Sem. on Probab.
Vol.24 1966年
P1-66

SEMINAR ON PROBABILITY

Vol. 24

Gauss 測度の絶対連続性

佐 藤 坦

1966

確率論セミナー

Sem. on Probab.
Vol.24 1966年
P1-66

まえがき

函数空間上の2つの確率測度PとP_1がequivalent（互いに絶対連続）であれば、Pに対応する確率過程$\{X(t,\omega)\}$について確率1で成立するような全ての性質はP_1に対応する確率過程$\{X_1(t,\omega)\}$についても成立する。例えば連続函数の空間上の測度P_1がWiener測度Wとequivalentとする。このときBrown運動$\{B(t,\omega)\}$について確率積分（伊藤 清[18]）

$$\int_a^b f(t,\omega)\,dB(t,\omega)$$

が殆んど到るところで定義されておれば$\{X_1(t,\omega)\}$についても

$$\int_a^b f(t,\omega)\,dX_1(t,\omega)$$

が殆んど到るところで定義されている。またPとP_1がequivalentということは非常に大まかに言うとP, P_1のsupport（厳密に定義されているわけではない）が同じpath函数の集りであると言えよう。従って対応する確率過程のpathの幾何学的性質の一致することが考えられる。このようにequivalentな2つの確率測度があれば、対応する確率過程の間で種々の性質が遺伝し、しかもそれらがMarkov性や定常性といったような範疇を越えたところで成立する点で非常に興味深いものである。

S. Kakutani[1]は可測空間列$(\Omega_i, \mathcal{B}_i)$, $i=1,2,3,\cdots$, 上にequivalentな2つの測度μ_iとν_iが与えられたときに、その無限次元直積測度$\mu=\prod_{i=1}^{+\infty}\mu_i$と$\nu=\prod_{i=1}^{+\infty}\nu_i$はequivalent（$\mu\sim\nu$と書く）であるかsingular（$\mu\perp\nu$と書く）であるかのいずれかであることを示した。その後J. Hajek[2]とJ. Feldman[3]は独立に、このdichotmyが函数空間上の2つのGauss測度についても成立することを示した。Yu. Rozanov[5]はHajek, Feldmanの結果をきれいに整理したが、これによるとequivalentな2つのGauss測度は実はKakutaniによるequivalentな無限次

Sem. on Probab.
Vol.24 1966年
P1-66

元直積測度に帰着させられることが分る。（§4参照）

他方、R.Cameron-W.Martin [9] は Wiener 積分の性質に関する一連の研究の中で、変数変換、即ち path ω の、ある種の transformation L による変換で Wiener 積分について

$$(0.1) \qquad \int f(\omega)\,dW(\omega) = \int f(L\omega)\,\varphi(\omega)\,dW(\omega)$$

が全ての可積分汎函数 $f(\omega)$ について成立するような汎函数 $\varphi(\omega)$ を求めた。特に linear transformation のときは D.Woodward [10] はこの結果を更に拡張した。これらの結果を土台にして、D. Varberg [11] は path のある種の liner transformation T による変換によって Wiener 測度と equivalent な Gauss 測度の得られることを示した。大まかに言うと T は [0, 1] 上の連続函数の空間上の 1 対 1 変換で

$$(0.2) \qquad (Tx)(\cdot) = x(\cdot) + \int_0^1 \int_0^{\cdot} g(v, u)\,dv\,dx(u)$$

というような type であるが、ここで $g(v, u)$ は非常に強い仮定を要求されている。（附録 I 参照）

ところで Yu. Rozanov [5] の結果を精密に計算することによって、函数空間上の Gauss 測度 P と equivalent な Gauss 測度 P_1 に $L^2(P)$ 上のある種の linear transformation が対応し、さらに P が連続函数の空間上の Wiener 測度の場合には (0.2) の type で与えられる path の変換として得られることが分る。このセミナノートはこれらの結果をまとめたものである。

1 章では S. Kakutani [1] による無限次元直積測度に関する結果を以下の議論に好都合な形で少し modify して紹介する。2 章では Gauss 測度の dichotomy の成立に関する J. Hajek [2]、Yu. Rozanov [5] の結果の紹介と $L^2(P)$ 上の線型変換の存在を証明する。3 章では Brown 運動などいくつかの典型的な Gauss 過程に

Sem. on Probab.
Vol.24 1966年
P1-66

対応するGauss測度について線型変換の kernel を具体的に計算する。また、これらの議論に直接の関係はないが path の線型変換と Wiener 測度に関連した R. Cameron-W. Martin [9]、D. Varberg [11] の結果を附録Iで紹介した。一般に函数空間上のGauss測度はその covariance 及び mean 函数によって決定されるという意味で、2つの Gauss 測度が絶対連続、あるいは singuler になるための条件を covariance, mean 函数で求めることは極めて興味深いことであり、この方面に関しても数多くの研究があるが、それらに詳しく触れることは、このセミナノートの目的にもそぐわないし、またその余裕もないので、主なものについて結果と引用文献を附録IIに紹介するにとどめた。

このセミナノートを作るにあたっての多くの方々の御援助、特に原稿を通読していろいろと注意をして下さった飛田先生に深く感謝致します。

Sem. on Probab.
Vol.24 1966年
P1-66

4-

Sem. on Probab.
Vol.24 1966年
P1-66

目　　次

Sem. on Probab.
Vol.24 1966年
P1-66

Sem. on Probab.
Vol.24 1966年
P1-66

GAUSS測度の絶対連続性

1章 無限次直積測度

§1 無限次直積測度の絶対連続性

この節では S. Kakutani[1] の無限次元直積測度に関する結果を、後で Gauss測度の場合と対比させるのに便利なように、独立確率変数列に対応する測度に関する形に modify して述べる。すなわち、$\{\eta_n(\omega)\}$ を空間 Ω 上の函数列、$\mathcal{B}$ を $\{\eta_n(\omega),\ n=1,2,3,\cdots\}$ を可測にする最小の σ-algebra, P, P_1 を $(\Omega, \mathcal{B})$ 上の確率測度で $\{\eta_n(\omega)\}$ がこれらのいずれに関しても独立な確率変数列になっているものとする。また、$\mathcal{B}^n$, $n=1,2,3,\cdots$, を $\eta_n(\omega)$ を可測にする最小の σ-algebra, $\widetilde{\mathcal{B}}^n$, $n=1,2,3,\cdots$, を $\{\eta_k(\omega);\ k=1,2,3\cdots,n\}$ を可測にする最小の σ-algebra, P^n, P_1^n をそれぞれ P, P_1 の $\mathcal{B}^n$ への restriction, $\widetilde{P}^n$, $\widetilde{P}_1^n$ を P, P_1 の $\widetilde{\mathcal{B}}^n$ への restriction とする。このとき もし $P\sim P_1$ 即ち P と P_1 が互いに絶対連続であれば明らかに

(1.1) $\qquad P^n \sim P_1^n, \qquad n=1,2,3,\cdots,$

が成立する。しかし、逆に (1.1) が成立しても $P\sim P_1$ とは限らない。一般には $P\sim P_1$ となるか $P\perp P_1$ となるかのいずれかが成立する (Theorem 1.1)。これが S. Kakutani の結果であるが、以下順を追ってこれを証明する。

$\mathfrak{M}(\mathcal{B})$ を $(\Omega, \mathcal{B})$ 上の確率測度全体の空間とする。$P_1\in\mathfrak{M}(\mathcal{B})$ が $P\in\mathfrak{M}(\mathcal{B})$ について絶対連続な場合 ($P_1 \prec P$ と書く)、その density 函数 $\varphi(\omega)=P_1(d\omega)/P(d\omega)$ は P に関して殆んど到るところ定まる non-negative な函数である。さらに $P\prec P_1$, 即ち $P\sim P_1$ であれば $P(d\omega)/P_1(d\omega) = 1/\varphi(\omega)$ が P_1 (従って P) に関して殆んど到るところで成立し、$\varphi(\omega)$ は $P(P_1)$ に関して殆んど到るところで positive である。

さて $\mathfrak{M}(\mathcal{B})$ 上の汎函数 ρ を次のように定義する。任意の $P, P_1\in\mathfrak{M}(\mathcal{B})$ に対して $Q\in\mathfrak{M}(\mathcal{B})$ を $P\prec Q$, $P_1\prec Q$ となるように選ぶ。このような

Sem. on Probab.
Vol.24 1966年
P1-66

$Q \in \mathfrak{M}(\mathcal{B})$の存在することは，例えば $Q = \frac{1}{2}\{P + P_1\}$ とおけばよいことから分る。このとき

(1.2) $$\rho(P, P_1) \equiv \int_\Omega \sqrt{\frac{P(d\omega)}{Q(d\omega)}} \sqrt{\frac{P_1(d\omega)}{Q(d\omega)}}\ Q(d\omega)$$

と定義する。この ρ は $Q \in \mathfrak{M}(\mathcal{B})$ のとり方には依存しない。実際 $Q' \in \mathfrak{M}(\mathcal{B})$についても $P \prec Q'$，$P_1 \prec Q'$ が成立すると仮定すると，さらに $Q \prec R$, $Q' \prec R$ となるような $R \in \mathfrak{M}(\mathcal{B})$ が存在する。

これより

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \sqrt{\frac{P(d\omega)}{Q(d\omega)}} \sqrt{\frac{P_1(d\omega)}{Q(d\omega)}}\ Q(d\omega) \\
&= \int_\Omega \sqrt{\frac{P(d\omega)}{Q(d\omega)}} \sqrt{\frac{P_1(d\omega)}{Q(d\omega)}}\ \frac{Q(d\omega)}{R(d\omega)}\ R(d\omega) \\
&= \int_\Omega \sqrt{\frac{P(d\omega)}{Q(d\omega)}\ \frac{Q(d\omega)}{R(d\omega)}} \sqrt{\frac{P_1(d\omega)}{Q(d\omega)}\ \frac{Q(d\omega)}{R(d\omega)}}\ R(d\omega) \\
&= \int_\Omega \sqrt{\frac{P(d\omega)}{R(d\omega)}} \sqrt{\frac{P_1(d\omega)}{R(d\omega)}}\ R(d\omega) \\
&= \int_\Omega \sqrt{\frac{P(d\omega)}{Q'(d\omega)}\ \frac{Q'(d\omega)}{R(d\omega)}} \sqrt{\frac{P_1(d\omega)}{Q'(d\omega)}\ \frac{Q'(d\omega)}{R(d\omega)}}\ R(d\omega) \\
&= \int_\Omega \sqrt{\frac{P(d\omega)}{Q'(d\omega)}} \sqrt{\frac{P_1(d\omega)}{Q'(d\omega)}}\ \frac{Q'(d\omega)}{R(d\omega)}\ R(d\omega) \\
&= \int_\Omega \sqrt{\frac{P(d\omega)}{Q'(d\omega)}} \sqrt{\frac{P_1(d\omega)}{Q'(d\omega)}}\ Q'(d\omega)
\end{aligned}$$

即ち$\rho(P, P_1)$は $Q, Q' \in \mathfrak{M}(\mathcal{B})$ の選び方には依存しない。

またSchwarzの不等式から

$$\begin{aligned}
\rho(P, P_1)^2 &\leq \left| \int_\Omega \sqrt{\frac{P(d\omega)}{Q(d\omega)}} \sqrt{\frac{P_1(d\omega)}{Q(d\omega)}}\ Q(d\omega) \right|^2 \\
&\leq \int_\Omega \frac{P(d\omega)}{Q(d\omega)}\ Q(d\omega) \int_\Omega \frac{P_1(d\omega)}{Q(d\omega)}\ Q(d\omega) = 1
\end{aligned}$$

であるから

(1.3) $$0 \leq \rho(P, P_1) \leq 1$$

であるが，$\rho(P, P_1) = 1$ となるのはある実数 λ が存在して

$$\sqrt{\frac{P(d\omega)}{Q(d\omega)}} = \lambda \sqrt{\frac{P_1(d\omega)}{Q(d\omega)}}$$

となるときに限る。ところが P, P_1 は共に確率測度であるから $\lambda = 1$ でなければならない。これより $P = P_1$ が出る。逆に $P = P_1$ なら $\rho = (P, P_1) = 1$ となることも明らか。

さらに $P \perp P_1$ なら $\rho(P, P_1) = 0$となることは明らかであるがこの逆も成立する。実際，$\rho(P, P_1) = 0$ と仮定すると，定義より

Sem. on Probab.
Vol.24 1966年
P1-66

(1.4) $$\rho(P, P_1) = \int_\Omega \sqrt{\frac{P(d\omega)}{Q(d\omega)}} \sqrt{\frac{P_1(d\omega)}{Q(d\omega)}}\ Q(d\omega) = 0$$

ところが(1.4)の被積分函数は Q に関して殆んど到るところ non－negative であるから

(1.5) $$\sqrt{\frac{P(d\omega)}{Q(d\omega)}} \sqrt{\frac{P_1(d\omega)}{Q(d\omega)}} = 0, \quad (Q-a.e.)$$

従って $\mathcal{B}$-可測集合 A を

(1.6) $$A \equiv \left\{ \omega : \sqrt{\frac{P(d\omega)}{Q(d\omega)}} > 0 \right\}$$

で定義すると(1.5)により Q 測度 0 の集合を除いて全ての $\omega \in A$ について

(1.7) $$\frac{P_1(d\omega)}{Q(d\omega)} = 0$$

また明らかに Q 測度 0 の集合を除いて全ての $\omega \in \Omega - A$ について

(1.8) $$\frac{P(d\omega)}{Q(d\omega)} = 0$$

故に(1.7)と(1.8)から

$$\begin{aligned}
P(A) &= \int_A P(d\omega) = \int_A \frac{P(d\omega)}{Q(d\omega)}\, Q(d\omega) \\
&= \int_A \frac{P(d\omega)}{Q(d\omega)}\, Q(d\omega) + \int_{\Omega - A} \frac{P(d\omega)}{Q(d\omega)}\, Q(d\omega) \\
&= \int_\Omega \frac{P(d\omega)}{Q(d\omega)}\, Q(d\omega) = P(\Omega) = 1
\end{aligned}$$

$$P_1(A) = \int_A \frac{P_1(d\omega)}{Q(d\omega)}\, Q(d\omega) = 0$$

従って $P \perp P_1$ である。

最後に $P \sim P_1$ であれば

(1.9) $$\begin{aligned}
\rho(P, P_1) &= \int_\Omega \sqrt{\frac{P_1(d\omega)}{P(d\omega)}}\ P(d\omega) \\
&= \int_\Omega \sqrt{\frac{P(d\omega)}{P_1(d\omega)}}\ P_1(d\omega)
\end{aligned}$$

となることを注意しておく。

ここで S. Kakutani [1] の定理を述べると

THEOREM 1.1.

$\mathfrak{m}(\mathcal{B}^n)$, $n = 1, 2, 3, ----$, 上に $\rho_n(\cdot, \cdot)$ を(1.2)と同様に定義する。

今(1.1)が成立しているものとする。このとき $\prod_{n=1}^{+\infty} \rho_n(P^n, P_1^n) > 0$ か

Sem. on Probab.
Vol.24 1966年
P1-66

$= 0$ に従って $P \sim P_1$ か $P \perp P_1$ かのいずれかが成立する。

（証明） 1°） $\prod_{n=1}^{+\infty} \rho_n(P^n, P_1^n) > 0$ の場合

まず

$$\varphi_n(\omega) \equiv \frac{P_1^n(d\omega)}{P^n(d\omega)}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots \tag{1.10}$$

とおくと明らかに $\varphi_n(\omega)$ は $\mathcal{B}^n$−可測函数である。さらに $\{\eta_n(\omega)\}$ は P, P_1 の いずれに関しても独立な確率変数列であり，$\mathcal{B}^n$, $n = 1, 2, 3, \cdots$, は $\eta_n(\omega)$ を可測にする最小の σ−algebra であったから $\{\varphi_n(\omega)\}$ は $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ 上の独立確率変数列である。

つぎに (1.1) からすぐ分るように $\tilde{P}^n \sim \tilde{P}_1^n$, $n = 1, 2, 3, \cdots$, 従って

$$\tilde{\varphi}_n(\omega) \equiv \frac{\tilde{P}_1^n(d\omega)}{\tilde{P}^n(d\omega)}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots, \tag{1.11}$$

とおくと $\{\varphi_n(\omega)\}$ が独立であったことから

$$\tilde{\varphi}_n(\omega) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_k(\omega), \quad n = 1, 2, 3, \cdots, \tag{1.12}$$

ここで (1.9) を考慮し，また $\tilde{\rho}_n$ を $\mathfrak{M}(\tilde{\mathcal{B}}^n)$ 上に (1.2) と同様に定義すると

$$\tilde{\rho}_n(\tilde{P}^n, \tilde{P}_1^n) = \prod_{k=1}^{n} \rho_k(P^k, P_1^k), \quad n = 1, 2, 3, \cdots, \tag{1.13}$$

が得られる。ところで

$$\psi_k(\omega) \equiv \prod_{i=1}^{k} \sqrt{\varphi_i(\omega)}, \quad k = 1, 2, 3, \cdots \tag{1.14}$$

とおくと $\{\psi_k(\omega)\}$ は $L^2[\Omega, \mathcal{B}, P]$ の点列と考えられ，そのノルムを $\|\ \ \|$ と書くことにすると

$$\|\psi_k\| = 1, \quad k = 1, 2, 3, \cdots, \tag{1.15}$$

$$\begin{aligned}
\|\psi_k - \psi_l\|^2 &= \int_\Omega \{\psi_k(\omega)^2 - 2\psi_k(\omega)\psi_l(\omega) + \psi_l(\omega)^2\} P(d\omega) \\
&= \int_\Omega \prod_{i=1}^{k} \varphi_i(\omega) P(d\omega) - 2\int_\Omega \prod_{i=1}^{k} \varphi_i(\omega) \prod_{j=k+1}^{l} \sqrt{\varphi_j(\omega)}\ P(d\omega) \\
&\quad + \int_\Omega \prod_{i=1}^{l} \varphi_i(\omega) P(d\omega) \\
&= 2\{1 - \prod_{i=k+1}^{l} \int_\Omega \sqrt{\varphi_i(\omega)}\ P^i(d\omega)\} \\
&= 2\{1 - \prod_{j=k+1}^{l} \rho_j(P^j, P_1^j)\}
\end{aligned} \tag{1.16}$$

但し，k, l は $k < l$ となるような任意の正整数とする。

Sem. on Probab.
Vol.24 1966年
P1-66

さて $\prod_{n=1}^{+\infty} \rho_n(P^n, P_1^n) > 0$ であるから任意の $\varepsilon > 0$ に対してある正整数 N が存在し，$k, l > N$ であれば

$$(1.17) \qquad 1 \geqq \prod_{j=k+1}^{l} \rho_j(P^j, P_1^j) > 1-\varepsilon$$

とできる。（1.16）と（1.17）から $\{\phi_k\}$ は $L^2[\Omega, \mathcal{B}, P]$ の Cauchy列であることが分る。L^2 は完備であるから ϕ_k の極限 ϕ 即ち

$$(1.18) \qquad \lim_{k\to+\infty} \|\phi_k - \phi\| = 0$$

となるような $\phi \in L^2[\Omega, \mathcal{B}, P]$ が存在する。（1.15）より

$$(1.19) \qquad \|\phi\|^2 = \int_\Omega \phi(\omega)^2 P(d\omega) = 1$$

これだけの準備から　まず $P_1 \prec P$ であり

$$(1.20) \qquad \varphi(\omega) = \frac{P_1(d\omega)}{P(d\omega)} = \phi(\omega)^2$$

であることを示す．$E \subset \Omega$ を任意の elementary 集合、例えば $E \in \widetilde{\mathcal{B}}^k$ とする。このとき任意の $l > k$ について

$$(1.21) \qquad \begin{aligned} P_1(E) &= \int_E \widetilde{P}_1^k(d\omega) \\ &= \int_E \widetilde{\varphi}_k(\omega)\, \widetilde{P}^k(d\omega) \\ &= \int_E \prod_{n=1}^{k} \varphi_n(\omega)\, P(d\omega) \\ &= \int_E \prod_{n=1}^{l} \varphi_n(\omega)\, P(d\omega) \\ &= \int_E \phi_l(\omega)^2\, P(d\omega) \\ &\to \int_E \phi(\omega)^2\, P(d\omega), \quad \text{as } l \to +\infty \end{aligned}$$

となることは

$$\begin{aligned} &\int_E \{\phi_l(\omega) - \phi(\omega)\}^2 P(d\omega) \\ &\leqq \int_\Omega \{\phi_l(\omega) - \phi(\omega)\}^2 P(d\omega) = \|\phi - \phi_l\|^2 \to 0 \end{aligned}$$

から明らかであろう．故に

$$(1.22) \qquad P_1(E) = \int_E \phi(\omega)^2 P(d\omega)$$

E は任意の elementary 集合であったが、（1.22）が任意の $\mathcal{B}$-可測集合に対して成立することはたやすく示される．従って $P_1 \prec P$ であり且つ（1.20）が成立する。

Sem. on Probab.
Vol.24 1966年
P1-66

全く同様にして $P \prec P_1$ も示されるから $P \sim P_1$ である。
またこのとき

$$\rho(P, P_1) = \int_\Omega \phi(\omega)\, P(d\omega)$$
$$= \lim_{k\to+\infty} \int_\Omega \phi_k(\omega)\, P(d\omega)$$
$$= \lim_{k\to+\infty} \widetilde{\rho}_k(\widetilde{P}^k, \widetilde{P}_1^k)$$
$$= \lim_{k\to+\infty} \prod_{i=1}^{k} \rho_i(P^i, P_1^i)$$

から

$$(1.23) \qquad \rho(P, P_1) = \prod_{i=1}^{+\infty} \rho_i(P^i, P_1^i)$$

が成立する。

2°) $\prod_{n=1}^{+\infty} \rho_n(P^n, P_1^n) = 0$ の場合

このとき任意の $\varepsilon > 0$ に対してある正整数 N が存在して

$$(1.24) \qquad \widetilde{\rho}_N(\widetilde{P}^N, \widetilde{P}_1^N) = \prod_{i=1}^{N} \rho_i(P^i, P_1^i) < \varepsilon$$

となる。

$$(1.25) \qquad A \equiv \{\omega : \widetilde{\varphi}_N(\omega) > 1\}$$

とおく。このとき $A \in \widetilde{\mathcal{B}}^N$ であり，また

$$P(A) = \int_A P(d\omega) = \int_A \widetilde{P}^N(d\omega)$$
$$(1.26) \qquad \leq \int_A \sqrt{\widetilde{\varphi}_N(\omega)}\, \widetilde{P}^N(d\omega)$$
$$\leq \widetilde{\rho}_N(\widetilde{P}^N, \widetilde{P}_1^N) < \varepsilon.$$

他方

$$P_1(\Omega - A) = \int_{\Omega-A} P_1(d\omega) = \int_{\Omega-A} \widetilde{P}_1^N(d\omega)$$
$$= \int_{\Omega-A} \widetilde{\varphi}_N(\omega)\, \widetilde{P}^N(d\omega)$$
$$(1.27) \qquad \leq \int_{\Omega-A} \sqrt{\widetilde{\varphi}_N(\omega)}\, \widetilde{P}^N(d\omega)$$
$$\leq \rho(\widetilde{P}^N, \widetilde{P}_1^N) < \varepsilon.$$

それ故 $P \perp P_1$ である。

（証明了）

Sem. on Probab.
Vol.24 1966年
P1-66

PROPOSITION 1.1

$P \sim P_1$ であれば $\phi_k(\omega)$ は $\phi(\omega)$ に概収束する。即ち

(1.28) $$\phi(\omega) = \lim_{k\to+\infty} \prod_{i=1}^{k} \varphi_i(\omega), \quad (P\text{-}a.e.)$$

（証明） ϕ_k は ϕ に平均収束したから 測度 P に関して確率収束する。従って $\log \phi_k(\omega) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} \log \varphi_i(\omega)$ も $\log \phi(\omega)$ に P－確率収束する。ところが $\{\varphi_i(\omega)\}$ は $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ 上の独立確率変数列であり、従って $\{\log \varphi_i(\omega)\}$ も独立確率変数列である。それ故、確率収束する独立確率変数の和であるところの $\log \phi_k(\omega)$ は $\log \phi(\omega)$ に P－概収束する。これより直ちに（1.28）が成立する。

（証明了）

Sem. on Probab.
Vol.24 1966年
P1-66

2章　Gauss測度の絶対連続性

§2　エントロピー

空间Ωの部分集合の族から成るσ-algebra $\mathcal{B}$の上に2つの確率測度P, P_1が与えられているものとする。さらに

$$\alpha = (A_1, A_2, \cdots, A_{n_\alpha}), \quad A_i \in \mathcal{B}, \quad i=1,2,\cdots, n_\alpha$$

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{n_\alpha} A_i \quad , \quad A_i \cap A_j = \phi \quad (i \neq j)$$

をΩの可測有限分割とするとき

$$(2.1) \qquad H(P_1/P) \equiv \sup_\alpha \sum_{i=1}^{n_\alpha} P_1(A_i) \log \frac{P_1(A_i)}{P(A_i)}$$

を「測度P_1の測度Pに関するエントロピー」という。但し上限はΩのすべての可測有限分割についてとるものとする。

LEMMA 2.1

$P_1 \prec P$でなければ$H(P_1/P) = +\infty$　また$P_1 \prec P$であれば

$$(2.2) \qquad H(P_1/P) = \int_\Omega \log \varphi(\omega) P_1(d\omega)$$

但し$\varphi(\omega) \equiv P_1(d\omega)/P(d\omega)$とする。

（証明）　まず$P_1 \prec P$ではないとする。このときある$B \in \mathcal{B}$が存在して

$$P_1(B) = a > 0, \quad P(B) = 0$$

となる。このBについて

$$H(P_1/P) \geqq P_1(B) \log \frac{P_1(B)}{P(B)} + P_1(\Omega - B) \log \frac{P_1(\Omega-B)}{P(\Omega-B)}$$

$$= +\infty$$

次に$P_1 \prec P$で且つ$\log \varphi(\omega)$がP_1-可積分の場合を考える。

一般に、函数$f(u) = u \log u$がconvexであることから、任意の分布函数$F(u)$について

$$(2.3) \qquad \int_0^{+\infty} u \log u \, F(du) \geqq \left\{\int_0^{+\infty} u F(du)\right\}\left\{\log\left[\int_0^{+\infty} u F(du)\right]\right\}$$

今、$B \in \mathcal{B}$, $P(B) > 0$なる任意のBを固定し、条件付分布

Sem. on Probab.
Vol.24 1966年
P1-66

$$F_B(u) \equiv \frac{P\{(\varphi(\omega) < u) \cap B\}}{P(B)}$$

に（2.3）を適用すると

$$\int_0^{+\infty} u\, F_B(du) = \frac{1}{P(B)} \int_B \varphi(\omega)\, P(d\omega) = \frac{P_1(B)}{P(B)}$$

$$\int_0^{+\infty} u \log u\, F_B(du) = \frac{1}{P(B)} \int_B \log \varphi(\omega)\, P_1(d\omega).$$

それ故

$$\int_B \log \varphi(\omega)\, P_1(d\omega) \geqq P_1(B) \log \frac{P_1(B)}{P(B)}$$

この式は $P_1(B) = 0$ のときにも成立するから、任意の有限可測分割 $\alpha = (A_1, A_2, \cdots, A_{n_\alpha})$ について

$$\sum_{i=1}^{n_\alpha} P_1(A_i) \log \frac{P_1(A_i)}{P(A_i)} \leqq \sum_{i=1}^{n_\alpha} \int_{A_i} \log \varphi(\omega)\, P_1(d\omega)$$
$$= \int_\Omega \log \varphi(\omega)\, P_1(d\omega)$$

逆向の不等式は函数 $\log \varphi(\omega)$ の range を（必要があれば trancate して）等分割することによりかんたんに得られる。

最後に $P_1 \prec P$, 且つ $\log \varphi(\omega)$ が P_1-可積分ではない場合には,

$$\int_\Omega \log \varphi(\omega)\, P_1(d\omega) = +\infty.$$

それ故 任意の正数 N に対して

$$A_N \equiv \{\omega : \varphi(\omega) \geqq N\}$$

と定義すると積分の定義から．$P_1(A_N) \log N \uparrow +\infty$ as $N \uparrow +\infty$.

ところが

$$P(A_N) = \int_{A_N} P(d\omega) \leqq \frac{1}{N} \int_{A_N} \varphi(\omega)\, P(d\omega) = \frac{1}{N} P_1(A_N)$$

従って

$$\frac{P_1(A_N)}{P(A_N)} \geqq N$$

故に任意の正数 N に対して 有限分割 $\alpha = (A_N, \Omega - A_N)$ をとると

$$H(P_1/P) \geqq P_1(A_N) \log \frac{P_1(A_N)}{P(A_N)}$$

$$\geqq P_1(A_N) \log N \quad \uparrow +\infty \quad \text{as} \quad N \uparrow +\infty$$

即ち

$$H(P_1/P) = +\infty = \int_\Omega \log \varphi(\omega)\, P_1(d\omega).$$ （証明了）

Sem. on Probab.
Vol.24 1966年
P1-66

LEMMA 2.2.

$\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ を $\mathcal{B}$ の sub-σ-algebra, P_1', P' をそれぞれ P_1, P の $\mathcal{B}'$ への restriction とすると

$$(2.4) \qquad H(P_1'/P') \leqq H(P_1/P)$$

且つ、$\mathcal{B} = \mathcal{B}'$ であれば等号が成立する。

（証明） 定義より明らか

LEMMA 2.3.

$\{\mathcal{B}^N\}$ を $\mathcal{B}$ の sub-σ-algebra の列で次の2条件をみたしているものとする。

1° $\mathcal{B}^1 \subset \mathcal{B}^2 \subset \cdots \subset \mathcal{B}^N \subset \mathcal{B}^{N+1} \subset \cdots$

2° $\bigcup_{N=1}^{+\infty} \mathcal{B}^N$ を含む最小の σ-algebra は $\mathcal{B}$.

このとき P, P_1 の $\mathcal{B}^N$, $N=1,2,3,\cdots$, への restriction をそれぞれ P^N, P_1^N とすると

$$(2.5) \qquad H(P_1/P) = \lim_{N\to+\infty} H(P_1^N/P^N)$$

（証明） ① $P_1 \prec P$ でない場合

$\mathcal{B}$-可測集合列 $\{A_k\}$ で

$$\frac{1}{2} \geqq P_1(A_k) \geqq \varepsilon_0 > 0$$

$$P(A_k) \longrightarrow 0 \quad \text{as} \quad k \longrightarrow +\infty$$

となるようなものが存在する。さらに仮定 2° から、各 A_k についてある N_k が存在して $A_k \in \mathcal{B}^{N_k}$, $k=1,2,3,\cdots$, としてよい。何故なら、任意の $A \in \mathcal{B}$ と任意の $\varepsilon > 0$ について、ある $\mathcal{B}^N$ から集合 A_ε を選んで

$$P\{A \triangle A_\varepsilon\} < \varepsilon, \quad P_1\{A \triangle A_\varepsilon\} < \varepsilon$$

とできる（$\triangle$ は symmetric difference）。実際、P, P_1 に関して、ある $\mathcal{B}^N$-可測集合で同時近似できるような $\mathcal{B}$-可測集合の全体は $\bigcup_{N=1}^{+\infty} \mathcal{B}^N$ を含む algebra であり、さらに monotone class であることから $\mathcal{B}$ と一致する。

このとき

$$H(P_1^{N_k}/P^{N_k}) \geqq P_1(A_k)\log\frac{P_1(A_k)}{P(A_k)} + P_1(A_k^c)\log\frac{P_1(A_k^c)}{P(A_k^c)}$$

$$\longrightarrow +\infty \quad \text{as} \quad k \longrightarrow +\infty.$$

Sem. on Probab.
Vol.24 1966年
P1-66

また、仮定1°とLemma 2.2 から，$H(P_1^N/P^N)$ が N について単調非減少であることを考えると

$$\lim_{N\to+\infty} H(P_1^N/P^N) = +\infty = H(P_1/P).$$

② $P_1 \prec P$ の場合

$$p_N(\omega) \equiv \frac{P_1^N(d\omega)}{P^N(d\omega)}, \quad N=1,2,3,\cdots,$$

とすると $p_N(\omega)$ は $\mathcal{B}^N$-可測，且つ明らかに

$$p_N(\omega) = E[p(\omega)/\mathcal{B}^N], \quad N=1,2,3\cdots$$

($E[\cdot/\mathcal{B}^N]$ は P^N に関する条件付平均とする)。従って $\{p_N(\omega)\}$ は Martingale である。それ故

$$\lim_{N\to+\infty} p_N(\omega) = E[p(\omega)/\mathcal{B}] = p(\omega), \quad (P\text{-a.e.})$$

さらに

$$[p(\omega)\log p(\omega)]^+ \equiv \max\{p(\omega)\log p(\omega), 0\}$$

とすると

$$[p_1(\omega)\log p_1(\omega)]^+, [p_2(\omega)\log p_2(\omega)]^+, \cdots$$

は semi-martingale。ここでもし

$$H(P_1/P) = \int_\Omega p(\omega)\log p(\omega)\, dP < +\infty$$

であれば

$$[p_1(\omega)\log p_1(\omega)]^+, [p_2(\omega)\log p_2(\omega)]^+, \cdots, [p(\omega)\log p(\omega)]^+$$

も semi-martingale である。従って $\{[p_N(\omega)\log p_N(\omega)]^+\}$ は uniformly integrable。さらに函数

$$x\log x, \quad x \geq 0$$

が下に有界であることを考えると $\{p_N(\omega)\log p_N(\omega)\}$ も uniformly integrable, 従って

$$\lim_{N\to+\infty} \int_\Omega p_N(\omega)\log p_N(\omega)\, dP$$
$$= \int_\Omega p(\omega)\log p(\omega)\, dP$$

これは (2-5) に他ならない。

Sem. on Probab.
Vol.24 1966年
P1-66

また、$H(P_1/P)=+\infty$ の場合には明らかに

$$\int_\Omega [p(\omega)\log p(\omega)]^+ dP = +\infty$$

Fatou の Lemma から

$$\lim_{N\to+\infty} \int_\Omega [p_N(\omega)\log p_N(\omega)]^+ dP$$

$$\geqq \int_\Omega [p(\omega)\log p_N(\omega)]^+ dP = +\infty$$

故に

$$\lim_{N\to+\infty} \int_\Omega p_N(\omega)\log p_N(\omega)\, dP = +\infty$$

即ち（2.5）が成立する。

（証明了）

LEMMA 2.4

σ-algebra $\mathcal{B}$ がある実確率変数系 $\{X_\lambda(\omega) : \lambda\in\Lambda\}$ から生成されている場合には

$$(2.6) \qquad H(P_1/P) = \sup_\beta H(P_1^\beta/P^\beta)$$

ここに $\beta=(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{n_\beta})$ は Λ のある場合有限部分集合、また P_1^β/P^β はそれぞれ P_1, P の $\{X_\lambda(\omega) ; \lambda\in\beta\}$ の生成す σ-algebra $\mathcal{B}^\beta$ への restriction，（2.6）式の右辺の上限は Λ の全ての有限部分集合のとり方に関するものとする。

（証明）　$H(P_1/P) \geqq \sup_\beta H(P_1^\beta/P^\beta)$ は定義より明らか。逆は任意の $\varepsilon>0$ に対して、ある有限可測分割 α が存在して

$$\sum_{A_i\in\alpha} P_1(A_i)\log\frac{P_1(A_i)}{P(A_i)} \geqq H(P_1/P)-\frac{\varepsilon}{2}$$

とできることと、全ての $A_i\in\alpha$ がある $\mathcal{B}^\beta$－可測集合で近似されているような Λ の有限部分集合 β を選ぶことができることから分る。

（証明了）

§3　エントロピーと Gauss 測度の絶対連続性

前節で定義したエントロピーを使って、この節では２つの Gauss 測度が equivalent か singular かのいずれかが成立することを示

Sem. on Probab.
Vol.24 1966年
P1-66

す。

Ωとして函数空間 R^T（Tは有限または無限区間），$\mathcal{B}$ は R^T の cylinder setから生成される最小の σ-algebra，即ち座標函数系 $\{x(t,\omega)\}_{t\in T}$ を可測にする最小の σ-algebra とする。

このとき可測空間（R^T, $\mathcal{B}$）上の確率測度 P が Gauss測度であるとは T から選んだ任意の有限集合

$$\alpha = (t_1, t_2, \cdots, t_{n_\alpha}),\quad t_i\in T,\quad 1\le i\le n_\alpha <+\infty$$

に関して $\{x(t_i,\omega);\ t_i\in\alpha\}$ のPに関する結合分布が n_α−次Gauss分布（退化した場合も含む）になっているものをいう。

P, P_1 を（Ω, $\mathcal{B}$）上の２つの Gauss 測度とする。このとき座標函数系 $\{X(t,\omega)\}$ を確率空間（Ω, $\mathcal{B}$, P），（Ω, $\mathcal{B}$, P_1）上の Gauss 確率過程と考えられるから，それらをそれぞれ $\{X(t,\omega)\}$, $\{X_1(t,\omega)\}$ と書くことにする。逆に任意の Gauss 過程は（Ω, $\mathcal{B}$）上に Gauss測度を定める。

定義　２つの Gauss過程が equivalent とは対応する Gauss 測度が equivalent である場合を言う。

LEMMA 3.1.

$X_1(\omega), X_2(\omega), \cdots, X_N(\omega)$ を測度 P, P_1 のいずれに関しても独立なガウス確率変数で，

$$(3.1)\qquad \begin{array}{ll} E\,X_k(\omega)=0, & V X_k(\omega)=1, \\ E_1 X_k(\omega)=m_k, & V_1 X_k(\omega)=\sigma_k^2>0, \end{array}\qquad k=1,2,3,\cdots N$$

（E,V は P に関する，E_1, V_1 は P_1 に関するそれぞれ平均と分散を表わす）であるものとし，$\mathcal{B}'\subset\mathcal{B}$ をこれらの確率変数を可測にする最小の σ-algebra，P', P_1' をそれぞれ P, P_1 の $\mathcal{B}'$ への restriction．

$$p'(\omega)\equiv\frac{dP_1'}{dP'}$$

とする。このとき

$$\log p'(\omega) = -\frac{1}{2}\sum_k \log\sigma_k^2 - \frac{1}{2}\sum_k\left[\frac{(X_k(\omega)-m_k)^2}{\sigma_k^2} - X_k(\omega)^2\right]$$

$$E_1\log p'(\omega) = H(P_1'/P')$$

$$= +\frac{1}{2}\sum_k\left[\sigma_k^2 - 1 - \log\sigma_k^2 + m_k^2\right]$$

Sem. on Probab.
Vol.24 1966年
P1-66

$$E \log p'(w) = -H(P'/P_1')$$

$$(3.2) \qquad = \frac{1}{2}\sum_k \left[-\log \sigma_k^2 - \frac{1}{\sigma_k^2} + 1 - \frac{m_k^2}{\sigma_k^2} \right]$$

$$V_1 \log p'(w) = \frac{1}{2}\sum_k \left[(\sigma_k^2 - 1)^2 + 2 m_k^2 \sigma_k^2 \right]$$

$$V \log p'(w) = \frac{1}{2}\sum_k \left[\frac{(\sigma_k^2 - 1)}{\sigma_k^4} + 2\frac{m_k^2}{\sigma_k^4} \right]$$

（証明）

$$p'(w) = \frac{1}{\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_N} \exp\left\{ \frac{1}{2}\sum_k \left[X_k(w)^2 - \frac{(X_k(w) - m_k)^2}{\sigma_k^2} \right] \right\}$$

であること．及びGauss確率変数の3次，4次のモーメントが平均と分散から計算されること。それに（2−1）の仮定を使えば初等的な計算で上記の結果は求まる。

（証明了）

LEMMA 3.2.

確率変数列 $\{X_k(w)\}$, $k=1,2,3,\cdots$, が存在して，測度 P, P_1 のいずれに関しても Gauss 分布に従い，且つ，

$1°$ $\quad VX_k(w) = 1$, $\quad EX_k(w) = 0$, $\quad k=1,2,3,\cdots$

$\quad V_1X_k(w) \to 0 \quad$ as $k \to +\infty$

$2°$ $\quad VX_k(w) = 1$, $\quad EX_k(w) = 0$, $\quad k=1,2,3,\cdots$

$\quad V_1X_k(w) \to +\infty \quad$ as $k \to +\infty$

のうちのいずれかが成立すれば，PとP_1は互いに特異，即ち任意の$\varepsilon > 0$に対し，ある$A_\varepsilon \in \mathcal{B}$が存在して

$$P(A_\varepsilon) < \varepsilon, \qquad P_1(A_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon$$

とできる。

（証明）　$1°$の場合を証明する。

$$A_k \equiv \{ w \in \Omega : |X_k(w) - m_k| < \sqrt{\sigma_k} \}, \quad k=1,2,3,\cdots$$

（ここに $\sigma_k^2 \equiv V_1X_k(w)$, $m_k \equiv E_1X_k(w)$, $k=1,2,3,\cdots$ とする）と定義すると

$$P(A_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|y-m_k|<\sqrt{\sigma_k}} e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy \longrightarrow 0 \quad \text{as } k \longrightarrow +\infty.$$

$$P_1(A_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_k} \int_{|y-m_k|<\sqrt{\sigma_k}} e^{-\frac{(y-m_k)^2}{2\sigma_k^2}}\, dy$$

Sem. on Probab.
Vol.24 1966年
P1-66

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|x| < \frac{1}{\sqrt{\sigma_k}}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \longrightarrow 1 \quad as \quad k \longrightarrow +\infty .$$

2°の場合の証明も全く同様。

（証明了）

LEMMA 3.3.

2つの Gauss 測度 P, P_1 に対して

(3.3) $\quad I(P, P_1) \equiv H(P_1/P) + H(P/P_1)$

と定義する。今、$I(P, P_1) = +\infty$ であれば、P と P_1 は互いに特異である。

（証明） $E\,X(t,w) = 0$, $t \in T$ と仮定しても一般性を失わない。また、$T_0 \equiv \{t \in T : V\,x(t,w) = 0\}$, $T_1 \equiv T - T_0$ とすると、任意の $t_0 \in T_0$ に対して

(3.4) $\quad V_1\,x(t_0, w) = E_1\,x(t_0, w) = 0$

となっていなければ明らかに、$P \perp P_1$（互いに特異），また，(3.4) が成立すれば

$$x(t_0, w) = 0 \qquad P + P_1 \quad a.e..$$

であるから $\{x(t,w) : t \in T_0\}$ の生成する σ-algebra は $\{\phi, \Omega\}$ (mod P, P_1) となる。従って、$\mathcal{B}_1$ を $\{x(t,w) : t \in T_1\}$ の生成する σ-algebra とすると $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1$ (mod P, P_1) となるから、P, P_1 の $\mathcal{B}_1$ への restriction を P', P_1' とすると Lemma 2.2 から $I(P, P_1) = I(P', P_1')$ である。それ故 $Vx(t,w) \neq 0$, $t \in T$ の場合にこのLemmaの命題を証明しておけば十分.

$\alpha = (t_1, t_2, \cdots, t_{n_\alpha})$ を T の任意の有限部分集合，$\mathcal{B}_\alpha$ を $\{x(t_i, w) : t_i \in \alpha\}$ から生成される σ-algebra，P^α, P_1^α をそれぞれ P, P_1 の $\mathcal{B}_\alpha$ への restriction とすると、Lemma 2.4 により

$$\begin{aligned} I(P, P_1) &= H(P_1/P) + H(P/P_1) \\ &= \sup_\alpha H(P_1^\alpha/P^\alpha) + \sup_\alpha H(P^\alpha/P_1^\alpha) \\ &\geq \sup_\alpha \{H(P_1^\alpha/P^\alpha) + H(P^\alpha/P_1^\alpha)\} \\ &= \sup_\alpha I(P^\alpha, P_1^\alpha). \end{aligned}$$

ところが任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$H(P^{\beta_1}/P_1^{\beta_1}) \geq H(P_1/P) - \frac{\varepsilon}{2}$$

Sem. on Probab.
Vol.24 1966年
P1-66

$$H(P_1^{\beta_1}/P^{\beta_1}) \geqq H(P_1/P) - \frac{\varepsilon}{2}$$

となるような T の有限部分集合 β_1 が存在するから，Lemma 2.2 から

$$\begin{aligned} I(P_1^{\beta_1}, P^{\beta_1}) &\geqq H(P^{\beta_1}/P_1^{\beta_1}) + H(P_1^{\beta_1}/P^{\beta_1}) \\ &\geqq H(P_1/P) + H(P/P_1) - \varepsilon \\ &= I(P, P_1) - \varepsilon \end{aligned}$$

それ故

(3.5) $$I(P, P_1) = \sup_{\alpha} I(P^{\alpha}, P_1^{\alpha})$$

さて，任意の $\alpha = (t_1, t_2, \cdots, t_{n_\alpha}) \subset T$ を固定する。また，

$$x(t_i, w) \equiv x_i(w), \quad i = 1, 2, 3, \cdots, n_\alpha (\equiv n)$$

と改めて書き直す。また $B = (b_{ij})$，$B_1 = (b'_{ij})$，$1 \leqq ij \leqq n$ をそれぞれ P, P_1 に関する $\{x_i(w)\}$ の covariance matrix とする。このとき matrix $C = (c_{ij})$，$1 \leqq i, j \leqq n$ が存在して

$$CBC^* = \begin{pmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad CB_1C^* = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & & 0 \\ & \sigma_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

（n' 個の 1，$n - n'$ 個の 0）

（C^* は C の transposed matrix）とできる。（Courant-Hilbert [ ]）．ここで

$$y_k(w) \equiv \sum_{j=1}^{n} c_{kj}\, x_j(w), \quad k = 1, 2, 3, \cdots, n$$

とおくと $Vy_k(w) = 0$，$k = n'+1, n'+2, \cdots, n$．もし $\sigma_k \neq 0$，$k > n'$ となるような k が存在すれば，$V_1 y_k(w) = \sigma_k^2$ であることから明らかに $P \perp P_1$．それ故 $n' = n$ の場合のみ考える。

このとき $\{y_k(w)\}$ は Lemma 3.1. の仮定 (3.1.) をみたしているから (3.2) を使って計算すると

$$I(P^{\alpha}, P_1^{\alpha}) = H(P_1^{\alpha}/P^{\alpha}) + H(P^{\alpha}/P_1^{\alpha})$$

(3.6) $$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[\sigma_k^2 - 1 - \log \sigma_k^2 + m_k^2\right] \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[\log \sigma_k^2 + \frac{1}{\sigma_k^2} - 1 + \frac{m_k^2}{\sigma_k^2}\right] \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{(\sigma_k^2 - 1)^2}{\sigma_k^2} + m_k^2\left(1 + \frac{1}{\sigma_k^2}\right)\right] \end{aligned}$$

ここでこの Lemma の命題を次の2つの場合に分けて証明する。

Sem. on Probab.
Vol.24 1966年
P1-66

① すべての α の選び方と $1 \leq k \leq n_\alpha$ なる k について一様に

(3.7) $$0 < a \leq \sigma_k^2 \leq b < +\infty$$

となるような正定数 a, b が存在するとき、

このとき、正定数 a', b' が存在して

$$a' \sum_{k=1}^{n} [(\sigma_k^2 - 1)^2 + m_k^2] \leq I(P^\alpha, P_1^\alpha)$$

$$\leq b' \sum_{k=1}^{n} [(\sigma_k^2 - 1)^2 + m_k^2]$$

$$V_1 \log p_\alpha(\omega) \leq b' \sum_{k=1}^{n} [(\sigma_k^2 - 1)^2 + m_k^2]$$

$$V \log p_\alpha(\omega) \leq b' \sum_{k=1}^{n} [(\sigma_k^2 - 1)^2 + m_k^2]$$

とできる。但し $p_\alpha(\omega) \equiv \dfrac{dP_1^\alpha}{dP^\alpha}$.

ここで ωー集合 A_α を

$$A_\alpha \equiv \{\omega : \log p_\alpha(\omega) > \tfrac{1}{2} I(P^\alpha, P_1^\alpha) + E \log p_\alpha(\omega)\}$$

と定義すると，チェビシェフの不等式から

$$P(A_\alpha) \leq \frac{V \log p_\alpha(\omega)}{\frac{1}{4} I(P^\alpha, P_1^\alpha)^2} \leq \frac{c}{I(P^\alpha, P_1^\alpha)}, \quad \exists c > 0$$

他方

$$I(P^\alpha, P_1^\alpha) = E_1 \log p_\alpha(\omega) - E \log p_\alpha(\omega)$$

であることから

$$A_\alpha^c = \{\omega : \log p_\alpha(\omega) \leq \tfrac{1}{2} I(P^\alpha, P_1^\alpha) + E \log p_\alpha(\omega)\}$$

$$= \{\omega : \log p_\alpha(\omega) \leq \tfrac{1}{2} E_1 \log p_\alpha(\omega) - \tfrac{1}{2} E \log p_\alpha(\omega)\}$$

$$= \{\omega : \log p_\alpha(\omega) \leq -\tfrac{1}{2} I(P^\alpha, P_1^\alpha) + E_1 \log p_\alpha(\omega)\}$$

となり再びチェビシェフの不等式から

$$P_1(A_\alpha^c) \leq \frac{V_1 \log p_\alpha(\omega)}{\frac{1}{4} I(P^\alpha, P_1^\alpha)^2} \leq \frac{\alpha}{I(P^\alpha, P_1^\alpha)}, \quad \exists d > 0$$

ここで

$$I(P_1, P) = \sup_\alpha I(P_1^\alpha, P^\alpha) = +\infty$$

であることを考えると，任意の $\varepsilon > 0$ に対して α をてきとうに選べば

$$P(A_\alpha) < \varepsilon, \quad P_1(A_\alpha^c) < \varepsilon$$

Sem. on Probab.
Vol.24 1966年
P1-66

とできる。それ故 $P \perp P_1$.

② (3.7) をみたすような 正定数 a, b が存在しない場合、この場合は Lemma 2.2 から直ちに $P \perp P_1$ が出る。

(証明了)

THEOREM 3.1 (J. Hajek [2], J. Feldman [3])

P, P_1 を $(R^T, \mathcal{B})$ 上の2つの Gauss 測度とすると

$$P \sim P_1 \quad (\text{互いに絶対連続})$$

であるか

$$P \perp P_1 \quad (\text{互いに特異})$$

であるかのいずれかが成立する。

また、$P \sim P_1$ であるための必要十分条件は $I(P, P_1) < +\infty$ であることである。

(証明) 定義より明らかに $H(P_1/P) \geq 0$, $H(P/P_1) \geq 0$ であるから $0 \leq I(P, P_1) \leq +\infty$ である。

今、$I(P, P_1) = +\infty$ であれば Lemma 2.3. より直ちに $P \perp P_1$ が出る。

また、$I(P, P_1) < +\infty$ であれば $H(P_1/P) < +\infty$, $H(P/P_1) < +\infty$, それ故 Lemma 1.1 の対偶をとって $P_1 \prec P$, $P \prec P_1$. 従って $P \sim P_1$ である。

(証明了)

COROLLARY

$(R^T, \mathcal{B})$ 上の2つの Gauss 測度 P, P_1 について次の3条件は同値である。

1° $P \sim P_1$

2° $H(P_1/P) < +\infty$

3° $H(P/P_1) < +\infty$

この結果と§1の Kakutani の結果との間の関連が当然予想されるがそれについては次の§4でふれる。

§4. Gauss測度の絶対連続性と $L^2(X)$

この節では2つの Gauss 確率過程 $\{X(t,w)\}$, $\{X_1(t,w)\}$ が

Sem. on Probab.
Vol.24 1966年
P1-66

equivalentになるための必要十分条件を $\{X(t,w)\}$ の張る linear な L^2 ー空間 $L^2(X)$ の言葉で計算した Yu. Rozanov [5] の結果をまず紹介する。次にこれらの確率過程に対応するGauss 測度をそれぞれ P, P_1 とすると $P\sim P_1$ であれば $L^1(P_1)$ と $L^1(P)$ の間に 1-1 multiplicative linear transformation の存在することを示す。

$\{X(t,w)\}$ を確率空間 $(R^T, \mathcal{B}, P)$ 上の Gauss 過程とする。

(4.1) $$E\{X(t,w)\}=\int_{R^T} X(t,w)P(dw)=0 \quad , \qquad t\in T.$$

と仮定しても一般性を失わない。もしそうでなければ mean 函数を ひいた新しい Gauss 過程を考えればよい。

任意の $t\in T$ を固定したときに $X(t)$ を確率変数 $X(t,w)$ を含む P-同値類(即ち $P[Y(w)=X(t,w)]=1$ となるような可測函数 $Y(w)$ の全体から成る類)を表わすものとする。次に $\{X(t);t\in T\}$ の一次結合から成る線型空間を内積

$$\langle X(t), X(s)\rangle \equiv E\{X(t,w)X(s,w)\} \quad , \qquad t,s\in T$$

で完備化した Hilbert空間を $L^2(X)$ とする。従って $L^2(X)$ の任意の元X は1つのP-同値類と考えられるが、このとき類 Xの任意の代表元を $X(w)$ で表わすものとする。

$\{X_1(t,w)\}$ を確率空間 $(R^T, \mathcal{B}, P_1)$ 上の任意の Gauss過程とし測度 P_1 に関する平均を $E_1\{\cdot\}$ で表わすものとする。

今, $P\sim P_1$ であるとする。このとき

(4.2) $$B(\xi,\eta)\equiv E_1\{(\xi(w)-E_1\xi(w))(\eta(w)-E_1\eta(w))\} \ , \ \xi,\eta\in L^2(X)$$

によって $L^2(X)$ 上の bilinear 形式 $B(\xi,\eta)$ を定義する。Lemma 3.2 を考慮すると, ある正定数 a, b が存在して, 任意の $\eta\in L^2(X)$ について

(4.3) $$a\|\eta\|^2 \le B(\eta,\eta) \le b\|\eta\|^2$$

が成立する。従って Schwarz の不等式により

$$|B(\xi,\eta)| \le B(\xi,\xi)^{\frac12} B(\eta,\eta)^{\frac12}$$
$$\le b\|\xi\|\ \|\eta\| \qquad \forall\xi,\eta\in L^2(X)$$

であるから bilinear 形式 $B(\xi,\eta)$ は有界である。それ故 $L^2(X)$ から

Sem. on Probab.
Vol.24 1966年
P1-66

$L^2(X)$ への有界線型変換 S が存在して

(4.4) $\quad < S\xi, \eta > = B(\xi, \eta), \quad \forall \xi, \eta \in L^2(X)$。

となる。明らかに S は正値自己共役である。S に対応する単位の分解を $E(\lambda)$ とすると (4.3) を考慮して

(4.5) $\quad S = \int_a^b \lambda E(d\lambda), \quad 0 < a \leq b < +\infty$

ここで S が連続スペクトルを持たないことを示す。まず 区間 $[a, b]$ を有限ヶの部分区間

$$\Delta_{k+1} = [\lambda_k, \lambda_{k+1}), \quad k = 0, 1, 2, \cdots, N-1,$$

に分割する。

$$\mathcal{H}^k \equiv \{E(\lambda_k) - E(\lambda_{k-1})\} L^2(X), \quad k = 1, 2, \cdots, N$$

とおき，$\mathcal{H}^k \neq \{0\}$ と仮定すると、ある $\eta_k \in \mathcal{H}^k$ を $\|\eta_k\| = 1$ となるように選べる。このとき

$$B(\eta_k, \eta_l) = < S\eta_k, \eta_l >$$

$$= \begin{cases} \int_{\lambda_{k-1}}^{\lambda_k} \lambda < E(d\lambda)\eta_k, \eta_k >, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases}.$$

従って $\lambda_{k-1} \leq B(\eta_k, \eta_k) \leq \lambda_k$ となる。このことは $\{\eta_k(\omega)\}$ が測度 P_1 に関しても独立な確率変数列であり、その分散 $\sigma_k^2 = B(\eta_k, \eta_k)$, $k = 1, 2, \cdots, N$, は

(4.6) $\quad \lambda_{k-1} \leq \sigma_k^2 \leq \lambda_k, \quad k = 1, 2, 3, \cdots, N$

をみたすことを示している。もし $E(\lambda)$ が連続スペクトルを持てば 区間 $[a, b]$ の分割を細かくすることによって上のような η_k をいくらでも多く選ぶことができ，(4.6) と (3.6) を考慮すると $I(P, P_1) = +\infty$ となる。これは $P_1 \sim P$ という仮定と矛盾、従って S は純粋離散スペクトルしか有さない。

S の固有値と固有元を multiplicity も考慮に入れて index をつけ、それぞれ $\{\lambda_\alpha = \sigma_\alpha^2\}$, $\{\eta_\alpha\}$ とおくと再び (3.6) に注意して

(4.7) $\quad \sum_\alpha (1 - \sigma_\alpha^2)^2 < +\infty$

Sem. on Probab.
Vol.24 1966年
P1-66

でなくてはならないことが分る。これは1以外の固有値は高々可算ヶで且つその multiplicity が有限であることを示している。さらに、Iを$L^2(X)$の恒等変換とすると(4.7)は$S-I$がHilbert-Schmidt型であることを示している。また、$m_\alpha = E_1\{\eta_\alpha(\omega)\}$とすると(3.6)より

$$(4.8) \qquad \sum_\alpha (m_\alpha)^2 < +\infty$$

となることが分る。従って$\sigma_\alpha^2 = B(\eta_\alpha, \eta_\alpha) = 1$, $m_\alpha = E_1\{\eta_\alpha(\omega)\} = 0$でないような固有元は高々可算ヶしかないから、それらを改めて$\{\eta_k\}$とし、$\varphi(\omega) = \frac{P_1(d\omega)}{P(d\omega)}$とすると

$$\log \varphi(\omega) = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\left[\log \sigma_k^2 + \frac{\{\eta_k(\omega) - m_k\}}{\sigma_k^2} - \eta_k(\omega)^2\right]$$

$$(4.9) \qquad H(P_1/P) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\left[\sigma_k^2 - 1 - \log \sigma_k^2 + m_k^2\right]$$

$$I(P, P_1) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\left[\frac{(1-\sigma_k^2)^2}{\sigma_k^2} + m_k^2\left(1 + \frac{1}{\sigma_k^2}\right)\right]$$

さて、上記の計算は実は equivalent な2つの Gauss 測度の間の関係が S. Kakutani [1] の equivalent な2つの無限次元直積測度(§1)の関係に帰着させられることを示している。即ちSの固有元全体$\{\eta_\alpha\}$が Hilbert 空間$L^2(X)$の C.O.N.S.(完全正規直交系)をなすことから$\mathcal{B}$は$\{\eta_\alpha\}$全体を可測にする最小のσ-algebra であることが分る。もとより$\{\eta_\alpha(\omega)\}$は Gauss 測度P, P_1のいずれに関しても独立な確率変数系と考えられる。さて、仮定(4.1)と$\{\eta_\alpha\}$が正規系であることから$\eta_\alpha(\omega)$のPに関する分布は平均0, 分散1の Gauss 分布であることが分る。これは$\eta_\alpha(\omega)$を可測にする最小のσ-algebra $\mathcal{B}^\alpha$へのPの restriction P^αが平均0, 分散1の Gauss 測度であることに他ならない。同様にしてP_1の$\mathcal{B}^\alpha$への restriction P_1^αは平均m_α, 分散σ_α^2の Gauss 測度であることが分る。全てのαについて$\sigma_\alpha^2 \geq a > 0$。((4.5)参照)であるから 明らかに$P^\alpha \sim P_1^\alpha$. 従って(1.1)は成立する。ところで、ある$\alpha$について$m_\alpha = 0$, $b_\alpha^2 = 1$であれば$P^\alpha = P_1^\alpha$, 従ってこのようなことの成立しないようなαが高々可算ヶしかないというのは$P^\alpha \neq P_1^\alpha$となるようなαが高々可算ヶしかないことと同じである。それ故 Gauss 測度の equivalence を問題にするときには本質的には$L^2(X)$のある可算次元部分空間を問題にすればよいことが分る。故にこのセミナーノートを通して次のような仮定をおく。

Sem. on Probab.
Vol.24 1966年
P1-66

（仮定） Hilbert空間 $L^2(X)$ は separable とする。

この仮定は、例えば確率過程 $\{X(t,w)\}$ が平均連続であればこの仮定はみたされる。この仮定の下では $L^2(X)$ の C.O.N.S. であるところの $\{\eta_\alpha\}$ は高々可算ケであるから index をつけかえて改めて $\{\eta_k\}$, $k=1,2,3,\cdots$, と書くことにすると、直ちに Theorem 1.1. の equivalence の成立する場合に帰着させられる。実際.

$$\varphi_n(w)=\frac{P_1^n(dw)}{P^n(dw)}=\frac{1}{\sigma^n}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_n^2}\left[(1-\sigma_n^2)\eta_n(w)^2-2m_n\eta_n(w)+m_n^2\right]\right\}$$

$$\rho_n(P_1^n,P^n)=\int_\Omega\sqrt{\varphi_n(w)}\;P^n(dw)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{\sigma_n^2+1}{4\sigma_n^2}\left[x^2-2\frac{m_n}{\sigma_n^2+1}x+\frac{m_n^2}{\sigma_n^2+1}\right]\right\}dx$$

$$=\sqrt{\frac{2\sigma_n}{\sigma_n^2+1}}\;\exp\left\{-\frac{m_n^2}{4(\sigma_n^2+1)}\right\}\ ,\qquad n=1,2,3,\cdots,$$

ところが

$$\frac{2\sigma_n}{\sigma_n^2+1}=1-\frac{(\sigma_n-1)^2}{\sigma_n^2+1}\ ,\qquad n=1,2,3,\cdots,$$

$\sigma_n>0$, $n=1,2,3,\cdots$, と (4.7) から

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(\sigma_n-1)^2}{\sigma_n^2+1}\leq\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(\sigma_n-1)^2(\sigma_n+1)^2}{\sigma_n^2+1}$$

$$\leq\sum_{n=1}^{+\infty}(\sigma_n^2-1)^2<+\infty$$

また (4.8) から

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{m_n^2}{4(\sigma_n^2+1)}\leq\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}m_n^2<+\infty$$

従って

$$\rho(P,P_1)=\prod_{n=1}^{+\infty}\rho_n(P^n,P_1^n)$$

$$=\left[\prod_{n=1}^{+\infty}\frac{2\sigma_n}{\sigma_n^2+1}\right]^{\frac{1}{2}}\exp\left\{-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{m_n^2}{4(\sigma_n^2+1)}\right\}>0$$

である。

上記の議論を逆にたどることによって次の定理を得る。

THEOREM 4.1. (Yu. Rozanov [5])

$\{X(t,w)\}$ を mean 函数 $\equiv 0$, $\{X_1(t,w)\}$ を mean 函数 $m(t)$, covariance 函数 $r_1(t,s)$ の Gauss 過程とする。このときこの2つ

Sem. on Probab.
Vol.24 1966年
P1-66

の Gauss 過程が equivalent になるための必要十分条件は次の3条件が成立することである。

(A) $\langle SX(t), X(s)\rangle = r_1(t,s)$, $t, s \in T$

によって $L^2(X)$ 上の可逆有界線型変換 S が定義され，

(B) I を $L^2(X)$ の恒等変換とすると $S-I$ は Hilbert-Schmidt 型である。

(C) $f(X(t)) = m(t)$, $t \in T$

によって $L^2(X)$ 上の線型汎函数 f が定義され，且つ S の固有元を $\{\eta_k\}$ とするときに

$$\sum_{k=1}^{+\infty} f(\eta_k)^2 < +\infty.$$

(注意) S が条件 (A), (B) をみたせば $F = \sqrt{S}$ もまた可逆対称正値有界線型変換であり、さらに $F-I$ も Hilbert-Schmidt 型である. (J. Feldman [3])。実際 S の固有値を $\{\lambda_k\}$ とすると条件 (B) により

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (\lambda_k - 1)^2 < +\infty,$$

ところが $F = \sqrt{S}$ の固有値は $\{\sqrt{\lambda_k}\}$ であるから

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (\sqrt{\lambda_k} - 1)^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(\lambda_k - 1)^2}{(\sqrt{\lambda_k}+1)^2} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} (\lambda_k - 1)^2 < +\infty.$$

即ち $F-I$ は Hilbert-Schmidt 型である。

さて、ここで Lemma を2つ用意する。

LEMMA 4.1.

Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の線型変換 K について、次の5条件は同値である。

(S.1) K は Hilbert-Schmidt 型である。

(S.2) ある C.O.N.S. $\{\eta_k\}$ が存在して

$$\sum_{j,k=1}^{+\infty} |\langle K\eta_k, \eta_j\rangle|^2 < +\infty.$$

(S.3) 任意の O.N.S.（正規直交系）$\{\eta_k\}$ について

$$\sum_{k,j} |\langle K\eta_k, \eta_j\rangle|^2 \leq M$$

となるような O.N.S. の選び方に無関係な正定数 M が存在する。

(S.4) 任意の O.N.S. $\{\eta_k\}$ について

Sem. on Probab.
Vol.24 1966年
P1-66

$$\sum_k \| K\eta_k \|^2 \leq M$$

となるような O. N. S. の選び方に無関係な正定数 M が存在する。

（S.5）　$\{\mathcal{H}^n\}$ を $\mathcal{H}$ の有限次元部分空間の列で

（*）$\begin{cases} \mathcal{H}^n \subset \mathcal{H}^{n+1}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots \\ \mathcal{H} \text{ は } \bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathcal{H}^n \text{ を含む最小の closed linear manifold} \end{cases}$

をみたすようなものとし，また $\{\eta_k^n\}$ を $\mathcal{H}^n$ の C.O.N.S. とする。このとき n に無関係な正定数 M が存在して

$$\sum_{k,j} |< K\eta_k^n, \eta_j^n >|^2 \leq M$$

となる。

（証明）最初の4条件が同値であることはよく知られていることである。また（S3）から（S5）の出ることもすぐ分る。従って（S.5）から（S.2）の出ることを証明すればよい。

N_n を $\mathcal{H}^n$ の次元とする（$n=1, 2, 3, \cdots$）。最初の N_n ヶが $\mathcal{H}^n$ に入っているような C. O. N. S. $\{\eta_k\}$ を1つ選んで固定する。任意の n に対して $\{\eta_k^n\}$, $k=1, 2, \cdots, N_n$, は $\mathcal{H}^n$ の C. O. N. S. であることから $1 \leq i \leq N_n$ なる η_i は $\{\eta_k^n\}$ の linear combination として表わされる。即ち

（4.10）　$$\eta_i = \sum_{k=1}^{N_n} a_{ik}^n \eta_k, \qquad i = 1, 2, \cdots, N_n.$$

ここに、行列 (a_{ik}^n) は unitary である。即ち

（4.11）　$$\sum_{k=1}^{N_n} a_{ki}^n a_{kj}^n = \delta_{ij}, \qquad i, j = 1, 2, \cdots, N_n.$$

故に

$$\sum_{i,j=1}^{N_n} |< K\eta_i, \eta_j >|^2$$

$$= \sum_{i,j=1}^{N_n} \sum_{p,q=1}^{N_n} a_{ip}^n a_{jq}^n < K\eta_p^n, \eta_q^n > \sum_{r,s=1}^{N_n} a_{ir}^n a_{js}^n < K\eta_r^n, \eta_s^n >$$

$$= \sum_{p,q,r,s} < K\eta_p^n, \eta_q^n > < K\eta_r^n, \eta_s^n > \sum_i a_{ip}^n a_{ir}^n \sum_j a_{jq}^n a_{js}^n$$

$$= \sum_{p,q} |< K\eta_p^n, \eta_q^n >|^2$$

従って

$$\sum_{i,j=1}^{+\infty} |< K\eta_i, \eta_j >|^2 = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i,j=1}^{N_n} |< K\eta_i, \eta_j >|^2$$

Sem. on Probab.
Vol.24 1966年
P1-66

$$= \lim_{n\to+\infty} \sum_{i,j=1}^{N_n} |\langle K\eta_i^n, \eta_j^n\rangle|^2 \leq M < +\infty.$$

よって（S.2）は成立する。

（証明了）

LEMMA 4.2.

Hilbert空間 $\mathcal{H}$ 上の線型汎函数 f について次の4条件は同値である。

（M.1）　ある C.O.N.S. $\{\eta_k\}$ について

$$\sum_{k=1}^{+\infty} f(\eta_k)^2 < +\infty$$

（M.2）　任意の C.O.N.S. $\{\eta_k\}$ について

$$\sum_{k=1}^{+\infty} f(\eta_k)^2 < +\infty.$$

（M.3）　ある正定数Mが存在して任意の O.N.S. $\{\eta_k\}$ について

$$\sum_k f(\eta_k)^2 \leq M$$

となるような O.N.S. の選び方に無関係な正定数 M が存在する。

（M.4）　$\{\mathcal{H}^n\}$ を条件(*)をみたすような $\mathcal{H}$ の有限次元部分空間列で各 n に対して $\{\eta_k^n\}$ を $\mathcal{H}^n$ の C.O.N.S. とする．このとき n に無関係な正定数 M が存在して

$$\sum_k f(\eta_k^n)^2 \leq M$$

となる。

（証明）（M.1）から（M.2）の出ることを示す。これ以外の部分については Lemma 4.1. の証明と同様にしてできる。

さて $\{\eta_k\}$ を（M.1）をみたす C.O.N.S. $\{\xi_k\}$ を任意の C.O.N.S.とする。このとき $\{\xi_k\}$ は $\{\eta_k\}$ の linear combination

$$\xi_i = \sum_{k=1}^{+\infty} a_{ik}\eta_k , \quad i = 1, 2, 3, \cdots$$

と表わされる。ここに

$$\sum_{i=1}^{+\infty} a_{ik}\, a_{il} = \delta_{kl} , \quad k,l = 1,2,3,\cdots,$$

が成立する．従って

$$\sum_{i=1}^{+\infty} f(\xi_i)^2 = \sum_i \sum_k a_{ik} f(\eta_k) \sum_l a_{il}\, f(\eta_l)$$

$$= \sum_{k,l} f(\eta_k)\, f(\eta_l) \sum_i a_{ik}\, a_{il}$$

Sem. on Probab.
Vol.24 1966年
P1-66

$$= \sum_k f(\eta_k)^2 < +\infty.$$

これは（M.2）に他ならない。

（証明了）

Theorem 4.1. の後の注意と Lemma 4.2. から次の基本定理が成立する。

THEOREM 4.2.

$\{X(t,\omega)\}$ を mean 函数 0, $\{X_1(t,\omega)\}$ を mean 函数 $m(t)$ の Gauss 過程とする。このとき $\{X(t,\omega)\} \sim \{X_1(t,\omega)\}$ となるための必要十分条件は、$L^2(X)$ 上に線型変換 F と線型汎函数 f が存在して次の条件をみたすことである。

(4.12) $\quad Y(t) = FX(t) + f\{X(t)\}, \quad t \in T.$

は $\{X_1(t,\omega)\}$ の表現である。即ち $\{X_1(t,\omega)\}$ と $\{Y(t,\omega)\}$ は同じ確率法則を有す。

(4.13) $\quad F - I$ は Hilbert-Schmidt 型

(4.14) $\quad F$ は対称且つ可逆的

(4.15) $\quad F$ の固有元を $\{\eta_k\}$ とすると $\sum_k f(\eta_k)^2 < +\infty.$

（証明） $\{X_1(t,\omega)\} \sim \{X(t,\omega)\}$ とする。このとき Theorem 4.1 により条件 (A), (B) をみたすような線型変換 S が存在する。$F \equiv \sqrt{S}$ とおくと Theorem 4.1 の注意により F は (4.13), (4.14) をみたすことが分る。また線型汎函数 f を

(4.16) $\quad f\{X(t)\} \equiv m(t) \ ; \quad t \in T,$

によって定義すると，S と F が同じ固有元を有すことから，(4.15) は条件 (C) から出る。条件 (A) から

$$\langle FX(t), FX(s) \rangle = \langle SX(t), X(s) \rangle, \quad t, s \in T$$

が $\{X_1(t,\omega)\}$ の covariance 函数に等しいことと (4.16) の定義から (4.12) の $\{Y(t,\omega)\}$ が $\{X_1(t,\omega)\}$ の表現であることは明らかである。

逆に (4.12)―(4.15) をみたす線型変換 F と線型汎函数 f が存在したとする。このとき $S \equiv F^*F$ （F^* は F の共役変換）とおくと，S は条件 (A), (B) をみたす。実際

$$S - I = F^*F - I = (F-I)^*(F-I) + (F-I)^* + (F-I)$$

Sem. on Probab.
Vol.24 1966年
P1-66

であるから(4.13)より $S-I$ は Hilbert-Schmidt 型、従って S は有界、また S が可逆的であることは(4.14)より明らか。また、F, S の固有元が C.O.N.S. をなすことと Lemma 4.2. により (M.1) と (M.2) が同値であることを考えると (4.15) より条件 (C) が出る。

故に Theorem 4.1. により $\{X_1(t,w)\} \sim \{X(t,w)\}$ である。

（証明了）

（注意） 上の証明を読めばすぐ分るように、(4.14) から F の対称性に関する仮定を取り去っても Theorem 4.2. は成立する。

さて、$\{X_1(t,w)\}$ と $\{X(t,w)\}$ が equivalent であるものとし P_1、P を対応する Gauss 測度とする。このとき Theorem 4.2. より (4.12)－(4.15) をみたす $L^2(X)$ 上の線型変換 F と線型汎函数 f が存在する。F の固有値，固有元をそれぞれ $\{\lambda_k\}$, $\{\eta_k\}$ とすると (4.14) より $\{\lambda_k\}$ は実数列で且つ $\lambda_k \neq 0$, $k=1,2,3,\cdots$. また $\{\eta_k\}$ が $L^2(X)$ の完全系であることから σ-algebra $\mathcal{B}$ は全ての $\eta_k(w)$, $k=1,2,3,\cdots$, を可測にする最小の σ-algebra であると言える。

ところで今、$G(w)$ を任意の P_1－可積分函数とすると、次のような函数列 $\{G_n(w)\}$ が存在する。即ち

(4.17) $\quad G_n(w)$ は $\{\eta_1(w), \eta_2(w), \cdots, \eta_n(w)\}$ のみの函数である。

$$\text{i.e.,}\quad G_n(w) = G_n[\eta_1(w), \eta_2(w), \cdots, \eta_n(w)], \quad n=1,2,3,\cdots.$$

(4.18) $$G(w) = \lim_{n\to+\infty} G_n(w), \quad (P_1\text{-a.e.})$$

(4.19) $$E_1[G] = \lim_{n\to+\infty} E_1[G_n]$$

ここに $E_1[\cdot]$ は P_1 に関する平均である。このような函数列の存在することは、例えば $\mathcal{B}^n$, $n=1,2,3,\cdots$, を $\{\eta_1(w), \eta_2(w), \cdots, \eta_n(w)\}$ を可測にする最小の σ-algebra とし、$G_n(w) \equiv E_1[G(w)/\mathcal{B}^n]$, $n=1,2,3,\cdots$ によって定義すればよい。ここで，

(4.20) $$JG_n(w) \equiv G_n[\lambda_1\eta_1(w)+m_1, \lambda_2\eta_2(w)+m_2, \cdots, \lambda_n\eta_n(w)+m_n],$$
$$n=1,2,3,\cdots,$$

（但し $m_k \equiv E_1[\eta_k] = f(\eta_k)$, $k=1,2,3,\cdots$）とおくと

$$E[JG_n] = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\cdots\int G_n[\lambda_1x_1+m_1, \lambda_2x_2+m_2, \cdots, \lambda_nx_n+m_n]$$

Sem. on Probab.
Vol.24 1966年
P1-66

$$\times \exp\{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} x_k^2\} dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

(4.21)

$$= \{2\pi(\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n)^2\}^{-\frac{n}{2}} \int\cdots\int G_n[y_1, y_2, \cdots, y_n]$$

$$\times \exp\{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{y_k^2}{\lambda_k^2}\} dy_1 dy_2 \cdots dy_n$$

$$= E_1[G_n]$$

(4.18)と(4.21)から

(4.22) $\quad P\{$函数列$\{\mathcal{T}G_n\}$が収束する$\}$

$$= P\{\bigcap_{p=1}^{+\infty}\bigcup_{q=1}^{+\infty}\bigcap_{m,n=q}^{+\infty}[|\mathcal{T}G_m - \mathcal{T}G_n| < \frac{1}{p}]\}$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\lim_{s\to+\infty}\lim_{r\to+\infty} P\{\bigcap_{p=1}^{t}\bigcup_{q=1}^{s}\bigcap_{m,n=q}^{r}[|\mathcal{T}G_m - \mathcal{T}G_n| < \frac{1}{p}]\}$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\lim_{s\to+\infty}\lim_{r\to+\infty} P_1\{\bigcap_{p=1}^{t}\bigcup_{q=1}^{s}\bigcap_{m,n=q}^{r}[|G_m - G_n| < \frac{1}{p}]\}$$

$$= P_1\{\bigcap_{p=1}^{+\infty}\bigcup_{q=1}^{+\infty}\bigcap_{m,n=q}^{+\infty}[|G_m - G_n| < \frac{1}{p}]\}$$

$= P_1\{$函数列$\{G_n(\omega)\}$が収束$\} = 1$

故に函数列$\{\mathcal{T}G_n\}$は測度Pに関して概収束する．そこで

(4.23) $\quad \mathcal{T}G(\omega) \equiv \lim_{n\to+\infty} \mathcal{T}G_n(\omega)$,

と定義する。(4.23)の左辺が右辺の函数列$\{G_n(\omega)\}$の選び方に無関係なことは(4.22)と同様にして証明される。

さらに$G(\omega)$が non-negative であれば$\mathcal{T}G(\omega)$も non-negative, $G(\omega)$が有界なら$\mathcal{T}G(\omega)$も有界となることも分る。それ故、任意の有界可測函数$G(\omega)$について

(4.24) $\quad E[\mathcal{T}G] = \lim_{n\to+\infty} E[\mathcal{T}G_n]$

$$= \lim_{n\to+\infty} E_1[G_n] = E_1[G]$$

即ち

(4.25) $\quad E[\mathcal{T}G] = E_1[G]$

が成立する。これより(4.25)が任意のP_1-可積分函数$G(\omega)$について成立することも直ちに分る。従って$\mathcal{T}$は$L^1(P_1)$から$L^1(P)$への1対1 multiplicative 線型変換であり、$\mathcal{T}$を$L^2(P_1)$に制限すると$\mathcal{T}$は

Sem. on Probab.
Vol.24 1966年
P1-66

$L^2(P_1)$ から $L^2(P)$ への等距離的変換である。

(4.20) の定義から

$$\mathcal{T}\eta_k(\omega) = \lambda_k \eta_k(\omega) + m_k, \quad k = 1, 2, 3, \cdots$$
$$= F(\eta_k) + f(\eta_k)$$

であることに注意すると

PROPOSITION 4.1.

$\{X(t,\omega)\}$ と $\{X_1(t,\omega)\}$ が equivalent, P, P_1 を対応するGauss測度とする。このとき $\mathcal{T} = F + f$ は (4.25) をみたすような $L^1(P_1)$ から $L^1(P)$ への 1 対 1 *multiplicative* 線型変換を定義する。ここに F, f は (4.12) で定義された線型変換と線型汎函数である。

ところで、我々としてはこの $\mathcal{T}$ から Ω から Ω への点変換が導かれることを期待したい。しかし、これまでの条件だけからは、一般にはそこまでは言えない。しかし、空間 Ω をてきとうに制限することによって（例えば Ω が Lebesgue 空間であれば）$\mathcal{T}$ から点変換が導かれる。これについては §5 でふれる。

Sem. on Probab.
Vol.24 1966年
P1-66

3章 Gauss測度の絶対連続性と線型変換

§5. Brown 運動

Brown 運動 $\{B(t,w)\}$ と equivalent な Gauss 過程を B-equivalent と言うことにする。但し、この節では time interval Tは有限区間でも無限区間でもよいが、0を含んでいるものとする。$\{B(t,w)\}$ から §4 と同様の方法で Hilbert 空間 $L^2(B)$ を定義し、その内積をやはり $\langle\cdot,\cdot\rangle$, ノルムを $\|\cdot\|$ と書くことにする。

このときよく知られているように、任意の $Z\in L^2(B)$ は

$$Z=\int_T F(u)\,dB(u)$$

と表現される。ここに $dB(u)$ は Wiener の random 測度、$F(u)$ は $\int_T|F(u)|^2\,du<+\infty$ となるような実函数である。

Theoren 4.2. によると、任意の B-equivalent な過程 $\{X_1(t,w)\}$ は表現 (4.12) 即ち

(5.1) $$Y(t)=FB(t)+f(B(t)),\qquad t\in T$$

を有すが、$FB(t)\in L^2(B)$ であること、また $\{X_1(t,w)\}$ の mean 函数を $m(t)$ とすると $f(B(t))=m(t)$ であることから (5.1) は

(5.1′) $$Y(t)=\int_T F(t,u)\,dB(u)+m(t),\qquad t\in T$$

という形になる。

この節では (5.1′) で表現される Gauss 過程が B-equivalentになるための条件を $F(t,u)$, $m(t)$ に関して求めるのが目的である。

LEMMA 5.1.

Kを $L^2(B)$上の線型変換とし

(5.2) $$Z(t)=KB(t),\qquad t\in T.$$

とおく。このとき K が Hilbert-Schmidt型であるための必要十分条件は $Z(t)$ が殆んど全ての $t\in T$ について強微分可能で、その導函数 $Z'(t)$ について

(5.3) $$\int_T\|Z'(s)\|^2\,ds<+\infty$$

Sem. on Probab.
Vol.24 1966年
P1-66

となることである。

（証明） 簡単のため $T=[0,+\infty)$ として証明するが、この仮定は本質的ではない。

まず $Z(t)$ が殆んど到るところ強可微分且つその導函数 $Z'(t)$ が(5.3)をみたすとする。このとき

$$(5.4)\qquad \begin{aligned} B_k^n &= \sqrt{2^n}\,[B(t_k^n)-B(t_{k-1}^n)],\\ Z_k^n &= \sqrt{2^n}\,[Z(t_k^n)-Z(t_{k-1}^n)] \end{aligned}$$

とおく。但し $t_k^n=2^{-n}k$, $k=0,1,2,\cdots,2^n n$, $n=1,2,3,\cdots$, とする。$\mathcal{H}^n$ を $\{B_k^n: k=1,2,3,\cdots,2^n n\}$ を含む最小の closed linear manifold とすると $\{\mathcal{H}^n\}$ は Lemma 4.1. の条件(*)をみたす $L^2(B)$ の部分空間列であり，$\{B_k^n\}$, $k=1,2,3,\cdots,2^n n$、は $\mathcal{H}^n$ の C.O.N.S. である。従って Lemma 4.1. (S.5) の成立することを示せばよい。実際

$$\sum_{i,j=1}^{2^n n} |\langle KB_i^n, B_j^n\rangle|^2 \le \sum_{i=1}^{2^n n} \|KB_i^n\|^2$$
$$=\sum_{i=1}^{2^n n} \|Z_k^n\|^2 = 2^n \sum_{k=1}^{2^n n} \left\|\int_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} Z'(s)\,ds\right\|^2$$
$$\le 2^n \sum_{k=1}^{2^n n} \left|\int_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} \|Z'(s)\|\,ds\right|^2 \le \int_0^n \|Z'(s)\|^2 ds$$
$$\le \int_T \|Z'(s)\|^2 ds < +\infty.$$

である。それ故 K は Hilbert-Schmidt 型である。

逆に K が Hilbert-Schmidt 型であるとする。Tの互いに共通部分を持たない任意の部分区間列 $\{(a_k,b_k)\}$ に対して

$$B_k \equiv \frac{1}{\sqrt{b_k-a_k}}\,[B(b_k)-B(a_k)],\qquad k=1,2,3,\cdots$$

とおく。このとき明らかに $\{B_k\}$ は $L^2(B)$ の O.N.S. である。従って Lemma 4.1.(S.4) により 部分区間列の選び方に無関係な正定数 M が存在して

$$(5.5)\qquad \sum_k \|KB_k\|^2 = \sum_k \frac{1}{b_k-a_k}\|Z(b_k)-Z(a_k)\|^2 \le M$$

となる。従って T の部分区間列 $\{(a_k,b_k)\}$ が互いに共通部分を持たなければ

Sem. on Probab.
Vol.24 1966年
P1-66

$$
\begin{aligned}
&\sum_k \| Z(b_k) - Z(a_k) \| \\
&= \sum_k \sqrt{b_k - a_k} \cdot \frac{\| Z(b_k) - Z(a_k) \|}{\sqrt{b_k - a_k}} \\
(5.6) \quad &\leq \left\{ \left[\sum_k (b_k - a_k) \right] \cdot \left[\sum_k \frac{\| Z(b_k) - Z(a_k) \|^2}{b_k - a_k} \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sqrt{M} \left[\sum_k (b_k - a_k) \right]^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

これは $Z(t)$ が強絶対連続 とでもいうような性質を持っていることを示している。この性質をもう少し詳しく見るために $L^2(B)$ の任意の C.O.N.S. $\{\varphi_k\}$を固定し

$$
(5.7) \qquad \zeta_j(t) \equiv \langle Z(t), \varphi_j \rangle, \quad t \in T, \quad j = 1, 2, 3, \cdots,
$$

とおく。このとき T の部分区間列 $\{(a_k, b_k)\}$ が互いに共通部分を持たなければ (5.6) から

$$
\begin{aligned}
&\sum_k | \zeta_j(b_k) - \zeta_j(a_k) | = \sum_k | \langle Z(b_k) - Z(a_k), \varphi_j \rangle | \\
&\leq \sum_k \| Z(b_k) - Z(a_k) \| \leq \sqrt{M} \left[\sum_k (b_k - a_k) \right]^{\frac{1}{2}} .
\end{aligned}
$$

故に実函数 $\zeta_j(t)$ は T で絶対連続、さらに $Z(0) = KB(0) = 0$ であることに注意すると

$$
\zeta_j(t) = \int_0^t \zeta_j'(s)\, ds, \quad t \in T, \quad j = 1, 2, 3, \cdots,
$$

と書けることが分る。但し、$\zeta_j'(s)$ は $\zeta_j(s)$ の density 函数である。

n を任意の正整数とし

$$
\zeta_j^n(t) \equiv \begin{cases} 2^n \displaystyle\int_{\frac{k-1}{2^n}}^{\frac{k}{2^n}} \zeta_j'(s) ds, & \left(\begin{array}{l} \frac{k-1}{2^n} \leq t < \frac{k}{2^n} \\ k = 1, 2, 3, \cdots, 2^n n \end{array} \right) \\ 0, & \quad t \geq n \end{cases}
$$

と定義する。$\mathfrak{A}^n$ を T の部分集合から成る $\{[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}), k = 1, 2, 3, \cdots, 2^n n\}$ を可測にする最小の σ-algebra とする。次に任意の正整数 N_0 を固定し、$\mathfrak{A}^n$ を $T_0 \equiv [0, N_0]$ に制限したものを $\mathfrak{A}^n_0$ とすると、明らかに $\zeta_j^n(t) = E_0[\zeta_j'(t) / \mathfrak{A}^n_0]$, $\left(\begin{array}{l} t \in T_0 \\ n = 1, 2, \cdots \end{array} \right)$, (ここに $E_0[\cdot / \mathfrak{A}^n_0]$ は T_0 上のルベーグ測度による $\mathfrak{A}^n_0$ に関する条件付平均とする)。明らかに $\mathfrak{A}^1_0 \subset \mathfrak{A}^2_0 \subset \cdots \mathfrak{A}^n_0 \subset \mathfrak{A}^{n+1}_0 \subset \cdots$ であり、また

$$
\left| \int_{T_0} | \zeta_j^n(t) |\, dt \right|^2 \leq N_0 \int_{T_0} | \zeta_j'(t) |^2 dt < +\infty, \quad n = 1, 2, 3, \cdots
$$

Sem. on Probab.
Vol.24 1966年
P1-66

であるから martingale の理論（J. Doob [19]）によって、殆んどすべての $t \in T_0$ について

$$(5.9)\qquad \xi_j'(t) = \lim_{n\to+\infty} \xi_j^n(t) \quad , \quad j=1,2,3,\cdots$$

が成立する。N_0 が任意であったことを考えると（5.9）は殆んど全ての $t \in T$ について成立する。Fatou の lemma と（5.5）から

$$(5.10)\qquad \begin{aligned} \int_T \sum_j \xi_j'(s)^2 ds &\leq \lim_{n\to+\infty} \int_T \xi_j^n(s)^2 ds \\ &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{2^n} 2^n \left\{ \int_{\frac{k-1}{2^n}}^{\frac{k}{2^n}} \xi_j'(s)\, ds \right\}^2 \\ &= \lim_{n\to+\infty} \sum_j \sum_k 2^n \left\{ \xi_j\left(\tfrac{k}{2^n}\right) - \xi_j\left(\tfrac{k-1}{2^n}\right) \right\}^2 \\ &= \lim_{n\to+\infty} \sum_k 2^n \sum_j \left| \left\langle Z\left(\tfrac{k}{2^n}\right) - Z\left(\tfrac{k-1}{2^n}\right), \varphi_j \right\rangle \right|^2 \\ &= \lim_{n\to+\infty} \sum_k 2^n \left\| Z\left(\tfrac{k}{2^n}\right) - Z\left(\tfrac{k-1}{2^n}\right) \right\|^2 \leq M < +\infty . \end{aligned}$$

故に

$$(5.11)\qquad \int_T \sum_{j=1}^{+\infty} \xi_j'(s)^2 ds < +\infty$$

である。さらに

$$(5.12)\qquad Z'(s) \equiv \sum_{j=1}^{+\infty} \xi_j'(s)\, \varphi_j$$

と定義すると（5.11）から $Z'(s)$ は殆んど全ての $s \in T$ について $L^2(B)$ の元として意味を持つことが分る。また Schwarz の不等式から

$$(5.13)\qquad \begin{aligned} &\lim_{h\to 0} \left\| \frac{Z(s+h)-Z(s)}{h} - Z'(s) \right\|^2 \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^2} \sum_{j=1}^{+\infty} \left[\int_s^{s+h} \{ \xi_j'(u) - \xi_j'(s) \} du \right]^2 \\ &\leq \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_s^{s+h} \sum_j [\xi_j'(u) - \xi_j'(s)]^2 du = 0 \end{aligned}$$

が殆んど全ての $s \in T$ について成立する。従って $Z(t)$ は殆んど全ての $t \in T$ で強微分可能であることが分った。さらに（5.11）から

$$(5.14)\qquad \int_T \| Z'(s) \|^2 ds = \int_T \sum_j \xi_j'(s)^2 ds < +\infty$$

（証明了）

LEMMA 5.2.

$L^2(B)$ 上の線型汎函数 f が Lemma 4.2 の条件をみたすための必要十分条件は実函数 $m(t) = f(B(t))$ が T で絶対連続、且つその density 函

Sem. on Probab.
Vol.24 1966年
P1-66

数 $m'(t)$ が

$$(5.15) \qquad \int_T m'(u)^2\, du < +\infty$$

をみたすことである。

（証明） Lemma 4.2. から Lemma 5.2. と全く同様にして証明される。実際、$m(t)$ が絶対連続で（5.15）がみたされているとする。このとき（5.4）で定義された $\{B_k^n\}$, $k=1,2,\cdots,2^n n$ の張る部分空間列 $\{\mathcal{H}^n\}$ に対して（M.4）の成立を示す。$f_k^n \equiv f(B_k^n)$, $k=1,2,\cdots,2^n n$ とすると

$$\begin{aligned}\sum_k (f_k^n)^2 &= \sum_k 2^n \left\{ f\left(B\left(\tfrac{k}{2^n}\right) - B\left(\tfrac{k-1}{2^n}\right)\right)\right\}^2 \\ &= \sum_k 2^n \left\{ \int_{\frac{k-1}{2^n}}^{\frac{k}{2^n}} m'(u)\, du \right\}^2 \\ &\leq \int_0^n m'(u)^2\, du \leq \int_T m'(u)^2\, du < +\infty .\end{aligned}$$

逆に Lemma 4.2.（M.3）がみたされているものとする。互いに共通部分のない T の任意の部分区間列 $\{(a_k, b_k)\}$ に対して $\{B_k\}$ を Lemma 5.1. の証明中と同じように定義すると $\{B_k\}$ は $L^2(B)$ の O.N.S. であるから（M.3）により

$$\sum_k f(B_k)^2 = \sum_k \frac{1}{b_k - a_k} \{m(b_k) - m(a_k)\}^2 \leq M$$

となる部分区間列 $\{(a_k, b_k)\}$ の選び方に無関係な正定数 M が存在する。これより（5.6）と同様の計算から $m(t)$ が絶対連続であることが分る。またその density を $m'(u)$ とおくと，

$$m^n(t) \equiv \begin{cases} 2^n \int_{\frac{k-1}{2^n}}^{\frac{k}{2^n}} m'(u)\, du, & \left(\begin{array}{l} \frac{k-1}{2^n} \leq t < \frac{k}{2^n} \\ k = 1,2,3,\cdots, 2^n n \end{array}\right) \\ 0, & t \geq n \end{cases}$$

と定義することによって（5.9），（5.10）と同様にして（5.15）を得る。

（証明了.）

THEOREM 5.1.

ある Gauss 過程が B-equivalent になるための必要十分条件は次のような表現を持つことである。

$$\begin{aligned}(5.16) \qquad Y(t) &= \mathcal{J}B(t) \\ &= B(t) + \int_T \int_0^t g(v,u)\, dv\, dB(u) + \int_0^t m'(u)\, du, \quad t \in T.\end{aligned}$$

Sem. on Probab.
Vol.24 1966年
P1-66

ここに $g(v,u)$ は次のような条件 (5.17)-(5.19) をみたす実函数であり、$m'(u)$ は (5.15) をみたす実函数である。

(5.17) 殆んど全ての $(v,u)\in T\times T$ について $g(v,u)=g(u,v)$

(5.18) $\int_T\int_T g(v,u)^2\,dv\,du < +\infty$.

(5.19) $FB(t)=B(t)+\int_T\int_0^t g(v,u)\,dv\,dB(u)$, $t\in T$

で定義される $L^2(B)$ 上の線型変換が 可逆的.

(証明) まず B-equivalent な Gauss 過程が与えられたとすると Theorem 4.2. から (4.13)-(4.15) をみたすような線型変換 F と線型汎函数 f が存在して、この Gauss 過程は表現 (4.12) を持つ。F は $L^2(B)$ から $L^2(B)$ への線型変換であり、(4.13) から $(F-I)$ は Hilbert-Schmidt 型、従って Lemma 5.2. から $Z(t)=(F-I)B(t)$ は殆んど全ての $t\in T$ に対して強微分

(5.20) $Z'(t)=\int_T g(t,u)\,dB(u)$

を有し、且つ

(5.21) $\int_T \|Z'(s)\|^2\,ds=\int_T\int_T g(v,u)^2\,dv\,du < +\infty$

が成立する。それ故

(5.22)
$$FB(t)=\{I+(F-I)\}B(t)$$
$$=B(t)+\int_T\int_0^t g(v,u)\,dv\,dB(u), \quad t\in T$$

と表わされる。(4.14) から F が 可逆的. これは (5.19) に他ならない。さらに (4.14) から F が対称であるから 任意の $t,s\in T$ に対して

$$\langle FB(t), B(s)\rangle = \langle B(t), FB(s)\rangle$$

(5.22) を使って書き直すと

$$\min(t,s)+\int_0^s\int_0^t g(v,u)\,dv\,du$$
$$=\min(s,t)+\int_0^t\int_0^s g(v,u)\,dv\,du$$

故に

$$\int_0^t\int_0^s \{g(v,u)-g(u,v)\}\,dv\,du=0$$

t,s は任意であったから (5.17) が成立する。

Sem. on Probab.
Vol.24 1966年
P1-66

また (4.15) と Lemma 4.2. , Lemma 5.2. と $\mathfrak{f}(B(0))=\mathfrak{f}(0)=0$ であることから

(5.23) $$m(t)=\mathfrak{f}(B(t))=\int_0^t m'(u)\,du$$

となるような $m'(u)$ が存在し、且つそれは (5.15) をみたす。

上の議論を逆にたどれば直ちにこの定理の十分性を証明できる。

(証明了)

<u>Note 1.</u> Theorem 4.2. の Remark で述べたように F の対称性がなくとも定理は成立するから、ここでも対応した条件 (5.17) はなくともよい。

<u>Note 2.</u> (5.19) は余り elegant な条件ではない。しかし (5.19) が成立するための十分条件が2つほど考えられる。

(5.24) $$\int_T\int_T g(v,u)^2\,dv\,du < 1.$$

(5.25). (5.19) の右辺で定義された表現が proper canonical (T. Hida [17]) である。

ところで、一般には線型変換 F と線型汎函数 $\mathfrak{f}$, 従って (5.16) で定義される $\mathfrak{J}=F+\mathfrak{f}$ は $L^2(B)$ 上の変換であって、必ずしも (Ω, $\mathcal{B}$, P) 上の各点変換、即ち path 毎の変換を induce するとは限らない。しかし、この節で問題にしている Brown 運動 (Wiener 測度) の場合には $\Omega=R^T$ (函数全体の空間) を C (連続函数の空間) に制限することによって $\mathfrak{J}$ から C 上の path 毎の変換を induce することができる。

$\mathcal{C}$ を区間 T 上の連続函数の全体, $\mathcal{B}_{\mathcal{C}}$ を $\mathcal{C}$ 上の cylinder set 全体から生成される σ-algebra とする。また ($\mathcal{C}$, $\mathcal{B}_{\mathcal{C}}$) 上の Wiener 測度を W とする。

今、ある Gauss 過程 $\{X_1(t,w)\}$ が B-equivalent, 対応する Gauss 測度を P_1 とする。このとき Theorem 5.1. から $\{X_1(t,w)\}$ は表現 (5.16) を有す。Theorem 5.1. の証明から分るように、この表現 (5.16) はまた Theorem 4.2. の表現 (4.12) でもある。測度 P_1 に関する平均を $E_1[\cdot]$ とすると、線型変換 F と線型汎函数 $\mathfrak{f}$ が $L^2(B)$ 上で有界であることから、ある正定数 c_0 が存在して

Sem. on Probab.
Vol.24 1966年
P1-66

$$|E_1[|X_1(t)-X_1(s)|]| = |m(t)-m(s)|$$

$$= |f\{B(t)-B(s)\}| \leq C_0 \| B(t)-B(s) \| = C_0\sqrt{t-s}, \quad t,s \in T \ (t \geq s).$$

$$E_1[|X_1(t)-X_1(s)-m(t)+m(s)|^2] = F[B(t)-B(s)]\|^2$$

$$\leq C_0 \| B(t)-B(s) \|^2 = C_0|t-s|, \quad t,s \in T$$

従って Gauss 確率変数の3次，4次のモーメントが1次、2次のモーメントから計算できるから、

$$E_1[|X_1(t)-X_1(s)|^4] \leq C\|B(t)-B(s)\|^4 \leq C|t-s|^2$$

となる正定数 C が存在する。それ故 Kolmogorov-Prokhorov [20] の定理により Gauss 測度 P_1 も $(\mathcal{C}, \mathcal{B}_{\mathcal{C}})$ 上の測度と考えることができる。Proposition 4.1. により $J = F + f$ は $L^2(P_1)$ から $L^2(W)$ への multiplicative 線型変換を定義する。ところが $(\mathcal{C}, \mathcal{B}_{\mathcal{C}})$ はルベーグ空間であるから、P_1（従ってW）測度0の集合を除いて $(\mathcal{C}, \mathcal{B}_{\mathcal{C}}, P_1)$ から $(\mathcal{C}, \mathcal{B}_{\mathcal{C}}, W)$ への保測点変換が J から induce される（池田，飛田，吉沢 [21]）。この点変換を J_0 と書くことにすると、明らかに

$$(5.26) \qquad J_0 X_1(\cdot,\omega) = B(\cdot,\omega) + \int_T \int_0^{\cdot} g(v,u)\,dv\,dB(u,\omega) + \int_0^{\cdot} m'(u)\,du$$

ここに $g(v,u)$，$m'(u)$ は (5.16) で与えられたもの，また右辺の $dB(u,\omega)$ は確率積分（伊藤 清 [18]）とする。

上記のことと、変換 J_0 が (4.25) をみたすことから

PROPOSITION 5.1.

$P_1 \sim W$ であれば $(\mathcal{C}, \mathcal{B}_{\mathcal{C}}, P_1)$ から $(\mathcal{C}, \mathcal{B}_{\mathcal{C}}, W)$ への (5.26) で与えられるような保測点変換 (mod 0) が存在して、任意の P_1-可積分函数 $G(\omega)$ について

$$(5.27) \qquad E_1[G(\omega)] = E[G(B(\cdot,\omega) + \int_T \int_0^{\cdot} g(v,u)\,dB(u,\omega) + \int_0^{\cdot} m'(u)\,du)]$$

が成立する。ここに $E[\cdot]$ は Wiener 測度 W による平均である。

例 5.1.

$\{U(t,\omega)\}$ を Ornstein-Uhlenbeck の Brown 運動で $T=[0,1]$ の場合を考える。このとき Gauss 過程 $\{U(t,\omega) - e^{-t}U(0,\omega)\}$ は E-equivalent である。

Sem. on Probab.
Vol.24 1966年
P1-66

実際このGauss過程は次のようなproper canonicalな表現を持つ。

$$(5.28)\qquad Y(t)=\int_0^t e^{-t+u}\,dB(u)$$
$$=B(t)-\int_0^t\int_u^t e^{-v+u}\,dv\,dB(u),\quad t\in T.$$

これは(5.16)の$g(v,u)$と$m'(u)$がそれぞれ

$$g(v,u)=\begin{cases}-e^{-v+u}, & 1\geqq v\geqq u\geqq 0\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$
$$m'(u)\equiv 0$$

となっている場合である。

この例はBrown運動(Wiener過程)とOrnstein-UhlenbeckのBrown運動のpathのlocal contnuityが一致することを示している。

例 5.2.

$T=(-\infty,+\infty)$の場合、$(R^T,\mathcal{B})$上で(5.16)の$g(v,u)$, $m'(u)$として

$$g(v,u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{v^2+u^2}{2}},\qquad v,u\in T$$
$$m'(u)=e^{-u^2},\qquad u\in T$$

とおくと、これらは(5.17), (5.18), (5.15)をみたし、また

$$\int_T\int_T g(v,u)^2\,dv\,du$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}e^{-(v^2+u^2)}\,dv\,du$$
$$=\frac{1}{2}<1$$

であり、(5.24)従って(5.19)をみたすから、表現

$$Y(t)=B(t)+\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^t\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{v^2+u^2}{2}}\,dv\,dB(u)+\int_0^t e^{-u^2}\,du$$

を持つようなGauss過程はB-equivalentである。

Theorem 5.1.の系として次のようなPropositionを得る。

Sem. on Probab.
Vol.24 1966年
P1-66

PROPOSITION 5.2.

covariance函数 $r_1(t,s)$, mean函数 $m(t)$ を持つ Gauss 過程 $\{X_1(t,w)\}$ が B-equivalent であるための必要条件は

(1) $r(t,s) \equiv r_1(t,s) - \min(t,s)$ が (t,s) に関して絶対連続、且つ $r(0,s)=0$, $s \in T$ であり、

(2) その density $r'(t,s)$ について

$$\int_T \int_T |r'(t,s)|^2 \, dt\, ds < +\infty \tag{5.29}$$

(3) $m(0)=0$、且つ $m(t)$は絶対連続であり、その density $m'(t)$ について (5.15) が成立する。

（証明） $\{X_1(t,w)\}$ は表現 (5.16) を有す。従って (3) は明らか。また

$$\begin{aligned} r(t,s) &= r_1(t,s) - \min(t,s) \\ &= \int_0^s \int_0^t g(v,u)\, dv\, du + \int_0^t \int_0^s g(v,u)\, dv\, du \\ &\qquad + \int_0^t \int_0^s \int_T g(v,\xi) g(u,\xi)\, d\xi\, dv\, du, \quad (t,s) \in T \times T \end{aligned}$$

それ故、$r(t,s)$ は (t,s) について絶対連続で、その density $r'(t,s)$ は

$$\begin{aligned} r'(t,s) &= g(t,s) + g(s,t) + \int_T g(t,\xi)\, g(s,\xi)\, d\xi \\ &= 2g(t,s) + \int_T g(t,\xi) g(s,\xi)\, d\xi \end{aligned}$$

となる。(5.18) と Schwarz の不等式により

$$\begin{aligned} &\int_T \int_T |r'(t,s)|^2\, dt\, ds \\ &= \int_T \int_T [2g(t,s) + \int_T g(t,\xi) g(s,\xi)\, d\xi]^2\, dt\, ds \\ &\le 8 \int_T \int_T g(t,s)^2 dt\, ds + 2 \int_T \int_T [\int_T g(t,\xi) g(s,\xi)\, d\xi]^2\, dt\, ds \\ &\le 8 \int_T \int_T g(t,s)^2 dt\, ds + 2 \{\int_T \int_T g(t,s)^2 dt\, ds\}^2 < +\infty . \end{aligned}$$

（証明了）

Proposition 5.2. は B-equivalence に関する必要条件を mean 函数と covariance 函数によって与えたものである。しかし、一般にはこれらは十分条件ではない。もし、4番目の条件として Theorem 4.1. 条件(4)

Sem. on Probab.
Vol.24 1966年
P1-66

の可逆性に関する条件を、何らかの方法で保障できれば、これらの条件は十分条件となる。実際、Theorem 4.1. の条件 (A), (B), (C) が成立することを示す。

まず (3) と Lemma 5.2. それに Lemma 4.2. から (C) は直ちに成立する。次に

$$(5.30)\qquad \begin{aligned} &< (S-I)B(t),\ B(s) > \\ &= < SB(t),\ B(s) > - < B(t), B(s) > \\ &= r_1(t,s) - \min(t,s) = r(t,s) \end{aligned}$$

であるから、Lemma 5.1. の (5.5) を示せば 有界（可逆）な線型変換 S が定義されてしかも（$S-I$）が Hilbert-Schmidt 型であること、即ち (A), (B) が成立する。

簡単のため $T=[0,+\infty)$ の場合を証明する。$\{B_k^n\}$、$\{\mathcal{H}^n\}$ を Lemma 5.1. の証明中に定義されたものとするとき

$$(5.31)\qquad \sum_{k,j=1}^{2^n n} |< (S-I)B_k^n,\ B_j^n >|^2 \leq M < +\infty,$$

となるような n に無関係な正定数 M の存在を示せばよい。

$$\begin{aligned} &\sum_{k,j=1}^{2^n n} |< (S-I)B_k^n,\ B_j^n >|^2 \\ &= \sum_{k,j=1}^{2^n n} 2^{2n} |< (S-I)[B(\tfrac{k}{2^n}) - B(\tfrac{k-1}{2^n})], [B(\tfrac{j}{2^n}) - B(\tfrac{j-1}{2^n})] >|^2 \\ &= \sum_{k,j=1}^{2^n n} 2^{2n} |r(\tfrac{k}{2^n}, \tfrac{j}{2^n}) - r(\tfrac{k-1}{2^n}, \tfrac{j}{2^n}) - r(\tfrac{k}{2^n}, \tfrac{j-1}{2^n}) + r(\tfrac{k-1}{2^n}, \tfrac{j-1}{2^n})|^2 \\ &= \sum_{k,j=1}^{2^n n} 2^{2n} \left| \int_{\frac{k-1}{2^n}}^{\frac{k}{2^n}} \int_{\frac{j-1}{2^n}}^{\frac{j}{2^n}} r'(t,s)\,dt\,ds \right|^2 \\ &\leq \sum_{k,j} \int_{\frac{k-1}{2^n}}^{\frac{k}{2^n}} \int_{\frac{j-1}{2^n}}^{\frac{j}{2^n}} |r'(t,s)|^2\,dt\,ds \\ &\leq \int_T \int_T |r'(t,s)|^2\,dt\,ds < +\infty. \end{aligned}$$

即ち (5.31) が成立する。

この Proposition の結果については、もっと広い立場からの大平坦氏 [22] の研究があり、Proposition 5.1. は我々の方法からも同氏の結果に approach できることを示している。同氏の結果を附録で述べさせていただいた。

Sem. on Probab.
Vol.24 1966年
P1-66

§6 C－過程

あるGauss 過程$\{X(t,\omega)\}$がC－過程であるとはmean函数0で、且つBrown 運動$\{B(t,\omega)\}$について proper canonical な表現(T.Hida [17])

$$(6.1) \qquad X(t)=\int^{t} C(t,u)\,dB(u)\,, \qquad t\in T$$

を持つものを言う。但し$C(t,u)$は proper canonical kernel で

$$(6.2) \qquad \int^{t} C(t,u)^2\,du<+\infty\,, \qquad t\in T$$

をみたし、Brown 運動$\{B(t,\omega)\}$については

$$(6.3) \qquad L^2(B)=L^2(X)$$

が成立するものとする。また(6.1)、(6.2)の積分領域の下限は区間 T の下端であるが 普通は 0 または$-\infty$と理解してよい。

よく知られているように 純非決定的なGauss 定常過程はC－過程である。

この節では、ある Gauss 過程が与えられたC－過程と equivalent になるための必要十分条件を求める。

THEOREM 6.1.

ある Gauss 過程$\{X_1(t,\omega)\}$が proper canonical 表現(6.1)を持つようなC－過程と equivalent になるための必要十分条件は、表現(5.16)を有すような B-equivalent Gauss 過程$\{Y(t,\omega)\}$が存在して$\{X_1(t,\omega)\}$が次のように表現されることである。

$$Y_1(t)=\int^{t} C(t,u)\,dY(u)$$

$$(6.4) \qquad \equiv \int^{t} C(t,u)\,dB(u)+\int_T\int^{t} C(t,\xi)\,g(\xi,u)\,d\xi\,dB(u)$$

$$+\int^{t} C(t,u)\,m'(u)\,du\,, \qquad t\in T$$

(証明) $\{X_1(t,\omega)\}$が、表現(6.1)を有すC－過程と equivalent とする。このとき Theorem 4.2. から(4.12)－(4.15)をみたすような$L^2(X)$上の線型変換 F と線型汎函数 f が存在する。ところが(6.3)より$L^2(X)=L^2(B)$であるから Lemma 5.1. Lemma 5.2. を適用して、Theorem 5.1. の各条件をみたす実函数$g(v,u)$, $m'(u)$が存在して

Sem. on Probab.
Vol.24 1966年
P1-66

(6.5) $$FB(t) = B(t) + \int_T \int_0^t g(v,u)\,dv\,dB(u), \quad t \in T$$

(6.6) $$f[B(t)] = \int_0^t m'(u)\,du, \quad t \in T$$

となる。F, f は共に有界であるから

$$F[X(t) = F[\int^t c(t,u)\,dB(u)]$$

(6.6) $$= \int^t c(t,u)\{dB(u) + \int_T g(u,z)\,dB(z)\,du\}$$

$$= \int^t c(t,u)\,dB(u) + \int_T \int^t g(u,z)\,du\,dB(z)$$

また

(6.7) $$f[X(t)] = f[\int^t c(t,u)\,dB(u)]$$

$$= \int^t c(t,u)\,m'(u)\,du; \quad t \in T$$

故に（4.12）から $\{X_1(t,w)\}$ は表現（6.4）を有す。

逆に $\{X_1(t,w)\}$ が表現（6.4）を有するとき（6.5）,（6.6）で $L^2(X)$ 上の線型変換 F, 線型汎函数 f を定義すると F, f は（4.13）-（4.15）をみたす。さらに（6.7）,（6.8）を考慮すると表現（6.4）は表現（4.12）に他ならないことが分る。それ故 Theorem 4.2. により $\{X_1(t,w)\}$ はこの C-過程と equivalent.

（証明了）

例 6.1.（例 5.1. 参照）

$T = [0,1]$ で Brown 運動 $\{B(t,w)\}$ は、proper canonical 表現（5.28）を有す C-過程と equivalent である。

実際、$\{B(t,w)\}$ は表現

(6.9) $$B(t) = \int_0^t e^{-t+u}\,dB(u) + \int_T \int_u^t e^{-t+z}\,dz\,dB(u), \quad t \in T$$

を持ち、これは

$$c(t,u) = e^{-t+u}$$

$$g(v,u) = \begin{cases} 1, & 1 \geq v \geq u \geq 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$m'(t) \equiv 0$$

の場合である。

例 6.2.（例 5.2. 参照）

Sem. on Probab.
Vol.24 1966年
P1-66

$T=(-\infty,+\infty)$ で，Ornstein-Uhlenbeck の Brown 運動は proper canonical な表現

(6.10) $$U(t)=\int_{-\infty}^{t} e^{-t+u}\, dB(u)$$

を持つ C－過程である。従って次のような表現を持つ Gauss 過程と equivalent である。

(6.11) $$Y_1(t)=\int_{-\infty}^{t} e^{-t+u}\, dB(u)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_T\int_{-\infty}^{t} e^{t+\xi-\frac{\xi^2+u^2}{2}}\, d\xi\, dB(u) + \int_{-\infty}^{t} e^{-t+u-u^2}\, du, \quad t\in T$$

§7. 一般の Gauss 過程

§5では Brown 運動と equivalent な Gauss 過程，§6では C－過程と equivalent な Gauss 過程を問題にして来たが，この節では そのような制限を全くつけない一般の Gauss 過程と equivalent な Gauss 過程を，Theorem 4.2. を適用することによって与える。

$\{X(t,w)\}$ を mean 函数 0 の Gauss 過程，またかんたんのため $T=[0,T_1)$, $T_1\le+\infty$, とする。

ここで，任意の $t\in T$ に対して $L^2_t(X)$ を $\{X(s);0\le s\le t\}$ の張る最小の closed linear manifold とする。さらに

$$N(X)\equiv\bigcap_{t\in T} L^2_t(X)$$

(7.1) $$M(X)\equiv L^2(X)\ominus N(X)$$

$Q(Z)$: $Z\in L^2(X)$ のはる $L^2(X)$ の closed linear subspace

と定義する。また $M(X)$ への projection を $\mathrm{Proj}_{M(X)}$ とする。

(7.2) $$Y(t)=\mathrm{Proj}_{M(X)}X(t), \quad t\in T$$

とおくと，明らかに $N(X)=\{0\}$ であるから $\{Y(t)\}$ は $M(X)=M(Y)$ 上に単位の分解を定め，且つ次のような表現を持つ（T. Hida [7]）。

(7.3) $$Y(t)=\sum_i\int_0^t F_i(t,u)\,dB_i(u)+\sum_{t_j\le t}\sum_{\ell} b_j^{\ell}(t)\,Y_{t_j}^{\ell}, \quad t\in T.$$

ここに $\{B_i(t)\}$，$i=1,2,3,\cdots$，は互いに独立な Brown 運動，$Y_{t_j}^{\ell}$，$\ell=1,2,3,\cdots$，は任意の $t\in T$ について

Sem. on Probab.
Vol.24 1966年
P1-66

$$\int_0^t F_i(t,u)^2\,du + \sum_{t_j\le t}\sum_{\ell}\left[b_j^{\ell}(t)\right]^2 < +\infty$$

となるような実函数とする。

さらに $\{\varphi_k\}$ を $N(X)$ の C.O.N.S. とする。このとき (7.4) より

(7.5) $$L^2(X) = \sum_i \oplus L^2(B_i) \oplus \sum_j \sum_{\ell} \oplus Q(Y_{t_j}^{\ell}) \oplus \sum_k \oplus Q(\varphi_k)$$

が成立し、また (7.3) から

(7.6)
$$\begin{aligned} X(t) &= \mathrm{Proj}_{M(X)} X(t) + \mathrm{Proj}_{N(X)} X(t) \\ &= \sum_i \int_0^t F_i(t,u)\,dB_i(u) + \sum_{t_j\le t}\sum_{\ell} b_j^{\ell}(t)\,Y_{t_j}^{\ell} + \sum_k a_k(t)\,\varphi_k, \quad t\in T \end{aligned}$$

と表現される。但し $a_k(t)$, $k=1,2,3,\cdots$, は $X(t)$ の φ_k に関する係数である。

THEOREM 7.1.

ある Gauss 過程 $\{X_1(t,\omega)\}$ が次のような表現を持てば、それは (7.6) で表現されている Gauss 過程 $\{X(t,\omega)\}$ と equivalent である。

(7.7)
$$\begin{aligned} X_1(t) &= \sum_i \int_0^t F_i(t,u)\,dB_i(u) + \sum_i \int_T \int_0^t F_i(t,\xi)\,g^i(\xi,u)\,d\xi\,dB_i(u) \\ &\quad + \sum_{t_j\le t}\sum_{\ell} b_j^{\ell}(t)\,\beta_j^{\ell}\,Y_{t_j}^{\ell} + \sum_k a_k(t)\,\alpha_k\,\varphi_k \\ &\quad + \sum_i \int_0^t F_i(t,u)\,m_i(u)\,du + \sum_{t_j\le t}\sum_{\ell} b_j^{\ell}(t)\,m_j^{\ell} + \sum_k a_k(t)\,m_k, \quad t\in T \end{aligned}$$

ここに $g^i(v,u)$, $m_i(u)$ はある函数、β_j^{ℓ}, α_k, m_j^{ℓ}, m_k は定数で

(7.8) $$\sum_i \int_T\int_T g^i(v,u)^2\,dv\,du + \sum_j\sum_{\ell}(\beta_j^{\ell}-1)^2 + \sum_k(\alpha_k-1)^2 < +\infty$$

(7.9) $$\sum_i \int_T m_i(u)^2\,du + \sum_j\sum_{\ell}(m_j^{\ell})^2 + \sum_k (m_k)^2 < +\infty$$

であり、また

(7.10) $$F^i B_i(t) \equiv B_i(t) + \int_T \int_0^t g^i(v,u)\,dv\,dB_i(u), \quad t\in T,\ i=1,2,\cdots$$

で定義される $L^2(B_i)$ 上の線型変換 F^i, $i=1,2,3,\cdots$, が可逆的, さらに

(7.11)
$$\begin{aligned} &\beta_j^{\ell} \ne 0, \quad \ell=1,2,\cdots,N_j, \quad j=1,2,3\cdots \\ &\alpha_k \ne 0, \quad k=1,2,3,\cdots \end{aligned}$$

である。

Sem. on Probab.
Vol.24 1966年
P1-66

（証明） $L^2(X)$ 上の線型変換 F を

$$(7.12)\qquad F\xi \equiv \begin{cases} F^i\xi, & \xi\in L^2(B_i), \quad i=1,2,3,\cdots \\ \beta_j^\ell\xi, & \xi\in Q(Y_{t_j}^\ell), \quad \ell=1,2,\cdots,N_j,\ j=1,2,3,\cdots \\ \alpha_k\xi, & \xi\in Q(\varphi_k), \quad k=1,2,3,\cdots \end{cases}$$

によって定義すると (7.10), (7.11) から F は可逆的．また $L^2(B_i)$, $Q(Y_{t_j}^\ell)$, $Q(\varphi_k)$ などは F を reduce するから (7.8), (7.9) から F が Hilbert-Schmidt 型であることが分る。

同様に $L^2(X)$ 上の線型汎函数 f を

$$(7.13)\qquad \begin{aligned} &f[B_i(t)] = \int_0^t m_i(u)\,du, \quad t\in T, \ i=1,2,3,\cdots \\ &f[Y_{t_j}^\ell] = m_j^\ell, \quad \ell=1,2,\cdots,N_j, \quad j=1,2,3,\cdots \\ &f[\varphi_k] = m_k, \quad k=1,2,3,\cdots \end{aligned}$$

によって定義すると，Lemma 5.2. を考慮に入れると f は (4.15) をみたす。

この F と f を使うと (7.17) は実は

$$(7.14)\qquad X_1(t) = F[X(t)] + f[X(t)], \qquad t\in T$$

となっているから．Theorem 4.2. 及びその注意によって $\{X_1(t,\omega)\}$ は $\{X(t,\omega)\}$ と equivalent.

（証明了）

例 7.1. （例 6.1. 参照）

$T=[0,1]$ で Ornstein-Uhlenbeck の Brown 運動 $\{U(t,\omega)\}$ を考える。このとき $N(U)$ は 1 次元であり、$\{U(t,\omega)\}$ は次のような表現を持つ。

$$(7.15)\qquad U(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-t}\varphi + \int_0^t e^{-t+u}\,dB(u), \qquad t\in T$$

ここに $\{B(t)\}$ は Brown 運動、φ は $\|\varphi\|=1$ で

$$(7.16)\qquad L^2(U) = L^2(B)\oplus Q(\varphi)$$

が成立する。

このとき、表現

$$X_1(t) = e^{-t}\varphi + B(t), \qquad t\in T$$

を有す Gauss 過程は $\{U(t,\omega)\}$ と equivalent である。

Sem. on Probab.
Vol.24 1966年
P1-66

§8. Gauss 加法過程

§7で述べたように、任意のGauss過程は表現（7.6）を有し、それは空間 $L^2(X)$ の直和分解（7.5）に対応する。（7.5）の各因子空間が Theorem 4.1. の線型変換 F を reduce する場合を取扱ったのが Theorem 7.1.であった。もちろん、このような性質をみたす線型変換 F をいつでも選べるかどうかは分らない。しかし２つの Gauss 加法過程が equivalent な場合には常にこのような性質を持った F が存在する。このことから Skorokhod [15]の結果を拡張した定理を得ることができる。以下、それを述べよう。

$\{X(t,\omega)\}$ を mean 函数 0 の Gauss 加法過程で $T=[0,T_1)$, $T_1 \leq +\infty$, と仮定しておく。このとき $\{X(t,\omega)\}$ は (proper canonical) 表現、

$$X(t) = X(0) + \int_0^t c(u)\, dB(u) + \sum_{t_j \leq t} b_j Y_{t_j}, \quad t \in T \tag{8.1}$$

を有す。但し $c(u)$ は実函数, b_j, $(t_j \in T)$ は定数で

$$\int_T c(u)^2 du + \sum_j (b_j)^2 < +\infty$$

が成立し、また直和分解

$$L^2(X) = L^2(B) \oplus \sum_j \oplus Q(Y_{t_j}) \oplus Q(X(0)) \tag{8.2}$$

が成立する。(T. Hida [17])

THEOREM 8.1.

ある Gauss 加法過程 $\{X_1(t,\omega)\}$ が表現（8.1）を有す $\{X(t,\omega)\}$ と equivalent になるための必要十分条件は、$\{X_1(t,\omega)\}$ が表現

$$\begin{aligned} X_1(t) = \alpha X(0) &+ \int_0^t c(u)\, dB(u) + \sum_{t_j \leq t} b_j \beta_j Y_{t_j} \\ &+ m + \int_0^t c(u)\, m'(u)\, du + \sum_{t_j \leq t} b_j m_j, \quad t \in T \end{aligned} \tag{8.3}$$

有すことである。ここに α, β_j, m, m_j は定数、$m'(u)$ は実函数で

$$\begin{cases} (\alpha-1)^2 + \sum_j (\beta_j - 1)^2 < +\infty \\ \alpha > 0, \quad \beta_j > 0, \quad t \in T \end{cases} \tag{8.4}$$

Sem. on Probab.
Vol.24 1966年
P1-66

(8.5) $\quad m^2+\sum_j(m_j)^2+\int_T m'(u)^2\,du \;<+\infty$

をみたすものとする。但し $X(0)=0$ なら $m=0$ と約束しておく。

この定理を証明する前に Lemma を1つ証明する。

LEMMA 8.1.

ある Gauss 過程 $\{X_1(t,\omega)\}$ が mean 函数 0 の Gauss 加法過程 $\{X(t,\omega)\}$ と equivalent とする。このとき Theorem 4.1. の条件 (A), (B) をみたすような $L^2(X)$ 上の線型変換 S が存在するが、任意の $t\in T$ について $L^2_t(X)$ が S を reduce するための必要十分条件は $\{X_1(t,\omega)\}$ も加法過程であること。

(証明) 定義より $t\geqq s\geqq u$, $t,s,u\in T$ について

(8.6) $\quad \langle S[X(t)-X(s)],\,X(u)\rangle=\mathrm{Covariance}\,(X_1(t)-X_1(s),\;X_1(u))$

となることより明らか。 (証明了)

(Theorem 8.1.の証明) 十分性は Theorem 7.1. から直ちに出る。従って必要性を述べる。

今、$\{X_1(t,\omega)\}$ が $\{X(t,\omega)\}$ に equivalent とすると、Lemma 8.1. から全ての $L^2_t(X)$, $t\in T$, は線型変換 S を reduce する。それ故 $F=\sqrt{S}$ とおくと F もまた $L^2_t(X)$, $t\in T$, によって reduce される。さらに $X(0)$, $\{Y_{t_j}\}$ は F の固有元であり、また $FL^2_t(B)=L^2_t(B)$, $t\in T$, であることと、$F-I$ が Hilbert-Schmidt 型であることから、ある実函数 $g(v,u)$ と正定数 α, $\{\beta_j\}$ が存在して

$$F[B(t)]=B(t)+\int_0^t\int_u^t c(\xi)\,g(\xi,u)\,d\xi\,dB(u)$$

(8.7) $$F[X(0)]=\alpha\;X(0)$$

$$F[Y_{t_j}]=\beta_j\;Y_{t_j}\,,\qquad t_j\in\Gamma.$$

となる。ところが $\{X_1(t,\omega)\}$ も加法過程であるから $G(t,u)=\int_u^t c(\xi)g(\xi,u)d\xi$ は t に無関係、それ故殆んど全ての $(v,u)\in T\times T$ について $g(v,u)=0$ となる。また $F-I$ が Hilbert-Schmidt 型であることと可逆的であることから (8.4) は明らか。

Sem. on Probab.
Vol.24 1966年
P1-66

他方 (4.12), (4.15) をみたすような線型汎函数 f が存在するから Lemma 5.2. を考慮して

$$m = f[X(0)]$$

$$(8.8) \qquad \int_0^t m'(u)\,du = f[B(t)]$$

$$m_j = f[Y_{t_j}], \quad t_j \in T$$

とおくと (8.5) の成立することも明らか。

(証明了)

Theorem 8.1. の系として Skorokhod [15] の加法過程の equivalence に関する定理の中で；1次元 Gaussian の場合の拡張を証明することができる。

COROLLARY

2つの Gauss 加法過程 $\{X_0(t,\omega)\}$, $\{X_1(t,\omega)\}$ の mean 函数, covariance 函数をそれぞれ $m_0(t)$, $m_1(t)$, $V_0(t,s)$, $V_1(t,s)$, $t, s \in T$, とし, また $T=[0, T_1)$, $T_1 \leq +\infty$, としておく。また、かんたんのため.

$$(8.9) \qquad V_0(0,t) = 0, \quad t \in T$$

を仮定しておく。

このとき、$\{X_0(t,\omega)\}$ と $\{X_1(t,\omega)\}$ が equivalent になるための必要十分条件は

$$(8.10) \qquad V_1(0,t) = 0, \quad t \in T$$

(8.11) $dV_0(t)$ を $V_0(t) = V_0(t,t)$, $dV_1(t)$ を $V_1(t) = V_1(t,t)$ によって定まる T上の Lebesgue-Stieljes 測度とするとき, $dV_0(t)$, $dV_1(t)$ は Lebesgue 測度に関して絶対連続な部分では一致し、点測度のある部分では dV_0, dV_1 の点測度をそれぞれ b_j^0, b_j^1 とするとき

$$\sum_j \left(\frac{b_j^1}{b_j^0} - 1\right)^2 < +\infty$$

となる。また、実可測函数 $p(t)$ が存在して

$$(8.12) \qquad m_1(t) - m_0(t) = \int_0^t p(u)\,dV_0(u), \quad t \in T$$

$$(8.13) \qquad \int_T p(u)^2\,dV_0(u) < +\infty$$

Sem. on Probab.
Vol.24 1966年
P1-66

となること。

（証明） $m_0(t)\equiv 0$ でなければ $\{X_0(t,\omega)-m_0(t)\}$, $\{X_1(t,\omega)-m_0(t)\}$ を改めて考えることにより、$m_0(t)\equiv 0$ のときに証明しておけば十分。

まずこれらのGauss過程がequivalentとすると、Th. 1 & 8.1. により、それぞれ次のような表現を持つとしてよい。

(8.14) $$X_0(t)=\int_0^t c(u)\,dB(u)+\sum_{t_j\le t} b_j Y_{t_j}, \qquad t\in T$$

(8.15) $$X_1(t)=\int_0^t c(u)\,dB(u)+\sum_{t_j\le t} b_j\beta_j Y_{t_j} + \int_0^t c(u)m'(u)\,du+\sum_{t_j\le t} b_j m_j, \qquad t\in T$$

ここに β_j, m_j, $m'(u)$ は (8.4)、(8.5) をみたすものとする。

これより (8.10) は明らか。また

(8.16) $$V_0(t)=\int_0^t c(u)^2\,du+\sum_{t_j\le t}(b_j)^2$$

(8.17) $$V_1(t)=\int_0^t c(u)^2\,du+\sum_{t_j\le t}(b_j\beta_j)^2$$

それ故 $V_0(t)$, $V_1(t)$ の絶対連続な部分は一致する。また (8.4) により $\beta_j\neq 0$, $t_j\in T$, であるから $V_0(t)$, $V_1(t)$ は共に $t=t_j$, $t_j\in T$ で点測度を有し、それらはそれぞれ $b_j^0=(b_j)^2$, $b_j^1=(b_j\beta_j)^2$ である。再び (8.4) から

(8.18) $$0<\gamma=\inf_{t_j\in T}\beta_j\le\sup_{t_j\in T}\beta_j=\Gamma<+\infty$$

従って

(8.19) $$(\gamma+1)^2(\beta_j-1)^2\le(\beta_j^2-1)^2\le(\Gamma+1)^2(\beta_j-1)^2$$

故に、もう一度 (8.4) から

$$\sum_j(\beta_j^2-1)^2=\sum_j\left(\frac{b_j^1}{b_j^0}-1\right)^2<+\infty$$

が成立する。

mean 関数については

(8.20) $$p(u)\equiv\begin{cases}\dfrac{m'(u)}{c(u)}, & u\neq t_j,\ j=1,2,\cdots\\[2ex] \dfrac{m_j}{b_j}, & u=t_j\end{cases}$$

と定義すると、$m_0(t)\equiv 0$ であるから (8.15) により

Sem. on Probab.
Vol.24 1966年
P1-66

$$
\begin{aligned}
m_1(t) - m_0(t) &= m_1(t) \\
&= \int_0^t C(u)\, m'(u)\, du + \sum_{t_j \le t} b_j\, m_j \\
&= \int_0^t \frac{m'(u)}{C(u)}\, C(u)^2\, du + \sum_{t_j \le t} \frac{m_j}{b_j} (b_j)^2 \\
&= \int_0^t p(u)\, d V_0(u)
\end{aligned}
$$

また（8.5）から

$$
\begin{aligned}
&\int_T p(u)^2\, dV_0(u) \\
&= \int_T \left(\frac{m'(u)}{C(u)}\right)^2 C(u)^2\, du + \sum_{t_j \in T} \left(\frac{m_j}{b_j}\right)^2 (b_j)^2 \\
&= \int_T m'(u)^2\, du + \sum_{t_j \in T} (m_j)^2 < +\infty
\end{aligned}
$$

逆に（8.10）−（8.13）が成立したとする。

このとき、$V_0(t)$ の絶対連続な点 u では $C(u) \equiv \sqrt{\dfrac{dV_0(u)}{du}}$，点測度 b_j^0 のある点 u_j では $b_j \equiv \sqrt{b_j^0}$ と定義する。さらに（8.20）の左辺で、右辺の $m'(u)$，m_j を定義する。

$\beta_j = \sqrt{\dfrac{b_j'}{b_j^0}}$，$j = 1, 2, \cdots$ と定義すると $\{X_0(t,\omega)\}$，$\{X_1(t,\omega)\}$ はそれぞれ表現（8.14），（8.15）を持ち、（8.19）を考えると（8.4），（8.5）の成立することは容易に分る。

（証明了）

Sem. on Probab.
Vol.24 1966年
P1-66

附　　録

函数空間上の Gauss 測度の equivalent-singular dichotomy の成立は極めて興味深い現象で、これについてこれまで多くの研究がある。

まず十分強い仮定の下で、Brown 運動の path の変換による Wiener 測度の変換に関連して Cameron-Martin [8], [9] Woodward [10], Varberg [11] による研究がある。

また $L^2(X)$ と isomorphic な空間を何等かの形で求め、Theorem 4.1. の条件を直接計算したり、あるいは確率1で成立するような事象を実際に構成することによって、covariance, mean, spectral function についての equivalence の判定条件を得ようとする方向の研究として、Grenander [12], Feldman [4], Rozanov [6], [7], Slepian [14] の2つの Gauss 定常過程の equivalence についての研究、SKoroKhod [15] の2つの加法過程の equivalence に関する研究、大平 [22] の Gauss 多重マルコフ過程に関する研究が挙げられよう。

これらの研究について一つ一つ詳説することは、このセミナノートの目的にもそぐわず、また及ぶところでもないので、この附録でこれらの研究の結果と参考文献を挙げるにとどめた。

I. Wiener 測度と path の線型変換

$C_0 \equiv \{X(t)\ ;\ [0,1]$ で連続、且つ $x(0)=0\}$

$dW(x)$: C_0 上の Wiener 測度

○ R Cameron- W. Martin [9]

$K^1(t,s)$ を $[0 \leq t \leq s,\ 0 \leq s \leq 1]$ で連続、$K^1(0,0)=0$, $0 \leq s \leq 1$

$K^2(t,s)$ を $[0 \leq s \leq t,\ 0 \leq t \leq 1]$ で連続　とする。

$$K(t,s) \equiv \begin{cases} K^1(t,s), & 0 \leq t < s, \quad 0 < s \leq 1 \\ K^2(t,s), & s < t \leq 1, \quad 0 \leq s < 1 \\ 2^{-1}K^1(s,s) + 2^{-1}K^2(s,s), & t = s, \quad 0 \leq s \leq 1 \end{cases} \tag{9.1}$$

$$J(s) \equiv K^2(s,s) - K^1(s,s), \qquad 0 \leq s < 1 \tag{9.2}$$

$$D(K) = 1 + \sum_{\mu=0}^{+\infty} \frac{1}{\mu!} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \begin{vmatrix} K(s_1,s_1), & \cdots, & K(s_1,s_\mu) \\ K(s_\mu,s_1), & \cdots & K(s_\mu,s_\mu) \end{vmatrix} ds_1 \cdots ds_\mu \neq 0, \tag{9.3}$$

Sem. on Probab.
Vol.24 1966年
P1-66

(9.4) 殆んど全ての s について、$K(t,s)$ の $t=s$ に対する jump を、ある step function を加えて除いた後は t について絶対連続、

(9.5) 殆んど全ての s について $\frac{\partial}{\partial t}K(t,s)$ は本質的に有界変動、即ち、ある可測函数 $H(t,s)$ が存在して、各 s を固定したときに t について有界変動 且つ殆んど全ての (t,s) について $\frac{\partial}{\partial t}K(t,s)$ と一致する。

(9.6) (9.5) の $H(t,s)$ は次の条件をみたすようにできる。

$$\int_0^1 \sup_{0\le t\le 1} |H(t,s)|\,ds < +\infty, \quad \int_0^1 \operatorname*{var}_{0\le t\le 1}[H(t,s)]\,ds < +\infty,$$

(9.7) $J(s)$ は $0\le s\le 1$ で有界変動

(9.8) $m(t)\in C_0$ が絶対連続、且つ $m'(t)$ が本質的に有界変動

このとき C_0 から C_0 への変換 L を

$$y(t) = Lx(t) \equiv x(t) + m(t) + \int_0^1 K(t,s)\,x(s)\,ds$$

とおくと任意の可測汎函数 $F(y)$ に関して 下式の一辺が存在すれば他辺も存在して等しい。

$$\int_{C_0} F(y)\,dw(y)$$
$$= |D|\int_{C_0} F[Lx]\exp\left(-\tfrac{1}{2}\Phi(x)\right)dw(x)$$

ここに

$$\Phi(x) \equiv \int_0^1 \left\{\frac{d}{dt}\left[m(t)+\int_0^1 K(t,s)\,x(s)\right]\right\}^2 dt$$
$$+2\int_0^1\left\{\int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\left[m(t)+K(t,s)\,x(s)\right]ds\right\}dx(t)$$
$$+\int_0^1 J(s)\,d\{[x(s)]^2\}$$

o D. Woodward [10]

C_0 上の線型変換 L を

$$y(t) = Lx(t) = x(t) + \int_0^1 L(t,s)\,dx(s)$$

によって定義する。ここに、

(9.9) $L(0,s)=0$, $s\in I=[0\,1]$.

(9.10) $s\in I$ を固定すると $L(t,s)$ は t について絶対連続で

(9.11) $\frac{\partial}{\partial t}L(t,s) = \overline{M}(t,s)$, $\tilde{\forall} t\in I$, $\forall s\in I$

とおくと次のような $M(t,s)$, $J(t)$ が存在する。

Sem. on Probab.
Vol.24 1966年
P1-66

(9.12) $$\bar{M}(t,s) = \begin{cases} M(t,s), & 0 \leq t < s \leq 1 \\ M(t,s) + \frac{1}{2}J(t), & 0 \leq t = s \leq 1 \\ M(t,s) + J(t), & 0 \leq s < t \leq 1 \end{cases}$$

(9.13) $J(t)$ は I で有界変動

(9.14) $M(t,s)$ は I^2 で有界変動、即ち $M(t_0,s)$, $M(t,s_0)$ がそれぞれ1変数函数として有界変動になるような $(t_0,s_0) \in I^2$ が存在し、

(9.15) $$\underset{(t,s)\in I^2}{\mathrm{var}}\ M(t,s) \equiv \sup \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} |M(t_i,s_j) - M(t_i,s_{j-1}) + M(t_{i-1},s_{j-1}) - M(t_{i-1},s_j)| < +\infty$$

(但し上限は全ての分割 $0 \leq t_0 \leq \cdots \leq t_n \leq 1$, $0 \leq s_0 \leq \cdots \leq s_m \leq 1$ についてとる)

(9.16) $D(\bar{M}) \neq 0$

このとき任意の可測汎函数 $F(y)$ について下式の一辺が存在すれば他辺も存在して相等しい。

(9.17) $$\int_{C_0} F(y)\, dW(y) = |D(\bar{M})| \int_{C_0} F(Lx) \exp\{-\tfrac{1}{2}\Psi(x)\}\, dW(x)$$

ここに

(9.18) $$\Psi(x) \equiv \int_0^1\int_0^1 \{\bar{M}(t,s) + \bar{M}(s,t) + \int_0^1 \bar{M}(t,u)M(s,u)\}\,dx(s)\,dx(t)$$

o D. Varberg [11]

P_r を平均 0, covariance

(9.19) $$r(s,t) = \int_0^1 R(s,u)R(t,u)\,du, \quad s,t \in I$$

によって定まる C_0 上の Gauss 測度とする。ここに

(9.20) $R(t,s)$ は s を固定すると有界変動 且つ

$$\underset{0\leq t\leq 1}{\mathrm{var}}\ R(t,s) < M$$

となる s に無関係な正定数 M が存在する。

(9.21) $R(s,1) \equiv 0$, $R(s,0)$ は s について連続

(9.22) $\int_0^t R(s,u)\,du$ は t を固定したときに s の連続函数

(9.23) $R(0,t)$ は $(0,1]$ で t の連続函数。

Sem. on Probab.
Vol.24 1966年
P1-66

(9.24) $\quad q(t) \equiv R(t+,t) - R(t-,t)$ が $0<t<1$ で存在して連続

$$q(0) \equiv R(0,0)$$

(9.25)
$$Q(s,t) \equiv \begin{cases} q(t), & s>t \text{ or } s=t=0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$L(s,t) \equiv (s,t) - Q(s,t)$$

とおくと t を固定すると $L(s,t)$ は s について絶対連続

(9.26)
$$L_1(s,t) \equiv \frac{\partial}{\partial s} L(s,t)$$

とすると

$$\int_0^1 \int_0^1 [L_1(s,t)]^2 \, ds \, dt < +\infty$$

(9.27) (9.12)〜(9.16) をみたすような $\bar{M}(t,s)$, $\bar{M}(t,s)$, $\dot{J}(s)$ が存在して $L_1(s,t) = \bar{M}(s,t)$, $\forall(s,t) \in I^2$.

このとき $P_r \sim \bar{W}$ であるための必要十分条件は

$$\{q(t)\}^2 \equiv 1, \quad 0<t<1.$$
$$R(0,t) = 0, \quad \forall t \in I$$

であること。

また上記条件の成立するときには 線型変換 L を

$$y(t) = L\,x(t) = x(t) + \int_0^1 \int_0^t \bar{M}(u,v)\,du\,dx(v)$$

で定義すると 任意の可測汎函数 $F(y)$ について

$$\int_{C_0} F(y)\,dP_r(y) = \int_{C_0} F(Lx)\,d\bar{W}(x)$$

その density は

$$\frac{dP_r}{d\bar{W}} = |D(\bar{M})|^{-1} \exp\left\{-\frac{1}{2}\Phi(x)\right\}$$

但し

$$\Phi(x) \equiv \int_0^1 \int_0^1 \left\{\bar{M}^{-1}(t,s) + \bar{M}^{-1}(s,t) + \int_0^1 \bar{M}^{-1}(u,s)\bar{M}^{-1}(u,t)\,du\right\} dx(t)\,dx(s)$$

ここに $\bar{M}^{-1}(s,t)$ は $\bar{M}(s,t)$ の Voltera reciplocal kernel とする。

II. covariance, mean, spectral function

1°). $\{X(t,s)\}$, $\{X_1(t,\omega)\}$ が共に平均連続 Gauss 定常過程の場合

$r(t)$, $r_1(t)$, 対応する covariance

$dF(\lambda)$, $dF_1(\lambda)$, 対応する spectral function

Sem. on Probab.
Vol.24 1966年
P1-66

いずれも平均函数 ≡ 0 の場合.

○ U. Grenander [12] (J. Feldman [4])

$T = (-\infty, +\infty)$ の場合

$\{X(t, \omega)\} \sim \{X_1(t, \omega)\}$

$\Longleftrightarrow$

a) $dF(\lambda)$, $dF_1(\lambda)$ は non-atomic part では一致

b) atom での mass をそれぞれ m^i, m_1^i とすると

$$\sum_i \left(\frac{m_1^i}{m^i} - 1\right)^2 < +\infty$$

○ D. Slepian [14], Pinsker (Yu. Rozanov [7])

$T = [0, T_1]$, $T_1 < +\infty$

$dF(\lambda)$, $dF_1(\lambda)$ が共に rational spectral density $f(\lambda)$, $f_1(\lambda)$ を有する場合.

$\{X(t, \omega)\} \sim \{X_1(t, \omega)\}$

$\Longleftrightarrow$

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{f(\lambda)}{f_1(\lambda)} = 1$$

○ Yu. Rozanov [6]

$T = [0, T_1]$, $T_1 < +\infty$

$dF(\lambda)$ が density $f(\lambda)$ を有し

$$0 < \underline{\lim}_{\lambda \to +\infty} \lambda^{2n} f(\lambda) \leq \overline{\lim}_{\lambda \to +\infty} \lambda^{2n} f(\lambda) < +\infty$$

となるような正整数 n の存在する場合.

$\{X(t, \omega)\} \sim \{X_1(t, \omega)\}$

$\Longleftrightarrow$

$A(t) \equiv r(t) - r_1(t)$ が絶体連続な $(2n-1)$ 階導函数を有し, 且つ

$$\int_0^{T_1} \int_0^{T_1} |A^{(2n)}(t-s)|^2 \, dt \, ds < +\infty.$$

例. (Hajek)

$$r(t) = \sigma^2 e^{-a|t|}, \quad a > 0, \quad f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{\pi} \frac{a}{\lambda^2 + a^2}$$

$$r_1(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & |t| \leq 1 \\ 0 & |t| > 1 \end{cases}, \quad f_1(\lambda) = \frac{1}{\pi} \frac{1 - \cos\lambda}{\lambda^2}$$

Sem. on Probab.
Vol.24 1966年
P1-66

このとき

$$\{X(t,\omega)\} \sim \{X_1(t,\omega)\}$$

$\Longleftrightarrow$

$$\sigma^2 a = 1, \quad |T| \leq 1$$

○ Yu. Rozanov [7]

$T = [0, T_1]$, $T_1 < +\infty$

$dF(\lambda) = f(\lambda)\,d\lambda$, $dF_1(\lambda) = f_1(\lambda)\,d\lambda$

(A)

$\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \lambda^\alpha f(\lambda) > 0 \qquad {}^\exists \alpha > 0$

${}^\exists \beta > \alpha + \frac{1}{2}$ such that $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \lambda^\beta [f(\lambda) - f_1(\lambda)] = 0$

$\Longrightarrow$

• $\{X(t,\omega)\} \sim \{X_1(t,\omega)\}$

(B) $\overline{\lim\limits_{\lambda\to+\infty}} \lambda^\alpha f(\lambda) < +\infty$, $f_1(\lambda) \geq f(\lambda)$

$\underline{\lim\limits_{\lambda\to+\infty}} \lambda^\beta [f_1(\lambda) - f(\lambda)] > 0$, $\beta = \alpha + \frac{1}{2}$

$\Longrightarrow$

$$\{X(t,\omega)\} \perp \{X_1(t,\omega)\}$$

2°) 加法過程の場合

○ A. Skorokhod [15]

$\{X(t,\omega)\}$, $\{X_1(t,\omega)\}$ が共に Gauss 加法過程

$T = [0, 1]$

$E\, e^{izX(t)} = \exp\{izm(t) - \frac{1}{2}A(t)z^2\}$

$E_1\, e^{izX_1(t)} = \exp\{izm_1(t) - \frac{1}{2}A_1(t)z^2\}$

$m(t)$, $m_1(t)$, $A(t)$, $A_1(t)$; 連続

このとき

$$\{X(t,\omega)\} \sim \{X_1(t,\omega)\}$$

$\Longleftrightarrow$

$A(t) \equiv A_1(t)$

${}^\exists p(\tau)$: such that $m(t) - m_1(t) = \int_0^t [d_\tau A(\tau)]\, p(\tau)$

Sem. on Probab.
Vol.24 1966年
P1-66

且つ

$$\int_0^1 ([d_\tau A(\tau)]\, p(\tau),\ p(\tau)) < +\infty$$

3°) 多重マルコフ Gauss過程

○ 大平 坦 [22]

$T = [a, b]$ （無限区間でもよい）

$\{X(t,\omega)\}$ （Lévyの意味での）N重マルコフ Gauss過程

L_t: N 階微分作用素で white noise を取出すもの

i.e. $L_t X(t) = B'(t)$ （white noise）

$\{X(t,\omega)$ の covariance $r(t,s)$

$\{X_1(t,\omega)$ （任意のGauss過程で）その covariance

$r_1(t,s)$ mean $m(t)$ とする。

このとき

$$\{X(t,\omega)\} \sim \{X_1(t,\omega)\}$$

$\Longleftrightarrow$

1) ある正定数 c が存在して $r - c r_1$ が正定値

2) $\exists \dfrac{d^{N-1}}{dt^{N-1}} m(t)$, $\exists \dfrac{\partial^{N-1}}{\partial t^{N-1}} r_1(t,s)$

さらにもし $r(a,s) = 0$ であれば

$$\left.\frac{d^j}{dt^j} m(t)\right|_{\tau=a} = \left.\frac{\partial^j}{\partial \tau^j} r_1(t,s)\right|_{t=a} = 0, \quad j = 1, 2, \cdots, N-1.$$

$$\exists L_t m(t) \in L^2[a,b], \quad \exists L r_1(t,s) \in L^2[a,b]$$

3) $$\int_a^b \int_a^b |\exists L_\tau L_u (r_1(\tau,u) - r(\tau,u))|^2\, d\tau\, du < +\infty.$$

Sem. on Probab.
Vol.24 1966年
P1-66

引 用 文 献

[1] S. Kakutani, *On the equivalence of infinite product measures.* Ann. Math. Stats., Vol. 49, 1948.

[2] J. Hajek, *On property of normal distributions of an arbitrary stochastic process.* Czech. Math. J., Vol. 8, 1958.

[3] J. Feldman, *Equivalence and perpendicularity of Gaussian processes.* Pacific J. Math., Vol. 8. 1958.

[4] J. Feldman, *Some classes of equivalent Gaussian processes on interval.* Pacific J. Math., Vol. 10, 1960.

[5] Yu. Rozanov, *On the density of one Gaussian measure with repect to another.* Teoriya Veroyat. i ee Primen., Vol. 7, 1962.

[6] Yu. Rozanov, *On the problem of the equivalence of probability measures corresponding to stationaly Gaussian processes.* Teoriya Veroyat. i ee Primen., Vol. 8, 1963.

[7] Yu. Rozanov, *On probability measures in functional spaces corresponding to stationary Gaussian processes.* Teoriya Varoyat. i ee Primen., Vol. 9, 1964.

[8] R. Cameron, W. Martin, *On transformations of Wiener integrals under translations.* Ann. of Math., Vol. 45, 1944.

[9] R. Cameron, W. Martin, *Transformations of Wiener integrals under a general class of*

Sem. on Probab.
Vol.24 1966年
P1-66

linear transformations. Trans. A. M. S., Vol., 58, 1945.

[10] D. WoodWard, A general class of linear transformation of Wiener integrals. Trans. A. M. S. Vol. 100, 1961.

[11] D. Varberg, On Gaussian measures equivalent to Wiener measure. Trans. A. M. S., Vol. 113, 1964.

[12] U. Grenander, Stochastic processes and statistcal infelence. Arkiv for Matematik, Vol. 1, 1950.

[13] G. Baxter, A strong limit theorem for Gaussian processes. Proc. A. M. S., Vol. 7, 1956.

[14] D. Slepian,, Some comments on the detection of Gaussian signals in Gaussian noise. I.R.E. Trans. on Information, Vol. 4, 1958.

[15] A. SKorokhod, On the differentiability of measures which correspond to stochastic processes. Teoriya Veroyat. i ee Primen. Vol. 2, 1957.

[16] G. Kallianpur, H. Oodaira The equivalence and singularity of Gaussian measures. Time series analysis, edited by M. Rosenblatt. Wiley, New York, 1963.

[17] T. Hida, Canonical representations of Gaussian processes and their applications. Memoires Coll. Science. Kyoto U., Vol. 33, 1960.

[18] 伊藤 清, 確率論, 岩波書店, 1953.

[19] J. Doob, Stochastic processes. Wily, New York, 1963.

[20] Yu. ProKhorov, Convergence of random processes and limit theorems in probability theory. Teoriya Veroyat. i ee Primen., Vol. 1, 1956.

Sem. on Probab.
Vol.24 1966年
P1-66

[21] 池田信之、飛田武幸、吉沢尚明、Flow の理論(上),
Seminar on Probability, Vol. 12, 1962.

[22] 大平坦, 正規確率過程の同等性について
日本数学会総合分科会統計数学分科会講演要旨
1964年 10月、九州大学.

Sem. on Probab.
Vol.24 1966年
P1-66

1966. 7. 発行 確率論セミナー