac{u\mathcal{L}^t}{u(\mathcal{L}^t 1)} \qquad \left(u(f) = \int f(\xi)\, u(d\xi) \right)$$

は不動点をもつ。その一つ（後に見る様に一意）を ρ_t とするとある $\lambda \in R^1$ が存在して

(1) $$\rho_t \mathcal{L}^t = e^{\lambda t} \rho_t$$ となる。

以下、$\mathcal{C}_t$ によって $Q[0,t)$ のみに依存する tame function $f \in \mathcal{C}$ の全体を、又 $\mathcal{C}_t^+$ $\mathcal{C}^+$ などによって非負関数の全体を表わすことにする。又 $t_0 > 0$ を固定して $\rho_{t_0} = \rho$ と書く。

1° $f \in \mathcal{C}_s$ とすれば $e^{-V(x \mid \tau_t \xi)}$ は ξ について $\mathcal{C}_{r_0}$ の元であるから、

$$\mathcal{L}^t f \in \mathcal{C}_{r_0} \qquad (\forall t \geq s)$$

そして、$f \in \mathcal{C}_s^+$ まらば $t > s + r_0$ のとき、$\mathcal{L}^t f \in \mathcal{C}_{r_0}^+$ で

$$\frac{\mathcal{L}^t f(\xi)}{\mathcal{L}^t f(\eta)} = \frac{\int_{Q[0,s)} dx \int_{Q[s,t)} dy \; e^{-V(x\, y \mid \tau_t \xi)} f(x)}{\int_{Q[0,s)} dx \int_{Q[s,t)} dy \; e^{-V(x\, y \mid \tau_t \eta)} f(x)}$$

$$\leq \sup_{x \in Q[s,t)} \frac{\varphi(x, \xi)}{\varphi(x, \eta)}$$

ただし

$$\varphi(x, \xi) = \int_{Q[s,t)} e^{-V(x \cdot y \mid \tau_t \xi)}\, dy$$

とおいた。これが連続関数である事に注意しておく

Sem. on Probab.
Vol.46 1977年
P1-89

特に $\exists C>0$

$$(2)\qquad \frac{\mathcal{L}^t f(\xi)}{\mathcal{L}^t f(\eta)} \leq C \qquad (\forall f \in C_s^+ \quad \forall t \geq s+n \quad \forall \xi\ \eta)$$

これから、$\forall f \in C^+_{k t_0}$ $\forall n > k + [\frac{n}{t_0}]$ $\forall \xi \in Q[0.\infty)$
に対して

$$(3)\qquad \mathcal{L}^{n t_0} f(\xi) \geq C^{-1} \| \mathcal{L}^{n t_0} f \| \geq C^{-1} e^{\lambda n t_0} \rho(f)$$

また

$$(4)\qquad \| \mathcal{L}^{n t_0} f \| \leq C\ e^{\lambda n t_0} \rho(f)$$

2° さて $\rho(f)=0$ $f \in C_{k t_0}$ のときには $f = f^+ - f^-$
($f^\pm \in C^\pm_{k t_0}$) とおけば $\rho(f^+) = \rho(f^-) = \frac{1}{2}\rho(|f|)$
であるから $n > k + [\frac{r_1}{t_0}]$ のとき

$$\begin{aligned} | \mathcal{L}^{n t_0} f(\xi) | &= | (\mathcal{L}^{n t_0} f^+(\xi) - C^{-1} e^{\lambda n t_0} \rho(f^+)) - (\mathcal{L}^{n t_0} f^-(\xi) - C^{-1} e^{\lambda n t_0} \rho(f^-)) | \\ &\leq \mathcal{L}^{n t_0} |f| (\xi) - C^{-1} e^{\lambda n t_0} \rho(|f|) \end{aligned}$$

従って

$$\rho(|\mathcal{L}^{n t_0} f|) \leq (1 - C^{-1})\ e^{\lambda n t_0} \rho(|f|)$$

ここで

$$f \in C_{k t_0} \Longrightarrow \mathcal{L}^{n t_0} f \in C_{([\frac{r_1}{t_0}]+1) t_0} \qquad (n \geq k + [\tfrac{r_1}{t_0}] + 1)$$

に注意すれば

$$\rho(|\mathcal{L}^{n t_0} f|) \leq (1 - C^{-1})^{\frac{n}{[\frac{r_1}{t_0}]+1}}\ e^{\lambda n t_0} \rho(|f|)$$

従って $\rho(f) = 0$ ならば

Sem. on Probab.
Vol.46 1977年
P1-89

$$(5) \qquad e^{-\lambda n t_0} \mathcal{L}^{n t_0} f \longrightarrow 0 \quad \text{in} \quad L^1(\rho)$$

実際 $f \in C_{k t_0}$ ($\exists k \geq 1$) ならば あきらか $\bigcup_k C_{k t_0}$ は C で dense であるから (5) が成立。

3°. $f \in C_{k t_0}$ とすると $(e^{-\lambda n t_0} \mathcal{L}^{n t_0} f)_{n \geq 1}$ の任意の部分列は収束部分列を含むことに注意しよう。実際 1° での評価から この列は同程度連続 かつ (4) より同程度有界である。

特に $e^{-\lambda n t_0} \mathcal{L}^{n t_0} 1$ の $n \to \infty$ での極限点の一つを h とすれば $\rho(h) = 1$ $h \in C^+$ である。ところで (5) によれば $\rho(f) = 0$ の時 $e^{-\lambda n t_0} \mathcal{L}^{n t_0} f$ の極限点は 0 以下にありえないことに注意すれば

$$f = 1 - e^{-\lambda t_0} \mathcal{L}^{t_0} 1$$

を考えることによって

$$e^{-\lambda t_0} \mathcal{L}^{t_0} h = h$$

を得る。これを用いれば、$\forall f \in C$ に対して $f - \rho(f) h$ を考えることによって

$$(6) \qquad e^{-\lambda n t_0} \mathcal{L}^{n t_0} f \longrightarrow \rho(f) h \quad \text{in} \quad C$$

特に $f = e^{-\lambda t} \mathcal{L}^t h$ $(t > 0)$ とおけば

$$e^{-\lambda t} \mathcal{L}^t h = \lim_{n \to \infty} e^{-\lambda (t + n t_0)} \mathcal{L}^{t + n t_0} h$$

$$= \rho(e^{-\lambda t_0} \mathcal{L}^t h) h$$

Sem. on Probab.
Vol.46 1977年
P1-89

ここで $\alpha(t) = \rho(e^{-\lambda t}\mathcal{L}^t h)$ は t の正の連続関数である。さらに $\alpha(\frac{t_0}{n})^n = 1$ より $\alpha(\frac{t_0}{n}) = 1$ $(\forall n = 1, 2 \cdots)$
従って $\alpha(\ell t_0) = 1$ $(\forall \ell \in Q^+)$
故に $\alpha(t) \equiv 1$ 即ち

$$(7) \qquad e^{-\lambda t}\mathcal{L}^t h = h$$

4° さて (6) を見直せば、$\forall u \in \mathcal{C}'$ に対して

$$u(e^{-\lambda n t_0}\mathcal{L}^{n t_0} f) \longrightarrow \rho(f)\,u(h) \qquad (\forall f \in \mathcal{C})$$

即ち $\mathcal{C}'$ の弱位相で

$$(8) \qquad e^{-\lambda n t_0}\, u\, \mathcal{L}^{n t_0} \longrightarrow u(h)\,\rho \qquad (\forall u \in \mathcal{C}')$$

これは正の固有値に対する $\mathcal{L}^{t_0}$ の双対の固有解は1次元であることを示している。

ところで $\forall t > 0$ に対して

$$\rho_t \mathcal{L}^t = e^{\lambda(t)}\rho_t$$

なる確率測度があった。特に $n = 1, 2, \cdots$ に対して $\rho^{t_0/n}$ は

$$\rho_{t_0/n}\mathcal{L}^{t_0} = e^{n\lambda(t_0/n)}\rho_{t_0/n}$$

をみたすから $\rho^{t_0/n} = \rho_{t_0}$ から $\lambda(t_0/n) = \frac{1}{n}\lambda_0 t_0$
故に $\rho_{\ell t_0} = \rho_{t_0}$ かつ $\lambda(\ell t_0) = \ell\lambda t_0$ $(\forall \ell \in Q^+)$
i.e. $\rho_{t_0}\mathcal{L}^{\ell t_0} = e^{\ell\lambda t_0}\rho_{t_0}$ $(\forall \ell \in Q^+)$

Sem. on Probab.
Vol.46 1977年
P1-89

再び $\mathcal{L}^t$ の連続性によって

$$(9) \qquad \rho_{t_0} \mathcal{L}^t = e^{\lambda t} \rho_{t_0} \qquad (\forall t > 0)$$

5° もう一度 1° で与えた評価を見直せば、$\forall f \in C$ に対して

$$(e^{-\lambda t} \mathcal{L}^t f)_{t>0}$$

は正規族である．今収束する部分列 $(e^{-\lambda t_k} \mathcal{L}^{t_k} f)_k$ を任意に選び その極限を g とする．

$t_k = n_k t_0 + s_k \qquad s_k \in [0, t)$ とおく．

必要があればさらに部分列をとることによって

$$\lim s_k = s \in [0, t)$$
$$\lim e^{-\lambda t_k} \mathcal{L}^{t_k} f = g$$

と仮定してよい．すると (6) (7) によって

$$\begin{aligned} g &= \lim e^{-\lambda s_k} \mathcal{L}^{s_k} (e^{-\lambda n_k t_0} \mathcal{L}^{n_k t_0} f) \\ &= e^{-\lambda s} \mathcal{L}^{s} (\rho(f) h) \\ &= \rho(f)\, h \end{aligned}$$

即ち極限 g は部分列の取り方によらないから $\forall f \in C$ に対して

$$(10) \qquad s\text{-}\lim_{t \to \infty} e^{-\lambda t} \mathcal{L}^t f = \rho(f)\, h \quad \text{in } C$$

この双対として $\forall u \in C'$ に対して

$$(11) \qquad w\text{-}\lim_{t \to \infty} e^{-\lambda t} u \mathcal{L}^t = u(h)\, \rho \quad \text{in } C'$$

Sem. on Probab.
Vol.46 1977年
P1-89

以上で定理の(0)〜(iii)は示された。(iv)は一般に

(12) $$\mathcal{L}^{t+s}(f\circ\tau_t\, g) = \mathcal{L}^{t}(f\,\mathcal{L}^{s}g)$$

より明らかであろう。

Sem. on Probab.
Vol.46 1977年
P1-89

Refferences

[A]

1 Ryll - Nardzewski : Remarks on proc. of calls
Proc. 4-th Berkeley Symp 2 ('61) 455 - 466

2 Khintchine, Y. A : Mathematical methods in the theory of queing ('60)

[B] 本（論文集 いづれも Wiley）

3. P. A W Lewis (ed) : Stochastic Point Proc. ('72)

4 E. F. Harding and Kendall (ed) : Stochastic Geometry ('73)

[C]（直接引用したもの，参照のためのもの中心）

5 Harris. T. E : Random measures and motion of point proc.
Z. W. 18 ('71) 85 - 115

6. Jagers P : On Palm probabilities
Z. W. 26 ('73) 17 - 32

7 ———————— : Aspect of random measures and point processes. Adv. in Prob and Related Topics 3

8. Kallenberg. O : Characterization and convergence of random measures and point proc.
Z. W. 27 ('73) 9 - 21

Sem. on Probab.
Vol.46 1977年
P1-89

9 Kingmann . J. F. C : Completely random meas.
Pacific J. Math 21 ('67) 59 ~ 78

10 Kurz . T. G : Point proc. and Completely monotone set functions Z. W. 31 ('74) 57 − 67

11 Leadbetter . M. R : On basic results of point proc theory
Proc 6th Berkeley Symp 3 ('70) 449 − 462

12 Lee. P. M : Infinitely divisible stoch. proc.
Z. W. 7 ('66)

13 Mecke . J : Stationäre zufällige Masse auf lokalkompokten Abelschen Gruppen, Z. W. 9 ('67) 36 ~ 58

14 Mönch G : Verallgemeinerung eines Satzes von A Renyi.
Studia Sci Math Hungar 6 ('71) 81 ~ 90

15 Renyi A : Remarks on the Poisson proc.
Studia Sci Math Hungar 2 ('67) 119 - 123

16 Slivnyak T. M. : Some properties of stationary flows of homogeneous random events T. B. 7 ('62)

注. config space の位相については Harris の論文を参照
Laplace 変換と測度は Lee, Kingmann など 測度と空間の位相についてブルバキ流には例えば X Fernique. Ann. Inst Fourier 17 ('67) I Generalites にまとめてある

Sem. on Probab.
Vol.46 1977年
P1-89

[D] Gibbsian meas 関係

基礎的な論文の中から

17. Dobrushin R.L ; Gibbsian random fields ; the general case
Func Anal . Appl 3 ('69) 22 - 28

18 Ruelle D ; Super stable ——— C.M.P 18 ('70)

19 ——— ; Stat Mech of one-dim Lattice Gas
C.M.P 9 ('68)

本 Lecture note など

20 Minlos . R.A ; Lectures in Stat Physics
YMH ('68)

21 D. Ruelle ; Statistical Mechanics
Benjamin ('69)

22 宮本宗実 : 格子気体の相転移 Semi. on Prob. 38 ('73)

23 Preston ; Gibbs states on countable sets
Cambridge Univ Press ('74)

24. ——— : . Random fields ('76)

Sem. on Probab.
Vol.46 1977年
P1-89

エルゴード理論との関連で

25 Sinai Y. G . Gibbsian meas in ergodic theory
YMH 166 ('72) (同名で Nice Congress の
英文論文あり)

26. 数理研講究録 204 エルゴード理論とその周辺 ('74)
β-transformations and related topics

27 R Bowen : Equilibrium States and the Ergodic Theory
of Anosov Diffeomorphisms
Springer Lecture note 470 ('75)

[その他]

Spitzer : Interaction of M. P.
Adv. Math 5 ('70) 246-270

P A Meyer Séminaire de Prob. X
Springer Lecture Notes 511 ('76)

Sem. on Probab.
Vol.46 1977年
P1-89

1977年10月　確率論セミナー発行