Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

SEMINAR ON PROBABILITY

Vol.42

Markov 過程の研究

(1976年1月シンポジウム報告)

1 9 7 6

確 率 論 セ ミ ナ ー

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

まえがき

1976年1月12日から14日まで名古屋でマルコフ過程のシンポジウムが行われた。このノートは，その時講演された方々から寄稿していただいてできたものである。

内容は必らずしも講演そのままでなく，講演と関連する問題について自由にまとめていただいた。

清水　昭信
志村　道夫
小谷　真一

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

目　次

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

方程式 $\frac{\partial u}{\partial t}=-(-\frac{\Delta}{2})^{\frac{\beta}{2}}u+f(u)$ の解の "growing up" 問題について

小林 久寿雄

§0 序

半線型熱方程式 $\frac{\partial u}{\partial t}=\Delta u+f(u)$ の Cauchy 問題の解 $u(t,x)$ の,時間 $t\to\infty$ とした時の行動は $f(\lambda)=\lambda^{1+\alpha}$ の場合について H. Fujita [1] によって研究が始められた. ここでは $a(x)$ を初期値としてもつ次の方程式を考える.

$$(0.1)\qquad \frac{\partial u}{\partial t}=-(-\frac{\Delta}{2})^{\frac{\beta}{2}}u+f(u),\ t>0,\ x\in R^d,\ 0<\beta\leq 2.$$

ここで非線型項 f と初期値 a は次の関数を考える.

(i) a) f は $[0,\infty)$ において定義された非負局所Lipschitz連続な関数で $f(\lambda)>0$ for $\lambda>0$,

b) 初期値 a は R^d で定義された非負有界連続関数で $a(x)\not\equiv 0$ とする.

このとき (0.1) は正の局所解をもつ. 今その解を $u(t,x)=u(t,x;a,f)$ と書き (0.1) の positive solution と呼ぶことにする.

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

方程式(0.1)の解の$t\to\infty$における行動は$f(\lambda)=\lambda^{1+\alpha}$の場合がM.Nagasawa-T.Sirao[5], S.Sugitani[6]によって調べられている。[5]においては

(ア) $0<\frac{\alpha d}{\beta}<1 \Rightarrow$ (0.1)の任意のpositive solutionは有限時間でblow upする,

(イ) $1<\frac{\alpha d}{\beta} \Rightarrow$ 十分小さい初期値に対して,
$\lim_{t\to\infty} u(t,x)=0$ (xについて一様),

が示され，さらに[6]において$\frac{\alpha d}{\beta}=1$のときも(ア)の場合と同様にblow upすることが示された。ここでは，$\beta=2$の熱方程式についてのK. Kobayashi-T. Sirao-H. Tanaka[2]と同様の方法で，上の議論を詳しくする。ここでは本質的な定理1を中心に述べ，他は定理のみを記す。

§1. "growing up" 問題(I)

定義　(0.1)のpositive solution $u(t,x)$が$t\to\infty$においてgrow upするとは，任意の正数Mと任意のcompact set $K\subset R^d$に対してあるTが存在して$u(t,x)>M$ for $t>T, x\in K$が成立することである。

次に述べる定理は§2において少しく条件を

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

ゆるめられる。

<u>定理1</u>　非線型項 f と初期値 a は(i)を満し f は単調増加で $f(0)=0$ とする。さらに次の条件を仮定する

(ii) $\displaystyle\int_{0+} \frac{f(\lambda)}{\lambda^{2+\frac{\beta}{d}}}\, d\lambda = \infty$

(iii) 正の定数 C (≤ 1) が存在して次の(a),(b)が成立する

(a) $f(\lambda\mu) \geq C\mu^{1+\frac{\beta}{d}} f(\lambda)$ for $0<\lambda\leq\mu$, $\lambda<C$,

(b) $f(\lambda\mu) \geq C\mu^{2+\frac{\beta}{d}} f(\lambda)$ for $0<\mu\leq\lambda<C$.

このとき(0.1)の任意の positive solution は $t\to\infty$ において blow up もしくは grow up する。

<u>注意</u>　この定理の条件の下で $u(t,x)$ は実は blow up する。このことは§3で触れる。

定理の証明を始める前にいくつかの記号を導入する。Cauchy 問題 $\frac{\partial u}{\partial t} = -\left(-\frac{\Delta}{2}\right)^{\frac{\beta}{2}} u$ の基本解を $p(t,x)$ で表わし、それに対応する semi-group を $\{P_t\}$ と書く。即ち $p(t,x)$ は β-次対称安定過程の密度関数で、$p(t,x)$, $\{P_t\}$ は次の様に表わされる。

(1.1)　$$p(t,x) = (2\pi)^{-d} \int_{R^d} e^{-iz\cdot x} e^{-\frac{t}{2}|z|^{\beta}}\, dz, \quad 0<\beta\leq 2,$$

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

(1.2) $\quad P_t a(x) = \int_{R^d} p(t, x-y) a(y) dy.$

この semi-group $\{P_t\}$ を用いて初期値 $a(x)$ の方程式(0.1)は次の積分方程式に変換できる。

(1.3) $\quad u(t,x) = P_t a(x) + \int_0^t ds\, P_{t-s} f(u(s,\cdot))(x).$

ここでまず主要な役割を果す $p(t,x)$ の性質を補題として述べる(cf. [6][7]).

<u>補題1</u> $t>0$, $x\in R^d$ に対して密度関数 $p(t,x)$ は次の性質をもつ。

(1.4) $\quad p(t,x) = t^{-\frac{d}{\beta}} p(1, t^{-\frac{1}{\beta}} x).$

(1.5) $\quad p(ts,x) = t^{-\frac{d}{\beta}} p(s, t^{-\frac{1}{\beta}} x).$

(1.6) $\quad p(t,x) \leq p(t,y) \quad$ for $|x| \geq |y|$.

(1.7) $\quad p(t,x-y) \geq \dfrac{1}{p(t,0)} p(t,2x) p(t,2y)$

(1.8) $\quad a(x) \geq 0$, $\neq 0$ ならば任意の正数 t に対して正数 α, t_0 が存在して $P_t a(x) \geq \alpha p(t_0, x)$ が成立する。

<u>証明</u> (1.4)と(1.5)は $p(t,x)$ の定義式(1.1)において積分変数の変換を行えばわかる。また(1.6)は $p(t,x)$ が次のような形に表現できることに注意すればよい。

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

$$p(t,x) = \begin{cases} \int_0^\infty f_{t,\frac{\beta}{2}}(s) T(s,x) ds & \text{for } 0<\beta<2, \\ T(t,x) & \text{for } \beta=2, \end{cases}$$

但し

$$f_{t,\frac{\beta}{2}}(s) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{zs-tz^{\frac{\beta}{2}}} dz \geq 0, \ \sigma>0, \ s>0,$$

$$T(s,x) = (2\pi s)^{-\frac{d}{2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2s}\right).$$

(1.7) については，$|x-y| \leq \max(|2x|, |2y|)$ だから (1.6) より

$$\frac{p(t,x-y)}{p(t,0)} \geq \min\left(\frac{p(t,2x)}{p(t,0)}, \frac{p(t,2y)}{p(t,0)}\right) \geq \frac{p(t,2x)}{p(t,0)} \cdot \frac{p(t,2y)}{p(t,0)}$$

最後に (1.8) を示す。$a(x) \geq 0, \neq 0$ だから正数 ε と Lebesgue measure 正の集合 $A \subset R^d$ が存在して $a(x) \geq \varepsilon$ on A となる。(1.7) と (1.5) を用いて

$$\begin{aligned} p(t,x-y) &\geq \frac{1}{p(t,0)} p(t,2x) p(t,2y) \\ &\geq \frac{1}{p(t,0)} 2^{-d} p(2^{-\beta}t, x) \inf_{y\in A} p(t,2y) \end{aligned}$$

このことより次に注意すれば証明が終わる.

$$P_t a(x) = \int p(t,x-y) a(y) dy \geq \varepsilon \int_A p(t,x-y) dy.$$

次の微分方程式の解の比較に関する補題はよく知られている (cf. [4]).

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

補題2　f, f_1 は $[0,\infty)$ 上の局所Lipschitz連続な関数で a, a_1 は R^d 上の有界連続な関数とする。$a(x) \geq a_1(x)$. かつ $f(\lambda) \geq f_1(\lambda)$ ならば方程式(0.1)の解について

$$u(t, x; a, f) \geq u(t, x; a_1, f_1)$$

が成立する。

この補題2と補題1の(1.8)により定理1は $a(x) = \alpha p(t_0, x)$ として証明すれば十分である(t_0 は十分大きくとって固定する)。

次の本質的な評価の補題を述べる前にいくつかの記号を用意する。

$$a(x) = \alpha p(t_0, x),$$

$$u_0(t, x) = \alpha p(t+t_0, 2^{1+\frac{3}{\beta}} x),$$

$$\alpha(t) = \alpha p(t+t_0, 0) = \alpha \cdot (t+t_0)^{-\frac{d}{\beta}} p(1, 0),$$

$$\varphi(t) = \int_0^{\frac{t}{2}} \frac{f(\alpha(s))}{\alpha(s)} ds = \frac{\beta (\alpha p(1.0))^{\frac{\beta}{d}}}{d} \int_{\alpha(t)}^{\alpha(0)} \frac{f(\lambda)}{\lambda^{2+\frac{\beta}{d}}} d\lambda,$$

$$\psi_n(t) = 2^n \varphi^{-1}\left\{ \left(\varphi\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right) - \frac{1}{2^n} \right) \vee 0 \right\}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots,$$

$$\psi^{(0)}(t) = t, \quad \psi^{(n+1)}(t) = \psi^{(n)}(\psi_n(t)), \quad n = 0, 1, 2, \cdots.$$

このとき次の(1.9)〜(1.11)が成立する

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

(1.9) $\varphi(t)$ は単調増加で $\lim_{t\to\infty}\varphi(t)=\infty$.

(1.10) 任意の実数 $\kappa\geq 1$, $t>s$ に対して次の不等式が成立する

$$\varphi(\kappa t)-\varphi(\kappa s)\geq C\kappa^{-\frac{2d}{\beta}}(\varphi(t)-\varphi(s)).$$

(1.11) $\psi^{(n)}(t)=\varphi^{-1}\{\varphi(\frac{t}{2^n})-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k}\}$

(1.9) が成り立つことは条件(ii)と $\alpha(t)\downarrow 0$ (as $t\to\infty$) より明らかである. (1.11)もすぐわかるので(1.10)を証明する.

$$\varphi(\kappa t)-\varphi(\kappa s)=\int_{\frac{\kappa s}{2}}^{\frac{\kappa t}{2}}\frac{f(\alpha(\tau))}{\alpha(\tau)}d\tau$$

$$=\kappa\int_{\frac{s}{2}}^{\frac{t}{2}}\frac{f(\alpha\cdot(\kappa\xi+t_0)^{-\frac{d}{\beta}}p(1,0))}{\alpha\cdot(\kappa\xi+t_0)^{-\frac{d}{\beta}}p(1,0)}d\xi$$

一方, $\kappa\geq 1$ だから f の単調性より

$$f(\alpha\cdot(\kappa\xi+t_0)^{-\frac{d}{\beta}}p(1,0))\geq f(\alpha\kappa^{-\frac{d}{\beta}}(\xi+t_0)^{-\frac{d}{\beta}}p(1,0))$$
$$=f(\kappa^{-\frac{d}{\beta}}\alpha(\xi)).$$

ここで $\lambda=\alpha(\xi)$, $\mu=\kappa^{-\frac{d}{\beta}}$ として $f(\kappa^{-\frac{d}{\beta}}\alpha(\xi))=f(\mu\lambda)$ に仮定(iii)を用いる(α は $\alpha(0)<C$ と仮定してよい).

$\lambda<\mu$ の場合仮定(iii)の(a)より

$$f(\kappa^{-\frac{d}{\beta}}\alpha(\xi))\geq C\mu^{1+\frac{\beta}{d}}f(\lambda)=C\kappa^{-1-\frac{d}{\beta}}f(\alpha(\xi))$$
$$\geq C\kappa^{-1-\frac{2d}{\beta}}f(\alpha(\xi))$$

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

しかるに，$\lambda \geq \mu$ の場合は仮定(iii)の(b)を用いて

$$f(\kappa^{-\frac{d}{\beta}}\alpha(\xi)) \geq c\mu^{2+\frac{\beta}{d}} f(\lambda) = c\kappa^{-1-\frac{2d}{\beta}} f(\alpha(\xi)).$$

さらに $\alpha\cdot(\kappa\xi+t_0)^{-\frac{d}{\beta}}p(1,0) \leq \alpha(\xi)$ に注意すれば

$$\varphi(\kappa t)-\varphi(\kappa s) \geq c\kappa^{-\frac{2d}{\beta}}\int_{\frac{s}{2}}^{\frac{t}{2}} \frac{f(\alpha(\xi))}{\alpha(\xi)}d\xi$$

$$= c\kappa^{-\frac{2d}{\beta}}\{\varphi(t)-\varphi(s)\}$$

となり証明を終わる．

以後，簡単のために $\gamma = 1+\frac{\beta}{d}$，$\delta = \frac{2d}{\beta}$ とおく．

<u>補題3.</u> f は条件(i)(ii)(iii)を満し $a(x) = \alpha p(t_0, x)$ とする．このとき次の不等式が成立する．

(1.12) $\quad u(t,x) > (1+B_n(t))u_0(t,x)$ for $\psi^{(n)}(t) > t_0$, $n \geq 0$,

但し

$$B_n(t) = A^{1+\gamma+\cdots+\gamma^n}2^{-(1+\delta)\sum_{k=0}^{n-1}k\gamma^{n-k-1}}\left\{\varphi\left(\frac{t}{2^n}\right)-\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k\right\}^{\gamma^n},$$

A は正定数（$n<0$ のとき $\sum_{k=0}^{n}=0$ と思う）．

<u>証明</u> 帰納法によって証明する．

1°. $n=0$ の場合．

まず $u(t,x)$ は次の積分方程式を満足することに注意する．

$$u(t,x) = P_t a(x) + \int_0^t ds\int p(t-s, x-y)f(u(s,y))dy.$$

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

fは非負であるから (1.6) に注意して

$$\begin{aligned} u(t,x) &\geq P_t a(x) = \alpha p(t+t_0, x) \\ &\geq \alpha p(t+t_0, 2^{1+\frac{3}{\beta}} x) \\ &= u_0(t,x) \end{aligned}$$

今，$|y| \leq (s+t_0)^{\frac{1}{\beta}}$ とすると (1.4) より

$$\begin{aligned} u(s,y) \geq u_0(s,y) &= \alpha(s) \frac{p(1, (s+t_0)^{-\frac{1}{\beta}} 2^{1+\frac{3}{\beta}} y)}{p(1,0)} \\ &\geq \alpha(s) \frac{p(1, 2^{1+\frac{3}{\beta}})}{p(1,0)} . \end{aligned}$$

ここで $\lambda = \alpha(s)$，$\mu = p(1, 2^{1+\frac{3}{\beta}})/p(1,0)$ として $f(\alpha(s) \cdot p(1, 2^{1+\frac{3}{\beta}})/p(1,0)) = f(\lambda\mu)$ に仮定(iii)を適用する。$\lambda \leq \mu$ のとき(iii)の(a)より $f(\lambda\mu) \geq c\mu^{\gamma} f(\lambda)$ また $\lambda > \mu$ のとき(iii)の(b)より $f(\lambda\mu) \geq c\mu^{1+\gamma} f(\lambda)$ であるから $\mu < 1$ に注意すれば

$$\begin{aligned} f(u(s,y)) \geq f(\lambda\mu) &\geq c\mu^{1+\gamma} f(\lambda) \\ &= c \left\{ \frac{p(1, 2^{1+\frac{3}{\beta}})}{p(1,0)} \right\}^{1+\gamma} f(\alpha(s)) \\ &> c\, a_1 f(\alpha(s)) \end{aligned}$$

但し $a_1 = \{ 3^{-\frac{d}{\beta}} p(1, 2^{1+\frac{3}{\beta}})/p(1,0) \}^{1+\gamma}$ とする。

(1.4) と (1.7) より

$$p(t-s, x-y) \geq \frac{(t-s)^{-\frac{d}{\beta}}}{P(1,0)} p(1, 2(t-s)^{-\frac{1}{\beta}} x)\, p(1, 2(t-s)^{-\frac{1}{\beta}} y)$$

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

さらに $P_t a(x) \geq u_0(t,x)$ だから積分変数の変換を行って次を得る。

$$u(t,x) - u_0(t,x) \geq \int_0^t ds \int p(t-s, x-y) f(u_0(s,y)) dy$$

$$\geq \frac{c a_1}{p(1,0)} \int_0^t ds\, f(\alpha(s)) (t-s)^{-\frac{d}{\beta}} p(1, 2(t-s)^{-\frac{1}{\beta}} x) \int_{|y| \leq (s+t_0)^{\frac{1}{\beta}}} p(1, 2(t-s)^{-\frac{1}{\beta}} y) dy$$

$$= c a_1 \alpha \int_0^t ds \frac{f(\alpha(s))}{\alpha(s)} (t-s)^{-\frac{d}{\beta}} p(1, 2(t-s)^{-\frac{1}{\beta}} x) \int_{|y| \leq 1} p\left(1, 2\left(\frac{s+t_0}{t-s}\right)^{\frac{1}{\beta}} y\right) dy$$

今, $t > t_0$, $s \leq \frac{t}{2}$ と仮定すると

$$t + t_0 > t - s > \frac{t+t_0}{8}$$

$$\frac{s+t_0}{t-s} < \frac{t+2t_0}{t} < 5$$

このことより次の不等式が成り立つ。

$$\alpha \cdot (t-s)^{-\frac{d}{\beta}} p(1, 2(t-s)^{-\frac{1}{\beta}} x) > \alpha \cdot (t+t_0)^{-\frac{d}{\beta}} p\left(1, 2\left(\frac{t+t_0}{8}\right)^{-\frac{1}{\beta}} x\right)$$

$$= u_0(t, x)$$

$$\int_{|y| \leq 1} p\left(1, 2\left(\frac{s+t_0}{t-s}\right)^{\frac{1}{\beta}} y\right) dy > \int_{|y| \leq 1} p(1, 2 \cdot 5^{\frac{1}{\beta}} y) dy \equiv a_2$$

それ故 $t > t_0$ に対して

$$u(t,x) - u_0(t,x) > c a_1 a_2 u_0(t,x) \int_0^{\frac{t}{2}} \frac{f(\alpha(s))}{\alpha(s)} ds$$

$$= c a_1 a_2 \varphi(t) u_0(t,x) > A \varphi(t) u_0(t,x)$$

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

但し　$A=c^2a_1a_2$ とする。

2°　(1.12)が n のとき成立すると仮定して $n+1$ のときもまた(1.12)が成り立つことを示す。定義より

$$\varphi\left(\frac{\psi_n(t)}{2^n}\right)=\left\{\varphi\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right)-\frac{1}{2^n}\right\}\vee 0<\varphi\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right)$$

だから $\varphi(\lambda)$ の単調性より

$$\psi_n(t)<t/2.$$

今、$\psi^{(n+1)}(t)>t_0$ を仮定する。このとき

$$t>t_0,\quad \psi_n(t)>t_0$$

が成立する。実際、$\psi^{(n)}$ の単調性より

$$t_0<\psi^{(n+1)}(t)=\psi^{(n)}(\psi_n(t))<\psi^{(n)}\left(\frac{t}{2}\right)$$

つまり $\psi^{(n)}(t)>t_0$ となるから帰納法により $\psi^{(0)}(t)=t>t_0$ が証明できる。また $\psi^{(n)}(\psi_n(t))>t_0$ だから $\psi^{(0)}(\psi_n(t))=\psi_n(t)>t_0$ も示される。

さて、$u(t,x)$ は次の積分方程式を満すことに注意しよう

$$(1.13)\quad u(t,x)=P_{t-\psi_n(t)}u(\psi_n(t),x)$$
$$+\int_0^{t-\psi_n(t)}ds\int p(t-\psi_n(t)-s,x-y)f(u(\psi_n(t)+s,y))dy.$$

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

$\psi_n(t) > t_0$だから帰納法の仮定と(1.4)を用いて

$$(1.14)\quad U(\psi_n(t)+s, y) > \{1+B_n(\psi_n(t)+s)\}\, U_0(\psi_n(t)+s, y)$$

$$> \{1+B_n(\psi_n(t))\}\,\alpha(s)\,\frac{p(s+\psi_n(t)+t_0,\ 2^{1+\frac{3}{\beta}}y)}{p(s+t_0,\ 0)}$$

$$= \{1+B_n(\psi_n(t))\}\,\alpha(s)\left(\frac{s+t_0}{s+\psi_n(t)+t_0}\right)^{\frac{d}{\beta}}\frac{p(1,\ 2^{1+\frac{3}{\beta}}(s+\psi_n(t)+t_0)^{-\frac{1}{\beta}}y)}{p(1,\ 0)}$$

また $(t-\psi_n(t))/2 \geq s \geq \psi_n(t)/2$, $|y| \leq (s+t_0)^{\frac{1}{\beta}}$ を仮定する. このとき

$$1 > \frac{s+t_0}{s+\psi_n(t)+t_0} > \frac{1}{3}$$

$$p(1,\ 2^{1+\frac{3}{\beta}}(s+\psi_n(t)+t_0)^{-\frac{1}{\beta}}y) > p(1,\ 2^{1+\frac{3}{\beta}})$$

が成り立つので(1.14)より

$$U(\psi_n(t)+s, y) > \{1+B_n(\psi_n(t))\}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{d}{\beta}}\frac{p(1,\ 2^{1+\frac{3}{\beta}})}{p(1,\ 0)}\,\alpha(s)$$

となる. 今 $\lambda = \alpha(s)$, $\mu = \{1+B_n(\psi_n(t))\}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{d}{\beta}}\frac{p(1,\ 2^{1+\frac{3}{\beta}})}{p(1,\ 0)}$ として仮定(iii)を $f(\lambda\mu)$ に適用する。

$\lambda < \mu$ の場合は(iii)の(a)を用いて

$$f(U(\psi_n(t)+s, y)) > f(\lambda\mu)$$

$$\geq C\{1+B_n(\psi_n(t))\}^{\gamma}\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{d}{\beta}}\frac{p(1,\ 2^{1+\frac{3}{\beta}})}{p(1,\ 0)}\right\}^{\gamma} f(\alpha(s))$$

$$> C\, a_1\, B_n(\psi_n(t))^{\gamma} f(\alpha(s)),$$

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

また $\lambda \geq \mu$ の場合は (iii) の (b) を用いて

$$f(u(\psi_n(t)+s,y)) > c\{1+B_n(\psi_n(t))\}^{1+\gamma}\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{d}{\beta}}\frac{p(1,2^{1+\frac{3}{\beta}})}{p(1,0)}\right\}^{1+\gamma} f(\alpha(s))$$

$$> c a_1 B_n(\psi_n(t))^{\gamma} f(\alpha(s))$$

但し $a_1 = \left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{d}{\beta}} p(1,2^{1+\frac{3}{\beta}})/p(1,0)\right\}^{1+\gamma}$ とする。

上よりいずれの場合にも

(1.15) $\quad f(u(\psi_n(t)+s,y)) > c a_1 B_n(\psi_n(t))^{\gamma} f(\alpha(s))$

一方 $t+t_0 > t-\psi_n(t)-s > (t+t_0)/8$ だから (1.7) (1.4) より

(1.16)
$$\begin{aligned} & p(t-\psi_n(t)-s, x-y) \\ & \geq \frac{(t-\psi_n(t)-s)^{-\frac{d}{\beta}}}{p(1,0)} p(1, 2(t-\psi_n(t)-s)^{-\frac{1}{\beta}}x)\, p(1, 2(t-\psi_n(t)-s)^{-\frac{1}{\beta}}y) \\ & > \frac{(t+t_0)^{-\frac{d}{\beta}}}{p(1,0)} p\left(1, 2\left(\frac{t+t_0}{8}\right)^{-\frac{1}{\beta}}x\right) p(1, 2(t-\psi_n(t)-s)^{-\frac{1}{\beta}}y) \\ & = \frac{p(1, 2(t-\psi_n(t)-s)^{-\frac{1}{\beta}}y)}{\alpha\, p(1,0)} u_0(t,x) \end{aligned}$$

積分変数の変換 ($y \to (s+t_0)^{\frac{1}{\beta}}y$) を行い

$$\frac{s+t_0}{t-\psi_n(t)-s} \leq \frac{t-\psi_n(t)+2t_0}{t-\psi_n(t)} < 1+\frac{4t_0}{t} < 5$$

に注意すれば

(1.17)
$$\int_{|y|\leq (s+t_0)^{\frac{1}{\beta}}} p(1, 2(t-\psi_n(t)-s)^{-\frac{1}{\beta}}y)\,dy = (s+t_0)^{\frac{d}{\beta}} \int_{|y|\leq 1} p\left(1, 2\left(\frac{s+t_0}{t-\psi_n(t)-s}\right)^{\frac{1}{\beta}}y\right) dy$$

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

$$> (s+t_0)^{\frac{d}{\beta}} \int_{|y|\leq 1} p(1, 2\cdot 5^{\frac{1}{\beta}} y)\,dy$$

$$= (s+t_0)^{\frac{d}{\beta}} a_2$$

が成立する。但し　$a_2 = \int_{|y|\leq 1} p(1, 2\cdot 5^{\frac{1}{\beta}} y)\,dy$　とする。

今　$\alpha(s) = \alpha\cdot(s+t_0)^{-\frac{d}{\beta}} p(1,0)$　かつ

$$P_{t-\psi_n(t)} u(\psi_n(t), x) \geq P_t a(x) \geq u_0(t,x)$$

だから今までの評価(1.13)(1.15)(1.16)(1.17)より

$$u(t,x) - u_0(t,x) > C a_1 a_2 B_n(\psi_n(t))^{\gamma} u_0(t,x) \int_{\frac{\psi_n(t)}{2}}^{\frac{t-\psi_n(t)}{2}} \frac{f(\alpha(s))}{\alpha(s)}\,ds$$

が成り立つ。次にこの積分部分を評価する。

$t - \psi_n(t) > t/2$　および(1.10)に注意して

$$\int_{\frac{\psi_n(t)}{2}}^{\frac{t-\psi_n(t)}{2}} \frac{f(\alpha(s))}{\alpha(s)}\,ds = \varphi(t-\psi_n(t)) - \varphi(\psi_n(t))$$

$$> \varphi\left(2^n \frac{t}{2^{n+1}}\right) - \varphi\left\{2^n \cdot \varphi^{-1}\left(\varphi\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right) - \frac{1}{2^n}\right)\right\}$$

$$\geq c\, 2^{-(1+\delta)n} \quad , \quad \left(\delta = \frac{2d}{\beta}\right).$$

を得る。故に $B_n(t)$の定義と $A = c^2 a_1 a_2$ に注意して

$$u(t,x) - u_0(t,x)$$

$$> A^{1+\gamma+\cdots+\gamma^{n+1}} 2^{-(1+\delta)\sum_{k=0}^{n} k\gamma^{n-k}} \left\{\varphi\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right) - \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k\right\}^{\gamma^{n+1}} u_0(t,x)$$

for $\psi^{(n+1)}(t) > t_0$　となり(1.12)は証明された。

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

定理1の証明　今 $A<1$ だから、まず次のことが成立することに注意しよう。

$$\psi^{(n)}(t) = \varphi^{-1}\left(\varphi\left(\frac{t}{2^n}\right) - \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k\right) > \varphi^{-1}\left(\varphi\left(\frac{t}{2^n}\right) - 2\right),$$

$$\infty > 2^{-(1+\delta)\sum_{k=0}^{\infty} k\gamma^{-k-1}} \equiv A_0,$$

$$A^{1+\gamma+\cdots+\gamma^n} = A^{\frac{\gamma^{n+1}-1}{\gamma-1}} > \left(A^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\right)^{\gamma^n}.$$

前補題3より　$\psi^{(n)}(t) > t_0$ なる t に対して

$$u(t,x) > \left\{A^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} A_0\left(\varphi\left(\frac{t}{2^n}\right) - 2\right)\right\}^{\gamma^n} u_0(t,x)$$

が成立している。今 K を R^d の compact 部分集合として

$$T \equiv \max\left\{\varphi^{-1}\left(2A^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}}A_0^{-1} + 2\right),\ \varphi^{-1}\left(\varphi(t_0) + 2\right)\right\}$$

で T を定義すると　$2^{n+1}T \geq t > 2^n T$ なる t に対して

$$\psi^{(n)}(t) > t_0, \quad A^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} A_0\left\{\varphi\left(\frac{t}{2^n}\right) - 2\right\} > 2$$

が成り立つ。このとき $t > t_0$ だから、上と同様の t と $x \in K$ に対して

$$u_0(t,x) = \alpha\cdot(t+t_0)^{-\frac{d}{\beta}} p\left(1,\ 2^{1+\frac{3}{\beta}}(t+t_0)^{-\frac{1}{\beta}}x\right)$$

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

$$> \alpha\cdot(2t)^{-\frac{d}{\beta}} \inf_{x\in K} p(1, 2^{1+\frac{3}{\beta}} t_0^{-\frac{1}{\beta}}x)$$

$$\geq A_1 2^{-\frac{n+1}{\beta}d}$$

となる。但し　$A_1 = \alpha\cdot 2^{-\frac{d}{\beta}} \inf_{x\in K} p(1, 2^{1+\frac{3}{\beta}} t_0^{-\frac{1}{\beta}}x) > 0$。

結局

$$u(t,x) > A_1 2^{\gamma^n - \frac{n+1}{\beta}d} \quad \text{for } 2^{n+1}T \geq t > 2^n T$$

となり定理1の証明を終わる。

§2. "growing up" 問題(II)

定理1における非線型項 f の条件(iii)(a)はglobalな条件であるが，方程式(0.1)の解がgrow upするか否かは f の原点の近傍における局所的な性質によって決まる。次の定理はこのことを示している

定理2　f と $\tilde{f}$ を共に(i)を満す関数とし，さらに　$\tilde{f}$ は単調増加で $\tilde{f}(0)=0$ とする。また

(iv)　$\liminf_{\lambda\downarrow 0} \dfrac{f(\lambda)}{\tilde{f}(\lambda)} > 0$

を仮定する。このとき方程式(0.1)の f を $\tilde{f}$ で置きかえたときの任意の positive solution $\tilde{u}(t,x)$ が blow up するか，あるいは

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

$$\limsup_{t\to\infty} \|\tilde{u}(t,\cdot)\|_\infty = \infty$$

ならば方程式(0.1)の任意のpositive solution $u(t,x)$ はblow upするかgrow upする。

<u>定理2'</u> $\tilde{f}$ は定理2と同様とし，f は $[0,1]$ 上のLipschitz連続関数で $f(0)=f(1)=0$，$f(\lambda)>0\ (0<\lambda<1)$ とする。また

(iv) $$\liminf_{\lambda\downarrow 0} \frac{f(\lambda)}{\tilde{f}(\lambda)} > 0$$

であるとき $\tilde{u}(t,x)$ について定理2と同じことが成り立つならば，方程式(0.1)の解 $u(t,x)$ は任意の連続な初期値 $0\leq a\leq 1,\ a\not\equiv 0$ に対して $t\to\infty$ としたとき広義一様に1に収束する。

この定理2を用いて定理1の条件はわずかにゆるめられる。即ち f の単調増加性と(iii)(b)の仮定を除くことができる。

<u>定理3</u> 関数 f と a は(i)を満すものとし，さらに

(ii) $$\int_{0+} \frac{f(\lambda)}{\lambda^{2+\frac{2}{d}}}\, d\lambda = \infty$$

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

(iii)′ ある正数 c (≤ 1) が存在して次のことが成り立つ.

$$f(\lambda\mu) \geq c\mu^{1+\frac{\beta}{d}} f(\lambda) \quad \text{for } 0<\lambda<\mu,\ \lambda<c,\ \lambda\mu<c.$$

を仮定する. このとき方程式 (0.1) の解 $u(t,x)$ は blow up するか grow up する.

<u>定理 3′</u> f は $f(0)=f(1)=0$ なる $[0,1]$ 上の Lipschitz 連続関数で, a は $0\leq a\leq 1$, $a\not\equiv 0$ なる R^d 上の連続関数とし, f については, さらに, 定理 3 の (ii) (iii)′ を仮定する. このとき方程式 (0.1) の解 $u(t,x;a,f)$ は $t\to\infty$ としたとき x について広義一様に 1 に収束する.

§3. "blowing up" 問題

方程式 (0.1) の解が grow up するか否かについては f の原点の近傍における行動が重要な役割を果しているが, blow up するか否かに関しては, さらに f の $\lambda=\infty$ の近傍での振舞いが大きく影響する.

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

<u>定理4</u>　(i)を満すような非線型項 f と初期値 a をもつ方程式(0.1)の解 $u(t,x)=u(t,x;a,f)$ が blow up もしくは grow up しているとする. この時,

(v)　$\displaystyle\int^{\infty}\frac{d\lambda}{f(\lambda)}<\infty$,

(vi)　ある正数 c, λ_0 が存在して次が成立する

$$f(\mu)\geq cf(\lambda) \quad \text{for} \quad \lambda_0<\lambda\leq\mu,$$

を仮定すれば, $u(t,x)$ は, 実は有限時間で blow up していることがわかる

<u>注意</u>　定理1では方程式(0.1)の positive solution $u(t,x)$ は blow up もしくは grow up している. 今, 条件(iii)の(a)に注意すれば, λ を固定して

$$\int^{\infty}\frac{d\mu}{f(\mu)}=\lambda\int^{\infty}\frac{d\mu}{f(\lambda\mu)}<\frac{\lambda}{cf(\lambda)}\int^{\infty}\frac{d\mu}{\mu^{1+\beta}}<\infty$$

となり(v)が成立している. また f は単調増加であるから $c=1$ として(vi)が成り立つ. 定理4より, $u(t,x)$ は有限時間で blow up していることがわかる.

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

§4. "non-growing up" 問題

定理5　f と a はいままでと同様に(i)を満し，$f(0)=0$ さらに

(ii)′　$\displaystyle\int_{0+} \frac{f(\lambda)}{\lambda^{2+\frac{3}{d}}}\, d\lambda < \infty$，

(iii)″　ある正数 $C\ (\leq 1)$ が存在して次が成り立つ

$$f(\lambda\mu) \geq C\mu f(\lambda) \quad \text{for } \lambda \geq 0,\ \mu \geq 1,$$

を仮定するならば，ある十分小さい初期値 a に対して

$$\lim_{t\to\infty} u(t,x;a,f) = 0 \quad (x\text{について一様}),$$

が成り立つ.

例　f は(i)を満し，原点の近傍では次で定義されているとする

$$f(\lambda) = \lambda^{1+\frac{3}{d}} \left\{ \log\frac{1}{\lambda} \log_{(2)}\frac{1}{\lambda} \cdots \log_{(n-1)}\frac{1}{\lambda} \left(\log_{(n)}\frac{1}{\lambda}\right)^{\delta} \right\}^{-1}$$

但し $\delta > 0$，$n \geq 1$，$\log_{(k)}\mu = \underbrace{\log\log\cdots\log}_{k\text{個}}\mu$　とする.

(a)　$\delta \leq 1$ のときは f は(ii)(iii)′を満し (0.1) の positive solution は blow up もしくは grow up する.

(b)　$\delta > 1$ のときは f は(ii)′(iii)″を満し，適当な

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

小さい初期値に対して(0.1)の解は$t\to\infty$としたとき一様に0に収束する。

文献

[1] Fujita, H., On the blowing up of solutions of the *Cauchy* problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. I, Vol. 13, 1966, pp. 109–124.

[2] Kobayashi, K., T. Sirao and H. Tanaka, On the growing up problem for semilinear heat equation, to appear.

[3] Hayakawa, K., On the limit state of solutions of some semilinear diffusion equations, to appear.

[4] Kolmogoroff, A., I. Petrovsky and N. Piscounoff, Étude de l'équation de la diffusion avec croissance de la quantité de matière et son application à un problème biologique, Bull. Moskov Gos. Univ., Sect. A, Vol. 1, 1937, pp. 1–25

[5] Nagasawa, M. and T. Sirao, Probabilistic treatment of the blowing up of solutions for a nonlinear integral equation, Trans. A.M.S. Vol. 139, 1969, pp. 301–310.

[6] Sugitani, S., On nonexistence of global solutions for some nonlinear integral equations, Osaka J.

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

Math., Vol.12, 1975 pp. 45-51.

[7] Yosida, K., Functional Analysis, Springer, 1971.

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

Krickeberg の分解について

関口 健

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を完備確率空間とし、$(\mathcal{F}_t)_{0\le t\le\infty}$ を $\mathcal{F}$ の部分σ-集合体の右側連続な族とする。$\mathcal{F}_\infty = \bigvee_{0\le t<\infty}\mathcal{F}_t$ と $\mathcal{F}_0$ が P-零集合をすべて含むことを仮定する。$\mathcal{M}^p$, $\mathcal{M}^p_c$, $\mathcal{G}_t$, $\mathcal{H}$ を次のように定義する。

$\mathcal{M}^p \equiv L^p$-有界 $\mathcal{F}_t$-マルチンゲール全体,

$\mathcal{M}^p_c \equiv \{ X \in \mathcal{M}^p;\ X$ は連続 $\}$.

$\mathcal{G}_t \equiv \bigcap_{\varepsilon>0} \sigma(X_s;\ s<t+\varepsilon,\ X\in\mathcal{M}^2_c)$.

$\mathcal{H} \equiv \{ X_\infty;\ X\in\mathcal{M}^2_c \}$.

$X\in\mathcal{M}^1$ の Krickeberg の分解を $X = X^{\oplus} - X^{\ominus}$ とかく。即ち、$X^{\oplus}$ と $X^{\ominus}$ は非負マルチンゲールで $\sup_t E[|X_t|] = E[X^{\oplus}_0] + E[X^{\ominus}_0]$ をみたすものである。

この報告の目的は、Krickeberg の分解がマルチンゲールの連続性を保存するための条件をみつけ、その時の連続マルチンゲールの道の性質を調べることである。以下述べる定理等の証明は省略する。参考文献[1],[2]を

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

みよ.

<u>定理1</u>. 次の(1)−(5)は同値である.

(1) 各 $X \in \mathfrak{M}_c^\infty$ に対し, $X^{\oplus}$ は連続である.

(2) 各 $X \in \mathfrak{M}_c^1$ に対し, $X^{\oplus}$ は連続である.

(3) $\mathcal{H} = L^2(\mathcal{G}_\infty)$

(4) 有界 $\mathcal{G}_t$−マルチンゲールはすべて連続 $\mathcal{F}_t$−マルチンゲールである.

(5) $\mathcal{G}_t$−マルチンゲールはすべて連続 $\mathcal{F}_t$−マルチンゲールである.

<u>定理2</u>. (1)−(5)のいずれか一つが成立とする. $P(T<\infty)>0$ をみたす totally ~~inacc~~ inaccessible $\mathcal{F}_t$−stopping time T と連続 $\mathcal{F}_t$−マルチンゲール X について, 次の(6), (7)が成立つ.

(6) $T<\infty$ のある右側近傍で, ほとんど確実に $t \longmapsto X_t$ は定数である.

(7) T のある左側近傍で $t \longmapsto X_t$ が定数である確率は正である.

<u>系1</u>. $P(T<\infty)>0$ をみたす totally inaccessible $\mathcal{F}_t$−stopping time T と $t \longmapsto \langle M, M\rangle_t$ が狭義増

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

クロとなる連続$\mathcal{F}_t$ーマルチンゲールMが存在すれば，$X^{\oplus}$が連続でない$X \in \mathcal{M}_c^{\infty}$が存在する．

系2． $X^{\oplus}$が連続でない$X \in \mathcal{M}_c^{\infty}$が存在する$(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$が存在する．

参考文献

[1] T. Sekiguchi : Note on the Krickeberg decomposition Tôhoku Math. J. vol. 28 (1976)

[2] T. Sekiguchi : On the Krickeberg decomposition of continuous martingales. Séminaire de Probabilités, Lecture Note in Math. Springer (to appear)

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

無限系マルコフ過程の例と問題

志賀徳造

無限系マルコフ過程の名の下に、実に多様な種類のモデルが個別的に研究されている。"無限系マルコフ過程"とは、感覚的には無限個のマルコフ過程が互いに相互作用を及ぼし合いながら全体としてマルコフ的運動をしている確率モデルとして理解すればよい。
時間径数が離散的な場合にはマルコフ過程の構成は容易であるが、連続径数の場合には、マルコフ過程の構成問題を最初に考える必要があり、さらにこのマルコフ過程は"無限的"であることが反映して、普通のマルコフ過程と違った現象があらわれる可能性をもち、特にエルゴード定理(極限分布の問題)の中にその差異を顕著に見ることができる。

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

§.1 構成問題

S；コンパクト距離空間

I；可算無限集合

$E = S^I = \{\eta \mid \eta ; I \to S\}$（直積位相によりコンパクト距離空間）

$C(E)$；E上の連続関数の空間、$C_0(E)$；有限個の座標にのみ依存する連続関数の空間、

次の条件をみたすS上の有界測度の系 $\{c_i(\eta ; ds)\}_{i \in I}$ が与えられている。

(※) $\forall f \in C(E)$ に対し $\int f(\eta_{i,s}) c_i(\eta ; ds)$ は η の連続関数．
ここで $\eta_{i,s}$; $\eta_{i,s}(i) = s$. $\eta_{i,s}(j) = \eta(j)$

作用素 $(A, \mathcal{D}(A))$ を次で定義する．

$\mathcal{D}(A) = C_0(E)$

$$Af(\eta) = \sum_{i \in I} \int [f(\eta_{i,s}) - f(\eta)] c_i(\eta ; ds)$$

<u>問題</u>：$C(E)$上のマルコフ半群 $\{T_t\}$ でその生成作用素が $\{A, \mathcal{D}(A)\}$ の拡張となるものは存在するか？．又，存在するときには一意か？．

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

(このようなマルコフ過程が存在するとき、それをスピン系のマルコフ過程と呼ぶ。)

この構成問題について、Liggett [1] による一般的な結果がある。

<u>定理 1-1</u>

$\sum_i \sup_s ||| c_i(\eta;\cdot) - c_i(\eta_{i,s};\cdot) ||| < +\infty$ ならば対応するマルコフ半群は唯一つ存在する。

(ここで、$|||\cdot|||$ は全変動量を表わす。)

Gray—Griffeath の例

Gray-Griffeath [2] は対応するマルコフ過程が2つ以上存在する例を見つけた。

$S = \{+1, -1\}$, $I = \mathbb{N}_+$

$c_i(\eta; -\eta(i)) \equiv \alpha(i)[1 - \eta(i)\eta(i+1)] \geq 0$

$\sum_i \frac{1}{\alpha(i)} < +\infty$ ならば、対応する2つのマルコフ半群 $\{T_t^+\}$, $\{T_t^-\}$ が存在し、いずれもその生成作用素は $\{A, \mathcal{D}(A)\}$ の拡張であり、$\{T_t^+\}$ は $-\mathbb{1} = \{-1, -1, \cdots\}$ を trap にしないが $+\mathbb{1} = \{+1, +1, \cdots\}$ を trap にし、$\{T_t^-\}$ は $+\mathbb{1}$ を trap にしないが

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

$-\mathbb{1}$ を trap にする．

<u>問題</u>

この例で，唯一つのマルコフ過程を定めるための"付加条件"は何か？

一方，$\sum_i \frac{1}{\alpha(i)} = +\infty$ の場合には対応するマルコフ半群は唯一つか？

マルコフ過程の構成の問題は，マルチンゲール問題としても定式化できる．

Holley-Stroock [3] では，$S=\{+1,-1\}$ の場合で $c_i(\eta,-\eta(i))$ が有界かつ一様に正であっても，マルチンゲール問題の解は一意でない例を挙げている。然しながら $\{c_i(\eta,-\eta(i))\}$ に空間的等質性が反映する場合には一意性が成立するかも知れないと筆者は思っている。

<u>問題</u>

$I=\mathbb{Z}^d$（d-次元立方格子空間）又は T^d（d-木立空間），$c_i(\eta)\equiv c_i(\eta,-\eta(i))$ が次の条件を満足するとき，対応するマルコフ過程は一意か？

(1) $c_i(\eta)\in C(E)$, $0<{}^\exists K_1\leqq c_i(\eta)\leqq {}^\exists K_2$, $\forall i, \forall\eta$

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

(2) 任意のグラフ同型 φ に対して

$$C_i(\eta) = C_{\varphi(i)}(\varphi\circ\eta).$$

§.2. Ising モデルの時間発展

ここでは Ising モデルの時間発展についてのエルゴード定理について述べる。特に極限分布が初期分布にどのように影響されるかが、我々の興味の中心である。

$S = \{+1, -1\}$, $I = Z^d$

Φ ; $\mathcal{P}_0(Z^d)$ (Z^d の有限部分集合全体) $\longrightarrow R^1$

(i) $\Phi(X+x) = \Phi(X) \quad \forall x \in Z^d$

(ii) $\displaystyle\sum_{X\ni 0} |X||\Phi(X)| < +\infty$

このポテンシャル Φ から $C_i(\eta)$ が次のように与えられるとき、対応するマルコフ半群 $\{T_t\}$ を Ising モデルの時間発展という。(存在は、Liggett の定理 1-1 で保障されている。)

$$C_i(\eta) \fallingdotseq \exp\Big[\sum_{X\ni i}\Phi(X)\sigma_X(\eta)\Big] \qquad \sigma_X(\eta) = \prod_{j\in X}\eta(j)$$

Φ に対応する Gibbs 状態全体を $\mathcal{G}_\Phi$ とかくと、

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

$\mathcal{G}_\Phi$ は空でないコンパクト凸集合となり、又その要素は全て Ising モデルの時間発展の定常状態である。(注. "状態" とは Ξ 上の確率測度)

$\mathcal{S}$ で $\mathbb{Z}^d$-シフト不変状態全体を表わす。Holley [4] は自由エネルギーを用いて、次の定理を証明した。

<u>定理 2-1</u>　$\forall \mu \in \mathcal{S}$ に対し $\{\mu_t \equiv \mu \cdot T_t\}$ の $t \to \infty$ の全ての極限点は Φ-Gibbs 状態である。

この定理は証明をみれば次のように少し一般化できる。

<u>定理 2-2</u>　$\forall \mu$; 周期的状態に対し $\{\mu_t \equiv \mu \cdot T_t\}$ の $t \to \infty$ の全ての極限点は、周期的 Φ-Gibbs 状態である。

<u>定理 2-3</u>　(Higuchi-Shiga [5])

$\forall \mu$; 端点 Φ-Gibbs 状態

$$\exists \lim_{t\to\infty} \delta_\xi \cdot T_t = \mu \quad (\mu\text{-a.e. } \xi)$$

次の磁性的ポテンシャルのクラスでは、もう

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

少し具体的にわかる．

$$(\ast)\begin{cases} \Phi \leqq 0 \ , \ \exists k_0 \ \text{もし} \ |X| > k_0 \ \text{又は} \ |X| = \text{奇数} \\ \text{ならば} \ \Phi(X) = 0 \end{cases}$$

この時，シフト不変エルゴード的Φ-Gibbs状態は高々2つであり，その2つは共に端点Φ-Gibbs状態であることも知られている．それをμ_+, μ_-で表わそう．（Slawny [6]）．

<u>定理 2-4</u>　$\forall \mu$：周期的状態に対し $\{\mu_t \equiv \mu \cdot T_t\}$ の $t \to \infty$ の全ての極限点はシフト不変Φ-Gibbs状態である．

∵　$\exists \{a_1, \cdots, a_{k-1}\} \subset Z^d$, $\mu + \tau_{a_1}\mu + \cdots + \tau_{a_{k-1}}\mu$ はシフト不変．（τ_a：は a-シフトを表わす．）

$\mu_\infty = \lim_{n\to\infty} \mu T_{t_n}$ とすれば，定理 2-1 により，

$k^{-1}\{\mu_\infty + \tau_{a_1}\mu_\infty + \cdots + \tau_{a_{k-1}}\mu_\infty\}$ = シフト不変Φ-Gibbs状態 $= \alpha\mu_+ + (1-\alpha)\mu_-$　（$\exists \alpha : 0 \leq \alpha \leq 1$）．

定理 2-2 より μ_∞ もΦ-Gibbs状態，さらに$\tau_a\mu_\infty$ もΦ-Gibbs状態．任意のΦ-Gibbs状態は端点により一意的に表現されるので，このことは，

$\mu_\infty = \alpha\mu_+ + (1-\alpha)\mu_-$ を意味する．

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

系．(✻) をみたすポテンシャルのクラスでは周期的Φ−Gibbs状態は存在しない。

(注)．反磁性的Isingモデルでは周期的Φ−Gibbs状態は実際に存在する。

E上の変換ψを次のように定義する；$\psi\eta \equiv -\eta$

定理 2−5　$\forall\mu$：周期的状態，かつ，$\exists a \in \mathbb{Z}^d$ に対して，$\tau_a \cdot \mu = \psi \circ \mu$ とする。　この時

$$\exists \lim_{t\to\infty} \mu \cdot T_t = \frac{1}{2}(\mu_+ + \mu_-)$$

(∵) 定理2−4により $\{\mu \cdot T_t\}$ の任意の極限点 μ_∞ はシフト不変，故に　$\mu_\infty = \alpha\mu_+ + (1-\alpha)\mu_-$

$$\tau_a(\mu \cdot T_t) = \mu(\tau_a T_t) = (\tau_a \cdot \mu) T_t = (\psi \circ \mu) \cdot T_t$$

$\therefore$ $\mu_\infty = \psi \circ \mu_\infty$　，$\psi\mu_\pm = \mu_\mp$ に注意すると．$\alpha = \frac{1}{2}$．

系．$\eta \in E$：周期的かつ $\exists a \in \mathbb{Z}^d$ に対し $\tau_a \eta = \psi \cdot \eta$ ならば，

$$\exists \lim_{t\to\infty} \delta_\eta \cdot T_t = \frac{1}{2}(\mu_+ + \mu_-)$$

次に，磁性的対ポテンシャルを温度 $1/\beta$ と外磁場 h により径数付けして考えよう．

$$c_i^{(\beta, h)}(\eta) \equiv \exp \beta\,[-h\,\eta(i) + \sum_j \Phi_{ij}\,\eta(i)\eta(j)]$$

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

$\mathcal{M} = \{ f \in C(E) \ ; \ f(\eta) \leqq f(\eta') \text{ if } \eta \leqq \eta' \}$

<u>定理 2.6</u>　$h' \geqq h$ ならば

$$T_t^{(\beta.h)} f(\eta^1) \leqq T_t^{(\beta.h')} f(\eta^2) \quad \text{for } \forall \eta^1 \leqq \forall \eta^2.$$

∵ $E \times E$ 上のマルコフ過程 $(\{\eta_t^1, \eta_t^2\}, \mathbb{P})$ で その周辺過程が $\{T_t^{(\beta.h)}\}$, $\{T_t^{(\beta.h')}\}$ に一致し、$\mathbb{P}_{\{\eta^1,\eta^2\}}(\eta_t^1 \leqq \eta_t^2) = 1$ if $\eta^1 \leqq \eta^2$. を満たすものが構成出来ればよい。

$$C_i((\eta^1,\eta^2) \ ; \ -\eta^1(i), -\eta^2(i)) \equiv C_i^{(\beta.h)}(\eta^1) \wedge C_i^{(\beta.h')}(\eta^2)$$

$$C_i((\eta^1,\eta^2) \ ; \ -\eta^1(i), \eta^2(i)) \equiv C_i^{(\beta.h)}(\eta^1) - C_i^{(\beta.h)}(\eta^1) \wedge C_i^{(\beta.h')}(\eta^2)$$

$$C_i((\eta^1,\eta^2) \ ; \ \eta^1(i), -\eta^2(i)) \equiv C_i^{(\beta.h')}(\eta^2) - C_i^{(\beta.h)}(\eta^1) \wedge C_i^{(\beta.h')}(\eta^2)$$

と定義すれば、対応する $E \times E$ 上のマルコフ過程が上述の性質を持つことは容易にわかる。

<u>系</u>.
$$\exists \lim_{t \to \infty} \delta_{+\mathbb{1}} \cdot T_t^{(\beta.0)} = \mu_+$$
$$\exists \lim_{t \to \infty} \delta_{-\mathbb{1}} \cdot T_t^{(\beta.0)} = \mu_-$$

<u>系</u>. $\forall \mu$: 状態　$\exists \lim_{t \to \infty} \mu \cdot T_t \equiv \mu^{(\beta.h)}$　(但し $h \neq 0$)

<u>定理 2-7</u>

$$\#\{x \ ; \ \eta(x) = -1\} < +\infty \Rightarrow \exists \lim_{t \to \infty} \delta_\eta \cdot T_t = \mu_+$$
$$\#\{x \ ; \ \eta(x) = 1\} < +\infty \Rightarrow \exists \lim_{t \to \infty} \delta_\eta \cdot T_t = \mu_-$$

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

∵ $\{x\,;\ \eta_0(x) = -1\} = \{x_1, \cdots, x_k\}$

$\mu_+\{\eta\,;\ \eta(x_1) = \cdots = \eta(x_k) = 0\} > 0$ に注意して定理2-3を用いると、$\exists\tilde{\eta}\ :\ \tilde{\eta}(x_1) = \cdots = \tilde{\eta}(x_k) = 0$

$\lim_{t\to\infty} \delta_{\tilde{\eta}}\cdot T_t = \mu_+$,

$\tilde{\eta} \leqq \eta \leqq +\mathbb{1}$ より $(\delta_{\tilde{\eta}}\cdot T_t)f \leqq (\delta_\eta\cdot T_t)(f) \leqq (\delta_{+\mathbb{1}}\cdot T_t)(f)$

が $\forall f \in \mathcal{M}$ に対して成りたつ。(定理2-6)

$$\therefore\ \lim_{t\to\infty} \delta_\eta\cdot T_t = \mu_+$$

定理 2-8

$$h > 0\ (h < 0) \implies \lim_{t\to\infty} \mu^{(\beta,h)}\cdot T_t^{(\beta,0)} = \mu_{+(-)}^{(\beta,0)}$$

∵ $f \in \mathcal{M}$

$$T_{t+t'}^{(\beta,0)} f(+\mathbb{1}) = T_{t'}^{(\beta,0)}(T_t^{(\beta,0)} f)(+\mathbb{1}) \leqq T_{t'}^{(\beta,h)}(T_t^{(\beta,0)} f)(+\mathbb{1})$$

(定理2-6)

$$\xrightarrow[t'\to\infty]{} \mu^{(\beta,h)}(T_t^{(\beta,0)} f) \leqq T_t^{(\beta,0)} f(+\mathbb{1}) \xrightarrow[t\to\infty]{} \mu_+^{(\beta,0)}(f)$$

(定理2.6の系)

系. β:十分大, β':十分小

$$\implies \lim_{t\to\infty} \mu^{(\beta',0)}\cdot T_t^{(\beta,0)} = \frac{1}{2}\left(\mu_+^{(\beta,0)} + \mu_-^{(\beta,0)}\right)$$

∵ 定理2-5.

問題. $\forall\mu \in \mathcal{G}$ に対して $\exists \lim_{t\to\infty} \mu\cdot T_t$?

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

§2 相互作用をもつ分枝過程の例.

Voter モデルという無限系マルコフ過程のクラスが Holley-Liggett [7] で研究されているが、そのマルコフ過程のある種の双対過程を考えると 次のような相互作用をもつ分枝過程が対応する 離散時間で考えてみる。

例. $S=\{0,1\}$, $I=Z^1 \ni i$

i にある粒子は確率 λ で $i+1$ 及び $i-1$ に粒子を1つづつ生む. 残りの確率 $1-\lambda$ で消滅する。さらに同じ場所に2つ以上の粒子が生れると その瞬間にそれらは1つに合体する. その後は1つの粒子として、他と独立に運動を続ける.

Voter モデルの極限分布を調べることは、結局この分枝過程の消滅確率が1か否かに帰着されるので、我々の問題は消滅確率が1になるための λ のぎりぎりの値を求めたい。しかし完全に解くことは、相当難しいように思われる。この分る過程を $\{A_n\}_{n\geq 0}$; $\mathcal{P}_0(Z^1)$ 上の値をとるマルコフ連鎖と考えると.

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

補題

(1) $P_{F\cup G}(A_n \neq \phi) + P_{F\cap G}(A_{n-1} \neq \phi)$

$\leqq P_F(A_n \neq \phi) + P_G(A_n \neq \phi)$

(2) $P_F(A_n \neq \phi) \leqq |F| P_{\{0\}}(A_n \neq \phi)$

この補題とマルコフ連鎖の構成法を見ることにより、次の評価を得る。

定理 3-1

$$P_F(A_n \neq \phi) \leqq [h(\lambda)]^{\frac{n-1}{2}} |F|$$

ここに、$h(\lambda) = -\lambda^5 + 5\lambda^4 - 7\lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda$

(注) $\lambda = 0.6527 \Rightarrow h(\lambda) = 0.9999984$

$\lambda = 0.6528 \Rightarrow h(\lambda) = 1.0000303$

$Z_+ = \{0, 1, 2, \cdots\}$ 上のマルコフ連鎖で上から抑える方法をとれば、少し評価は良くなる。

$\{A_n\}$: 上述の分枝過程

A_0 = 偶数点から成る時、A_{2n} は全て偶数点から成り、A_{2n+1} は全て奇数点から成ることに注意する。従ってこの分枝過程を次のように変形

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

しても、消滅確率の問題は変わらない。

iにある粒子は確率λでiおよび$i+1$にある粒子を1個ずつ生み、$(1-\lambda)$の確率で消滅する。さらに、A_0のすきまを詰めて連結な集合にして分裂させ、さらにすきまを詰めて連結な集合にして分裂させる時、その個数X_nは次の推移確率をもつマルコフ連鎖になる。

$$P(n,k)=(n+2-k)\lambda^2(1-\lambda)^{n-k+1} \quad (3\leqq k\leqq n+1)$$

$$P(n,2)=n\lambda(1-\lambda)^{n-1},\ P(n,1)=0,\ P(n,0)=(1-\lambda)^n$$

このマルコフ連鎖の再帰性は、てきとうな、ランダム・ウォークの再帰性を調べることにより、容易に調べられる

その結果、$\lambda=0.6667$の時 消滅確率が1である。従ってこの方法は定理3-1より精密であることがわかる。

[1] Liggett ; *Existence theorems for infinite particle systems*, Trans. Amer. Math Soc. 165 (1972) 471-481

[2] Gray Griffeath ; *On the uniqueness of certain interacting particle systems.* (Pre-print)

[3] Holley - Stroock ; A martingale approach to infinite systems of interacting processes, (Pre-print).

[4] Holley ; Free energy in a Markovian model of a lattice spin system, Comm. Math Phy. 23 (1971) 87-99

[5]. Higuchi - Shiga ; Some results on Markov processes of infinite lattice spin systems ; Jour. of Math of Kyoto Univ. Vol. 15, No. 1 (1975) 211 - 229

[6] Slawny ; A family of equilibrium states relevant to low temparature behavior of spin $\frac{1}{2}$ classical ferromagnets Breaking of translation symmetry. Comm. Math. phys. 35. (1974). 297-305.

[7] Holley - Liggett ; Ergodic theorems for weakly interacting systems and the voter model. (to appear in Ann. of Prob.)

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

Donsker と Varadhan の Wiener sausage に関する結果の注意

中尾慎太郎

§1 序

M. D. Donsker — S. R. S. Varadhan は [1] [2] [3] で、Wiener sausage の漸近的性質を論じた。この報告ではそれに関する二つの注意を与える。一つは1次元トーラス上の Brown 運動について、[2] の Theorem 1.1 に於ける weak topology に関する閉集合を norm topology に関する閉集合に代えることが出来ることを示すことです。これについて §2 で述べる。もう一つはランダムなポテンシャルとして Poisson random measure の moving average を持つ、d-次元 Schrödinger 作用素のスペクトル分布関数の漸近的性質を、彼等の結果と方法を用いて調べることです。これは §3 で述べる。

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

§2 1次元トーラス上のBrown運動の滞在時間の分布の漸近的性質

正定数Mを固定する。G_MはMの整数倍の元から成るR^1の部分群、φ_MはR^1から1次元トーラス$T_M = R^1/G_M$への標準的全射とする。$\{X(t)\}$は確率空間$(\Omega, \mathcal{B}, P)$で定義された$x \in R^1$より出発する1次元Brown運動とする。$Y(t) = \varphi_M(X(t))$を$y = \varphi_M(x)$より出発するT_M上のBrown運動という。よく知られているように

$$\int_{T_M} V(y)\, \Phi(t,y)\, d\nu(y) = \frac{1}{t}\int_0^t V(Y(s))\, ds$$

がすべてのT_M上の連続関数$V(y)$に対して成立する$\{\Phi(t,y)\}$が存在する。但しνはT_M上のルベーグ測度である。

$$\gamma = \left\{ f(y) \in L^1(T_M, d\nu) : f \geq 0,\ \int_{T_M} f(y)\, d\nu(y) = 1 \right\}$$

とおき、γにnorm topologyを与える。$\Phi(t,\cdot)$によるγ上のinduced measureを$R_{y,t}$とする。即ち

$$R_{y,t}(B) = P\{\omega : \Phi(t,\cdot) \in B\} \qquad B : \gamma \text{の Borel set}$$

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

である。

$$\mathcal{M} = \{\mu : \mu \text{ は } T_M \text{ 上の確率測度}\}$$

とおき、$\mathcal{M}$ に weak topology を与える。$Q_{y,t}$ は $\psi(t,\cdot)dV$ による $\mathcal{M}$ 上の induced measure とする。1次元トーラス上の Brown 運動に対する $\mathcal{M}$ 上の汎関数 I を [2] の (1.1) で定義する。

定理 1

C を $\mathcal{X}$ の閉集合 (norm topology) とする。この時

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \log R_{y,t}(C) \le -\inf_{f\in C} I(f\,dV)$$

である。

(証明) $\{Y(t)\}$ の transition density を $p(s,x,y)$ とする。

$$\mu T_s(y) = \int p(s,x,y)\,d\mu(x) \qquad \mu\in\mathcal{M}$$

$$\psi^s(t,y) = \int p(s,x,y)\,\psi(t,x)\,dV(x)$$

とおく。明らかに $\mathcal{X}$ の任意の閉集合 C' に対して、$(C')_s = \{\mu\in\mathcal{M} : \mu T_s \in C'\}$ は $\mathcal{M}$ の閉集合である。任意の $\theta>0$ に対して、$C_\theta = \{g\in\mathcal{X} :$
$\|g-f\|_{L^1(T_M)} < \theta \quad \exists f\in C\}$ とする。

$$\{\omega : \psi(t,\cdot)\in C\} \subset \{\omega : \psi^s(t,\cdot)\in \overline{C_\theta}\} \cup \{\omega : \|\psi(t,\cdot)-\psi^s(t,\cdot)\|_{L^1(T_M)} \ge \theta\}$$

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

なので

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \log R_{y,t}(C) \leqq \max\left\{ \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \log Q_{y,t}((\overline{C}_\theta)_\delta), \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \log P(\triangle_t^\delta \geqq \theta) \right\}$$

である。但し $\triangle_t^\delta = \| \#(t,\cdot) - \#^\delta(t,\cdot) \|_{L^1(T_M)}$ である。

[2] の Theorem 1.1 により

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \log Q_{y,t}((\overline{C}_\theta)_\delta) \leqq - \inf_{\mu : \mu T_\delta \in \overline{C}_\theta} I(\mu)$$

である。更に [2] の (4.4) により

$$\lim_{\theta\to 0} \lim_{\delta\to 0} \inf_{\mu:\mu T_\delta \in \overline{C}_\theta} I(\mu) \geqq \inf_{f \in C} I(f\,d\nu).$$

なので

(2.1) $$\lim_{\delta\to 0} \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \log P(\triangle_t^\delta \geqq \theta) = -\infty$$

を示せば証明は終わる。

任意の $\rho > 0$ に対して

(2.2) $$P(\triangle_t^\delta \geqq \theta) \leqq e^{-\rho\theta t} E[e^{\rho t \triangle_t^\delta}]$$

である。但し E は P に関する平均を表わす。$h_\delta(t) = E[e^{\rho t \triangle_t^\delta}]$ とおく。$\{Y(t)\}$ のマルコフ性と空間的一様性により、$h_\delta(t+s) \leqq h_\delta(t) h_\delta(s)$ $(t, s > 0)$ なので、$\log h_\delta(t)$ は連続な subadditive function である。従って

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log h_\delta(t) = \inf_{t>0} \frac{\log h_\delta(t)}{t}$$

である。ところが $\lim_{\delta\to 0} \log h_\delta(t)/t = 0$ なので、

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

$\rho \to \infty$ にすれば (2.2)より(2.1)が従う。

(証明終)

定理Iにより次のことが示される。

定理2

$\{\Phi_t\}$を$\mathcal{X}$上の汎関数の族、Φを$\mathcal{X}$上の下半連続な非負値汎関数で次の条件をみたすものとする。$I(f d\nu) < \infty$な$f \in \mathcal{X}$とfに収束する$\{f_t\} \subset \mathcal{X}$に対して、$\varliminf_{t \to \infty} \Phi_t(f_t) \geqq \Phi(f)$である。この時

$$\varlimsup_{t \to \infty} \frac{1}{t} \log E\left\{ e^{-t \Phi_t(\ell(t,\cdot))} \right\} \leqq -\inf_{f \in \mathcal{X}} \{\Phi(f) + I(f d\nu)\}$$

である。

§3 不規則系への応用

次の形のランダムなポテンシャルを持つd-次元Schrödinger作用素を考える。

$$-\frac{1}{2}\Delta + \int_{R^d} \varphi(x-y)\, \omega(dy) \qquad \omega \in \Omega$$

ここで確率空間$(\Omega, \mathcal{B}, P)$はd-次元ルベーグ測度をcharacteristic measureとするPoisson random measureであり、$\varphi(x)$はR^dで定義され

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

た恒等的には0でない非負値連続関数で $\varphi(x) = o(1/|x|^{d+2})$ $(|x| \to \infty)$ をみたすものとする。

V は原点を含み面が軸と平行な R^d の直方体とする。V に於て Dirichlet 境界条件の下での $-\frac{1}{2}\Delta + \int_{R^d} \varphi(x-y)\omega(dy)$ の固有値を $\{\lambda_{V,1}^{\omega} \leqq \lambda_{V,2}^{\omega} \leqq \cdots\}$ とし

$$\rho_V^{\omega}(\lambda) = \frac{1}{|V|} \sum_{\lambda_{V,i}^{\omega} \leqq \lambda} 1 \qquad \lambda \in [0, \infty)$$

を考える。但し $|V|$ は V の体積である。この時 $[0,\infty)$ 上の非減少関数 $\rho(\lambda)$ と $P(\Omega') = 1$ なる $\Omega' \subset \Omega$ が存在して、各 $\omega \in \Omega$ について

$$\lim_{V \to \infty} \rho_V^{\omega}(\lambda) = \rho(\lambda) \qquad \lambda : \rho(\lambda) \text{ の連続点、}$$

である。この $\rho(\lambda)$ を $\{-\frac{1}{2}\Delta + \int_{R^d} \varphi(x-y)\omega(dy) : \omega \in \Omega\}$ のスペクトル分布関数と呼ぶ。$\rho(\lambda)$ の Laplace 変換は

$$(3.1) \quad \int_0^{\infty} e^{-t\lambda} d\rho(\lambda) = \left(\frac{1}{2\pi t}\right)^{d/2} E_{0,0}^{t,0}\left[\exp\left\{-\int_{R^d}\left(1 - e^{-\int_0^t \varphi(x(s)-x)ds}\right)dx\right\}\right]$$

と表わせる。ここで $(P_{0,0}^{t,0}, x(s))$ は原点から出発し時刻 t で原点にいる d-次元 pinned Brownian motion である。$\rho(\lambda)$ は次の漸近的性質をみたす。

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

定理 3

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} \lambda^{d/2} \log \rho(\lambda) = -(\gamma_d)^{d/2}.$$

但し γ_d は R^d の単位球に於ける Dirichlet 境界条件の下での $-\frac{1}{2}\Delta$ の第一固有値である。

(証明) Minlos-Povzner Tauberian theorem (cf. M. Fukushima [4]) と (3.1) により次のことを示せばよい。

$$(3.2) \quad \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^{d/d+2}} \log E_{0,0}^{t,0}\left[\exp\left\{-\int_{R^d}\left(1-e^{-\int_0^t \varphi(x(s)-x)ds}\right)dx\right\}\right]$$

$$= -\left(\frac{d+2}{2}\right)\left(\frac{2\gamma_d}{d}\right)^{d/d+2}.$$

[3] の Theorem 2.1 と同様にして

$$\varliminf_{t\to\infty} \frac{1}{t^{d/d+2}} \log E_{0,0}^{t,0}\left[\exp\left\{-\int_{R^d}\left(1-e^{-\int_0^t \varphi(x(s)-x)ds}\right)dx\right\}\right]$$

$$\geq -\left(\frac{d+2}{2}\right)\left(\frac{2\gamma_d}{d}\right)^{d/d+2}$$

を得る。drift の変換により、任意の自然数 n について

$$E_{0,0}^{t,0}\left[\exp\left\{-\int_{R^d}\left(1-e^{-\int_0^t \varphi(x(s)-x)ds}\right)dx\right\}\right]$$

$$\leq E_{0,0}^{t,0}\left[\exp\left\{-\int_{R^d}\left(1-e^{-\int_0^{\frac{n-1}{n}t} \varphi(x(s)-x)ds}\right)dx\right\}\right]$$

$$= E_0\left[\exp\left\{-\int_{R^d}\left(1-e^{-\int_0^{\frac{n-1}{n}t} \varphi(x(s)-x)ds}\right)dx\right\}\right.$$

$$\left.\times \exp\left\{\int_0^{\frac{n-1}{n}t} \frac{-x(s)}{t-s}dx(s) - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{n-1}{n}t}\left|\frac{x(s)}{t-s}\right|^2 ds\right\}\right]$$

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

である。但し $(P_0, x(s))$ は原点から出発した d 一次元 Brown 運動である。ところが

$$\exp\left\{\int_0^{\frac{n-1}{n}t} \frac{-x(s)}{t-s}\,dx(s) - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{n-1}{n}t}\left|\frac{x(s)}{t-s}\right|^2 ds\right\} \leqq n^{d/2}$$

なので

$$(3.3)\quad \overline{\lim_{t\to\infty}}\ \frac{1}{t^{d/d+2}}\log E^{t,0}_{0,0}\left[\exp\left\{-\int_{R^d}\left(1-e^{-\int_0^t \varphi(x(s)-x)ds}\right)dx\right\}\right]$$

$$\leqq \overline{\lim_{t\to\infty}}\ \frac{1}{t^{d/d+2}}\log E_0\left[\exp\left\{-\int_{R^d}\left(1-e^{-\int_0^{\frac{n-1}{n}t} \varphi(x(s)-x)ds}\right)dx\right\}\right]$$

である。[3] の Theorem 2 により (3.3) の右辺は

$-\left(\frac{n-1}{n}\right)^{d/d+2}\left(\frac{d+2}{2}\right)\left(\frac{2\gamma_d}{d}\right)^{d/d+2}$ に等しい。

$n \to \infty$ にすることにより (3.2) が示される。

(証明終)

注意

c を正定数とする。$d=1$ の場合、$\left\{-\frac{d\frac{d}{dx}-cw(dx)}{2dx} ; w\in\Omega\right\}$ のスペクトル分布関数 $\rho(\lambda)$ は定理 2 を用いることにより; $\lim_{\lambda\downarrow 0}\lambda^{1/2}\log\rho(\lambda) = -(\gamma_1)^{1/2}$ を得る。

References

[1] M. D. Donsker and S. R. S. Varadhan: Asymptotic evaluation of certain Markov process expectations for large time, I, Comm. Pure and Appl. Math.

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

28 (1975), 1 – 47.

[2] M. D. Donsker and S. R. S. Varadhan: Asymptotic evaluation of certain Markov process expectations for large time, II; Comm. Pure and Appl. Math. 28 (1975), 279 – 301.

[3] M. D. Donsker and S. R. S. Varadhan: Asymptotics for the Wiener sausage, Comm. Pure and Appl. Math. 28 (1975), 525 – 565.

[4] M. Fukushima: On the spectral distribution of a disordered system and the range of a random walk, Osaka J. Math. 11 (1974), 73 – 85.

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

確率微分方程式の近似定理

中尾慎太郎, 大和祐一

§1 序

この報告では，確率微分方程式を常微分方程式によって近似することを扱う。

次のような確率微分方程式

$$(1.1)\begin{cases} dX^{\alpha} = \sum_{i=1}^{r} \sigma^{\alpha}_{i}(t, X(t), Q(t))\, dQ^{i} \\ \qquad + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{r}\Big(\sum_{\beta=1}^{r} \sigma^{\beta}_{j} \frac{\partial}{\partial x^{\beta}} \sigma^{\alpha}_{i} + \frac{\partial}{\partial \xi^{j}} \sigma^{\alpha}_{i}\Big)(t, X(t), Q(t))\, d\varphi^{ij} \\ \qquad\qquad (1 \leq \alpha \leq d) \\ X(0) = x_0 \in \mathbb{R}^{d} \end{cases}$$

の解 $X=(X^1,\cdots,X^d)$ を考える。ここで，Q^i は連続な擬マルチンゲールとし，φ^{ij} は，Q^i, Q^j のマルチンゲール部分 M^i, M^j によって決まる有界変動過程（Kunita and Watanabe [7]，渡辺信三 [10]）を表わす。また，$\sigma^{\alpha}_{i}(t,x,\xi)$ は $[0,\infty)\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^r$ 上で定義された関数とし，$(Q^1,\cdots,Q^r)$ を Q で表わす。

方程式 (1.1) に対応して次のような常微分方

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

程式の列を考える。$\{\Gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ は，$[0,\infty)$ の分割の列で分割の最大幅が0に収束するような任意のものとし，分割 Γ_n に関する $\{Q^i(t)\}_{t\geq 0}$ の線形補間を $\{Q_n^i(t)\}_{t\geq 0}$ で表わす（$1\leq i\leq r$, $n=1,2,\cdots$）。このとき，常微分方程式

$$(1.2)\begin{cases} dX_n^{\alpha}=\sum_{i=1}^{r}\sigma^{\alpha}_i(t,X_n(t),Q_n(t))\,dQ_n^i & (1\leq\alpha\leq d)\\ X_n(0)=x_0 \end{cases}$$

の解 $X_n=(X_n^1,\cdots,X_n^d)$ を考える（$n=1,2,\cdots$）。ここで $(Q_n^1,\cdots,Q_n^r)$ を Q_n と書いた。我々の目的は X_n の X への収束を調べることである。

この問題について，Wong and Zakai [11] は，Q が１次元ブラウン運動のときの平均収束を示した。Q が多次元ブラウン運動の場合については，Stroock and Varadhan [9] が法則収束を示し，Kunita [6] は，平均収束と部分列をとっての道ごとの広義一様収束を証明した。なお，Kunita [6] の近似定理は，Fukushima and Nakao [2] でランダムポテンシャルを持つ１次元シュレジンガー作用素のスペクトル理論に応用

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

された。

この報告では，さらに一般の，Qがある積分条件をみたす多次元の連続な擬マルチンゲールの場合を扱う。

以下この報告は次のような構成になっている。§2で主な結果である近似定理を述べる。§3で定理を証明する。§4の前半では，Itô [5] 等の確率平行移動との関連を述べ，後半ではMcKean [8] 等における*injection* の方法との関連を述べる。

§2 近似定理

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ は確率空間，$\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ は $\mathcal{F}$ の部分ボレル集合体の増加列とする。$\mathbb{R}^r$ に値を取る $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の確率過程

$$\{\, Q(t) = (Q^1(t), \cdots, Q^r(t))\}_{t\geq 0}$$

で次の条件Aをみたすものを考える。

<u>条件A</u>

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

(i) $Q^i(t) = M^i(t) + V^i(t)$ $(1 \leq i \leq r,\ t \geq 0)$。

(ii) $M^i(t)$ は連続な2乗可積分 $\mathcal{F}_t$・マルチンゲールで $M^i(0) = 0$ $(1 \leq i \leq r)$。

(iii) $V^i(t)$ は連続な $\mathcal{F}_t$ - 適合過程で $E[\|\|V^i\|\|(t)] < \infty$ かつ $V^i(0) = 0$ $(1 \leq i \leq r,\ t \geq 0,\ \|\|V^i\|\|(t)$ は $[0, t]$ における V^i の全変動, E は平均)。

(iv) $E[\sup_{s \leq t} |Q^i(s)|^4] < \infty$ $(1 \leq i \leq r,\ t \geq 0)$。

$\{\Gamma_n = (0 = a_n^0 < a_n^1 < a_n^2 < \cdots)\}_{n=1}^{\infty}$ は, $[0, \infty)$ の分割の列で分割の最大幅が0に収束するような任意のものとする。Q_n を次のように定義する

(2.1) $$Q_n(t) = Q(a_n^\nu) + \frac{t - a_n^\nu}{a_n^{\nu+1} - a_n^\nu}\{Q(a_n^{\nu+1}) - Q(a_n^\nu)\}$$

$(a_n^\nu \leq t \leq a_n^{\nu+1},\ \nu = 0, 1, 2, \cdots)$。

$\sigma(t, x, \xi) = (\sigma_i^\alpha(t, x, \xi))_{\substack{1 \leq \alpha \leq d \\ 1 \leq i \leq r}}$ は, d 行 r 列の行列に値を取る $[0, \infty) \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^r$ 上で定義された関数で, σ の各成分は, (x, ξ) について1階微分可能で次の条件Bをみたすとする。

<u>条件B</u> σ_i^α, $\frac{\partial}{\partial x^\beta}\sigma_i^\alpha$, $\frac{\partial}{\partial \xi^j}\sigma_i^\alpha$ $(1 \leq \alpha, \beta \leq d,\ 1 \leq i, j \leq r)$ は

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

有界で (t, x, ξ) についてリプシッツ連続。

以下，$\mathbb{R}^d$ 等のノルムは $\|x\| = \sqrt{\sum_\alpha (x^\alpha)^2}$ $(x = (x^1, \cdots, x^d))$ の形で与えるものとする。$A(t)$ を

$$A(t) = t + \sum_{i,j=1}^{r} |||\varphi^{ij}|||(t) + \sum_{i=1}^{r} |||V^i|||(t)$$

によって定義し，$A(t)$ の逆関数を $\tau(t)$ で表わすとき，方程式(1.1)と(1.2)について次の定理が成り立つ。

<u>定理</u>　条件Aと条件Bのもとで，任意の $T>0$ に対し

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\sup_{t\le T} \|X(\tau(t)) - X_n(\tau(t))\|^2\right] = 0 \text{。}$$

上の定理から直ちに，Kunita [6]の結果の拡張である次の系を得る。

<u>系</u>　条件Aと条件Bのもとで，適当な部分列 $\{n_j\}$ を取れば，確率1で，X_{n_j} は X に広義一様収束する。

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

§3 定理の証明

$s \geq 0,\ n=1,2,\cdots$ に対し，次のように定義する

$$[s]_n = \sup\{a_n^\nu \leq s\ ;\ \nu=0,1,2,\cdots\}$$

$$[s]_n^+ = \inf\{a_n^\nu > s\ ;\ \nu=1,2,\cdots\}。$$

$\tau_n^\nu(t) = \min\{a_n^\nu, \tau(t)\}$ とおき，次の記号を導入する：任意の過程$\{Z(t)\}$ に対し，

$$\Delta_n^\nu Z(\tau(t)) = Z(\tau_n^{\nu+1}(t)) - Z(\tau_n^\nu(t)),$$

$$\Delta_n Z(\tau(t)) = Z(\tau(t)) - Z([\tau(t)]_n),$$

$$\Delta_n^+ Z(\tau(t)) = Z([\tau(t)]_n^+) - Z([\tau(t)]_n)。$$

$Z(t) \equiv t$ の場合には，それぞれ，単に $\Delta_n^\nu(\tau(t))$, $\Delta_n(\tau(t))$, $\Delta_n^+(\tau(t))$ と書く。

補題 3.1 p は $1 \leq p \leq 4$ であるような定数とする。Q が条件Aをみたすならば，次のことが成立する：任意の $T>0$ に対し，

(3.1) $$\lim_{n\to\infty} E\Big[\sup_{t\leq T} \|\Delta_n Q(\tau(t))\|^p\Big] = 0,$$

(3.2) $$\lim_{n\to\infty} E\Big[\sup_{t\leq T} \|\Delta_n^+ Q(\tau(t))\|^p\Big] = 0。$$

証明 $\tau(t) \leq t$ により

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

$$\sup_{t\leq T}|\Delta_n Q^i(\tau(t))|^p \leq \sup_{\substack{s,u\leq T\\ |s-u|\leq\delta_n}} |Q^i(s)-Q^i(u)|^p$$

（ δ_n は分割 Γ_n の最大幅）。ゆえに条件Aとルベーグの定理によって(3.1)を得る。(3.2)も同様。 Q.E.D.

<u>補題 3.2</u> $\{Y(t)\}_{t\geq0}$ は $\sup_{t,\omega}|Y(t)|<\infty$ であるような $\mathcal{F}_t$-適合過程，p は $1\leq p\leq 2$ であるような定数とする。$\mathbb{R}^1$ 上の連続関数 $g(x)$ が $|g(x)|^p\leq|x|^p$ （$x\in\mathbb{R}^1$）をみたすならば，

$$\lim_{n\to\infty}E\left[\sup_{t\leq T}\left|\int_0^{\tau(t)}Y(s)g(Q^i(s)-Q^i([s]_n))\,dQ^j(s)\right|^2\right]=0$$

（$T>0$，$1\leq i,j\leq r$）。

<u>証明</u> $h_n(s)=Y(s)g(Q^i(s)-Q^i([s]_n))$ とおく。容易にわかるように

$$\left|\int_0^{\tau(t)}h_n\,dQ^j\right|^2\leq 2\left|\int_0^{\tau(t)}h_n\,dM^j\right|^2+2\left|\int_0^{\tau(t)}h_n\,dV^j\right|^2$$
$$=2I_1+2I_2 \ 。$$

マルチンゲール不等式により次の評価を得る：

$$E\left[\sup_{t\leq T}I_1\right]\leq 4C^2E\left[\int_0^{\tau(T)}|Q^i(s)-Q^i([s]_n)|^{2p}\,d\varphi^{jj}(s)\right]$$
$$\leq 4C^2E\left[\int_0^T|\Delta_nQ^i(\tau(s))|^{2p}ds\right],$$

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

ここで $C = \sup_{t,\omega} |Y(t)|$。また

$$E\left[\sup_{t \leq T} I_2\right] \leqq C^2 T E\left[\int_0^T |\Delta_n Q^i(\tau(s))|^{2p} ds\right]$$ 。

したがって，(3.1)により $\lim_{n\to\infty} E\left[\sup_{t \leq T} 2(I_1 + I_2)\right] = 0$

を得る。　　　　　　　　　　　　　　　　Q.E.D.

補題 3.3　任意の $T > 0$ に対し次の等式が成立する

(3.3) $$\lim_{n\to\infty} E\left[\sup_{t \leq T}\left\{\sum_{\nu=0}^{\infty} \Delta_n^{\nu}(\tau(t)) \|\Delta_n^{\nu} Q(\tau(t))\|\right\}^2\right] = 0,$$

(3.4) $$\lim_{n\to\infty} E\left[\sup_{t \leq T}\left\{\sum_{\nu=0}^{\infty} \|\Delta_n^{\nu} Q(\tau(t))\|^3\right\}^2\right] = 0,$$

(3.5) $$\lim_{n\to\infty} E\left[\sup_{t \leq T}\left\{\sum_{\nu=0}^{\infty} \Delta_n^{\nu}(\tau(t)) \|\Delta_n^{\nu} Q(\tau(t))\|^2\right\}^2\right] = 0.$$

証明　$$\sup_{t \leq T}\left\{\sum_{\nu=0}^{\infty} \Delta_n^{\nu}(\tau(t)) |\Delta_n^{\nu} Q^i(\tau(t))|\right\}$$
$$\leqq \sum_{\nu=0}^{\infty} \Delta_n^{\nu}(\tau(t)) |\Delta_n^{\nu} Q^i(\tau(T))| + \sup_{t \leq T}\left\{\Delta_n(\tau(t)) |\Delta_n Q^i(\tau(t))|\right\}$$
$$= I_1 + I_2$$

とおく。シュワルツの不等式により

$$(I_1)^2 \leqq \left[\sum_{\nu=0}^{\infty}\{\Delta_n^{\nu}(\tau(T))\}^2\right]\left[\sum_{\nu=0}^{\infty}\{\Delta_n^{\nu} Q^i(\tau(T))\}^2\right]$$
$$\leqq \delta_n T \sum_{\nu=0}^{\infty}\{\Delta_n^{\nu} Q^i(\tau(T))\}^2$$

となる。伊藤の公式により（Kunita and Watanabe [7]）

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

$$\begin{aligned}
&\sum_{\nu=0}^{\infty}\{\Delta_n^\nu Q^i(\tau(T))\}^2 \\
&=\sum_{\nu=0}^{\infty}\left[2\int_{\tau_n^\nu(T)}^{\tau_n^{\nu+1}(T)}\{Q^i(s)-Q^i([s]_n)\}dQ^i(s)+\Delta_n^\nu\varphi^{ii}(\tau(T))\right] \\
&=2\int_0^{\tau(T)}\{Q^i(s)-Q^i([s]_n)\}dQ^i(s)+\varphi^{ii}(\tau(T))\ 。
\end{aligned}$$

ゆえに $\lim_{n\to\infty}E[(I_1)^2]=0$ 。また (3.1) により $\lim_{n\to\infty}E[(I_2)^2]=0$ となり，(3.3) が証明された。

$g(x)=|x|^3$ $(x\in\mathbb{R}^1)$ に伊藤の公式を適用することにより

$$\begin{aligned}
&\sum_{\nu=0}^{\infty}|\Delta_n^\nu Q^i(\tau(t))|^3 \\
&=\int_0^{\tau(t)}g'(Q^i(s)-Q^i([s]_n))dQ^i(s) \\
&\quad+\frac{1}{2}\int_0^{\tau(t)}g''(Q^i(s)-Q^i([s]_n))d\varphi^{ii}(s) \\
&=I_3+I_4\ 。
\end{aligned}$$

$I_4\leqq 3\int_0^T|\Delta_n Q^i(\tau(s))|ds$ であるから，(3.1) と補題 3.2 により $\lim_{n\to\infty}E[\sup_{t\leqq T}(I_3+I_4)^2]=0$ となり (3.4) を得る。

不等式

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\Delta_n^\nu(\tau(t))|\Delta_n^\nu Q^i(\tau(t))|^3\leqq\delta_n\sum_{\nu=0}^{\infty}|\Delta_n^\nu Q^i(\tau(t))|^2$$

に注意して，(3.4) と同様に (3.5) が得られる。

Q.E.D.

定理の証明

$b^{\alpha}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\sum_{\beta=1}^{d} \sigma^{\beta}_{j} \frac{\partial}{\partial x^{\beta}} \sigma^{\alpha}_{i} + \frac{\partial}{\partial \xi_j} \sigma^{\alpha}_{i}\right)$ とおく。次の記号を導入する：$C(t, x, \xi)$ を $[0,\infty) \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^r$ 上の任意の関数とするとき，

$$\tilde{C}(s) = C(s, X(s), Q(s)),$$
$$\tilde{C}(s,n) = C(s, X_n(s), Q_n(s)),$$
$$\tilde{C}(s,u,n) = C(s, X_n(u), Q_n(u)) 。$$

まず，次の二つのことを示す：

(I) $$e_n(t) = \int_0^{\tau(t)} \widetilde{\sigma^{\alpha}_{i}}(s,n)\, dQ^i_n(s) - \sum_{\nu \geq 0} \widetilde{\sigma^{\alpha}_{i}}(\tau^{\nu}_n(t), n) \Delta^{\nu}_n Q^i(\tau(t)) - \sum_{j=1}^{r} \sum_{\nu \geq 0} \widetilde{b^{\alpha}_{ij}}(\tau^{\nu}_n(t), n) \Delta^{\nu}_n Q^i(\tau(t)) \Delta^{\nu}_n Q^j(\tau(t))$$

とおくとき，

(3.6) $$\lim_{n\to\infty} E\left[\sup_{t \leq T} e_n(t)^2\right] = 0$$

が成立する（ $T>0,\ 1\leq \alpha \leq d,\ 1 \leq i \leq r$ ）。

(II) $1 \leq \alpha \leq d$ と $1 \leq i, j \leq r$ に対し，適当な定数 K と $\lim_{n\to\infty} \gamma_n = 0$ であるような数列 $\{\gamma_n\}$ を取れば，$0 < t \leq T$ に対し，

(3.7) $$E\left[\sup_{s \leq t} \left| \int_0^{\tau(s)} \widetilde{\sigma^{\alpha}_{i}}\, dQ^i - \sum_{\nu \geq 0} \widetilde{\sigma^{\alpha}_{i}}(\tau^{\nu}_n(s), n) \Delta^{\nu}_n Q^i(\tau(s)) \right|^2\right] \leq K \int_0^t E\left[\sup_{u \leq s} \| X(\tau(u)) - X_n(\tau(u)) \|^2\right] ds + \gamma_n$$

かつ

$$(3.8)\quad E\Big[\sup_{s\le t}\Big|\int_0^{\tau(s)}\widetilde{b^{\alpha}_{ij}}\,d\varphi^{ij} - \sum_{\nu\ge 0}\widetilde{b^{\alpha}_{ij}}(\tau_n^{\nu}(s),n)\Delta_n^{\nu}Q^{i}(\tau(s))\Delta_n^{\nu}Q^{j}(\tau(s))\Big|^2\Big]$$
$$\le K\int_0^t E\Big[\sup_{u\le s}\|X(\tau(u))-X_n(\tau(u))\|^2\Big]ds + \gamma_n$$

が成立する。

最初に(3.6)を示す。

$$K_1 = \max\Big(\sup_{t,x,\xi,\beta,j}|\sigma^{\beta}_{j}|,\ \sup_{t,x,\xi,\beta}\Big|\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\sigma^{\alpha}_{i}\Big|,\ \sup_{t,x,\xi}\sum_{j}|b^{\alpha}_{ij}|\Big)$$

とし，K_2 は σ^{α}_{i}, $\sum_{j}\sigma^{\beta}_{j}$ $(\beta=1,\cdots,d)$, $\sum_{\beta}\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\sigma^{\alpha}_{i}$, $\sum_{j}\frac{\partial}{\partial \xi^{j}}\sigma^{\alpha}_{i}$, $\sum_{j}b^{\alpha}_{ij}$ のリプシッツ定数とする。

$$\int_0^{\tau(t)}\widetilde{\sigma^{\alpha}_{i}}(s,n)\,dQ_n^{i}(s) - \sum_{\nu\ge 0}\widetilde{\sigma^{\alpha}_{i}}(\tau_n^{\nu}(t),n)\Delta_n^{\nu}Q^{i}(\tau(t))$$
$$=\sum_{\nu:\,a_n^{\nu+1}\le\tau(t)}\Big\{\int_{a_n^{\nu}}^{a_n^{\nu+1}}\widetilde{\sigma^{\alpha}_{i}}(s,n)\frac{\Delta_n^{\nu}Q^{i}(\tau(t))}{\Delta_n^{\nu}(\tau(t))}ds - \widetilde{\sigma^{\alpha}_{i}}(a_n^{\nu},n)\Delta_n^{\nu}Q^{i}(\tau(t))\Big\}$$
$$+\Big\{\int_{[\tau(t)]_n}^{\tau(t)}\widetilde{\sigma^{\alpha}_{i}}(s,n)\frac{\Delta_n^{+}Q^{i}(\tau(t))}{\Delta_n^{+}(\tau(t))}ds - \widetilde{\sigma^{\alpha}_{i}}([\tau(t)]_n,n)\Delta_nQ^{i}(\tau(t))\Big\}$$

$$=\Big(\sum_{\nu:\,a_n^{\nu+1}\le\tau(t)}I_1\Big)+\varepsilon_1$$

とおく。$|\varepsilon_1|\le K_1\{\|\Delta_n^{+}Q(\tau(t))\|+\|\Delta_nQ(\tau(t))\|\}$ であるから補題3.1により $\lim_{n\to\infty}E\big[\sup_{t\le T}(\varepsilon_1)^2\big]=0$。

$$I_1=\frac{\Delta_n^{\nu}Q^{i}(\tau(t))}{\Delta_n^{\nu}(\tau(t))}\int_{a_n^{\nu}}^{a_n^{\nu+1}}\Big\{\widetilde{\sigma^{\alpha}_{i}}(s,s,n)-\widetilde{\sigma^{\alpha}_{i}}(s,a_n^{\nu},n)\Big\}ds$$
$$+\Delta_n^{\nu}Q^{i}(\tau(t))\Big\{\frac{1}{\Delta_n^{\nu}(\tau(t))}\int_{a_n^{\nu}}^{a_n^{\nu+1}}\widetilde{\sigma^{\alpha}_{i}}(s,a_n^{\nu},n)-\widetilde{\sigma^{\alpha}_{i}}(a_n^{\nu},a_n^{\nu},n)\Big\}$$
$$=I_2+\varepsilon_2$$

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

とおく。

$$|\varepsilon_2| \leqslant \frac{K_2|\Delta_n^\nu Q^i(\tau(t))|}{\Delta_n^\nu(\tau(t))}\int_{a_n^\nu}^{a_n^{\nu+1}}(s-a_n^\nu)\,ds \leqslant \frac{K_2}{2}\Delta_n^\nu(\tau(t))\|\Delta_n^\nu Q(\tau(t))\|$$

に注意して，補題3.3により

$$\lim_{n\to\infty} E\Big[\sup_{t\leqslant T}\Big(\sum_{\nu: a_n^{\nu+1}\leqslant\tau(t)}\varepsilon_2\Big)^2\Big]=0$$

を得る。一方，

$$I_2=\frac{\Delta_n^\nu Q^i(\tau(t))}{\Delta_n^\nu(\tau(t))}\int_{a_n^\nu}^{a_n^{\nu+1}}ds\int_{a_n^\nu}^{s}du\Big\{\sum_{\beta,j}\widetilde{\frac{\partial}{\partial x^\beta}\sigma_i^\alpha}(s,u,n)\,\widetilde{\sigma_j^\beta}(u,n)\frac{\Delta_n^\nu Q^j(\tau(t))}{\Delta_n^\nu(\tau(t))}$$

$$+\sum_j\widetilde{\frac{\partial}{\partial\xi^j}\sigma_i^\alpha}(s,u,n)\frac{\Delta_n^\nu Q^j(\tau(t))}{\Delta_n^\nu(\tau(t))}\Big\}$$

$$=\frac{1}{(\Delta_n^\nu(\tau(t)))^2}\int_{a_n^\nu}^{a_n^{\nu+1}}ds\int_{a_n^\nu}^{s}du\sum_j\Big[\sum_\beta\Big\{\widetilde{\frac{\partial}{\partial x^\beta}\sigma_i^\alpha}(s,u,n)-\widetilde{\frac{\partial}{\partial x^\beta}\sigma_i^\alpha}(a_n^\nu,a_n^\nu,n)\Big\}\widetilde{\sigma_j^\beta}(u,n)$$

$$+\Big\{\widetilde{\frac{\partial}{\partial\xi^j}\sigma_i^\alpha}(s,u,n)-\widetilde{\frac{\partial}{\partial\xi^j}\sigma_i^\alpha}(a_n^\nu,a_n^\nu,n)\Big\}\Big](\Delta_n^\nu Q^i(\tau(t)))(\Delta_n^\nu Q^j(\tau(t)))$$

$$+\frac{1}{(\Delta_n^\nu(\tau(t)))^2}\sum_{\beta,j}\int_{a_n^\nu}^{a_n^{\nu+1}}ds\int_{a_n^\nu}^{s}du\Big\{\widetilde{\frac{\partial}{\partial x^\beta}\sigma_i^\alpha}(a_n^\nu,n)\,\widetilde{\sigma_j^\beta}(u,n)+\widetilde{\frac{\partial}{\partial\xi^j}\sigma_i^\alpha}(a_n^\nu,n)\Big\}$$

$$\times(\Delta_n^\nu Q^i(\tau(t)))(\Delta_n^\nu Q^j(\tau(t)))$$

$$=\varepsilon_3+I_3$$

とおく。(1.2)と(2.1)により，次の評価を得る：

$$|\varepsilon_3|\leqslant\frac{(rK_1K_2+K_2)\|\Delta_n^\nu Q(\tau(t))\|^2}{(\Delta_n^\nu(\tau(t)))^2}\int_{a_n^\nu}^{a_n^{\nu+1}}ds\int_{a_n^\nu}^{s}du$$

$$\Big\{|s-a_n^\nu|+\|X_n(u)-X_n(a_n^\nu)\|+\|Q_n(u)-Q_n(a_n^\nu)\|\Big\}$$

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

$$\leqslant \frac{rK_1K_2+K_2}{3}\Delta_n^\nu(\tau(t))\|\Delta_n^\nu Q(\tau(t))\|^2$$

$$+\frac{(rK_1K_2+K_2)\|\Delta_n^\nu Q(\tau(t))\|^2}{(\Delta_n^\nu(\tau(t)))^2}\int_{a_n^\nu}^{a_n^{\nu+1}}ds\int_{a_n^\nu}^{s}du\sqrt{\sum_\beta\left\{\int_{a_n^\nu}^{u}dv\sum_j\widetilde{\sigma}_j^\beta(v,n)\frac{\Delta_n^\nu Q^j(\tau(t))}{\Delta_n^\nu(\tau(t))}\right\}^2}$$

$$+\frac{(rK_1K_2+K_2)\|\Delta_n^\nu Q(\tau(t))\|^3}{(\Delta_n^\nu(\tau(t)))^3}\int_{a_n^\nu}^{a_n^{\nu+1}}ds\int_{a_n^\nu}^{s}(u-a_n^\nu)du$$

$$\leqslant K_3\left\{\Delta_n^\nu(\tau(t))\|\Delta_n^\nu Q(\tau(t))\|^3+\|\Delta_n^\nu Q(\tau(t))\|^3\right\},$$

ここで K_3 は定数。したがって補題 3.3 により次の等式を得る：$\lim_{n\to\infty}E\left[\sup_{t\leqslant T}\left(\sum_{\nu:a_n^{\nu+1}\leqslant\tau(t)}\mathcal{E}_3\right)^2\right]=0$。一方

$$I_3=\frac{1}{(\Delta_n^\nu(\tau(t)))^2}\sum_{\beta,j}\int_{a_n^\nu}^{a_n^{\nu+1}}ds\int_{a_n^\nu}^{s}du\frac{\partial}{\partial x^\beta}\widetilde{\sigma}_i^\alpha(a_n^\nu,n)\left\{\widetilde{\sigma}_j^\beta(u,n)-\widetilde{\sigma}_j^\beta(a_n^\nu,n)\right\}\left(\Delta_n^\nu Q^i(\tau(t))\right)\left(\Delta_n^\nu Q^j(\tau(t))\right)$$

$$+\sum_j\widehat{b}_{ij}^\alpha(a_n^\nu,n)\left(\Delta_n^\nu Q^i(\tau(t))\right)\left(\Delta_n^\nu Q^j(\tau(t))\right)$$

$$=\mathcal{E}_4+I_4$$

とおく。$\mathcal{E}_3$ の評価と同様に

$$\lim_{n\to\infty}E\left[\sup_{t\leqslant T}\left(\sum_{\nu:a_n^{\nu+1}\leqslant\tau(t)}\mathcal{E}_4\right)^2\right]=0$$

が示される。ゆえに (3.6) が証明された。

次に，(3.7) を証明する。

$$g_i^\alpha(s)=\widetilde{\sigma}_i^\alpha(s)-\widetilde{\sigma}_i^\alpha([s]_n,n)$$

とおき，

$$\int_0^{\tau(s)}\widetilde{\sigma}_i^\alpha dQ^i-\sum_{\nu\geq0}\widetilde{\sigma}_i^\alpha(\tau_n^\nu(s),n)\Delta_n^\nu Q^i(\tau(s))$$

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

$$=\int_0^{\tau(s)} g_i^\alpha dM^i+\int_0^{\tau(s)} g_i^\alpha dV^i=I^M+I^V$$

とする。マルチンゲール不等式により，

$$E\Big[\sup_{s\leq t}(I^M)^2\Big]\leq 4E\Big[\int_0^{\tau(t)}(g_i^\alpha)^2 d\varphi^{ii}\Big]\leq 4E\Big[\int_0^t g_i^\alpha(\tau(u))^2 du\Big]$$

$$\leq 4K_2^2E\Big[\int_0^t\{|\tau(u)-[\tau(u)]_n|^2+\|X(\tau(u))-X_n([\tau(u)]_n)\|^2+\|\Delta_nQ(\tau(u))\|^2\}du\Big]$$

$$\leq 4K_2^2T\delta_n^2+8K_2^2E\Big[\int_0^t\|X(\tau(u))-X_n(\tau(u))\|^2du\Big]$$

$$+8K_2^2E\Big[\int_0^T\|\Delta_nX_n(\tau(u))\|^2du\Big]+4K_2^2TE\Big[\sup_{t\leq T}\|\Delta_nQ(\tau(t))\|^2\Big]$$

となる。(1.2)から，

$$E\Big[\int_0^T\|\Delta_nX_n(\tau(u))\|^2du\Big]$$

$$=E\Big[\int_0^T\sum_\alpha\Big\{\int_{[\tau(s)]_n}^{\tau(s)}\sum_i\widehat{\sigma}_i^\alpha(u,n)\frac{\Delta_n^+Q^i(\tau(s))}{\Delta_n^+(\tau(s))}du\Big\}^2ds\Big]$$

$$\leq drK_1^2TE\Big[\sup_{t\leq T}\|\Delta_n^+Q(\tau(s))\|^2\Big]$$

を得る。$E\Big[\sup_{s\leq t}(I^V)^2\Big]\leq TE\Big[\int_0^t g_i^\alpha(\tau(u))^2du\Big]$ に注意して，補題3.1から(3.7)が導かれる。

次に，

$$\int_0^{\tau(s)}\widehat{b}_{ij}^\alpha d\varphi^{ij}-\sum_{\nu\geq 0}\widehat{b}_{ij}^\alpha(\tau_n^\nu(s),n)(\Delta_n^\nu Q^i(\tau(s)))(\Delta_n^\nu Q^j(\tau(s)))$$

$$=\Big\{\int_0^{\tau(s)}\widehat{b}_{ij}^\alpha d\varphi^{ij}-\int_0^{\tau(s)}\widehat{b}_{ij}^\alpha([u]_n,n)d\varphi^{ij}(u)\Big\}$$

$$+\Big\{\int_0^{\tau(s)}\widehat{b}_{ij}^\alpha([u]_n,n)d\varphi^{ij}(u)-\sum_{\nu\geq 0}\widehat{b}_{ij}^\alpha(\tau_n^\nu(s),n)(\Delta_n^\nu Q^i(\tau(s)))(\Delta_n^\nu Q^j(\tau(s)))\Big\}$$

$$=I_5+\mathcal{E}_5$$

とおく。シュワルツの不等式により，

$$(I_5)^2\leq K_2^2T\int_0^s\{|\tau(u)-[\tau(u)]_n|^2+\|X(\tau(u))-X_n([\tau(u)]_n)\|^2+\|\Delta_nQ(\tau(u))\|^2\}du$$

を得る。一方，伊藤の公式により

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

$$\mathcal{E}_5 = -\sum_{\nu} \widehat{b^{\alpha}_{ij}}(\tau_n^{\nu}(s), n)\Big[\int_{\tau_n^{\nu}(s)}^{\tau_n^{\nu+1}(s)} \{Q^i(s) - Q^i([s]_n)\} dQ^j(s) + \int_{\tau_n^{\nu}(s)}^{\tau_n^{\nu+1}(s)} \{Q^j(s) - Q^j([s]_n)\} dQ^i(s)\Big]。$$

補題 3.2 を用いて，$\lim_{n\to\infty} E[\sup_{s\leq T}(\mathcal{E}_5)^2] = 0$。したがって (3.7) と同様にして (3.8) が得られる。

(I) と (II) から，適当な定数 C と $\lim_{n\to\infty} \mathcal{E}(n) = 0$ であるような数列 $\{\mathcal{E}(n)\}$ を取れば，$t<T$ に対し

$$E[\sup_{s\leq t} \| X(\tau(s)) - X_n(\tau(s)) \|^2]$$
$$\leq C\int_0^t E[\sup_{u\leq s} \| X(\tau(u)) - X_n(\tau(u)) \|^2] ds + \mathcal{E}(n)$$

が成立する。ゆえに定理を得る。 Q.E.D.

<u>注意</u> §2 の系において，σ の有界性の仮定を除くことができる。

§4 確率平行移動等との関連

リーマン多様体M上の拡散過程 $\{y(t)\}$ を考える。$y(t)$ に沿ってのテンソルの平行移動を定義する確率微分方程式 (Itô[5]) は，(1.1) の特別なもの (係数がMの接続係数で表わされる) である。この場合常微分方程式 (1.2) の解

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

X_nは，時刻a_n^ν（$\nu=0,1,2,\cdots$）における$y(t)$の位置を「局所座標に関する直線」で結んで得られる折れ線に沿って平行移動したものを表わしている。一方，時刻a_n^ν（$\nu=0,1,2,\cdots$）における$y(t)$の位置を測地線で結んで得られる折れ線に沿って平行移動したものを$\tilde{X}_n$と書くとき，

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\sup_{t\leq T} \left| X_n(t)^{j_1}_{i_1}\,{}^{\cdots j_q}_{\cdots i_p} - \tilde{X}_n(t)^{j_1}_{i_1}\,{}^{\cdots j_q}_{\cdots i_p} \right|^2\right] = 0$$

（$T\geq 0$，$(\cdots)^{j_1}_{i_1}\,{}^{\cdots j_q}_{\cdots i_p}$は座標を表わす）が成立する。したがって，Itô[3]，Dynkin[1]等で指摘されている「$\tilde{X}_n$による確率平行移動の近似」が成り立つことが導かれる。

次に，McKean[8]のinjectionとの関連について述べる。Gをn次元線型リー群，$\mathfrak{g}$をそのリー環，$\{Q(t)\}$は$\mathfrak{g}$上の擬マルチンゲール（すなわち$Q(t)$の各成分$Q^i{}_j(t)$が擬マルチンゲール）とする。確率微分方程式

$$(4.1)\qquad dZ^i{}_j = \sum_{k=1}^{n} Z^i{}_k \circ dQ^k{}_j \qquad (1\leq i,j\leq n)$$

を考える。ただし，$Z^i{}_k \circ dQ^k{}_j$はZ^i_kと$dQ^k{}_j$の対称積（Itô[4]）を表わす。(4.1)は(1.1)の特別

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

な場合である。この場合，常微分方程式(1.2)の解X_nに対応するG上の過程Z_nは

$$Z_n(t) = \exp\frac{\Delta_n^+ Q(a_n^0)}{\Delta_n^+(a_n^0)}\cdot\exp\frac{\Delta_n^+ Q(a_n^1)}{\Delta_n^+(a_n^1)}\cdot\cdots\cdot\exp\frac{\Delta_n^+ Q(a_n^{\nu-1})}{\Delta_n^+(a_n^{\nu-1})}\cdot\exp\left\{(t-a_n^\nu)\frac{\Delta_n^+ Q(a_n^\nu)}{\Delta_n^+(a_n^\nu)}\right\}$$

($a_n^\nu \leq t \leq a_n^{\nu+1}$) で与えられ，§2の定理から，部分列$\{Z_{n_j}\}$が(4.1)の解$Z$に広義一様収束するというMcKean [8]と同様の結果が導かれる。

文　献

[1] E.B.Dynkin, Diffusions of tensors, Soviet Math. Dokl. 9 (1968), 532-535.

[2] M.Fukushima and S.Nakao, On spectra of the Schrödinger operator with a white Gaussian noise potential. (to appear).

[3] K.Itô, The Brownian motion and tensor fields on Riemannian manifold, Proc. Int. Congress Math. (1962) (Stockholm), 536-539.

[4] K.Itô, Stochastic differentials, Applied Math. and

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

Optimization 1, (1975), 374-381.

[5] K Itô, Stochastic parallel displacement, in Probabilistic Methods in Differential Equations, Lecture Notes in Math. 451 (1975), 1-7 (Springer).

[6] H. Kunita, Diffusion processes and control systems, Lecture Note, Université de Paris VI, Lab. de calcul des probabilités, 1973-74.

[7] H. Kunita and S. Watanabe, On square integrable martingales, Nagoya Math. J. 30 (1967), 209-245.

[8] H.P McKean Jr., Stochastic integrals, Academic Press, 1969.

[9] D.W. Stroock and S.R.S. Varadhan, On the support of diffusion processes with applications to the strong maximum principle, Proc. Sixth Berkeley Symp. on Math. Stat. and Prob. 3 (1970), 333-360.

[10] 渡辺信三, 確率微分方程式, 産業図書, 1975

[11] E. Wong and M. Zakai, On the relation between ordinary and stochastic differential equations, Int. J. Engng Sci. 3 (1965), 213-229.

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

ヒルベルト空間上の確率微分方程式について

宮原孝夫

§1. 準備

可分な実ヒルベルト空間H上で、次のような形の確率微分方程式を考える。

$$\begin{cases} dX_t = -AX_t\,dt + D(X_t)\,dB_t & t>0 \\ X_0 = x \in H \end{cases}$$

こゝで、AはH上の正な自己共役作用素で、A^{-1}が完全連続作用素になっているものとし、$h \in H$ に対し $D(h)$ はH上のHilbert-Schmidt作用素となるものとする。又、B_tはBrown運動である。

上の方程式を扱うために必要な定義を与えよう。

<u>定義1.1.</u> 確率空間$(\Omega, \mathcal{F}, P)$及びσ-fieldの族$\{\mathcal{F}_t\}_{t\ge 0}, \uparrow$ $(\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F})$が与えられているものとする。このとき、$B_t$がH上のBrown運動であるとは、Bが、

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

$$B : [0,\infty) \times H \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

なる写像であって、$B(0,\cdot,\cdot) \equiv 0$, $B_t(h) = B(t,h,\cdot)$; $\mathcal{F}_t$－可測, なる性質を持ち、更に次の二条件を満たすことをいう。

(i) $^\forall h \in H$, $h \neq 0$, に対して

$$\frac{1}{\|h\|} B_t(h) \text{ が1次元Brown運動.}$$

(ii) $^\forall t \in [0,\infty)$, $^\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $^\forall h, k \in H$ に対して

$$B_t(\lambda h + \mu k) = \lambda B_t(h) + \mu B_t(k) \qquad (P\text{-}a.s.).$$

注意1.1. 定義より, $h \perp k \Rightarrow B_t(h) \perp\!\!\!\perp B_t(k)$ が分る。又、$\{e_n\}, n=1,2,\cdots$, を H のCONS とし, $\{w_t^n\}, n=1,2,\cdots$, を互に独立な1次元Brown運動とするとき, $B_t(e_n) = w_t^n$ となるような H 上のBrown運動が構成できる。

注意1.2 上の定義によるBrown運動は, H 上のprocessとしては実現できないが新しいヒルベルト空間 V $(H \underset{dense}{\subset} V)$ を適当に作ってその上に実現することはできる。

次に確率積分についてまとめておく。

定義1.2. $\phi : [0,\infty) \times \Omega \longrightarrow H$ を $\mathcal{F}_t$-adapted

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

で、$E\left[\int_0^t \|\phi(s)\|^2 ds\right] < \infty$ なるものとするとき、

$$\int_0^t \langle \phi(s), dB_s \rangle \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \langle \phi(s), e_n \rangle \, dB_s(e_n)$$

を、$\phi(t)$ の B_t による確率積分という。こゝで $\{e_n\}$ は H の1つの base であり、右辺における $\langle\ ,\ \rangle$ は H の内積を示し、その積分は1次元の普通の意味での確率積分である。

注意1.3　上の定義は base $\{e_n\}$ の取り方によらない。又、$E\left[\left|\int_0^t \langle \phi(s), dB_s \rangle\right|^2\right] = E\left[\int_0^t \|\phi(s)\|^2 ds\right]$ である。

$\sigma_2(H)$ を、H 上の Hilbert-Schmidt 作用素の全体に Hilbert-Schmidt ノルムを入れた空間とする。このとき次の確率積分も定義される。

定義1.3.　$\Phi : [0, \infty) \times \Omega \longrightarrow \sigma_2(H)$ を、$\mathcal{F}_t$-adapted で $E\left[\int_0^t \|\Phi(s)\|^2_{\sigma_2(H)} ds\right] < \infty$ なるものとするとき、確率積分 $\int_0^t \Phi(s) dB_s \in H$ を、

$\forall y \in H$ に対して $\langle y, \int_0^t \Phi(s) dB_s \rangle = \int_0^t \langle \Phi^* y, dB_s \rangle$

なる H 上の continuous martingale として定義する。

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

注意1.4. 上の定義は well-defined であって、$E\left[\left\|\int_0^t \Phi(s)\,dB_s\right\|^2\right] = E\left[\int_0^t \|\Phi(s)\|^2_{\sigma_2(H)}\,ds\right]$

である。このことから、一般に、$\Phi(s) \in \sigma_2(H)$ でない場合に確率積分 $\int_0^t \Phi(s)\,dB_s$ を考えようとすると、H上にはおさまらないことがわかる。

§2. 確率微分方程式.

前節で与えた定義に基づいて、H上の確率微分方程式を考察する。

いま、$a: H \to H$, 及び $b: H \longrightarrow \sigma_2(H)$ が与えられているとして、積分方程式

$$X_t = x + \int_0^t a(X_s)\,ds + \int_0^t b(X_s)\,dB_s$$

を考える。(略して $dX_t = a(X_t)dt + b(X_t)dB_t$ と書き、確率微分方程式と呼ぶ。) この方程式について、次のことはすぐに分る。

命題 もしも、a, b が Lipschitz 条件を満たしているならば、上の方程式は唯一の解を

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

持つ。

この命題は、有限次元の場合と同様に，逐次近似法により示される。

次に、$\mathcal{D}$が線形であるが有界でない（i.e. Lipschitz 条件を満たさない）場合について考察しよう。

今、Aを正の自己共役作用素でA^{-1}が完全連続作用素になるものとし，$D: H \longrightarrow \sigma_2(H)$ が Lipschitz 条件 $\|D(h)-D(k)\|_{\sigma_2(H)} \leq C\|h-k\|$ を満たしているとして、次の方程式を考える。

$$(2.1)\quad \begin{cases} dX_t = -AX_t\,dt + D(X_t)\,dB_t \\ X_0 = x \end{cases}$$

このとき、以下の定理が得られる。

<u>定理 2.1.</u> 上の条件の下で、方程式 (2.1) は H 上に唯一の解を持つ。

$\{U(t)\}_{t\geq 0}$, を $-A$ を生成作用素に持つ半群とする。これを使って、次の定理。

<u>定理 2.2.</u> (i). X_t を (2.1) の解とすれば，X_t は次の方程式 (2.2) を満たす。

$$(2.2)\quad X_t = U(t)X_0 + \int_0^t U(t-s)\,D(X_s)\,dB_s .$$

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

(ii). 逆に、(2.2) の解は (2.1) を満たす。

<u>定理2.3.</u> 方程式 (2.2) は唯一の解を持つ。

上の三つの定理のうち、定理2.1. はその下の二つの定理から従う。従って、これら二つの定理を証明すればよい。

(定理2.3. の証明) A が正故、$\|U(t)\| \leqq 1$, $(t \geqq 0)$ である。従って

$$\|U(t-s)D(h) - U(t-s)D(k)\|_{\sigma_2(H)}$$
$$\leqq \|U(t-s)\| \, \|D(h) - D(k)\|_{\sigma_2(H)} \leqq C\|h-k\|$$

となり、Lipschitz 条件を満たしているので逐次近似法が使える。 (証明終り)

以下、定理2.2. の証明をする。

<u>命題2.1.</u> X_t が次の方程式を満たしているとする。

$$(2.3) \quad X_t = X_0 + \int_0^t (-AX_s)\,ds + \int_0^t \Phi(s)\,dB_s.$$

ここで、$\Phi(s) \in \sigma_2(H)$, $E\left[\int_0^t \|\Phi(s)\|^2_{\sigma_2(H)}\,ds\right] < \infty$ とする。このとき X_t は次の方程式を満たす。

$$(2.4) \quad X_t = U(t)X_0 + \int_0^t U(t-s)\Phi(s)\,dB_s.$$

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

補助定理（Itô's formula）

$F : [0, \infty) \times H \longrightarrow R$, C^2-class

$d\xi_t = a_t\, dt + \Phi(t)\, dB_t$

とするとき、$\eta_t \equiv F(t, \xi_t)$ とおくと、η_t は次の方程式を満たす。

$$
\begin{aligned}
d\eta_t = \Big\{ & F_t(t, \xi_t) + F_x(t, \xi_t)(a_t) \\
& + \frac{1}{2} \operatorname{Spur}\left[\Phi^*(t) F_{xx}(t, \xi_t) \Phi(t) \right] \Big\} dt \\
& + \langle \Phi^*(t) F_x(t, \xi_t), dB_t \rangle .
\end{aligned}
$$

この補助定理の証明は、[1] Yu. L. Daletzkii 又は [3] M. Yor にある。

（命題 2.1. の証明）Aについての条件より、Aの固有ベクトルよりなるHのbaseが存在する。それを $\{e_n\}_{n=1,2,\ldots}$ とし、$Ae_n = \lambda_n e_n$, $\lambda_n > 0$, $\lambda_n \uparrow \infty$ とおくと、$U(t) e_n = e^{-\lambda_n t} e_n$ である。今、$t > 0$ を1つ固定する。(2.4)を示すためには、各 e_n との内積についての等式を示せば十分である。すなわち

$$
(2.5) \quad \langle e_n, X_t \rangle - \langle e_n, U(t) X_0 \rangle = \int_0^t \langle \Phi^*(s) U(t-s) e_n, dB_s \rangle
$$

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

を示せばよい。ここで、新しいヒルベルト空間H_{-1}を、ノルム$\|h\|_{-1} \equiv \|A^{-1}h\|$によるHの完備化として得られる空間と定義し、$H_1$を、$\mathcal{D}(A)$に$\|h\|_1 \equiv \|Ah\|$なるノルムを入れたヒルベルト空間とする。$e_n \in H_1$であり、$h \in H_1$と$k \in H_{-1}$に対して、$\langle h, k \rangle_{(1,-1)} \equiv \langle Ah, A^{-1}k \rangle$と定義することにより容易に$H_1 \cong (H_{-1})'$が分る。又、Aを自然に拡張して、$A : H \to H_{-1}$とみなせる。以下、必要な場合にはAはこのように拡張されているものとする。

$$F(s,x) \equiv e^{-\lambda_n(t-s)} \langle e_n, x \rangle_{(1,-1)} \quad , \quad x \in H_{-1}$$

とおき、X_s $(0 \le s \le t)$ をH_{-1}上のprocessとみて補助定理を$y_s = F(s, X_s)$に対して適用すると、

$$\begin{cases} F_s(s,x) = \lambda_n e^{-\lambda_n(t-s)} \langle e_n, x \rangle_{(1,-1)} \\ F_x(s,x)(\hat{x}) = e^{-\lambda_n(t-s)} \langle e_n, \hat{x} \rangle_{(1,-1)} \\ F_{xx} \equiv 0 \end{cases}$$

より次式をうる。

$$(2.6) \quad y_u - y_0 = \int_0^u \{ \lambda_n e^{-\lambda_n(t-s)} \langle e_n, X_s \rangle_{(1,-1)} +$$

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

$$+e^{-\lambda_n(t-s)}\langle e_n, -AX_s\rangle_{(1,-1)}\Big\}ds$$
$$+\int_0^u \langle \Phi^*(s)e^{-\lambda_n(t-s)}e_n,\ dB_s\rangle$$

こゝで、$\langle e_n, -AX_s\rangle_{(1,-1)} = \langle -Ae_n, X_s\rangle = -\lambda_n\langle e_n, X_s\rangle$ に注意すれば、(2.6)式の右辺の最初の積分の項は消える。特に $u=t$ の場合として次式をうる。

(2.7) $$y_t - y_0 = \int_0^t \langle \Phi^*(s)e^{-\lambda_n(t-s)}e_n,\ dB_s\rangle$$

こゝで、$y_t = F(t, X_t) = \langle e_n, X_t\rangle$, $y_0 = F(0, X_0) = \langle e_n, U(t)X_0\rangle$, $U(t-s)e_n = e^{-\lambda_n(t-s)}e_n$ に注意して、(2.7)は(2.5)と同じ。(証明終り)

次に、命題2.1の逆の命題を証明する。

<u>命題2.2</u>　$\Phi(s) \in \sigma_2(H)$ が条件 $E\left[\int_0^t \|\Phi(s)\|^2_{\sigma_2(H)} ds\right] < \infty$ をみたし、X_t が次式で与えられるものとする。

(2.4) $$X_t = U(t)X_0 + \int_0^t U(t-s)\Phi(s)dB_s.$$

このとき、X_t は次の方程式をみたす。

(2.3) $$X_t = X_0 + \int_0^t (-AX_s)ds + \int_0^t \Phi(s)dB_s.$$

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

この命題の証明のための準備をする。

定理(Fubini). $F(u,s;\omega)$ を $\mathcal{F}_s$-可測で二乗可積分($L_2(T_1\times T_2\times\Omega\to\mathbb{R})$ の意味で)とし, w_s を1次元の $\mathcal{F}_s$-Brown 運動とするとき,

$$\int_{T_1}\left\{\int_{T_2}F(u,s)\,dw_s\right\}du=\int_{T_2}\left\{\int_{T_1}F(u,s)\,du\right\}dw_s$$

が成立する。

証明は、階段関数に対しては明らか故、一般にはその近似による。

注意2.1. 定義1.2.に基づく確率積分の場合にも、同様の定理が成立する。

補助定理 $f(t,s,\omega)$ を, $\frac{\partial f}{\partial t}$ が存在して f 及び $\frac{\partial f}{\partial t}$ が共に $\mathcal{F}_s$-可測で二乗可積分であるようなものとし, w_s を1次元の $\mathcal{F}_s$-Brown 運動とする。このとき,

$$\int_0^t f(t,s,\omega)\,dw_s=\int_0^t\left\{\int_0^u\frac{\partial}{\partial u}f(u,s)\,dw_s\right\}du+\int_0^t f(s,s)\,dw_s$$

が成立する。

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

（証明）

$$\int_0^t f(t,s)\,dm_s - \int_0^t f(s,s)\,dm_s = \int_0^t (f(t,s) - f(s,s))\,dm_s$$

$$= \int_0^t \left(\int_s^t \frac{\partial}{\partial u} f(u,s)\,du \right) dm_s .$$

ここで，
$$F(u,s,\omega) \equiv \begin{cases} \frac{\partial}{\partial u} f(u,s) & \text{if } s \le u \\ 0 & \text{if } s > u \end{cases}$$

とおいて，上の Fubini の定理を使うと，

$$= \int_0^t \left\{ \int_0^u \frac{\partial}{\partial u} f(u,s)\,dm_s \right\} du$$ （証明終り）

（命題 2.2 の証明）　証明すべき式 (2.3) を，(2.4) 式を使って変形してみる。

$$\text{左辺} = U(t) X_0 + \int_0^t U(t-s)\,\Phi(s)\,dB_s$$

$$\text{右辺} = X_0 + \int_0^t (-A\,U(s) X_0)\,ds$$
$$+ \int_0^t \left(-A \int_0^u U(u-s)\,\Phi(s)\,dB_s\right) du + \int_0^t \Phi(s)\,dB_s$$
$$= U(t) X_0 + \int_0^t \left(-A \int_0^u U(u-s)\,\Phi(s)\,dB_s\right) du$$
$$+ \int_0^t \Phi(s)\,dB_s$$

従って，証明すべき式は

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

(2.8) $$\int_0^t U(t-s)\Phi(s)\,dB_s$$
$$= \int_0^t \left\{-A\int_0^u U(u-s)\Phi(s)\,dB_s\right\}du + \int_0^t \Phi(s)\,dB_s.$$

これを示すためには, H_1の要素との内積について等号を言えばよい。そのために, いま, $\{e_n\}_{n=1,2,\cdots}$ をAの固有ベクトルからなるHの base とするとき, 各 e_n との内積が等しいことをいえば十分。次の二式が成立する。

$$\langle e_n, \int_0^t U(t-s)\Phi(s)\,dB_s\rangle_{(1,-1)} = \langle e_n, \int_0^t U(t-s)\Phi(s)\,dB_s\rangle$$
$$= \int_0^t \langle \Phi^*(s)U(t-s)e_n, dB_s\rangle.$$

$$\langle e_n, \int_0^t \left\{-A\int_0^u U(u-s)\Phi(s)\,dB_s\right\}du + \int_0^t \Phi(s)\,dB_s\rangle_{(1,-1)}$$
$$= \langle -Ae_n, \int_0^t \left(\int_0^u U(u-s)\Phi(s)\,dB_s\right)du\rangle$$
$$+ \int_0^t \langle \Phi^*(s)e_n, dB_s\rangle$$
$$= -\int_0^t \langle Ae_n, \int_0^u U(u-s)\Phi(s)\,dB_s\rangle du + \int_0^t \langle \Phi^*(s)e_n, dB_s\rangle$$
$$= -\int_0^t \left(\int_0^u \langle \Phi^*(s)U(u-s)Ae_n, dB_s\rangle\right)du$$
$$+ \int_0^t \langle \Phi^*(s)e_n, dB_s\rangle$$

Sem. on Probab.
Vol.42　1976年
P1-129

従って、次の式を証明することに帰着された。

$$(2.9)\quad \int_0^t \langle \Phi^*(s)U(t-s)e_n, dB_s\rangle$$
$$= -\int_0^t \left(\int_0^u \langle \Phi^*(s)U(u-s)Ae_n, dB_s\rangle\right)du$$
$$+\int_0^t \langle \Phi^*(s)e_n, dB_s\rangle.$$

以下、この(2.9)式の証明をしよう。

$g(t,s;\omega) \equiv \langle \Phi^*(s)U(t-s)e_n, e_m\rangle$ とおくと、

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial t} = \langle \Phi^*(s)\dfrac{\partial}{\partial t}U(t-s)e_n, e_m\rangle = -\langle \Phi^*(s)U(t-s)Ae_n, e_m\rangle \\ g(s,s) = \langle \Phi^*(s)e_n, e_m\rangle \end{cases}$$

となる。この g に補助定理を使い、更に Fubini の定理を使って次式をうる。

$$\int_0^t \langle \Phi^*(s)U(t-s)e_n, e_m\rangle dB_s(e_m)$$
$$= -\int_0^t \left\{\int_0^u \langle \Phi^*(s)U(u-s)Ae_n, e_m\rangle dB_s(e_m)\right\}du$$
$$+\int_0^t \langle \Phi^*(s)e_n, e_m\rangle dB_s(e_m)$$
$$= -\int_0^t \left\{\int_s^t \langle \Phi^*(s)U(u-s)Ae_n, e_m\rangle du\right\}dB_s(e_m)$$
$$+\int_0^t \langle \Phi^*(s)e_n, e_m\rangle dB_s(e_m).$$

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

この等式を、mについてたして、

$$\text{左辺の和} = \int_0^t \langle \Phi^*(s) T(t-s) e_n, dB_s \rangle$$

$$\text{右辺の和} = -\sum_m \int_0^t \left\{ \left\langle \int_s^t \Phi^*(s) T(u-s) A e_n du, e_m \right\rangle \right\} dB_s(e_m) + \int_0^t \langle \Phi^* e_n, dB_s \rangle$$

$$= -\int_0^t \left\langle \int_s^t \Phi^*(s) T(u-s) A e_n du, dB_s \right\rangle + \int_0^t \langle \Phi^*(s) e_n, dB_s \rangle$$

$$= -\int_0^t \left\{ \int_0^u \langle \Phi^*(s) T(u-s) A e_n, dB_s \rangle \right\} du + \int_0^t \langle \Phi^*(s) e_n, dB_s \rangle$$

となる。ここで、最後の等式はFubiniの定理（注意2.1）による。これで、(2.9)式が示された。（証明終り）

（定理2.2の証明）

(i)、X_tを(2.1)の解とし、$\Phi(t) \equiv D(X_t)$とおくと、Lipschitz条件より

$$E\left[\int_0^t \|\Phi(s)\|^2_{\sigma_2(H)} ds\right] \leq C^2 E\left[\int_0^t \|X_s\|^2 ds\right] < \infty.$$

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

従って、命題2.1を使って

$$X_t = U(t)X_0 + \int_0^t U(t-s)\Phi(s)\,dB_s$$

が成立する。こゝで、$\Phi(s) = D(X_s)$ であったから、定理の結論が言えた。

(ii)、$\Phi(t) \equiv D(X_t)$ とおいて、命題2.2を使えば、(i)と同様である。（証明終り）

以上で三つの定理の証明がなされた。

注意2.2　$D(h)$ が、条件 $D(h) \in \sigma_2(H)$ からはづれるときには、(2.1)の解はH上からはみ出す可能性が出てくる。

注意2.3　$D(h)$ が次の条件を満たしているとする。"$h \in H_1 = \mathcal{D}(A)$ に対しては、$D(h) \in \sigma_2(H \to H_1)$ であって、

$$\|D(h) - D(k)\|_{\sigma_2(H\to H_1)} \leqq C\|h-k\|_{H_1}$$

なるLipschitz条件をみたす。" このとき、$X_0 \in H_1$ を初期条件とする(2.1)の解は H_1 上にある。

（証明）一般に、$\Phi(s) \in \sigma_2(H \to H_1)$ であ

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

って，$E\left[\int_0^t \|\Phi(s)\|^2_{\sigma_2(H\to H_1)} ds\right] < \infty$ のとき，$\int_0^t \Phi(s)dB_s$ は H_1 上の martingale になる。これより，定理2.3の方程式(2.2)の解を逐次近似で求めるとき，H_1 のノルムで考えることができるので，H_1 上に解が求まる。

注意2.4. 解の連続性については，別の議論が必要と思われる。

§3. 応用例.

次の方程式を考えよう。

$$(3.1)\quad \begin{cases} dX_t = -AX_t\,dt + (X_t + h)dB_t, & h \in H, \\ X_0 = x \in H. \end{cases}$$

ここで $(X_t + h)dB_t$ の意味が問題であるが，その解釈を，次のような2通りにしてみよう。

I. $\{e_n\}$, $n = 1, 2, \cdots$, をAの固有ベクトルからなるHの base とし，$h \in H$ に対して，$D_1(h) : H \longrightarrow H$ を

$$D_1(h)f \equiv \sum_i \langle f, e_i\rangle\langle h, e_i\rangle e_i$$

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

によって与える。このとき、$D_1(h)$ は次の性質を持つ。

(1) $D_1(h) \in \sigma_2(H)$ であって、$\|D_1(h)\|_{\sigma_2(H)} = \|h\|$.

(2) $D_1(\cdot)$ は線形である。

(3) 上のことより、$D_1(h)$ は Lipschitz 条件を満たしている。

更にもっと強く、

(4) $h \in H_1 = \mathcal{D}(A)$ に対しては $D_1(h) \in \sigma_2(H \to H_1)$ であって、$\|D_1(h)\|_{\sigma_2(H \to H_1)} = \|h\|_1$ である。従って、$D_1 : H \longrightarrow \sigma_2(H \to H_1)$ とみて Lipschitz 条件をみたしている。

そこで、$(X_t + b)dB_t \equiv D_1(X_t + b)dB_t$ と解釈すれば、定理2.1 より H 上に唯一の解の存在することが分り、又、注意2.3 により、$X_0, b \in H_1$ に対しては、その解が H_1 上で求まることも分る。

II. $D_2(h) : H \longrightarrow H$ を

$$D_2(h)f \equiv \frac{\langle f, h \rangle}{\|h\|} h$$

と定義する。このとき、$D_2(h)$ は次の性質を

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

持つ。

(1) $D_2(h) \in \sigma_2(H)$ であって、$\|D_2(h)\|_{\sigma_2(H)} = \|h\|$.

(2) $D_2(\cdot)$ は線形ではないが、Lipschitz 条件、$\|D_2(h) - D_2(k)\|_{\sigma_2(H)} \leq 2\|h-k\|$ を満たす。

(3) $h \in H_1$ のとき、$D_2(h) \in \sigma_2(H \to H_1)$ ではあるが、$D_2 : H_1 \longrightarrow \sigma_2(H \to H_1)$ の意味での Lipschitz 条件はみたさない。

以上から、$(X_t + b)dB_t = D_2(X_t + b)\,dB_t$ と解釈したときには、定理2.1 により H 上での解の存在が分るが、X_0, $b \in H_1$ であっても、H_1 上で解が存在するか否かは不明。

注意 $dX_t = -AX_t dt + dB_t$ なる形の方程式は、§2 における議論からはみ出す。しかし、形の特殊性から違った方法での議論は可能で、次のことが分る。

定理 1). A^{-1} : Hilbert-Schmidt 作用素 $\Rightarrow$ H_{-1} 上に解を持つ。

2). A^{-1} : nuclear 作用素 $\Leftrightarrow$ H 上に解を持つ。

証明は省略する。

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

文献

[1] Yu. L. Daletskii; Infinite-dimensional elliptic operators and parabolic equations connected with them, Russ. Math. Surv. 22, 1-53(1967).

[2] D. A. Dawson; Stochastic evolution equation, Mathematical Biosciences 15, 287-316(1972).

[3] M. Yor; Existence et unicité de diffusions à valeurs dans un espace de Hilbert, Annales de l'Institut Henri Poincaré Section B, Vol.X, n°1(1974).

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

反射壁ブラウン運動の multiplicative operator functional と熱方程式系の確率解.

渡辺信三（京都大学）

序. よく知られているように、熱方程式の解（又は定常解としての楕円型方程式の解）は拡散過程の平均量としてあらわされ、ここに確率論と解析学の密接な関係が生じる。ブラウン運動及びその multiplicative functional と熱方程式との関連は、Feynman-Kac の公式や、Cameron-Martin, Dynkin-Girsanov-Motoo の公式としてよく知られている。この線の延長にあることとして、Stroock 及び Babbit は次のことを示した。記号の簡単のため2次元 $\mathbb{R}^2$ で考える。今 $u(t,x)=(u_1(t,x),\ u_2(t,x))$, $t>0$, $x\in\mathbb{R}^2$ に関する次の熱方程式系

$$
(0.1)\quad
\begin{cases}
\dfrac{\partial u_i}{\partial t}(t,x) = \dfrac{1}{2}\Delta u_i(t,x) + \displaystyle\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} A_{ij}^{k}(x)\,\dfrac{\partial u_j}{\partial x_k}(t,x) \\
\qquad\qquad + \displaystyle\sum_{j=1}^{2} A_{ij}^{c}(x)\,u_j(t,x) & i=1,2 \\
u_i(0,x) = f_i(x) & i=1,2
\end{cases}
$$

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

を考える．このとき $u(t,x)$ は2次元ブラウン運動 (X_t, P_x) とその 2×2 行列値の functional $M(t)$ によって

(0.2) $u(t,x) = E_x[M(t)f(X_t)]$ $\quad (f(x) = (f_1(x)\ f_2(x)))$

と表現される．そして $M(t) = (M_{ij}(t))_{i,j=1}^{2}$ は確率微分方程式

$$(0.3)\quad \begin{cases} dM_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{2}\sum_{l=1}^{2} M_{il}(t)A_{lj}^{k}(X(t))dB_k(t) + \sum_{l=1}^{2} M_{il}(t)A_{lj}^{0}(X(t))dt \\ M_{ij}(0) = \delta_{ij} \end{cases}$$

を解いて得られる．（ここで $B_k(t) = X_k(t) - X_k(0)$，$k=1,2$.）

この 2×2 行列の系 $\{M(t)\}$ は $M(t+s) = M(t)\cdot M(s)\circ\theta_t$（$\theta_t$ は X_t より induce される shift operator）をみたす．このような $M(t)$ は一般に multiplicative operator functional (MOF) と呼ばれるものの特別な場合である（cf. Pinsky [6]）．

この論説では，$\mathbb{R}^2$ のかわりに $\mathbb{R}^2$ の上半平面 $\mathbb{D} = \{x = (x_1, x_2)\ ;\ x_1 \geq 0\}$ において次の熱方程式系の初期値境界値問題

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

$$(0.4)\quad\begin{cases}\dfrac{\partial u_i}{\partial t}(t,x)=\dfrac{1}{2}\Delta u_i(t,x)+\displaystyle\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}A_{ij}^{k}(x)\frac{\partial u_j}{\partial x_k}(t,x)\\ \qquad\qquad+\displaystyle\sum_{j=1}^{2}A_{ij}^{0}(x)\,u_j(t,x)\qquad i=1,2\\ u_i(0,x)=f_i(x)\qquad\qquad i=1,2\\ \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}(t,x)=0,\quad u_2(t,x)=0\quad,\quad x\in\partial D\end{cases}$$

をとき、その解 $u(t,x)$ を (0.2) のように表現すること、その MOF $M(t)$ を求めることを主要な目的とする。同様の問題は, differential form に関する境界値問題 (d-Neumann-Spencer 問題) に対する確率論的アプローチを論ずる際におこる (cf. H. Airault [1], 池田 [4])。この場合は反射壁ブラウン運動より一般の拡散過程に関して以下と同様のことを論じなければならない。この点に関しては目下, 池田信行氏と共同で調べており, 別の機会に報告したい。

1. 2次元反射壁ブラウン運動の excursion point process, — excursion formulas, 伊藤過程の分解公式 —

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

$$D = \{ x = (x_1, x_2) \ ; \ x_1 \geqq 0 \}$$ ：2次元上半平面

$$\partial D = \{ x \in D \ ; \ x_1 = 0 \}$$

$$\mathring{D} = \{ x \in D \ ; \ x_1 > 0 \}$$

とする．又 $W = C([0,\infty) \longrightarrow D)$ を D 上の continuous path の全体とし，$\mathcal{B}(W)$ をその Borel cylinder set から生成される σ - field とする．

(1.1) P_x を $\{W, \mathcal{B}(W)\}$ 上の反射壁ブラウン運動の測度，すなわち

$$P_x\{w \ ; \ w(t_1) \in E_1, \ w(t_2) \in E_2, \ldots, \ w(t_n) \in E_n\}$$

$$= \int_{E_1} dx_1 \int_{E_2} dx_2 \int \cdots \int_{E_n} dx_n \prod_{i=1}^{n} p(t_i - t_{i-1}, x_{i-1}, x_i)$$

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n \ , \quad x_0 = x \ , \quad E_i \in \mathcal{B}(D)$$

ここで $p(t, x, y) = \dfrac{1}{2\pi t}\left(e^{-\frac{(x_1-y_1)^2}{2t}} + e^{-\frac{(x_1+y_1)^2}{2t}}\right) e^{-\frac{(x_1-y_1)^2}{2t}}$

以下で，$X(t) = X(t,w) = w(t)$ ，$w \in W$ と記す．

$\varphi(t)$ を $X(t)$ の ∂D での local time：

(1.2) $$\varphi(t) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t I_{[0,\varepsilon)}(X_1(s))\,ds$$

とする．

又

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

(1.3) $B_1(t) = X_1(t) - X_1(0) - \varphi(t)$

$B_2(t) = X_2(t) - X_2(0)$

とおく. B_1, B_2 は $X(t)$ の continuous な martingale additive functionals で $\langle B_i, B_j \rangle_t = \delta_{ij} t$, すなわち (B_1, B_2) は 2次元 Wiener process, となる. さらに次の記号を導入する;

(1.4) $\rho_t : W \longrightarrow W$ $\quad (\rho_t w)(s) = w(t \wedge s)$

(stopped path)

(1.5) $\theta_t : W \longrightarrow W$ $\quad (\theta_t w)(s) = w(t+s)$

(shifted path)

(1.6) $\sigma(w) = \inf\{ t > 0 \; ; \; w(t) \in \partial D \}$

$\sigma^*(w) = \inf\{ t \geqq 0 \; ; \; w(t) \in \partial D \}$

(1.7) $W^- = \{ w \in W \; ; \; w(0) \in \partial D$ かつ $w = \rho_{\sigma(w)} w \}$

(1.8) $W_0^- = \{ w \in W^- \; ; \; w(0) = 0 \}$

すなわち, W^- は 境界より出発して 境界へくれば stop する path の全体であり, W_0^- は 原点 $0 \in \partial D$ より出発し境界へくれば stop する path の全体である

よく知られているように,

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

W_0^-, $\mathcal{B}(W_0^-)$ 上の σ-finite measure Q で

$$(1.9)\quad Q\{w\,;\ w(t_1)\in E_1,\ w(t_2)\in E_2, \cdots, w(t_n)\in E_n,\ \sigma(w)>t_n\}$$
$$= \int_{E_1} dx_1 \int_{E_2} dx_2 \int \cdots \int_{E_n} dx_n\ K(t_1, x_1) \prod_{i=1}^{n-1} p^0(t_{i+1}-t_i, x_i, x_{i+1})$$

をみたすものが唯一つ存在する。$\underbrace{}_{}$ $0<t_1<t_2<\cdots<t_n,\ E_i\in\mathcal{B}(\mathring{D})$. ここで

$$(1.10)\quad \begin{cases} K(t,x) = \dfrac{1}{\pi t^2} e^{-\frac{x_1^2+x_2^2}{2t}} x_1, & x=(x_1,x_2)\in D,\ t>0 \\ p^0(t,x,y) = \dfrac{1}{2\pi t}\left(e^{-\frac{(x_1-y_1)^2}{2t}} - e^{-\frac{(x_1+y_1)^2}{2t}}\right) e^{-\frac{(x_2-y_2)^2}{2t}}. \end{cases}$$

以下で $x\in D$ を固定し，確率空間 $(W, \mathcal{B}(W), P_x, \mathcal{B}_t(W))$ で考察する。$\mathcal{F}$ 及び $\mathcal{F}_t(W)$ を $\mathcal{B}$ 及び $\mathcal{B}_t(W)$ の通常の完備化とする。

$$(1.11)\quad A(t) = \inf\{u>0\,;\ \varphi(u)>t\}\ :\ \text{local time } \varphi(t)$$

の右連続逆関数

とおき，これを用いて W_0^--値 point process $p(t)$ を次のように定義する。(point process に関しては [7] 参照)

$$(1.12)\quad D_p = \{s\in(0,\infty)\,;\ A(s-)<A(s)\}$$

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

(1.13) $s\in D_p$ に対し $p(s)\in W_0^-$ を

$$[p(s)](t)=\begin{cases} X(t+A(s-))-X(A(s-)) & 0\le t\le A(s)-A(s-) \\ X(A(s))-X(A(s-)) & t\geq A(s)-A(s-) \end{cases}$$

今 $\tilde{\mathcal{F}}_t=\mathcal{F}_{A(t)}$ とするとき p は W_0^--値の $\tilde{\mathcal{F}}_t$-stationary Poisson point process で その characteristic measure は Q で与えられる。このことは次のことと同値である。

$\forall B\in\mathcal{B}(W_0^-)$ ∋ $Q(B)<\infty$, $\forall t>0$ に対し

$$N_p((0,t]\times B)=\#\{s\in D_p\ ;\ s\le t,\ p(s)\in B\}$$

とするとき

(1.14) $N_p((0,t]\times B)-Q(B)t$ は $\tilde{\mathcal{F}}_t$-martingale.

今 $x\in\partial D$, $w\in W_0^-$ に対し, translation $x+w\in W^-$ を $(x+w)(t)=x+w(t)$ で定義し, $w\rightsquigarrow x+w$ による Q の image measure (on W^-) を Q^x であらわす。特に $w(0)=x$ a.s. (Q^x) である。(1.14) より直ちに以下の公式 (excursion formulas) を得る。$w\in W$ に対し $P_{\partial D}w$ を

(1.15) $(P_{\partial D}w)(t)=w(t\wedge\sigma(w))$ i.e. $P_{\partial D}w=P_{\sigma(w)}w$

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

によって定める．すなわち $\rho_{\partial D}$ は一度出発した後，境界へ到達したら止める操作をあらわす．

<u>公式 I</u>　$Z(s)$ を $\tilde{\mathcal{F}}_t\,(=\mathcal{F}_{A(t)})$ -predictable, non-negative process，$f(s, w, w')$ を $(0,\infty)\times W\times W^-$ 上の non-negative Borel function とする．このとき

$$(1.16)\qquad E_x\Big(\sum_{\substack{s\le t\\ s\in D_p}} Z(s)\, f(A(s-),\ \rho_{A(s-)}X,\ \rho_{\partial D}[\theta_{A(s-)}X])\Big)$$

$$= E_x\Big(\int_0^t Z(s)\Big(\int_{W^-} f(A(s),\ \rho_{A(s)}X,\ w')\, Q^{X(A(s))}(dw')\Big)ds\Big)$$

この式は，左辺の integrand が

$$\int_0^t\int_{W_0^-} Z(s)\, f(A(s-),\ \rho_{A(s-)}X,\ X(A(s-))+w')\, N_p(ds, dw')$$

となることに注意すれば明らかである．(1.15) の t は $\tilde{\mathcal{F}}_t$ − マルコフ時間におきかえてもよいから特に $\varphi(t)$ でおきかえて次の公式を得る．

<u>公式 II</u>　$Z(t)$ を $\mathcal{F}_t$ - well measurable, non-negative process，$f(s, w, w')$ を $(0,\infty)\times W\times W^-$ 上の non-negative Borel function とする．このとき，

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

$$(1.17)\quad E_x\Big(\sum_{\substack{s\in D_p\\ s\le\varphi(t)}} Z(A(s-))\,f(A(s-),\ \rho_{A(s-)}X,\ \rho_{\partial D}[\theta_{A(s-)}X])\Big)$$

$$= E_x\Big(\int_0^t Z(s)\Big[\int_{W^-} f(s,\ \rho_s X,\ w')\,Q^{X(s)}(dw')\Big]d\varphi_s\Big)$$

(1.17)の特別な場合として次の公式もよく用いられる．今 $t>0$ に対し

$$(1.18)\quad r(t) = \begin{cases} \sup(s<t\ ;\ X(s)\in\partial D) \\ 0 \qquad \text{if } (\quad)=\phi \end{cases}$$

とおく．$r(t)$ は path $X(s)$ が時刻 t 以前で最後に境界を離れる時間（last exit time）である．

公式 III （last exit formula）

$Z(t)$ を $\mathcal{F}_t$ - well measurable process, ≥ 0

$g(s, s', w, w')$，$[0,\infty)\times[0,\infty)\times W\times W$ 上の Borel function ≥ 0，とする．

このとき，$t>0$ に対し，

$$(1.19)\quad E_x\Big\{Z(r(t))\cdot g(t-r(t),\ r(t),\ \rho_{r(t)}X,\ \rho_{t-r(t)}[\theta_{r(t)}X])\cdot I_{\{r(t)>0\}}\Big\}$$

$$= E_x\Big\{\int_0^t Z(s)\Big[\int_{W^-} g(t-s,\ s,\ \rho_s X,\ \rho_{t-s}w')\,I_{\{\sigma(w')>t-s\}}\,Q^{X(s)}(dw')\Big]d\varphi_s\Big\}$$

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

(1.19) は (1.17) において $t>0$ を固定し

$$f(s, w, w') = g(t-s, s, w\ \rho_{t-s} w') I_{\{\sigma(w') > t-s > 0\}}$$

$$(s \in (0, \infty),\quad w \in W,\quad w' \in W^-)$$

とおく、すると $I_{\{\sigma(\theta_{A(s-)} w) > t - A(s-) > 0\}} = 1 \iff s = \varphi(t)$ であり、又 $\gamma(t) = A(\varphi(t)-)$ であるから (1.17) の左辺の和は $s = \varphi(t)$ の唯1項のみがあらわれ直ちに (1.19) 式を得る.

$\Phi(t) = \Phi(t, w)$ を $\mathcal{F}_t$-adapted, measurable process とする、Φ に関する適当な可積分性の仮定のもとで通常の積分 $\int_0^t \Phi(s)\,ds$ や確率積分 $\int_0^t \Phi(s)\,dB_i(s)$ $i=1, 2$ (B_i は (1.3) で定義された martingale a.f.) が定義され, t について連続な process を定める.

今 $s \in D_p$ に対し, 区間 $e_s = (A(s-), A(s))$ を考え, これを excursion 区間という. $s=0$ に対しては区間 $e_0 = (0, \sigma)$ (これは $x \in \mathring{D}$ のとき, かつそのときのみ空でない) を考える. 今 $t>0$ を固定し $e_s^{(t)} = e_s \cap (0, t) = (A(s-)\ A(s) \wedge t)$, $s \le \varphi(t)$, とおく. $s < \varphi(t)$ のとき $e_s^{(t)} = e_s$, $s = \varphi(t)$ のとき $e_s^t = (A(\varphi(t)-), t)$ となっている. このとき

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

$$(1.20) \qquad (0,t) = \bigcup_{\substack{s \le \varphi(t) \\ s \in D_p \cup \{0\}}} e_s^{(t)} \cup \mathbb{Z}_t$$

ここで $\mathbb{Z}_t = \{ s \in (0,t) \; ; \; X_1(t) = 0 \}$.

よく知られたように

$$(1.21) \qquad |\mathbb{Z}_t| (:= \mathbb{Z}_t \text{ の Lebesgue 測度}) = 0 \quad \text{a.s.}$$

がなりたつ。したがって特に $\Phi(s)$ が $\int_0^t |\Phi(s)|\, ds < \infty$ a.s. となるときは

$$(1.22) \qquad \int_0^t \Phi(s)\, ds = \sum_{\substack{s \in D_p \cup \{0\} \\ s \le t}} \int_{A(s-)}^{A(s) \wedge t} \Phi(s)\, ds \qquad \text{a.s.}$$

$$\left(= \sum_{\substack{s \in D_p \cup \{0\} \\ s \le t}} \int_{e_s^{(t)}} \Phi(s)\, ds \right)$$

がなりたつ、右辺の和は可算和であり絶対収束和である。同様のことを確率積分に対して考察する。

$\Phi(s)$ を $\mathcal{F}_t$ - adapted, real measurable process で

$$E_x\left[\int_0^t \Phi^2(s) \right] < \infty$$

とみたすものとする。確率積分によって process $Y_i(t) = \int_0^t \Phi(s)\, dB_i(s)$ が定義され、確率 1 で

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

$t \rightsquigarrow Y_i(t)$ は連続である。もちろん

$s \in D_p \cup \{0\}$ に対し、$\int_{e_s^{(t)}} \Phi(u)\,dB_i(u) = \int_{A(s-)}^{A(s)\wedge t} \Phi(u)\,dB_i(u)$ を

$$\int_{e_s^{(t)}} \Phi(u)\,dB_i(u) = Y_i(t \wedge A(s)) - Y_i(A(s-)) \qquad , \quad i = 1, 2$$

によって定義する。

Proposition 1.1

$$(1.23) \qquad E_x\Big(\sum_{\substack{s \in D_p \cup \{0\} \\ s \leq \varphi(t)}} \Big(\int_{A(s-)}^{A(s)\wedge t} \Phi(u)\,dB_i(u) \Big)^2 \Big)$$

$$= E_x\Big(\int_0^t \Phi^2(u)\,du \Big) \qquad i = 1, 2$$

Corollary

$$(1.24) \qquad E_x\Big(\Big(\int_{\tau(t)}^{t} \Phi(u)\,dB_i(u) \Big)^2 \Big) \leqq E_x\Big(\int_0^t \Phi^2(u)\,du \Big)$$

証明. $i = 1$ 又は 2 とする。測度空間 $(W_0^-, \mathcal{B}(W_0^-), Q\ ; \mathcal{B}_t(W_0^-))$ ($\mathcal{B}_t(W_0^-)$ は時間 t までの Borel cylinder set より生成される σ-field) 上で

$$E^Q\{[w_i(t) - w_i(s)][w_j(t) - w_j(s)] / \mathcal{B}_s(W_0^-)\}$$

$$= \delta_{ij}\, E^Q\{[t \wedge \sigma(w) - s \wedge \sigma(w)] / \mathcal{B}_s(W_0^-)\} \qquad t > s > 0,\ i, j = 1, 2$$

となっているので

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

$\mathcal{B}_t(W_0^-)$-adapted で $E^Q[\int_0^{t\wedge\sigma}\Psi^2(s,w)ds]<\infty$, $\forall t>0$ となる $\Psi(s,w)$ に対し確率積分 $\int_0^t \Psi(s,w)dw_i(s)$ がいつものように定義され

$$E^Q[(\int_0^t \Psi(s,w)dw_i(s))^2] = E^Q[\int_0^{t\wedge\sigma}\Psi^2(s,w)ds]$$

となることに注意しよう.

$t>0$ を固定し, $s\in(0,\infty)$, $w\in W$, $w'\in W_0^-$ に対し

$$g(s,w,w') = \int_0^{\sigma(w')\wedge(t-s)} \Phi(s+u,[w.w']_s)\,dw'_i(u)$$

とおく. ここで $[w.w']_s\in W$ は

$$[w,w']_s(u) = \begin{cases} w(u), & 0\le u\le s \\ w(s)+w'(u-s), & u\ge s \end{cases}$$

によって定義される. すると, $s\le\varphi(t)$, $s\in D_p$ のとき

$$g(A(s-),\ \rho_{A(s-)}X,\ \rho_{\partial D}[\theta_{A(s-)}X]-X(A(s-)))$$

$$= \int_{A(s-)}^{A(s)\wedge t} \Phi(u)\,dB_i(u)$$

である. 又上の注意より

$$\int_{W_0^-} g^2(s,w,w')\,Q(dw') = \int_{W_0^-}\Big[\int_0^{\sigma(w')\wedge(t-s)} \Phi^2(s+u,[w.w']_s)\,du\Big]Q(dw')$$

となる, 故に, excursion formula II より,

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

$$E_x\Big(\sum_{\substack{s\in D_p\cup\{0\}\\ s\le\varphi(t)}}\Big(\int_{A(s-)}^{A(s)\wedge t}\Phi(u)\,dB_i(u)\Big)^2\Big)$$

$$= E_x\Big\{\Big(\int_0^{\sigma\wedge t}\Phi(u)\,dB_i(u)\Big)^2\Big\} + E_x\Big\{\sum_{\substack{s\in D_p\\ s\le\varphi(t)}} g^2(A(s-),\ P_{A(s-)}X,\ P_{\partial D}[\theta_{A(s-)}X]-X(A(s-)))\Big\}$$

$$= E_x\Big\{\int_0^{\sigma\wedge t}\Phi^2(u)\,du\Big\} + E_x\Big\{\int_0^t\Big[\int_{W_0^-} g^2(s,\ P_sX,\ w')\,Q(dw')\Big]\,d\varphi_s\Big\}$$

$$= E_x\Big\{\int_0^{\sigma\wedge t}\Phi^2(u)\,du\Big\} + E_x\Big\{\int_0^t\Big[\int_0^{\sigma(w')\wedge(t-s)}\Phi^2(s+u,\ [P_sX, w']_s)\,du\Big]\,d\varphi_s\Big\}$$

$$= E_x\Big\{\int_0^{\sigma\wedge t}\Phi^2(u)\,du\Big\} + E_x\Big\{\sum_{\substack{s\in D_p\\ s\le\varphi(t)}}\int_{A(s-)}^{A(s)\wedge t}\Phi^2(u)\,du\Big\}$$

$$= E_x\Big\{\int_0^t\Phi^2(u)\,du\Big\} \qquad \text{q.e.d.}$$

<u>Remark</u> Cor. において $r(t)$ はマルコフ時間でないため $E_x\Big(\Big(\int_{r(t)}^t\Phi(u)\,dB_i(u)\Big)^2\Big) = E_x\Big(\int_{r(t)}^t\Phi^2(u)\,du\Big)$ とは一般にはならない。例えば $i=1$, $\Phi(u)=1$ とすると

$$E_0\Big[\Big(\int_{r(t)}^t dB_1(u)\Big)^2\Big] = E_0\big(\big[B_1(t)-B_1(r(t))\big]^2\big) = E_0(X_1(t)^2) = t$$

$$E_0\Big(\int_{r(t)}^t du\Big) = E(t-r(t)) = \frac{1}{2} \qquad \Big(P_0(r(t)\le u) = \frac{2}{\pi}\sin^{-1}\sqrt{\frac{u}{t}}\Big).$$

次に $\displaystyle\sum_{\substack{s\in D_p\cup\{0\}\\ s\le\varphi(t)}}\int_{e_s^{(t)}}\Phi(u)\,dB_i(u)$ について考察しよう。

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

Definition (stochastic sum)

$f(s) = f(s, w)$ を $(0, \infty) \times W$ 上の Borel function とする。

$$\sum_{\substack{s \le \varphi(t) \\ s \in D_p \cup \{0\}}}^{*} f(s) = I$$

とは，$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sum_{\substack{s \le \varphi(t) \\ A(s)-A(s-) > \varepsilon}} f(s)$ が in probability の意味で存在し I に等しいことと定義する。（したがって $\sum^*$ とかくときこの lim の存在がいえていることを含んでいる。）

Proposition 1.2 $\Phi(s) = \Phi(s, w)$ を $\mathcal{F}_t$-adapted, real measurable process で $E_x(\int_0^t \Phi^2(u)du) < \infty$ となるものとする。

(i) (1.25) $$\sum_{\substack{s \le \varphi(t) \\ s \in D_p \cup \{0\}}}^{*} \int_{A(s-)}^{A(s) \wedge t} \Phi(u)\, dB_2(u) = \int_0^t \Phi(u)\, dB_2(u) \quad \text{a.s.}$$

(ii) さらに $u \mapsto \Phi(u)$ が右連続かつ第一種不連続で，$E_x(\int_0^t |\Phi(s)| d\varphi_s) < \infty$ をみたすとする。このとき

(1.26) $$\sum_{\substack{s \le \varphi(t) \\ s \in D_p \cup \{0\}}}^{*} \int_{A(s-)}^{A(s) \wedge t} \Phi(u)\, dB_1(u) = \int_0^t \Phi(u)\, dB_1(u) + \int_0^t \Phi(u)\, d\varphi_u \quad \text{a.s.}$$

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

Remark (1.25), (1.26) は

$$(1.27)\qquad \sum_{\substack{s\le\varphi(t)\\ s\in D_p\cup\{0\}}}^{*}\int_{A(s-)}^{A(s)\wedge t}\Phi(u)\,dX_i(u)=\int_0^t\Phi(u)\,dX_i(u)\ ,\quad i=1.2$$

という形にまとめうる、

証明. (1.26) のみ示す.

(1)° Step case. $\Phi(u)=\Phi(u,\omega)$ が右連続な step function：ある Markov time の増大列 $\sigma_0=0\le\sigma_1<\sigma_2<\cdots<\cdots<\sigma_n<\cdots\longrightarrow\infty$ に対し

$$\Phi(t)=\Phi(\sigma_i)\ ,\quad t\in[\sigma_i,\sigma_{i+1})$$
(ここで $\Phi(\sigma_i)$ は $\mathcal{F}_{\sigma_i}$－可測) となっている場合にまず証明する、実際 $\Phi(u)\equiv1$ のとき

$$\int_{A(s-)}^{A(s)}dB_1(u)=B_1(A(s)\wedge t)-B_1(A(s-))\qquad s\in D_p\cup\{0\},\ s\le\varphi(t)$$
$$=X_1(A(s)\wedge t)-X_1(A(s-))$$

これよりあきらかに

$$\sum_{\substack{s\le\varphi(t)\\ s\in D_p\cup\{0\}}}^{*}\int_{A(s-)}^{A(s)\wedge t}dB_1(u)=X_1(t)-X_1(0)$$
$$=B_1(t)+\varphi(t)$$

次に $\Phi(u)\begin{cases}=0 & ,\ u<\sigma_1\\ =\Phi(\sigma_1) & ,\ u\ge\sigma_1\end{cases}$

となっているようなときは次のようにして

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

わかる．まず

$$\int_0^s \Phi(u)\,dB_1(u) = \begin{cases} 0 & s<\sigma_1 \\ (B_1(s)-B_1(\sigma_1))\,\Phi(\sigma_1) & , s \geqq \sigma_1 \end{cases}$$

である、故に

$$\int_{A(s-)}^{A(s)\wedge t} \Phi(u)\,dB_1(u) = \begin{cases} 0 \quad , & A(s)\wedge t < \sigma_1 \\ \Phi(\sigma_1)(B_1(A(s)\wedge t)-B_1(\sigma_1)), & A(s-)\leq \sigma_1 \leq A(s)\wedge t \\ \Phi(\sigma_1)(B_1(A(s\wedge t))-B_1(A(s-))) & \sigma_1 \leq A(s-), \end{cases}$$

したがって $\sigma_1 \in e_s^{(t)}$ となる s があるときには

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \sum_{\substack{A(s)-A(s-)>\varepsilon \\ s\leq \varphi(t)}} \int_{A(s-)}^{A(s)\wedge t} \Phi(u)\,dB_1(u) = \Phi(\sigma_1)(X_1(t)-X_1(\sigma_1))$$

$$= \Phi(\sigma_1)(B_1(t)+\varphi_1(t)-B_1(\sigma)-\varphi_1(\sigma_1))$$

$$= \int_0^t \Phi(u)\,dB_1(u) + \int_0^t \Phi(u)\,d\varphi_u$$

$\sigma_1 \in \mathbb{Z}_t$ のときは

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \sum_{\substack{A(s)-A(s-)>\varepsilon \\ s\leq \varphi(t)}} \int_{A(s-)}^{A(s)\wedge t} \Phi(u)\,dB_1(u) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \sum_{\substack{A(s)-A(s-)>\varepsilon \\ s\leq \varphi(t) \\ A(s-)\geq \sigma_1}} \int_{A(s-)}^{A(s)\wedge t} \Phi(u)\,dB_1(u)$$

$$= \Phi(\sigma_1)\cdot X_1(t)$$

$$= \Phi(\sigma_1)(X_1(t)-X_1(\sigma_1))$$

$$= \int_0^t \Phi(u)\,dB_1(u) + \int_0^t \Phi(u)\,d\varphi_u$$

これをくりかえしていけば，Φ が step のとき (1. 26) のなりたつことがわかる．

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

(2°) 一般の場合

Lemma 1 $u \rightsquigarrow \Phi(u)$ が右連続かつ第1種不連続な $\mathcal{F}_t$-adapted process のとき，$\forall \varepsilon > 0$ に対し $\exists \Phi_\varepsilon(u)$: (1°) の step function で

$$|\Phi_\varepsilon(u) - \Phi(u)| \leqq \varepsilon \qquad \forall u$$

証明. $\sigma_0 = 0$,

$$\sigma_n = \inf\{t > \sigma_{n-1} \,;\, |\Phi(u) - \Phi(\sigma_{n-1})| \geqq \varepsilon\} \wedge n$$

とおくと，あきらかに σ_n は $\sigma_n \uparrow \infty$ a.s をみたす $\mathcal{F}_t$-マルコフ時間であり，$\Phi_\varepsilon(u) = \Phi(\sigma_n)$, $u \in [\sigma_n, \sigma_{n+1})$ とおけばよい．

Lemma 2 $\mu^t(B) := Q(B \mid \sigma > t) = \dfrac{Q(B \,;\, \sigma > t)}{Q(\sigma > t)}$

$B \in \mathcal{B}(W_0^-)$ とおく．このとき μ^t は $W_0^- \cap \{w : \sigma(w) > t\}$ 上の次のような Markovian measure である：

$$(1.28) \quad \mu^t\{w : w(t_1) \in E_1,\ w(t_2) \in E_2,\ \ldots,\ w(t_n) \in E_n\}$$

$$= \int_{E_1} dx_1 \int_{E_2} dx_2 \int \cdots \int_{E_n} dx_n \ k(t_1, x_1) \prod_{i=1}^{n-1} \tilde{p}(t_i, x_i \,;\, t_{i+1}, x_{i+1})$$

$$0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t, \qquad E_i \in \mathcal{B}(\mathring{D})$$

ここで
$$\begin{cases} k(s, x) = \dfrac{K(s, x) h(t-s, x)}{K(t)} & s > 0,\ x \in \mathring{D} \\[2ex] \tilde{p}(s, x \,;\, u, y) = \dfrac{h(t-u, y)}{h(t-s, x)} \, p^0(u-s, x, y), & 0 \leq s < u,\ x, y \in \mathring{D} \end{cases}$$

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

但し $h(s,x)=\int_D p^\circ(s,x,y)\,dy=\frac{2}{\sqrt{2\pi s}}\int_0^{x_1} e^{-\frac{\xi^2}{2s}}\,d\xi$, $x=(x_1,x_2)$

$$K(t)=\int_D K(t,x)\,dx=\sqrt{\frac{2}{\pi t}}$$

($K(t,x)$, $p^\circ(t,x,y)$ は (1.10) で与えられる)

証明は (1.19) より簡単な計算で示せるので省略する.

<u>Corollary</u>. $b_1(u)=w_1(u)-\int_0^u A(t,s,w_1(s))\,ds$ $(0\leq u<t)$ は μ_t に関し 1-dim. Wiener process , ここで

$$A(t,s,x)=\frac{\frac{\partial}{\partial x_1}h(t-s,x)}{h(t-s,x)} \qquad x>0,\ t>s\geq 0 \tag{1.29}$$

$$=\frac{e^{-\frac{x^2}{2(t-s)}}}{\int_0^x e^{-\frac{\xi^2}{2(t-s)}}\,d\xi}$$

<u>Lemma 3</u> Prop 1.2 (ii) の仮定をみたす $\Phi(u)=\Phi(u,w)$ に対し,

$$M_\varepsilon(t)=\sum_{\substack{s\leq\varphi(t)\\ A(s)-A(s-)>\varepsilon}}\int_{A(s-)}^{A(s)\wedge t}\Phi(s)\,dB_1(s)-\int_0^t\Big[\int_{W_0^-}\Big\{\int_0^{\sigma(w')\wedge(t-s)}\Phi(s+u,[\rho_s w,w']_s)\,dw_1'(u)$$

$$\times I_{\{\sigma(w')>\varepsilon\}}\Big\}Q(dw')\Big]\,d\varphi_s$$

は $\varepsilon\to 0$ のとき $\int_0^t\Phi(s,w)\,dB_1(s)$ に $L^2(P_x)$ 収束する.

<u>証明</u> $t>0$ を固定し

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

$g_t(s, w, w')$ $w \in W$, $w \in W_0^-$ を

$$g_t(s, w, w') = \int_0^{\sigma(w')\wedge(t-s)} \Phi(s+u, [w, w']_s)\, dw_1'(u)$$ とおく.

但し $[w, w']_s \in W$ は $[w, w']_s(u) = \begin{cases} w(u) & u \leq s \\ w(s) + w'(u-s) & u \geq s \end{cases}$

で定義される. すると

$$M_\varepsilon(t) = \underbrace{\int_0^{\sigma\wedge t} \Phi(u)\, dB_1(u)}_{I_{\{\sigma>\varepsilon\}}} + \int_0^{\varphi(t)}\int_{W_0^-} g_t(A(s-), \rho_{A(s-)}w, w')\, I_{\{\sigma(w')>\varepsilon\}}$$
$$\times [N_p(ds\, dw') - Q(dw')\, ds].$$

すると, 確率積分の一般論 (cf [7]) より

$$E_x(M_\varepsilon(t)^2) = E_x\Big[\int_0^t \Big\{\int_{W_0^-} g_t^2(s, \rho_s w, w')\, I_{\{\sigma(w')>\varepsilon\}}\, Q(dw')\Big\}\, d\varphi_s\Big]$$
$$+ E_x\Big[\Big(\int_0^{\sigma\wedge t} \Phi(u)\, dB_1(u)\Big)^2 ; \sigma > \varepsilon\Big]$$

$\varepsilon > \varepsilon' > 0$ のとき

$$E_x[(M_\varepsilon(t) - M_{\varepsilon'}(t))^2] = E_x\Big[\int_0^t \Big\{\int_{W_0^-} g_t^2(s, \rho_s w, w')\, I_{\{\varepsilon \geq \sigma(w') > \varepsilon'\}}\, Q(dw')\Big\}\, d\varphi_s\Big]$$
$$+ E_x\Big[\Big(\int_0^{\sigma\wedge t} \Phi(u)\, dB_1(u)\Big)^2 ; \varepsilon \geq \sigma > \varepsilon'\Big]$$

これより $\varepsilon \downarrow 0$ のとき $M_\varepsilon(t)$ は $M(t) = \int_0^{\sigma\wedge t} \Phi(u)\, dB_1(u) +$
$\int_0^{\varphi(t)}\int_{W_0^-} g_t(A(s-), \rho_{A(s-)}w, w')\, [N_p(ds, dw') - Q(dw')\, ds]$ に $L^2(P_x)$ 収束し,

Proposition 1.1 の証明より,

$$E_x[M(t)^2] = E_x\Big[\int_0^{\sigma\wedge t} \Phi^2(u)\, du\Big] + E_x\Big[\int_0^t d\varphi_s \Big\{\int_{W_0^-} g_t^2(s, \rho_s w, w')\, Q(dw')\Big\}\Big]$$
$$= E_x\Big[\int_0^t \Phi^2(u)\, du\Big]$$

となる.

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

$M(t)=\int_0^t \Phi(u)\,dB_1(u)$ が示すべきことである。

まず Φ が有界で step のとき，このことを示す

最初に Φ が有界のとき $M(t)$ が $\mathcal{F}_t$ − martingale であることをいう。そのため $F_1(w)$, $F_2(w)$ を有界な W 上の Borel function として $t>\tau>0$ のとき

$$(1.30)\quad E_x[M(t)\,F_1(\rho_{A(\varphi(\tau)-)}w)\,F_2(\rho_{\tau-A(\varphi(\tau)-)}[\theta_{A(\varphi(\tau-))}w])]$$

$$=E_x[M(\tau)\,F_1(\rho_{A(\varphi(\tau)-)}w)\,F_2(\rho_{\tau-A(\varphi(\tau)-)}[\theta_{A(\varphi(\tau-))}w])]$$

がいえればよい。*) ところで，$r(\tau)=A(\varphi(\tau)-)$ であるので，

$$(1.31)\quad E_x[M_\varepsilon(t)\,F_1(\rho_{A(\varphi(\tau)-)}w)\,F_2(\rho_{\tau-A(\varphi(\tau)-)}[\theta_{A(\varphi(\tau-))}w])]$$

$$=E_x\Big[\Big(\int_0^{\sigma\wedge t}\Phi(u)\,dB_1(u)\cdot I_{\{\sigma>\varepsilon\}}+\int_0^{\varphi(t)}\int_{W_0^-} g_t(A(s-),\rho_{A(s-)}w,w')\,I_{\{\sigma(w')>\varepsilon\}}[N_p(ds,dw')$$
$$-Q(dw')ds]\Big)F_1(\rho_{r(\tau)}w)\,F_2(\rho_{\tau-r(\tau)}[\theta_{r(\tau)}w])\Big]$$

$$=E_x\Big[\Big(\int_0^{\sigma\wedge\tau}\Phi(u)\,dB_1(u)\cdot I_{\{\sigma>\varepsilon\}}+\int_0^{\varphi(\tau)}\int_{W_0^-} g_t(A(s-),\rho_{A(s-)}w,w')\,I_{\{\sigma(w')>\varepsilon\}}[N_p(ds,dw')$$
$$-Q(dw')ds]\Big)F_1(\rho_{r(\tau)}w)\,F_2(\rho_{\tau-r(\tau)}[\theta_{r(\tau)}w])\Big]$$

(ここで 確率積分 $\int\int \cdot\,[N_p(ds\,dw')-Q(dw')ds$ の $\tilde{\mathcal{F}}_t=\mathcal{F}_{A(t)}$ に関する martingale 性を用いた)

$$=E_x\Big[\int_0^{\sigma\wedge\tau}\Phi(u)\,dB_1(u)\cdot I_{\{\sigma>\varepsilon\}}\cdot F_1(\rho_{r(\tau)}w)\,F_2(\rho_{\tau-r(\tau)}[\theta_{r(\tau)}w])\Big]$$

---

*) 今 $\varepsilon>0$ は $\tau>\varepsilon>0$，かつ $t-\tau>\varepsilon>0$ なるようにえらんでおく。

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

$$+ E_x\Big(\sum_{\substack{s \le \varphi(\tau) \\ s \in D_p \\ \sigma(\theta_{A(s-)}w) > \varepsilon}} g_t(A(s-), \rho_{A(s-)}w, \rho_{\partial D}[\theta_{A(s-)}w] - w(A(s-))) \cdot F_1(\rho_{r(\tau)}w) F_2(\rho_{\tau - r(\tau)}$$

$$[\theta_{r(\tau)}w]\,)\Big)$$

$$- E_x\Big[\int_0^\tau \Big\{ \int_{W_0^-} \Big[\int_0^{\sigma(w') \wedge (t-s)} \Phi(s+u, [w, w']_s)\, dw_1'(u) \Big] I_{\{\sigma(w') > \varepsilon\}} Q(dw') \Big\} d\varphi_s$$

$$\times F_1(\rho_{r(\tau)}w)\, F_2(\rho_{\tau - r(\tau)}[\theta_{r(\tau)}w]\,)\Big]$$

$$= I_1^\varepsilon + I_2^\varepsilon - I_3^\varepsilon$$

明らかに $I_1^\varepsilon = E_x\Big[\int_0^{\sigma\wedge\tau} \Phi(u)\, dB_1(u)\, I_{\{\sigma > \varepsilon\}} \cdot F_1(\rho_{r(\tau)}w) F_2(\rho_{\tau - r(\tau)}[\theta_{r(\tau)}w]\,)\Big]$

$+ \delta_1(\varepsilon) = I_{11}^\varepsilon + \delta_1(\varepsilon)$ と书くと $\delta_1(\varepsilon) \to 0 \ (\varepsilon \to 0)$.

$$I_3^\varepsilon = E_x\Big[\int_0^\tau \Big\{ \int_{W_0^-} \Big[\int_0^{\sigma(w') \wedge \varepsilon} \Phi(s+u, [w, w']_s)\, dw_1'(u) \Big] I_{\{\sigma(w') > \varepsilon\}} Q(dw') \Big\} d\varphi_s$$

$$\times F_1(\rho_{r(\tau)}w)\, F_2(\rho_{\tau - r(\tau)}[\theta_{r(\tau)}w]\,)\Big]$$

$$= E_x\Big[\int_0^\tau \Big\{ \int_{W_0^-} \Big[\int_0^{\sigma(w') \wedge (\tau - s)} \Phi(s+u, [w, w']_s)\, dw_1'(u) \Big] I_{\{\sigma(w') > \varepsilon\}} Q(dw') \Big] d\varphi_s$$

$$\times F_1(\rho_{r(\tau)}w) F_2(\rho_{\tau - r(\tau)}[\theta_{r(\tau)}w]\,)\Big]$$

$$+ E_x\Big[\int_{\tau-\varepsilon}^\tau \Big\{ \int_{W_0^-} \Big[\int_0^{\sigma(w') \wedge \varepsilon} \Phi(s+u, [w, w']_s)\, dw_1'(u) \Big] I_{\{\sigma(w') > \varepsilon\}} Q(dw') \Big\} d\varphi_s$$

$$\times F_1(\rho_{r(\tau)}w) F_2(\rho_{\tau - r(\tau)}[\theta_{r(\tau)}w]\,)\Big]$$

$$- E_x\Big[\int_{\tau-\varepsilon}^\tau \Big\{ \int_{W_0^-} \Big[\int_0^{\sigma(w') \wedge (\tau - s)} \Phi(s+u, [w, w']_s)\, dw_1'(u) \Big] I_{\{\sigma(w') > \varepsilon\}} Q(dw') \Big\} d\varphi_s$$

$$\times F_1(\rho_{r(\tau)}w) F_2(\rho_{\tau - r(\tau)}[\theta_{r(\tau)}w]\,)\Big]$$

$$= I_{31}^\varepsilon + \delta_2(\varepsilon) + \delta_3(\varepsilon)$$

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

とおく　次の Lemma 4 より　$\delta_2(\varepsilon),\ \delta_3(\varepsilon) \to 0$

$(\varepsilon \to 0)$ 。又

$$I_2^{\varepsilon} = E_x\Big(\sum_{\substack{s<\varphi(\tau)\\ s\in D_p\\ \sigma(\theta_{A(s-)}w)>\varepsilon}} g_t(A(s-),\ \rho_{A(s-)}w,\ \rho_{\partial D}[\theta_{A(s-)}w] - w(A(s-)))$$

$$\times F_1(\rho_{r(\tau)}w)\, F_2(\rho_{\tau-r(\tau)}[\theta_{r(\tau)}w])\ \Big]$$

$$+ E_x\Big(g_t(r(\tau),\ \rho_{r(\tau)}w,\ \rho_{\partial D}[\theta_{r(\tau)}w] - w(r(\tau))\Big) F_1(\rho_{r(\tau)}w)$$

$$\times F_2(\rho_{\tau-r(\tau)}[\theta_{r(\tau)}w]\ ) \cdot I_{\{\sigma[\theta_{r(\tau)}w]>\varepsilon}\ \Big)$$

$$= I_{21}^{\varepsilon} + I_{22}^{\varepsilon}$$

ここで、last exit formula (1.19) を用いると、

$$I_{22}^{\varepsilon} = E_x\Big(\int_0^{\tau} \Big[\int_{W_0^-} \Big\{ \int_0^{\sigma(w')\wedge(t-s)} \Phi(s+u,\ [w,w']_s) \Big\} dw_1'(u)\, I_{\{\sigma(w')>\varepsilon\}}$$

$$F_2(w(s)+\rho_{\tau-s}w')\, I_{\{\sigma(w')>\tau-s\}}\ Q(dw')\Big]\, F_1(\rho_s w)\ d\varphi_s\ \Big)$$

$$= E_x\Big(\int_0^{\tau} \Big[\int_{W_0^-} \Big\{ \int^{\sigma(w')\wedge[(\tau-s)\vee\varepsilon]} \Phi(s+u,\ [w,w'])\, dw_1'(u) \Big\} I_{\{\sigma(w')>\varepsilon\vee(\tau-s)} \cdot F_2(w(s)+\rho_{\tau-s}w')$$

$$\times Q(dw')\Big] \cdot F_1(\rho_s w)\, d\varphi_s\ \Big)$$

$$= E_x\Big(\int_0^{\tau} \Big[\int_{W_0^-} \Big\{ \int_0^{\sigma(w')\wedge(\tau-s)} \Phi(s+u,\ [w,w'])\, dw_1'(u) \Big\} I_{\{\sigma(w')>\varepsilon\vee(\tau-s)\}}\, F_2(w(s)+\rho_{\tau-s}w')$$

$$\times Q(dw')\Big]\, F_1(\rho_s w)\, d\varphi_s\Big) - E_x\Big[\int_{\tau-\varepsilon}^{\tau} \Big[\int_{W_0^-} \Big\{ \int_0^{\sigma(w')\wedge(\tau-s)} \Phi(s+u,\ [w,w'])\, dw_1'(u) \Big\}$$

$$\times I_{\{\sigma(w')>\underset{\varepsilon}{\underset{\shortparallel}{\varepsilon\vee(\tau-s)}}\}}\, F_2(w(s)+\rho_{\tau-s}w') \Big\}\, Q(dw')\Big]\, F_1(\rho_s w)\, d\varphi_s\Big]$$

$$+ E_x\Big[\int_{\tau-\varepsilon}^{\tau} \Big[\int_{W_0^-} \Big\{ \int_0^{\sigma(w')\wedge\varepsilon} \Phi(s+u,\ [w,w'])\, dw_1'(u) \Big\} I_{\{\sigma(w')>\underset{\shortparallel}{\varepsilon\vee(\tau-s)}\}}$$

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

$$\times F_2(w(s)+\rho_{\tau-s}w')\cdot Q(dw')\,]\; F_1(\rho_s w)\,d\varphi_s\;]$$

$$= I_{221}^{\varepsilon} + \delta_4(\varepsilon) + \delta_5(\varepsilon)$$

次の Lemma 4 より $\delta_4(\varepsilon),\ \delta_5(\varepsilon) \longrightarrow 0 \quad (\varepsilon \to 0)$

以上合せて

$$(1.31)\text{ の左辺} = I_{11}^{\varepsilon} + I_{21}^{\varepsilon} + I_{221}^{\varepsilon} - I_{31}^{\varepsilon} + \delta_1(\varepsilon) + \delta_4(\varepsilon) + \delta_5(\varepsilon)$$
$$- \delta_2(\varepsilon) - \delta_3(\varepsilon) \qquad \delta_i(\varepsilon) \longrightarrow 0 \quad (\varepsilon \to 0)$$

ところで、 $I_{11}^{\varepsilon} + I_{21}^{\varepsilon} + I_{221}^{\varepsilon} - I_{31}^{\varepsilon}$

$$= E_x[M_\varepsilon(\tau)\,F_1(\rho_{r(\tau)}w)\cdot F_2(\rho_{\tau-r(\tau)}[\theta_{r(\tau)}w])\,]$$

である。故に結局

$$E_x[M_\varepsilon(t)\,F_1(\rho_{A(\varphi(\tau)-)}w)\,F_2(\rho_{\tau-A(\varphi(\tau)-)}[\theta_{A(\varphi(\tau)-)}w])\,]$$
$$= E_x[M_\varepsilon(\tau)\,F_1(\rho_{A(\varphi(\tau)-)}w)\,F_2(\rho_{\tau-A(\varphi(\tau)-)}[\theta_{A(\varphi(\tau)-)}w])\,]$$
$$+\, o(1) \qquad \varepsilon \to 0$$

$\varepsilon \to 0$ として (1.30) をうる。故に $M(t)$ は $\mathcal{F}_t$-マルチンゲールである。次に Φ が Case 1° の step のときは これが $\int_0^t \Phi(u)\,dB_1(u)$ と一致することを示す。このとき

$$M_\varepsilon(t) + \int_0^t \Big[\int_{W_0^-} \Big\{ \int_0^{\sigma(w')\wedge(t-s)} \Phi(s+u, [w,w']_s)\,dw_1'(u)\, I_{\{\sigma(w')>\varepsilon\}} \Big\}\, Q(dw')\Big]\,d\varphi_s$$

$$\longrightarrow \int_0^t \Phi(u)\,dB_1(u) + \int_0^t \Phi(u)\,d\varphi_u$$

であった。これより左辺第2項 $\equiv A_\varepsilon(t)$ は

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

$$\left[\int_0^t \Phi(u)\,dB_1(u) - M(t)\right] + \int_0^t \Phi(u)\,d\varphi_u$$

へ収束する　一方，Lemma 2, Cor. より

$$(1.32)\quad \left|\int_{W_0^-}\left\{\int_0^{\sigma(w')\wedge(t-s)} \Phi(s+u,[w,w']_s)\,dw_1'(s)\, I_{\{\sigma(w')>\varepsilon\}}\right\} Q(dw')\right|$$

$$= \Bigg|\int_{W_0^-\cap\{\sigma(w')>\varepsilon\}} \left\{\int_0^{\sigma(w')\wedge(t-s)\wedge\varepsilon} \Phi(s+u,[w,w']_s)\,db_1(u) + \int_0^{\sigma(w')\wedge(t-s)\wedge\varepsilon} \Phi(s+u,[w,w']_s)A(\varepsilon,u,w_1'(u))\,du\right\}$$

$$\times \mu_\varepsilon(dw')\Bigg| \times Q\{w' : \sigma(w')>\varepsilon\}$$

$$= \left|\int_{W_0^-\cap\{\sigma(w')>\varepsilon\}} \left\{\int_0^{\sigma(w')\wedge(t-s)\wedge\varepsilon} \Phi(s+u,[w,w']_s)A(\varepsilon,u,w_1'(u))\,du\right\}\mu_\varepsilon(dw')\right|$$

$$\times Q\{w' : \sigma(w')>\varepsilon\}$$

$$\leqq \|\Phi\|_\infty \cdot \int w_1'(\varepsilon\wedge\sigma(w'))\,Q(dw') = \|\Phi\|_\infty$$

これより　$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} A_\varepsilon(t) = A(t)$　は　$\int_0^t \psi(s)\,d\varphi_s$，$|\psi(s)|\leqq\|\Phi\|_\infty$，

の形をしている．　すると

$$\int_0^t \psi(u)\,d\varphi_u - \int_0^t \Phi(u)\,d\varphi_u = \int_0^t \Phi(u)\,dB_1(u) - M(t).$$

右辺は $\mathcal{F}_t$－マルチンゲールであるから結局

$$\psi(u) = \Phi(u), \qquad M(t) = \int_0^t \Phi(u)\,dB_1(u) \quad となる．$$

Φ が一般のときは，Φ_n：有界，step かつ
$E_x\left[\int_0^t |\Phi-\Phi_n|^2(u)\,du\right] \longrightarrow 0$　となるもので近似して容易に　$M(t) = \int_0^t \Phi(u)\,dB_1(u)$　となることがわか

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

る. q.e.d.

Lemma 4. $0<\varepsilon'\leq\varepsilon$ とする、又 Φ は有界とする。このとき，

$$(1.33)\quad \int_{W_0^-}\left|\int_0^{\varepsilon'}\Phi(s+u,\ [w,w']_s)\,dw_1'(u)\right| I_{\{\sigma(w')>\varepsilon\}}\,Q(dw')$$

$$\leqq\left(\sqrt{\tfrac{2}{\pi}}+1\right)\|\Phi\|_\infty$$

証明 これは上の (1.32) 式の評価と同様である。すなわち

$$\int_{W_0^-}\left|\int_0^{\varepsilon'}\Phi(s+u,\ [w,w']_s)\,dw_1'(u)\right| I_{\{\sigma(w')>\varepsilon\}}\,Q(dw')$$

$$\leqq\int_{W_0^-\cap\{\sigma(w')>\varepsilon\}}\left|\int_0^{\varepsilon'}\Phi(s+u,[w,w']_s)\,db_1(u)\right|\mu_\varepsilon(dw')\cdot Q\{w';\sigma(w')>\varepsilon\}$$

$$+\int_{W_0^-\cap\{\sigma(w')>\varepsilon\}}\left|\int_0^{\varepsilon'}\Phi(s+u,\ [w,w']_s)A(\varepsilon,u,w_1'(u))\right|du\,\mu_\varepsilon(dw')\cdot Q\{w';\sigma(w')>\varepsilon\}$$

$$\leq\|\Phi\|_\infty\,\varepsilon'^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{2}{\pi\varepsilon}}+\|\Phi\|_\infty=\left(\sqrt{\tfrac{2}{\pi}}+1\right)\|\Phi\|_\infty$$

(Remark) $\displaystyle Q\{\sigma(w')>\varepsilon\}=\int_D K(\varepsilon.x)\,dx=\sqrt{\frac{2}{\pi\varepsilon}}$

$$\int_{W_0^-}w_1'(t)\,Q(dw')=\int_{W_0^-\cap\{\sigma(w')>t\}}w_1'(t)\,Q(dw')=\int_D x_1K(t,x)\,dx=1.$$

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

Lemma 5　Φ は Prop. 12 (ii) の仮定をみたすとする。

このとき，

$$(1.34)\quad \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_0^t\Big[\int_{W_0^-}\Big\{\int_0^{\sigma(w')\wedge(t-s)}\Phi(s+u,[w,w']_s)\,dw_1'(u)\Big\}I_{\{\sigma(w')>\varepsilon\}}\,Q(dw')\Big]d\varphi_s$$

$$=\int_0^t\Phi(u)\,d\varphi_u \qquad \text{in probability.}$$

証明．　Φ が (1°) の step のときは (1°) と Lemma 3 から

$$\int_0^t\Big[\int_{W_0^-}\Big\{\int_0^{\sigma(w')\wedge(t-s)}\Phi(s+u,[w,w']_s)\,dw_1'(u)\Big\}I_{\{\sigma(w')>\varepsilon\}}\,Q(dw')\Big]d\varphi_s$$

$$=-M_\varepsilon(t)+\sum_{\substack{s\le\varphi(t)\\ A(s)-A(s-)>\varepsilon}}\int_{A(s-)}^{A(s)\wedge t}\Phi(u)\,dB_1(u)$$

$$\longrightarrow -\int_0^t\Phi(s)\,dB_1(s)+\int_0^t\Phi(s)\,dB_1(s)+\int_0^t\Phi(s)\,d\varphi_s$$

$$=\int_0^t\Phi(s)\,d\varphi_s \qquad \text{in probability}^{*)}.$$

一般の Φ に対しては Lemma 1 で $|\Phi_n-\Phi|\le\frac{1}{n}$ をみたす step Φ_n をとる。すると一般に

$$\int_{W_0^-}\Big\{\int_0^{\sigma(w')\wedge(t-s)}\Phi(s+u,[w,w']_s)\,dw_1'(u)\Big\}I_{\{\sigma(w')>\varepsilon\}}\,Q(dw')$$

$$=\int_{W_0^-}\Big\{\int_0^{\sigma(w')\wedge(t-s)\wedge\varepsilon}\Phi(s+u,[w,w']_s)\,A(\varepsilon,u,w_1'(u))\,du\Big\}I_{\{\sigma(w')>\varepsilon\}}\,Q(dw')$$

---

*) 第1項の収束は $L^2(P_x)$，第2項の収束は a.s. だから．

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

なることに注意して，

$$\overline{\lim_{\varepsilon\downarrow 0}}\int_0^t d\varphi_s\Big[\int_{W_0^-}\Big\{\int_0^{\sigma(w')\wedge(t-s)}\Phi(s+u,[w,w']_s)\,dw_1'(u)\Big\}I_{\{\sigma(w')>\varepsilon\}}\,Q(dw')\Big]$$

$$=\overline{\lim_{\varepsilon\downarrow 0}}\int_0^t d\varphi_s\Big[\int_{W_0^-}\Big\{\int_0^{\sigma(w')\wedge(t-s)\wedge\varepsilon}\Phi(s+u,[w,w']_s)A(\varepsilon,u,w_1'(u))\,du\Big\}I_{\{\sigma(w')>\varepsilon\}}\,Q(dw')$$

$$\leq\overline{\lim_{\varepsilon\downarrow 0}}\int_0^t d\varphi_s\Big[\int_{W_0^-}\Big\{\int_0^{\sigma(w')\wedge(t-s)\wedge\varepsilon}\Big(\Phi_n(s+u,[w,w']_s)+\frac{1}{n}\Big)A(\varepsilon,u,w_1'(u))\,du\Big\}I_{\{\sigma(w')>\varepsilon\}}\,Q(dw')$$

$$=\int_0^t\Big(\Phi_n(s)+\frac{1}{n}\Big)d\varphi_s\leq\int_0^t\Phi(s)\,d\varphi_s+\frac{2}{n}\varphi_t$$

同様に

$$\underline{\lim_{\varepsilon\downarrow 0}}\int_0^t d\varphi_s\Big[\int_{W_0^-}\Big\{\int_0^{\sigma(w')\wedge(t-s)}\Phi(s+u,[w,w']_s)\,dw_1'(u)\,I_{\{\sigma(w')>\varepsilon\}}\,Q(dw')\Big]$$

$$\geq\int_0^t\Phi(s)\,d\varphi_s-\frac{2}{n}\varphi_s$$

故に $n\to\infty$ として (1.34) が示された.

<u>Proposition の証明</u>.

$$\sum_{\substack{s\leq\varphi(t)\\ A(s)-A(s-)>\varepsilon}}\int_{A(s-)}^{A(s)\wedge t}\Phi(u)\,dB_1(u)$$

$$=M_\varepsilon(t)+\int_0^t\Big[\int_{W_0^-}\Big\{\int_0^{\sigma(w')\wedge(t-s)}\Phi(s+u,[w,w']_s)\,dw_1'(u)\Big\}I_{\{\sigma(w')>\varepsilon\}}\,Q(dw')\Big]d\varphi_s$$

である．ここで $\varepsilon\to 0$ とすると，Lemmas 3, 4 より右辺は $\int_0^t\Phi(s)\,dB_1(s)+\int_0^t\Phi(s)\,d\varphi_s$ へ収束する.

q.e.d.

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

2 Multiplicative operator functional の構成.

$W = C([0,\infty) \to D)$ 上に, §1 のように, 反射壁ブラウン運動の測度 P_x, $x \in D$ が与えられているとする.

$$(t, w) \in [0,\infty) \times W \longrightarrow M(t,w) \in \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2 \quad *)$$

が (2×2)-multiplicative operator functional (MOF) であるとは, すべての $t, s \in [0,\infty)$ に対し, $M(t,w)$ は $\mathcal{F}_t$-可測かつ

$$(2.1) \qquad M(t+s, w) = M(t,w) M(s, \theta_t w)$$

がなりたつことである. 以下で我々はこのような MOF のあるクラスを構成する.

今 $A^k_{\ell j}(x)$, $k = 0, 1, 2$, $\ell, j = 1, 2$ はすべて D 上有界かつ Borel 可測とする. §1 と同様に local time $\varphi(t)$, martingale a.f.'s $B_1(t), B_2(t)$ が定義される. $M(t) = (M_{ij}(t))$ を次の確率微分方程式で定める.

$$(2.2) \qquad \begin{cases} M_{i1}(t) = \delta_{i1} + \sum_{k=1}^{2} \sum_{\ell=1}^{2} \int_0^t M_{i\ell}(s) A^k_{\ell 1}(X(s))\, dB_k(s) \\ \qquad\qquad + \sum_{\ell=1}^{2} \int_0^t M_{i\ell}(s) A^0_{\ell 1}(X(s))\, ds \end{cases}$$

*) $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ は 2×2 real matrix 全体

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

$$
\left\{
\begin{aligned}
M_{i2}(t) &= I_{\{\sigma \geq t\}} \Big(\delta_{i2} + \sum_{k=1}^{2} \sum_{l=1}^{2} \int_0^t M_{il}(s) A_{l2}^{k}(X(s))\, dB_k(s) \\
&\qquad + \sum_{l=1}^{2} \int_0^t M_{il}(s) A_{l2}^{0}(X(s))\, ds \Big) \\
&+ I_{\{\sigma \leqq t\}} \Big(\sum_{k=1}^{2} \sum_{l=1}^{2} \int_{r(t)}^{t} M_{il}(t) A_{l2}^{k}(X(s))\, dB_k(s) + \sum_{l=1}^{2} \int_{r(t)}^{t} M_{il}(s) A_{l2}^{0}(X(s))\, ds
\end{aligned}
\right.
$$

ここで，§1と同じく，$X(s) = X(s, w) = w(s)$，

$\sigma = \sigma(w) = \inf\{t > 0 \,;\, X(t) \in \partial D\}$，$r(t) = r(t, w) = \sup\{ s \leqq t, X(s) \in \partial D\}$

と定義する。

今，$\Xi = \Big\{ \xi(t) = (\xi_{ij}(t))_{i,j=1}^{2}$，$\xi_{ij}(t)$ は $\mathcal{F}_t$

adapted $\underbrace{\text{な右}}_{\text{第一種不連続かつ}}$連続過程で $\sup\limits_{t \in [0,T]} E_x \|\xi(t)\|^2 < \infty \quad \forall x \in D,\ T > 0 \Big\}$

とし

$$\Phi : \Xi \longrightarrow \Xi$$

を

$$
(2.3)\left\{
\begin{aligned}
(\Phi\xi)_{i1}(t) &= \delta_{i1} + \sum_{k=1}^{2} \sum_{l=1}^{2} \int_0^t \xi_{il}(s) A_{l1}^{k}(X(s))\, dB_k(s) \\
&\qquad + \sum_{l=1}^{2} \int_0^t \xi_{il}(s) A_{l1}^{0}(X(s))\, ds \\
(\Phi\xi)_{i2}(t) &= I_{\{\sigma > t\}} \Big(\delta_{i2} + \sum_{k=1}^{2} \sum_{l=1}^{2} \int_0^t \xi_{il}(s) A_{l2}^{k}(X(s))\, dB_k(s) \\
&\qquad + \sum_{l=1}^{2} \int_0^t \xi_{il}(s) A_{l2}^{0}(X(s))\, ds \Big) \\
&+ I_{\{\sigma \leqq t\}} \Big(\sum_{k=1}^{2} \sum_{l=1}^{2} \int_{r(t)}^{t} \xi_{il}(s) A_{l2}^{k}(X(s))\, dB_k(s) + \sum_{l=1}^{2} \int_0^t \xi_{il}(s) A_{l2}^{0}(X(s))\, ds \Big)
\end{aligned}
\right.
$$

$i = 1, 2$

*) §1では $r(t) = \sup\{s < t, X(s) \in \partial D\}$ であったが，tを固定するかぎり，a.s. に等しい。

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

で定義する．いうまでもなく $\int_{r(t)}^{t} \cdot\, dB(s)$ は確率積分 $Y(t) = \int_0^t \cdot\, dB(s)$ で定義される連続確率過程より $Y(t) - Y(r(t))$ によって定義される右連続確率過程を意味する．$\Phi\xi$ はあきらかに $\mathcal{F}_t$-adapted 右連続過程であり §1. Prop. 1.1 Cor. (1.24) より，

各 $T > 0$ に対し $\exists K_T > 0$

$$E_x[\|(\Phi\xi)(t)\|^2] \leqq K_T\left(1 + \int_0^t E_x[\|\xi(s)\|^2]\, ds\right)$$

となることがわかる．したがって $\Phi\xi \in \Xi$ である．$M = \Phi M$ をみたす $M \in \Xi$ を (2.2) の解という

<u>Theorem 2.1</u>　(2.2) の解が唯一つ存在する．

<u>証明</u>．$\xi, \eta \in \Xi$ とする．やはり (1.24) より

$$(2\ 4)\quad E_x[\|(\Phi\xi - \Phi\eta)(t)\|^2] \leqq K_T \int_0^t E_x[\|(\xi - \eta)(s)\|^2]\, ds \qquad t \in [0, T]$$

という評価式が成立する，これより解の一意性は明らかである．解の存在もいつものように示せる；$\xi_0(t) = 0$,　$\xi_1(t) = (\Phi\xi_0)(t)$

$\cdots$, $\xi_n(t) = (\Phi\xi_{n-1})(t)$, $\cdots$

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

とおく．(2.4) より，$t \in [0, T]$ のとき，

$$E_x(\|(\xi_{n+1}-\xi_n)(t)\|^2) \leq K_T \int_0^t E.(\|\xi_n - \xi_{n-1}\|^2(s))\,ds$$
$$\vdots$$
$$\leq \frac{K_T^n T^n}{n!} \times \text{const}.$$

故に $\exists\, \xi(t)$，$t \in [0, T]$

$$\sup_{0\leq t\leq T} E_x[\|\xi_n(t) - \xi(t)\|^2] \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty)$$

martingale 不等式より

$$E_x\Big[\sup_{0\leq t\leq T}\Big|\sum_{k,l}\int_0^t (\xi_n)_{il}(s) A^k_{lj}(X(s))\,dB_k(s) - \sum_{k,l}\int_0^t (\xi_{n-1})_{il}(s) A^k_{lj}(X(s))\,dB_k(s)\Big|^2\Big]$$

$$\leqq \text{const}\cdot E\Big|\sum_{k,l}\int_0^t (\xi_n)_{il}(s) A^k_{lj}(X(s))\,dB_k(s) - \sum_{k,l}\int_0^t (\xi_{n-1})_{il}(s) A^k_{lj}(X(s))\,dB_k(s)\Big|^2$$

$$\leqq \text{const}\cdot\int_0^T E\,\|\xi_n(t) - \xi_{n-1}(t)\|^2\,dt \leq \text{const}\,\frac{K_T^n T^n}{n!}$$

これより容易に

$$\sup_{0\leq t\leq T}\|\xi_n(t) - \xi(t)\| \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty) \quad \text{a.s. in } L^2(P_x)$$

が結論される．すると $\xi \in \Xi$ かつ $\xi = \Phi\xi$，すなわち ξ は (2.2) の解である．

q.e.d.

Theorem 2.2 (2.2) の解を $M(t) = (M_{ij}(t, w))$ とする．$M(t)$ は MOF である．

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

証明　$M(t)$ が $\mathcal{F}_t$-adapted であることは明らか。(2.1)を示す。このためまず次のことに注意する。$A=(a_{ij})\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2$ とし方程式

$$
(2.5)\quad
\begin{cases}
N_{i1}(t)=a_{i1}+\displaystyle\sum_{k,\ell=1}^{2}\int_0^t N_{i\ell}(s)A_{\ell 1}^{k}(X(s))\,dB_k(s)+\sum_{\ell=1}^{2}\int_0^t N_{i\ell}(s)A_{\ell 1}^{0}(X(s))\,ds \\[2ex]
N_{i2}(t)=I_{\{\sigma>t\}}\Big(a_{i2}+\displaystyle\sum_{k,\ell=1}^{2}\int_0^t N_{i\ell}(s)A_{\ell 2}^{k}(X(s))\,dB_k(s)+\sum_{\ell=1}^{2}\int_0^t N_{i\ell}(s)A_{\ell 2}^{0}(X(s))\,ds\Big) \\[2ex]
\qquad +\,I_{\{\sigma\leqq t\}}\Big(\displaystyle\sum_{k,\ell=1}^{2}\int_{\Gamma(t)}^{t} N_{i\ell}(s)A_{\ell 2}^{k}(X(s))\,dB_k(s)+\sum_{\ell=1}^{2}\int_{\Gamma(t)}^{t} N_{i\ell}(s)A_{\ell 2}^{0}(X(s))\,ds\Big)
\end{cases}
$$

を考える。(2.5)も一意的な解 $N\in\Xi$ をもつことは Th. 2.1 と全く同様である。一方 $\tilde{N}(t)=A\,M(t)$ は(2.5)の解であることも容易にわかるので解の一意性より $N(t)=A\cdot M(t)$。このことより、(2.1)を示すには、$\forall t,s\in[0,\infty)$ に対し

$$
(2.6)\quad M_{i1}(t+s)=M_{i1}(t)+\sum_{k,\ell=1}^{2}\int_0^s M_{i\ell}(t+u)A_{\ell 1}^{k}(X(u,w_t^+))\,dB_k(u,w_t^+)
+\sum_{\ell=1}^{2}\int_0^s M_{i\ell}(t+u)A_{\ell 1}^{0}(X(u,w_t^+))\,du \qquad i=1,2
$$

$$
\begin{aligned}
(2.7)\quad M_{i2}(t+s)=\;& I_{\{\sigma(w_t^+)>s\}}\Big(M_{i2}(t)+\sum_{k,\ell=1}^{2}\int_0^s M_{i\ell}(t+u)A_{\ell 2}^{k}(X(u,w_t^+))\,dB_k(u,w_t^+) \\
&+\sum_{\ell=1}^{2}\int_0^s M_{i\ell}(t+u)A_{k 2}^{0}(X(u,w_t^+))\,du\Big) \\
&+I_{\{\sigma(w_t^+)\leqq s\}}\Big(\sum_{k,\ell=1}^{2}\int_{\Gamma(s,w_t^+)}^{s} M_{i\ell}(t+u)A_{\ell 2}^{k}(X(u,w_t^+))\,dB_k(u,w_t^+) \\
&+\sum_{\ell=1}\int_{\Gamma(s,w_t^+)}^{s} M_{i\ell}(t+u)A_{\ell 2}^{0}(X(u,w_t^+))\,du\Big) \\
&\qquad\qquad i=1,2
\end{aligned}
$$

をいえばよい。ここで $w_t^+=\theta_t w$.

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

ところで $X(u, w_t^+) = X(u+t)$, $B_i(u, w_t^+) = B_i(u+t, w) - B_i(t, w)$

$i=1,2$ であるので (2.2) より明らかな等式:

$$M_{i1}(t+s) = M_i(t) + \sum_{k,\ell=1}^{2} \int_t^{t+s} M_{i\ell}(u) A^k_{\ell,1}(X(u))\,dB(u) + \sum_{\ell=1}^{2} \int_t^{t+s} M_{i\ell}(u) A^0_{\ell,1}(X(u))\,du$$

より (2.6) がなりたつ. 次に

$$\begin{aligned}
(2.7)\text{の右辺} = {} & I_{\{\sigma(w_t^+)>s\}} \Big\{ I_{\{\sigma(w)>t\}} \Big(\delta_{i2} + \sum_{k,\ell=1}^{2} \int_0^t M_{i\ell}(u) A^k_{\ell 2}(X(u))\,dB_k(u) \\
& + \sum_{\ell=1}^{2} \int_0^t M_{i\ell}(u) A^0_{\ell 2}(X(u))\,du \Big) + I_{\{\sigma(w)\le t\}} \Big(\sum_{k,\ell=1}^{2} \int_{r(t)}^t M_{i\ell}(s) A^k_{\ell 2}(X(s))\,dB_k(s) \\
& + \sum_{\ell=1}^{2} \int_{r(t)}^t M_{i\ell}(s) A^0_{\ell 2}(X(s))\,ds \Big) + \sum_{k,\ell=1}^{2} \int_t^{t+s} M_{i\ell}(u) A^k_{\ell 2}(X(u))\,dB_k(u) \\
& + \sum_{\ell=1}^{2} \int_t^{t+s} M_{i\ell}(u) A^k_{\ell 2}(X(u))\,du \Big\} + I_{\{\sigma(w_t^+)\le s\}} \Big(\sum_{k,\ell=1}^{2} \int_{r(t+s)}^{s+t} M_{i\ell}(u) A^k_{\ell 2}(X(u))\,dB_k(u) \\
& + \sum_{\ell=1}^{2} \int_{r(t+s)}^{s+t} M_{i\ell}(u) A^0_{\ell 2}(X(u))\,du \Big)
\end{aligned}$$

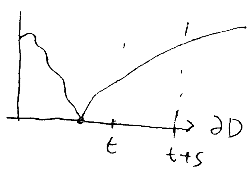
ここで $r(s)$ の次の性質 (2.8)(b) を用いた.

(2.8) a) $\sigma(w_t^+) > s \Rightarrow r(s)(w_t^+) = 0$

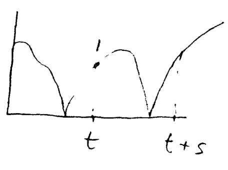
$r(t+s) = r(t)$

b) $\sigma(w_t^+) \le s \Rightarrow r(s)(w_t^+) = r(t+s) - t$

a)



b)



又 $I_{\{\sigma(w)>t\}} I_{\{\sigma(w_t^+)>s\}} = I_{\{\sigma(w)>t+s\}}$ である. 故に

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

$$
\begin{aligned}
\text{右辺} &= I_{\{\sigma > t+s\}}\Big\{ \delta_{i2} + \sum_{k,l=1}^{2} \int_0^{t+s} M_{il}(u) A^k_{l2}(X(u))\, dB_k(u) \\
&\quad + \sum_{l=1}^{2} \int_0^{t+s} M_{il}(u) A^0_{l2}(X(u))\, du \Big\} + I_{\{\sigma(w_t^+) > s,\ \sigma(w) \le t\}} \Big(\sum_{k,l=1}^{2} \int_{r(t)}^{t} M_{il}(u) A^k_{l2}(X(u))\, dB_k(u) \\
&\quad + \sum_{l=1}^{2} \int_{r(t)}^{t} M_{il}(u) A^0_{l2}(X(u))\, du + \sum_{k,l=1}^{2} \int_t^{t+s} M_{il}(u) A^k_{l2}(X(u))\, dB_k(u) \\
&\quad + \sum_{l=1}^{2} \int_t^{t+s} M_{il}(u) A^0_{l2}(X(u))\, du \Big) \\
&\quad + I_{\{\sigma(w_t^+) \le s\}} \Big(\sum_{k,l=1}^{2} \int_{r(t+s)}^{s+t} M_{il}(u) A^k_{l2}(X(u))\, dB_k(u) + \sum_{l=1}^{2} \int_{r(t+s)}^{s+t} M_{il}(u) A^0_{l2}(X(u))\, du \Big),
\end{aligned}
$$

ここで (2.8)(a) を用いると

$$
\begin{aligned}
\text{第2項} &= I_{\{\sigma(w_t^+) > s,\ \sigma(w) \le t\}} \Big(\sum_{k,l=1}^{2} \int_{r(t+s)}^{s+t} M_{il}(u) A^k_{l2}(X(u))\, dB_k(u) \\
&\quad + \sum_{l=1}^{2} \int_{r(t+s)}^{t+s} M_{il}(u) A^0_{l2}(X(u))\, du \Big)
\end{aligned}
$$

ところで $I_{\{\sigma(w) \le t,\ \sigma(w_t^+) > s\}} + I_{\{\sigma(w_t^+) \le s\}} = I_{\{\sigma(w) \le t+s\}}$ であるので 第2項 + 第3項 $= I_{\{\sigma(w) \le t+s\}} \Big(\sum_{k,l=1}^{2} \int_{r(t+s)}^{s+t} M_{il}(u) \times A^k_{l2}(X(u))\, dB_k(u) + \sum_{l=1}^{2} \int_{r(t+s)}^{s+t} M_{il}(u) A^0_{l2}(X(u))\, du \Big)$ となり，したがってたしかに (2.7) の右辺 $= M_{i2}(t+s)$ となる

q.e.d.

次に方程式 (2.2) は $[M_{11}, M_{12}]$, $[M_{21}, M_{22}]$ でそれぞれ閉じた方程式であり，$X(0) \in \partial D$ ならば $M_{11}(0) = 0$, $M_{22}(0) = 0$ である．したがって次のことは明らかである．

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

Proposition 2.3. もし $X(0)\in\partial D$ ならば

$M_{21}(t)=M_{22}(t)=0$ for all t.

3 Dirichlet-Neumann 境界條件をもった熱方程式系の確率解.

$\{X(t)=X(t,w), P_x\}$ を D 上の反射壁 Brown 運動, $M(t)$ を §2 で構成された MOF とする、$f(x)=(f_1(x), f_2(x))$ を D 上の有界 Borel 関数とする

、

$$(3.1)\qquad u(t,x)=E_x(M(t)f(X(t)))=H_tf(x)$$

とおくと H_t は semigroup になる. 以後 $A_{ij}^k(x)$ はすべて有界連続とする. このとき, ラフについて $u(t,x)$ は次の Dirichlet-Neumann 境界條件をもった熱方程式系の解を与えている.

$$(3.2)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u_i}{\partial t}(t,x)=\dfrac{1}{2}\Delta u_i(t,x)+\displaystyle\sum_{j,k=1}^{2}A_{ij}^k(x)\frac{\partial u_j}{\partial x_k}(t,x)+\sum_{j=1}^{2}A_{ij}^0(x)u_j(t,x) \\ u_i(0,x)=f_i(x) \qquad\qquad i=1,2 \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}(t,x)=0\ ,\ u_2(t,x)=0 \qquad \text{if}\quad x\in\partial D \end{cases}$$

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

この事実を次の martingale version の形で示す

<u>Theorem 3 1</u> $f_1(x),\ f_2(x) \in C_b^2(D)$, $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\Big|_{\partial D} = 0$
$f_2|_{\partial D} = 0$ とする. このとき

$$(3.3)\quad \sum_{j=1}^{2} M_{ij}(t) f_j(X(t)) - \sum_{j=1}^{2} M_{ij}(0) f_j(X(0))$$

$$= \Big[\sum_{k,\ell,j=1}^{2} \int_0^t M_{i\ell}(s) A_{\ell j}^{k}(X(s)) f_j(X(s))\, dB_k(s) + \sum_{j,k=1}^{2} \int_0^t M_{ij}(s) \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(X(s))\, dB_k \Big]$$

$$+ \int_0^t \Big[\sum_{j=1}^{2} M_{ij}(s) \Big\{ \frac{1}{2}\Delta f_j(X(s)) + \sum_{k,\ell=1}^{2} A_{j\ell}^{k}(X(s)) \frac{\partial f_\ell}{\partial x_k}(X(s))$$

$$+ \sum_{\ell=1}^{2} A_{j\ell}^{0}(X(s)) f_\ell(X(s)) \Big\} \Big] ds$$

$i = 1, 2$

すなわち, シンボリックに書くと

$$M(t) f(X(t)) - M(0) f(X(0))$$

$$= \text{a martingale} + \int_0^t M(s)(Lf)(X(s))\, ds$$

ここで

$$(3.4)\quad (Lf)_i(x) = \frac{1}{2}\Delta f_i(x) + \sum_{j,k=1}^{2} A_{ij}^{k}(x) \frac{\partial f_j}{\partial x_k} + \sum_{j=1}^{2} A_{ij}^{0}(x) f_j(x).$$

$i = 1, 2$

<u>証明</u>

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

(3.5) $$M_{ij}(t)f_j(X(t)) - M_{ij}(0)f_j(X(0))$$

$$= \sum_{k,\ell=1}^{2} \int_0^t M_{i\ell}(s) A_{\ell j}^{k}(X(s)) f_j(X(s))\, dB_k(s) + \sum_k \int_0^t M_{ij}(s) \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(X(s))\, dB_k(s)$$

$$+ \int_0^t \Big\{ \frac{1}{2} M_{ij}(s) \Delta f_j(X(s)) + \sum_{k,\ell} M_{i\ell}(s) A_{\ell j}^{k}(X(s)) \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(X(s))$$

$$+ \sum_{\ell} M_{i\ell}(s) A_{\ell j}^{0}(X(s)) f_j(X(s)) \Big\}\, ds$$

$$i, j = 1, 2$$

が示せると，(3.3) は j について加えれば直ちに得られる．ところで $j=1$ のときは

$$df_1(X(t)) = \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial f_1}{\partial x_k}(X(t))\, dB_k(t) + \frac{1}{2}\Delta f_1(X(t))\,dt + \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(X(t))\, d\varphi_t$$

$$= \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial f_1}{\partial x_k}(X(t))\, dB_k(t) + \frac{1}{2}\Delta f_1(X(t))\, dt$$

及び

$$dM_{i1}(t) = \sum_{k,\ell=1}^{2} M_{i\ell}(t) A_{\ell 1}^{k}(X(t))\,dB_k(t) + \sum_{\ell} M_{i\ell}(t) A_{\ell 1}^{0}(X(t))\, dt$$

より，Itô の公式を用いて (3.4) を得る．

$j=2$ のときは，$dM_{i2}(t)$ が，いつもの stochastic differential でない（各 excursion において local に stochastic differential）ので，別の考察を要する．

$$\tilde{M}_{i2}(t) = \sum_{k,\ell=1}^{2} \int_0^t M_{i\ell}(s) A_{\ell 2}^{k}(X(s))\, dB_k(s) + \sum_{\ell=1}^{2} \int_0^t M_{i\ell}(s) A_{\ell 2}^{0}(X(s))\, ds$$

とおく．Itô の公式より，$t \geqq s \geqq 0$ に対し，

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

$$(3.6)\quad (\widehat{M}_{i2}(t)-\widehat{M}_{i2}(s))(f_2(X(t))-f_2(X(s)))$$

$$= \sum_{k}\int_s^t (\widetilde{M}_{i2}(u)-\widetilde{M}_{i2}(s))\frac{\partial f_2}{\partial x_k}(X(u))\,dB_k(u) + \sum_{k\,\ell}\int_s^t (f_2(X(u))-f_2(X(s)))M_{i\ell}(u)$$

$$\times A^k_{\ell 2}(X(u))\,dB_k(u) + \frac{1}{2}\int_s^t (\widetilde{M}_{i2}(u)-\widetilde{M}_{i2}(s))\,\Delta f_2(X(u))\,du$$

$$+ \int_s^t (\widetilde{M}_{i2}(u)-\widetilde{M}_{i2}(s))\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(X(u))\,d\varphi_u$$

$$+ \sum_{\ell}\int_s^t (f_2(X(u))-f_2(X(s)))M_{i\ell}(u)A^0_{\ell 2}(X(u))\,du$$

$$+ \sum_{k\,\ell}\int_s^t M_{i\ell}(u)A^k_{\ell 2}(X(u))\frac{\partial f_2}{\partial x_k}(X(u))\,du$$

とする。両辺が t, s について連続だから、すべての t, s でなりたつ。

まず $t<\sigma$ のときは直接 Itô の公式によって (3.5) がなりたつ。$t \geqq \sigma$ のときを考える。すると $\widetilde{M}_{i2}(t)-\widetilde{M}_{i2}(r(t)) = M_{i2}(t)$, 又 $f_2(X(t))-f_2(X(r(t))) = f_2(X(t))$ であるから

$$(3.7)\quad M_{i2}(t)f_2(X(t)) = \sum_k \int_{r(t)}^t M_{i2}(u)\frac{\partial f_2}{\partial x_k}(X(u))\,dB_k(u)$$

$$+ \sum_{k,\ell}\int_{r(t)}^t f_2(X(u))M_{i\ell}(u)A^k_{\ell 2}(X(u))\,dB_k(u) + \frac{1}{2}\int_{r(t)}^t M_{i2}(u)\,\Delta f_2(X(u))\,du$$

$$+ \underbrace{\int_{r(t)}^t M_{i2}(u)\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(X(u))\,d\varphi_u}_{=0} + \sum_{\ell}\int_{r(t)}^t f_2(X(u))M_{i\ell}(u)A^0_{\ell 2}(X(u))\,du$$

$$+ \sum_{k,\ell}\int_{r(t)}^t M_{i\ell}(u)A^k_{\ell 2}(X(u))\frac{\partial f_2}{\partial x_k}(X(u))\,du$$

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

さらに $u \in D_p$，$u < \varphi(t)$ に対して，(3.6) で $s = A(u-)$，$t = A(u)$ とおく，左辺は $f_2(A(u)) = f_2(A(u-)) = 0$ より 0，又右辺は (3.7) の右辺と同じ expression で積分の上限を $A(u)$，下限を $A(u-)$ としたものがあらわれる．最後に $\sigma > 0$ (i.e $X(0) \in \mathring{D}$) のとき，

$M_{i2}(t) f_2(X(t))$，$0 \le t < \sigma$，に Itô の公式を用い $t \uparrow \sigma$ とすると $\lim_{t \uparrow \sigma} f_2(X(t)) = 0$ であるので

$-M_{i2}(0) f_2(X(0)) =$ "(3.7) の右辺で積分の上限を σ，下限を 0 としたもの" となる．∴ 両辺を加えあわせると

左辺 $= M_{i2}(t) f_2(X(t)) - M_{i2}(0) f_2(X(0))$

右辺を Prop. 1.2 を用いて $\sum^*$ の意味で加えあわせると

$$\begin{aligned}
\text{右辺} &= \sum_k \int_0^t M_{i2}(u) \frac{\partial f_2}{\partial x_k}(X(u))\, dB_k(u) + \int_0^t M_{i2}(u) \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(X(u))\, d\varphi_u \\
&\quad + \sum_{k,\ell} \int_0^t f_2(X(u)) M_{i\ell}(u) A^k_{\ell 2}(X(u))\, dB_k(u) + \sum_\ell \int_0^t f_2(X(u)) M_{i\ell}(u) \\
&\quad \times A^1_{\ell 2}(X(u))\, d\varphi_u + \sum_\ell \int_0^t f_2(X(u)) M_{i\ell}(u) A^0_{\ell 2}(X(u))\, du \\
&\quad + \sum_{k,\ell} \int_0^t M_{i\ell}(u) A^k_{\ell 2}(X(u)) \frac{\partial f_2}{\partial x_k}(X(u))\, du + \frac{1}{2}\int_0^t M_{i2}(u) \Delta f_2(X(u))\, du
\end{aligned}$$

ところでこの第2項，第4項はそれぞれ

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

$M_{i2}(u)=0$ if $X(u)\in\partial D$ ，かつ $f_2(X(u))=0$ if $X(u)\in\partial D$ となることより 共に 0. 故に(3.5)が $j=2$ に対してもしめされた.　　q.e.d.

$u(t,x)$ は，係数 $A_{ij}^k(x)$ が十分滑らかなときは，(3. 2)の真の解を与えるはずであるが又の機会に論ずることにしたい.

文献

[1] H. Airault : Resolution stochastique d'un problème de Dirichlet Neumann pour des fonctions à valeurs vectorielles. C.R. Acad. Sci. Paris, t.280, 781−784

[2] E.B. Dynkin : Wanderings of a Markov process, Th. Prop Appl., 16 (1971) 401−428

[3] R.K. Getoor and M.J Sharpe : Last exit decompositions and distributions, Indiana Univ. Math. J. 23 (1973)

[4] 池田信行　境界を持つ Riemann manifold 上の form の値をとる heat equation, preprint (関西セミナー報告)

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

[5] B. Maisonneuve : Exit systems, The Annals of Prob. 3 (1975), 399-411

[6] M. A. Pinsky : Multiplicative operator functionals and their asympotic properties, Advances in Prob. III 1974

[7] 渡辺信三 : Wentzellの境界条件をみたす多次元拡散過程のPoisson point processによる構成, マルコフ過程の研究, Seminar on Prob. 41. (1975), 23-54

(付記) Point process に関することは [7] を見られたい。Markov過程のexcursion formulaについては[2], [5]等, the last exit formulaについては[3] [5]等参照.

Sem. on Probab.
Vol.42 1976年
P1-129

1976年5月発行 確率論セミナー