Sem. on Probab.
Vol.38 1973年
P1-91

SEMINAR ON PROBABILITY

Vol. 38

格子気体の相転移

宮 本 宗 実

京 都 大 学
8788516950
数理解析研究所

1973

確率論セミナー

Sem. on Probab.
Vol.38 1973年
P1-91

は　し　が　き

これは，京大理学部で72年度前期に著者の行なった講義のノートである．内容は表題の通り相転移に関する主な結果の紹介である．なお，重要な結果のすべてを網羅しているのではないということをマズモッテことわっておこうというフウに考える．

講義ノートの整理を樋口保成氏にお願いした．ここに厚く感謝の意を表する．

1972年12月

京都にて

京都大学
1930455
数理研

Sem. on Probab.
Vol.38 1973年
P1-91

目　　次

Sem. on Probab.
Vol.38 1973年
P1-91

序 章 Gibbs 分布

ガンジス河の中のあらゆる砂，仏はこの砂を
説けるやいなや —————— 金剛般若経

V を ν 次元空間 R^ν の有界領域とする．この中に n 個の気体粒子が入っているとすると，その状態は

$$\psi=\{(p_1, t_1), (p_2, t_2), \cdots\cdots, (p_n, t_n)\} \qquad p_j \varepsilon R^\nu,\ t_j \varepsilon V$$

であらわせる．ここで，p_j は j 番目の粒子の運動量，t_j は位置である．状態 ψ のもつエネルギは

$$H(\psi)=\frac{1}{2m}\sum_{j=1}^{n}|p_j|^2+U(\{t_1, t_2, \cdots, t_n\})$$

とかける．ここで m は気体粒子の質量，U は気体粒子の相互作用のエネルギーである。状態 ψ のの粒子数 n を $N(\psi)$ とかくことにする．Ψ_V をこのような状態 ψ の全体とする。Ψ_V 内の状態の分布 P_V をきめよう．ここで空間 R^ν を discrete にし $Z^\nu=\{(n_1, n_2, \cdots, n_\nu):n_j$ は整数$\}$上で考えることにする．次のような前提をおこう；

$$H(\psi)=H(\psi'),\ N(\psi)=N(\psi') \text{ ならば } P_V(\psi)=P_V(\psi').$$

$W(V,E,N)=\#\{\psi\varepsilon\Psi_V;H(\psi)=E, N(\psi)=N\}$，$S=S(V,E,N)=k\log W(V,E,N)$ (k は Boltzmann 定数）とおき，S をエントロピーと言おう．次式で温度 T，化学ポテンシャル μ，圧力 p を定義する．

$$\frac{\partial S}{\partial E}=\frac{1}{T},$$

$$\frac{\partial S}{\partial N}=-\frac{\mu}{T},$$

$$\frac{\partial S}{\partial |V|}=p.$$

ここで偏微分は空間が discrete なので差分の意に解する．なおこの章では，数学的厳密性は無視する．第1章以後はキチンとやるつもりであるが．

Sem. on Probab.
Vol.38 1973年
P1-91

いま，領域V_1とそれを囲む十分大きな領域V_2を考え，$V = V_1 \cup V_2$はそれ以外からは孤立しているものとする．$V_1 \cup V_2$内の気体粒子の状態は全エネルギーE，全粒子数Nを持っているとし，エネルギーと粒子数はV_1とV_2の間でやりとりがあるとしよう．$\psi \varepsilon \Psi_V$は$\psi = \psi_1 \cup \psi_2$ $\psi_i\ \varepsilon \Psi_{V_i}$（$i = 1.2$）と分解でき，

$$H(\psi) = H(\psi_1) + H(\psi_2) + (\ \psi_1 \text{と} \psi_2 \text{との相互作用のエネルギー}\ )$$

となるが，第3項を無視することにする．そのとき，

$$H(\psi) = H(\psi_1) + H(\psi_2) = E\,,$$
$$N(\psi) = N(\psi_1) + N(\psi_2) = N\ .$$

$\psi_1{}^0\ \varepsilon \Psi_{V_1}$を任意に固定し，$\Psi_V$で$V_1$内の状態が$\psi_1{}^0$になる確率を$P_V$で測ったものを$P^0$とかくことにする．すなわち，

$$P^0 = P_V\ \{\psi \varepsilon \Psi_V\ ;\ \psi = \psi_1{}^0 \cup \psi_2\ ,\ \ \psi_2\ \varepsilon \Psi_{V_2}\ \}\ .$$

いま$H(\psi_1{}^0) = E_1{}^0$，$N(\psi_1{}^0) = N_1{}^0$とおけば，上式中のψ_2については$H(\psi_2) = E - E_1{}^0$，$N(\psi_2) = N - N_1{}^0$となり，皆同じエネルギーと粒子数を持つから，我々の前提により，

$$P^0 = \frac{W\,(V_2, E - E_1^0, N - N_1^0\,)}{W\,(V, E, N)}\ .$$

温度と化学ポテンシャルの定義から

$$\frac{\partial \log W\,(V_2, E - E_1, N - N_1\,)}{\partial E_1} = -\frac{1}{kT}\ ,$$

$$\frac{\partial \log W\,(V_2, E, N - N_1\,)}{\partial N_1} = \frac{\mu}{kT}\ .$$

V_2が十分大きいから，右辺は E_1, N_1に依らないと仮定してよい．従って

$$\frac{1}{kT}\ (\,\mu N_1^0 - E_1^0\,) =$$

$$= \int_0^{E_1^0} \frac{\partial \log W\,(V_2,\, E - E_1,\, N - N_1^0)}{\partial E_1}\, dE_1 + \int_0^{N_1^0} \frac{\partial \log W\,(V_2,\, E,\, N - N_1\,)}{\partial N_1}\, dN_1$$

$$= \{\,\log W(V_2,\, E - E_1^0,\, N - N_1^0\,) - \log W(V_2,\, E,\, N - N_1^0)\}$$

Sem. on Probab.
Vol.38 1973年
P1-91

$$+\{\log W(V_2, E, N-N_1^0) - \log W(V_2, E, N)\}$$

$$= \log \frac{W(V_2, E-E_1^0, N-N_1^0)}{W(V_2, E, N)} \ .$$

すなわち,

$$\frac{W(V_2, E-E_1^0, N-N_1^0)}{W(V_2, E, N)} = \exp\left\{\frac{1}{kT}(\mu N_1^0 - E_1^0)\right\} \ .$$

これより,

$$P^0 = \frac{W(V_2, E, N)}{W(V, E, N)} \exp\left\{\frac{1}{kT}(\mu N_1^0 - E_1^0)\right\} \ .$$

ここで最初の係数は $\psi_1^0 \in \Psi_{V_1}$ に無関係であるから, これは normalizing constant であることがわかる. 以上をまとめれば,

$$P_{V_1}(\psi_1) = \Xi(V, \mu, T)^{-1} \exp\left[\frac{1}{kT}\{\mu N(\psi_1) - H(\psi_1)\}\right], \quad \psi_1 \in \Psi_{V_1} ,$$

$$\Xi(V, \mu, T) = \sum_{\psi_1 \in \Psi_{V_1}} \exp\left[\frac{1}{kT}\{\mu N(\psi_1) - H(\psi_1)\}\right] \ .$$

これを領域 V 内の Gibbs 分布と言い, Ξ を grand partition function, (大) 分配関数, 状態和 etc と言う. $\frac{1}{kT}$ はしばしばあらわれるのでこれを以下ずっと $\beta>0$ で代用する. (Ψ_V, P_V) を grand canonical ensemble と言う. P_V の形をみると, 運動エネルギー $\frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{n}|p_i|^2$ によって induce される部分と粒子間の相互作用によって induce される部分との積になっている. つまり前者と後者とは独立であり, 前者は Gauss 分布であるから性質がよくわかっている. 従って, 以後, 後者によって induce される部分だけをとり扱う.

いま領域 V は, 気体粒子の相互作用 U の及ぶ範囲と比べて非常に大きいから, (Ψ_V, P_V) の $V \to Z^\nu$ における極限をとる. このときに極限が存在する場合と irregular な現象が起る場合とがあり, 後者を相転移という. これを第1章, 第2章で調べる.

容易に, $\psi \in \Psi_V$, $N(\psi) = N$ に対して,

Sem. on Probab.
Vol.38 1973年
P1-91

$$P_V(\psi \mid N(\psi)=N) = Z(V,\beta,N)^{-1} \exp\{-\beta H(\psi)\},$$

$$Z(V,\beta,N) = \sum_{\psi \varepsilon \Psi_V\,;\,N(\psi)=N} e^{-\beta H(\psi)}$$

となることがわかる．この Z を(小)分配関数と言う．極限

$$\lim_{\substack{N\to\infty \\ \frac{|V|}{N}\to v}} \frac{\log Z(V,\beta,N)}{N} = f(v,\beta)$$

が存在する(第3章§1)．これをHelmholtzの自由エネルギーと言う．$\Psi_{V,N}=\{\psi \varepsilon \Psi_V\,;N(\psi)=N\}$ とおき $\psi \varepsilon \Psi_{V,N}$ に対する $H(\psi)$ の可能な値を $E_1, E_2, \cdots, E_r, \cdots$ としよう（空間はdiscreteであることに注意）．$N_r = \# \{\psi \varepsilon \Psi_{V,N}\,; H(\psi)=E_r\}$ とおくと

$$Z(V,\beta,N) = \sum_r N_r e^{-\beta E_r}.$$

v に対して V_v を $|V_v| = Nv$ となるようにきめると，

$$\frac{f(v+\triangle v,\beta)-f(v,\beta)}{\triangle v} =$$

$$= \lim \frac{1}{\triangle vN} \{\log Z(V_{v+\triangle v},\beta,N) - \log Z(V_v,\beta,N)\}$$

$$= \lim \frac{1}{N} \{\frac{\triangle_v \log Z(V_v,\beta,N)}{\triangle v}\}.$$

$\{\quad\}$ 内で $\triangle v \to 0$ としてやると，

$$\frac{\partial \log Z(V_v,\beta,N)}{\partial V} = \frac{1}{Z(V,\beta,N)} \frac{\partial}{\partial V} Z(V_v,\beta,N)$$

$$= \frac{1}{Z} \sum_r N_r \frac{\partial}{\partial V} e^{-\beta E_r}$$

$$= -\frac{\beta}{Z} \sum N_r \frac{\partial E_r}{\partial V} e^{-\beta E_r}$$

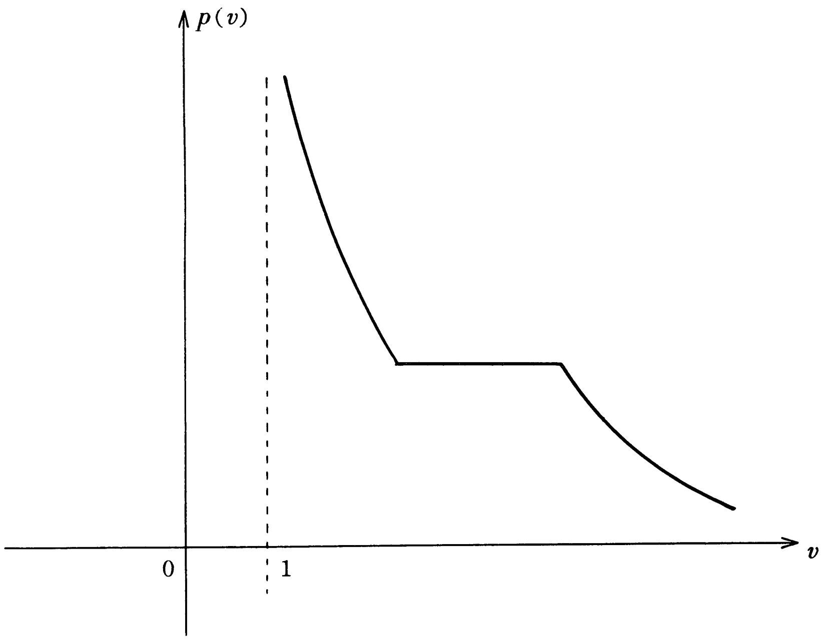
$$= \beta < -\frac{\partial E}{\partial V} >.$$

Sem. on Probab.
Vol.38 1973年
P1-91

エネルギーを体積で微分したものは圧力であるから，上式右辺の $<-\dfrac{\partial E}{\partial V}>$ は圧力の平均値になっている．従って

$$p(v)=\beta^{-1}\ \frac{\partial f(v,\beta)}{\partial v}$$

は気体の圧力である． v の関数 $p(v)$ のグラフを画いてみよう．



v は密度の逆数であるから，もし図のように水平部があればそこでは相転移が起っている．このことについては第３章で調べる．

有限集合 A の濃度を， $\sharp A$, $N(A)$, $|A|$ の他 A 自身によってもあらわすことがあることをおことわりしておきたいと思います.

Sem. on Probab.
Vol.38 1973年
P1-91

第1章　　Random fields

§1. 定　義

Z^ν を ν 次元格子とし，気体粒子は格子点のみに存在し得るものとする．粒子間の相互作用は2粒子間のみに働き，平行移動で不変とする．すなわち，気体粒子の configuration $M \subset Z^\nu$ に対して，Mの粒子間の相互作用の potential energy $U(M)$ を，

$$U(M) = \frac{1}{2} \sum_{t, s \in M} U(s-t)$$

で与える．ここで，$U(t) = U(-t)$ $(t \in Z^\nu)$，$U(0) = 0$.（物理的には $U(0) = +\infty$ とした方が意味があるのだが，0とした方が途中の計算の記述が簡単になるので便宜的にこうする．）上式の左辺の U は集合関数，右辺の U は点関数であって意味が違うが，以下ずっと混用することにする．（またもや　便宜主義！）

記号を下記の通り定める．

$$\Omega = \{0, 1\}^{Z^\nu}, \quad X(t, \omega) = \omega(t) \qquad (\omega \in \Omega,\ t \in Z^\nu),$$

$$\mathcal{B}_V = \sigma\{X(t)\,;\ t \in V\} \qquad (V \subset Z^\nu), \quad \mathcal{B} = \mathcal{B}_{Z^\nu}.$$

$\mathcal{B}_V$ の atom $\{\omega : X(t, \omega) = x_t,\ t \in V\}$ （$x_t = 0$ 又は 1）の全体を $\mathcal{A}_V$ とする．また，$\mathcal{B}_\infty = \bigcap_V \mathcal{B}_{V^c}$，ここで V はすべての有限部分集合にわたるとする．$V = \{t_1, t_2, \cdots, t_n\}$ を Z^ν の有限部分集合とし，これを気体の容器と考える．V内の Gibbs 分布をきめよう．V内の気体粒子の configuration　$A = \{\omega : X(t_j, \omega) = x_j,\ j = 1, 2, \cdots, n\}$ $\in \mathcal{A}_V$（$x_j = 0$ 又は 1）に対して，

Aの粒子数 ： $N(A) = \sum_{j=1}^{n} x_j$ ，

Aの粒子の相互作用の potential energy：$U(A) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j U(t_i - t_j)$

となる．容器 V の外の気体粒子の configuration を ω とし，Aの粒子と ω の粒子との相互作用

Sem. on Probab.
Vol.38 1973年
P1-91

も同じ U で与えられるとすれば，それは

$$U(A,\omega)=\sum_{\substack{1\leqq i\leqq n\\ t\,\varepsilon\, V^c}} x_i X(t,\omega)\,U(t_i-t)$$

となる．右辺が常に well-defined であるために

$$\sum_{t\,\varepsilon\,\cancel{V^\nu}\ \mathbb{Z}^\nu} |U(t)| < +\infty$$

を仮定する．V の外側の configuration が ω であるとき，V 内に configuration A が出現する確率は，

1) $$q_{V,\omega}(A)=\Xi(V,\omega)^{-1}\exp\left[\beta\{\mu N(A)-U(A)-U(A,\omega)\}\right]$$

となる．ここで，

$$\Xi(V,\omega)=\sum_{A\,\varepsilon\,\mathcal{A}_V}\exp\left[\beta\{\mu N(A)-U(A)-U(A,\omega)\}\right]$$

は normalizing constant であって，(大)分配関数，grand partition function，状態和 etc と呼ばれる．A は $\mathcal{B}_V$ の atom であるから，上記の $q_{V,\omega}$ は自然に $\mathcal{B}_V$ 上に拡張される．

$(\Omega,\mathcal{B})$ 上の probability measure P が，

$$P(A|\mathcal{B}_{V^c})=q_{V,\omega}(A) \qquad \text{a. e. } (P)$$

をみたすとき，この P は全空間における気体粒子の平衡分布を与えていると考えられる．この P が一意的にきまらない（平衡分布が２つ以上ある）ときには，相転移が起っているわけである．

<u>Proposition 1.</u> 上の q は次の関係をみたす

2) $q_{V,\omega}(\cdot)$ は $\mathcal{B}_V$ 上の probability measure，

3) $q_{V,\omega}(A)$ は ω の関数として $\mathcal{B}_{V^c}$ －可測，

4) $V_1\subset V_2$，$A\,\varepsilon\,\mathcal{B}_{V_1}$，$B\,\varepsilon\,\mathcal{B}_{V_2\setminus V_1}$ に対して

$$q_{V_2,\omega}(A\cap B)=\int_B q_{V_1,\,c(V_2;\,\omega',\,\omega)}(A)\;q_{V_2,\omega}(d\omega')\,,$$

Sem. on Probab.
Vol.38 1973年
P1-91

但し, $c(V_2\,;\omega',\omega)(t)=\begin{cases}\omega'(t), & t\in V_2\\ \omega\ (t), & t\notin V_2\ .\end{cases}$

証明は多少長くなるが elementary だから省略する.

定義. 条件2)〜4) をみたす系 q を条件附確率系と言う. $(\Omega,\mathcal{B})$ 上の probability measure P が, 任意の有限集合 V, 任意の $A\in\mathcal{B}_V$ に対して

$$P(A|\mathcal{B}_{V^c})=q_{V,\omega}(A) \qquad\qquad \text{a. e. }(P)$$

をみたすとき, 条件附確率系 q を持った random field と言い, それらの全体を $\mathcal{P}$ と書く. とくに q が 1)式で与えられたとき, Gibbsian random field と言い, $\mathcal{P}$ の代りに $\mathcal{G}$ を使う.

条件附確率系 q が与えられたとき, 常に random field が存在するとは限らない.

例 1. $D=\{\omega\,;\sum_{t\in Z^\nu}X(t,\omega)=+\infty\}$, $\delta_0\ (\delta_1)$ を恒等的に $0(1)$ になる関数に point mass を持つ delta measure とする.

$$q_{V,\omega}=\begin{cases}\delta_0 & ,\quad \omega\in D\\ \delta_1 & ,\quad \omega\notin D\end{cases}$$

とおけば q は条件附確率系である. 実際, 2) は自明, $q_{V,\omega}$ は $\mathcal{B}_\infty-$ 可測であるから, 3) も成立する. $\omega\in D$, $V_1\subset V_2$, $A\in\mathcal{B}_{V_1}$, $B\in\mathcal{B}_{V_2\setminus V_1}$ とすれば,

$$q_{V,\omega}(A\cap B)=\delta_0(A\cap B)\ ,$$

$$\int_B q_{V_1,c(V_2\,;\,\omega',\,\omega)}(A)\ q_{V_2,\omega}(d\omega')=\int_B \delta_0(A)\ \delta_0(d\omega')=\delta_0(A\cap B)$$

$(\omega\in D$ だから, $c(V_2,\omega',\omega)\in D)$.

$P\in\mathcal{P}$ と仮定しよう. Aを cylinder set とし, $A\in\mathcal{B}_V$ とすると,

$$\begin{aligned}P(A)&=\int_\Omega q_{V,\omega}(A)\ P(d\omega)\\ &=\Big(\int_D+\int_{D^c}\Big)q_{V,\omega}(A)\ P(d\omega)\\ &=\delta_0(A)\ P(D)+\delta_1(A)\ P(D^c)\ .\end{aligned}$$

Sem. on Probab.
Vol.38 1973年
P1-91

最左辺と最右辺は，すべての $A \varepsilon \mathcal{B}$ に対して一致する。とくに $A = D$ とおけば $\delta_0(D) = 0$, $\delta_1(D) = 1$ であるから，$P(D) = P(D^c) = \frac{1}{2}$. これより，$P = \frac{1}{2}(\delta_0 + \delta_1)$.

$A \equiv \{\omega ; X(t, \omega) = 0, {}^{\forall} t \varepsilon V\} \varepsilon \mathcal{B}_V$, $D \varepsilon \mathcal{B}_\infty \subset \mathcal{B}_{V^c}$ だから

$$
\begin{aligned}
P(A \cap D) &= \int_D q_{V,\omega}(A)\, P(d\omega) \\
&= \delta_0(A)\, P(D) \\
&= \frac{1}{2} .
\end{aligned}
$$

一方 $P(A \cap D) = \frac{1}{2}(\delta_0(A \cap D) + \delta_1(A \cap D))$

$$
= 0 ,
$$

よって 矛盾. (Q.E.D.)

Random field が存在するための十分条件として次の定理が成り立つ.

定理 1. 有限集合の単調列 $W_1 \subset W_2 \subset \cdots$, $\cup W_n = Z^\nu$ が存在して，すべての有限集合 V , 任意の $A \varepsilon \mathcal{B}_V$，任意の ω に対して

$$
5) \quad \lim_{n \to \infty} \sup_{\omega'} \left| q_{V, c(W_n ; \omega', \omega)}(A) - q_{V,\omega'}(A) \right| = 0
$$

が成立すれば，$\mathcal{P}$ は空でない，(弱) コンパクト 凸集合である.

証明. 1°) ω を任意に固定する. Cylinder set 全体は可算個でこれを $A_1, A_2, \cdots$ とならべておくと，任意の n, k に対して,

$$
0 \leqq q_{W_k, \omega}(A_n) \leqq 1
$$

となるから，対角線論法によっててきとうな部分列 k_j をぬき出して，$q_{W_{k_j}, \omega}(A_n)$ はすべての n に対して，$j \to \infty$ のとき収束させられる. この極限を $P(A_n)$ とおく. 任意の有限集合 V に対して，P は $\mathcal{B}_V$ 上で有限加法的であり，従って可算加法的である. ($\mathcal{B}_V$ は有限集合族であるから). Consistency の条件は自明であるから，Kolmogorov の拡張定理によって P は $\mathcal{B}$ 上の probability measure とみなせる.

$P \varepsilon \mathcal{P}$ なることを示そう. V を有限集合とし，$A \varepsilon \mathcal{B}_V$ 及び $\mathcal{B}_{V^c}$ に属する cylinder set B をとる. このとき j_0 を十分大きくとれば，$B \varepsilon \mathcal{B}_{W_{k_{j_0}} \setminus V}$. $j \gg j_0$ ならば 4) より,

Sem. on Probab.
Vol.38 1973年
P1-91

$$q_{W_{k_j},\omega}(A\cap B)=\int_B q_{V,c(W_{k_j};\omega',\omega)}(A)\,q_{W_{k_j},\omega}(d\omega').$$

一方条件 5) より，任意の $\varepsilon>0$ に対して， j_1が存在して， $j, j'\geqq j_1$ならば，任意の ω' に対して，

$$|q_{V,c(W_{k_j};\omega',\omega)}(A)-q_{V,c(W_{k_{j'}};\omega',\omega)}(A)|<\varepsilon.$$

従って， $j, j'\geqq \max(j_0, j_1)$ に対して

$$q_{W_{k_j},\omega}(A\cap B)=\int_B q_{V,c(W_{k_j};\omega',\omega)}(A)\;q_{W_{k_j},\omega}(d\omega')$$

$$=\int_B q_{V,c(W_{k_{j'}};\omega',\omega)}(A)\,q_{W_{k_j},\omega}(d\omega')$$

$$+\int_B\{q_{V,c(W_{k_j};\omega',\omega)}(A)-q_{V,c(W_{k_{j'}};\omega',\omega)}(A)\}\;q_{W_{k_j};\omega}(d\omega').$$

ここで第2項は ε でおさえられる． j' を固定して， $j\to\infty$ とすれば，第1項は

$\int_B q_{V,c(W_{k_{j'}};\omega',\omega)}(A)\,P(d\omega')$ に収束する。このとき左辺はもちろん $P(A\cap B)$ に収束するから， $|P(A\cap B)-\int_B q_{V,\omega'}(A)\,P(d\omega')|<\varepsilon$ 、ε は任意であったから， $P(A\cap B)=\int_B q_{V,\omega}(A)\,P(d\omega)$. Bは$\mathscr{B}_{V^c}$内の cylinder set であったけれども，上式は$\mathscr{B}_{V^c}$ のすべての集合Bについて成立する．故に， $P(A|\mathscr{B}_{V^c})=q_{V,\omega}(A)$ a. e. (P).

2°) $P_n\,\varepsilon\,\mathscr{P}$, $P_n\to P\,(n\to\infty)$ とする． $A\,\varepsilon\,\mathscr{B}_V$， cylinder set $B\,\varepsilon\,\mathscr{B}_{V^c}$ をとる．このとき，任意の $\varepsilon>0$ に対して，Wを十分大きくとれば， 5) によって， すべての ω' に対して $|q_{V,\omega'}(A)-q_{V,c(W;\omega',\omega)}(A)|<\varepsilon$. 但し， ω は任意に固定しておく．

$$P(A\cap B)-\int_B q_{V,\omega'}(A)\,P(d\omega')$$

$$=\{P(A\cap B)-P_n(A\cap B)\}+\{P_n(A\cap B)-\int_B q_{V,\omega'}(A)\,P_n(d\omega')\}$$

$$+\int_B\{q_{V,\omega'}(A)-q_{V,c(W,\omega',\omega)}(A)\}\;P_n(d\omega')$$

$$+\{\int_B q_{V,c(W,\omega',\omega)}(A)\,P_n(d\omega')-\int_B q_{V,c(W,\omega',\omega)}(A)\,P(d\omega)\}$$

Sem. on Probab.
Vol.38 1973年
P1-91

$$+\int_B \{ q_{V,c(W;\omega',\omega)}(A) - q_{V,\omega'}(A) \} P(d\omega').$$

$P_n \varepsilon \mathscr{P}$であるから 第2項＝0. $P_n \to P$だから，第1項，第4項→0. 上に述べたことから，第3項，第5項は ε でおさえられる．従って，

$$P(A \cap B) = \int_B q_{V,\omega'}(A) P(d\omega').$$

すなわち，$P \varepsilon \mathscr{P}$ となり$\mathscr{P}$が弱閉集合であることが示された．

3°) $P_n \varepsilon \mathscr{P}$から収束部分別をとり出すのは，1°)の冒頭の部分と同様に対角線論法でできる．2°)の結果と合わせて，$\mathscr{P}$はコンパクトである．

4°) $\mathscr{P}$が凸であることは自明である． (Q.E.D.)

Proposition 2. 1)式で与えられる Gibbs の条件附確率系は 5)をみたす．

証明. $V \subset W$, $A = \{ \omega ; X(t,\omega) = x_t, \ t \varepsilon V \} \varepsilon \mathscr{A}_V$ ($x_t = 0$又は1) とする．

$$| q_{V,c(W;\omega',\omega)}(A) - q_{V,\omega'}(A) |$$

$$\leqq | q_{V,c(W;\omega',\omega)}(A) - \frac{\Xi(V, c(W;\omega',\omega))}{\Xi(V,\omega')} q_{V,c(W;\omega',\omega)}(A) |$$

$$+ | \frac{\Xi(V, c(W;\omega',\omega))}{\Xi(V,\omega')} q_{V,c(W;\omega',\omega)}(A) - q_{V,\omega'}(A) |$$

$$= \mathrm{I} + \mathrm{II}.$$

$$\mathrm{II} = q_{V,\omega'}(A) \ | \ 1 - \exp[\beta \{ U(A,\omega') - U(A, c(W;\omega',\omega)) \}] \ |$$

$$= q_{V,\omega'}(A) \ | \ 1 - \exp[\beta \sum_{\substack{t \varepsilon V \\ s \notin W}} x_t \{ X(s,\omega') - X(s,\omega) \} U(t-s)] \ |,$$

$$| [\sum_{\substack{t \varepsilon V \\ s \notin W}} x_t \{ X(s,\omega') - X(s,\omega) \} U(t-s)] | \leqq \sum_{\substack{t \varepsilon V \\ s \notin W}} |U(t-s)| \to 0 \ (W \to Z^\nu).$$

従って $\displaystyle \lim_{W \to Z^\nu} \sup_{\omega'} \mathrm{II} = 0.$

$$\mathrm{I} = q_{V,c(W;\omega',\omega)}(A) \ | \ 1 - \frac{\Xi(V, c(W;\omega',\omega))}{\Xi(V,\omega')} |$$

Sem. on Probab.
Vol.38 1973年
P1-91

$$\leqq \left| 1 - \frac{\Xi(V, c(W; \omega', \omega))}{\Xi(V, \omega')} \right|$$

$$\leqq | \Xi(V, \omega') - \Xi(V, c(W; \omega', \omega)) | \qquad (\Xi(V, \omega') \gg 1).$$

状態和 $\Xi(V, c(W; \omega', \omega))$ の各項は，$W \to Z^\nu$ のとき，ω' について一様に状態和 $\Xi(V, \omega')$ の対応する項に収束する．証明はⅡについての同様の議論でできる．$W \to Z^\nu$ でこの状態和は有限和であるから，$\lim_{W \to Z^\nu} \sup_{\omega'} \mathrm{I} = 0.$ (Q.E.D.)

§2. 端点による表現

前§でみたように，$\mathscr{P}$ はコンパクト凸集合であるから Krein-Milman の端点定理により，すべての $P \varepsilon \mathscr{P}$ は端点で表現できる．この§ではこの端点の意味を調べる．単調に Z^ν まで増加する有限集合列 $V_1 \subset V_2 \subset \cdots$，$\cup V_n = Z^\nu$ を任意に固定する。すべての cylinder set A に対して，$\lim_{n \to \infty} q_{V_n, \omega}(A)$ が存在するような ω の全体を Ω_∞ とする。$\Omega_\infty \ \varepsilon \ \mathscr{B}_\infty$ は自明．$\omega \ \varepsilon \ \Omega_\infty$ に対して，$Q_\omega(A) = \lim_{n \to \infty} q_{V_n \omega}(A)$ とおく．Q_ω は $(\Omega, \mathscr{B})$ 上の probability measure に拡張できる．

Proposition 1. §1 の 5) が成立すれば，$Q_\omega \ \varepsilon \mathscr{P}$.
証明は §1, 定理 1 の証明 1°) の後半と同じ．

$\omega \ \varepsilon \ \Omega_\infty$ に対して，$B_\omega = \{ \omega' \ \varepsilon \ \Omega_\infty ; Q_\omega = Q_{\omega'} \}$ とおく．条件 $Q_\omega = Q_{\omega'}$ は，任意の cylinder set A に対して $Q_\omega(A) = Q_{\omega'}(A)$ となることと同値であり，cylinder set は可算個であるから，$B_\omega \ \varepsilon \ \mathscr{B}_\infty$．とくに $\sharp \mathscr{P} = 1$ ならば $\Omega_\infty = \Omega$ となることに注意しよう．実際，$\omega \notin \Omega_\infty$ とすれば，2本の部分列 $\{ n_j \} \{ n'_k \}$ が存在して $\lim q_{V_{n_j}, \omega} \neq \lim q_{V_{n'_k}, \omega}$．右辺も左辺も $\mathscr{P}$ に属する（ §1 定理 1 の証明 1°) を参照）．

Proposition 2. $\omega_0 \ \varepsilon \ \Omega_\infty$，$Q_{\omega_0} \ \varepsilon \ \mathscr{P}$ ならば，$Q_{\omega_0}(B_{\omega_0}) = 0$ 又は 1.
証明．$Q_{\omega_0} \ \varepsilon \ \mathscr{P}$ であるから，$Q_{\omega_0}(A | \mathscr{B}_{V_n^c}) = q_{V_n, \omega}(A)$ a.e. (Q_{ω_0})．左辺は martingale であるから，Doob の収束定理により $Q_{\omega_0}(\Omega_\infty) = 1$．$A \ \varepsilon \ \mathscr{B}_V$，$B \ \varepsilon \ \mathscr{B}_\infty$ $V \subset V_n$ とすると

Sem. on Probab.
Vol.38 1973年
P1-91

$$Q_{\omega_0}(A \cap B) = \int_B q_{V_n,\omega}(A)\, Q_{\omega_0}(d\omega) = \int_{B \cap \Omega_\infty} q_{V_n,\omega}(A)\, Q_{\omega_0}(d\omega).$$

$\lim q_{V_n,\omega}(A) = Q_\omega(A)$ だから $n \to \infty$ として,

$$Q_{\omega_0}(A \cap B) = \int_B Q_\omega(A)\, Q_{\omega_0}(d\omega).$$

上式は cylinder set でない $A \varepsilon \mathcal{B}$ まで拡張できる. 従って $A \varepsilon \mathcal{B}$ に対して, $Q_{\omega_0}(A \mid \mathcal{B}_\infty) = Q_\omega(A)$ a.e. (Q_{ω_0}).

とくに $A = B = B_{\omega_0}$ とおけば

$$Q_{\omega_0}(B_{\omega_0}) = Q_{\omega_0}(B_{\omega_0} \cap B_{\omega_0}) = \int_{B_{\omega_0}} Q_\omega(B_{\omega_0})\, Q_{\omega_0}(d\omega) = Q_{\omega_0}(B_{\omega_0})^2. \qquad \text{(Q.E.D.)}$$

定義. $Q_\omega(B_\omega) = 1$ のとき, $\omega \varepsilon \Omega_\infty$ を regular といい, regular な ω の全体を Ω_r とおく. $\mathcal{P}$ の端点全体を $\mathrm{ext}(\mathcal{P})$ と書くことにする.

定理 1. §1 の 5) が成立するとき, $P \varepsilon \mathcal{P}$ について次の 1)~3) は同値である.

1) $P \varepsilon \mathrm{ext}(\mathcal{P})$.

2) $\mathcal{B}_\infty$ は P について自明な σ-field である.

3) $P = Q_\omega$ となる regular な ω が存在する.

証明. 1°) $0 < P(\widetilde{\Omega}) < 1$ となる $\widetilde{\Omega} \varepsilon \mathcal{B}_\infty$ が存在すると仮定する. $P_{\widetilde{\Omega}}(\cdot) = P(\cdot \cap \widetilde{\Omega})/P(\widetilde{\Omega})$, $P_{\widetilde{\Omega}^c}(\cdot) = P(\cdot \cap \widetilde{\Omega}^c)/P(\widetilde{\Omega}^c)$ とおけば $P_{\widetilde{\Omega}} \neq P_{\widetilde{\Omega}^c}$. $A \varepsilon \mathcal{B}_V$, $B \varepsilon \mathcal{B}_{V^c}$ とすれば,

$$P_{\widetilde{\Omega}}(A \cap B) = P(A \cap B \cap \widetilde{\Omega})/P(\widetilde{\Omega})$$

$$= \frac{1}{P(\widetilde{\Omega})} \int_{B \cap \widetilde{\Omega}} P(A \mid \mathcal{B}_{V^c})\, P(d\omega)$$

$$= \int_B q_{V,\omega}(A) \cdot \frac{1}{P(\widetilde{\Omega})} P(d\omega \cap \widetilde{\Omega})$$

$$= \int_B q_{V,\omega}(A)\, P_{\widetilde{\Omega}}(d\omega).$$

従って $P_{\widetilde{\Omega}} \varepsilon \mathcal{P}$, 同様に $P_{\widetilde{\Omega}^c} \varepsilon \mathcal{P}$. 一方 $P = P(\widetilde{\Omega}) P_{\widetilde{\Omega}} + P(\widetilde{\Omega}^c) P_{\widetilde{\Omega}^c}$ であるから, P は $\mathcal{P}$

Sem. on Probab.
Vol.38 1973年
P1-91

の端点ではない.

2°) $\mathcal{B}_\infty$ は P に関して自明な σ-field とする. 任意の cylinder set A に対して, $Q_\omega(A)$ は $\mathcal{B}_\infty$ − 可測であるから, $Q_\omega(A) = \text{const.}$ a.e. (P). 従って, Ω_A が存在して $\Omega_A \ni \omega_1$, ω_2 ならば, $Q_{\omega_1}(A) = Q_{\omega_2}(A)$ であって, $P(\Omega_A) = 1$. $\overline{\Omega} = \bigcap_A \Omega_A$ とおけば, cylinder set は可算個であるから $P(\overline{\Omega}) = 1$. $\omega_0 \varepsilon \overline{\Omega}$ を任意に固定すると, $P(A \mid \mathcal{B}_\infty) = Q_\omega(A) = Q_{\omega_0}(A)$ a.e. (P). 両辺を P で積分して, $P(A) = Q_{\omega_0}(A)$, すなわち $P = Q_{\omega_0}$. $\overline{\Omega}$ の定義から, $\omega \varepsilon \overline{\Omega}$ ならば, $Q_\omega = Q_{\omega_0}$. 従って $\overline{\Omega} \subset B_{\omega_0}$, 故に $Q_{\omega_0}(B_{\omega_0}) = 1$ すなわち, $\omega_0 \varepsilon \Omega_r$.

3°) $P = Q_{\omega_0}$, $\omega_0 \varepsilon \Omega_r$ とする. $A \varepsilon \mathcal{B}_\infty$ ならば,

$$Q_{\omega_0}(A) = Q_{\omega_0}(A \cap A \cap B_{\omega_0})$$

$$= \int_{A \cap B_{\omega_0}} Q_\omega(A)\, Q_{\omega_0}(d\omega) = Q_{\omega_0}(A)^2.$$

従って, $Q_{\omega_0}(A) = 0$ 又は 1. すなわち, $\mathcal{B}_\infty$ は Q_{ω_0} に関して自明.

4°) $\mathcal{B}_\infty$ は P に関して自明とし, $P = \lambda P_1 + (1-\lambda) P_2$, $P, P_1, P_2 \varepsilon \mathcal{P}$, $0 < \lambda < 1$ とする. $\mathcal{B}_\infty$ は自明であるから, $P(A \mid \mathcal{B}_\infty) = P(A)$. 一方, $P(A \mid \mathcal{B}_\infty) = Q_\omega(A)$. 従って $P(A) = Q_\omega(A)$ a.e. (P). すなわち $P\{\omega\,;\, P(A) = Q_\omega(A)\} = 1$. $0 < \lambda < 1$ であるから, $P_i\{\omega\,;\, P(A) = Q_\omega(A)\} = 1$ $(i = 1, 2)$.

また, $P_i(A \mid \mathcal{B}_\infty) = Q_\omega(A)$ a.e. (P_i) であるから, $P_i(A \mid \mathcal{B}_\infty) = P(A)$ a.e. (P_i) 従って $P_i(A) = P(A)$. よって $P = P_1 = P_2$, これは P が端点であることを意味する.

(Q.E.D.)

系 1. 任意の $P \varepsilon \mathcal{P}$ に対して, $P(\Omega_r) = 1$.

証明. Krein-Milman の端点定理によって, Ω_r 上の probability measure μ が存在して $P = \int_{\Omega_r} Q_\omega \mu(d\omega)$. $\omega \varepsilon \Omega_r$ ならば $B_\omega \subset \Omega_r$ であるから $Q_\omega(\Omega_r) \geqq Q_\omega(B_\omega) = 1$ すなわち, $Q_\omega(\Omega_r) = 1$. 従って, $P(\Omega_r) = \int_{\Omega_r} Q_\omega(\Omega_r)\, \mu(d\omega) = 1$. (Q.E.D.)

系 2. $\mathcal{P}$ の端点は互に singular である.

証明. $\omega_1, \omega_2 \varepsilon \Omega_r$, $Q_{\omega_1} \neq Q_{\omega_2}$ であれば, $B_{\omega_1} \cap B_{\omega_2} = \phi$. Q_{ω_1}, Q_{ω_2} はそれぞれ B_{ω_1}, B_{ω_2} 上にのっている. (regularity の定義) (Q.E.D.)

Sem. on Probab.
Vol.38 1973年
P1-91

$B_\omega(\omega \varepsilon \Omega_r)$ の和集合（可算和とは限らない）で $\mathscr{B}$ に属するものの全体を $\mathscr{B}_r$ とおく． B_ω は互に disjoint だから， $\mathscr{B}_r$ は σ-field になる．

Lemma 1. $\mathscr{B}_r = \sigma\{ Q_\omega(A) ; A \varepsilon \mathscr{B} \}$.

証明. $\{ \omega ; Q_\omega(A) < a \} = \bigcup_{\omega ; Q_\omega(A) < a} B_\omega$ ，左辺は $\mathscr{B}$ に属する故， $\mathscr{B}_r$ に属する．逆に $\cup B_{\omega'}$ $\varepsilon\, \mathscr{B}_r$ とすれば， $Q_\omega(\cup B_{\omega'}) = \chi_{\cup B_{\omega'}}(\omega)$. 従って $\cup B_{\omega'} \varepsilon\, \sigma\{ Q_\omega(A)\}$. (Q.E.D.)

$(\Omega, \mathscr{B})$ 上の probability measure P を $\mathscr{B}_r$ に制限したものを $P|_r$ と書くことにする．

定理 2. §1 の 5) を仮定する．

1） $P \varepsilon \mathscr{P}$ ならば， $P = \int_{\Omega_r} Q_\omega P|_r(d\omega)$.

2） $(\Omega_r, \mathscr{B}_r)$ 上の probability measure μ に対して， $P = \int_{\Omega_r} Q_\omega \mu(d\omega)$ とおけば， $P \varepsilon \mathscr{P}$ ， $P|_r = \mu$.

証明. 1°) $P(A) = \int_{\Omega_r} Q_\omega(A) P(d\omega) = \int_{\Omega_r} Q_\omega(A) P|_r(d\omega)$.

2°) $Q_\omega \varepsilon \mathscr{P} (\omega \varepsilon \Omega_r)$ であって， $\mathscr{P}$ は凸集合であるから， $\int_{\Omega_r} Q_\omega \mu(d\omega) \varepsilon \mathscr{P}$. $\cup B_{\omega'} \varepsilon \mathscr{B}_r$ とすれば， $P(\cup B_{\omega'}) = \int_{\Omega_r} Q_\omega(\cup B_{\omega'})\, \mu(d\omega) = \int_{\Omega_r} \chi_{\cup B_{\omega'}}(\omega)\, \mu(d\omega) = \mu(\cup B_{\omega'})$. (Q.E.D.)

Remark. 上の議論は最初に集合列 $\{V_n\}$ を固定して行ったが，得られた結果は本質的には集合列 $\{V_n\}$ の選び方に依らない．

実際に $\mathscr{P}$ の端点を構成する具体的一般的な方法は知られていない． $\mathscr{P}_\infty = \{ Q_\omega ; \omega \varepsilon \Omega_\infty \}$ とおく．上にみたことにより， §1 の 5) を仮定すれば， $\mathscr{P} \supset \mathscr{P}_\infty \supset \mathrm{ext}(\mathscr{P})$. $\mathscr{P}_\infty$ が左右のどちらかに一致するのか，どちらとも異るのかはわからない． $\mathscr{P}_\infty = \mathrm{ext}(\mathscr{P})$ となる（物理的には無意味な）次の例がある．

例 1. §1 例 1 と同様に D, δ_0, δ_1 をきめる．

Sem. on Probab.
Vol.38 1973年
P1-91

$$q_{V,\omega} = \begin{cases} \delta_1, & \omega \varepsilon D \\ \delta_0, & \omega \notin D \end{cases}$$

とおくと，$\mathscr{P}_\infty = \mathrm{ext}(\mathscr{P}) = \{ \delta_0, \delta_1 \}$.

実際，q が §1 の 2) ～ 4) をみたすことは §1 と同様にしてわかる．$P \varepsilon \mathscr{P}$ とすれば $A \varepsilon \mathscr{B}_V$ に対して，$P(A) = \int q_{V,\omega}(A) P(d\omega) = (\int_D + \int_{D^c}) q_{V,\omega}(A) P(d\omega) = \delta_1(A) P(D) + \delta_0(A) P(D^c)$. $P(D) = \lambda$ とおけば，$P = \lambda\delta_1 + (1-\lambda)\delta_0$．従って，$\mathrm{ext}(\mathscr{P}) = \{ \delta_0, \delta_1 \}$. これが $\mathscr{P}_\infty$ にも等しいことは容易にわかる．

我々の random field と似た構造を持った対象で，$\mathscr{P} = \mathscr{P}_\infty$ に対応する等号の成立するものがある．次の附録でそれについて述べる．

§2. の附録

Ω をコンパクトな距離空間とし，T を Ω から Ω への連続写像とする．$\mathscr{I}$ を Ω 上の $T-$ 不変な probability measure の全体とすると $\mathscr{I}$ はコンパクトな凸集合になる．$\Omega_\infty = \{ \omega ; \exists \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k\omega), \forall f \varepsilon C(\Omega) \}$ とおく．$\omega_0 \varepsilon \Omega_\infty$ とすれば $\lim \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k\omega_0)$ は f の positive linear functional だから，Riesz の定理によって Ω 上の probability measure μ_{ω_0} が存在して，$\lim_{n\to V} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k\omega) = \int_\Omega f d\mu_{\omega_0}$ と表わせる．$\mathscr{I}_\infty = \{ \mu_\omega ; \omega \varepsilon \Omega_\infty \}$ とおけば，明らかに $\mathscr{I} \supset \mathscr{I}_\infty$. $\mathscr{I}$ の端点の全体を $\mathrm{ext}(\mathscr{I})$，$\Omega_r = \{ \omega \varepsilon \Omega_\infty ; \mu_\omega$ は ergodic$\}$ とおく．

定理 1. $\mathscr{I} \ni \mu$ について次の 1) ～ 3) は同値

1) $\mu \varepsilon \mathrm{ext}(\mathscr{I})$.

2) μ は ergodic.

3) $\omega \varepsilon \Omega_r$ が存在して，$\mu = \mu_\omega$.

証明. 1°) μ が ergodic でないとすると，$T-$不変で $0 < \mu(\widetilde{\Omega}) < 1$ なる $\widetilde{\Omega}$ がとれる．$\mu_{\widetilde{\Omega}}(\cdot) = \mu(\cdot \cap \widetilde{\Omega})/\mu(\widetilde{\Omega})$，$\mu_{\widetilde{\Omega}^c}(\cdot) = \mu(\cdot \cap \widetilde{\Omega}^c)/\mu(\widetilde{\Omega}^c)$ とおけば $\mu_{\widetilde{\Omega}}, \mu_{\widetilde{\Omega}^c} \varepsilon \mathscr{I}$. $\mu = \mu(\widetilde{\Omega})\mu_{\widetilde{\Omega}} + \mu(\widetilde{\Omega}^c)\mu_{\widetilde{\Omega}^c}$.

2°) μ は ergodic, $\mu = \lambda\mu_1 + (1-\lambda)\mu_2$ $(0 < \lambda < 1)$ とする. μ は ergodic だから任意の可測集合 A に対して,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \chi_A(T^k\omega) = \mu(A) \qquad \text{a.e. } (\mu).$$

$0 < \lambda < 1$ だから, これより

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \chi_A(T^k\omega) = \mu(A) \qquad \text{a.e. } (\mu_i) \quad (i = 1, 2).$$

いっぽう $\int \lim \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \chi_A(T^k\omega)\mu_i(d\omega) = \mu_i(A)$. 従って $\mu_i(A) = \mu(A)$ すなわち $\mu = \mu_1 = \mu_2$. つまり $\mu \varepsilon \operatorname{ext}(\mathscr{I})$.

3°) μ を ergodic とする. 個別エルゴード定理から, 任意の $f \varepsilon C(\Omega)$ に対して,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k\omega) = \int f\, d\mu \qquad \text{a.e. } (\mu).$$

$C(\Omega)$ は可分であり, 可算 dense な $C(\Omega)$ の部分集合がとれるから,

$$\mu\left\{\omega \,;\, \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k\omega) = \int f\, d\mu,\ {}^{\forall} f \varepsilon C(\Omega)\right\} = 1.$$

上式 { } 内の極限は定義により $\int f\, d\mu_\omega$ と書ける. 従って $\mu = \mu_\omega$. μ_ω は ergodic であるから $\omega \varepsilon \Omega_r$, 従って $\mu(\Omega_r) = 1$.

4°) $\mu = \mu_\omega (\omega \varepsilon \Omega_r)$ ならば μ は定義によって ergodic. (Q.E.D.)

系. $\mu \varepsilon \mathscr{I}$ に対して, $\mu(\Omega_\infty) = \mu(\Omega_r) = 1$.

証明. $\mu(\Omega_\infty) = 1$ は個別エルゴード定理による.

Krein-Milman の定理により, $\mu = \int_{\Omega_r} \mu_\omega \nu(d\omega)$. 故に, $\mu(\Omega_r) = \int_{\Omega_r} \mu_\omega(\Omega_r)\nu(d\omega) = 1$ $(\mu_\omega(\Omega_r) = 1,\ \omega \varepsilon \Omega_r)$. (Q.E.D.)

上の定理から, $\mathscr{I} \supset \mathscr{I}_\infty \supset \operatorname{ext}(\mathscr{I})$ を得る. K をコンパクト距離空間とし, $\Omega = K \times K \times \cdots$, T を Ω 上の shift とすれば, 次の定理が成立する.

定理 2. $\mathscr{I} = \mathscr{I}_\infty$.

Lemma 1. $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ は平均値 0 で互に独立な確率変数とする. 無限大に発散する

Sem. on Probab.
Vol.38 1973年
P1-91

単調増加列 $\{b_n\}$ に対して $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{E[X_j^2]}{b_j^2} < +\infty$ ならば,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{b_n} = 0 \qquad \text{a.e.}$$

証明. 1°) b_n は上記のものとし, $\{x_n\}$ は $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_j}{b_j}$ を収束させる数列とする. このとき任意の $\varepsilon>0$ に対して N が存在して, $n_1, n_2 \geqq N$ ならば $\left|\sum_{j=n_1}^{n_2} \frac{x_j}{b_j}\right| < \varepsilon$. $n>N$ のとき,

$$\left|\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{b_n}\right| \leqq \left|\frac{x_1+\cdots+x_N}{b_n}\right| + \left|\frac{x_{N+1}+\cdots+x_n}{b_n}\right| .$$

右辺第1項は $n\to\infty$ のとき0に収束する. 第2項は,

$$\left|\frac{x_{N+1}+\cdots+x_n}{b_n}\right| = \left|\frac{x_{N+1}}{b_{N+1}}\cdot\frac{b_{N+1}}{b_n}+\cdots+\frac{x_{n-1}}{b_{n-1}}\cdot\frac{b_{n-1}}{b_n}+\frac{x_n}{b_n}\right| .$$

$s_k = \sum_{j=1}^{N} \frac{x_{N+j}}{b_{N+j}}$, $\phi_k = \frac{b_{N+k}}{b_n}$ とおくと, $|s_k| < \varepsilon$ $(1\leqq k\leqq n-N)$, $\phi_1 \leqq \phi_2 \leqq \cdots \leqq \phi_{n-N} = 1$. 従って第2項は,

$$\left| s_1\phi_1 + (s_2-s_1)\phi_2 + \cdots + s_{n-N}\,\phi_{n-N} \right|$$

$$= \left| (\phi_1-\phi_2)\,s_1 + \cdots + (\phi_{n-N-1}-\phi_{n-N})\,s_{n-N-1} + \phi_{n-N}\,s_{n-N} \right|$$

$$\leqq \max |s_k| \left\{ (\phi_2-\phi_1)+(\phi_3-\phi_2)+\cdots+(\phi_{n-N}-\phi_{n-N-1})+\phi_{n-N} \right\}$$

$$\leqq \varepsilon\,(2-\phi_1) \leqq 2\varepsilon .$$

このように第2項も $n\to\infty$ のとき0に収束する.

従って, $\lim_{n\to\infty} \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{b_n} = 0$ を得た.

2°) $Y_j = \frac{X_j}{b_j}$, $S_n = \sum_{j=1}^{n} Y_j$ とおくと, Kolmogorov の不等式により

$$P\left\{ \max_{N\leqq i\leqq n} |S_i - S_N| \geqq \varepsilon \right\} \leqq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{i=N+1}^{n} E[Y_i^2] \leqq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{E[X_i^2]}{b_i^2} .$$

Nを十分大きくとれば $\sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{E[X_i^2]}{b_i^2} < \varepsilon^3$ とできる．このとき

$$P\{\max_{N \leqq i \leqq n} |S_i - S_N| \geqslant \varepsilon\} < \varepsilon .$$

$n \to \infty$ として

$$P\{\sup_{N \leqq n} |S_n - S_N| \geqslant \varepsilon\} < \varepsilon .$$

$\varepsilon = \frac{1}{2^k}$ とし，それに対応するNをN_kとかくと($N_k \uparrow \infty$ として良い)

$$P\{\sup_{N_k \leqq n} |S_n - S_{N_k}| \geqslant \frac{1}{2^k}\} < \frac{1}{2^k} .$$

Borel-Cantelli の lemmaにより確率1で,有限個の k をのぞいて $\sup_{N_k \leqq n} |S_n - S_{N_k}| < \frac{1}{2^k}$.

従って S_n は収束する 1°) により, $\frac{X_1 + \cdots + X_n}{b_n}$ は0に収束する. (Q.E.D.)

<u>Lemma 2.</u> $E[X_i] = A,\ |X_i| \leqq B \quad (i = 1, 2, \cdots)$.

$Y_j = \sum_{i=\frac{j(j-1)}{2}+1}^{\frac{j(j+1)}{2}} X_i$ とおいたとき, $\{Y_j\}$ は互に独立とする．このとき

$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} \longrightarrow A \qquad \text{a.s.}$$

<u>証明.</u> $b_j = \frac{j(j+1)}{2}$ とおく． $E[(Y_j - jA)^2] \leqq j^2 (B + |A|)^2$ だから

$$\sum_j \frac{E[(Y_j - jA)^2]}{b_j^2} < +\infty .$$

Lemma 1 により,

$$\frac{Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n}{b_n} \longrightarrow A \qquad (\text{a.s.}).$$

Sem. on Probab.
Vol.38 1973年
P1-91

自然数 n に対して， $b_m \leqq n < b_{m+1}$ となるように m をとる． $b_{m+1} = b_m + (m+1)$ であるから $1 \leqq \frac{n}{b_m} < 1 + \frac{m+1}{b_m} = 1 + \frac{2}{m}$ ． 従って $b_m \sim n$． また， $X_1 + X_2 + \cdots + X_n = X_{b_1} + (X_{b_1+1} + X_{b_2}) + \cdots + (X_{b_k+1} + \cdots + X_{b_{k+1}}) + \cdots$

$$+ (X_{b_{m-1}+1} + \cdots + X_{b_m}) + (X_{b_m+1} + \cdots + X_n)$$

$$= Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_m + (X_{b_m+1} + \cdots + X_n).$$

$\left|\frac{X_{b_m+1} + \cdots + X_n}{n}\right| \leqq \frac{m}{n} B \to 0 \ (n \to \infty)$ だから， $\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \frac{Y_1 + \cdots + Y_m}{n} \to 0$

$(n \to \infty)$． 従って，

$$\frac{Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_m}{b_m} = \frac{Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_m}{n} \cdot \frac{n}{b_m} \to A \quad (n \to \infty)$$

より，

$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} \to A \qquad (\text{a.e.}). \qquad\qquad (\text{Q.E.D.})$$

定理２の証明． $\mu \in \mathscr{I}$ とする． Y_i ($i = 1, 2 \cdots$) を互に独立で分布 μ をもった， Ωー 値確率変数列とし， $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{P})$ を Y_i を定義する確率空間とする． $m(i)$ を $\frac{m(i)\{m(i)-1\}}{2} < i \leqq \frac{m(i)\{m(i)+1\}}{2}$ で定義し， $s(i) = i - \frac{m(i)\{m(i)-1\}}{2}$ とおく． Ω 上の連続関数 f に対し， $X_{i,f} = f(T^{s(i)} Y_{m(i)})$ とおくと，

$$\widetilde{E}[X_{i,f}] = \widetilde{E}[f(Y_{m(i)})] = \int_\Omega f \, d\mu,$$

$$|X_{i,f}| \leqq \|f\| \qquad (\text{a.e.})$$

が成立し，

$\widetilde{Y}_{j,f} = \sum_{i=\frac{j(j-1)}{2}+1}^{\frac{j(j+1)}{2}} X_{i,f} \ (j = 1, 2, \cdots)$ とおけば， $\{\widetilde{Y}_{j,f}\}$ に互に独立であるから，

Sem. on Probab.
Vol.38 1973年
P1-91

Lemma 2 により，

$$\frac{X_{1,f}+\cdots+X_{n,f}}{n} \longrightarrow \int_{\Omega} f\,d\mu \qquad (a.\,s.).$$

従って，$\widetilde{\omega}\ \varepsilon\ \widetilde{\Omega}$ が存在して，任意の $f\ \varepsilon\ C(\Omega)$ に対して　($C(\Omega)$ は可分だから)

$$\frac{X_{1,f}(\widetilde{\omega})+\cdots+X_{n,f}(\widetilde{\omega})}{n} \longrightarrow \int_{\Omega} f\,d\mu\,.$$

いま，π_k を Ω から第 k 座標への projection とし，$y_k^i=\pi_k\,Y_i\,(\widetilde{\omega})$，　$\alpha_i = y_{s(i)}^{m(i)} = \pi_{s(i)}\,Y_{m(i)}\,(\widetilde{\omega})$ とおく．　α_i は下図のように動く．

$$\begin{array}{ccccccc}
y_1^1 & & y_2^1 & & y_3^1 & & y_4^1 \quad \cdots \\
\downarrow & & & & & & \\
y_1^2 & \rightarrow & y_2^2 & & y_3^2 & & y_4^2 \quad \cdots \\
 & \swarrow & & & & & \\
y_1^3 & \rightarrow & y_2^3 & \rightarrow & y_3^3 & & y_4^3 \quad \cdots \\
 & & & \swarrow & & & \\
y_1^4 & \rightarrow & y_2^4 & \rightarrow & y_3^4 & \rightarrow & y_4^4 \quad \cdots
\end{array}$$

$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots)$ とおく．　$s(i)+j \leqq m(i)$ なる j をとると，$s(i)+j=s(i+j)$，$m(i+j)=m(i)$．　従って

$$\pi_j\,(T^{s(i)}Y_{m(i)}(\widetilde{\omega}))=\pi_{s(i)+j}(Y_{m(i)}(\widetilde{\omega}))$$

$$=\pi_{s(i+j)}(Y_{m(i+j)}(\widetilde{\omega}))$$

$$=\alpha_{i+j} = \pi_j T^i\alpha.$$

従って　f が tame で $f(\omega)=f(\pi_1\omega,\pi_2\omega,\cdots,\pi_k\omega)$ とかけ，$s(i)+k\leqq m(i)$ ならば，

$$X_{i,f}(\widetilde{\omega}) \equiv f(T^{s(i)}\,Y_{m(i)}(\widetilde{\omega}))$$

$$=f(\pi_1T^{s(i)}Y_{m(i)}(\widetilde{\omega}),\ \pi_2T^{s(i)}Y_{m(i)}(\widetilde{\omega}),\ \cdots,\ \pi_kT^{s(i)}Y_{m(i)}(\widetilde{\omega}))$$

$$=f(\pi_1T^i\alpha,\ \pi_2T^i\alpha,\ \cdots,\ \pi_kT^i\alpha)=f(T^i\alpha).$$

$\triangle_i=X_{i,f}(\widetilde{\omega})-f(T^i\alpha)$ とおく．($s(i)+k\leqq m(i)$ ならば上にみた事により $\triangle_i=0$)

Sem. on Probab.
Vol.38 1973年
P1-91

$$\sum_{i=1}^{n} X_{i,f}(\widetilde{\omega}) - \sum_{i=1}^{n} f(T^i\alpha)$$

$$= \triangle_1 + (\triangle_2 + \triangle_3) + (\triangle_3 + \triangle_4 + \triangle_5) + \cdots$$

$$+ \left(\triangle_{\frac{m(i)\{m(i)-1\}}{2}+1} + \cdots + \triangle_{\frac{m(i)\{m(i)-1\}}{2}}\right) + \cdots$$

$$\cdots + \left(\triangle_{\frac{m(n)\{m(n)-1\}}{2}+1} + \cdots + \triangle_n\right).$$

従って

$$\left|\sum_{i=1}^{n} X_{i,f}(\widetilde{\omega}) - \sum_{i=1}^{n} f(T^i\alpha)\right| \leqq \sum_{i=1}^{n} |\triangle_i|$$

$$\leqq m(n) \cdot k \cdot 2\|f\|.$$

これより，

$$\lim \frac{\sum_{i=1}^{n} f(T^i\alpha)}{n} = \lim \frac{\sum X_{1,f}(\widetilde{\omega})}{n} = \int_{\Omega} f\,d\mu$$

すなわち　$\mu = \mu_\alpha$ を得る．　(Q.E.D.)

§3. Shift-invariant fields

$\omega \varepsilon \Omega = \{0, 1\}^{Z^\nu}$, $s \varepsilon Z^\nu$, $V \subset Z^\nu$ に対して shift τ_s を通常のように $\tau_s\omega(\cdot) = \omega(\cdot - s)$, $\tau_s V = V + s$ で定義する．この § では条件附確率系 q が shift で不変であると仮定する．すなわち，

$$q_{\tau_s V, \tau_s\omega}(\tau_s A) = q_{V,\omega}(A).$$

Ω_∞, Q_ω の定義を少し変えて(シューセイ主義！)，

$$\Omega_\infty = \{\omega\ ;\ {}^\exists\lim_{n\to\infty} q_{V_n,\omega}(A) = {}^\exists\lim_{n\to\infty} q_{\tau_s V_n,\omega}(A),\ {}^\forall s \varepsilon Z^\nu,\ {}^\forall \text{cylinder set } A\}$$

とおき，$\omega \varepsilon \Omega_\infty$ に対して上の極限を $Q_\omega(A)$ とかく　このとき，

$$\tau_s Q_\omega(A) \equiv Q_\omega(\tau_s^{-1} A)$$

$$= \lim_{n\to\infty} q_{V_n,\omega}(\tau_s^{-1} A)$$

Sem. on Probab.
Vol.38 1973年
P1-91

$$= \lim_{n\to\infty} q_{\tau_s V_n,\, \tau_s\omega}(A)$$

$$= Q_{\tau_s\omega}(A).$$

ここで一般に q が shift-invariant であっても $\tau_s Q_\omega = Q_\omega$ とはならないことに注意する．例は第２章 §3 で与える．$\mathscr{I} = \{ P \in \mathscr{P} \,;\, \tau_s P = P,\ {}^{\forall} s \in Z^\nu \}$ とおこう．

定理 1. §1 の 5) 式を仮定すれば，$\mathscr{I}$ は空でないコンパクト凸集合である．

証明．$\mathscr{I}$ がコンパクトな凸集合であることは，$\mathscr{P}$ がそうであることから明らか．空でないことを示そう．$P \in \mathscr{P}$ を任意に固定する．W_n を原点を中心とし各辺が座標軸に平行で長さ $2n$ の立方体とし，$P_n = \dfrac{1}{|W_n|} \sum_{t \in W_n} \tau_t P$ とおく．q が shift-invariant であるから $\tau_t P \in \mathscr{P}$，従って $P_n \in \mathscr{P}$．一方 $\mathscr{P}$ はコンパクトであったから，てきとうな部分列 $n_j \uparrow \infty$ をとれば，P_{n_j} は収束する．この極限を P_∞ $(\in \mathscr{P})$ とかこう．

$$\tau_s P_\infty - P_\infty = \lim_{j\to\infty} \frac{1}{|W_n|} \sum_{t \in W_{n_j}} (\tau_{s+t} P - \tau_t P)$$

$$= \lim \frac{1}{|W_{n_j}|} \Big(\sum_{t \in W_{n_j}+s} \tau_t P - \sum_{t \in W_{n_j}} \tau_t P \Big).$$

任意の cylinder set A に対して

$$\frac{1}{|W_{n_j}|} \Big| \sum_{t \in W_{n_j}+s} \tau_t P(A) - \sum_{t \in W_{n_j}} \tau_t P(A) \Big| \leqq \frac{|W_{n_j} \ominus (W_{n_j}+s)|}{|W_{n_j}|} \longrightarrow 0 \quad (j \to \infty).$$

従って $\tau_s P_\infty = P_\infty$ すなわち $P_\infty \in \mathscr{I}$．　(Q E.D)

$\omega \in \Omega_r$ に対して $\Phi(\omega) = \{ s \in Z^\nu \,;\, Q_{\tau_s\omega} = Q_\omega \}$ とおくと，$\Phi(\omega)$ は Z^ν の subgroup となる．$\mathscr{S}$ を Z^ν の subgroup の全体とすれば，$\mathscr{S}$ は可算無限集合である．$\varphi \in \mathscr{S}$ に対して，$\Omega_{r,\varphi} = \{ \omega \,;\, \Phi(\omega) = \varphi \}$ とおけば，$\Omega_{r,\varphi} \in \mathscr{B}_r$．$\omega \in \Omega_{r,\varphi}$，$s \in \varphi$ とすれば，任意の $t \in Z^\nu$ に対して，$Q_{\tau_s \tau_t \omega}(A) = Q_{\tau_t \tau_s \omega}(A) = Q_{\tau_s \omega}(\tau_t^{-1} A) = Q_\omega(\tau_t^{-1} A) = Q_{\tau_t\omega}(A)$．すなわち，$\tau_t \omega \in \Omega_{r,\varphi}$，従って $\Omega_{r,\varphi}$ は shift-invariant である．

$\mathscr{I}$ の端点をきめよう．P を $\mathscr{I}$ の端点とする。§2 定理２により，　$P = \int_{\Omega_r} Q_\omega P(d\omega) =$

Sem. on Probab.
Vol.38 1973年
P1-91

$\sum_{\varphi \varepsilon \mathscr{S}} \int_{\Omega_{r,\varphi}} Q_\omega P(d\omega)$. 一方上記のことから,

$$\tau_s \int_{\Omega_{r,\varphi}} Q_\omega P(d\omega) = \int_{\Omega_{r,\varphi}} Q_{\tau_s \omega} P(d\omega) = \int_{\Omega_{r,\varphi}} Q_\omega (\tau_s P)(d\omega) = \int_{\Omega_{r,\varphi}} Q_\omega P(d\omega).$$

各 $\int_{\Omega_{r,\varphi}} Q_\omega P(d\omega)$ は shift-invariant であるから, もし $P(\Omega_{r,\varphi})$ が 0 でなければその逆数を掛けて normalize することにより $\mathscr{I}$ に入れることが出来る. P は $\dot{\mathscr{I}}$ の端点であったから, このような(0でないような)ものは唯1つきまる. それを改めて φ としよう. $\sum_{\varphi' \varepsilon \mathscr{S}} P(\Omega_{r,\varphi'}) = P(\Omega_r) = 1$ であるから, $P(\Omega_{r,\varphi}) = 1$. Z^ν を φ で割った剰余群 Z^ν/φ の元を $\{t_0, t_1, t_2, \cdots\}$ とならべる. $\omega \varepsilon \Omega_{r,\varphi}$ を任意にとり

$$\tau_{t_0} Q_\omega, \quad \tau_{t_1} Q_\omega, \quad \tau_{t_2} Q_\omega, \quad \cdots$$

とならべ, $\omega' \varepsilon \Omega_{r,\varphi}$ を $Q_{\omega'}$ が上記のいずれとも異るようにえらべば,

$$\tau_{t_0} Q_{\omega'}, \quad \tau_{t_1} Q_{\omega'}, \quad \tau_{t_2} Q_{\omega'}, \quad \cdots$$

のすべては上の列のいずれとも異る. この procedure を続けると

$$\begin{array}{llll} \tau_{t_0} Q_{\omega_1}, & \tau_{t_1} Q_{\omega_1}, & \tau_{t_2} Q_{\omega_1}, & \cdots \\ \tau_{t_0} Q_{\omega'_2}, & \tau_{t_1} Q_{\omega'_2}, & \tau_{t_2} Q_{\omega'_2}, & \cdots \\ \tau_{t_0} Q_{\omega''_3}, & \tau_{t_1} Q_{\omega''_3}, & \tau_{t_2} Q_{\omega''_3}, & \cdots \\ \cdots, & \cdots, & \cdots, & \cdots \end{array}$$

が得られる. ここで shift τ_{t_0} の方を固定して $D = \{\tau_{t_0}\omega, \tau_{t_0}\omega', \tau_{t_0}\omega'', \cdots\}$ とおけば, $D \varepsilon \mathscr{B}_r$, $\Omega_{r,\varphi} = \bigcup_j \tau_{t_j} D$, $\tau_{t_j} D \cap \tau_{t_i} D = \phi$ ($j \neq i$). 従って, $1 = P(\Omega_{r,\varphi}) = \sum_j P(\tau_j D) = \sum_j P(D)$ (P は shift-invariant であるから). これより $\#(Z^\nu/\varphi) < +\infty$, $P(D) = \#(Z^\nu/\varphi)^{-1}$ を得る。D が $\mathscr{B}_r$ 内で shift-invariant なものの和に分割できれば, P が端点でなくなるから, D は $\mathscr{B}_r$ の atom すなわち, てきとうな $\omega_0 \varepsilon \Omega_r$ に対して, $D = B_{\omega_0}$.

$$P = \sum_{s \varepsilon Z^\nu/\varphi} \int_{\tau_s B_{\omega_0}} Q_\omega P(d\omega) = \sum_{s \varepsilon Z^\nu/\varphi} \int_{B_{\tau_s \omega_0}} Q_\omega P(d\omega) = \sum_{s \varepsilon Z^\nu/\varphi} Q_{\tau_s \omega_0} P(B_{\omega_0})$$

$$= \frac{1}{\#(Z^\nu/\varphi)} \sum_{s \varepsilon Z^\nu/\varphi} Q_{\tau_s \omega_0}.$$

上式の右辺を $Q^{(0)}_{\omega_0}$ とおく. また, $\Omega^{(0)}_r = \{\omega \varepsilon \Omega_r ; \#(Z^\nu/\Phi(\omega)) < +\infty\}$ とおき, $\mathscr{I}$ の端点

Sem. on Probab.
Vol.38 1973年
P1-91

の全体を ext $(\mathscr{S})$ とかくことにする.

定理 2. §1の5)を仮定すると, $P \varepsilon \mathscr{S}$ について下記 1)~3) は同値になる.

1) $P \varepsilon$ ext $(\mathscr{S})$.

2) Pは shift を ergodic にする.

3) $P=Q_{\omega}^{(0)}$ となる $\omega \varepsilon \Omega_r^{(0)}$ が存在する.

証明. 1°) 1)から3)を出すのは上で証明ずみ.

2°) $P=Q_{\omega_0}^{(0)}=\lambda P_1+(1-\lambda)P_2\ (P_1, P_2 \varepsilon \mathscr{S})$ とする. このとき, §2 定理2により $P_i=\int_{\Omega_r} Q_{\omega}\, \mu_i(d\omega)$. μ の一意性により

$$\lambda\mu_1+(1-\lambda)\mu_2=\sum_{s \varepsilon Z^{\nu}/\varphi} \frac{\delta_{\tau_s \omega_0}}{\#(Z^{\nu}/\varphi)} .$$

ところが右辺は shift-invariant な自明でない分割をもたない. 従って $\lambda\mu_1+(1-\lambda)\mu_2$は自明である. ($\lambda=0$ 又は 1 又は $\mu_1=\mu_2$)

3°) 1)と2)の同値は, §2の附録 定理1と同様である. そこで使った Birkhoff のエルゴード定理を, 多パラメーターの Wiener のエルゴード定理におきかえれば良い.

系 1. 任意の $P \varepsilon \mathscr{S}$ に対して, $P(\Omega_r^{(0)})=1$.

証明. 端点 $Q_{\omega_0}^{(0)}\ (\omega_0 \varepsilon \Omega_r^{(0)})$ について言えば十分である. $\Omega_{r,\Phi(\omega_0)} \subset \Omega_r^{(0)}$, $Q_{\omega_0}^{(0)}(\Omega_{r,\Phi(\omega_0)})=1$ より自明. (Q.E.D.)

$$B_{\omega}^{(0)}=\bigcup_{s \varepsilon Z^{\nu}/\Phi(\omega)} B_{\tau_s \omega}\ (\omega \varepsilon \Omega_r^{(0)}),\quad \mathscr{B}_r^{(0)}=\{\bigcup_{\omega} B_{\omega}^{(0)}\} \cap \mathscr{B},\quad P|_{\mathscr{B}_r^0}=P|_r^0$$

とおく.

系 2. 1) $P \varepsilon \mathscr{S}$ならば, $P=\int_{\Omega_r^{(0)}} Q_{\omega}^{(0)}\ P|_r^0(d\omega)$.

2°) $(\Omega_r^{(0)}, \mathscr{B}_r^0)$ 上の probability measure μ に対して, $P=\int_{\Omega_r^{(0)}} Q_{\omega}^{(0)} \mu(d\omega)$ とおけば $P \varepsilon \mathscr{S}$, $P|_r^0=\mu$.

証明 は §2 定理2と同様.

Sem. on Probab.
Vol.38 1973年
P1-91

§4. エルゴード定理

$P \in \mathscr{I}$ と shift τ_s に対するエルゴード定理は Wiener によって与えられたものの special case であるから問題はない．しかし，物理的に重要な random field で shift-invariantでないものがある．しかも$\mathscr{P}$ の端点で invariant でないものに対しては，shift は singular operator である（§2 定理1系1）．このような場合にエルゴード定理を拡張しようとするのがこの§の目的であるというフウに考えます．

f を Ω上の有界，Borel 可測関数，σ を直方体の増大列で Z^ν に収束するものとする．$\Lambda_{f,\sigma} = \{\omega\,;\exists \lim_{\substack{V \in \sigma \\ V \to Z^\nu}} \frac{1}{|V|} \sum_{s \in V} f(\tau_s \omega)\}$ とおく．

定理．　$\omega \in \Omega_r^{(0)}$ のとき，且そのときにかぎり，任意の f, σ に対して $Q_\omega(\Lambda_{f,\sigma}) = 1$.

証明．1°)　$\omega_0 \in \Omega_r^{(0)}$ とすると，$\#(Z^\nu/\Phi(\omega_0)) < +\infty$，$Q_{\omega_0}^{(0)}$ は shift について不変で ergodic である．従って，$A = \{\lim_{\substack{V \in \sigma \\ V \to Z^\nu}} \frac{1}{|V|} \sum_{s \in V} f(\tau_s \omega) = \int f\, dQ_{\omega_0}^{(0)}\}$ とおけば，Wienerのエルゴード定理により，$Q_{\omega_0}^{(0)}(A) = 1$. ところでこの式の左辺は，

$$\frac{1}{\#(Z^\nu/\Phi(\omega_0))} \sum_{s \in Z^\nu/\Phi(\omega_0)} Q_{\tau_s \omega_0}(A)$$

$$= \frac{1}{\#(Z^\nu/\Phi(\omega_0))} \sum_{s \in Z^\nu/\Phi(\omega_0)} Q_{\omega_0}(\tau_s^{-1} A).$$

集合 A は shift で不変であるから，上式は $Q_{\omega_0}(A)$ に等しい．

2°)　$\omega_0 \notin \Omega_r^{(0)}$ とする．すなわち，$\#(Z^\nu/\Phi(\omega_0)) = \infty$．簡単のため次元 ν は2とする．

$f(\omega) = \sum_{t \in Z^\nu/\Phi(\omega_0)} a_t\, \chi_{\tau_t B_{\omega_0}}(\omega)$ とおくと，Q_{ω_0} の support は B_{ω_0} だから，

$$t - s \in \Phi(\omega_0) \quad ならば \quad f(\tau_s \omega) = a_t \qquad a.e.$$

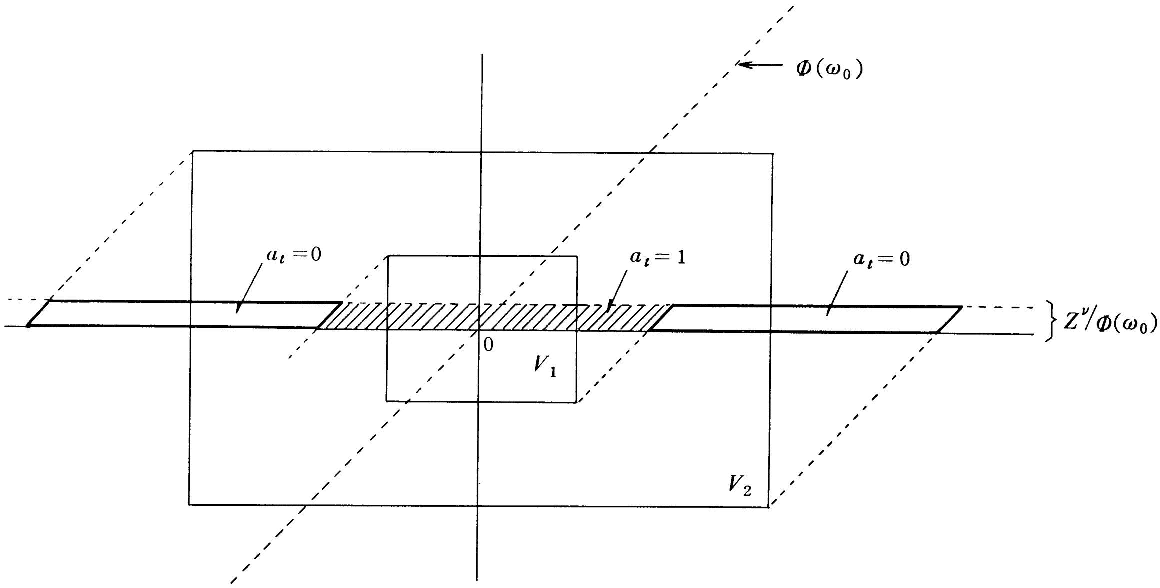
従って，

$$\frac{1}{|V|} \sum_{s \in V} f(\tau_s \omega) = \frac{1}{|V|} \sum_{t \in Z^\nu/\Phi(\omega_0)} \#\{s \in V\,;\, t - s \in \Phi(\omega_0)\}\, a_t\,.$$

右辺を $r(V)$ とおこう．V_1, V_2, a_t を図のようにきめる．$r(V_1) = 1$，V_2 を十分大きくとれば $r(V_2) < \frac{1}{3}$．V_2 を囲む V_3，V_4　… とそこでの a_t の値を同様にきめていけば　$r(V_{2n+1})$

Sem. on Probab.
Vol.38 1973年
P1-91

$>\frac{2}{3}$, $r(V_{2n})<\frac{1}{3}$ とすることができる．このとき，$\frac{1}{|V|}\sum_{s\varepsilon V} f(\tau_s\omega)=r(V)$ は確率1で収束しない．　　(Q.E.D.)



$\{Q_\omega ; \omega \varepsilon \Omega_r^{(0)}\}$ の convex hull を $\mathscr{P}^{(0)}$ とおく．

系．　$P=\int_{\Omega_r^{(0)}} Q_\omega \, d\mu(\omega)$　$(\varepsilon \mathscr{P}^{(0)})$ に対して，

$$P\{\lim_{\substack{V\varepsilon\sigma \\ V\to Z^\nu}} \frac{1}{|V|}\sum_{s\varepsilon V} f(\tau_s\omega)=\int f(\omega')\,Q_\omega^{(0)}(d\omega')\}=1.$$

関数 f を tame なものに制限したとき，上の命題はすべての $P\ \varepsilon\ \mathscr{P}$ に対して成立するだろうか．

自己批判．　§4 の記述に誤りがありました．本来全面的に書き換えるべきですが，原稿が印刷にまわった後ですので，製版代がかさみセミナー出版局にゴメイワクをおかけするようになるかも知れませんので，ここに修正箇所を明らかにして自己批判したいと思います．（「××修正主義フンサイ」，「ジコヒハンすりゃいいってもんじゃネエゾ」という声あり．）　σ は直方体の増大列とし

Sem. on Probab.
Vol.38 1973年
P1-91

ましたが，Wiener のエルゴード定理はこの case を含んでいません．σ を各辺が座標軸に平行な直方体の増大列で Z^{ν} に収束するものとすれば L^2 関数に対して個別エルゴード定理が成立することが，福島正俊氏によって証明されていますので，これを使うことにすれば最小限の修正で済むと思います．冒頭で「問題はない」としたところがマサに問題でした．

§5. エントロピー

P を $(\Omega, \mathscr{B})$ 上の probability measure とする．$V \subset Z^{\nu}$ に対して，

$$S(V) = -\sum_{A \varepsilon \mathscr{A}_V} P(A) \log P(A)$$

とおく．ここで $\mathscr{A}_V$ は §1 と同様 $\mathscr{B}_V$ の atom の全体である．

<u>Lemma 1</u>. i) $S(V) \geqq 0$.

ii) $V_1 \supset V_2$ ならば，$S(V_1) \geqq S(V_2)$.

iii) $S(V_1 \cup V_2) - S(V_1) - S(V_2) + S(V_1 \cap V_2) \leqq 0$.

<u>証明</u>. i) は自明.

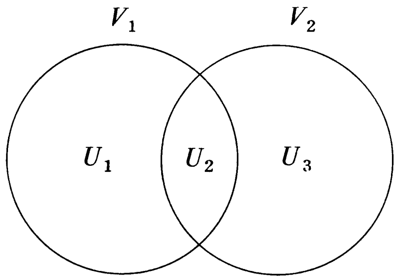
ii) 任意の $A \varepsilon \mathscr{A}_{V_2}$ は $A = \sum A_j' \ (A_j' \varepsilon \mathscr{A}_{V_1})$ と分割できる．

$$-P(A) \log P(A) - \{-\sum_j P(A_j') \log P(A_j')\}$$

$$= -\sum_j P(A_j') \{\log P(A) - \log P(A_j')\} \leqq 0.$$

従って $-P(A) \log P(A) \leqq -\sum P(A_j') \log P(A_j')$. この両辺を $\mathscr{B}_{V_2}$ の atom A について加えれば良い．

iii) 下図のように U_1, U_2, U_3 をきめる．



$$S(U_1\cup U_2\cup U_3)-S(U_1\cup U_2)$$

$$=-\sum_{\substack{A_j\varepsilon\mathcal{A}_{U_j}\\(j=1,2,3)}} P(A_1\cap A_2\cap A_3)\log P(A_1\cap A_2\cap A_3)+\sum_{\substack{A_j\varepsilon\mathcal{A}_{U_j}\\(j=1,2)}} P(A_1\cap A_2)\log P(A_1\cap A_2)$$

$$=-\sum_{\substack{A_j\varepsilon\mathcal{A}_{U_j}\\(j=1,2,3)}} P(A_1\cap A_2\cap A_3)\,\{\log P(A_1\cap A_2\cap A_3)-\log P(A_1\cap A_2)\}$$

$$=\sum_{A_2,A_3} P(A_2)\sum_{A_1}\frac{P(A_1\cap A_2)}{P(A_2)}\,\{-\frac{P(A_1\cap A_2\cap A_3)}{P(A_1\cap A_2)}\log\frac{P(A_1\cap A_2\cap A_3)}{P(A_1\cap A_2)}\}$$

$$\leqq\sum_{A_2,A_3} P(A_2)\{-\sum_{A_1}\frac{P(A_1\cap A_2)}{P(A_2)}\;\frac{P(A_1\cap A_2\cap A_3)}{P(A_1\cap A_2)}\}\log\{\sum_{A_1}\frac{P(A_1\cap A_2)}{P(A_2)}\;\frac{P(A_1\cap A_2\cap A_3)}{P(A_1\cap A_2)}\}$$

$$=-\sum_{A_2,A_3} P(A_2\cap A_3)\log\frac{P(A_2\cap A_3)}{P(A_2)}$$

$$=-\sum_{A_2,A_3} P(A_2\cap A_3)\log P(A_2\cap A_3)+\sum_{A_2} P(A_2)\log P(A_2)=S(U_2\cup U_3)-S(U_2).$$

途中の不等式は関数 $-x\log x$ の convexity による.

$a=(a_1,a_2,\cdots,a_\nu)\;\varepsilon\;Z^\nu$ $(a_j>0)$ に対して, $\Lambda(a)=\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_\nu)\;\varepsilon\;Z^\nu;\;0\leqq x_j<a_j\}$ とおく. Π_a を $\Lambda(a)$ 及びその平行移動したものでできる Z^ν の分割とする. $V\subset Z^\nu$ に対し, $n_V^+(a)=\#\{\Lambda\;\varepsilon\;\Pi_a\;;\;\Lambda\cap V\neq\phi\}$, $n_V^-(a)=\#\{\Lambda\;\varepsilon\;\Pi_a\;;\;\Lambda\subset V\}$ とおく.

V が van Hove の意味で Z^ν に発散するとは, 任意の a に対して,

$$\lim_{V\uparrow Z^\nu}\frac{n_V^+(a)}{n_V^-(a)}=1$$

であることとする. このとき V の関数 $f(V)$ の極限 (もしあれば) を $H\text{-}\lim\limits_{V\uparrow Z^\nu} f(V)$ とかくことにする.

定理 1.
$H\text{-}\lim\limits_{V\uparrow Z^\nu}\dfrac{S(V)}{|V|}$ が存在する. これを $s(P)$ とかくことにし, Pのエントロピーという.

証明. Lemma 1 の ii), iii) により, $S(V)\leqq n_V^+(a)\,S(\Lambda(a))$. 一方 $|V|\geqq n_V^-(a)\,|\Lambda(a)|$ であるから, 任意の a に対して,

$$\frac{S(V)}{|V|}\leqq\frac{n^+(a)}{n^-(a)}\;\frac{S(\Lambda(a))}{|\Lambda(a)|}\quad.$$

Sem. on Probab.
Vol.38 1973年
P1-91

両辺の上極限をとって,

$$H\text{-}\overline{\lim}\ \frac{S(V)}{|V|} \leqq \frac{S(\Lambda(a))}{|\Lambda(a)|}\ .$$

従って

$$H\text{-}\overline{\lim}\ \frac{S(V)}{|V|} \leqq \inf_{a} \frac{S(\Lambda(a))}{|\Lambda(a)|} \equiv s\,.$$

以下 s が極限であることを示す.

V に含まれる Π_a の元に辞書式に番号をつける. それの n 番目までの和集合を Γ_n とおく. このとき, 任意の n に対して

$$(*)\quad S(\Gamma_{n+1}) - S(\Gamma_n) \geqq s\,|\Lambda(a)|\,.$$

が成立する. これの証明は後まわしにすることにして, V に含まれる Π_a の元全体の和集合を $\Gamma_V^-(a)$ とおけば, この不等式から,

$$S(V) \geqq S(\Gamma_V^-(a)) \geqq s\, n_V^-(a)\ |\Lambda(a)|\,.$$

従って,

$$H\text{-}\underline{\lim}\ \frac{S(V)}{|V|} \geqq s\cdot H\text{-}\underline{\lim}\ \frac{n_V^-(a)}{|V|}\cdot|\Lambda(a)|$$

$$\geqq s\cdot H\text{-}\lim \frac{n_V^-(a)}{n_V^+(a)} = s\,.$$

いま $(*)$ が成立しないとしよう. このときある n とある $\varepsilon>0$ に対して

$$S(\Gamma_{n+1}) - S(\Gamma_n) < (s-\varepsilon)\ |\Lambda(a)|\,.$$

$m_1, m_2, \cdots, m_\nu$ を自然数とする. $b=(m_1a_1, m_2a_2, \cdots, m_\nu a_\nu)$ に対して $\Lambda(b)$ 内の Π_a の元に辞書式に番号をつける. N 番目までの和を $\triangle_N$ とかく. このときてきとうな N をとれば,

(☆) Γ_{n+1} を $\triangle_{N+1}$ 内に平行移動させ, Γ_{n+1} の最後の直方体を $\triangle_{N+1}$ の最後の直方体に onto に移すことができる.

Γ_n', Γ_{n+1}' を Γ_n, Γ_{n+1} の Γ の平行移動による image とすると,

Sem. on Probab.
Vol.38 1973年
P1-91

$$\triangle_N \cup \Gamma'_{n+1} = \triangle_{N+1} \quad , \qquad \triangle_N \cap \Gamma'_{n+1} = \Gamma'_n \, .$$

ここで Lemma 1 の iii) をつかうと

$$S(\triangle_{N+1}) - S(\triangle_N) - S(\Gamma_{n+1}) + S(\Gamma_n)$$

$$= S(\triangle_N \cup \Gamma'_{n+1}) - S(\triangle_N) - S(\Gamma'_{n+1}) + S(\triangle_N \cap \Gamma'_{n+1}) \leqq 0 .$$

従って, $S(\triangle_{N+1}) - S(\triangle_N) \leqq S(\Gamma_{n+1}) - S(\Gamma_n) \leqq (s - \varepsilon) \mid \Lambda(a) \mid$.

一方 ☆ が成立しないような N については,

$$S(\triangle_{N+1}) - S(\triangle_N) \leqq S(\triangle_{N+1} - \triangle_N) = S(\Lambda(a)).$$

$m_1, m_2, \cdots, m_\nu$ を十分大きくすれば, 大部分の N について☆が成立するから,

$$S(\Lambda(b)) = \sum_N \{ S(\triangle_{N+1}) - S(\triangle_N) \}$$

$$\leqq \left(s - \frac{\varepsilon}{2} \right) \mid \Lambda(b) \mid$$

とできる. これより,

$$\frac{S(\Lambda(b))}{\mid \Lambda(b) \mid} \leqq \; s - \frac{\varepsilon}{2} \; .$$

これは s の定義に反する. (Q.E.D.)

定理 2. $s(P)$ は P の affine functional である.

証明. s が convex であることは, 関数 $-x \log x$ の convexity からわかる. 逆向きの不等式をみよう.

$$-(\alpha+\beta) \log(\alpha+\beta) = (\alpha+\beta) \log \frac{1}{\alpha+\beta} \leqq \alpha \log \frac{1}{\alpha} + \beta \log \frac{1}{\beta} = -(\alpha \log \alpha + \beta \log \beta)$$

より,

$$S_{\lambda P_1 + (1-\lambda) P_2}(V) = -\sum_{A \varepsilon \mathcal{A}_V} \{ \lambda P_1(A) + (1-\lambda) P_2(A) \} \log \{ \lambda P_1(A) + (1-\lambda) P_2(A) \}$$

$$\leqq -\sum \{ \lambda P_1(A_1) \log \lambda P_1(A) + (1-\lambda) P_2(A) \log (1-\lambda) P_2(A) \}$$

Sem. on Probab.
Vol.38 1973年
P1-91

$$= \lambda S_{P_1}(V) + (1-\lambda) S_{P_2}(V) - \lambda \log \lambda - (1-\lambda) \log(1-\lambda).$$

両辺を $|V|$ で割って $V \uparrow Z^{\nu}$ とすれば, $s(\lambda P_1 + (1-\lambda) P_2) \leqq \lambda s(P_1) + (1-\lambda) s(P_2)$ を得る. (Q.E.D.)

上で定義したエントロピーを Gibbsian random field について具体的に計算してみよう. P を potential U からきまるものとする.

Lemma 2. $u_V \equiv \sum_{\substack{t \in V \\ s \notin V}} |U(t-s)|$ とおけば $u_V = o(|V|)$ ($V \uparrow Z^{\nu}$, 但し, V は直方体).

証明. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, 立方体 V_ε が存在して, $\sum_{t \notin V_\varepsilon} |U(t)| < \varepsilon$. いま V_ε の一辺を $l = l(\varepsilon)$ とする. V を十分大きな直方体とし, 各辺が V より $2l$ だけ短い直方体を V' とする.

$$\begin{aligned} u_V &= \sum_{\substack{t \in V' \\ s \notin V}} |U(t-s)| + \sum_{\substack{t \in V \setminus V' \\ s \notin V}} |U(t-s)| \\ &\leqq |V'| \sum_{u \notin V_\varepsilon} |U(u)| + (|V| - |V'|) \sum_{t \in Z^{\nu}} |U(t)| \\ &\leq |V'| \cdot \varepsilon + (|V| - |V'|) \sum_{t \in Z^{\nu}} |U(t)|. \end{aligned}$$

$|V'| \sim |V|$, $|V| - |V'| = o(|V|)$ に注意して両辺を $|V|$ で割れば良い. (Q.E.D.)

$A \in \mathscr{A}_V$ とすれば $q_{V,\omega}(A) = \Xi(V,\omega)^{-1} \exp[\beta\{\mu N(A) - U(A) - U(A,\omega)\}]$.
ここで $U(A,\omega) = \sum_{\substack{t \in V \\ s \notin V}} x_t \omega(s) U(t-s)$ ($x_t = 0$ or 1) とかけるから $|U(A,\omega)| \leqq u_V$.

従って $\Xi(V,0) e^{-\beta u_V} \leqq \Xi(V,\omega) = \sum_{A \in \mathscr{A}_V} \exp[\beta\{\mu N(A) - U(A) - U(A,\omega)\}]$

$$\leqq \Xi(V,0) e^{\beta u_V}.$$

これより,

$$\begin{aligned} P(A) &= \int q_{V,\omega}(A) P(d\omega) \\ &\leqq e^{2\beta u_V} \Xi(V,0)^{-1} \exp[\beta\{\mu N(A) - U(A)\}], \end{aligned}$$

$$P(A) \geqq e^{-2\beta u_V} \Xi(V,0)^{-1} \exp[\beta\{\mu N(A) - U(A)\}].$$

Sem. on Probab.
Vol.38 1973年
P1-91

$S_P(V)$ を計算すれば,

$$-2\beta u_V + \log \Xi(V,0) - \beta \sum_{A \varepsilon \mathcal{A}_V} \{\mu N(A) - U(A)\} P(A) \leqq S_P(V)$$
$$\leqq 2\beta u_V + \log \Xi(V,0) - \beta \sum_{A \varepsilon \mathcal{A}_V} \{\mu N(A) - U(A)\} P(A)。$$

Lemma 3. $P \varepsilon \mathcal{G}^{(0)}$ ならば $\lim_{V \uparrow Z^\nu} \frac{1}{|V|} \sum_{A \varepsilon \mathcal{A}_V} N(A) P(A)$, $\lim_{V \uparrow Z^\nu} \frac{1}{|V|} \sum_{A \varepsilon \mathcal{A}_V} U(A) P(A)$ が存在する. 但し, $\mathcal{P}^{(0)}$ を Gibbsian case には $\mathcal{G}^{(0)}$ とかくことにする.

証明. $f(\omega) = X(\omega, 0)$ とおくと, 前節のエルゴード定理により, $\frac{1}{|V|} \sum_{A \varepsilon \mathcal{A}_V} N(A) P(A) = E\left[\frac{1}{|V|} \sum_{s \varepsilon V} f(\tau_s \omega)\right] \to E[\hat{f}]$ を得る. $g(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{t \varepsilon Z^\nu} \omega(0)\omega(t)$ とおくと, $g(\tau_s \omega) = \frac{1}{2} \sum_{t \varepsilon Z^\nu} \omega(s)\omega(t) U(t-s)$. 従って,

$$\sum_{s \varepsilon V} g(\tau_s \omega) = \frac{1}{2} \sum_{s \varepsilon V} \left(\sum_{t \varepsilon V} + \sum_{t \notin V} \right) \omega(s)\omega(t) U(t-s).$$

第2項は Lemma 2 により $o(|V|)$. 第1項を $U_V(\omega)$ とおけば, $E[U_V(\omega)] = \sum_{A \varepsilon \mathcal{A}_V} U(A)\ P(A)$. またエルゴード定理により, $\lim \frac{1}{|V|} \sum_{A \varepsilon \mathcal{A}_V} U(A) P(A) = \lim E\left[\frac{1}{|V|} \sum_{s \varepsilon V} g(\tau_s \omega)\right] = E[\hat{g}]$.

また, 第3章 §1 で示すように $\lim \frac{\log \Xi(V,0)}{|V|} = \chi(\mu,\beta)$ が存在する. これより我々は次の定理を得る.

定理 3. $P \varepsilon \mathcal{G}^{(0)}$ ならば, $s(P) = -\beta\{\mu E[\hat{f}] - E[\hat{g}]\} + \chi(\mu,\beta)$.

Sem. on Probab.
Vol.38 1973年
P1-91

第2章 Random fields の一意性

§1. Random fields の一意性

$(\Omega,\mathscr{B})$ 上の probability measure の全体を $\mathscr{M}$ とする. $\mathscr{M}$ から $\mathscr{M}$ への mapping $U_t(t \in Z^\nu)$ を次のようにきめる.

$$\begin{cases} \mathscr{B}_{Z^\nu\setminus\{t\}} \text{ 上で } U_tP=P, \\ U_tP(X_t=x\,|\,\mathscr{B}_{Z^\nu\setminus\{t\}})=q_{\{t\},\omega}(X_t=x) \quad (x=0 \text{ 又は } 1). \end{cases}$$

Z^ν の元に番号をてきとうにつけて $t_1, t_2, \cdots, t_n, \cdots$ とし,

$$UP=\lim_{n\to\infty} U_{t_n}U_{t_{n-1}}\cdots U_{t_1}P$$

とおく. 但し, 収束は弱収束である. $P \in \mathscr{P}$ ならば $UP=P$ である.

μ を Z^ν で定義された非負値関数とする.

<u>定義</u>. 1) $P, \widetilde{P} \in \mathscr{M}$, S を Z^ν の有限部分集合とする. 次の命題が成り立つとき, $(P,\widetilde{P})$ は S 上で estimate μ を持つという.

任意の $\varepsilon>0$, 任意の $V\subset S$ に対して $\lambda_V \geqq 0$, $P^V, \widetilde{P}^V \in \mathscr{M}$ が存在して次の3条件をみたす.

i) $\mathscr{B}_V$ 上で $P^V=\widetilde{P}^V$ ($\mathscr{B}_\phi=\{\phi,\Omega\}$ とする).

ii) $P=\sum_{V\subset S}\lambda_V P^V$, $\widetilde{P}=\sum_{V\subset S}\lambda_V\widetilde{P}^V$.

iii) $\sum_{V:\,t\notin V\subset S}\lambda_V \leqq \mu(t)+\varepsilon$.

2) $(P,\widetilde{P})$ が任意の有限集合 S 上で estimate μ を持つとき, Z^ν 上で estimate μ を持つという.

3) $r(P,\widetilde{P})=\inf_{\mu}\sup_{t\in Z^\nu}\mu(t)$ とおく. 但し, inf は $(P,\widetilde{P})$ の持つ estimate μ に関してとる. このとき, 明らかに $\mu(t)\equiv 1$ は estimate であるから $r(P,\widetilde{P})\leqq 1$.

Sem. on Probab.
Vol.38 1973年
P1-91

Lemma 1. $\hat{S}\subset S$ を有限集合とする．$(P,\widetilde{P})$ が S 上で estimate μ を持てば，同じ estimate を $\hat{S}$ 上で持つ．

証明. $S=\hat{S}\cup\{u\}$ のときに証明すれば十分である．仮定より，任意の $\varepsilon>0$，任意の $V\subset\hat{S}$ に対して λ_V, $\lambda_{V\cup\{u\}}$, P^V, $P^{V\cup\{u\}}$, $\widetilde{P}^V$, $\widetilde{P}^{V\cup\{u\}}$ が存在して，i)〜iii) をみたす。$\hat{\lambda}_V=\lambda_V+\lambda_{V\cup\{u\}}$ とおく．$\hat{\lambda}_V\neq 0$ ならば，$\hat{P}^V=\frac{1}{\hat{\lambda}_V}(\lambda_V P^V+\lambda_{V\cup\{u\}}P^{V\cup\{u\}})$, $\hat{\widetilde{P}}^V=\frac{1}{\hat{\lambda}_V}(\lambda_V\widetilde{P}^V+\lambda_{V\cup\{u\}}\widetilde{P}^{V\cup\{u\}})$ とおき，$\hat{\lambda}_V=0$ ならば，$\hat{P}^V=\hat{\widetilde{P}}^V=\delta_0$ とおく．$\hat{\lambda}_V$, $\hat{P}^V$, $\hat{\widetilde{P}}^V$ に対して，$\hat{S}$ における条件 i)〜iii) が成立する． (Q.E.D.)

Lemma 2. 任意の定数 $\delta>0$ に対して，$(P,\widetilde{P})$ が Z^ν 上で estimate $\mu(t)+\delta$ を持つならば，estimate μ も持つ．

証明は定義から明らか．

$\rho(P,\widetilde{P})$ を P-$\widetilde{P}$ の total variation とする．すなわち，$\rho(P,\widetilde{P})=\sup_E|P(E)-\widetilde{P}(E)|$ $=\frac{1}{2}\sum_{A:\mathrm{atom}}|P(A)-\widetilde{P}(A)|=|\,1-\sum_{A:\mathrm{atom}}P(A)\wedge\widetilde{P}(A)|$. P の $\mathscr{B}_S$ 上への制限を P_S とおく．

Lemma 3. $(P,\widetilde{P})$ が S 上で estimate μ を持てば $\rho(P_S,\widetilde{P}_S)\leqq\sum_{t\in S}\mu(t)$.

証明. 任意の $\varepsilon>0$ をとる．$(\lambda_V, P^V, \widetilde{P}^V)$ を i)〜iii) をみたすものとする．$P=\sum_{V\subset S}\lambda_V P^V\geqq\lambda_S P^S$, $\widetilde{P}\geqq\lambda_S\widetilde{P}^S$, $\mathscr{B}_S$ 上で（すなわち $\mathscr{A}_S$ 上で）$P^S=\widetilde{P}^S$ であるから，

$$
\begin{aligned}
\rho(P_S,\widetilde{P}_S) &= 1-\sum_{A\in\mathscr{A}_S}P(A)\wedge\widetilde{P}(A)\\
&\leqq 1-\sum_{A\in\mathscr{A}_S}\lambda_S P^S(A)=1-\lambda_S=\sum_{V;\,V\neq S}\lambda_V\\
&\leqq \sum_{t\in S}\ \sum_{V;\,t\notin V\subset S}\lambda_V\\
&\leqq \sum_{t\in S}(\mu(t)+\varepsilon)=\sum_{t\in S}\mu(t)+|S|\,\varepsilon.
\end{aligned}
$$

(Q.E.D.)

系. $r(P,\widetilde{P})=0$ ならば，$P=\widetilde{P}$.

Sem. on Probab.
Vol.38 1973年
P1-91

$s, u \varepsilon Z^{\nu}$ に対して $\rho_{s,u} = \sup \left\{ \rho(q_{\{s\},\omega}(\cdot),\ q_{\{s\},\widetilde{\omega}}(\cdot))\ ;\ t \neq u \text{ に対して } \omega(t) = \widetilde{\omega}(t) \right\}$ とおく.

定理. 第1章 §1 5) を仮定する. $\alpha \equiv \sup_{s} \sum_{u : u \neq s} \rho_{s,u} < 1$ ならば $\# \mathscr{P} = 1$.

この定理の証明のためには $r(UP, U\widetilde{P}) \leqq \alpha r(P, \widetilde{P})$ を示せばよい. なぜなら, $P, \widetilde{P} \varepsilon \mathscr{P}$ とすれば, $UP = P$, $U\widetilde{P} = \widetilde{P}$ であるから, $r(P, \widetilde{P}) \leqq \alpha r(P, \widetilde{P})$ 従って $r(P, \widetilde{P}) = 0$. 上にみたことから $P = \widetilde{P}$ を得る.

Lemma 4. X を有限集合, Y を可測空間, $P(x, y)$, $\widetilde{P}(x, y)$ $(x \varepsilon X,\ y \varepsilon Y)$ を x について X 上の probability measure, y について可測とし, λ, $\widetilde{\lambda}$ を Y 上の probability measure とする. このとき,

$$P(\cdot) = \int P(\cdot, y)\, \lambda(dy), \quad \widetilde{P}(\cdot) = \int \widetilde{P}(\cdot, \widetilde{y})\, \widetilde{\lambda}(d\widetilde{y})$$

とおけば,

$$\rho(P, \widetilde{P}) \leqq \sup_{y, \widetilde{y}} \rho(P(\cdot, y), \widetilde{P}(\cdot, \widetilde{y})).$$

証明.

$$P(\cdot) = \iint P(\cdot, y)\, \lambda(dy)\, \widetilde{\lambda}(d\widetilde{y}), \quad \widetilde{P}(\cdot) = \iint \widetilde{P}(\cdot, \widetilde{y})\, \lambda(dy)\, \widetilde{\lambda}(d\widetilde{y})$$

とかくことができる.

$$\begin{aligned} \rho(P, \widetilde{P}) &= \frac{1}{2} \sum_{x \varepsilon X} |P(x) - \widetilde{P}(x)| \\ &\leqq \iint \frac{1}{2} \sum_{x \varepsilon X} |P(x, y) - \widetilde{P}(x, \widetilde{y})|\ \lambda(dy)\, \widetilde{\lambda}(d\widetilde{y}) \\ &= \iint \rho(P(\cdot, y), \widetilde{P}(\cdot, \widetilde{y}))\ \lambda(dy)\, \widetilde{\lambda}(d\widetilde{y}) \\ &\leqq \sup_{y, \widetilde{y}} \rho(P(\cdot, y), \widetilde{P}(\cdot, \widetilde{y})). \end{aligned}$$

(Q.E.D.)

Lemma 5. 定理と同じ条件を仮定する.

Sem. on Probab.
Vol.38 1973年
P1-91

$$\mu_s(t) = \begin{cases} \mu(t), & t \neq s \\ \sum_{u: u \neq s} \mu(u) \rho_{s,u}, & t = s \end{cases}$$

とおく．$(P, \widetilde{P})$ が Z^ν 上で estimate μ を持てば，$(U_s P,\ U_s \widetilde{P})$ は Z^ν 上で estimate μ_s を持つ．

証明. 1°) Lemma 2 により，任意の $\delta > 0$ に対して，estimate $\mu_s + \delta$ を持つことを言えば良い．従って，任意の有限集合 S' 上で estimate $\mu_s + \delta$ を持つことを示そう． いま，$\sup_s \sum_{u: u \neq s} \rho_{s,u} < 1$ が成立しているから，有限集合 $S \supset S'$ が存在して，$\sum_{u \notin S \cup \{s\}} \rho_{s,u} < \delta$ となる．Lemma 1により，$S \cup \{s\}$ 上で estimate $\mu_s + \delta$ を持つことを言えばよい． $S \not\ni s$ としておく．

仮定から，$(P, \widetilde{P})$ は estimate μ を持つから，任意の $\varepsilon > 0$，任意の $V \subset S$ に対して $(\lambda_V, P^V, \widetilde{P}^V)$ が存在して，条件 i)～iii) をみたす．$P = \sum_{V \subset S} \lambda_V P^V$，$\widetilde{P} = \sum_{V \subset S} \lambda_V \widetilde{P}^V$ であるから，$U_s P = \sum_{V \subset S} \lambda_V U_s P^V$，$U_s \widetilde{P} = \sum_{V \subset S} \lambda_V U_s \widetilde{P}^V$． $A \in \mathscr{A}_V$ に対して，

$$P^{V,A} = \begin{cases} P^V(\cdot \cap A) P^V(A)^{-1}, & P^V(A) \neq 0 \text{ のとき} \\ \delta_{\omega_A}, & P^V(A) = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

とおく．ω_A は A に属する任意の元．また $r_{V,A} = P^V(A)$ とおく． $\widetilde{P}^{V,A}$ も同様に定義する．$P^{V,A}$，$\widetilde{P}^{V,A}$ は $\mathscr{B}_V$ 上では atom A 上の delta-measure である．従って，$\mathscr{B}_V$ 上で $P^{V,A} = \widetilde{P}^{V,A}$． $\mathscr{A}_V$ 上で $P^V = \widetilde{P}^V$ であるから，$r_{V,A}$ は双方に共通になる．このとき，

$$P^V = \sum_{A \in \mathscr{A}_V} r_{V,A} P^{V,A}, \quad \widetilde{P}^V = \sum_{A \in \mathscr{A}_V} r_{V,A} \widetilde{P}^{V,A}$$

であるから，$U_s P^V = \sum_A r_{V,A} U_s P^{V,A}$，$U_s \widetilde{P}^V = \sum_A r_{V,A} U_s \widetilde{P}^{V,A}$ となる．$s \notin U \supset V$ より $s \notin V$，$\mathscr{B}_V$ 上で $P^V = \widetilde{P}^V$ であることをあわせて，$\mathscr{B}_V$ 上で $U_s P^{V,A} = P^{V,A} = \widetilde{P}^{V,A} = U_s P^{V,A}$.

2°) $E \in \mathscr{B}_{\{s\}}$ に対して

$$U_s P^{V,A}(E) = \int q_{\{s\},\omega}(E) P^{V,A}(d\omega)$$

$$= \int_A q_{\{s\},\omega}(E) P^{V,A}(d\omega).$$

同様に $U_s \widetilde{P}^{V,A}(E) = \int_A q_{\{s\},\omega}(E) \widetilde{P}^{V,A}(d\omega)$.

Lemma 4 により，

Sem. on Probab.
Vol.38 1973年
P1-91

$$\rho\left((U_s P^{V,A})_{\{s\}},\ (U_s P^{V,A})_{\{s\}}\right)$$

$$\leqq \sup_{\omega,\tilde{\omega}\in A} \rho(q_{\{s\},\omega},\ q_{\{s\},\tilde{\omega}})$$

$$\leqq \sup_{\omega,\tilde{\omega};\,\omega(t)=\tilde{\omega}(t),\,t\in V} \rho(q_{\{s\},\omega},\ q_{\{s\},\tilde{\omega}}).$$

$(V\cup\{s\})^c=\{u_1,u_2,\cdots,u_n,\cdots\}$ とならべる．ω_n を次のように定義する．

$$\omega_0=\omega,$$

$$\omega_1(t)=\begin{cases}\omega_0(t), & t\neq u_1,\\ \tilde{\omega}(u_1), & t=u_1,\end{cases}$$

$$\vdots$$

$$\omega_n(t)=\begin{cases}\omega_{n-1}(t), & t\neq u_n,\\ \tilde{\omega}(u_n), & t=u_n.\end{cases}$$

このとき，$\rho(q_{s,\omega},\ q_{s,\tilde{\omega}})\leqq \sum_{k=1}^{n}\rho(q_{s,\omega_{k-1}},\ q_{s,\omega_k})+\rho(q_{s,\omega_n},\ q_{s,\tilde{\omega}})$. $n\to\infty$ のとき，第1章 §1 5) によって，$\rho(q_{s,\omega_n},\ q_{s,\tilde{\omega}})\to 0$. 従って，

$$\rho\left((U_s P^{V,A})_{\{s\}},\ (U_s \tilde{P}^{V,A})_{\{s\}}\right)\leqq \rho(q_{s,\omega},\ q_{s,\tilde{\omega}})$$

$$\leqq \sum_{k=1}^{\infty}\rho(q_{s,\omega_{k-1}},\ q_{s,\omega_k})$$

$$\leqq \sum_{k=1}^{\infty}\rho_{s,u_k}=\sum_{u\notin V\cup\{s\}}\rho_{s,u}<1.$$

いま，$f(x)=U_s P^{V,A}(X_s=x)$. $\tilde{f}(x)=U_s\tilde{P}^{V,A}(X_s=x)$ $(x=0,1)$, $\gamma^{V,A}=\sum_{x=0,1} f(x)\wedge\tilde{f}(x)$ とおくと，

$$\gamma^{V,A}=1-\rho(f(\cdot),\ \tilde{f}(\cdot))$$

$$=1-\rho\left((U_s P^{V,A})_{\{s\}},\ (U_s\tilde{P}^{V,A})_{\{s\}}\right)$$

$$\geqq 1-\sum_{u\notin V\cup\{s\}}\rho_{s,u}>0.$$

$$P^{V,A,x}=\begin{cases}U_s P^{V,A}(\cdot\cap\{X_s=x\})\,f(x)^{-1}, & f(x)\neq 0 \text{ のとき}\\ \delta_{\omega_{A,x}}, & f(x)=0 \text{ のとき}\end{cases}$$

とおく．但し，$\omega_{A,x}$ は $A\cap\{x_s=x\}$ に属する任意の元．$\tilde{P}^{V,A,x}$ も同様に定義する．$P^{V,A,x}$

$\widetilde{P}^{V,A,x}$ は $\mathcal{B}_{V\cup\{s\}}$ では atom $A\cap\{X_s=x\}$ 上の delta measure である．従って $\mathcal{B}_{V\cup\{s\}}$ 上で $P^{V,A,x}=\widetilde{P}^{V,A,x}$．定義により

$$U_sP^{V,A}=\sum_x f(x)\,P^{V,A,x},\quad U_s\widetilde{P}^{V,A}=\sum_x \widetilde{f}(x)\,\widetilde{P}^{V,A,x}.$$

3°) $R^{V,A}=\dfrac{1}{\gamma^{V,A}}\displaystyle\sum_x\{f(x)\wedge\widetilde{f}(x)\}P^{V,A,x}$, $\widetilde{R}^{V,A}=\dfrac{1}{\gamma^{V,A}}\sum\{f(x)\wedge\widetilde{f}(x)\}\widetilde{P}^{V,A,x}$

とおくと，上のことから，$\mathcal{B}_{V\cup\{s\}}$ 上で $R^{V,A}=\widetilde{R}^{V,A}$．

さらに $\gamma^{V,A}<1$ のとき

$$Q^{V,A}=\frac{1}{1-\gamma^{V,A}}\sum\{f(x)-f(x)\wedge\widetilde{f}(x)\}P^{V,A,x},$$

$$\widetilde{Q}^{V,A}=\frac{1}{1-\gamma^{V,A}}\sum\{\widetilde{f}(x)-f(x)\wedge\widetilde{f}(x)\}\widetilde{P}^{V,A,x}$$

とおくと，

$$Q^{V,A}=\frac{1}{1-\gamma^{V,A}}\{U_sP^{V,A}-\gamma^{V,A}R^{V,A}\},$$

$$\widetilde{Q}^{V,A}=\frac{1}{1-\gamma^{V,A}}\{U_s\widetilde{P}^{V,A}-\gamma^{V,A}\widetilde{R}^{V,A}\}.$$

となるから，$\mathcal{B}_V$ 上で $Q^{V,A}=\widetilde{Q}^{V,A}$．$\gamma^{V,A}=1$ のときはてきとうな delta measure でおきかえておく．以上の結果をまとめて，

$$\begin{aligned}
U_sP^V &= \sum_{A\in\mathcal{A}_V} r_{V,A}\,U_sP^{V,A}\\
&= \sum_{A\in\mathcal{A}_V}\sum_x r_{V,A}\,f(x)\,P^{V,A,x}\\
&= \sum_{A,x} r_{V,A}\{f(x)\wedge\widetilde{f}(x)\}P^{V,A,x}+\sum_{A,x} r_{V,A}\{f(x)-f(x)\wedge\widetilde{f}(x)\}P^{V,A,x}\\
&= \sum_A r_{V,A}\,\gamma^{V,A}R^{V,A}+\sum_A r_{V,A}(1-\gamma^{V,A})\,Q^{V,A},\\
U_s\widetilde{P}^V &= \sum_A r_{V,A}\,\gamma^{V,A}\widetilde{R}^{V,A}+\sum_A r_{V,A}(1-\gamma^{V,A})\,\widetilde{Q}^{V,A}.
\end{aligned}$$

$\gamma_V=\sum_A r_{V,A}\,\gamma^{V,A}$, $R^V=\dfrac{1}{\gamma^V}\sum r_{V,A}\,\gamma^{V,A}R^{V,A}$, $Q^V=\dfrac{1}{1-\gamma^V}\displaystyle\sum_A r_{V,A}(1-\gamma^{V,A})Q^{V,A}$

とおく．$\widetilde{R}^V$, $\widetilde{Q}^V$ も同様に定義する．このとき，

Sem. on Probab.
Vol.38 1973年
P1-91

$$U_s P^V = \gamma^V R^V + (1-\gamma^V) Q^V, \quad U_s \widetilde{P}^V = \gamma^V \widetilde{R}^V + (1-\gamma^V) \widetilde{Q}^V,$$

$$\mathscr{B}_{V\cup\{s\}} \text{ 上で } R^V = \widetilde{R}^V, \quad \mathscr{B}_V \text{ 上で } Q^V = \widetilde{Q}^V.$$

また，$\gamma^V = \sum_A r_{V,A}\,\gamma^{V,A} \geqq \sum_A r_{V,A}\left(1-\sum_{u\notin V\cup\{s\}}\rho_{s,u}\right) = 1-\sum_{u\notin V\cup\{s\}}\rho_{s,u}$.

4°）従って $(U_s P, U_s\widetilde{P})$ が次のように分解された．

$$U_s P = \sum_{V\subset S}\lambda_V \gamma^V R^V + \sum_{V\subset S}\lambda_V (1-\gamma^V) Q^V,$$

$$U_s \widetilde{P} = \sum_{V\subset S}\lambda_V \gamma^V \widetilde{R}^V + \sum_{V\subset S}\lambda_V (1-\gamma^V) \widetilde{Q}^V.$$

すなわち，$\overline{\lambda}_V = \lambda_V(1-\gamma^V)$，$\overline{\lambda}_{V\cup\{s\}} = \lambda_V\gamma^V$，$\overline{P}^V = Q^V$．$\overline{P}^{V\cup\{s\}} = R^V$，$\widetilde{\overline{P}}^V = Q^V$，$\widetilde{\overline{P}}^{V\cup\{s\}} = \widetilde{R}^V$ とおくことにより

$$U_s P = \sum_{W\subset S\cup\{s\}}\overline{\lambda}^W \overline{P}^W, \qquad U_s\widetilde{P} = \sum_{W\subset S\cup\{s\}}\overline{\lambda}^W \widetilde{\overline{P}}^W.$$

$t \neq s$ とすると

$$\begin{aligned}
\sum_{W:\,t\notin W\subset S\cup\{s\}}\overline{\lambda}_W &= \Big(\sum_{W:\,t\notin W\subset S} + \sum_{\substack{V:\,t\notin W\\ s\in W}}\Big)\overline{\lambda}_W \\
&= \sum_{t\notin V\subset S}\lambda_V(1-\gamma^V) + \sum_{t\notin V\subset S}\lambda_V\gamma^V \\
&= \sum_{t\notin V\subset S}\lambda_V < \mu(t)+\varepsilon = \mu_s(t)+\varepsilon < (\mu_s(t)+\delta)+\varepsilon.
\end{aligned}$$

一方 $\displaystyle\sum_{W:\,s\notin W\subset S\cup\{s\}}\overline{\lambda}_W = \sum_{V\subset S}\lambda_V(1-\gamma^V)$

$$\begin{aligned}
&\leqq \sum_{V\subset S}\lambda_V \sum_{u\notin V\cup\{s\}}\rho_{s,u} \\
&= \sum_{u:\,u\neq s}\ \sum_{V:\,u\notin V\subset S}\lambda_V\rho_{s,u} \\
&= \Big(\sum_{u\in S} + \sum_{u\notin S\cup\{s\}}\Big)\sum_{u\notin V\subset S}\lambda_V\rho_{s,u} \\
&= \sum_{u\in S}\rho_{s,u}\sum_{u\notin V\subset S}\lambda_V + \sum_{u\notin S\cup\{s\}}\rho_{s,u} \\
&\leqq \sum_{u\in S}\rho_{s,u}(\mu(u)+\varepsilon)+\delta \leqq (\mu_s(s)+\delta)+\varepsilon.
\end{aligned}$$

(Q.E.D.)

Sem. on Probab.
Vol.38 1973年
P1-91

系. 定理と同じ条件を仮定する.

$\overline{\mu}(s)=\sum_{u\neq s}\mu(u)\,\rho_{s,u}$とおく. $(P,\widetilde{P})$がZ^{ν}上でestimate μを持てば$(UP,U\widetilde{P})$はestimate $\overline{\mu}$を持つ. 従って$r(UP,U\widetilde{P})\leqq\alpha r(P,\widetilde{P})$.

証明. Sを有限集合とし, S上でestimate $\overline{\mu}$を持つことを示す. operater Uを定義するときにZ^{ν}を$\{t_1, t_2,\cdots, t_n,\cdots\}$とならべた. $S=\{t_{k_1}, t_{k_2},\cdots, t_{k_n}\}$とする. Lemma 5の操作で$(\cdots((\mu_{t_{k_1}})_{t_{k_2}})\cdots)_{t_{k_n}}=\widetilde{\mu}$とおくと$S$上では$\widetilde{\mu}=\overline{\mu}$である. $\mathcal{B}_S$上では,

$$UP=U_{t_{k_n}}U_{t_{k_{n-1}}}\cdots U_{t_k}P,\qquad U\widetilde{P}=U_{t_{k_n}}\cdots U_{t_k}\widetilde{P}$$

であるから, Lemma 5をくりかえし使って,

$(U_{t_1}P, U_{t_1}\widetilde{P})$は$S$上で estimate $\mu_{t_{k_1}}$を持つ.

従って, $(U_{t_{k_2}}U_{t_{k_1}}P, U_{t_{k_2}}U_{t_{k_1}}\widetilde{P})$は$S$上で estimate $(\mu_{t_{k_1}})_{t_{k_2}}$を持つ.

$\vdots$

従って, $(U_{t_{k_n}}\cdots U_{t_{k_1}}P, U_{t_{k_n}}\cdots U_{t_{k_1}}\widetilde{P})$は$S$上で estimate $(\cdots(\mu_{t_{k_1}})\cdots)_{t_{k_n}}$を持つ.

すなわち $(UP, U\widetilde{P})$はS上で estimate $\overline{\mu}$を持つ.

後半は $\sup_t\overline{\mu}(t)\leqq\alpha\cdot\sup_t\mu(t)$より明らか. (Q.E.D.)

最後に, 我々の目的には必要でないが, $p,\widetilde{p}$が$\{0,1\}$上のprobability measureで, $P=\prod_{t\in Z^{\nu}}p$, $\widetilde{P}=\prod_{t\in Z^{\nu}}\widetilde{p}$となっている場合に, $r(P,\widetilde{P})=\rho(p,\widetilde{p})$となることを示そう. Lemma 3で$S=\{s\}$とすれば, $\rho(p,\widetilde{p})\leqq\mu(s)\leqq\sup\mu(t)$より$\rho(p,\widetilde{p})\leqq r(P,\widetilde{P})$.

逆向きの不等式を導くのは次のLemmaによる.

Lemma 6. $(P,\widetilde{P})$はS上でestimate $\rho(p,\widetilde{p})$を持つ. しかも, estimateの定義中のP^V, $\widetilde{P}^V$として

$$P^V=\Big(\prod_{t\in S}p_t^{S,V}\Big)\times\prod_{t\notin S}p,\qquad \widetilde{P}^V=\Big(\prod_{t\in S}\widetilde{p}_t^{S,V}\Big)\times\prod_{t\notin S}\widetilde{p}$$

となるものがとれる. ($\mathcal{B}_V$上で$P^V=\widetilde{P}^V$なることから, $t\in V$のとき$p_t^{S,V}=\widetilde{p}_t^{S,V}$に注意しよう.)

証明. $\rho(p,\widetilde{p})=0$又は1のときは自明. $0<\rho(p,\widetilde{p})<1$と仮定する. $n=\#(S)$に関する帰納法による.

Sem. on Probab.
Vol.38 1973年
P1-91

1°) $n=1$ のとき，$S=\{s\}$．$\bar{p}(x)=\dfrac{p(x)\wedge\tilde{p}(x)}{1-\rho(p,\tilde{p})}$ とおけば，これは $\{0,1\}$ 上の probability measure である．

$$P^{\{s\}}=\bar{p}\times\prod_{t\neq s}p\ ,\qquad \tilde{P}^{\{s\}}=\bar{p}\times\prod_{t\neq s}\tilde{p}$$

とおけば，$P^{\{s\}}$, $\tilde{P}^{\{s\}}$ は $\mathcal{B}_{\{s\}}$ 上で一致する．$\lambda_{\{s\}}=1-\rho(p,\tilde{p})$, $\lambda_{\phi}=\rho(p,\tilde{p})$

$$P^{\phi}=\frac{p-p\wedge\tilde{p}}{\rho(p,\tilde{p})}\times\prod_{t\neq s}p\ ,\qquad \tilde{P}^{\phi}=\frac{\tilde{p}-p\wedge\tilde{p}}{\rho(p,\tilde{p})}\times\prod_{t\neq s}p$$

とおけば，$P=\lambda_{\phi}P^{\phi}+\lambda_{\{s\}}P^{\{s\}}$, $\tilde{P}=\lambda_{\phi}\tilde{P}^{\phi}+\lambda_{\{s\}}\tilde{P}^{\{s\}}$, $\sum_{t\notin V\subset S}\lambda_V=\lambda_{\phi}<\rho(p,\tilde{p})+\varepsilon$

2°) $\# S=n$ のとき成立していれば，$\bar{S}=S\cup\{s\}$ に対しても成立することを示そう．いま，$P=\sum_{V\subset S}\lambda_V P^V$, $\tilde{P}=\sum_{V\subset S}\lambda_V\tilde{P}^V$, $\sum_{V;\,t\notin V\subset S}\lambda_V\leqq\rho(p,\tilde{p})+\varepsilon$ となる λ_V, P^V, $\tilde{P}^V$ でとくに P^V, $\tilde{P}^V$ は Lemma に述べられた形としているものが存在している．$V\subset S$ に対して，

$$p_s^{\bar{S},V\cup\{s\}}(x)=\frac{p(x)\wedge\tilde{p}(x)}{1-\rho}\ ,$$

$$\bar{p}_s^{S,V\cup\{s\}}(x)=\frac{p(x)-p(x)\wedge\tilde{p}(x)}{1-\rho}\ ,\qquad \tilde{\bar{p}}_s^{S,V\cup\{s\}}(x)=\frac{\tilde{p}(x)-p(x)\wedge\tilde{p}(x)}{1-\rho}\ ,$$

$$\underline{P}^{V\cup\{s\}}=\Big(\prod_{t\in S}p_t^{S,V}\Big)\times p_s^{\bar{S},V\cup\{s\}}\times\prod_{t\notin\bar{S}}p\ ,$$

$$\underline{\tilde{P}}^{V\cup\{s\}}=\Big(\prod_{t\in S}\tilde{p}_t^{S,V}\Big)\times p_s^{\bar{S},V\cup\{s\}}\times\prod_{t\notin\bar{S}}\tilde{p}$$

とおけば，最後の２つの測度は $\mathcal{B}_{V\cup\{s\}}$ 上で一致している．また，

$$\underline{P}^{V}=\Big(\prod_{t\in S}p_t^{S,V}\Big)\times \bar{p}_s^{S,V\cup\{s\}}\times\prod_{t\notin\bar{S}}p\ ,$$

$$\underline{\tilde{P}}^{V}=\Big(\prod_{t\in S}\tilde{p}_t^{S,V}\Big)\times \tilde{\bar{p}}_s^{S,V\cup\{s\}}\times\prod_{t\notin\bar{S}}\tilde{p}$$

とおけば，これらは $\mathcal{B}_V$ で一致している．$\bar{\lambda}_{V\cup\{s\}}=\lambda_V(1-\rho)$, $\bar{\lambda}_V=\lambda_V\rho$ $(V\subset S)$ とおけば，

Sem. on Probab.
Vol.38 1973年
P1-91

$$P=\sum_{W\subset\bar{S}}\bar{\lambda}_W P^W,\quad \widetilde{P}=\sum_{W\subset\bar{S}}\bar{\lambda}_W\widetilde{P}^W$$ である.

$t\in S$ としよう. このとき,

$$\sum_{t\notin W\subset\bar{S}}\bar{\lambda}_W=\sum_{t\notin V\subset S}(\bar{\lambda}_V+\bar{\lambda}_{V\cup\{s\}})=\sum_{t\in V\subset S}\lambda_V<\rho+\varepsilon.$$

また $t=s$ のときは

$$\sum_{s\notin W\subset\bar{S}}\bar{\lambda}_W=\sum_{V\subset S}\bar{\lambda}_V=\sum_{V\subset S}\lambda_V\rho=\rho<\rho+\varepsilon.\qquad\text{(Q.E.D.)}$$

§2. Gibbsian random fields の一意性

前 § で random field が一意になるための十分条件を求めたが，それを Gibbsian case に適用してみよう.

定理. $\beta_0,\mu_0>0$ が存在して，$0\leqq\beta\leqq\beta_0$ 又は $|\mu|\geqq\mu_0$ のとき $\#\mathcal{G}=1$.

証明. いま q は shift で不変であるから，前 § の $\rho_{s,u}$ は $\rho_{0,s-u}$ に等しい. 定義により,

$$\Xi(\{0\},\omega)=1+\exp\left[\beta\left\{\mu-\sum_{t\neq s}\omega(t)U(t)\right\}\right],$$

$$q_{\{0\},\omega}(X_0=0)=\Xi(\{0\},\omega)^{-1},$$

$$q_{\{0\},\omega}(X_0=1)=\Xi(\{0\},\omega)^{-1}\exp\left[\beta\left\{\mu-\sum_{t\neq s}\omega(t)U(t)\right\}\right],$$

$$\rho(q_{\{0\},\omega},q_{\{0\},\widetilde{\omega}})=\frac{1}{2}\,|\,q_{\{0\},\omega}(X_0=0)-q_{\{0\},\widetilde{\omega}}(X_0=1)\,|$$

$$+\frac{1}{2}\,|\,q_{\{0\},\omega}(X_0=1)-q_{\{0\},\widetilde{\omega}}(X_0=1)\,|$$

$$=|\,q_{\{0\},\omega}(X_0=0)-q_{\{0\},\widetilde{\omega}}(X_0=0)\,|$$

$$=\frac{|\,\Xi(\{0\},\omega)-\Xi(\{0\},\widetilde{\omega})\,|}{\Xi(\{0\},\omega)\cdot\Xi(\{0\},\widetilde{\omega})}$$

$$=\frac{|\exp\left[\beta\left\{\mu-\sum_{t\neq0}\omega(t)U(t)\right\}\right]-\exp\left[\beta\left\{\mu-\sum_{t\neq0}\widetilde{\omega}(t)U(t)\right\}\right]|}{\Xi(\{0\},\omega)\cdot\Xi(\{0\},\widetilde{\omega})}.$$

Sem. on Probab.
Vol.38 1973年
P1-91

$t \neq u$ のとき, $\omega(t)=\widetilde{\omega}(t)$ とすれば, 最後の式は

$$\frac{\exp\{\beta(\mu+U)\}}{[1+\exp\{\beta(\mu-U)\}]^2}\,|1-e^{-\beta U(u)}|$$

で上からおさえられる. 但し, $U=\sum_{t\varepsilon Z^\nu}|U(t)|$. 従って,

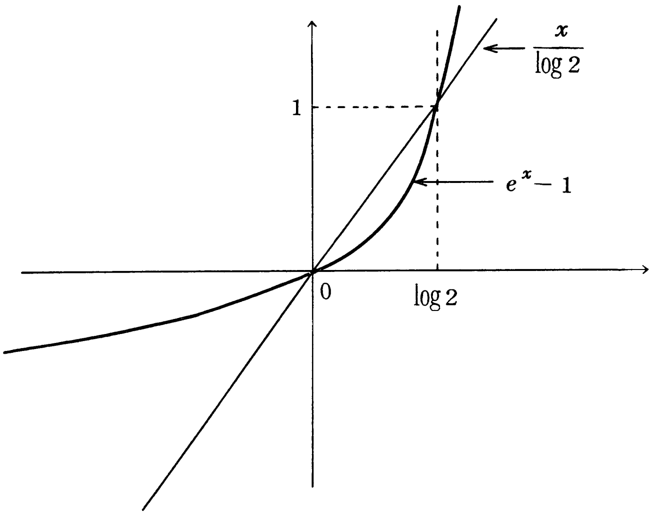
$$\alpha=\sup_s\sum_{u\neq s}\rho_{s,u}\leqq S\equiv\frac{\exp\{\beta(\mu+U)\}}{[1+\exp\{\beta(\mu-U)\}]^2}\sum_{u\,\varepsilon Z^\nu}|1-e^{-\beta U(u)}|.$$

$S<1$ となることを示せばよい.

Lemma. i) $x\leqq\log 2$ ならば, $|1-e^x|\leqq\dfrac{|x|}{\log 2}$.

ii) $x, y\geqq 2$ ならば, $x+y\leqq xy$.

証明. i) 下図より明らか.



ii) $0\leqq(x-1)(y-1)-1=xy-(x+y)$. (Q.E.D.)

定理の証明を続けよう.

1°) β を十分小さくとれば, すべての u に対して $U(u)\geqq-\dfrac{\log 2}{\beta}$, すなわち $-\beta U(u)\leqq\log 2$.
従って, この時 Lemma の i) により

Sem. on Probab.
Vol.38 1973年
P1-91

$$S=\frac{\exp\{\beta(\mu+U)\}}{[1+\exp\{\beta(\mu-U)\}]^2}\sum_{u\neq 0}|1-e^{-\beta U(u)}|$$

$$\leqq\frac{\exp\{\beta(\mu-U)\}\,e^{2\beta U}}{[1+\exp\{\beta(\mu-U)\}]^2}\frac{\beta}{\log 2}\sum_{u\neq 0}|U(u)|$$

$$\leqq\frac{\beta U e^{2\beta U}}{\log 2}\ .$$

再び β を十分小さくすれば，すなわち，β_0 が存在して，$0\leqq\beta\leqq\beta_0$ ならばすべての μ に対して，$S<1$ となる.

2°) $U(u)\leqq-\dfrac{\log 2}{\beta}$ のとき $e^{-\beta U(u)}\geqq 2$ であるから，Lemma により

$$\sum_{u\neq 0}|1-e^{-\beta U(u)}|=\Bigl(\sum_{U(u)>-\frac{\log 2}{\beta}}+\sum_{U(u)\leqq-\frac{\log 2}{\beta}}\Bigr)|1-e^{-\beta U(u)}|$$

$$\leqq\frac{\beta}{\log 2}\sum_{U(u)>-\frac{\log 2}{\beta}}|U(u)|+\exp\{-\beta\sum_{U(u)\leqq-\frac{\log 2}{\beta}}U(u)\}$$

$$\leqq\frac{\beta U}{\log 2}+e^{\beta U}=e^{\beta U}\Bigl(1+e^{-\beta U}\frac{\beta U}{\log 2}\Bigr).$$

簡単な微分計算により，$1+e^{-\beta U}\dfrac{\beta U}{\log 2}\leqq 1+\dfrac{1}{e\log 2}$ ，この右辺を c とおくと，

$$\sum|1-e^{-\beta U(u)}|\leqq c\,e^{\beta U}.$$

従って，

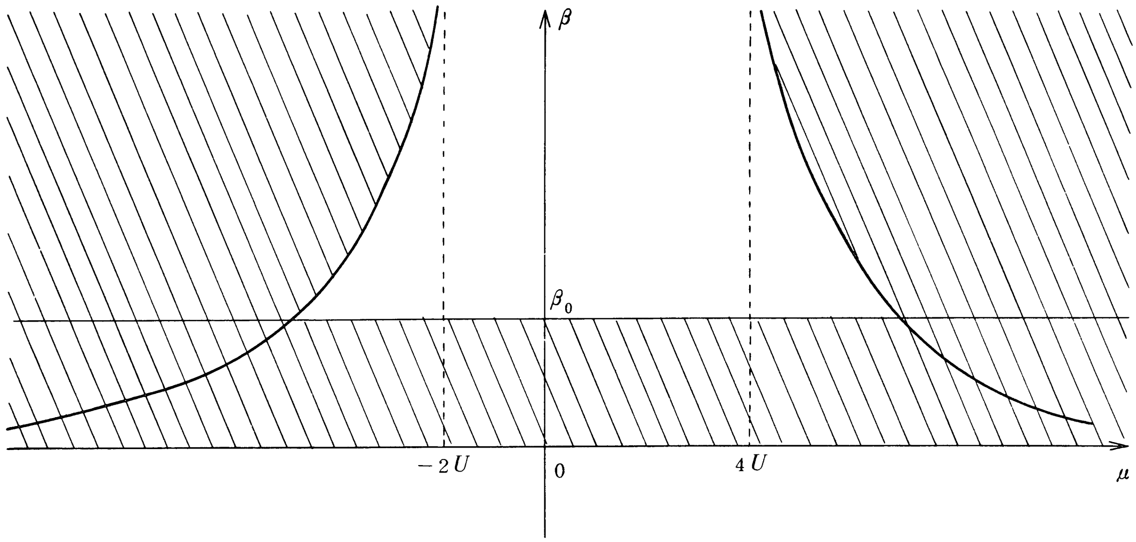
$$S\leqq\frac{c\cdot\exp\{\beta(\mu+2U)\}}{[1+\exp\{\beta(\mu-U)\}]^2}\quad .$$

まず，$\mu<-2U$ としよう．このとき，$S\leqq c\cdot\exp\{\beta(\mu+2U)\}$. 従って $\beta>\dfrac{-\log c}{\mu+2U}$ のとき，$S<1$.

次に $\mu>4U$ としよう．このとき，$S\leqq\dfrac{c\cdot\exp\{\beta(\mu+2U)\}}{\exp\{2\beta(\mu-U)\}}=c\cdot\exp\{\beta(4U-\mu)\}$.

従って，$\beta>\dfrac{\log c}{\mu-4U}$ のとき $S<1$.

Sem. on Probab.
Vol.38 1973年
P1-91



(Q.E.D.)

尚, potential U が non-positive な場合には, もっと精密な十分条件がわかっている. 第3章 §5 を見てちょうだいネ.

§3. 多次元 Ising model の相転移

この § では Gibbsian random field が一意にならないような例を与える. 次のような potential U を持った Gibbsian random field を考える.

$$U(t) = \begin{cases} -1 & |t| = 1 \\ 0 & |t| \neq 1 \end{cases}$$

のとき, この random field を Ising model with attraction (a-type Ising model)という.

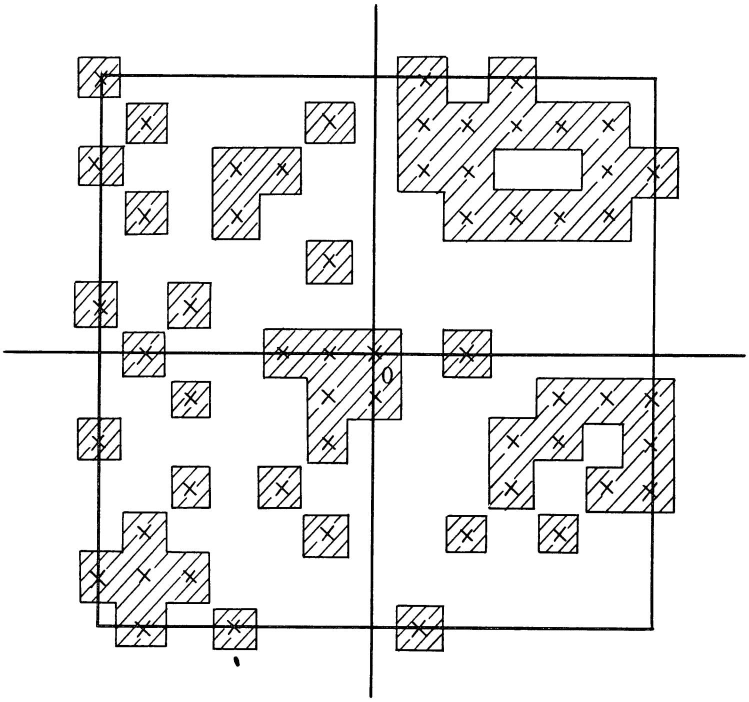
$$U(t) = \begin{cases} 1 & |t| = 1 \\ 0 & |t| \neq 1 \end{cases}$$

のとき, Ising model with repulsion (r-type Ising model) という. 以下の議論は2

Sem. on Probab.
Vol.38 1973年
P1-91

次元以上で成立するが，簡単のため2次元のみを扱うことにする．1次元では事情が異る．（次の§を見よ）

まず，a-type Ising model を考察しよう．$V \subset Z^2$を原点を中心として座標軸に平行な辺を持つ正方形とする．$M \subset V$ に対してMに属する点 t を中心として座標軸に平行で長さ1の辺を持つ正方形を画きその内部に斜線を引く．斜線部の境界を $\Gamma(M)$ と書こう．この境界の長さも同



じ $\Gamma(M)$ であらわす．$\Gamma(M)$ は互に交わらない閉じた折れ線にわけられる．この閉じた折れ線を contourということにしよう．（角で接するcontourのわけ方は図のようにする）．M の点の個数を $N(M)$，相互作用の potential を $U(M)$ とすれば，容易にわかるように，

$$4N(M)+2U(M)=\Gamma(M).$$

従って，$U(M)=-2N(M)+\frac{1}{2}\Gamma(M)$．これを使うと，

$$\mu N(M)-U(M)=(\mu+2)N(M)-\frac{1}{2}\Gamma(M).$$

ここで β を 2β にかえ，$\mu=-2$ とおくと，

Sem. on Probab.
Vol.38 1973年
P1-91

$$q_{V,0}(M) = \Xi(V, 0)^{-1} e^{-\beta\Gamma(M)} .$$

（$\mu \neq -2$ ならば, random field は一意である. 第3章 §5 参照）

γ を V 内のひとつの contour とし M が γ を自分の contour として持つとき, $T_\gamma M$ を γ の外側では M と一致し, γ の内部で M^c と一致する configuration とする. T_γ は M から contour γ を消す operator である. 従って, $\Gamma(T_\gamma M) = \Gamma(M) - \gamma$, $q_{V,0}(M) = \Xi(V, 0)^{-1} e^{-\beta\Gamma(M)} = e^{-\beta\gamma} \Xi(V, 0)^{-1} e^{-\beta\Gamma(T_\gamma M)}$. $\pi(\gamma) = q_{V,0}\{M : M$ は γ を自分の contour として持つ$\}$ とおくと, 上の式から

$$\pi(\gamma) = e^{-\beta\gamma} \cdot \Xi(V, 0)^{-1} \sum_{M\text{は}\gamma\text{を持つ}} e^{-\beta\Gamma(T_\gamma M)} \leqq e^{-\beta\gamma}.$$

一方, $q_{V,0}(X_0 = 1) \leqq q_{V,0}\{$ 0 を囲む contour がある $\}$

$$\leqq \sum_{k=1}^{\infty} q_{V,0}\{\text{ 0 を囲み } (0, k) \text{ を通る contour がある }\}.$$

定点を通って長さ m の contour の個数は高々 3^m であるから, 上式の右辺は $\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=2k}^{\infty} 3^m e^{-\beta m}$ でおさえられる. これは $\beta \to \infty$ のとき 0 に収束する. 従って, β を十分大きくすれば, すべての V に対して $q_{V,0}(X_0 = 1) < \frac{1}{2}$.

変換 $M \to V \setminus M$ で contour は不変であるから, V の外側に粒子がつまっているとき, 上と同様の議論によって, $q_{V,1}(X_0 = 0) < \frac{1}{2}$ 従って $q_{V,1}(X_0 = 1) > \frac{1}{2}$. てきとうな V の部分列 V_n をとれば $Q_0 \equiv \lim_{n\to\infty} q_{V_n,0}$ と $Q_1 \equiv \lim_{n\to\infty} q_{V,1}$ が存在し, $\mathcal{G}$ に属し, 相異る.
(第3章 §5 定理 3 参照)

定理 1. $\mu = -2$ で β が十分大きいとき, a-type Ising model は一意でない.

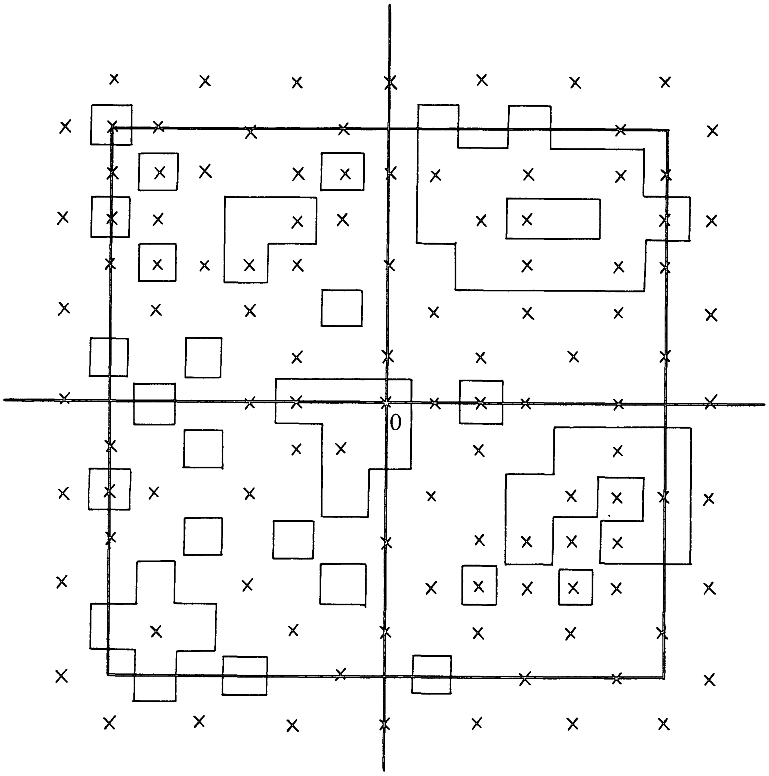
次に r-type Ising model を考察しよう. V を前述の正方形でとくに一辺が $4n\,(n = 1, 2, \cdots)$ であるものとする. V の外部条件 ω_0 を次のようにきめる.

$$\omega_0(x, y) = \begin{cases} 0, & x + y \text{ が偶数のとき,} \\ 1, & x + y \text{ が奇数のとき.} \end{cases}$$

configuration $M \subset V$ の〝境界〟$\Gamma(M)$ を次のようにきめる ; V 内のとなり合う点が共に M に属する (これを (1,1)-pair ということにする) か, 又は共に M に属さない (これを (0,0) -pair という) とき, その二点の間に〝境界〟を引く. M の〝境界〟自身とその長さを再び

Sem. on Probab.
Vol.38 1973年
P1-91

$\Gamma\,(M)$ とかく.



$$\Gamma\,(M) = \#\{\,(1,1)\text{-pair}\,\} + \#\{\,(0,0)\text{-pair}\,\},$$

$$4\,N(M) = 2\,\#\{\,(1,1)\text{-pair}\,\} + \#\{\,(0,1)\text{-pair}\,\},$$

$$|V| = \#\{\,(1,1)\text{-pair}\,\} + \#\{\,(0,0)\text{-pair}\,\} + \#\{\,(0,1)\text{-pair}\,\},$$

$$U(M) + U(M,\,\omega_0) = \#\{\,(1,1)\text{-pair}\,\}.$$

従って, $\Gamma(M) + 4N(M) = 2\{\,U(M) + U(M,\omega_0)\,\} + |V|$, すなわち, $U(M) + U(M,\omega_0)$

$$= 2\,N(M) + \frac{\Gamma(M)}{2} \mp \frac{|V|}{2}\ ,$$

$$q_{V,\,\omega_0}(M) = \Xi\,(V,\,\omega_0)^{-1}\ e^{\beta\{(\mu-2)N(M) - \frac{\Gamma(M)}{2} + \frac{|V|}{2}\}}.$$

{ } 内の最後の項はMとは無関係なので normalizing constant $\Xi\,(V,\omega_0)$内にくり込むと,

Sem. on Probab.
Vol.38 1973年
P1-91

$$q_{V,\omega_0}(M) = \Xi'(V,\omega_0)^{-1} e^{\beta\{(\mu-2)N(M)-\frac{1}{2}\Gamma(M)\}} .$$

定理 2. $|\mu-2|<2$ で $\beta\{1-\frac{|\mu-2|}{2}\}$ が十分大きいとき，r-type Ising model は一意でない．

γ を V 内の contour とし，$\pi(\gamma)$ を前と同様に，configuration M が contour γ を持つ確率とする．

Lemma. $\pi(\gamma) \leqq e^{-\frac{\beta}{2}(1-\frac{|\widetilde{\mu}|}{2})\cdot\gamma}$． 但し $\widetilde{\mu} = \mu - 2$.

証明. configuration M の定義関数 χ_M を簡単のため同じ M であらわすことにする． M が contour γ を持つとき，新しい configuration $T_\gamma M$ を次のように定義する．

$$T_\gamma M(t) = \begin{cases} M(t), & t \text{ が } \gamma \text{ の外部にあるとき,} \\ M(t'), & t \text{ とその真下の点 } t' \text{ が共に } \gamma \text{ の内部にあるとき,} \\ 1-M(t'), & t \text{ が } \gamma \text{ の内部, } t' \text{ が } \gamma \text{ の外部にあるとき.} \end{cases}$$

このようにして得られた configuration $T_\gamma M$ は，M から γ を消し，γ の外部は変えず，γ の内部の M の contour を 1 つ上げたものである．明らかに $\Gamma(T_\gamma M) = \Gamma(M) - \gamma$.

contour γ の水平成分を γ_{hor} とかくことにすると，

$$|N(T_\gamma M) - N(M)| \leqq \frac{\gamma_{hor}}{2} .$$

実際，γ の内部をたてに割って，各区画の中に含まれる点が同じ横座標をもつようにする．各区画は水平成分が 2（上，下とも各 1）の長方形であり，γ の内部はそれらの disjoint な和になる．各長方形の上辺，下辺共に γ_{hor} に含まれているから，それらの個数は $\frac{\gamma_{hor}}{2}$ である． T_γ は各長方形において，高々 1 ケの粒子数の増減をひきおこす（γ の内部では T_γ とは configuration を 1 だけ上に平行移動させる operator である）．従って，求めたい不等式が得られた．

M が contour γ を持つとする．このとき，

$$q_{V,\omega_0}(M) = \Xi'(V,\omega_0)^{-1} \exp\left[\beta\{\widetilde{\mu} N(M) - \frac{1}{2}\Gamma(M)\}\right]$$

$$\leqq \Xi'(V,\omega_0)^{-1} \exp\left[\beta\left\{\widetilde{\mu}N(T_\gamma M)-\frac{1}{2}\Gamma(T_\gamma M)-\frac{\gamma}{2}+|\widetilde{\mu}|\frac{\gamma_{hor}}{2}\right\}\right]$$
$$= e^{-\frac{\beta}{2}(\gamma-|\widetilde{\mu}|\gamma_{hor})} q_{V,\omega_0}(T_\gamma M).$$

これを上記のようなMについて加えると，$\sum_M q_{V,\omega_0}(T_\gamma M)\leqq 1$ より，

$$\pi(\gamma) \leqq e^{-\frac{\beta}{2}(\gamma-|\widetilde{\mu}|\gamma_{hor})}.$$

contour γ の垂直成分を γ_{ver}とかくことにすると，上と同様に

$$\pi(\gamma) \leqq e^{-\frac{\beta}{2}(\gamma-|\widetilde{\mu}|\gamma_{ver})}.$$

従って，

$$\pi(\gamma) \leqq e^{-\frac{\beta}{2}\{\gamma-(\gamma_{hor}\wedge\gamma_{ver})|\widetilde{\mu}|\}}$$
$$\leqq e^{-\frac{\beta}{2}\{\gamma-\frac{\gamma}{2}|\widetilde{\mu}|\}} = e^{-\frac{\beta}{2}(1-\frac{|\widetilde{\mu}|}{2})\gamma}. \qquad \text{(Q.E.D.)}$$

<u>定理２の証明.</u>　Mを$X_0(M)=1$ となるものとする．原点と点 $(2n,0)$ とを結ぶ線分と M の〝境界″との交点の個数を数える．この線分上の $(0,1)$-pair を左側からならべると $(1,0)$,$(0,1)$，$(1,0)$，$\cdots(0,1)$ となる（$X_{(2n+1,0)}(\omega_0)=1$ に注意）．従って，$(0,1)$-pair はこの線分上に偶数個ある．いっぽう，

$$\#\{(1,1)\text{-pair},\ (0,0)\text{-pair}\}=(2n+1)-\#\{(0,1)\text{-pair}\}.$$

この左辺は交点の個数，右辺は奇数である．これより，原点を囲む contour の存在がわかる．従って，

$$q_{V,\omega_0}(X_0=1)\leqq q_{V,\omega_0}(\text{0 を囲む contour がある}).$$

Lemma を使えば，定理１の証明と全く同じ議論が適用できて，$\beta\left\{1-\frac{|\widetilde{\mu}|}{2}\right\}$が十分大きいとき $q_{V,\omega_0}(X_0=1)<\frac{1}{2}$． configuration の０と１とを入れかえて，$q_{V,\omega_1}(X_0=0)<\frac{1}{2}$．従って，$q_{V,\omega_1}(X_0=1)>\frac{1}{2}$．　但し，$\omega_1=1-\omega_0$．　Vの部分列をとって $Q_{\omega_0}=\lim q_{V_n,\omega_0}$，$Q_{\omega_1}=\lim q_{V_n,\omega_1}$ が共に存在するようにすれば，Q_{ω_0}，$Q_{\omega_1}\in\mathcal{G}$ で $Q_0\neq Q_1$ となる．　(Q.E.D.)

Sem. on Probab.
Vol.38 1973年
P1-91

注意. τ を $(0,1)$-shift $\tau_{(0,1)}$ とすれば, $\tau\omega_0=\omega_1$ 従って, $\tau Q_{\omega_0}=Q_{\tau\omega_0}=Q_{\omega_1}$. すなわち, Q_{ω_0}, Q_{ω_1} は τ-不変でない.

§4. 1次元の場合

1次元では事情がだいぶ異る. $V\subset Z^\nu$ に対して, $(V)_d$ を V の d-近傍としよう.

定義. $q_{V,\omega}(A)$ が $\mathcal{B}_{(V)_d\setminus V}$-可測のとき $q=\{q_{V,\omega}(A)\}$ が d-Markov という.

定理. 次の三条件が成立するとする.

i) 次元 $\nu=1$.

ii) q は d-Markov で shift-invariant.

iii) A が空でない cylinder set ならば $q_{V,\omega}(A)>0$.

このとき, $\#\mathcal{P}=1$.

証明. 今までは $\Omega=\{0,1\}^Z$ としていたが, これを $\Omega=\{a_1, a_2,\cdots, a_k\}^Z$ としても全く同様の結果が得られる. そこで, $Y_n=(X_{nd}, X_{nd+1},\cdots, X_{nd+d-1})$, $(n\in Z)$ とおけば, X_n が $\{0,1\}^Z$ 上の d-Markov random field であるとき, Y_n は $(\{0,1\}^d)^Z$ 上の 1-Markov random field である. 従って, 上の定理を $d=1$ のときに証明すれば十分である.

$t_1\leqq t_2$, $\omega(t_1-1)=x$, $\omega(t_2+1)=y$ のとき $q_{[t_1,t_2],\omega}=q_{[t_1,t_2],x,y}$ とおき, $q_{\{t\},x,z}(X_t=y)=q_{\{0\},x,z}(X_0=y)=f_{x,z}(y)$ とおこう. また, $Q(x,y)=\dfrac{f_{0y}(x)}{f_{0y}(0)}$ とおく.

Lemma.

$$q_{[1,N],a,b}(X_j=x_j:1\leqq j\leqq N)=\frac{Q(a,x_1)\,Q(x_1,x_2)\cdots Q(x_{N-1},x_N)\,Q(x_N,b)}{Q^{(N+1)}(a,b)}$$

証明. $P\in\mathcal{P}$ を任意に固定し, 帰納法による.

1°) $N=1$ のとき, $[uvxy]=P(X_0=u, X_1=v, X_2=x, X_3=y)$ とおく.

$$\begin{aligned}[uvxy] &=P(X_0=u, X_1=v, X_3=y)P(X_2=x|X_0=u, X_1=v, X_3=y)\\ &=P(X_0=u, X_1=v, X_3=y)P(X_2=x|X_1=v, X_3=y)\end{aligned}$$

Sem. on Probab.
Vol.38 1973年
P1-91

$$= P(X_0 = u,\ X_1 = v,\ X_3 = y)\, f_{vy}(x).$$

同様に $[uvx'y] = P(X_0 = u,\ X_1 = v,\ X_3 = y)\, f_{vy}(x')$．従って，

$$\frac{[uvxy]}{[uvx'y]} = \frac{f_{vy}(x)}{f_{vy}(x')} \quad .$$

同様に X_0, X_2, X_3 を条件の中に入れることにより，

$$\frac{[uvxy]}{[uv'xy]} = \frac{f_{ux}(v)}{f_{ux}(v')} \quad .$$

従って

$$Q(a,x)\,Q(a,0)^{-1}Q(x,b) = \frac{f_{0x}(a)}{f_{0x}(0)} \cdot \frac{f_{00}(0)}{f_{00}(a)} \cdot \frac{f_{0b}(x)}{f_{0b}(0)}$$

$$= \frac{[0axb]}{[00xb]} \cdot \frac{[000b]}{[0a0b]} \cdot \frac{[00xb]}{[000b]} = \frac{[0axb]}{[0a0b]} = \frac{f_{ab}(x)}{f_{ab}(0)} \ ,$$

$$\frac{Q(a,x)\,Q(x,b)}{Q(a,y)\,Q(y,b)} = \frac{f_{ab}(x)}{f_{ab}(y)}$$ （この式は2°)で使うのよ），

$$f_{ab}(x) = \frac{f_{ab}(0)}{Q(a,0)}\ Q(a,x)\,Q(x,b).$$

これを x について加え合わせれば，左辺の和は1であるから，

$$\frac{f_{ab}(0)}{Q(a,0)} = \frac{1}{Q^{(2)}(a,b)} \quad .$$

従って，

$$q_{\{1\},a,b}(X_1 = x) = f_{ab}(x)$$

$$= \frac{Q(a,x)\,Q(x,b)}{Q^{(2)}(a,b)} \ .$$

2°) $N-1$ までこの等式が成立すると仮定しよう．

$$[ax_1x_2 \cdots x_N b] = P\{X_0 = a,\ X_1 = x_1,\ \cdots,\ X_N = x_N,\ X_{N+1} = b\}$$

$$= P(X_j = x_j \mid X_{j-1} = x_{j-1}, X_{j+1} = x_{j+1}) \times$$

$$\times P\{X_0 = a, \cdots, X_{j-1} = x_{j-1}, X_{j+1} = x_{j+1}, \cdots, X_{N+1} = b\}.$$

前と同様にして,

$$\frac{[ax_1x_2\cdots, x_j\cdots x_N b]}{[ax_1x_2\cdots, x_j'\cdots x_N b]} = \frac{f_{x_{j-1}\,x_{j+1}}(x_j)}{f_{x_{j-1}\,x_{j-1}}(x_j')},$$

$$q_{[1,N],a,b}(X_j = x_j, \ 1 \leqq j \leqq N)$$

$$= \frac{P\{X_0 = a, X_1 = x_1, \cdots, X_N = x_N, X_{N+1} = b\}}{P(X_0 = a, X_{N+1} = b)}$$

$$= \frac{P(X_2 = x_2, \cdots, X_N = x_N \mid X_1 = x_1, X_{N+1} = b)\, P(X_0 = a, X_1 = x_1, X_{N+1} = b)}{P(X_0 = a, X_{N+1} = b)}$$

$$= \frac{q_{[2,N],x_1,b}(X_j = x_j;\ 2 \leqq j \leqq N)\, P(X_0 = a, X_1 = x_1, X_{N+1} = b)}{P(X_0 = a, X_{N+1} = b)},$$

$$P(X_0 = a, X_1 = x_1, X_{N+1} = b) = \sum_{y_2, y_3, \cdots, y_N} [ax_1y_2y_3\cdots y_N b],$$

$$P(X_0 = a, X_{N+1} = b) = \sum_{y_1', y_2', \cdots, y_N'} [ay_1'y_2'\cdots y_N' b].$$

従って,

$$\frac{P(X_0 = a, X_1 = x_1, X_{N+1} = b)}{P(X_0 = a, X_{N+1} = b)} = \sum_{y_2, y_3, \cdots, y_N} \frac{1}{\displaystyle\sum_{y_1', \cdots, y_N'} \frac{[ay_1'y_2'\cdots y_N' b]}{[ax_1\ y_2\ \cdots y_N\ b]}},$$

$$\frac{[ay_1'y_2'\cdots y_N' b]}{[ax_1\ y_2\cdots y_N\ b]} = \frac{[ay_1'y_2'\cdots y_N' b]}{[ax_1\ y_2'\cdots y_N' b]} \cdot \frac{[ax_1y_2'y_3'\cdots y_N' b]}{[ax_1y_2\ y_3'\cdots y_N' b]} \cdots \frac{[ax_1y_2\cdots y_{N-1}y_N' b]}{[ax_1y_2\cdots y_{N-1}y_N\ b]}$$

$$= \frac{f_{ay_2'}(y_1')}{f_{ay_2'}(x_1)} \cdot \frac{f_{x_1y_3'}(y_2')}{f_{x_1y_3'}(y_2)} \cdot \cdots \cdot \frac{f_{y_{N-1}b}(y_N')}{f_{y_{N-1}b}(y_N)}$$

Sem. on Probab.
Vol.38 1973年
P1-91

$$= \frac{Q(a, y_1')Q(y_1', y_2')}{Q(a, x_1)Q(x_1, y_2')} \cdot \frac{Q(x_1, y_2')Q(y_2', y_3')}{Q(x_1, y_2)Q(y_2, y_3')} \cdots \frac{Q(y_{N-1}, y_N')Q(y_N', b)}{Q(y_{N-1}, y_N)Q(y_N, b)}$$

$$= \frac{Q(a, y_1')Q(y_1', y_2') \cdots Q(y_N', b)}{Q(a, x_1)Q(x_1, y_2) \cdots Q(y_N, b)} ,$$

$$\sum_{y_i'} \frac{[ay_1'y_2' \cdots y_N' b]}{[ax_1 y_2 \cdots y_N b]} = \frac{Q^{(N+1)}(a, b)}{Q(a, x_1)Q(x_1, y_2) \cdots Q(y_N, b)} ,$$

$$\frac{P(X_0 = a, X_1 = x_1, X_{N+1} = b)}{P(X_0 = a, X_{N+1} = b)} = \sum_{y_2, \cdots, y_N} \frac{Q(a, x_1)Q(x_1, y_2) \cdots Q(y_N, b)}{Q^{(N+1)}(a, b)}$$

$$= \frac{Q(a, x_1)Q^{(N)}(x_1, b)}{Q^{(N+1)}(a, b)} .$$

帰納法の仮定により，

$$q_{[2, N], x_1, b}(X_j = x_j,\ 2 \leqq j \leqq N) = \frac{Q(x_1, x_2)Q(x_2, x_3) \cdots Q(x_N, b)}{Q^{(N)}(x_1, b)}$$

であるから，上式といっしょにして

$$q_{[1, N], a, b}(X_j = x_j,\ 1 \leqq j \leqq N) = q_{[2, N], x_1, b}(X_j = x_j,\ 2 \leqq j \leqq N) \times$$

$$\times \frac{P(X_0 = a, X_1 = x_1, X_{N+1} = b)}{P(X_0 = a, X_{N+1} = b)}$$

$$= \frac{Q(x_1, x_2)Q(x_2, x_3) \cdots Q(x_N, b)}{Q^{(N)}(x_1, b)} \cdot \frac{Q(a, x_1)Q^{(N)}(x_1, b)}{Q^{(N+1)}(a, b)}$$

$$= \frac{Q(a, x_1)Q(x_1, x_2) \cdots Q(x_N, b)}{Q^{(N+1)}(a, b)} . \qquad \text{(Q.E.D.)}$$

定理の証明を続けよう． $A = \{X_j = x_j,\ 0 \leqq j \leqq N\}$ とおく． $n \leqq 0 < N \leqq m$ に対して，

$$q_{[n, m], a, b}(A) = \sum_{\substack{x_j \\ \left(j = n, n+1, \cdots, -1 \atop j = N+1, \cdots m-1, m \right)}} q_{[n, m], a, b}(X_j = x_j,\ n \leqq j \leqq m) .$$

Sem. on Probab.
Vol.38 1973年
P1-91

上記 Lemma により，

$$
\begin{aligned}
&q_{[n,m],a,b}(A) \\
&= \sum_{x_j} \frac{Q(a,x_n)Q(x_n,x_{n+1})\cdots Q(x_{-1},x_0)Q(x_0,x_1)\cdots Q(x_{N-1},x_N)Q(x_N,x_{N+1})\cdots Q(x_m,b)}{Q^{|n|+m+2}(a,b)} \\
&= \frac{Q^{|n|+1}(a,x_0)Q(x_0,x_1)\cdots Q(x_{N-1},x_N)Q^{m-N+1}(x_N,b)}{Q^{|n|+m+2}(a,b)}.
\end{aligned}
$$

Perron-Frobenius の定理により行列 $(Q(x,y))$ の最大固有値を λ とし，左右の固有ベクトルをそれぞれ l，r とすれば，各ベクトルの成分は皆正であり，$(r, l)=1$ と normalize すれば

$$
\lim_{n\to+\infty} \frac{Q^{(n)}(x,y)}{\lambda^n} = r(x)\, l(y).
$$

従って，

$$
\lim_{\substack{n\to-\infty \\ m\to+\infty}} q_{[n,m],a,b}(A) = l(x_0)\, r(x_N)\, \frac{Q(x_0,x_1)\cdots Q(x_{N+1},x_N)}{\lambda^N} .
$$

これは a, b と無関係．すなわち，$\lim q_{V,\omega} = Q_\omega$ は ω と無関係．$\mathscr{P}$ の端点はみな Q_ω という形になっているので，$\mathscr{P}$ は唯一点から成る． (Q.E.D.)

Sem. on Probab.
Vol.38 1973年
P1-91

第3章　　熱力学的極限関数

§1.　極限の存在

第3章を通じてGibbsian random fieldのみを扱います．第1章§5でVが増大するときの$|V|^{-1}\log \Xi(V)$の極限の存在を証明なしに用いましたが，まずその存在証明をします．その後，その極限の意味を明らかにしたいというフウに考えます．$V\subset Z^{\nu}$とし，自然数Nに対して，$D_{V,N}=\{M;M\subset V,\ \# M=N\}$，$U(M)=\frac{1}{2}\sum_{t,s\in M}U(t-s)$，$Z(V,N,\beta)=\sum_{M\in D_{V,N}}e^{-\beta U(M)}$とおく．$Z$は(小)分配関数(partition function)と呼ばれる．

定理1.　V_Nを$\lim_{N\to\infty}\frac{N}{|V_N|}=\rho$ $(0\leqq\rho\leqq 1)$をみたす立方体の列とする．このとき，極限；

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\log Z(V_N,N,\beta)}{|V_N|}\equiv g(\rho,\beta)$$

が存在する．

Lemma 1.　$K=\frac{1}{2}\sum_{t\in Z^{\nu}}|U(t)|$とおくと，$|U(M)|\leqq K\cdot|M|$.

証明.　$|U(M)|\leqq\frac{1}{2}\sum_{t,s\in M}|U(t-s)|\leqq\frac{1}{2}\sum_{t\in M}\sum_{s\in Z^{\nu}}|U(t-s)|=K\cdot|M|$. (Q.E.D.)

Lemma 2.　$0\leqq N\leqq|V|$のとき$e^{-\beta KN}\leqq Z(V,N,\beta)\leqq\left(\frac{|V|}{N}e^{\beta K+1}\right)^N$.

証明.　$M\in D_{V,N}$ならば，Lemma 1により，$e^{-\beta NK}\leqq e^{-\beta U(M)}$．これよりLemma 2の左側の不等式が出て来ちゃうのよ．同じくLemma 1により，

$$\begin{aligned}Z(V,N,\beta)&=\sum_{M\in D_{V,N}}e^{-\beta U(M)}\leqq\sum_{M\in D_{V,N}}e^{\beta KN}\\&=\binom{|V|}{N}e^{\beta KN}\end{aligned}$$

Sem. on Probab.
Vol.38 1973年
P1-91

$$= \frac{|V|\,(\,|V|-1\,)(\,|V|-2\,)\cdots(\,|V|-N+1\,)}{N\,!}\; e^{\beta NK}$$

$$\leqq \frac{|V|^{N}}{\sqrt{2\pi}\;N^{N+\frac{1}{2}}\;e^{-N}}\; e^{\beta NK} \quad (\text{Stirling}\ \text{の公式による})$$

$$\leqq \left(\frac{|V|}{N}\,e^{\beta N+1}\right)^{N}. \qquad (\text{Q.E.D.})$$

<u>系.</u> $-\infty < \varliminf_{N\to+\infty} \frac{1}{|V_N|} \log Z(V_N, N, \beta) \leqq \varlimsup_{N\to\infty} \frac{1}{|V_N|} \log Z(V_N, N, \beta) < +\infty$.

<u>定理の証明</u>. 立方体V_2と自然数N_2が与えられたとする. V_2の中に, 立方体$H_1, H_2, \cdots, H_m$を各々の間の距離が l 以上になるように入れる. 自然数 $S_1, S_2, \cdots, S_m$ を $\sum_{j=1}^{m} S_j = N_2$ となるようにとる.

$$Z(V_2, N_2, \beta) = \sum_{M\,\varepsilon\,D_{V_2,N_2}} e^{-\beta U(M)}$$

$$\geqq \sum_{M:M\cap H_j\,\varepsilon\,D_{H_j,S_j}} e^{-\beta U(M)} \qquad .$$

$M\cap H_j = M_j$ とおくと, 上式の和に出て来るMに対しては, $M = \bigcup_{j=1}^{m} M_j$ であるから,

$$\frac{1}{2} \sum_{\substack{s\,\varepsilon\,M\setminus M_j \\ t\,\varepsilon}} U(\,t-s\,) \leqq \frac{1}{2} \sum_{|u|\geqq l} |\,U(u)\,|,$$

上の右辺をU_lとおこう.

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m} \sum_{t\,\varepsilon\,M_j} \sum_{s\,\varepsilon\,M\setminus M_j} U(\,t-s\,) \leqq \sum_{j=1}^{m} \sum_{t\,\varepsilon\,M_j} U_l = N_2\,U_l$$

を得て, 結局

$$\sum_{M:M_j\,\varepsilon\,D_{H_j,S_j}} e^{-\beta U(M)} \geqq \sum e^{-\beta \sum_{j=1}^{m} U(M_j) - \beta U_l N_2}$$

$$= \left\{ \prod_{j=1}^{m} Z(H_j, S_j, \beta) \right\} e^{-\beta U_l N_2}.$$

Sem. on Probab.
Vol.38 1973年
P1-91

従って,

(*) $$Z(V_2, N_2, \beta) \geqq \left\{\prod_{j=1}^{m} Z(H_j, S_j, \beta)\right\} e^{-\beta U_l N_2} .$$

ここで, $H_1 = H_2 = \cdots = H_m = V_1$, $m = \left[\dfrac{\sqrt[\nu]{|V_2|}}{\sqrt[\nu]{|V_1|} + l} \right]^{\nu}$ とおく.

但し, [ ] はGauss の整数記号である. このとき,

$$\lim_{V_2 \uparrow Z^\nu} \frac{m}{|V_2|} = \frac{1}{(\sqrt[\nu]{|V_1|} + l)^\nu} .$$

$S_1 = S_2 = \cdots = S_{m-1} = N_1$, $S_m = N_2 - (m-1) N_1$ とおく. $\dfrac{N_2}{|V_2|} \to \rho$ のとき, 上式から,

$$\lim \frac{S_m}{|V_2|} = \rho - \frac{N_1}{(\sqrt[\nu]{|V_1|} + l)^\nu} .$$

従って (*) 式より

$$\begin{aligned} \frac{1}{|V_2|} \log Z(V_2, N_2, \beta) &\geqq -\frac{\beta U_l N_2}{|V_2|} + \frac{m-1}{|V_2|} \log Z(V_1, N_1, \beta) + \frac{1}{|V_2|} \log Z(V_1, S_m, \beta) \\ &\geqq -\frac{\beta U_l N_2}{|V_2|} + \frac{m-1}{|V_2|} \log Z(V_1, N_1, \beta) - \frac{\beta K S_m}{|V_2|} . \end{aligned}$$

最後の式は Lemma 2 による. 両辺の $V_2 \uparrow Z^\nu$ のときの下極限をとって,

$$\underline{\lim} \frac{1}{|V_2|} \log Z(V_2, N_2, \beta) \geqq -\beta\rho U_l + \frac{\log Z(V_1, N_1, \beta)}{(\sqrt[\nu]{|V_1|} + l)^\nu} - \beta K \left(\rho - \frac{N_1}{(\sqrt[\nu]{|V_1|} + l)^\nu}\right).$$

再び, $V_1 \uparrow Z^\nu$, $\dfrac{N_1}{|V_1|} \to \rho$ のときの両辺の上極限をとれば,

$$\underline{\lim} \frac{1}{|V_2|} \log Z(V_2, N_2, \beta) \geqq -\beta\rho U_l + \overline{\lim} \frac{1}{|V_1|} \log Z(V_1, N_1, \beta).$$

$l \to \infty$ とすれば,

$$\underline{\lim} \frac{1}{|V_2|} \log Z(V_1, N_2, \beta) \geqq \overline{\lim} \frac{1}{|V_1|} \log Z(V_1, N_1, \beta) . \qquad \text{(Q.E.D.)}$$

Sem. on Probab.
Vol.38 1973年
P1-91

この証明ではVを立方体としたが, van-Hove limit としても良いことに注意しよう.

Proposition 1. 関数 $g(\rho,\beta)$ は

i) β を固定したとき, ρ について concave.

ii) ρ を固定したとき, β について convex.

証明. $<\ >$ でGibbs 分布による平均を表わすことにすると

$$\frac{d\log Z(V,N,\beta)}{d\beta}=-\frac{1}{Z(V,N,\beta)}\sum U(M)\ e^{-\beta U(M)}=-<U>,$$

$$\frac{d^2}{d\beta^2}\log Z(V,N,\beta)=-\frac{1}{Z^2}\{\sum U(M)\ e^{-\beta U(M)}\}^2+\frac{1}{Z}\sum U(M)^2\ e^{-\beta U(M)}$$

$$=<U^2>-<U>^2=\sigma^2\ (U)\geqq 0.$$

これより, 第2の主張が得られる.

次に第1の主張を証明するために, $\rho=\lambda\rho_1+(1-\lambda)\rho_2\ (\rho\neq 0,\ 0<\lambda<1)$ としよう. 定理1の証明中の (*) 式で,

$$H_1=H_2=\cdots=H_m=V_1,$$

$$m=\left[\frac{\sqrt[\nu]{|V_2|}}{\sqrt[\nu]{|V_1|}+l}\right]^{\nu},$$

$$S_j=\begin{cases}\left[\dfrac{\rho_1}{\rho}N_1\right], & j=1,2,\cdots,[\lambda m],\\[2ex] \left[\dfrac{\rho_2}{\rho}N_1\right], & j=[\lambda m]+1,\cdots,m-1,\\[2ex] N_2-\displaystyle\sum_{k=1}^{m-1}S_k, & j=m\end{cases}$$

としよう. このとき,

$$Z(V_2,N_2,\beta)\geqq Z(V_1,\ [\frac{\rho_1}{\rho}N_1])^{[\lambda m]}\ Z(V_1,\ [\frac{\rho_2}{\rho}N_1])^{m-[\lambda m]-1}\times$$

$$\times Z(V_1,S_m)\ e^{-\beta U_l N_2}$$

Sem. on Probab.
Vol.38 1973年
P1-91

従って，

$$\frac{1}{|V_2|}\log Z(V_2,N_2,\beta) \geqq \frac{[\lambda m]}{|V_2|}\log Z(V_1,\ [\frac{\rho_1}{\rho}N_1]\ ) + \frac{m-[\lambda m]-1}{|V_2|}\log Z(V_1,\ [\frac{\rho_2}{\rho}N_1]\ )$$

$$+\frac{1}{|V_2|}\log Z(V_1, S_m) - \frac{\beta U_l N_2}{|V_2|}.$$

$\frac{N_2}{|V_2|}\to\rho$ のとき，右辺第１項→ $\frac{\lambda}{(\sqrt[\nu]{|V_1|}+l)^\nu}\log Z(V_1,\ [\frac{\rho_1}{\rho}N_1]\ )$，第２項→$\frac{1-\lambda}{(\sqrt[\nu]{|V_1|}+l)^\nu}\times$ $\log Z(V_1,\ [\frac{\rho_2}{\rho}N_1]\ )$，第３項→０（$N_2$ を大きくすれば，$S_m > |V_2|$）であるから，

$$g(\rho,\beta) \geqq \frac{\lambda}{(\sqrt[\nu]{|V_1|}+l)^\nu}\log Z(V_1,\ [\frac{\rho_1}{\rho}N_1]) + \frac{1-\lambda}{(\sqrt[\nu]{|V_1|}+l)^\nu}\log Z(V_1,\ [\frac{\rho_2}{\rho}N_1]) - \beta\rho U_l.$$

$\frac{N_1}{|V_1|}\to\rho$ とすれば，右辺第１項→ $\lambda g(\rho_1,\beta)$， 第２項→ $(1-\lambda)g(\rho_2,\beta)$ であるから，

$g(\rho,\beta) \geqq \lambda g(\rho_1,\beta)+(1-\lambda)g(\rho_2,\beta)-\beta\rho U_l$. $l\to+\infty$とすれば求める結果が得られる．

(Q.E.D.)

Proposition 2. $f(v,\beta) = \lim_{\substack{\frac{|V|}{N}\to v \\ N\to\infty}} \frac{1}{N}\log Z(V,N,\beta) = v g(v^{-1},\beta)$ とおくと，関数 $f(v,\beta)$ は

i) β を固定すると，v について concave，単調非減少．

ii) v を固定すると，β について convex．

f は Helmholtz の自由エネルギーと呼ばれる．

証明． ii) は Proposition 1 より明らか．

$V_1 \subset V_2$ のとき，$Z(V_1,N,\beta)\leqq Z(V_2,N,\beta)$ であるから，f の単調性が出る．次に $v = \lambda v_1 + (1-\lambda)v_2$ とする．十分大きな N と m に対して，$H_1, H_2, \cdots, H_{[\lambda m]}$ を一辺が $\sqrt[\nu]{v_1 N} - \frac{l}{2}$ の立方体，$H_{[\lambda m]+1},\cdots,H_m$ を一辺が $\sqrt[\nu]{v_2 N}-\frac{l}{2}$ の立方体とする．各 H_j の一辺を $\frac{l}{2}$ だけ長くした立方体を $\widetilde{H_j}$ とおく．まず$\widetilde{H_1}$ から $\widetilde{H}_{[\lambda m]}$ までを V_2 の中にしきつめたとき，残りの V_2 の体積は $|V_2|-[\lambda m]v_1N$．ここで各 H_j $(1\leqq j\leqq m)$ に N ケずつ粒子をバラマキ，$\frac{|V_2|}{N_2} = v$ となるものとする．$(N_2 = mN)$．このとき，

$$\begin{aligned}|V_2|-[\lambda m]v_1N &= mvN-[\lambda m]v_1N \\ &\sim mN(v-\lambda v_1) \\ &= mN(1-\lambda)v_2 \quad .\end{aligned}$$

Sem. on Probab.
Vol.38 1973年
P1-91

ところで残りの部分に $\widetilde{H}_{[\lambda m]+1}, \cdots, \widetilde{H}_m$ をしきつめていくと, $m-[\lambda m]$ 個の体積は $(m-[\lambda m])v_2N \sim mN(1-\lambda)v_2$. よって V_2 を外側に各辺 $2\sqrt[\nu]{\max(v_1, v_2)N}$ だけのばしたものを $\widetilde{V}_2$ とおくと, 明らかに $\widetilde{V}_2$ は $\widetilde{H}_1, \cdots, \widetilde{H}_m$ をすべて含む. (*) 式より,

$$Z(\widetilde{V}_2, mN) \geqq Z(H_1, N)^{[\lambda m]} Z(H_m, N)^{m-[\lambda m]} e^{-\beta U_l N_2},$$

$$\frac{\log Z(\widetilde{V}_2, mN)}{mN} \geqq \frac{[\lambda m]}{mN} \log Z(H_1, N) + \frac{m-[\lambda m]}{mN} \log Z(H_m, N) - \beta U_l.$$

$|\widetilde{V}_2| \sim |V_2|$ であるから, 上式で $m \to \infty$ とすれば,

$$f(v) \geqq \lambda f(v_1) + (1-\lambda) f(v_2) - \beta U_l.$$

最後に $l \to \infty$ とすれば良い. (Q.E.D.)

Proposition 3.

$$\lim_{N\to\infty} \max_{0 \leqq \frac{V}{|V|} \leqq 1} \left| g\left(\frac{N}{|V|}, \beta\right) - \frac{1}{|V|} \log Z(V, N, \beta) \right| = 0.$$

証明. 1°) $v_0 < +\infty$ を任意に固定する. このとき, 次の式が成立することを示そう.

$$\lim_{N\to\infty} \max_{1 \leqq \frac{|V|}{N} \leqq v_0} \left| f\left(\frac{|V|}{N}, \beta\right) - \frac{1}{N} \log Z(V, N, \beta) \right| = 0.$$

いま,

$$\lim_{N\to\infty} \max_{1 \leqq \frac{|V|}{N} \leqq v_0} \left| f\left(\frac{|V|}{N}, \beta\right) - \frac{1}{N} \log Z(V, N, \beta) \right| = \delta > 0$$

と仮定する. V_n, N_n $\left(1 \leqq \frac{|V_n|}{N_n} \leqq v_0\right)$ が存在して

$$\left| f\left(\frac{|V_n|}{N_n}, \beta\right) - \frac{1}{N_n} \log Z(V_n, N_n, \beta) \right| \geqq \frac{\delta}{2}.$$

V_n, N_n の部分列で $\frac{|V_n|}{N_n} \to v$ となるものを改めて V_n, N_n とすれば, $f\left(\frac{|V_n|}{N_n}, \beta\right) \to f(v, \beta)$
$\frac{1}{N_n} \log Z(V_n, N_n, \beta) \to f(v, \beta)$. これは矛盾.

従って，任意の $0<\rho_0<1$ に対して，

$$\lim_{N\to\infty}\max_{\rho_0\leqq\frac{N}{|V|}\leqq 1}\left|g\left(\frac{N}{|V|},\beta\right)-\frac{1}{|V|}\log Z(V,N,\beta)\right|=0.$$

2°) $0\leqq\frac{N}{|V|}\leqq\rho_0$ における一様性を証明しよう．$M\in D_{V,N}$ とすれば，

$$U(M)=\frac{1}{2}\sum_{t,s\in M}U(t-s)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{\substack{s\in M\\ t\in Z^\nu}}U(t-s)-\frac{1}{2}\sum_{\substack{s\in M\\ t\notin V}}U(t-s)-\frac{1}{2}\sum_{\substack{s\in M\\ t\in V\setminus M}}U(t-s)$$

$$=N\cdot c-o(|V|)-\frac{1}{2}\sum_{\substack{s\in M\\ t\in V\setminus M}}U(t-s).$$

但し，第２項の評価は第１章 §5 Lemma 2 を使い，$\frac{1}{2}\sum U(t)=c$ とおいた．従って，

$$\frac{1}{|V|}\log Z(V,N,\beta)=-\beta\frac{N}{|V|}\cdot c+\frac{1}{|V|}\log\sum_{M\in D_{V,N}}\exp\left[\frac{\beta}{2}\left\{\sum_{\substack{t\in M\\ s\in V\setminus M}}U(t-s)\right\}\right]+O(1).$$

上式の N を $|V|-N$ でおきかえると，第２項は $M\to V\setminus M$ で不変であるから，

$$\frac{1}{|V|}\log Z(V,|V|-N,\beta)=-\beta c\left(1-\frac{N}{|V|}\right)+\frac{1}{|V|}\log\sum_{D_{V,|V|-N}}\exp\left[-\frac{\beta}{2}\left\{\sum_{\substack{t\in M\\ s\in V\setminus M}}U(t-s)\right\}\right]+O(1).$$

$$=-\beta c\left(1-2\frac{N}{|V|}\right)+\frac{1}{|V|}\log Z(V,N,\beta)+O(1).$$

$\frac{N}{|V|}\to\rho$ とすることにより，$g(1-\rho,\beta)=-\beta c(1-2\rho)+g(\rho,\beta)$ がわかる．従って，

$$\frac{1}{|V|}\log Z(V,|V|-N)-g\left(1-\frac{N}{|V|}\right)=\frac{1}{|V|}\log Z(V,N)-g\left(\frac{N}{|V|}\right).$$

右辺は $\rho_0\leqq\frac{N}{|V|}\leqq 1$ で一様に０に収束するから，左辺の収束も一様である．すなわち，

Sem. on Probab.
Vol.38 1973年
P1-91

$$\lim_{N\to\infty} \max_{0 \leqq \frac{V}{|V|} \leqq 1-\rho_0} \left| \frac{1}{|V|} \log Z(V, N) - g\left(\frac{N}{|V|}\right) \right| = 0.$$

$\rho_0 < \dfrac{1}{2}$ とすれば，上式と 1°) と合せて求める結果が得られた． (Q.E.D.)

大分配関数 Ξ についても同様の結果を証明しよう．

$$\Xi(V, \mu, \beta) = \sum_{M \subset V} \exp\left[\beta\left\{\mu N(M) - U(M)\right\}\right]$$

$$= \sum_{N=0}^{|V|} e^{\beta\mu N} Z(V, N, \beta),$$

$$\chi(\mu, \beta) = \sup_{0 \leqq \rho \leqq 1} \left\{ g(\rho, \beta) + \beta\mu\rho \right\}$$

とおく．

定理 2.

$$\lim_{V \uparrow Z^\nu} \frac{1}{|V|} \log \Xi(V, \mu, \beta) = \chi(\mu, \beta).$$

但し，V は直方体にとる．これは Gibbs の自由エネルギーと呼ばれる．

証明． 1°) $\delta > 0$ を任意にとると，$0 \leqq \widetilde{\rho} \leqq 1$ が存在して，

$$g(\widetilde{\rho}) + \beta\mu\widetilde{\rho} \geqq \chi(\mu) - \delta.$$

また，定義から $\Xi(V) \geqq e^{\mu\beta N} Z(V, N)$ であるから，

$$\frac{1}{|V|} \log \Xi(V) \geqq \mu\beta \frac{N}{|V|} + \frac{1}{|V|} \log Z(V, N).$$

$\dfrac{N}{|V|} \to \widetilde{\rho}$ とすれば，

$$\underline{\lim}_{V} \frac{1}{|V|} \log \Xi(V) \geqq \mu\beta\widetilde{\rho} + g(\widetilde{\rho}) \geqq \chi(\mu) - \delta.$$

δ は任意で御座居ましたから，

Sem. on Probab.
Vol.38 1973年
P1-91

$$\underline{\lim}\ \frac{1}{|V|}\log \Xi(V) \geqq \chi(\mu).$$

2°) 逆向きの不等式を出そう．Proposition 3 により，任意の $\delta>0$ に対して，V_0 が存在して，$V \supset V_0$ ならば，任意の N に対して，

$$\frac{1}{|V|}\log Z(V, N) \leqq g\left(\frac{N}{|V|}\right)+\delta .$$

すなわち，

$$Z(V, N) \leqq \exp\left[\ |V|\left\{ g\left(\frac{N}{|V|}\right)+\delta \right\}\right] .$$

従って，

$$\begin{aligned}
\Xi(V) &= \sum_{N=0}^{|V|} e^{\beta\mu N} Z(V, N) \\
&\leqq \sum_{N=0}^{|V|} \exp\left[\beta\mu N+|V|\left\{ g\left(\frac{N}{|V|}\right)+\delta\right\}\right] \\
&= \sum_{N=0}^{|V|} \exp\left[\ |V|\left\{\beta\mu\cdot\frac{N}{|V|}+g\left(\frac{N}{|V|}\right)+\delta\right\}\right] \\
&\leqq \sum_{N=0}^{|V|} \exp\left[\ |V|\left\{\chi(\mu)+\delta\right\}\right] \\
&= |V|\cdot\exp\left[\ |V|\left\{\chi(\mu)+\delta\right\}\right] .
\end{aligned}$$

これより，

$$\overline{\lim}\ \frac{1}{|V|}\log \Xi(V) \leqq \chi(\mu)$$

を得る． (Q.E.D.)

§2. Legendre 変換

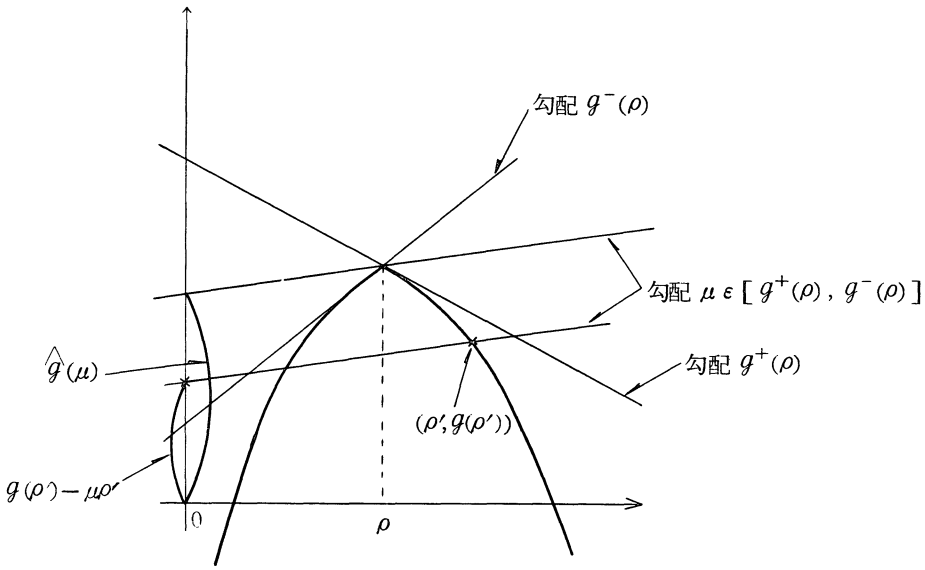
前 § でみた $\chi(\mu)=\sup\limits_{0\leqq\rho\leqq 1}\{g(\rho)+\beta\mu\rho\}$ なる関係は Legendre 変換と呼ばれるものである．この § ではこの変換の性質を調べよう．

g を $[0,1]$ 上の concave な関数とする．このとき，

Sem. on Probab.
Vol.38 1973年
P1-91

$$\hat{g}(\mu) = \max_{0 \leqq \rho \leqq 1} \{ g(\rho) - \mu\rho \}, \quad -\infty < \mu < +\infty$$

とおこう. g の左右の微分を g^-, g^+ と書こう.



上図から明らかなように, $\mu \in [g^+(\rho), g^-(\rho)]$ と $\hat{g}(\mu) = g(\rho) - \mu\rho$ とは同値である. 従って, g が点 ρ で微分可能であれば, $\hat{g}(g'(\rho)) = g(\rho) - g'(\rho)\rho$. また, g が点 ρ で微分可能でなければ, $\hat{g}$ は区間 $[g^+(\rho), g^-(\rho)]$ で直線になる.

Proposition 1. g が concave ならば, $\hat{g}$ は convex である.

証明. $\hat{g}(\lambda\mu_1 + (1-\lambda)\mu_2) = \max\{ g(\rho) - (\lambda\mu_1 + (1-\lambda)\mu_2)\rho \}$

$$= \max\{ \lambda(g(\rho) - \mu_1\rho) + (1-\lambda)(g(\rho) - \mu_2\rho) \}$$

$$\leqq \max\{ \lambda(g(\rho) - \mu_1\rho) \} + \max\{ (1-\lambda)(g(\rho) - \mu_2\rho) \}$$

$$= \lambda\hat{g}(\mu_1) + (1-\lambda)\hat{g}(\mu_2).$$ (Q.E.D.)

次に convex な f に対して,

$$\tilde{f}(\rho) = \inf_{-\infty < \mu < +\infty} (f(\mu) + \mu\rho)$$

Sem. on Probab.
Vol.38 1973年
P1-91

とおく．前と同様に，$\rho \in [f^-(\mu), f^+(\mu)]$ と $\tilde{f}(\rho) = f(\mu) + \rho\mu$ とは同値である．従って，f が点 μ で微分可能であれば，$\tilde{f}(f'(\mu)) = f(\mu) + f'(\mu)\mu$．また，$f$ が点 μ で微分可能でなければ，$\tilde{f}$ は区間 $[f^-(\mu), f^+(\mu)]$ で直線になる．

<u>Proposition 2.</u>　g が concave ならば $\widetilde{\hat{g}} = g$．

<u>証明.</u>　任意の ρ と μ に対して，定義により，$\hat{g}(\mu) \geqq g(\rho) - \mu\rho$，すなわち，$\hat{g}(\mu) + \mu\rho \geqq g(\rho)$．$\mu$ に関して下限をとれば，$\widetilde{\hat{g}}(\rho) \geqq g(\rho)$．

逆向きの不等式を出そう．任意の μ に対して，$\rho(\mu)$ が存在して，$\hat{g}(\mu) = g(\rho(\mu)) - \mu\rho(\mu)$．一方 $\widetilde{\hat{g}}(\rho) \leqq \hat{g}(\rho) + \mu\rho$ であるから，これに上の $\rho(\mu)$ を代入して，$\widetilde{\hat{g}}(\rho(\mu)) \leqq \hat{g}(\rho(\mu)) + \mu\rho(\mu) = g(\rho(\mu))$．　前に出した逆向きの不等式と合わせて $\widetilde{\hat{g}}(\rho(\mu)) = g(\rho(\mu))$．任意の $\rho \in [0,1]$ に対して，$g^+(\rho) \leqq \mu \leqq g^-(\rho)$ とすれば，$\rho = \rho(\mu)$（すなわち，$\hat{g}(\mu) = g(\rho) - \mu\rho$）であるから，$\widetilde{\hat{g}}(\rho) = g(\rho)$．　(Q.E.D.)

<u>系.</u>　i）g が点 ρ で微分不可能なことと，$\hat{g}$ が $[g^+(\rho), g^-(\rho)]$ で直線になることとは同値である．

ii）$\hat{g}$ が点 μ で微分不可能なことと，g が $[\hat{g}^-(\mu), \hat{g}^+(\mu)]$ で直線になることとは同値である．

この結果を χ, g に対して適用してみよう．

$$\chi(\mu, \beta) = \max_{0 \leqq \rho \leqq 1} \{ g(\rho, \beta) + \mu\beta\rho \}$$

$$= \hat{g}(-\mu\beta, \beta),$$

$$f(v, \beta) = v g(v^{-1}, \beta)$$

であった．従って上の系により，β を固定したとき，

$$\chi(\mu) \text{ の角（かど）} \longleftrightarrow g \text{ の直線部} \longleftrightarrow \frac{\partial f}{\partial v} \text{ の水平部（相転移）}$$

という対応が得られる．このようにして，χ の μ についての微分可能性が問題になりました．

Sem. on Probab.
Vol.38 1973年
P1-91

§3. Kirkwood-Salsburg の方程式

Gibbs の自由エネルギー χ の μ についての regularity を調べよう．その方法は二つあり，ひとつは Kirkwood-Salsburg の方程式であり，もうひとつは Lee-Yang の方法である．まず前者を紹介しよう．

$z=e^{\beta\mu}$ とおくと，$\Xi(V,z,\beta)=\sum_{M\subset V} z^{|M|}e^{-\beta U(M)}$．$\Xi$ の中の z のところは，神経質にいえば $\beta^{-1}\log z$ と書くべきところだけれども，マア コマカイコトハゴチャゴチャイワントイテ．

ρ_V を次のように定義しよう．

$$\rho_V(L)=\begin{cases}\Xi(V,z,\beta)^{-1}\sum\limits_{M\subset V\setminus L} z^{|M|+|L|}e^{-\beta U(M\cup L)}, & L\subset V \text{ のとき},\\[2ex] 0 & ,\ \text{その他のとき}.\end{cases}$$

この $\rho_V(L)$ は，L を含んだ configuration が現われる確率である．Z^ν のすべての点に辞書式に順序をつけよう．$t_0=t_0(L)$ を L の最初の点とする．$L'=L\setminus\{t_0\}$ とおこう（$L\neq\phi$ とする）．

$$W(L)=\sum_{s\in L'}U(s-t_0)$$

とおけば，$M\subset V\setminus L$ に対して，

$$\begin{aligned}U(M\cup L)&=\frac{1}{2}\sum_{t,s\in M\cup L}U(s-t)\\ &=\frac{1}{2}\sum_{t,s\in M\cup L'}U(s-t)+\sum_{s\in M\cup L}U(s-t_0)\\ &=U(M\cup L')+\sum_{s\in M}U(s-t_0)+W(L).\end{aligned}$$

このとき，

$$e^{-\beta U(M\cup L)}=e^{-\beta W(L)}\,e^{-\beta U(M\cup L')}\prod_{s\in M}\{(e^{-\beta U(s-t_0)}-1)+1\},$$

$$\prod_{s\in M}\{(e^{-\beta U(s-t_0)}-1)+1\}=\sum_{J\subset M}\prod_{s\in \underset{J}{\cancel{M}}}(e^{-\beta U(s-t_0)}-1).$$

上式右辺の中を，

$$K(t,J)=\prod_{s\in J}(e^{-\beta U(s-t)}-1)$$

Sem. on Probab.
Vol.38 1973年
P1-91

とおこう．これらをまとめて， $L \subset V$ のとき

$$\rho_V(L) = \Xi(V, z, \beta)^{-1} e^{-\beta W(L)} \sum_{M \subset V \setminus L} z^{|M|+|L|} e^{-\beta U(M \cup L')} \sum_{J \subset M} K(t_0, J)$$

$$= \Xi^{-1} e^{-\beta W(L)} \sum_{J \subset V \setminus L} \sum_{J \subset M \subset V \setminus L} z^{|M|+|L|} e^{-\beta U(M \cup L')} K(t_0, J).$$

ここで， $J \subset V \setminus L$ に対して，

$$\Xi^{-1} \sum_{J \subset M \subset V \setminus L} z^{|M|+|L|} e^{-\beta U(M \cup L')}$$

$$= \Xi^{-1} \sum_{I \subset V \setminus (L \cup J)} z^{|J|+|I|+|L|} e^{-\beta U(M \cup L')} \qquad (M = J \cup I,\ J \cap I = \phi \text{ とする})$$

$$= \Xi^{-1} z \sum_{I \subset V \setminus (L \cup J)} z^{|J|+|I|+|L'|} e^{-\beta U(M \cup L')}$$

$$= \Xi^{-1} z \Big(\sum_{I \subset V \setminus (L' \cup J)} - \sum_{\substack{I \subset V \setminus (L' \cup J) \\ I \ni t_0}} \Big) z^{|J|+|I|+|L'|} e^{-\beta U(M \cup L')}.$$

上式第１項は $z\rho_V(L' \cup J)$ である．第２項は，

$$\Xi^{-1} \sum_{\substack{I \subset V \setminus (L' \cup J) \\ I \ni t_0}} z^{|J|+|I \setminus t_0|+|L|} e^{-\beta U(J \cup (I \setminus t_0) \cup L)}$$

$$= \Xi^{-1} \sum_{I \subset V \setminus (L \cup J)} z^{|J|+|I|+|L|} e^{-\beta U(J \cup I \cup L)}$$

$$= \rho_V(L \cup J).$$

以上をまとめて， $L \subset V$ のとき

$$\rho_V(L) = z e^{-\beta W(L)} \sum_{J \subset V \setminus L} K(t_0, J) \{ \rho_V(L' \cup J) - \rho_V(L \cup J) \}.$$

ここで $K(t_0, \phi) = 1$ であるから，右辺の $\rho_V(L) = \rho_V(L \cup \phi)$ ($J = \phi$ のとき) を左辺に移しましょう．

Sem. on Probab.
Vol.38 1973年
P1-91

$$\rho_V(L) = \frac{ze^{-\beta W(L)}}{1+ze^{-\beta W(L)}} \left[\rho_V(L') + \sum_{\phi \neq J \subset V \setminus L} K(t_0, J) \{ \rho_V(L' \cup J) - \rho_V(L \cup J) \} \right].$$

とくに，Lが一点集合のとき $L' = \phi$，$\rho_V(\phi) = 1$ に注意すれば，

$$\rho_V(L) = \frac{ze^{-\beta W(L)}}{1+ze^{-\beta W(L)}} \left[1 + \sum_{\phi \neq J \subset V \setminus L} K(t_0, J) \{ \rho_V(L' \cup J) - \rho_V(L \cup J) \} \right].$$

これを Kirkwood-Salsburg の方程式という.

いま $\rho = \rho(L)$ を Z^ν の有限部分集合 L の全体の上で定義された有界な複素数値関数とし，そのような関数全体$\boldsymbol{B}$ の中に一様ノルム $\|\cdot\|$ を入れる. $\boldsymbol{B}$ の上で operator K を次のように定義する.

$$K\rho(L) = \begin{cases} \dfrac{ze^{-\beta W(L)}}{1+ze^{-\beta W(L)}} \left[\rho(L') + \displaystyle\sum_{\phi \neq J \subset Z^\nu \setminus L} K(t_0, J) \{ \rho(L' \cup J) - \rho(L \cup J) \} \right], & \sharp L \geqq 2 \\ \dfrac{ze^{-\beta W(L)}}{1+ze^{-\beta W(L)}} \displaystyle\sum_{\phi \neq J \subset Z^\nu \setminus L} K(t_0, J) \{ \rho(L' \cup J) - \rho(L \cup J) \}, & \sharp L = 1. \end{cases}$$

また次の関数を導入しよう.

$$\alpha(L) = \begin{cases} 1, & \sharp L = 1, \\ 0, & \sharp L \neq 1, \end{cases}$$

$$\chi_V(L) = \begin{cases} 1, & L \subset V, \\ 0, & L \not\subset V. \end{cases}$$

このとき，Kirkwood-Salsburg の方程式は

$$\rho_V = \chi_V \frac{z}{1+z} \alpha + \chi_V K \rho_V$$

となる. 従って，$\|K\| < 1$ ならば ρ_V は Neumann 級数に展開される. Kの normを評価しよう.

<u>Lemma 1.</u> $D = \sum_{s \in Z^\nu} |U(s)|$ とおくと

$$\sum_{s \in Z^\nu} | e^{-\beta U(s-t)} - 1 | \leqq e^{\beta D} - 1.$$

証明. 容易に分るように $|e^a - 1| \leqq e^{|a|} - 1$. また $a, b > 0$ に対して $(e^a - 1) + (e^b - 1) \leqq e^{a+b} - 1$. 従って,

$$\sum_{s \in Z^\nu} | e^{-\beta U(s-t)} - 1 | \leqq \sum \{ e^{\beta |U(s-t)|} - 1 \}$$

$$\leqq e^{\beta \sum |U(s-t)|} - 1 = e^{\beta D} - 1. \qquad \text{(Q.E.D.)}$$

Lemma 2. $\sum_{\phi \neq J} |K(t, J)| \leqq \exp(e^{\beta D} - 1) - 1.$

証明.
$$\sum_{\phi \neq J} |K(t, J)| = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\{s_1, s_2, \cdots, s_n\}} \prod_{j=1}^{n} | e^{-\beta U(s_j - t)} - 1 |$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{(s_1, s_2, \cdots, s_n)} \prod_{j=1}^{n} | e^{-\beta U(s_j - t)} - 1 |$$

$$\leqq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (e^{\beta D} - 1)^n = \exp(e^{\beta D} - 1) - 1.$$

ここで, 途中の不等式は Lemma 1 による. (Q.E.D.)

Lemma 3. $A = -\sum_{s : U(s) \leqq 0} U(s)$ とおく. $Re\, z \geqq -e^{-\beta A}$ ならば, すべての L に対して,

$$\left| \frac{z\, e^{-\beta W(L)}}{1 + z\, e^{-\beta W(L)}} \right| \leqq \left| \frac{z\, e^{\beta A}}{1 + z\, e^{\beta A}} \right|.$$

証明. $\left| \dfrac{e^{-\beta A} + z}{e^{\beta W(L)} + z} \right| \leqq 1$ を示せば良い. $-A \leqq W(L)$ であるから, これは $Re\, z \geqq -\dfrac{e^{\beta W(L)} + e^{-\beta A}}{2}$ のとき成り立つ. $-\dfrac{e^{\beta W(L)} + e^{-\beta A}}{2} \leqq -e^{-\beta A}$ より, Lemma の結果を得る.
(Q.E.D.)

Lemma 4 $Re\, z \geqq -e^{-\beta A}$ のとき,

Sem. on Probab.
Vol.38 1973年
P1-91

$$\|K\| \leqq \left| \frac{z\, e^{\beta A}}{1 + z\, e^{\beta A}} \right| \left\{ 2 \exp(e^{\beta D} - 1) - 1 \right\} .$$

証明. operator K の最初の係数が $\left| \dfrac{z\, e^{\beta A}}{1 + z\, e^{\beta A}} \right|$ でおさえられることは Lemma 3 による.

$\|\rho\| = 1$ のとき, Lemma 2 により,

$$\left| \sum_{\phi \neq J \subset Z^{\nu} \setminus L} K(t_0, J) \left\{ \rho(L' \cup J) - \rho(L \cup J) \right\} \right|$$

$$\leqq 2 \sum_{\phi \neq J} |K(t_0, J)| \leqq 2 \left\{ \exp(e^{\beta D} - 1) - 1 \right\}.$$

従って,

$$\|K\| \leqq \left| \frac{z\, e^{\beta A}}{1 + z\, e^{\beta A}} \right| \left[1 + 2 \left\{ \exp(e^{\beta D} - 1) - 1 \right\} \right]$$

$$= \left| \frac{z\, e^{\beta A}}{1 + z\, e^{\beta A}} \right| \left\{ 2 \exp(e^{\beta D} - 1) - 1 \right\} . \qquad \text{(Q.E.D.)}$$

定理 1. $C = \left\{ z\, ;\, Re\, z \geqq - e^{-\beta A},\ \left| \dfrac{z\, e^{\beta A}}{1 + z\, e^{\beta A}} \right| \{ 2 \exp(e^{\beta D} - 1) - 1 \} < 1 \right\}$ とおく.

i) $z \in C$ とすると $\rho = \chi_V \dfrac{z}{1+z} \alpha + \chi_V K \rho$,

$$\rho = \frac{z}{1+z} \alpha + K\rho$$

はそれぞれ $\boldsymbol{B}$ 内で唯一の解 $\rho_{V,z}$, ρ_z を持ち, その norm $\|\rho_{V,z}\|$, $\|\rho_z\|$ は両方とも

$$\left| \frac{z}{1+z} \right| \Big/ \left[1 - \left| \frac{z\, e^{\beta A}}{1 + z\, e^{\beta A}} \right| \left\{ 2 \exp(e^{\beta D} - 1) - 1 \right\} \right]$$

で上からおさえられる.

$\rho_{V,z}(L)$, $\rho_z(L)$ は C で analytic である.

ii) $z \in C$ のとき, $\Xi(V, z, \beta) \neq 0$.

Sem. on Probab.
Vol.38 1973年
P1-91

iii) $z \in C$ のとき 極限 $\displaystyle\lim_{V \to Z^\nu} \frac{\log \overset{\Xi}{\cancel{\chi}}(V, z, \beta)}{|V|} = \chi(z, \beta)$ が存在し，その極限は C 内で analytic である.

証明. 1°) $z \in C$ のとき，$\|K\| < 1$. 従って $\rho_{V,z} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (\chi_V K)^n \chi_V \frac{z}{1+z}\alpha$. 無限和は z について広義一様に収束し，各項は z の正則関数であるから $\rho_{V,z}(L)$ は正則である.

2°) $z > 0$ とする.

$$z \frac{d \log \Xi(V, z, \beta)}{dz} = \Xi^{-1} \sum_{M \subset V} N(M)\, z^{N(M)}\, e^{-\beta U(M)}$$

$$= \langle N \rangle$$

$$= \sum_{t \in V} \rho_{V,z}(\{t\}).$$

$\rho_{V,0}(\{t\}) = 0$ であるから，

$$\frac{d \log \Xi(V, z, \beta)}{dz} = \sum_{t \in V} \frac{\rho_{V,z}(\{t\})}{z}$$

の右辺は C 内で regular であり，その不定積分：

$$\log \Xi(V, z, \beta) = \int \sum_{t \in V} \frac{\rho_{V,z}(\{t\})}{z}\, dz$$

も C 内で regular である. 従って，$\Xi(V, z, \beta)$ は C 内に零を持たない.

3°) $C_r = \left\{ z \,;\, Re\, z \geqq -e^{-\beta A},\ \left| \dfrac{z e^{\beta A}}{1 + z e^{\beta A}} \right| \{ 2 \exp(e^{\beta D} - 1) - 1 \} < r \right\}$ $(0 < r < 1)$ とおこう. $-1 \notin C_r$ に注意し，我々の定理1，I) の $\|\rho_{V,z}\|$ の評価を使うと，$z \in C_r$ のとき

$$\left| \frac{\rho_{V,z}(\{t\})}{z} \right| \leqq \max_{z \in C_r} \left| \frac{1}{1+z} \right| \cdot \frac{1}{1-r}.$$

この右辺を M_r とおき，C_r の直径を $\mathrm{diam}(C_r)$ と書けば，

$$|\log \Xi(V, z, \beta)| = \left| \int_0^z \frac{\sum_{t \in V} \rho_{V,z}(\{t\})}{z}\, dz \right|$$

Sem. on Probab.
Vol.38 1973年
P1-91

$$\leqq \operatorname{diam}(C_r)\cdot M_r\cdot |V|\,.$$

これより, $|V|^{-1}\log \Xi(V, z, \beta)$ は V について一様に有界であることがわかる. ここで Vitali の定理を使う.

Vitali の定理. D を領域とし, $f_n(z)$ を D で正則で n について一様に有界な関数列とする. $E\subset D$ を D 内に集積点を持つ集合とし, $z\in E$ に対しては $f_n(z)$ は $n\to\infty$ のとき収束するとしよう. このとき, 任意の $z\in D$ に対して $f_n(z)$ は広義一様に D 内の正則関数に収束する.

我々の場合には $D=C_r$, $E=\{z\,;Re\,z>0\}\cap C_r$ とおけばよい. (Q.E.D.)

定理 2. β が十分小さいとき, 半直線 $\{z>0\}$ を含む領域 D が存在して, D 上で極限 $\chi(z,\beta)=\lim|V|^{-1}\log\Xi(V, z, \beta)$ が存在して, 正則関数になる.

証明. $$\Xi'(V, z, \beta)=\sum_{M\subset V}(z e^{-\beta c})^{|M|}\exp\{\frac{\beta}{2}\sum_{\substack{s\in M\\ t\in V\setminus M}}U(t-s)\}$$

とおこう. 但し, $c=\dfrac{1}{2}\sum_{s\in Z^\nu}U(s)$. $\{\quad\}$ 内の和は $M\to V\setminus M$ なる変換で不変であるから,

$$\Xi'(V, z, \beta)=\sum_{M\subset V}(z e^{-\beta c})^{|V\setminus M|}\exp\{\frac{\beta}{2}\sum_{\substack{s\in V\setminus M\\ t\in M}}U(t-s)\}$$

$$=(z e^{-\beta c})^{|V|}\sum(z^{-1}e^{\beta c})^{|M|}\exp\{\frac{\beta}{2}\sum_{\substack{s\in V\setminus M\\ t\in M}}U(t-s)\}$$

$$=(z e^{-\beta c})^{|V|}\,\Xi'(V, z^{-1}e^{2\beta c}, \beta).$$

§1 Proposition 3 の証明中に次の式を使った ;

$$U(M)=|M|\,c-\frac{1}{2}\sum_{\substack{s\in M\\ t\in V\setminus M}}U(s-t)+o(|V|).$$

これによれば, $\chi(z,\beta)=\lim|V|^{-1}\log\Xi(V, z, \beta)=\lim|V|^{-1}\log\Xi'(V, z, \beta)$. 従って,

$$\chi(z,\beta)=-\beta c+\log z+\chi(z^{-1}e^{+2\beta c}, \beta)$$

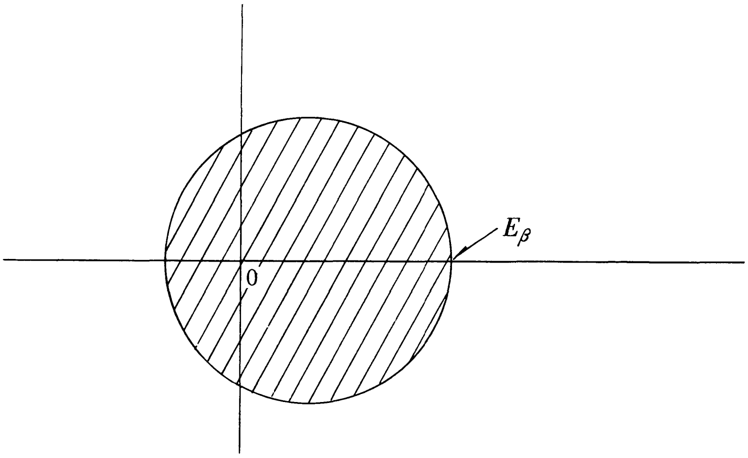
Sem. on Probab.
Vol.38 1973年
P1-91

この式の左辺は定理1により C で正則，右辺は $C'=\{\,z\,;\,z^{-1}e^{+2\beta c}\in C\,\}$ で正則である．β が小なるとき，$C\cup C'$ が $\{\,z>0\,\}$ を含むことをみれば良い．C と C' を決める条件のうち，$Re\ z\geqq -e^{-\beta A}$ と $Re\ z^{-1}e^{2\beta c}\geqq -e^{-\beta A}$ とは $z>0$ のとき成立するから，もう一方の条件について調べる．

まず C の方の条件は，

$$\left|\frac{z\,e^{\beta A}}{1+z\,e^{\beta A}}\right|\{\,2\exp(e^{\beta D}-1)-1\,\}<1$$

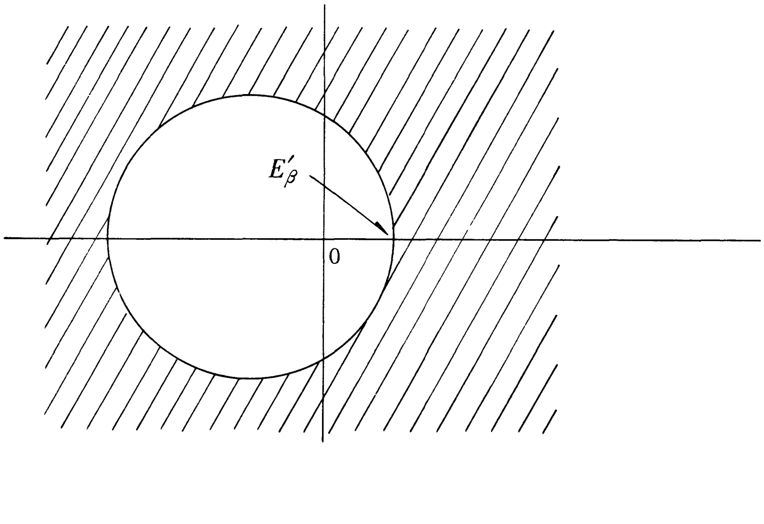
であったが，これは下図の斜線部である．但し $E_\beta=\dfrac{e^{-\beta A}}{2\,[\exp\{\,e^{\beta D}-1\,\}-1]}$ ．



いっぽう C' の方の条件は，

$$\left|\frac{z^{-1}e^{2\beta c}\,e^{\beta A}}{1+z^{-1}e^{2\beta c}\,e^{\beta A}}\right|\{\,2\exp(e^{\beta D}-1)-1\,\}<1$$

であるが，これは下図の斜線部である．但し，$E'_\beta=2\,e^{\beta(A+2c)}\{\,\exp(e^{\beta D}-1)-1\,\}$．



Sem. on Probab.
Vol.38 1973年
P1-91

β が十分小さいとき， $E_\beta > E'_\beta$ ．このとき $C \cup C' \supset \{ z > 0 \}$． (Q.E.D.)

系． 任意の β に対して， $\chi(z, \beta)$ は $(0, E_\beta)$ 又は $(E'_\beta, +\infty)$ を含む領域で正則である．

もともと $z = e^{\beta\mu}$ であったから，z の正則性から μ についての正則性が出ることに注意しよう．

定理 2. β が十分小さいとき， $\chi(\mu, \beta) = \lim |V|^{-1} \log \Xi(V, \mu, \beta)$ は μ の実解析関数である．ここで χ の中（つまり Ξ の中）の変数を z から μ に転換してしまった． そういえば昔「道標転換派」というのがあったナァ．

§4. 李政道と楊振寧の定理

前節で Kirkwood - Salsburg の方程式を使って， χ の解析性を調べたが， potential U が non-positive なときにはもっと精密な結果が，李＝楊によって得られている． 記号を次のようにきめる．

$$\triangle_n = \{ 1, 2, \cdots, n \},$$

$$z = (z_1, z_2, \cdots, z_n), \quad (z_j \text{ は複素数})$$

$$S \subset \triangle_n \text{ に対し} \quad z^S = \prod_{j \in S} z_j \ .$$

Lemma. A_{ij} は実数で， $-1 < A_{ij} < 1$， $A_{ij} \neq 0$， $A_{ij} = A_{ji}$ をみたすものとする．

$$\mathcal{P}_n(z_1, z_2, \cdots, z_n) = \sum_{S \subset \triangle_n} z^S \Big(\prod_{j \in S} \prod_{i \in \triangle_n \setminus S} A_{ij} \Big)$$

とおく． $\mathcal{P}_n(z_1, z_2, \cdots, z_n) = 0$， $|z_1| \geqslant 1$， $\cdots$， $|z_{n-1}| \geqslant 1$ ならば， $|z_n| \leqq 1$．

証明． 帰納法による． $n = 1$ のとき， $\mathcal{P}_1(z_1) = 1 + z_1$ であるから自明． $n - 1$ まで成立すると仮定しよう．

$$\mathcal{P}_n(z_1, \cdots, z_{n-1}, z_n) = A + B\, z_{n-1} + C\, z_n + D\, z_{n-1}\, z_n$$

と分解し， $|z_1| \geqq 1, \cdots, |z_{n-2}| \geqq 1$ ならば $D \neq 0$ となることを示そう． 実際，

Sem. on Probab.
Vol.38 1973年
P1-91

$$D z_{n-1} z_n = \sum_{S\subset\triangle_{n-2}} z^{S\cup\{n-1,n\}} \Big(\prod_{j\in S\cup\{n-1,n\}} \prod_{i\in\triangle_{n-2}\setminus S} A_{ij} \Big),$$

$$D = \sum_{S\subset\triangle_{n-2}} z^S \Big(\prod_{j\in S} \prod_{i\in\triangle_{n-2}\setminus S} A_{ij} \Big) \Big(\prod_{i\in\triangle_{n-2}\setminus S} A_{i\,n-1} A_{in} \Big).$$

ここで $z_i = A_{in-1} A_{in} \zeta_i$, $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_{n-2})$ とおくと

$$D = \sum_{S\subset\triangle_{n-2}} \zeta^S \Big(\prod_{i\in S} A_{in-1} A_{in} \Big) \Big(\prod_{j\in S} \prod_{i\in\triangle_{n-2}\setminus S} A_{ij} \Big) \Big(\prod_{i\in\triangle_{n-2}\setminus S} A_{in-1} A_{in} \Big)$$

$$= \sum_{S\subset\triangle_{n-2}} \zeta^S \Big(\prod_{j\in S} \prod_{i\in\triangle_{n-2}\setminus S} A_{ij} \Big) \prod_{i\in\triangle_{n-2}} A_{in-1} A_{in}$$

$$= \mathscr{P}_{n-2}(\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_{n-2}) \prod_{i\in\triangle_{n-2}} A_{in-1} A_{in}.$$

仮定により $|z_i| \geqslant 1$, $-1 < A_{in-1}, A_{in} < 1$ であるから $|\zeta_i| > 1$. 従って帰納法の仮定により $\mathscr{P}_{n-2}(\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_{n-2}) \neq 0$. これより, $D \neq 0$.

いま $|z_1| \geqslant 1, \cdots, |z_{n-2}| \geqslant 1$ とすれば, $\mathscr{P}_n(z_1, \cdots, z_{n-2}, \xi, z) = 0$ は一次変換 ;

$$(*) \qquad \xi = -\frac{A + Cz}{B + Dz}$$

を導入する. このとき $z = \infty$ は $-\dfrac{C}{D}$ に変換されるが, $\left|-\dfrac{C}{D}\right| < 1$ となることを示そう. 実際 $-\dfrac{C}{D} = z_{n-1}$ とおくと,

$$0 = C + D z_{n-1}$$

$$= \sum_{S\subset\triangle_{n-1}} z^S \prod_{j\in S\cup\{n\}} \prod_{i\in\triangle_{n-1}\setminus S} A_{ij}.$$

ここで $z_i = A_{in}\zeta_i$ とおけば, 右辺は

$$\mathscr{P}_{n-1}(\zeta_1, \cdots, \zeta_{n-2}, \zeta_{n-1}) \prod_{i=1}^{n-1} A_{in}$$

となる. $|z_1| \geqslant 1, \cdots, |z_{n-2}| \geqslant 1$ より $|\zeta_1| > 1, \cdots, |\zeta_{n-2}| > 1$ が出る. 帰納法の仮定により, $|z_{n-1}| < |\zeta_{n-1}| \leqq 1$.

Sem. on Probab.
Vol.38 1973年
P1-91

ここで，Lemma が n のとき成立しないと仮定すると，$|z_1'|\geqq 1,\cdots,|z_{n-1}'|\geqq 1$，$|z_n'|>1$ が存在して $\mathscr{P}_n(z_1',\cdots,z_{n-1}',z_n')=0$．変換 (*) で ∞ は単位円内の $-\dfrac{C}{D}$ に，単位外の z_n' は単位円外の z_{n-1}' に写像される．従って，単位円外の点 z_n'' でその像 z_{n-1}'' を単位円周上に持つものがある．すなわち，

$$|z_1'|\geqq 1,\cdots,|z_{n-2}'|\geqq 1,\ |z_{n-1}''|=1,\ |z_n''|>1,$$

$$\mathscr{P}_n(z_1',\cdots,z_{n-2}',z_{n-1}'',z_n'')=0.$$

$\mathscr{P}_n$ は各変数について対称であるから，この手続きをくりかえして，$|\widetilde{z}_1|=1,\cdots,|\widetilde{z}_{n-1}|=1$，$|\widetilde{z}_n|>1$ が存在して $\mathscr{P}_n(\widetilde{z}_1,\widetilde{z}_2,\cdots,\widetilde{z}_n)=0$．

$\mathscr{P}_n(z_1^{-1},z_2^{-1},\cdots,z_n^{-1})=z_1^{-1}\cdots z_n^{-1}\mathscr{P}_n(z_1,\cdots,z_n)$ に注意しよう。z の共役複素数を z^* とかくことにする．

$$\mathscr{P}_n(\widetilde{z}_1,\cdots,\widetilde{z}_{n-1},(\widetilde{z}_n^*)^{-1})$$

$$=\mathscr{P}_n((\widetilde{z}_1^*)^{-1},\cdots,(\widetilde{z}_n^*)^{-1})$$

$$=(\widetilde{z}_1^*)^{-1}\cdots(\widetilde{z}_n^*)^{-1}\mathscr{P}_n(\widetilde{z}_1^*,\cdots,\widetilde{z}_n^*)$$

$$=(\widetilde{z}_1^*)^{-1}\cdots(\widetilde{z}_n^*)^{-1}\mathscr{P}_n(\widetilde{z}_1,\cdots,\widetilde{z}_n)^*=0.$$

$$\mathscr{P}_n(\widetilde{z}_1,\cdots,\widetilde{z}_n)=\widetilde{A}+\widetilde{B}\widetilde{z}_n$$

と分解すれば，前と同様に $\widetilde{B}\fallingdotseq 0$ が示される．従って

$$(\widetilde{z}_n^*)^{-1}=-\frac{\widetilde{A}}{\widetilde{B}}=\widetilde{z}_n.$$

これより $|\widetilde{z}_n|=1$，これは矛盾． (Q.E.D.)

<u>定理 1.</u> A_{ij} は実数で，$-1\leqq A_{ij}\leqq 1$，$A_{ij}=A_{ji}$ をみたすものとする．複素数 z に対して

$$\mathscr{P}_n(z)=\sum_{S\subset\triangle_n} z^{N(S)}\prod_{j\in S}\ \prod_{i\in\triangle_n\setminus S} A_{ij}=0$$

ならば，$|z|=1$．

<u>証明.</u> $A_{ij}\fallingdotseq 0,\pm 1$ のとき，$|z|>1$ ならば Lemma に反する．$|z|<1$ ならば $\mathscr{P}(z^{-1})=$

Sem. on Probab.
Vol.38 1973年
P1-91

$z^{-n}\mathscr{P}(z)=0$ よりやはり Lemma に反する．$A_{ij}=0$，± 1 のときは，代数方程式の根は係数に連続に依存するから，前の場合に帰着できる． (Q.E.D.)

前 § でみたように $\chi(\mu,\beta)=\lim |V|^{-1}\log \Xi'(V,\mu,\beta)$．但し，

$$\Xi'(V,\mu,\beta)=\sum_{M\subseteq V} e^{\beta(\mu-c)|M|}\exp\Big\{\frac{\beta}{2}\sum_{\substack{t\in M\\ s\in V\setminus M}} U(t-s)\Big\},$$

$$c=\frac{1}{2}\sum_{s\in Z^{\nu}} U(s).$$

ここで，$A_{ts}=e^{\frac{\beta}{2}U(t-s)}$，$z=e^{\beta(\mu-c)}$ とおくと，

$$\Xi'(V,\mu,\beta)=\mathscr{P}_{|V|}(z)$$

となり，$U(s)\leqq 0$ を仮定すれば $0<A_{ts}\leqq 1$ となるから定理1が適用できる．$\mathscr{P}_{|V|}(z)$ の零点はすべて単位円周上にあるから，$|z|<1$ で $\mathscr{P}_{|V|}(z)^{\frac{1}{|V|}}$ の解析的な枝で z が実数のとき実数値をとるものがとれる．これに対して，

$$\left|\mathscr{P}_{|V|}(z)^{\frac{1}{|V|}}\right|=\left|\mathscr{P}_{|V|}(z)\right|^{\frac{1}{|V|}}\leqq \mathscr{P}_{|V|}(|z|)^{\frac{1}{|V|}}\leqq \mathscr{P}_{|V|}(1)^{\frac{1}{|V|}}.$$

右辺は $V\to Z^{\nu}$ のとき収束するから，左辺は $|z|<1$ で一様有界である．しかも $0<z<1$ のとき左辺は収束する（§1. 定理2）．従って Vitali の定理により，$\mathscr{P}_{|V|}(z)^{\frac{1}{|V|}}$ は $|z|<1$ で広義一様に正則関数 $\lambda(z)$ に収束する．z が実数のとき $\log\lambda(z)=\chi(\mu,\beta)$ であるから $\lambda(z)\not\equiv 0$．

$\lambda(z)$ の零点を探そう．$\lambda(z_0)=0$，$|z_0|<1$ としよう．$\lambda(z)\not\equiv 0$ であるからその零点は $|z|<1$ で集積していない．従っててきとうな $r>0$ をとれば，$K=\{\,|z-z_0|=r\,\}\subset\{\,|z|<1\,\}$ かつ，K 上で $\lambda(z)\neq 0$．K 上での $|\lambda(z)|$ の最少値を $\delta>0$ とおこう．$\mathscr{P}_{|V|}(z)^{\frac{1}{|V|}}$ は広義一様収束するから，V を十分大きくとると K 上で $\left|\mathscr{P}_{|V|}(z)^{\frac{1}{|V|}}-\lambda(z)\right|<\delta$ とできる．すなわち，

$$\min_{z\in K}|\lambda(z)|>\max_{z\in K}\left|\mathscr{P}_{|V|}(z)^{\frac{1}{|V|}}-\lambda(z)\right|.$$

Rouché の定理により，K 内 $\{\,|z-z_0|<r\,\}$ での λ と $\mathscr{P}_{|V|}(z)^{\frac{1}{|V|}}$ の零点の数は等しい．いっぽう $\mathscr{P}_{|V|}(z)^{\frac{1}{|V|}}$ は零点をもたなかったからこれは矛盾．従って，$\lambda(z)\neq 0$，すなわち $\log\lambda(z)$ が $|z|<1$ で正則なことがわかった．

Sem. on Probab.
Vol.38 1973年
P1-91

また，$\mathcal{P}_{|V|}(z)=z^{|V|}\mathcal{P}_{|V|}(z^{-1})$ より $\mathcal{P}_{|V|}(z)^{\frac{1}{|V|}}$ は $|z|>1$ のとき正則関数 $z\lambda(z^{-1})$ に収束することがわかる．

定理 2. $U(s)\leqq 0$ $(s\in Z^{\nu})$ とする．任意の $\beta>0$ に対して，$|z|<1$ で正則な関数 $p_{\beta}(z)$ が存在し，

$$\mu<c \text{ のとき,}\quad \chi(\mu,\beta)=\lim|V|^{-1}\log\Xi(V,\mu,\beta)=p_{\beta}(e^{\beta(\mu-c)}),$$

$$\mu>c \text{ のとき,}\quad \chi(\mu,\beta)=e^{\beta(\mu-c)}+p_{\beta}(e^{-\beta(\mu-c)}).$$

但し，$c=\dfrac{1}{2}\sum_{s\in Z^{\nu}}U(s)$.

証明. $p_{\beta}=\log\lambda$ とおけば良い．

前 § で β が十分小さければ χ は $\mu=c$ でも正則であることをみた．次の § で β が大きいとき χ は $\mu=c$ で微分不可能（相転移の存在）となる例をみるであろう．

§5. Random fields の一意性との関係

我々の目標は次の定理である．

定理 1 $U(s)\leqq 0$ $(s\in Z^{\nu})$ とする．このとき $\chi(\mu,\beta)$ が μ について微分可能なことと，$\#\mathcal{G}=1$ とは同値である．

前 § の李＝楊の結果とあわせれば，$\mu\neq\dfrac{1}{2}\sum U(s)$ のとき Gibbsian random fields は一意になる．第2章 §3 の結果とあわせれば，2次元 a-type Ising model で β を大きくすれば χ は $\mu=-2$ で微分不可能であることがわかる．

V を Z^{ν} の有限集合とし，q を $\Omega=\{0,1\}^{V}$ 上の測度とする．是非必要という訳ではないが簡単のため $q(M)>0$ $(M\in\Omega)$ を仮定しておこう．Ω 上の関数 $f=f(M)$ に対して

$$\langle f\rangle=\frac{1}{q(\Omega)}\int_{\Omega}f(M)q(dM)$$

$$=\frac{1}{q(\Omega)}\sum_{M\in\Omega}f(M)q(M)$$

とおこう。

定理 2. 測度 q が

$$(*)\quad q(M\cup N)\,q(M\cap N) \geqq q(M)\,q(N)\,,\qquad (M, N\,\varepsilon\,\Omega)$$

をみたすとき，単調増加関数 f, g に対して，

$$<fg> - <f><g> \geqq 0.$$

証明. $\#V$ に関する帰納法による。$\#V=0$ のときは自明。そこで $\#V \leqq n-1$ まで成立すると仮定しよう。$\#V=n$ とする。$t_0\,\varepsilon\,V$ を任意に固定し，$\Omega'=\{M\,\varepsilon\,\Omega\ ;\ t_0\,\varepsilon\,M\}$, $\Omega''=\{M\,\varepsilon\,\Omega\ ;\ t_0 \notin M\}$ とおく。$\Omega'' \ni M \to M\cup\{t_0\}\,\varepsilon\,\Omega'$ という対応で Ω' と Ω'' は同型であり，q を Ω', Ω'' に制限したものは (*) をみたす。$\sum_M{}' = \sum_{M\,\varepsilon\,\Omega'}$ ，$\sum_M{}'' = \sum_{M\,\varepsilon\,\Omega''}$ とかくことにする。

$$K \equiv q(\Omega)^2\{<fg> - <f><g>\}$$

$$= \sum_{M,N}\{f(M)g(M)q(M)q(N) - f(M)g(N)q(M)q(N)$$

$$= \sum_M{}'\sum_N{}' + \sum_M{}''\sum_N{}'' + \sum_M{}'\sum_N{}'' + \sum_M{}''\sum_N{}' \ .$$

右辺第1項，第2項は帰納法の仮定により負ではない。第3項の前項をみよう。

$$\sum_M{}'\sum_N{}'' f(M)g(M)q(M)q(N)$$

$$= q(\Omega'')\sum_M{}' f(M)g(M)q(M)$$

$$= q(\Omega'')\,q(\Omega')<fg>'$$

$$\geqq q(\Omega')\,q(\Omega'')<f>'<g>'$$

$$= \frac{q(\Omega'')}{q(\Omega')}\Big\{\sum_M{}' f(M)q(M)\Big\}\Big\{\sum_M{}' g(M)q(M)\Big\}.$$

途中の不等号は帰納法の仮定による。第4項の前項も同様にして，

$$\sum_M{}''\sum_N{}' f(M)g(M)q(M)q(N)$$

$$\geqq \frac{q(\Omega')}{q(\Omega'')}\{\sum_M{}'' f(M)q(M)\}\{\sum_M{}'' g(M)q(M)\}.$$

従って,

$$K \geqq \frac{q(\Omega'')}{q(\Omega')}(\Sigma' fq)(\Sigma' gq)+\frac{q(\Omega')}{q(\Omega'')}(\Sigma'' fq)(\Sigma'' gq)$$

$$-(\Sigma' fq)(\Sigma'' gq)-(\Sigma'' fq)(\Sigma' gq)$$

$$=q(\Omega')q(\Omega'')\{\frac{\Sigma' fq}{q(\Omega')}-\frac{\Sigma'' fq}{q(\Omega'')}\}\{\frac{\Sigma' gq}{q(\Omega')}-\frac{\Sigma'' gq}{q(\Omega'')}\}.$$

上式の{ }内が負にならないことを示そう.

$M \varepsilon \Omega''$ に対して, $\overline{f}(M)=\dfrac{q(M)}{q(M\cup t_0)}$ とおく. $M'\subset M$ に対して, (*) より $q(M)q(M'\cup t_0) \leqq q(M')q(M\cup t_0)$, すなわち $\overline{f}(M)\leqq\overline{f}(M')$ となり, $\overline{f}$ は単調減少である. $\overline{\overline{f}}(M)=f(M\cup t_0)$ とおけば, $\overline{\overline{f}}$ は単調増加になる. $q_0(M)=q(M\cup t_0)$ とおけば q_0 は Ω'' 上で (*) をみたす. 従って, 帰納法の仮定により $<\overline{f}\,\overline{\overline{f}}>_0-<\overline{f}>_0<\overline{\overline{f}}>_0\leqq 0$. ところで,

$$q_0(\Omega'')<\overline{f}\,\overline{\overline{f}}>_0=\sum_M{}'' \overline{f}(M)\overline{\overline{f}}(M)q_0(M)$$

$$=\sum_M{}'' \frac{q(M)}{q(M\cup t_0)}f(M\cup t_0)q(M\cup t_0)$$

$$\geqq \sum_M{}'' q(M)f(M),$$

$$<\overline{f}>_0<\overline{\overline{f}}>_0=\{\frac{1}{q_0(\Omega'')}\sum_M{}''\frac{q(M)}{q(M\cup t_0)}q(M\cup t_0)\}\{\frac{1}{q_0(\Omega'')}\sum_M{}'' q(M\cup t_0)f(M\cup t_0)\}$$

$$=\frac{q(\Omega'')}{q_0(\Omega'')}\cdot\frac{1}{q_0(\Omega'')}(\Sigma' fq)$$

$$=\frac{q(\Omega'')}{q_0(\Omega'')^2}(\Sigma' fq),$$

$$q_0(\Omega'')=q(\Omega').$$

これらを合せると,

$$\frac{1}{q(\Omega'')}\sum{}'' fq \leqq \frac{1}{q(\Omega')}\sum{}' fq. \qquad \text{(Q.E.D.)}$$

この定理をGibbsian random fieldsに応用してみよう.

Lemma 1. $q(M)=\exp[\beta\{\mu N(M)-U(M)-U(M,\omega)\}]$, $(M\subset V)$ とおく. $U(s) \leqq 0$ $(s\in Z^\nu)$ のとき, q は $(*)$ をみたす.

証明. $\log q(M)=\beta\{\mu N(M)-U(M)-U(M,\omega)\}$ について調べる. $N(M)$ と $U(M,\omega)$ とは M について加法的であるから問題はない. 従って,

$$U(M)+U(N)\geqq U(M\cup N)+U(M\cap N)$$

を示せば良い. $L_1=M\setminus N$, $L_2=M\cap N$, $L_3=N\setminus M$ とおき, $\frac{1}{2}\sum_{\substack{t\in L_j\\ s\in L_i}} U(t-s)=U_{i,j}$ とかくことにしよう. このとき

$$U(M)=U_{1,1}+2U_{2,1}+U_{2,2},$$

$$U(N)=U_{2,2}+2U_{2,3}+U_{3,3},$$

$$U(M\cup N)=U_{1,1}+U_{2,2}+U_{3,3}+2U_{2,3}+2U_{1,3}+2U_{1,2},$$

$$U(M\cap N)=U_{2,2}.$$

上の2つと下の2つとを比べてみると, 下の方は $2U_{1,3}$ だけ余分に含みこれは仮定から正ではない. これより求むる結果を得る. (Q.E.D.)

上の測度 q による平均を $\langle\ \rangle_{\mu,\omega}$ と書くことにする. なお, β はずっと固定しておく.

Lemma 2. $f=f(M)$ が単調増加ならば, $\langle f\rangle_{\mu,\omega}$ は μ と ω について単調増加である.

証明. $\varphi=\varphi(S)$ を有限集合 S に対して定義された実数値関数とする. 但し, $\#S=0$ 又は $\#S\geqq 3$ のときは $\varphi(S)=0$. $M\subset V$ に対して,

$$q(M)=\exp\{\sum_{S\subset M}\varphi(S)\},$$

Sem. on Probab.
Vol.38 1973年
P1-91

$$\Xi(V)=\sum_{M\subset V} q(M)$$

とおこう。ここで $\varphi(S)$ を独立変数，q と Ξ を $\varphi(S)$ の関数とみよう。このとき，

$$\frac{\partial\Xi}{\partial\varphi(S)}=\frac{\partial}{\partial\varphi(S)}\sum_{M\subset V}\exp\{\sum_{S'\subset M}\varphi(S')\}$$

$$=\sum_{M\subset V}\frac{\partial}{\partial\varphi(S)}\exp\{\sum_{S'\subset M}\varphi(S')\}$$

$$=\sum_{S\subset M\subset V}\exp\{\sum_{S'\subset M}\varphi(s')\}=<\chi_{[S]}>\Xi\,.$$

但し，$[S]=\{M: S\subset M\subset V\}$．上と同様の計算で，

$$\frac{\partial<f>}{\partial\varphi(S)}=\frac{\partial}{\partial\varphi(S)}\left(\frac{1}{\Xi}\sum_{M\subset V}f(M)q(M)\right)$$

$$=<f\chi_{[S]}>-<f><\chi_{[S]}>\,.$$

$\chi_{[S]}$ は単調増加であるから，f を単調増加関数とすれば，

$$\varphi(\{t\})=\beta\{\mu-U(\{t\},\omega)\},$$

$$\varphi(\{t,s\})=\frac{1}{2}U(s-t)$$

のとき，$<f\chi_{[S]}>-<f><\chi_{[S]}>\geqq 0$ （定理2，Lemma 1）．従って，$\dfrac{\partial<f>}{\partial\varphi(S)}\geqq 0$． これより $<f>_{\mu,\omega}$ の単調性が出る。 (Q.E.D.)

いま，Lemma 1の q に対して，$q^{\mu}_{V,\omega}=\left(\sum_{M\subset V}q(M)\right)^{-1}q$ とおき，確率測度 P による平均を $<\ ,P>$ とかくことにすれば，$<f>_{\mu,\omega}=<f,q^{\mu}_{V,\omega}>$．

Lemma 3. S を有限集合とする。$\omega\equiv 1$，$\omega\equiv 0$ のとき，

$q^{\mu}_{V,1}([S])$ は V について単調減少，μ について単調増加，

$q^{\mu}_{V,0}([S])$ は V についても，μ についても単調増加である．

証明. $q^{\mu}_{V,\omega}([S])=<\chi_{[S]}>_{\mu,\omega}$ であるから μ についての単調性は Lemma 2 により明ら

Sem. on Probab.
Vol.38 1973年
P1-91

か．V についての単調性をみるために $S \subset V_1 \subset V_2$ としよう．第1章 §1 4) 式により，

$$q^{\mu}_{V_2,1}([S]) = \int q^{\mu}_{V_1, c(V_2;\,\omega,1)}([S])\ q^{\mu}_{V_2,1}(d\omega).$$

$c(V_2;\omega,1) \leqq 1$ であるから Lemma 2 により $q^{\mu}_{V_1,c(V_2;\,\omega,1)}([S]) \leqq q^{\mu}_{V_1,1}([S])$．従って，

$$q^{\mu}_{V_2,1}([S]) \leqq \int q^{\mu}_{V_1,1}([S])\ q^{\mu}_{V_2,1}(d\omega) = q^{\mu}_{V_1,1}([S]).$$

$q^{\mu}_{V,0}$ についても同様である． (Q.E.D.)

系． 極限 $\lim_{V\uparrow Z^{\nu}} q^{\mu}_{V,1}$, $\lim_{V\uparrow Z^{\nu}} q^{\mu}_{V,0}$ が存在する．

証明． $[S]$ の type の cylinder set に対して $q^{\mu}_{V,1}([S])$, $q^{\mu}_{V,0}([S])$ が収束することは Lemma 3 により明らか．一般の cylinder set は上記の type の集合で生成されるから求める結果を得る． (Q.E.D.)

有限集合の単調列 V_n ($\cup V_n = Z^{\nu}$) を任意に固定し，極限が存在するような ω に対し，$Q^{\mu}_{\omega} = \lim_{n\to\infty} q^{\mu}_{V_n,\omega}$ とおく (第1章 §2)． $\omega \equiv 0$ 又は1のときには，部分列 V_n をとる必要がないことを上にみた．

Lemma 4. f が tame で単調増加のとき，$\langle f, Q^{\mu}_{\omega}\rangle$ は μ, ω の増加関数である．

証明． $\langle f, q^{\mu}_{V,\omega}\rangle$ がそうである (Lemma 2) ことから明らか． (Q.E.D.)

系 1. 任意の有限集合 S，任意の $P \varepsilon \mathcal{G}$ に対して，

$$Q^{\mu}_0([S]) \leqq P([S]) \leqq Q^{\mu}_1([S]).$$

証明． Lemma 4 より，$Q^{\mu}_0([S]) \leqq Q^{\mu}_{\omega}([S]) \leqq Q^{\mu}_1([S])$．この式の3辺を $P(d\omega)$ で積分すれば，中辺は第1章 §2 定理2により $P([S])$ になる． (Q.E.D.)

系 2. $0 \leqq Q^{\mu}_1([S]) - Q^{\mu}_0([S]) \leqq \sum_{t\varepsilon S} \{ Q^{\mu}_1([t]) - Q^{\mu}_0([t]) \}$.

証明． $f(\omega) = \sum_{t\varepsilon S} X(t,\omega) - \prod_{t\varepsilon S} X(t,\omega)$ とおくとこれは ω の増加関数であり，$\langle f\rangle = \sum_{t\varepsilon S} \langle [t]\rangle - \langle \chi_{[S]}\rangle$. Lemma 4 により，$\sum Q^{\mu}_0([t]) - Q^{\mu}_0([S]) \leqq \sum Q^{\mu}_1([t]) - Q^{\mu}_1([S])$. (Q.E.D.)

Sem. on Probab.
Vol.38 1973年
P1-91

系 3. 任意の cylinder set A に対して，右極限 $Q_\omega^{\mu+}(A) = \lim_{\mu' \downarrow \mu} Q_\omega^{\mu'}(A)$ と左極限 $Q_\omega^{\mu-}(A) = \lim_{\mu' \uparrow \mu} Q_\omega^{\mu'}(A)$ が存在する.

証明. $[S]$ の type の cylinder set に対しては Lemma 4 の単調性から明らか. 一般の cylinder set は $[S]$ の type の集合で生成されるから，求むる結果を得る． (Q.E.D.)

定理 3. $U(s) \leqq 0$ ($s \in Z^\nu$) のとき，Q_1^μ，Q_0^μ は shift で不変であり，$\mathcal{G}$ の端点である．

証明. τ を shift すると，Lemma 3 の系により， $\tau Q_1^\mu = \lim_V \tau q_{V,1}^\mu = \lim q_{\tau V, \tau 1}^\mu = \lim q_{\tau V,1}^\mu = Q_1^\mu$．すなわち，$\tau$ で不変である. 次に $P_1, P_2 \in \mathcal{G}$, $0 < \lambda < 1$ に対して $Q_1^\mu = \lambda P_1 + (1-\lambda) P_2$ としよう. Lemma 4 の系 1 より $Q_1^\mu([S]) = \lambda P_1([S]) + (1-\lambda) P_2([S]) \leqq \lambda Q_1^\mu([S]) + (1-\lambda) Q_1^\mu([S]) = Q_1^\mu([S])$．従って，$P_1([S]) = P_2([S]) = Q_1^\mu([S])$．これより，$P_1 = P_2 = Q_1^\mu$，すなわち Q_1^μ は端点である. (Q.E.D.)

Lemma 5. 任意の cylinder set A に対して，

$$Q_1^{\mu+}(A) = Q_1^\mu(A), \qquad Q_0^{\mu-}(A) = Q_0^\mu(A).$$

証明. $A = [S]$ のときに証明すれば十分である. $Q_1^{\mu+}([S]) \geqq Q_1^\mu([S])$ は前の Lemma より明らか. $\mu' > \mu$ としよう. このとき，

$$Q_1^{\mu+}([S]) \leqq Q_1^{\mu'}([S]) \leqq q_{V,1}^{\mu'}([S]).$$

ここで左の不等号は Lemma 4，右の不等号は Lemma 3 による. $\mu' \downarrow \mu$ のとき右辺 $q_{V,1}^{\mu'}([S]) \longrightarrow q_{V,1}^\mu([S])$. 従って，$Q_1^{\mu+}([S]) \leqq q_{V,1}^\mu([S])$. $V \to Z^\nu$ として $Q_1^{\mu+}([S]) \leqq Q_1^\mu([S])$ を得る. (Q.E.D.)

次に Gibbs の自由エネルギー $\chi(\mu, \beta)$ について調べよう.

$$\Xi(V, \mu, \beta, \omega) = \sum_{M \subset V} \exp\left[\beta\left\{\mu N(M) - U(M) - U(M, \omega)\right\}\right],$$

$$F(V, \mu, \beta, \omega) = |V|^{-1} \log \Xi(V, \mu, \beta, \omega)$$

とおく.

Lemma 6. $M \subset V$ に対して，$U(M, \omega) = o(|V|)$.

Sem. on Probab.
Vol.38 1973年
P1-91

証明. 直方体Vを，Vの境界から距離l以内の点合体V_lとその補集合に分ける.

$$U(M,\omega) = \sum_{\substack{t\in M\\ s\notin V}} \omega(s)U(t-s)$$

$$= \sum_{\substack{t\in V_l\cap M\\ s\notin V}} \omega(s)U(t-s) + \sum_{\substack{t\in (V\setminus V_l)\cap M\\ s\notin V}} \omega(s)U(t-s).$$

第1項は $\sum_{\substack{t\in V_l\\ s\notin V}} |U(t-s)| \leqq \sum_{\substack{t\in V_l\\ s\in Z^\nu}} |U(t-s)| = |V_l| \sum_s |U(s)|$ でおさえられ，第2項は $\sum_{\substack{t\in V\setminus V_l\\ s\notin V}} |U(t-s)| \leqq |V\setminus V_l| \sum_{|s|\gg l} |U(s)| \leqq |V| \sum_{|s|\gg l} |U(s)|$ でおさえられるが，いずれも $|V|$ で割って まず$V\to Z^\nu$とし，次に$l\to\infty$とすれば0に収束する. (Q.E.D.)

系. 極限 $\chi(\mu,\beta) = \lim_V |V|^{-1} \log \Xi(V,\mu,\beta,\omega)$ はωに依らない.

証明. $\omega\equiv 0$ のときの極限の存在は§1で証明してある. Lemma 6 より $\Xi(V,\mu,\beta,\omega) = \Xi(V,\mu,\beta,0)\,e^{1+o(|V|)}$，従って，極限は$\omega$に依らない. (Q.E.D.)

Lemma 7. F，χはμについて convex である.

証明. 簡単な計算から，

$$\frac{\partial F}{\partial\mu} = \beta\,|V|^{-1}\,\Xi(V,\mu,\beta,\omega)^{-1} \sum_{M\subset V} N(M)\, e^{\beta\{\mu N(M)-U(M)-U(M,\omega)\}}$$

$$= \beta < \frac{N_V(M)}{|V|},\ q^{\mu}_{V,\omega} > \equiv \beta m,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial\mu^2} = \beta^2\,|V| < \left(\frac{N_V(M)}{|V|} - m\right)^2,\ q^{\mu}_{V,\omega} > \geqq 0.$$

但し，$N_V(M) = \sum_{t\in V} X(t,M)$. (Q.E.D.)

Lemma 8. $$\beta^{-1}\frac{\partial\chi}{\partial\mu^+} \geqq \overline{\lim_V} < \frac{N_V}{|V|},\ q^{\mu}_{V,\omega} > \geqq \underline{\lim_V} < \frac{N_V}{|V|},\ q^{\mu}_{V,\omega} > \geqq \beta^{-1}\frac{\partial\chi}{\partial\mu^-}.$$

証明. $\triangle > \triangle' > 0$ とする.

Sem. on Probab.
Vol.38 1973年
P1-91

$$\frac{\chi(\mu+\triangle)-\chi(\mu)}{\triangle}=\lim_{V}\frac{F(V,\mu+\triangle)-F(V,\mu)}{\triangle}$$

$$\geqq \overline{\lim_{V}}\ \lim_{\triangle'\downarrow 0}\frac{F(V,\mu+\triangle')-F(V,\mu)}{\triangle'}$$

$$=\overline{\lim_{V}}\ \beta<\frac{N_V}{|V|},\ q^{\mu}_{V,\omega}>.$$

途中の不等号は F の convexity による．左辺は$\triangle\downarrow 0$ とすれば，$\dfrac{\partial\chi}{\partial\mu^+}$ に収束する． (Q.E.D.)

系 1. $\beta^{-1}\dfrac{\partial\chi}{\partial\mu^+}\geqq Q^{\mu}_1([t])\geqq Q^{\mu}_0([t])\geqq\beta^{-1}\dfrac{\partial\chi}{\partial\mu^-}$.

証明. Lemma 3 より，$<\dfrac{N_V}{|V|}$, $q^{\mu}_{V,1}>\ \geqq\ <\dfrac{N_V}{|V|}$, $Q^{\mu}_1>$． $N_V=\sum_{t\in V}X(t,\omega)$ であり，定理 3 により Q^{μ}_1 は shift で不変であるから，$<\dfrac{N_V}{|V|},\ Q^{\mu}_1>\ =\ <X(t),\ Q^{\mu}_1>\ =Q^{\mu}_1([t])$.

Lemma 8 の左の不等式を $\omega\equiv 1$ として適用すれば我々の求むる系の左の不等式が出る．真中の不等式は Lemma 4 の系 1 から明らか． (Q.E.D.)

系 2. χ が μ で微分可能ならば， $\beta^{-1}\dfrac{\partial\chi}{\partial\mu}=Q^{\mu}_1([t])=Q^{\mu}_0([t])$.

Lemma 9. $\beta^{-1}\dfrac{\partial\chi}{\partial\mu^+}=Q^{\mu}_1([t])$， $\beta^{-1}\dfrac{\partial\chi}{\partial\mu^-}=Q^{\mu}_0([t])$.

証明. $\mu_n\downarrow\mu$ が存在して，点 μ_n では χ は微分可能である．このとき，

$$\beta^{-1}\frac{\partial\chi}{\partial\mu^+}=\lim_{n\to\infty}\beta^{-1}\frac{\partial\chi}{\partial\mu}\Big|_{\mu_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}Q^{\mu_n}_1([t])\qquad(\text{Lemma 8 の系 2})$$

$$=Q^{\mu}_1([t])\qquad(\text{Lemma 5}).$$

(Q.E.D.)

Sem. on Probab.
Vol.38 1973年
P1-91

<u>定理1の証明.</u> $\#\mathcal{G}=1$ としよう. このとき, $Q_1^{\mu}([t])=Q_0^{\mu}([t])$. 従って, Lemma 9 により, $\dfrac{\partial\chi}{\partial\mu^+}=\dfrac{\partial\chi}{\partial\mu^-}$. 逆に χ が μ で微分可能としよう. このときやはり Lemma 9 により, $Q_1^{\mu}([t])=Q_0^{\mu}([t])$. 従って, Lemma 4 の系2により $Q_1^{\mu}([S])=Q_0^{\mu}([S])$, 同じ Lemma の系1により, 任意の $P\in\mathcal{G}$ に対して $P([S])=Q_1^{\mu}([S])=Q_0^{\mu}([S])$. すなわち $P=Q_1^{\mu}=Q_0^{\mu}$. これで $\mathcal{G}$ の一意性が得られた. (Q.E.D.)

これで私の講義を終ります. 有難うございました.

Sem. on Probab.
Vol.38 1973年
P1-91

引　　用　　文　　献

序章　中村 [12] を参考にした. なお, Minlos [11], Ruelle [16], Spitzer [17] を読まれたい.

第1章　§1, random field の定義と定理1は Dobrushin [1] による. これと同値な定義が Lanford = Ruelle [8] によって与えられている. §2, 定理1の条件 2) は Lanford = Ruelle [8] による. Markov 過程に対する同様の端点表現が Dynkin [5] によって与えられている. §2 の附録, 定理1は Oxtoby [13] によった. 定理2は S. Kakutani の結果 [14] であるが, 釜江哲朗氏に教えてもらった方法で紹介した. §3, 定理1は Dobrushin [1] による. 定理2は Ruelle [16], Robinson = Ruelle [15] による. §5, 定理1は Ruelle [16] によった.

第2章　§1 は Dobrushin [1], §2, §3 は Dobrushin [2] による. なお, a-type Ising model の shift-invariant field の全体 $\mathscr{I}$ の端点が Q_0, Q_1 で尽されることが Gallavotti = Miracle-Sole [7] によって示された. また3次元では $\omega(x, y, z) = 1$ $(x \geqq 0)$, $= 0$ $(x < 0)$ とおくとき, ω を x 方向に shift したもの, それらの座標を入れかえたもの, 0と1とを入れかえたもの $\omega_2, \omega_3, \cdots$ に対して, $\{Q_0, Q_1, Q_{\omega_2}, Q_{\omega_3}, \cdots\}$ が $\mathscr{G}$ の端点を尽すことが Dobrushin [3] によって予想されている. §4 は Spitzer [17] によった. 一次元で potential が $\sum_{t=-\infty}^{\infty} |tU(t)| < +\infty$ をみたすとき, Gibbsian random field が一意になることが Dobrushin [1] によって証明されている.

第3章　§1, §2 は Minlos [11] によった. a-type Ising model である範囲の (β, μ) に対して, $\log \Xi(V, \mu, \beta) = \chi(\mu, \beta)|V| + \alpha(\mu, \beta)|\partial V| + o(1)$ なる漸近挙動が Dobrushin [4] によって得られている. §3 は Ruelle [16] によった. §4 は Lee-Yang [10], Ruelle [16] によった. §5, 定理1は Lebowitz = Martin-Löf [9] による. 定理2は Fortuin = Kasteleyn = Ginibre [6] による.

引用文献　Minlos [11], Ruelle [16] に詳しい文献表がある.

Sem. on Probab.
Vol.38 1973年
P1-91

[1] Dobrushin, R. L. ; Description of a random field by means of conditional probabilities and conditions for its reguralıty. Teor. veroyat. prim. 13 (1968) 201-229.

[2] ―――――― ; A problem of uniqueness of Gibbsian random field and a problem of phase transition. Funk. anal. pril. 2 (1968) 44-57.

[3] ―――――― ; Markov processes with many components interacting locally one another. Problema pered. informatsii. 7 (1971) 57-66.

[4] ―――――― ; Asymptotic behaviour of Gibbsian distributions for lattice systems and its dependence on the form of the vessel. Teor. mat. fizika 12 (1972) 115-134.

[5] Dynkin, E. B. ; Entrance and exit spaces for a Markov process. Actes, Congrès intern. math. (1970) 2, 507-512.

[6] Fortuin, C. M., Kasteleyn, P. W. and Ginibre, J. ; Correlation inequalities on some partially ordered sets. Commun. math. phys. 22 (1971) 89-103.

[7] Gallavotti, G. and Miracle-Sole, S. ; Equilibrium states of the Ising model in the two -phase region. Phys. rev. B 5 (1972) 2555-2559.

[8] Lanford, O. E. and Ruelle, D. ; Observables at infinity and states with short range correlations in statistical mechanics. Commun. math. phys. 13 (1969) 194-215.

[9] Lebowitz, J. L. and Martin-Löf, A. ; On the uniqueness of the equilibrium state for Ising spin systems. Commun. math. phys. 25 (1972) 276-282.

[10] Lee, T. D. and Yang, C. N. ; Statistical theory of equations of state and phase transitions, II, lattice gas and Ising model. Phys. rev. 87 (1952) 410-419.

[11] Minlos, R. A. ; Lectures on statistical physics. Uspehi mat. nauk. 23 (1968) 133-190.

[12] 中村 伝 ; 統計力学 (岩波全書) (1967)

[13] Oxtoby, J. C. ; Ergodic sets. Bull. Amer. math. soc. 58 (1952) 116-136.

[14] ―――――― ; On two theorems of Parthasarathy and Kakutani concerning the shift transformation. Ergodic theory (ed. F. B. Wright) (1962)

[15] Robinson, D. W. and Ruelle, D. ; Extremal invariant states. Ann. inst. Poincaré 6 (1967) 299-310.

[16] Ruelle, D. ; Statistical mechanics (1969)

[17] Spitzer, F. ; Random fields and interacting particle systems (1971)