SEMINAR ON PROBABILITY

Vol. 23 - Ⅰ

分枝マルコフ過程の基礎

池田 信行・長澤 正雄・渡辺 信三

1966

確率論セミナー

Sem. on Probab.
Vol.23- I 1966年
P1-137

はしがき

分枝過程はどちらかと言えば確率論の中で応用に近いものと考えられている。応用に近い研究には直観性，個別性がともないがちである。分枝過程もその例にもれないらしく，われわれがそれを学習したいと思い立った時，それらから来る困難にしばしば当面した。そのような困難に出会う度にわれわれは馬鹿の一つ覚えみたいに，*Markov*過程論の枠組の中で解決を試みた。そのような学習のためのメモの集積がこのノートの内容である。そのような意味ではまだ分枝過程自身の研究にははいっておらず，研究の準備をしている段階と言うべきものであろう。しかしながら，われわれと似たような経過や立場で分枝過程に興味を持つ人があれば，中間段階のものであれ，われわれの得た資料を利用することによって，より直線的に分枝過程に近づくことが出来るのではないかと考え，敢えて発表することにした。

ところで，ここにのべたことも予想外に多くなってしまったこと，また，時間的にも余裕がなくなったことのため，基礎としては当然取入れるべきことも除外せざるを得なかった。また，個々の具体的分枝過程については数多い研究があるにもかかわらず，それらを整理する所まではわれわれの力が及ばなかった。

もしこのノートを読む人があるならば，われわれとしては是非第5章の*Examples* を参照しながら読んで貰いたいと思っている。そのことによって全体の目的や個々の計算について一そう容易に理解して貰えるであろう。

各章の内容，目的，意味については特に章を設け第0章として詳しくのべたので，その部分を見て貰いたい。そこでは慣例にあまりこだわらず，可能な限り直線的にかつスローガン的に説明した。それはわれわれ同様，分枝過程にあまりなじみのない人に少しでも多く，趣旨を理解して貰いたいと思ったからである。

なお，このノートを作るに当って研究の出発点で，また途中で，あるいは最後の整理の段階で，実に多くの人々に助言，指導を頂いた。中でも伊藤清教授の京大確率論セミナーでの分枝過程についての報告は分枝過程を学習しようという直接的動機をわれわれに与えた。典型的な場合を例として分枝過程を*Markov*過程とみる考えがそのとき提案された。また，数年前より山口昌哉教授に偏微分方程式やその背景をなす応用の事実について助言を得たことが，研究の出発に際して

Sem. on Probab.
Vol.23-Ⅰ 1966年
P1-137

も，また実際個々の内容においても，度々役に立った。例えば Kolmogoroff-Petrovsky-Piscounoff [1] や Gelfand の綜合報告の内容がわれわれの目的に関連することも同氏によって指摘された。ここに両教授に対して，われわれの謝意を表させて貰いたい。

また，関西，および東京の確率論セミナーの同僚にも，しばしば有益な助言を得た。特に本尾，佐藤，野本氏等には数多い助言，批判をして貰った。更に九州の確率論セミナーの人々には印刷，校正等のわずらわしい仕事を助けて頂いた。末筆ながら，これらの皆さんにわれわれ３人の心からのお礼をのべたい。

1966年1月20日

執筆者一同

Sem. on Probab.
Vol.23-Ⅰ 1966年
P1-137

目　　次

Sem. on Probab.
Vol.23-Ⅰ 1966年
P1-137

Sem. on Probab.
Vol.23-Ⅰ 1966年
P1-137

分枝マルコフ過程の基礎

第0章　はじめに

分枝過程については，外国に比べると，これまで確率論セミナーのみならず，日本の確率論研究者によって取上げられることは少なかったように思える。例えば *Seminar on Probability* も既に20数冊になるが，今回が始めてである。このような事情で，分枝過程についてはなじみがうすい人も少なくないと思われるので，これまでの慣例にはあまりないことだが，まずこの章で，このノートの背景，内容の概略，および2，3の問題点についてのべたい。

1950年代以来の Markov 過程論の急速な発展の結果が解析学および応用の諸分野でどのような位置を占めるかはここ数年来日本の確率論研究者の多くの人の興味をひいていた。実際，確率論セミナーではその立場から関連分野を検討することが何回となく行なわれた。そのような雰囲気の中で生物学や宇宙線の問題も Gelfand 等の報告等を通してわれわれの興味をひくようになっていた。このような空気の中で偏微分方程式等の研究者と討論する機会も増え，Kolmogoroff-Petrovsky-Piscounoff [1] の論文も話題の1つとして出て来た。この論文は1930年代に発表され，生物の集団現象に関する確率論の立場からの Fisher の研究に関連してある1つの典型的な semi-linear な偏微分方程式が導かれることを示したものである。一方分枝過程そのものの研究はソビエット，イギリス，アメリカの1部で盛んに行なわれ，所謂 Markov 過程論の研究者にもいくつかの点においては注意されるようになっていた。Kolmogorov-Dmitriev [1] の論文は言うまでもなく，例えば Moyal [1],[2]，Ito-McKean [1]，Skorohod [1] 等の研究が現われ始めた。更に，応用に近い立場からの研究も Bartlett [1] に続いて，最近はより集中的に Harris [1] の本にまとめられた。このように見て来ると，分枝過程を Markov 過程論の立場から体系的に追求する問題については，われわれの主体的条件もまた客観的条件も熟していたと言えるだろう。

生物学や物理学では，分裂を繰返す現象にしばしば当面する。そのような現象のある側面は古くから確率論の1つの対象として研究され，それらは分枝過程と

Sem. on Probab.
Vol.23-Ⅰ 1966年
P1-137

呼ばれている。ところが，分枝過程の研究は，それぞれの応用分野の特有な性格から定まる方法で行なわれることが多く，相互間に類似性が多いにもかかわらず，一般論としての一貫した体系に欠けているように見える。たとえば *Harris* の本 [1] をみると，各章毎に類似の方程式を，その度毎に導く証明が与えてある。これらの方程式はこのノートでは *Skorohod* 方程式と呼び，統一的に導いた。勿論，分枝過程論に一貫した原理を確立する努力も早くから続けられている。最も典型的なクラスについては1947年に *Kolmogoroff-Dmitriev* [1] の論文がある。さらに1960年前後にはイギリスの研究者の諸成果を背景に *Moyal* が一連の論文を発表し，その方向の発展に重要な寄与をする考えを出している。それらの考えは，特に *Moyal* [1], [2] に具体的にのべられている。またつい最近，*Skorohod* [1] は *Markov* 過程論の立場からのもう1つの進歩を与えた。

一般に応用または数学の諸分野間の類似性を1つの性格を持った数学的対象までに整理するには常識的ではあるが有力な方法がある。それは対象の類似性の根底にある1つの構造に，集合論的手法で定式化を与え，その基本的反映形態をしらべあげて行くことである。このノートの主な目的は先にのべた，いくつかの論文の精神にならって，分枝過程と呼ばれるものの根底にひそむ構造を明らかにする努力をすることである。このようなことの結果として，1つの対象から成長して行ったある特別の型の *semi-linear* な方程式についての研究と，分枝過程の研究を再び同じ土俵の上にもどして理解することも試みられる。

分枝過程の構造としてまず明らかにされるべきことは *Markov* 性（実は強 *Markov* 性）である。一般にすべての運動は過去の運動形態をすべて記述するに充分なほど広い状態空間をとれば，*Markov* 性を持つと言える。しかし分枝過程の場合はそのような一般論としてでなく，もっと特徴をもった形で *Markov* 性を前面に出すことが出来る。この方法については既に *Moyal* [1], [2] や *Skorohod* [1] が有力な考えを与えている。そのことは分裂して行く個々の粒子に運動する空間を個々に対応させることによって実現される。もう少し詳しく言えば，1個の粒子が分裂するまでに運動する空間を S とする。S の n 個の直積空間を $S^{(n)}$，その *symmetrization* を S^n とする。そのとき $\bigcup_{n=1}^{\infty} S^n$ を考えれば，粒子が高々有限個に分裂している限り，分裂して出来る個々の粒子に相異なる S を1つずつ対応させることが出来る。後は無限個に爆発してしまった状態を表わすもの $\{\partial\}$ と，消滅してしまった状態を表わす空間 $\{\Delta\}$ があれば充分である。そこで各粒子は分裂するまでは，現在の状態を指定すれば過去の履歴がなくなる型の運動をして

Sem. on Probab.
Vol.23-I 1966年
P1-137

おり，更に分裂の瞬間にどのような法則に従うかはそれ以前の運動形態に無関係に定まることに注意すれば，分枝過程をS上で考えて Markov 過程であると理解出来る。いまそれをXという記号で表わすとしよう。

ところで，現在の目標は単に Markov 過程ということでなく，その中で特に分枝過程であるというところにある。そこでまず，分枝過程の定義を与えるべきであるが，その定義は Markov 過程Xを定める基本的な量に関する可能な限り単純な関係によって与えることが望ましい。そのような関係は，最も簡単な場合には Kolmogoroff-Dmitriev [1] によって明らかにされた。また一般の場合について Skorohod [1] にもその関係が用いられている。具体的にのべると，つぎのようなことである。

$\mathcal{S}$上の有界可測関数の空間$B(\mathcal{S})$を考え，そこでの unit ball を$B^*(\mathcal{S})$とする。また $S=\bigcup_{n=0}^{\infty}\mathcal{S}^n\cup\{\Delta\}$，$\mathcal{S}^0=\{\partial\}$，とするとき，$S$上の有界可測関数の空間を$B(S)$として，$B^*(\mathcal{S})$から$B(\mathcal{S})$の中への写像 ”$\wedge$“ をつぎの形で定義しよう：

$$(0.1)\qquad \wedge : B^*(\mathcal{S})\ni f \longrightarrow \hat{f}(\bar{x})=\begin{cases} 1 & , \quad \bar{x}=\partial, \\ \prod_{j=1}^{n} f(x_j) & , \quad (x_1,\cdots,x_n)\in\bar{x}\in\mathcal{S}^n, \\ 0 & , \quad \bar{x}=\Delta . \end{cases}$$

このとき Markov 過程Xが *branching Markov process* であるとは，Xの semi-group $\{T_t;\, t\geqq 0\}$ がつぎの条件をみたすことである：

$$(0.2)\qquad T_t\hat{f}(\bar{x})=\widehat{T_t\hat{f}|_{\mathcal{S}}}(\bar{x}), \qquad \bar{x}\in S \quad .$$

一般に$B(S)$上の contraction positive linear operator の semi-group が(0.2)の性質をもつとき，その semi-group を *branching semi-group*（単に B-semi-group）と呼ぶことにする。上の定義によれば，branching Markov process の研究は branching semi-group の研究ということが出来る。

”$\wedge$“ なる写像は直観的にいえば，$B^*(\mathcal{S})$の元の多項式を作る操作になっている。(0.2)をみたす semi-group T_t は$\hat{f}$に対する作用素，すなわちT_tを$B(S)$上で考えれば ”linear“ な operator で，ところが，$B(\mathcal{S})$上の作用素とみれば ”non-linear“ である。この両方の見方の関係が(0.2)で定まっているのが上に定義した B-semi-group である。

このように分枝過程を定式化すると，応用に出て来る多くの分枝過程に1つの

Sem. on Probab.
Vol.23-Ⅰ 1966年
P1-137

統一性を与えることが出来る。いくつかの例については，具体的問題を現在の立場で考える方法を第5章でのべる。ここでのべる例の大部分については，1つ1つについて数多い研究があるが，それらを現在の立場で整理するところまでは出来なかった。5章で実際のべたことは各例の上の立場による定義と後にのべる意味での基本方程式の具体的な形である。ここで注意すべきことは，上の立場での枠組の中に応用に出て来るすべての分枝過程がはいるとはいえないことである。実際 *Harris* [1]，第7章の *electron-photon cascades* で *finite cross section* の場合はこの枠組にはいるが，*infinite cross section* の場合はそのままでは駄目である。この例は理論的にも応用上も興味があるので，それに関する2，3の注意を附録でのべる。

(0.2)を用いる現在の定義と，分枝過程についての多くの文献にみられる種々の定義との関係がどうなっているかは当然問題になる。そのことを(0.2)で与えられる構造が X を規定する基本空間の *measure* $P_{\bar{x}}$，$\bar{x} \in S$ にどのような形で現象するかという問題として定式化して，第2章で論ずる。すなわち第2章でのべる *Property* B.Ⅰ―B.Ⅲと(0.2)の関係がそのことである。この内容を標語的にいえば，関数の積と積分の順交交換が可能であることとして(0.2)を理解することである。言い換えると，測度の直積性すなわち独立性である。応用で慣習的に用いられている言い方では"各粒子は独立に，しかもすべてが同一法則で運動する"ということである。最後の表現の仕方は実に多様な意味に用いられており，その立場に立てば第2章の内容は直観的には明らかなことの証明をしていることになる．しかし，そのような内容を第2章のように定式化しておくことは分枝過程についての推論で経験を基礎にした認識段階まで度毎に帰る必要がなくなるという意味で有用なことと思う。

分枝過程のこれまでの研究には一種の積分方程式が出て来て，それの定める量の定性的，定量的な性質が追求されている。これらは *Moyal* [1]，[2]，*Skorohod* [1] の立場によれば，*B-semi-group* を分裂する以前を規定する量と分裂する瞬間の状態を規定する量から定めるための方程式と理解される。このような分解は *Markov* 過程論の一般論の立場から言えば分裂する時刻という *Markov time* に関する *Dynkin* の公式である。*Moyal* は *semi-group* T_t を $B(S)$ 上で考えた分解を与え，*Skorohod* は $B(\mathcal{S})$ 上で考えた分解を与えている。前に説明したことから，前者は *linear* な方程式と考えられ，後者は *non-linear* な方程式と考えられる。ここでは便宜上これらをそれぞれ *Moyal equation*，

Sem. on Probab.
Vol.23-Ⅰ 1966年
P1-137

Skorohod equation と呼ぶことにする。しかし，その2つの立場は（0.2）と第2章の Property B.Ⅲ に注意すれば同等で，従って2つの方程式は同じ役割を持っている。それを図式的にいえば

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Skorohod equation}\\ \text{：}\mathcal{S}\text{上の non-linear equation}\end{array}\right\} \underset{(0.2)}{\overset{\text{Property B.Ⅲ}}{\rightleftarrows}} \left\{\begin{array}{l}\text{Moyal equation}\\ \text{：}S\text{上の linear equation}\end{array}\right\},$$

となる。これらについては第3章と第7章で詳しく論ずる。T_t のこのような分解をその生成作用素の $\mathcal{G}$ の分解と考えれば今度は一般には semi-linear な偏微分方程式が出て来る。$T_t\hat{f}$ を S 上の関数と考え $\mathcal{G}$ をそれにほどこすと考えれば linear であるが，$T_t\hat{f}$ を（0.2）により $T_t\hat{f}|_{\mathcal{S}}$ で表わしておき，$\mathcal{S}$ 上の関数と考えてほどこすと思えば semi-linear になる。このとき3章，7章で詳しく論ずるように，この分解で linear な部分は粒子の分裂する以前の行動と分裂する時刻の決定を支配し，non-linear な部分は分裂の直後の瞬間の行動を支配している。従ってその各々はそれぞれ独立に意味を持っていて，どちらが主でどちらが従というような関係ではない。しいて言えば，とかく摂動項と考えられる non-linear な項の方が branching の法則を多く反映していると言えるだろう。偏微分方程式は通常の Markov 過程の場合と同様に，forward equation と backward equation の2つが考えられる。これらの積分方程式または微分方程式が与えられた時，その解としての semi-group の構成は主として7章で論ずる。これらは分裂するまでを規定する semi-group T_t^0 と分裂する個数の割合 q_n と分裂後の分布 $\pi_n(x, d\bar{y})$ を与えた時の B-semi-group の構成と理解してもよい。これらの構成では逐次近似が用いられるが，例えば，Moyal equation を用いる時の近似の途中それ自身も確率論的意味を持つ量であることは第2章との関連で考えれば容易にわかる。

上の構成を B-semi-group の構成でなく，直接的に branching Markov process を定める measure $P_{\bar{x}}$；$\bar{x} \in S$，の構成で実現しようとするのが第6章である。これは上の Moyal equation を用いるのと実質的には同じであるが，その内容を Volkonsky [1] の形式で実現しようとするものである。原理的には right continuous な countable Markov process を holting の全体と jump の measure 全体が与えられた時の構成法と同じである。この第6章の内容は Branching Markov process 個有のことだけでなく，一般に通用する内容をふくんでいる。このような型の構成法ではこれまで Markov 性だ

Sem. on Probab.
Vol.23-Ⅰ 1966年
P1-137

けで強 Markov 性は示されていなかったが，このノートでは後者を示すのに有効な Lemma を用意して，そのことを証明する。そのことによって B-semi-group の構成の方法より，構成されたものの確率論的な性質を示すのに便利になる点が出て来る。

つぎに，分枝過程を個々に取扱うのでなく，ある種の変換で移れるクラスを考えることの重要性は一般論より容易に推論される。それのみならず，ここでは変換したものが再び branching Markov process になるという条件が加わるので，一般論の他に特別の問題が出て来る。そのことは第４章でのべる。しかしこのことに関連しては整理されて言えるほどのものでなく，単に典型的な例について論ずると言った方が妥当であろう。

１章は後で引用するために Markov 過程論の基礎的事項のいくつかを抜き書きしたにすぎない。以上で本文の内容および附録の一部分についての説明は終った。後，分枝過程の基礎を体系的に論ずる場合に当然ふれるべきであるが，まとめることが出来なかったものの中から 2,3 を取り出して簡単な注意を附録にのべる。分枝過程の Markov 過程の定式化が具体的諸問題で有効であるためには，単に定義されたり，構成されたりするだけでは不充分である。それには，例えば推移確率 $P(t,x,dy)$ の性質が解析的にも確かめられる形でわかることが必要である。そのための有力な方法の一つは推移確率の固有関数系による展開である。この問題は離散系数の Galton-Watson process に対しては Karlin-Mc-Gregor [1] で論じられている。当然ながらそれは連続系数の時も有効である。更に S が有限集合の時までは彼等によって論じられている。Karlin-McGregor [1] の場合は，先の説明に出て来る用語によれば，linear な部分は単に関数をかける作用素で基本的部分は non-linear な項である。後者の影響で問題は non-self-adjoint の作用素の固有値問題になっている。これを一般に論ずることは現在のところ未解決である。附録では "branching" ということの固有値，固有関数等への反映形態のごく一部について Karlin-McGregor [1] を参考にすれば容易にわかる，簡単な注意を与える。ここでは直積ということが種々の形で重要な役割を果たしているように思える。例えば S と S^n，$\mathbb{C}(S)$ と $\mathbb{C}(S^n)$，$d\mu$ と $d\hat{\mu}$ *1)，$L_2(S,d\mu)$ と $L_2(S^n,d\hat{\mu})$，$T_t\hat{f}|_S$ と $\widehat{T_t\hat{f}|_S}$ として直積が出て来ていて，それが固有値，固有関数系のある一部分から生成される

*1) $\hat{\mu}$ の記号については附録参照。

Sem. on Probab.
Vol.23-Ⅰ 1966年
P1-137

クラスを決めるのに重要な役割を持っているように思える。

つぎに，附録ではもう1つの問題にもふれる。それは第3章でのべる semi-linear な偏微分方程式は本質的には Kolmogoroff-Petrovsky-Piscounoff [1] で扱われたものの一部分にすぎないともいえる。従って3章で扱ったものは Kolmogoroff-Petrovsky-Piscounoff [1] に扱われたものの中で取扱われたものの中で特別視すべきものかどうか，もし特別視すべきだとすればどのような意味でかということが当然問題になる。このことについても現在のところ確定した主張は出来ない。そこでそのような目的に参考になると思われる1つの事実についての注意を附録としてのべる。

更に一般論としては，branching Markov process 相互間の収束問題を論ずべきであろうが，ここでは本文でも附録でもそのことにふれることすら出来なかった。その重要性は Kolmogorov-Petrovsky-Piscounoff [1] の問題自体が Fisher [1] によって導かれた定差方程式より極限定理を介在させることによって得られた偏微分方程式を模型にしていることからだけでも推量出来るであろう。この時，最も好ましいのは Prohorov [1] が確率過程一般に主張しているように，確率過程相互の収束からそれらの特性量の収束を導く形の結果を得ることであろうが，いまのところ，その以前の弱い形のものすらも体系的には論じられてはいないようである。

Sem. on Probab.
Vol.23- I 1966年
P1-137

第1章 マルコフ過程に関する準備

このノートに必要となるマルコフ過程に関する性質をのべる。いずれもよく知られたものであるが，記号を確定する必要と，引用の為に列記する。第2章以後の必要に応じて参照していただきたい。ほぼ Dynkin [1] の本に従っているが，我々の慣用もとり入れて少し修正してある。この章では原則として証明はのべない。前記 Dynkin の本 [1]，Ito-McKean [1]，Ito [1]，Kondo [1]，Meyer [1] 等を参照していただきたい。

§1.1 Markov 過程

state space S は locally compact Hausdorff space で open set の countable base を持つとする。その topological Borel field を $\mathcal{B}(S)$ とする。fundamental space Ω は一つの abstruct space であって，次の σ-field の system が与えられているとしよう。

$\{\mathcal{B}_t;\ t\in[0,\infty)\}$ は ω の subset の σ-field であって，

$$\mathcal{B}_t \subset \mathcal{B}_s \quad , \qquad t<s \text{ のとき}$$

をみたしている。

$X_t(\omega)$，$(t\in[0,\infty))$ は $(\Omega,\mathcal{B}_t)\to(S,\mathcal{B}(S))$ の measurable mapping とする。（断らないかぎり (t,ω) に関し両可測とする。）

$\mathcal{N}_t$ は $\{X_s:\ ^\forall s\leq t\}$ を可測にする最小の σ-field とする。従って，

$$\mathcal{N}_t \subset \mathcal{B}_t$$

である。

$\mathcal{B}_\infty=\bigvee_{t>0}\mathcal{B}_t$，$(\mathcal{N}_\infty=\bigvee_{t>0}\mathcal{N}_t)$ は $\bigcup_{t>0}\mathcal{B}_t$，$(\bigcup_{t>0}\mathcal{N}_t)$ を含む最小の σ-field とする。

θ_t，$(t\in[0,\infty))$ は $\Omega\to\Omega$ の mapping である。

P_x，$(x\in S)$ は $(\Omega,\mathcal{B}\ )$ 上の probability measure の system である。

こゝで $\mathcal{B}\supset\mathcal{B}_\infty$ とした。

Sem. on Probab.
Vol.23-Ⅰ 1966年
P1-137

定義 1.1　$X=(\Omega, \mathcal{B}_t; P_x, x\in S, X_t, \theta_t)$ が次の条件をみたすとき Markov process と云う。(混乱のおこらないかぎり単に Markov 過程 X 又は X_t ということもある。)

(M.1)　$X_{t+h} = X_t \circ \theta_h$

(M.2)　$P_x[X_0 = x] = 1$

(M.3)　$P_x[X_t \in B]$ は任意の $B\in \mathcal{B}(S)$ に対し x に関し $\mathcal{B}(S)$-可測

(M.4)　(Markov property)

$$P_x[X_{t+s}\in B \mid \mathcal{B}_t] = P_{X_t}[X_s \in B] \quad , \quad a.s.\ P_x \ .$$

[注意 1]　(i)　θ_t は任意の $s\in[0,\infty)$ に対し，$(\Omega, \mathcal{N}_{t+s}) \to (\Omega, \mathcal{N}_s)$ の measurable mapping である。

(ii)　(M.4) は次の性質と同等である。

(M.4′)　任意の有界 $\mathcal{N}_\infty$-可測函数 $F(\omega)$ に対し

$$E_x[F(\theta_t\omega) \mid B_t] = E_{X_t}[F] \quad , \quad a.s.\ P_x$$

こゝで E_x は P_x による expectation を表わす。

μ を $(S, \mathcal{B}(S))$ 上の probability measure として，次の記号を導入する。

$\mathcal{B}^\mu(S)$ ： $\mathcal{B}(S)$ の μ による completion

$\overline{\mathcal{B}}(S) = \bigcap_\mu \mathcal{B}^\mu(S)$,　(但し μ は全ての probability measure を動かす)

$P_\mu[B] = \int P_x[B]\mu(dx)$,　$B\in \mathcal{N}_\infty$　とおく

$\overline{\mathcal{N}}_t = \bigcap_\mu \mathcal{N}_t^{P_\mu}$,　$\mathcal{N}_t^{P_\mu}$ は $\mathcal{N}_t$ の P_μ による completion

$\overline{\mathcal{N}}_\infty = \bigcap_\mu \mathcal{N}_\infty^{P_\mu}$,　$\mathcal{N}_\infty^{P_\mu}$ は $\mathcal{N}_\infty$ の P_μ による completion

$\overline{\mathcal{B}}_t = \bigcap_x \mathcal{B}_t^{P_x}$,　$\mathcal{B}_t^{P_x}$ は $\mathcal{B}_t$ の P_x による completion

$\overline{\mathcal{B}}_\infty = \bigcap_x \mathcal{B}_\infty^{P_x}$,　$\mathcal{B}_\infty^{P_x}$ は $\mathcal{B}_\infty$ の P_x による completion

P_x は $\overline{\mathcal{B}}_\infty$ 上に，P_μ は $\overline{\mathcal{N}}_\infty$ 上に自然に拡張され，

$$P_\mu[B] = \int P_x[B]\mu(dx) \quad , \quad B\in \overline{\mathcal{N}}_\infty$$

がなりたつ。

[注意 2]　$\overline{\mathcal{B}}_t$ のかわりに $\overline{\mathcal{B}}'_t = \{B\in\overline{\mathcal{B}}_\infty ; \forall x\in S, \exists B'_x \in \mathcal{B}_t$ such that $P_x[B\triangle B'_x]=0\}$ を使っている論文もあるが，以下にのべる命題 1.3 等

Sem. on Probab.
Vol.23-Ⅰ 1966年
P1-137

を修正する必要がおこるので，この Note では使わない。勿論 $\overline{\mathcal{B}}_t \subset \overline{\mathcal{B}}'_t$ である。

命題 1.1　(M.3)，(M.4) は $\mathcal{B}(S)$ を $\overline{\mathcal{B}}(S)$ に，$\mathcal{B}_t$ を $\overline{\mathcal{B}}_t$ におきかえて，それぞれ成立する。

従って，以下では必要に応じて，$\mathcal{B}(S)$，$\mathcal{B}_t$，$\mathcal{B}_\infty$ は上のように拡張されていると考えることにする。

以後，このノートで考える Markov 過程はすべて断ることのないかぎり次の仮定がみたされているとしよう。

［右連続性の仮定］　各 $\omega \in \Omega$ について，

$$[0,\infty) \ni t \longrightarrow X_t(\omega)$$

は右連続である。

この仮定より直ちに

命題 1.2　$(t,\omega) \longrightarrow X_t(\omega)$ は $\mathcal{B}[0,\infty)\times\mathcal{B}_\infty \longrightarrow \mathcal{B}(S)$，$(\mathcal{B}[0,\infty)\times\overline{\mathcal{B}}_\infty \longrightarrow \overline{\mathcal{B}}(S))$ の mapping として可測。

定義 1.2　$T(\omega)$： $\Omega \longrightarrow [0,\infty]$ が次の条件をみたすとき，$\mathcal{B}_t$-Markov time と呼ぶ：

$$\forall t > 0 \text{ に対し } \{T < t\} \in \mathcal{B}_t$$

$\mathcal{N}_t$-Markov time 等も同様に定義する。

$\mathcal{B}_t$-Markov-time に対し

$$\mathcal{B}_{T+} = \{B \in \mathcal{B}_\infty ;\ \text{任意の } t>0 \text{ に対し，} B \cap \{T<t\} \in \mathcal{B}_t\}$$

とおく。$\mathcal{N}_t$-Markov time に対しても $\mathcal{N}_t$ を同様に定義する。（$T=t$ のとき $\mathcal{B}_{T+} = \mathcal{B}_{t+} = \bigcap_{s>t} \mathcal{B}_s$ とすることに注意する。）

［注意3］　Dynkin [1] 等では Markov time の定義は

$$\forall t \geq 0,\quad \{T \leq t\} \in \mathcal{B}_t$$

とし，

$$\mathcal{B}_T = \{B \in \mathcal{B}_\infty ;\ \forall t \geq 0,\ B \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{B}_t\}$$

Sem. on Probab.
Vol.23-Ⅰ 1966年
P1-137

としてある。この定義を採用すると少し修正を必要とするので，その都度注意をする。

定義 1.3　　マルコフ過程 $X=(\Omega, \mathcal{B}_t, P_x, X_t, \theta_t)$ が任意の $\mathcal{B}_t$-Markov time T に対し

(S.M)　$P_x[X_{T+t}\in B,\ T<\infty \mid \mathcal{B}_{T+}] = \chi_{\{T<\infty\}} P_{X_T}[X_t\in B]$,　a.s. P_x

をみたすとき，Xは強マルコフ過程であると云う。こゝで $B\in\mathcal{B}(S)$，$\chi_{\{T<\infty\}}$ は $\{T<\infty\}$ の定義函数である。

［注意４］　上の条件 (S.M) は任意の有界 $\mathcal{N}_\infty$ 可測函数 $F(\omega)$ に対し，

$$E_x[\chi_{\{T<\infty\}} F(\theta_T\omega) \mid \mathcal{B}_{T+}] = \chi_{\{T<\infty\}} E_{X_T}[F]$$

が成立つことと同等である.

Dynkin[1] (p.102. Th. 3.12), T. Watanabe [1] により

命題 1.3　　$X=(X_t, \mathcal{B}_t)$ が強マルコフならば，$\bar{X}=(X_t, \bar{\mathcal{B}}_t)$ も強マルコフ過程である。

従って，強マルコフ性を考えるときも σ-field $\mathcal{B}_t$ は必要に応じて $\bar{\mathcal{B}}_t$ に拡張されていると考えてよい。

定義 1.4.　$(X_t, \mathcal{B}_t)$をマルコフ過程とする。任意の $\mathcal{B}_t$-Markov time の増加列 $T_n\uparrow T$ に対し

(q.l.c)　　$P_x[\lim_{n\to\infty} X_{T_n} = X_T,\ T<\infty] = P_x[T<\infty]$

がすべての P_x に対し成り立つとき，$(X_t, \mathcal{B}_t)$ の path は quasi-left continuity をもつという.

［注意５］　$T_n\uparrow T$ が $\mathcal{N}_t$-Markov time のときには (q.l.c) の P_x を P_μ でおきかえてよい。

Sem. on Probab.
Vol.23-Ⅰ 1966年
P1-137

定義1.5　マルコフ過程$(X_t, \mathcal{B}_t)$が次の各条件をみたすとき，$(X_t, \mathcal{B}_t)$はHuntの条件(A)をみたす。又はHunt processであるという。

1）$(X_t, \mathcal{B}_t)$は強マルコフである

2）$P_x[\forall t \in (0,\infty),\ X_{t-}(\omega)$が存在する$] = 1 \quad (\forall x \in S)$

3）pathはquasi-left continuous

4）$\overline{\mathcal{B}}_t = \mathcal{B}_t$

［注意6］　Markov time T及び$\mathcal{B}_T$の定義を［注意3］でのべたDynkin[1]のようにする場合には，$(X_t, \mathcal{B}_t)$がHuntの条件(A)をみたすということは，上の条件4）を

4)′ $\overline{\mathcal{B}}_{t^+} \equiv \bigcap_n \overline{\mathcal{B}}_{t+\frac{1}{n}} = \mathcal{B}_t$　がなりたつ

でおきかえる。

［死点をもつマルコフ過程］

$\Delta \in S$があり次の条件がなりたつとする：

(d.p)　任意の$\omega \in \Omega$に対し，$X_t(\omega) = \Delta$ならば，$X_{t'}(\omega) = \Delta$，$(\forall t' \geq t)$.

このとき，マルコフ過程$(X_t, \mathcal{B}_t)$は死点Δをもつと云い，

$$\zeta(\omega) = \min\{t : X_t(\omega) = \Delta\}, \quad (=\infty;\ \{\ \}が空のとき)$$

とおき，$\zeta(\omega)$をX_tのlife time（killing time）と呼ぶ。

定義1.6　死点Δをもつマルコフ過程$(X_t, \mathcal{B}_t, \zeta)$が次の条件をみたすとき，（Dynkinの意味の）standard processであるという：

1）強マルコフ過程である

2）pathはζ以前でquasi-left continuousである。すなわち，任意の$\mathcal{B}_t$-Markov timeの増加列$T_n \uparrow T$に対し

(q.l.c)　$P_x[\lim_{n\to\infty} X_{T_n} = X_T,\ T < \zeta] = P_x[T < \zeta]$

がすべてのP_xでなりたつ。

3）$\overline{\mathcal{B}}_t = \mathcal{B}_t$

Sem. on Probab.
Vol.23-Ⅰ 1966年
P1-137

［注意7］ Markov time T 及び $\mathcal{B}_t$ 定義を［注意3］のようにするときには条件3）を

3)′ $\overline{\mathcal{B}}_{t^+} \equiv \bigcap_n \overline{\mathcal{B}}_{t+\frac{1}{n}} = \mathcal{B}_t$ がなりたつ

でおきかえる。（c.f. Dynkin [1], p.104）

$T_n \uparrow T$ が $\mathcal{N}_t$-Markov time のときには（q.l.c）で P_x を P_μ でおきかえてよい。

Hunt の条件(A)をみたす Markov process の基本的な存在定理として次のものが知られている．

$\bar{S} = S \cup \{\Delta\}$ を S の一点 compact 化とする（S が compact のときは Δ は孤立点とする）．

$\hat{C}(S) = \{f : f$ は $\bar{S}$ 上連続で，$f(\Delta) = 0\}$

としよう。

さて，T_t は $\hat{C}(S)$ 上の semi-group であって

1) $1 \geqq f \geqq 0$ ならば，$1 \geqq T_t f \geqq 0$

2) $\|T_t f - f\| \longrightarrow 0 \quad (t \downarrow 0)$, $\forall f \in \hat{C}(S)$

をみたすとしよう。

そのとき

定理 1.1 そのような T_t が与えられると，$\bar{S} = S \cup \{\Delta\}$ 上に Δ を死点にもち，Hunt の条件(A)をみたすマルコフ過程で

$$E_x[f(X_t)] = T_t f(x) \quad , \quad (\forall f \in \hat{C}(S))$$

をみたすものが存在する．このような process は（Dynkin [1] の意味の）equivalence を除いて一意的である。

次に additive functional (a.f.) 及び multiplicative functional (m.f) の定義をのべよう。

定義 1.7 $(X_t, \mathcal{B}_t)$ をマルコフ過程とする．$[0,\infty) \times \Omega \longrightarrow (-\infty, \infty]$ なる mapping $A(t,\omega)$ が，$\mathcal{B}_t$-a.f. であるというのは，各 $t > 0$ に対し，$A(t,\omega)$ は $\mathcal{B}_t$-可測であって，ある $\Omega' \in \mathcal{B}_\infty$ が存在し，$P_x(\Omega') = 1$，$(\forall x \in S)$ であって，$\omega \in \Omega'$ ならば次の4条件をみたす：

Sem. on Probab.
Vol.23- I　1966年
P1-137

(A.1)　　$A(0,\omega)=0$

(A.2)　　$t\longrightarrow A(t,\omega)$ は右連続かつ左極限が存在する

(A.3)　　$A(t,\omega)=A(\zeta(\omega),\omega)$,　$t\geqq\zeta(\omega)$ のとき

(A.4)　　$A(t+s,\omega)=A(t,\omega)+A(s,\theta_t\omega)$

もし，(A.4)のかわりに，各 t, $s\in[0,\infty)$ に対し

(A.4′)　　$P_x[A(t+s,\omega)=A(t,\omega)+A(s,\theta_t\omega)]=1$,　$(\forall x\in S)$

がなりたつときには almost a.f. であるという。

また，$\forall\omega\in\Omega'$ に対し

(A,p)　　$A(t,\omega)\geqq 0$

をみたすとき，non-negative な a.f. という。

(A.2)のかわりに

(A.2′)　　$t\longrightarrow A(t,\omega)$ が連続

をみたすとき，連続な a.f. と呼ぶ。

[注意8]　$\mathcal{N}_t$-additive functional も同様に定義する。そのとき上の条件の P_x は P_μ にかえてよい。混乱のおこらないかぎり以下では単に a.f. と呼ぶことにする。

定義 1.8　$(X_t,\mathcal{B}_t)$ をマルコフ過程とする。$[0,\infty)\times\Omega\rightarrow[0,\infty)$なる mapping $M(t,\omega)$ が $\mathcal{B}_t$-m.f. であるというのは

$$A(t,\omega)=-\log M(t,\omega)$$

としたとき，$A(t,\omega)$ が a.f. になることである。この $A(t,\omega)$ が，almost a.f.，positive a.f. 又は continuous a.f. になるにしたがって，$M(t,\omega)$ は almost m.f.，contracting m.f. 及び continuous m.f. と呼ぶ。

$M(t,\omega)$がcontracting m.f. であるということは，$\omega\in\Omega'$ に対して

$$M(t,\omega)\leqq 1$$

となることである。

m.f. に関し次の定理は基本的である (cf. Dynkin [1], Kunita-Watanabe [1])。

定理 1.2　$(X_t,\mathcal{B}_t,\zeta)$ を S上の standard process とする。M_t は X_t の m.f. であって，条件

Sem. on Probab.
Vol.23- I 1966年
P1-137

$$E_x[M_t \chi_{\{t<\zeta\}}] \leq 1$$

をみたしているとしよう。そのとき，S上の *standard process* $(\dot{X}_t, \dot{\mathcal{B}}_t, \dot{\zeta})$ が存在して

$$\dot{P}_x[\dot{X}_t \in B,\ t<\dot{\zeta}] = E_x[M_t \chi_{\{t<\zeta\}\cap\{X_t\in B\}}]$$

となる。そのような *process* は *equivalence* を除いて *unique* である。

定義 1.9　$\dot{X}_t$ を X_t の M_t-*subprocess* と呼ぶ。

次に，*Markov time* σ が条件 "$t<\sigma(\omega)$ ならば $\sigma(\omega)=t+\sigma(\theta_t\omega)$" を満たすとき，<u>*quasi-hitting time*</u> という。

又，*Markov time* σ が任意の $\sigma_n \uparrow \sigma$ に対し，(σ_n は *Markov time* とする)

$\sigma(\omega)<\infty$ ならば $\exists n,\ \sigma_n(\omega)=\sigma(\omega)$　となるとき

<u>*non-accessible* な *Markov time*</u> という。例えば X_t が *quasi-left continuous* のとき，$\sigma<\infty$ ならば $X_\sigma \neq X_{\sigma-}$ となるような *Markov time* σ は *non-accessible* である。

§1.2 *Lévy system* と *jump* に関連した種々の分布法則

第2章において *branching Markov process* を論ずるが，我々はそれをある大きな空間の上にマルコフ過程と考え，粒子の分裂はその空間に於けるマルコフ過程の *path* の *jump* としてとらえる方法を用いる。そのため不連続な *path* をもったマルコフ過程の理論が必要になってくる。この節ではそれに関連した基本的なことがらをまとめて論じておくことにする。

$(X_t, \mathcal{B}_t, P_x)$ は S上の強マルコフ過程であって，確率 1 で $X_t(\omega)$ は左極限をもっているとしよう。

$n(x,dy)$ は $S\times S$ 上の正の *kernel** で $n(x,\{x\})=0$, $(\forall x\in S)$ をみた

---

*)　$n(x,dy)$ on $S\times S$ が

1)　$B\in\mathcal{B}(S)$ をとめると $n(x,B)$ は x の $\mathcal{B}(S)$-可測函数

2)　$x\in S$ をとめると B に関し $\mathcal{B}(S)$ 上の測度

となっているとき，$S\times S$ 上の *kernel* と呼ぶ。

Sem. on Probab.
Vol.23-Ⅰ 1966年
P1-137

すとし，$A_t(\omega)$ は X_t の non-negative continuous additive functional とする。

定義 1.10　$\mathcal{B}_0^+(S\times S)=\{f: S\times S$ 上の $\mathcal{B}(S\times S)$-可測な non-negative functionであって，$f(x,x)=0$，$({}^\forall x\in S)\}$ とし，$f\in\mathcal{B}_0^+(S\times S)$ に対し，

(1.1)　$$Nf(x)=\int_S n(x,dy)f(x,y)$$

とおく。そのとき，任意の $f\in\mathcal{B}_0^+(S\times S)$ に対し

(1.2)　$$E_x\Big[\sum_{s\le t}f(X_{s-},X_s)\Big]=E_x\Big[\int_0^t Nf(X_s)\,dA_s\Big]$$

が成立するならば，$\{n(x,dy),A_t\}$ をマルコフ過程 X_t の Lévy system と呼ぶ。

Lévy system の存在に関しては次の定理が知られている（Motoo [1]，S.Watanabe [1]）.

定理 1.3　$(X_t,\mathcal{B}_t)$ は S 上の Hunt process で条件：

(I)　S 上に正の Borel measure が存在して，ある $\alpha>0$ に対し $m(B)=0$ なることと，

$$G_\alpha(x,B)\equiv E_x\Big[\int_0^\infty e^{-\alpha t}\chi_B(X_t)\,dt\Big]=0$$

なることが同等である。

をみたすとしよう。そのとき X_t の Lévy system $(n(x,dy),A)$ が存在する。

第２章で我々が考える Branching Markov process では構成の仕方（第６章参照）から，Lévy system の存在は明らかな場合が多い。

以下では $(X_t,\mathcal{B}_t)$ は強マルコフ過程であって，Lévy system が存在することを仮定しよう。

$\{n(x,dy),A_t\}$ を Lévy system とすると，任意の $\alpha\ge 0$，任意の Markov time T に対し

(1.3)　$$E_x\Big[\sum_{s\le T}e^{-\alpha s}f(X_{s-},X_s)\Big]=E_x\Big[\int_0^T e^{-\alpha s}Nf(X_s)\,dA_s\Big]$$

が全ての $f\in\mathcal{B}_0^+(S\times S)$ に対してなりたつ。

Sem. on Probab.
Vol.23-Ⅰ 1966年
P1-137

さて，$D \subset S$ を S のある開集合とし，D からの first leaving time を τ_D としよう。すなわち

(1.4) $\tau_D(\omega) = \inf\{t;\ X_t(\omega) \notin D\}$，　（$=\infty$，$\{\ \}$ が空のとき）

そのとき，$x \in D$ として，P_x に関する $X_{\tau_D^-}$，X_{τ_D}，τ_D の同時分布を考察しよう.

$$B_1 \subset D, \quad B_2 \subset S - D \quad \text{として}$$

(1.6) $$f(x, y) = \chi_{B_1}(x)\,\chi_{B_2}(y)$$

とおき，$T = \tau_D$ とすると，(1.3)は

(1.7) $$E_x[e^{-\alpha\tau_D};\ X_{\tau_D^-} \in B_1,\ X_{\tau_D} \in B_2]$$
$$= E_x\left[\int_D^{\tau_D} e^{-\alpha t}\chi_{B_1}(X_s)\,n(X_s, B_2)\,dA_s\right]$$

となる。故に　$B_2 = S - D$　として

(1.8) $$E_x[e^{-\alpha\tau_D};\ X_{\tau_D}- \in B_1] = E_x\left[\int_0^{\tau_D} e^{-\alpha t}\chi_{B_1}(X_s)\,n(X_s, S-D)\,dA_s\right]$$

を得る。

そこで，$x \in D$，　$dy \in S - D$　に対し

(1.9) $$\Pi_D(x, dy) = \frac{n(x, dy)}{n(x, S-D)}$$

とおくと，(1.7)，(1.8)により

(1.10) $$E_x[e^{-\alpha\tau_D};\ X_{\tau_D^-} \in B_1,\ X_{\tau_D} \in B_2]$$
$$= E_x\left[\int_0^{\tau_D} e^{-\alpha s}\chi_{B_1}(X_s)\,n(X_s, S-D)\,\Pi_D(X_s, B_2)\,dA_s\right]$$
$$= E_x[e^{-\alpha\tau_D}\chi_{B_1}(X_{\tau_D^-})\,\Pi_D(X_{\tau_D^-}, B_2)]$$

を得る。

すなわち，次の定理が証明された。

<u>定理 1.4</u>　　D を S のある open set とし，$x \in D$ とすると，すべての

Sem. on Probab.
Vol.23-Ⅰ　1966年
P1-137

$B_1, B_2 \in \mathcal{B}(S)$，$B_1 \subset D$，$B_2 \subset S-D$ と $\alpha > 0$ に対して

$$(1.10)\quad E_x[e^{-\alpha\tau_D}\chi_{B_1}(X_{\tau_D^-})\chi_{B_2}(X_{\tau_D})] = E_x[e^{-\alpha\tau_D}\chi_{B_1}(X_{\tau_D^-})\Pi_D(X_{\tau_D^-}, B_2)]$$

がなりたつ。こゝで Π_D は (1.9) で定義された。

この定理から直ちに

<u>Corollary</u>　記号は定理 1.4 と同じとして

$$(1.11)\quad P_x[X_{\tau_D} \in B_2 \mid X_{\tau_D^-}] = \Pi_D(X_{\tau_D^-}, B_2), \quad a.s.\ P_x \text{ on } \{X_{\tau_D^-} \in D\}$$

がなりたち，τ_D と X_{τ_D} は $X_{\tau_D^-} \in D$ が与えられたとして，条件付独立である。すなわち

$$(1.12)\quad E_x[e^{-\alpha\tau_D}\chi_{B_2}(X_{\tau_D}) \mid X_{\tau_D^-}] = E_x[e^{-\alpha\tau_D} \mid X_{\tau_D^-}]\, E_x[\chi_{B_2}(X_{\tau_D}) \mid X_{\tau_D^-}]$$
$$a.s.\ P_x \text{ on } \{X_{\tau_D^-} \in D\}$$

[証明]　(1.11) は (1.10) から明らか。(1.12) を示そう。任意の $B_1 \subset D$ に対し

$$E_x[E_x[e^{-\alpha\tau_D} \mid X_{\tau_D^-}]\,\Pi_D(X_{\tau_D^-}, B_2)\,\chi_{B_1}(X_{\tau_D^-})]$$

$$= E_x[e^{-\alpha\tau_D}\chi_{B_1}(X_{\tau_D^-})\,\Pi_D(X_{\tau_D^-}, B_2)]$$

$$= E_x[e^{-\alpha\tau_D}\chi_{B_1}(X_{\tau_D^-})\,\chi_{B_2}(X_{\tau_D})] \qquad (\text{by } (1.10))$$

$$= E_x[E_x[e^{-\alpha\tau_D}\chi_{B_2}(X_{\tau_D}) \mid X_{\tau_D^-}]\,\chi_{B_1}(X_{\tau_D^-})]$$

となる。従って

$$(1.13)\quad E_x[e^{-\alpha\tau_D}\chi_{B_2}(X_{\tau_D}) \mid X_{\tau_D^-}]$$

$$= E_x[e^{-\alpha\tau_D} \mid X_{\tau_D^-}]\,\Pi_D(X_{\tau_D^-}, B_2), \quad a.s.\ P_x \text{ on } \{X_{\tau_D^-} \in D\}$$

故に (1.11) に注意すれば (1.13) は (1.12) である。

<u>[死点への *jump* 法則]</u>　*Lévy system* による表現式 (1.10) の特別な場合への応用として，*path* が死点 Δ へ *jump* するときを考える。

$\Delta \in S$ を死点とし，X_t は S 上のマルコフ過程で *Hunt* の条件 (A) をみたしているとしよう。$f \in \mathcal{B}(S)$，$f \geq 0$，$f(\Delta) = 0$ として

Sem. on Probab.
Vol.23-Ⅰ 1966年
P1-137

$$f(x,y) = f(x)\chi_{\{\Delta\}}(y)$$

とおき，$T=\zeta$ とすると (1.3) からただちに，$x \in S-\{\Delta\}$ に対し

(1.14) $$E_x[e^{-\alpha\zeta} f(X_{\zeta-})] = E_x\left[\int_0^\zeta e^{-\alpha s} n(X_s, \{\Delta\}) f(X_s)\, dA_s\right]$$

を得る。さらに，

(1.15) $$k(x) = n(x, \{\Delta\}) \quad , \quad x \in S-\{\Delta\}$$

とおくことにすると

(1.14′) $$E_x[e^{-\alpha\zeta} f(X_{\zeta-})] = E_x\left[\int_0^\zeta e^{-\alpha s} k(X_s) f(X_s)\, dA_s\right]$$

と書くことが出来る。

さて，今考えているマルコフ過程 X_t が $S-\{\Delta\}$ 上の *conservative* な *Hunt* の条件 (A) をみたすマルコフ過程 $\widetilde{X}_t$ の $e^{-\widetilde{\varphi}_t}$-*subprocess* になっているとしよう。そのとき，(1.14′) がどうなるか考えてみよう。こゝで $\widetilde{\varphi}_t$ は $\widetilde{X}_t$ の *non-negative continuous* な *additive functional* である。

このとき，X_t は $\widetilde{X}_t$ より次のようにして構成することが出来る。

$\widetilde{X}_t$ とは独立で $P_x[Z \in ds] = e^{-s}ds$ となる確率変数 $Z(\omega)$ を考えて

$$T(\omega) = \inf\{t;\ \widetilde{\varphi}_t(\omega) \geq Z(\omega)\}$$

とおき

$$\begin{aligned} \dot{X}_t &= \widetilde{X}_t \quad , \quad t \leqq T \text{ のとき} \\ &= \Delta \quad , \quad t \geqq T \text{ のとき} \end{aligned}$$

とすると，$(\dot{X}_t, T, \widetilde{P}_x)$ は (X_t, ζ, P_x) の一つの表現をあたえる。

そこで，$\widetilde{X}_t$ の確率連続性に注意すると，任意の $f \in \mathcal{B}(S)$，$f(\Delta)=0$ に対し

(1.16) $$\begin{aligned} E_x[e^{-\alpha\zeta} f(X_{\zeta-})] &= \widetilde{E}_x[e^{-\alpha T} f(\widetilde{X}_{T-})] \\ &= \widetilde{E}_x\left[\int_0^\infty e^{-\alpha t} e^{-\widetilde{\varphi}_t} f(\widetilde{X}_t)\, d\widetilde{\varphi}_t\right] \end{aligned}$$

を得る。$\dot{\varphi}_t = \widetilde{\varphi}_{t\wedge T}$ とおくと，$\dot{\varphi}_t$ は $\dot{X}_t$ の *additive functional* であるから，それに対応する X_t の *additive functional* を φ_t と書くことにする。

$$\widetilde{E}_x\left[\int_0^\infty e^{-\alpha t} e^{-\widetilde{\varphi}_t} f(\widetilde{X}_t)\, d\widetilde{\varphi}_t\right] = \widetilde{E}_x\left[\int_0^T e^{-\alpha t} f(\dot{X}_t)\, d\dot{\varphi}_t\right]^{*)}$$

---

*) $\widetilde{E}_x[t<T \mid \mathcal{B}_t] = e^{-\widetilde{\varphi}_t}$ であることに注意。

Sem. on Probab.
Vol.23-Ⅰ 1966年
P1-137

であることに注意すると，(1.16) から

(1.17) $$E_x[e^{-\alpha\zeta}f(X_{\zeta-})] = E_x\left[\int_0^\zeta e^{-\alpha t} f(X_t)\, d\varphi_t\right]$$

を得る。

従って，(1.14') と (1.17) とから，この場合には

(1.18) $$\varphi_t = \int_0^t k(X_s)\, dA_s = \int_0^t n(X_s, \{\Delta\})\, dA_s$$

となっていることがわかった。

さて，次に死点 Δ への jump があるマルコフ過程で Hunt の条件 (A) をみたす X_t は死点へ jump をしない standard process $\widetilde{X}_t$ から killing によって得られることを以下で注意しよう。

X_t の multiplicative functional $M_t = \chi_{\{\zeta > t\}}$ を考えて，Ito-Watanabe [1] における分解

$$M_t = M_t^{(0)} M_t^{(1)}$$

を施す。この場合には

$$1 - E_x[M_t] = P_x[t \geqq \zeta] = E_x\left[\int_0^t k(X_s) M_s\, dA_s\right]$$

であるから，

$$M_t^{(0)} = M_t \cdot \exp\int_0^t \frac{k(X_s)M_s}{M_s}\, dA_s = \chi_{\{\zeta > t\}} \exp\int_0^t k(X_s)\, dA_s$$

となることがわかる。

X_t の $M_t^{(0)}$-subprocess を $\widetilde{X}_t$ とすれば，これは死点へ jump をしない standard process である。X_t は $\widetilde{X}_t$ から $M_t^{(1)} \leqq 1$ による killing によって得られる。

特に $S-\{\Delta\}$ が compact であって，Δ が $S-\{\Delta\}$ の孤立点となっていて，X_t の semi-group T_t が $C(S-\Delta)$ を $C(S-\Delta)$ へ移すようなときには，$\widetilde{X}_t$ は $S-\{\Delta\}$ 上の conservative な Hunt の (A) をみたす process となる。(cf. Ito-Watanabe [1], p. 29, 及びこの note 第6章)。

以上の結果のうちで，次の特別の場合がよく用いられるので，それを定理としてあげておくことにしよう。

<u>定理 1.5</u>　S は compact とし，$\{\Delta\}$ は S の孤立点として，$\bar{S} = S \cup \{\Delta\}$ とする。そのとき，

Sem. on Probab.
Vol.23-Ⅰ 1966年
P1-137

(i) Hunt の条件 (A) をみたし，Δ を死点としてもつ $\bar{S}$ 上のマルコフ過程 X_t が S 上の conservative process $\tilde{X}_t$ の $e^{-\int_0^t k(\tilde{X}_s)ds}$-subprocess となっているときには，任意の $f \in C(S)$ に対し

$$(1.19) \qquad E_x[e^{-\alpha\zeta} f(X_{\zeta-})] = E_x\left[\int_0^\zeta e^{-\alpha s} f(X_s) k(X_s) ds\right]$$

$$= \tilde{E}_x\left[\int_0^\infty e^{-\alpha t} e^{-\int_0^t k(\tilde{X}_s)ds} f(\tilde{X}_t) k(\tilde{X}_t) dt\right]$$

がなりたつ。*)

(ii) 逆に Δ を死点にもつ $\bar{S}$ 上のマルコフ過程 X_t が Hunt の条件 (A) をみたし，その semi-group が $C(S)$ を $C(S)$ に移し，(1.19) の前半の式がなりたつならば，S 上に Hunt の条件 (A) をみたす conservative なマルコフ過程 $\tilde{X}_t$ が存在し X_t は $\tilde{X}_t$ の $e^{-\int_0^t k(\tilde{X}_s)ds}$-subprocess となる。

[推移確率の微分としての Lévy 測度]

ラフな言い方をすると，$\rho(x, B) > 0$ （但し ρ は S のある距離）に対し

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{P(t, x, B)}{t} = n(x, B)$$

が存在するときには，$(n(x,B);\ A_t \equiv t \wedge \zeta)$ は Lévy system になる。このことは，ある条件の下で，S. Watanabe [1] で論じてあるが，以下ではこのように $n(x,B)$ を定義したときにもやはり，(1.10) の表現式が成立することを示そう。以下の事実は Ikeda-Watanabe [1] による。

今，S を compact とし，ρ を S の一つの距離とする。S 上のマルコフ過程 X_t の semi-group T_t は $C(S)$ 上の Hille-Yosida の意味の強連続な semi-group になっているとする。従って X_t は Hunt の条件 (A) をみたしている。

今後，S のある open set D を固定して考える。さらに次の条件をみたすとしよう。

[仮定 A]　ある kernel $n(x, B)$，$x \in D$，$B \subset S - D$ が存在して，$f \in C(S)$ かつ $\rho(D, s[f]) > 0$，（但し $s[f]$ は f の support）をみたす f に対し

(1) $\dfrac{T_t f}{t}$ は t について $x \in D$ で一様に有界，すなわち

*) cf. Sato-Nagasawa [1]

Sem. on Probab.
Vol.23- I 1966年
P1-137

$$\sup_{t>0} \sup_{x\in D} \left| \frac{T_t f(x)}{t} \right| < +\infty$$

(2) $\lim_{t\downarrow 0} \frac{T_t f(x)}{t} = \int n(x, dy) f(y)$ が $x\in D$ に対してなりたつ。

そのとき，Ikeda-Watanabe [1] (Th. 1) により，$B\in\mathcal{B}(S)$，$\rho(B, D)>0$ とすると，

$$E_x[e^{-\alpha\tau_D}, X_{\tau_D}\in B] = E_x\left[\int_0^{\tau_D} e^{-\alpha t} n(X_t, B)\,dt\right] \tag{1.19}$$

がなりたつ。

［仮定B］ X_t の D 上の subprocess X_t^D （すなわち X_t を D からの first leaving time τ_D で殺した D 上の standard process． これは，D を一点 compact 化した空間 $\bar{D}$ 上で考えれば Hunt の(A) をみたしている）は定理1.3 でのべた仮定(I) をみたしている。

定理 1.6 X_t は［仮定A］，［仮定B］をみたしているとしよう。そのとき，$B_1, B_2\in\mathcal{B}(S)$，$\rho(B_2, D)>0$，$B_1\subset D$ に対し，

$$E_x[e^{-\lambda\tau_D}; X_{\tau_D-}\in B_1, X_{\tau_D}\in B_2] = E_x\left[\int_0^{\tau_D} e^{-\lambda s}\chi_{B_1}(X_s)\, n(X_s, B_2)\,ds\right] \tag{1.20}$$

がなりたつ。

この証明は Ikeda-Watanabe [1] の Th. 2 の証明とまったく同様に出来る。簡単に筋書きだけを書いておくことにしよう。

$$u(x) = E_x[e^{-\lambda\tau_D}; X_{\tau_D-}\in B_1, X_{\tau_D}\in B_2]$$
$$v(x) = E_x[e^{-\lambda\tau_D}; X_{\tau_D-}\in D-B_1, X_{\tau_D}\in B_2]$$
$$w(x) = E_x[e^{-\lambda\tau_D}; X_{\tau_D}\in B_2]$$

とおくと，$w(x) = u(x)+v(x)$ であって，(1.) より

$$w(x) = E_x\left[\int_0^{\tau_D} e^{-\lambda t} n(X_t, B_2)\,dt\right] \tag{1.21}$$

である。

Ikeda-Watanabe [1] と同様な簡単な計算で $u(x)$, $v(x)$ は X_t^D に関して λ-excessive になることがわかる。そうすると additive functional の一般論により X_t^D-process の２つの additive functional φ_t, ψ_t が存在し

Sem. on Probab.
Vol.23-Ⅰ 1966年
P1-137

て

$$u(x) = E_x\left[\int_0^{\tau_D} e^{-\lambda t}\, d\varphi_t\right]$$

$$v(x) = E_x\left[\int_0^{\tau_D} e^{-\lambda t}\, d\psi_t\right]$$

となる。

X_t^D は仮定(I)をみたしているから，その測度を m とし，B_1 は $m(\partial B_1) = 0$ をみたす closed set とする。このような B_1 に対して(1.20)を示せば，(1.20)の両辺は B_1 に関し $\mathcal{B}(D)$ 上の測度であることに注意して，すべての $B_1 \subset D$，$B_1 \in \mathcal{B}(D)$ で成りたつ。

B_1 への hitting time を σ_{B_1} とすると，Ikeda-Watanabe[1]と同様にして

$$u(x) = E_x[e^{-\lambda\sigma_{B_1}} u(X_{\sigma_{B_1}})\ ;\ \sigma_{B_1} < \tau_D]$$

$$v(x) = E_x[e^{-\lambda\sigma_{\overline{D-B_1}}} u(X_{\sigma_{\overline{D-B_1}}})\ ;\ \sigma_{\overline{D-B_1}} < \tau_D]$$

を示すことが出来る。このとき，再び additive functional の一般論により

$$u(x) = E_x\left[\int_0^{\tau_D} e^{-\lambda t}\, \chi_{B_1}(X_t)\, d\varphi_t\right]$$

$$v(x) = E_x\left[\int_0^{\tau_D} e^{-\lambda t}\, \chi_{\overline{D-B_1}}(X_t)\, d\psi_t\right]$$

がなりたつ。このことと，(1.21)とから additive functional の一意性により($m(\partial B_1) = 0$ に注意して)

$$\varphi_t = \int_0^{t\wedge\tau_D} \chi_{B_1}(X_s)\, n(X_s, B_2)\, ds$$

$$\psi_t = \int_0^{t\wedge\tau_D} \chi_{D-B_1}(X_s)\, n(X_s, B_2)\, ds$$

となり，(1.20)が示される。

Sem. on Probab.
Vol.23-Ⅰ 1966年
P1-137

第2章 Branching Markov process の定義

§2.1 Branching Markov process の定義

宇宙線のカスケード・シャワー，原子炉における中性子の増殖，人口増加等々に現われる分枝現象の模型になる確率過程をさきに第0章でのべた立場で定義しよう。この章で証明は別として結果は大筋としては Ikeda-Nagasawa-Watanabe [1] に従っている。

先ず状態空間の取り方から考えよう。Sを第2可算性の公理をみたす compact Hausdorff space としよう。よく知られているように，そのような空間は metrizable である。その metric を ρ_1 で表わそう。Sのn重直積$S^{(n)}$，すなわち，

$$S^{(n)} = \underbrace{S \times S \times \cdots \times S}_{n}$$

を考え，その位相は product topology とする。$S^{(n)} \ni (x_1, \cdots, x_n)$ の component の permutation によって生ずる equivalent relation をRとする。Rによる$S^{(n)}$の quotient space をS^nとする，すなわち

$$S^n = S^{(n)}/R \ .$$

このとき，S^nの位相は quotient topology とする。この equivalent class は compact（実は有限ケ）である。$A \subset S^{(n)}$ なる closed set Aをとると，

$$R[A] = \{y : x \sim y(R) \ \text{for some} \ x \in A\}$$

は

$$R[A] = \bigcup_{\pi} \{(x_{\pi(1)}, \cdots, x_{\pi(n)}) ; \ (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in A\}$$

と表わされる。上の sum はn文字の permutation π 全体についてとる。ところで $\{(x_{\pi(1)}, \cdots, x_{\pi(n)}) ; (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in A\}$ は closed で $\bigcup_{\pi}$ は有限和であるので $R[A]$ は closed である。従ってS^nはまた第2可算性の公理をみたす compact Hausdorff space になる。*1) 従って，S^nも metrizable で，その距離をρ_nとしよう。さらに extra point ∂ を別に考え，$S^0 = \{\partial\}$とする。

---

*1) Kelley [1], p148, pp 97～99 参照。

Sem. on Probab.
Vol.23-Ⅰ 1966年
P1-137

こゝでは後々の便宜のために $\bigcup_{n=0}^{\infty}\mathcal{S}^n$ につぎのような metric ρ を導入する。

$$
(2.1)\qquad \rho(\bar{x},\bar{y})=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\dfrac{\rho_n(\bar{x},\bar{y})}{1+\rho_n(\bar{x},\bar{y})}, & \text{if}\quad \bar{x},\bar{y}\in\mathcal{S}^n,\\[2mm] |n-m|, & \text{if}\quad \bar{x}\in\mathcal{S}^n,\ \bar{y}\in\mathcal{S}^m,\ n\neq m.\end{cases}
$$

$\bigcup_{n=0}^{\infty}\mathcal{S}^n$ は locally compact space である。$\bigcup_{n=0}^{\infty}\mathcal{S}^n$ の Δ による one-point compact 化 S：すなわち

$$
S=\bigcup_{n=0}^{\infty}\mathcal{S}^n\cup\{\Delta\}
$$

を考える。今後 $\bigcup_{n=0}^{\infty}\mathcal{S}^{(n)}$ と $\bigcup_{n=0}^{\infty}\mathcal{S}^n$ の対応をしばしば用いる。そのとき，$\bigcup_{n=0}^{\infty}\mathcal{S}^{(n)}$ から $\bigcup_{n=0}^{\infty}\mathcal{S}^n$ への projection γ，すなわち，各 n に対して

$$
(2.2)\qquad \begin{aligned}\gamma:\ \mathcal{S}^{(n)}\ni\bar{x}=(x_1,\cdots,x_n)\longrightarrow\gamma(x_1,\cdots,x_n)\\ =\{\bar{y};\ \bar{y}\sim\bar{x}(R)\}\in\mathcal{S}^n\end{aligned}
$$

は重要な役割を果たす。

[Remark]　上のような空間 S を考え，n 個に分裂した粒子は，$\mathcal{S}^n$ の中を運動していると理解する考えは，Moyal [2] によって始められ，Skorohod [1] によって有効に用いられた。こゝで $\mathcal{S}^n$ すなわち，$\mathcal{S}^{(n)}$ の R による quotient space を考えることは，分裂した個体間の区別をつけないことを意味する。

つぎに，$\mathcal{S}$，$\mathcal{S}^n$，S 上の関数空間について次の記号を導入する。

$\mathbb{B}(\mathcal{S})$ ＝ $\mathcal{S}$ 上の有界可測関数の全体 *1)

$\mathbb{B}(S)$ ＝ S 上の有界可測関数の全体

$\mathbb{B}(\mathcal{S}^n)$ ＝ $\mathcal{S}^n$ 上の有界可測関数の全体

$\mathbb{C}(\mathcal{S})$ ＝ $\mathcal{S}$ 上の有界連続関数の全体

$\mathbb{C}(S)$ ＝ S 上の有界連続関数の全体

$\mathbb{C}_0(S)$ ＝ S 上の有界連続関数で $f(\Delta)=0$ となるものの全体

$\mathbb{C}(\mathcal{S}^n)$ ＝ $\mathcal{S}^n$ 上の有界連続関数の全体

各々の空間で正の元の全体を＋をつけてあらわす。例えば

---

*1) 以下も同じであるが，ノルムは通常のとおり

$$
\|f\|=\sup_{x\in\mathcal{S}}|f(x)|
$$

とする。

Sem. on Probab.
Vol.23- I　1966年
P1-137

$$\mathbb{B}(\mathcal{S})^+ = \{ f \in \mathbb{B}(\mathcal{S}),\quad f \geqq 0 \}$$ 等々。

次に

$$\mathbb{B}^*(\mathcal{S}) = \{ f \in \mathbb{B}(\mathcal{S}),\quad \|f\| < 1 \}$$
$$\mathbb{C}^*(\mathcal{S}) = \{ f \in \mathbb{C}(\mathcal{S}),\quad \|f\| < 1 \}$$

$$\overline{\mathbb{B}}^*(\mathcal{S}) = \{ f \in \mathbb{B}(\mathcal{S}),\quad \|f\| \leqq 1 \}$$
$$\overline{\mathbb{C}}^*(\mathcal{S}) = \{ f \in \mathbb{C}(\mathcal{S}),\quad \|f\| \leqq 1 \}$$ とおく。

次に *branching Markov process* を定義するのに有用な $\overline{\mathbb{B}}^*(\mathcal{S})$ から $\mathbb{B}(S)$ への *mapping* を導入する。*2)

$$(2.3)\qquad \wedge : \overline{\mathbb{B}}^*(\mathcal{S}) \ni f \longrightarrow \hat{f}(\bar{x}) = \begin{cases} 1 & \bar{x} = \partial \\ \prod_{i=1}^{n} f(x_i) & \bar{x} \in \mathcal{S}^n,\ \bar{x} \ni (x_1, \cdots x_n) \\ 0 & \bar{x} = \Delta \end{cases}$$

$f \in \mathbb{C}^*(\mathcal{S})$ ならば $\hat{f} \in \mathbb{C}_0(S)$ である。

次に $\hat{f}_{|\mathcal{S}^n}$ は $\hat{f}$ の $\mathcal{S}^n$ への制限によって出来る関数をあらわす。この記号は一般に $g \in \mathbb{B}(S)$ に対して $g_{|\mathcal{S}^n}$ として全く同じ意味に用いる。

また，$\mathcal{S}$, $\mathcal{S}^n$, S 等の *topological* σ-*field* を $\mathcal{B}(\mathcal{S})$, $\mathcal{B}(\mathcal{S}^n)$, $\mathcal{B}(S)$ なる記号を用いる。上の関数空間で可測といったのはそれぞれこれらに関するものである。

そこで S 上の *Markov process* $X = (\Omega, X_t, \mathcal{B}_t, \theta_t, \zeta, P_{\bar{x}}, \bar{x} \in S)$ を考

---

*2) この記号は Skorohod [1] で ”$\smile$“ が用いてある。実は Ikeda-Nagasawa-Watanabe [1] ではしばしば出て来るので書くのに便利であろうと考えて，このように ”$\wedge$“ にした。ところが，後でのべるように，(2.3) で積を和におきかえたようなものを考える必要が出て来て，それらに対をなす意味から ”$\smile$“ にした方が便利である。それでは Skorohod [1] と変えた意味がなくなるのだが，既に日本ではわれわれの記号も使われ始めているようなので，このノートでは Ikeda-Nagasawa-Watanabe [1] に従った記号を用いることにする。

Sem. on Probab.
Vol.23-Ⅰ 1966年
P1-137

えよう。これをしばしば Markov process X，または Markov process X_t と略称する。

[*Definition*] 2.1 (branching Markov process)。 S上の Markov process X_t の半群 $\{T_t\ ;\ t \geqq 0\}$ がつぎの条件をみたすとき，X_t を *branching Markov process* と呼ぶ：

$$(2.4) \qquad T_t \hat{f} = \widehat{(T_t \hat{f}|_{S})} \quad , \qquad f \in \overline{\mathbb{B}}^*(S) \text{。}$$

この定義の意味するところは簡単には，第0章でのべたが，一見した所では応用の方で分枝過程と呼ばれているものとの関係はわからない。それらについては §2.3で詳しくふれるので，こゝではのべない。（2.4）の関係は Skorohod [1] では，はっきりこの形で用いられているが，それより先に Moyal [1], [2] 等，主としてイギリス系の確率論関係者の間では，

$$g \in \mathbb{B}(S),\quad g \geqq 0,\quad \lambda \geqq 0 \quad \text{とするとき,}$$
$$f = e^{-\lambda g}$$

の形の関数に対して成立つ式として用いられているようである。その外，特別の f に対しては後で詳しくのべるように分枝過程の諸量の確率法則を決定する方程式を導くために多くの研究者によって用いられている。

一般的な説明に進む前に Definition 2.1 と Kolmogoroff-Dmitriev [1] の場合との関係を先ずのべよう。

Example 2.1 (連続系数の Galton-Watson process)。 いまSが一点aからなる集合，すなわち$\{a\}$とする。このとき，$n \geqq 1$ のとき S^n は一点の集合：$\{(\underbrace{a, a, \cdots, a}_{n\text{ケ}})\}$ となる。そこで $n \geqq 1$ に対しては S^n はnと同一視出来る。S^0 は 0 と同一視し，$\{\Delta\}$ を∞と同一視する。そのときは

$$S \sim \{0, 1, 2, \cdots +\infty\} \equiv \mathbb{Z}^+$$

なる対応が得られる。すなわちSは 0 又は正整数の集合の一点 compact 化である。このときSすなわち $\mathbb{Z}^+$ 上の branching Markov process を *(連続系数の) Galton-Watson process* と呼ぶ。これは Harris [1] で Markov branching process と呼ばれているものであるが，こゝでは離散系数の場合にならって上のように呼ぶことにする。

いま X_t の推移確率を $P(t, x, dy)$ とすれば，

Sem. on Probab.
Vol.23- I 1966年
P1-137

$$P(t,\ i,\ n) = P(t,\ \underbrace{(a,\cdots,a)}_{i\text{ケ}},\ \underbrace{\{(a,\cdots,a)\}}_{n\text{個}})$$

とおくことが出来る。すなわち $P(t, i, n)$ は Galton-Watson processを $\mathbb{Z}^+$ 上で考えたときの推移確率である。Kolmogoroff-Dmitriev [1] はつぎの式で Galton-Watson process をつぎの式で定義した。

$$(2.5)\qquad P(t,i,k) = \sum_{\substack{r_1+\cdots+r_i=k \\ r_j\in\mathbb{Z}^+,\ j=1,2,\cdots,i}} \prod_{m=1}^{i} P(t,1,r_m), \qquad t>0;\ \ i,k\in\mathbb{Z}^+ .$$

この場合は (2.4)と(2.5)は同等である。この事実の証明は，一般の場合にこれからしばしば用いる方法と同じであるが，最も簡単で，しかも典型的な場合であるので重複をいとわずその概略をつぎにのべる。

$0\le\lambda<1$ なる実数を考え，S 上の関数 $f(x)=\lambda$ を考える。このとき，

$$\hat{f}(n) = \lambda^n \quad , \qquad n\in\mathbb{Z}^+$$

に先ず注意する。従って，$i\in\mathbb{Z}^+$ に対して

$$\widehat{T_t \hat{f}|_S}(i) = \Big(\sum_{j=0}^{\infty} P(t,1,j)\,\lambda^j\Big)^n$$

$$(2.6)\qquad = \sum_{r_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_i=0}^{\infty} P(t,1,r_1)\cdots P(t,1,r_i)\,\lambda^{r_1+\cdots+r_i}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k \sum_{\substack{r_1+\cdots+r_i=k \\ r_j\in\mathbb{Z}^+,\ j=1,\ ,i}} \prod_{m=1}^{i} P(t,1,r_m)$$

一方

$$(2.7)\qquad T_t\hat{f}(i) = \sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k P(t,i,k) \quad , \qquad i\in\mathbb{Z}^+$$

である。

上の (2.6)，(2.7) が任意の $0\le\lambda<1$ に対して成立つことから (2.4)と(2.5)が同等なことが示される。

(2.5) の直観的な意味はつぎのようになる。i 個の粒子が t 時間後に k 個になる確率は，i 個の粒子がそれぞれ独立に t 時間後に $r_1,\cdots,r_i$（ただし $r_1+\cdots+r_i=k$）個になる確率を，その可能な場合についてすべて加えあわせたものに等しい。すなわち，各粒子は互に他に影響されることなく，それぞれは同じ確率法則で分裂，消滅を行なっているということである。

なお，この process はそれ自体が一つの典型であるのみならず，一般の branching Markov process で，ある一つの条件があれば，粒子の個数の変

Sem. on Probab.
Vol.23-Ⅰ 1966年
P1-137

化がこの process で表わされることが示される意味でも重要である。そのことについては § 2.4 参照。従ってこの process については良く研究されている。例えば Harris [1] 参照。またその推移確率の解析的性質は充分弱い仮定の下で Karlin-McGregor [1] によって研究されている。

必ずしも branching Markov process と限らず，S 上の Markov process $\{\Omega, X_t, \mathcal{B}_t, \theta_t, \zeta, P_{\bar{x}};\ \bar{x} \in S\}$ に対して，つぎのような量を定義しよう。

$$
(2.8)\quad \begin{cases} \xi_t(\omega) = n, & \text{if } X_t(\omega) \in S^n, \quad {}^{*1)} \\ e_\Delta(\omega) = \inf\{t;\ X_t(\omega) = \Delta\}, & (\inf \phi = \infty) \\ e_\partial(\omega) = \inf\{t;\ X_t(\omega) = \partial\}, & (\quad \text{〃} \quad) \\ \tau(\omega) = \inf\{t;\ \xi_0(\omega) \neq \xi_t(\omega)\} & (\quad \text{〃} \quad) \\ \tau_0(\omega) = 0,\ \ \tau_1(\omega) = \tau(\omega),\ \ \tau_n(\omega) = \tau_{n-1}(\omega) + \theta_{\tau_{n-1}}\tau(\omega), & n \geqq 2, \\ \tau_\infty(\omega) = \lim_{n \uparrow \infty} \tau_n(\omega) & \end{cases}
$$

[Definition] 2.2　いま X は branching Markov process とする。そのとき，ξ_t，e_Δ，e_∂，τ，τ_n をそれぞれ，つぎのように呼ぶ。

$\xi_t(\omega)$ ： 粒子の個数，

$e_\Delta(\omega)$ ： explosion time （爆発時間），

$e_\partial(\omega)$ ： extinction time（消滅時間），

$\tau(\omega)$ ： first branching time（(最初の) 分枝時間），

$\tau_n(\omega)$ ： n-th branching time （n 回目の分枝時間）.

上のような呼び方をする直観的な意味は S^n，S に対する直観的説明より明らかであろう。また τ の定義は

$$
(2.9)\qquad \tau(\omega) = \inf\{t;\ \rho(X_0(\omega), X_t(\omega)) \geqq 1\},\quad (\inf \phi = \infty),
$$

としても同等であることは $\bigcup_{n=0}^{\infty} S^n$ における ρ の定義より明らか。

次にこれらに関する重要な量が $T_t\hat{f}$ の形であらわされることに注意しよう*2)。

(i)　$f = 1$ とおくと

$$
(2.10)\qquad T_t\hat{f}(\bar{x}) = P_{\bar{x}}[e_\Delta(\omega) > t], \qquad \bar{x} \in S
$$

---

*1)　$X_t(\omega) = \Delta$ のときは便宜上 $\xi_t(\omega) = \infty$ とおく。

*2)　e_∂，τ，τ_n は N_t-Markov time であるが，e_Δ については少し問題がある。そのことはすぐ後に論ずる。

Sem. on Probab.
Vol.23-Ⅰ 1966年
P1-137

右辺を $e_\Delta(t,\bar{x})$, $\bar{x}\in S$ とおき

$$e_\Delta(\infty,\bar{x}) = \lim_{t\uparrow\infty} e_\Delta(t,\bar{x})$$

とする。$1-e_\Delta(\infty,\bar{x}) \equiv P_{\bar{x}}[e_\Delta(\omega)<\infty]$ は（$\bar{x}$から出発した粒子の）explosion probability をあらわす。

(ii) $f=0$ とおけば

(2.11) $T_t\hat{f}(\bar{x}) = P_{\bar{x}}[e_\partial(\omega)\leq t]$.

右辺を $e_\partial(t,\bar{x})$ とおき，

$$e_\partial(\infty,\bar{x}) = \lim_{t\uparrow\infty} e_\partial(t,\bar{x})$$

とする。

$e_\partial(\infty,\bar{x}) \equiv P_x(e_\partial(\omega)<\infty)$ は（$\bar{x}$から出発した粒子の）extinction probability をあらわす。

(iii) $0\leq|\lambda|<1$ に対し $f(x)=\lambda$ とおけば

(2.12) $T_t\hat{f}(\bar{x}) = E_{\bar{x}}[\lambda^{\xi_t(\omega)}] = \sum_{u=0}^{\infty}\lambda^n P_{\bar{x}}[\xi_t(\omega)=n]$.

上式の右辺を $\varphi(\bar{x},t)$ とおく。これは個数 $\xi_t(\omega)$ の generating function に他ならない。

以上の諸量は $x\in\mathcal{S}$ の場合のみが興味がある。実際この場合がわかれば $\bar{x}\in S$ のときは T_t の基本性質からわかる。また(2.4)の関係は，歴史的にみると，これらの諸量の性質として知られていたものである。

定義に関する注意　上の formulation で実際の問題を論ずるとき，問題の性質によっては次のような配慮が必要になる。

今，X_t は S 上の Def. 2.1 の意味の branching Markov process としよう。さらに compact 空間 $\mathcal{S}$ は1点 δ を含み，δ, (δ,δ), $\cdots$, $(\delta,\cdots,\delta)$, $\cdots\in S$ の各点はすべて trap であるか，あるいはこれらの点からでる path はその点をはなれたら必ず ∂ へ行くと仮定する。考える問題の性質によっては X_t が ∂ のみならず δ, $(\delta,\delta)\cdots(\delta\cdots\delta)\cdots$ のどれかに到達したときも粒子がすべて消滅したと考えるのが自然である。このようなときには Def. 2.2 のかわりに

$$\xi'_t(\omega) = \sum_{i=1}^{n}\chi_{\mathcal{S}-\delta}(X_t^{(i)}(\omega)),\quad X_t(\omega)\ni[X_t^{(1)}(\omega),\cdots,X_t^{(n)}(\omega)]\in\mathcal{S}^n \quad \text{のとき}$$

$$n=0,1,2,\cdots$$

$$e'_\partial(\omega) = \inf\{t:\ X_t\in\{\partial,\delta,(\delta,\delta)\cdots(\delta\cdots\delta)\cdots\}\}$$

Sem. on Probab.
Vol.23-Ⅰ 1966年
P1-137

$$= +\infty \qquad\qquad もし \ \{ \ 〃 \ \} = \phi$$

とおき，それぞれ粒子の個数，extinction time と定義する。例えば B.A.Sevast'janov [1]，S.Watanabe [2] であつかわれている問題ではこのような修正が必要になる。（この場合 $\mathcal{S} = D \cup \delta$ は R^n の有界領域の 1 点 compact 化となっている。第 5 章参照）。

尚，このように修正された ξ_t'，e_∂' に対して以前と同様にそれらに関する量は $T_t\hat{f}$ の形にあらわされる。実際

$$f = \begin{cases} 0 & x \in \mathcal{S} - \delta \\ 1 & x = \delta \end{cases}$$

とおけば

$$T_t\hat{f}(\bar{x}) = P_{\bar{x}}(e_{\partial'} \leq t)$$

$$f = \begin{cases} \lambda & x \in \mathcal{S} - \delta \\ 1 & x = \delta \end{cases}$$

とおけば

$$T_t\hat{f}(\bar{x}) = E_{\bar{x}}[\lambda^{\xi_t'}] \quad ：個数の\ moment\ generating\ function$$

となる。

一般に右連続な path をもつ Markov 過程 X_t では，open set への hitting time は N_t-Markov time である。実際 σ を open set G への hitting time とすれば $\{\sigma < t\} = \bigcup_{\substack{r<t \\ 有理数}} \{X_r \in G\} \in N_t$.

このことより e_∂，τ（したがって τ_n）はすべて N_t-Markov time である。ところで e_Δ に関しては，ある種の条件がないとこれが Markov time であることを示すのは困難であるが，例えば次の条件があれば e_Δ は $\bar{N}_t$-Markov time である：

今，

$$\sigma_m = \inf\{t \ : \ X_t \in \bigcup_{n \geq m} \mathcal{S}^n \cup \{\Delta\}\}$$
$$= +\infty \qquad\qquad if \quad \{ \quad \} = \phi$$

は open set への hitting time であるから N_t-Markov time である。又，あきらかに σ_m は単調増加である。

$$\sigma = \lim_m \sigma_m$$

とおくと，σ は N_t-Markov time で $\sigma \leq e_\Delta$ である。

今，

条件[*1)] $\quad P_{\bar{x}}(X_\sigma = \Delta, \ \sigma < \infty) = P_{\bar{x}}(\sigma < \infty)$

Sem. on Probab.
Vol.23-Ⅰ 1966年
P1-137

がみたされると，e_Δ は $\bar{N}_t$-Markov time になる。実際 $\sigma = e_\Delta$ a.s. $P_{\bar{x}}$ がいえることよりわかる。もし X_t が quasi-left continuous であれば，当然この条件はみたされる。

もう一つ，この条件がなりたつための十分条件として，

(2.13) $t > 0$ のとき，$\sup_{x\in S} T_t \hat{0}(x) < 1$ [*2)]

がある。まず (2.13) がなりたてば $f \in C(S)$ で $0 < f \leq \lambda$ (但し $\lambda < 1$) をとるとき $\sup_{x\in S} T_t\hat{f}(x) < 1$ がなりたつ ($t > 0$)。

実際 $x \in S$ とすると

$$T_t\hat{f}(x) = E_x[\hat{f}(X_t) : \tau \leq t]$$

$$+ E_x[\hat{f}(X_t) : \tau > t]$$

$$\leq T_t\hat{0}(x) + \lambda P_x(\tau \geq t)$$

$$= \lambda + (1-\lambda) T_t\hat{0}(x)$$

$$\leq \lambda + (1-\lambda) \sup_{x\in S} T_t\hat{0}(x) < 1$$

すると $T_t\hat{f}(\bar{x}) = \widehat{T_t f|_S}(\bar{x})$ より

$$\lim_{\bar{x}\to\Delta} T_t\hat{f}(\bar{x}) = 0 \qquad \text{がわかる。}$$

故に $\displaystyle\lim_{\bar{x}\to\Delta} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_t\hat{f}(\bar{x})dt = 0$

又 $f > 0$ より $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\lambda t} T_t\hat{f}(\bar{x}) > 0$, $\bar{x} \in S - \{\Delta\}$

もあきらかである。そこで条件の証明であるが，各 $a > 0$ に対し $\sigma \wedge a = \sigma'$, $\sigma_n \wedge a = \sigma_n'$ とおいて

$$P_{\bar{x}}(X_{\sigma_n'} \to X_{\sigma'}) = 1$$

がいえればよい。ところでこのためには

$\forall n$ $\sigma_n'(\omega) < \sigma'(\omega)$ となる ω に対しては $X_{\sigma_n'}(\omega) \longrightarrow \Delta$ であり

又 $\exists n$ $\sigma_n'(\omega) = \sigma'(\omega)$ となる ω に対しては $X_{\sigma_n'}(\omega) \longrightarrow X_{\sigma'}$ は明らかであ

---

*1) この条件は構成のしかたから明らかなことが多い（第6章参照）。

*2) 定義より $\hat{0}(\bar{x}) = \begin{cases} 1 & \bar{x} = \partial \\ 0 & \bar{x} \neq \partial \end{cases}$

Sem. on Probab.
Vol.23-I 1966年
P1-137

ることに注意すると

(2.14) $P_{\bar{x}}(X_{\sigma'} = \Delta,\ \forall n,\ \sigma'_n < \sigma') = P_{\bar{x}}(\forall n,\ \sigma'_n < \sigma')$

がいえればよい。

ところで $G_\lambda \hat{f}(\bar{x}) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_t \hat{f}(\bar{x})\,dt$ とおいて

$$\lim_{m\to\infty} E_{\bar{x}}[G_\lambda \hat{f}(X_{\sigma'_m})] = \lim_{m\to\infty} E_{\bar{x}}[e^{\lambda\sigma'_m}\int_{\sigma'_m}^\infty e^{-\lambda t}\hat{f}(X_t)\,dt]$$

$$= E_{\bar{x}}[e^{\lambda\sigma}\int_\sigma^\infty e^{-\lambda t}\hat{f}(X_t)\,dt] = E_{\bar{x}}[G_\lambda \hat{f}(X_\sigma)]$$

一方 $G_\lambda f(X_{\sigma'_m}) \longrightarrow 0 \quad (X_{\sigma'_m} \longrightarrow \Delta)$ であるから

$$\lim_{m\to\infty} E_{\bar{x}}[G_\lambda \hat{f}(X_{\sigma'_m})] = E_x[G_\lambda \hat{f}(X_{\sigma'});\ \exists n,\ \sigma'_n = \sigma'] .$$

これより $E_{\bar{x}}[G_\lambda \hat{f}(X_{\sigma'});\ \forall n\ \sigma'_n < \sigma'] = 0$

しかし $G_\lambda \hat{f}(\bar{x}) > 0$. $\bar{x} \neq \Delta$ であったから

$= 0 \qquad = \Delta$

このことは (2.14) がなりたつことを意味する。 q.e.d.

再び一般論にかえり，後で必要になる性質を考えよう。

[条件 C.1] ∂, Δ は trap，すなわち

(i) $P_\partial[X_t = \partial,\ t \geqq 0] = 1$

(ii) $P_\Delta[X_t = \Delta,\ t \geqq 0] = 1$

[条件 C.2] e_Δ が Markov time で，任意の $\bar{x} \in S$ に対し，

$$P_{\bar{x}}[\tau_\infty(\omega) = e_\Delta(\omega),\ \tau_\infty(\omega) < \infty] = P_{\bar{x}}[\tau_\infty(\omega) < \infty] .$$

[条件 C.3] 任意の $\bar{x} \in S$，任意の $t \geqq 0$ に対し，

$$P_{\bar{x}}[\tau(\omega) = t] = 0 .$$

これらに関して先ずつぎのことが言える。

Proposition 2.1 X_t は branching Markov process とする。そのとき，∂, Δ は trap である，すなわち (C.1) をみたす。さらに X_t が強マルコフ性を持ち，e_Δ が Markov time ならば，任意の $\bar{x} \in S$ に対して，

(i) $P_{\bar{x}}[X_t = \partial,\ t \geqq e_\partial] = 1$， (ii) $P_{\bar{x}}[X_t = \Delta,\ t \geqq e_\Delta] = 1$，をみたす。

[Proof] $\hat{f}$ の定義と (2.4) より

$$T_t \hat{f}(\partial) = \widehat{T_t \hat{f}|_S}(\partial) = 1 \qquad \text{for} \quad t \geqq 0$$

Sem. on Probab.
Vol.23-Ⅰ 1966年
P1-137

そこで特に $f=0$ とする。(2.11)により

$$T_t\hat{f}(\partial)=P_\partial[X_t=\partial]$$

であるので，

$$P_\partial[X_t=\partial]=1$$

である。そこで X_t の右連続性を用いると，

(2.15) $\qquad P_\partial[X_t=\partial\ ,\quad \text{for } \forall t\geqq 0]=1$ 。

このことは ∂ が "trap" であることを示している。

強 Markov 性を用いるとつぎの変形が出来る。

$$\begin{aligned}
&P_{\bar{x}}[X_t=\partial,\quad \forall t\geqq e_\partial,\quad \text{if } X_s=\partial]\\
&=P_{\bar{x}}[e_\partial=\infty]+P_{\bar{x}}[X_t=\partial,\ \forall t\geqq e_\partial,\ e_\partial<\infty]\\
&=P_{\bar{x}}[e_\partial=\infty]+E_{\bar{x}}[P_{X_{e_\partial}}[X_t=\partial,\ \forall t\geqq 0];\ e_\partial<\infty]
\end{aligned}$$

ここで(2.13)を用いると，

$$=P_{\bar{x}}[e_\partial=\infty]+P_{\bar{x}}[e_\partial<\infty]=1$$

従って (i) が示された。

つぎに，(2.4)と ^ の定義により，

$$T_t\hat{f}(\Delta)=\widehat{T_t\hat{f}|_{\mathcal{S}}}(\Delta)=0\qquad,\qquad \forall t\geqq 0\ .$$

ここで $f=1$ とおく。(2.10)により

$$T_t\hat{f}(\Delta)=P_\Delta[X_t\in\bigcup_{n=0}^{\infty}\mathcal{S}^n]=0\ ,\qquad \forall t\geqq 0\ .$$

従って

$$P_\Delta[X_t=\Delta]=1\quad,\qquad \forall t\geqq 0\ .$$

この式から (ii) を導く方法は (i) の場合と全く同じである。 q. e. d.

<u>Proposition 2.2</u> X_t が $0\leq t<\infty$ で quasi-left continuous ならば，条件(C.2)をみたす。

<u>[Proof]</u> この仮定のもとで，e_Δ が Markov time になることはすでに注意した。quasi-left continuity から，

(2.16) $\qquad P_{\bar{x}}[\lim_{n\to\infty}X_{\tau_n}=X_{\tau_\infty}\ ,\quad \tau_\infty<\infty]=P_{\bar{x}}[\tau_\infty<\infty]$.

ところが，もし $X_{\tau_\infty}\in\mathcal{S}^m$ ならば，ある番号から先はではすべて $X_{\tau_n}\in\mathcal{S}^m$ となり，τ_n の定義に矛盾する。従って $X_{\tau_\infty}=\Delta$ 。従って，$\tau_\infty=\Delta$ である。故に(2.16)により

Sem. on Probab.
Vol.23-Ⅰ 1966年
P1-137

(4.0)

$$P_{\bar{x}}[\tau_\infty^{\cdot}=e_\Delta\ ;\ \tau_\infty<\infty]=P_{\bar{x}}[\tau_\infty<\infty]\ 。$$

q. e. d.

[Remark]　多くの場合，条件 (C.1)，(C.2) は process の構成の仕方から明らかなことが多い。

Proposition 2.3　同じ $\mathcal{S}$ 上の2つの branching Markov process を考える。それぞれの semi-group を $\{T_t^{(1)};\ t\geqq 0\}$, $\{T_t^{(2)};\ t\geqq 0\}$ とする。任意の $f\in C^*(\mathcal{S})$ に対して $T_t^{(1)}\hat{f}=T_t^{(2)}\hat{f}$ ならば，そのとき $X_t^{(1)}$ と $X_t^{(2)}$ は equivalent である。*1)

この証明は次の Lemma (iii) より明らかである。

Lemma 2.1　(i)　$f_1,\cdots,f_n\in\mathbb{B}(\mathcal{S})$ に対して，

$$\sum_\pi\prod_{j=1}^n f_{\pi(j)}(x_j)=\prod_{j=1}^n\Big(\sum_{k=1}^n f_k(x_j)\Big)-\sum_{(k_1,\cdots,k_{n-1})}\prod_{j=1}^n\Big(\sum_{q=1}^{n-1}f_{k_q}(x_j)\Big)$$
$$+\sum_{(k_1,\cdots,k_{n-2})}\prod_{j=1}^n\Big(\sum_{q=1}^{n-2}f_{k_q}(x_j)\Big)-\cdots\ (-1)^{n-1}\sum_k\prod_{j=1}^n f_k(x_j)\ , \tag{2.17}$$

が成りたつ。ここで $\sum_\pi$ は n 文字のすべての permutation π についての和。$\sum_{(k_1,\cdots,k_r)}$, $r\leq n-1$, は $(1,2,\cdots,n)$ より相異なる r 文字の組 $(k_1,\cdots,k_r)$ をえらぶすべてのとり方についての和を表わす。

(ii)　$\mathcal{S}$ を compact とすると，$\hat{\mathbb{C}}(\mathcal{S}^n)$ の linear hull は $\mathbb{C}(\mathcal{S}^n)$ の中で dense。

(iii)　$f\in\mathbb{C}^*(\mathcal{S})^+$ に対して作った $\hat{f}$ の作る linear hull: $\{\sum_{i=1}^n c_i\hat{f}_i\ ,\ f_i\in\mathbb{C}^*(\mathcal{S})^+\}$ は $\mathbb{C}_0(S)$ で dense.

Proof　(i) の証明は permanent に関する補足 Lemma を用いると明らかである。

(ii) の証明。(i) により，

$$\Big\{\sum_\pi\prod_{j=1}^n f_{\pi(j)}(x_j)\ ;\ \ f_1,\cdots,f_n\in\mathbb{C}(\mathcal{S})\Big\}$$

の linear hull $\mathbb{A}$ が $\mathbb{C}(\mathcal{S}^n)$ で dense なことを言えば充分である。ところが，

---

*1)　equivalent は，任意の $f\in\mathbb{C}(S)$ に対して

$$T_t^{(1)}f\ =\ T_t^{(2)}f$$

が成立することを意味する。

Sem. on Probab.
Vol.23- I 1966年
P1-137

$\mathcal{A}$は明らかに algebra であって，$\mathcal{S}^n$の点を separate し，constant をふくむ。従って，Stone-Weierstrass の定理により$\mathcal{A}$は $\mathbb{C}(\mathcal{S}^n)$ で dense である。*1)

(iii)の証明。 $f \in \mathbb{C}^*(\mathcal{S})$ ならば

$$\hat{f} \in \mathbb{C}_0(S) \quad \text{は定義より明らか。}$$

$\mathbb{C}_0(\mathcal{S})$ の dual space は $S - \{\Delta\}$ 上の有界変動測度の全体である。したがってμをそのような測度とするとき

$$\mu(\hat{f}) = 0 \ , \quad \forall f \in C^*(\mathcal{S})$$

から $\mu \equiv 0$ がしたがうことをいえばよい。

ところで $0 \leqq \lambda < 1$ とすると $\lambda \hat{f} \in C^*(\mathcal{S})$ であるから

$$\mu(\lambda \hat{f}) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \int_{\mathcal{S}^n} \hat{f}(x)\, \mu(dx) = 0$$

故に $\forall n$ について

$$\int_{\mathcal{S}^n} \hat{f}(x)\, \mu(dx) = 0$$

これより $\mu|_{\mathcal{S}^n} = 0$ は上の(ii)よりしたがう。 q. e. d.

<u>Proposition 2.4</u> X_t は branching Markov process とする。任意に $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_m$ ， $f_1, \cdots, f_m \in \mathbb{B}^*(\mathcal{S})$ をとると，つぎのことが成りたつ：

$$E_{\bar{x}}\Big[\prod_{k=1}^{m} \hat{f}_k(X_{t_k})\Big] = \widehat{E_{\cdot}\Big[\prod_{k=1}^{m} \hat{f}_k(X_{t_k})\Big]\Big|_{\mathcal{S}}}(\bar{x}) . \tag{2.18}$$

[Proof] induction によって示す。$m=1$ のときは (2.18) は (2.4) そのものである。

$m-1$ のとき成りたつとしよう。Markov 性により，

$$E_{\bar{x}}\Big[\prod_{k=1}^{m} \hat{f}_k(X_{t_k})\Big] = E_{\bar{x}}\Big[\prod_{k=1}^{m-1} \hat{f}_k(X_{t_k})\, T_{t_m - t_{m-1}} \hat{f}_m(X_{t_{m-1}})\Big]$$

いま

$$g(\bar{x}) = \hat{f}_{m-1}(\bar{x})\, T_{t_m - t_{m-1}} \hat{f}_m(\bar{x})$$

---

*1) 例えば Loomis [1] を参照。

Sem. on Probab.
Vol.23-Ⅰ 1966年
P1-137

とおけば (2.4) により

$$g(\bar{x}) = \widehat{g|_S}(\bar{x})$$

である。induction の仮定を使えば

$$E_{\bar{x}}[\prod_{k=1}^{m} \hat{f}_k(X_{t_k})] = \widehat{E_{\cdot}[\prod_{k=1}^{m-2} \hat{f}_k(X_{t_k})\hat{g}(X_{t_{m-1}})]|_S}(\bar{x})$$

ところが，$x \in S$ に対して，

$$E_x[\prod_{k=1}^{m-2} \hat{f}_k(X_{t_k})\hat{g}(X_{t_{m-1}})] = E_x[\prod_{k=1}^{m} \hat{f}_k(X_{t_k})]$$

であるので，

$$E_{\bar{x}}[\prod_{k=1}^{m} \hat{f}_k(X_{t_k})] = \widehat{E_{\cdot}[\prod_{k=1}^{m} \hat{f}_k(X_{t_k})]|_S}(\bar{x})$$

である。 q. e. d.

§2.2 branching Markov process の基本的性質

さきに，第0章でのべたように，branching Markov process の議論をするには，その定義の条件，すなわち (2.4) が，$P_{\bar{x}}$ に如何なる形で現象するかをしらべることが重要である。こゝでは，そのことについてのべる。

まず branching Markov process を特徴づけているいくつかの量を定義しよう。

Definition 2.3　branching Markov process X_t を τ で killing して得られる X_t の S^n 上の part process *1) $X_t^{(0)}$ を X_t の S^n 上の non-branching part とよぶ。とくに，S 上の non-branching part を単に non-branching part とよぶ。

上の定義の branching Markov process の non-branching part は直観的には，粒子が分裂する直前までの行動を表わす数学的模型である。

Definition 2.4　S 上の非負可測関数の系 $\{q_n(x),\ n=0,2,3,\cdots,+\infty\}$ と $S\times S^n$ 上の非負 kernel *2) $\pi_n(x, d\bar{y})$ が存在して，P_x-measure 1 で，

---

*1) part process の定義については，第1章，または Dynkin[ ], 参照。

Sem. on Probab.
Vol.23- I 1966年
P1-137

$$(2.19)\quad \begin{cases} P_x[X_\tau \in \mathcal{S}^n \mid X_{\tau-}] = q_n(X_{\tau-}), & x \in \mathcal{S}, \ ^{*3)} \\ P_x[X_\tau = \Delta \mid X_{\tau-}] = q_\infty(X_{\tau-}), & x \in \mathcal{S} \\ P_x[X_\tau \in A \mid X_\tau \in \mathcal{S}^n,\ X_{\tau-}] = \int_A \Pi_n(X_{\tau-}, d\bar{y}), & x \in \mathcal{S},\ A \in \mathcal{B}(\mathcal{S}^n), \end{cases}$$

が成りたつとき，$\{q_n(x),\ \Pi_n(x, d\bar{y});\ n = 0, 2, 3, \cdots\}$ を X_t の branching system という。

上に定義した branching system で，$q_n(x)$ は $X_{\tau-} = x$ で分岐するという条件の下で，n 個に分岐する条件付確率である。$\Pi_n(x, d\bar{y})$ は $X_{\tau-} = x$, $X_\tau \in \mathcal{S}^n$ という条件の下で $X_\tau \in d\bar{y}$ という条件付確率，すなわち，x で n 個になったという条件の下で $d\bar{y}$ という所に分布する条件付の割合を表わす。

今 $\Pi(x, dy) = \sum_{\substack{n=0\\ n\neq 1}}^{\infty} q_n(x)\Pi_n(x, dy \cap \mathcal{S}^n)$ *4) とおくと，明らかに

$$(2.20)\quad P_x[X_\tau \in dy \mid X_{\tau-}] = \Pi(X_{\tau-}, dy), \quad x \in \mathcal{S}$$

となる。逆に $\mathcal{S} \times (S - \mathcal{S})$ 上の kernel $\Pi(x, dy)$ で (2.20) がなりたつとき

$$q_n(x) = \Pi(x, \mathcal{S}^n), \quad \Pi_n(x, dy) = \frac{1}{q_n(x)}\Pi(x, dy),\ dy \subset \mathcal{S}$$

とおけば，あきらかに (q_n, Π_n) は branching system である。

上の定義では branching system $\{q_n, \Pi_n, n = 0, 2, \cdots, +\infty\}$ の存在を仮定したが，その存在は branching Markov process の構成より明らかな場合も多い。例えばこのノートの第6章で取扱うような時は，(2.19) が成り立つように X_t を構成して行く。その外，X_t が semi-group T_t で与えられるよう

---

*2) $\mathcal{S} \times \mathcal{S}^n$ 上の非負 kernel $\Pi_n(x, d\bar{y})$ とは，つぎのことを意味する。
任意の $B \in \mathcal{B}(\mathcal{S}^n)$ に対して $\Pi_n(x, B)$ は x の $\mathcal{B}(\mathcal{S})$-measurable な関数。
任意の $x \in \mathcal{S}$ に対して，$\Pi_n(x, \cdot)$ は $\mathcal{B}(\mathcal{S}^n)$ 上の non-negative measure で total mass が 1 より小である。

*3) 今後任意の Markov time σ に対して，$X_{\sigma-} = \lim_{t \uparrow \sigma} X_t$ と書く。

*4) $\sum_{n=0}^{\infty}$ は n $0, 1, 2, \cdots, +\infty$ についての和。$\mathcal{S}^\infty$ は $\{\Delta\}$ と理解する。
時に応じて $q_1(x) \equiv 0$ として定義されている。

Sem. on Probab.
Vol.23-Ⅰ 1966年
P1-137

な時は，例えばつぎのような比較的弱い条件の下でその存在が示される。

Proposition 2.5　X_t は branching Markov process で，Hunt process であるとする。更に第1章でのべた条件(L) がみたされるとする。そのとき，X_t の branching system $\{q_n(x),\ \pi_n(x, d\bar{y})\}$ が存在する。さらに X_τ と τ は $X_{\tau-}$ を与えた時，条件付独立である，すなわち

$$P_x[\tau\in dt,\ X_\tau\in d\bar{y}\,|\,X_{\tau-}] = P_x[\tau\in dt\,|\,X_{\tau-}]\,P_x[X_\tau\in d\bar{y}\,|\,X_{\tau-}],\quad x\in S,$$

である。証明は第1章参照。

これからこの§では，特に断らない限り，X_t は単に S 上の右連続な Markov process とし，branching Markov process であることは，apriori には前提としない。

まず始めに，n 個の粒子から出発した時は，各粒子は運動の全時間の行動においてお互いに独立であるという特徴を定式化しよう。このことは応用の方で分枝過程という時は，無意識にしろ，非常にしばしば論証なしで用いられる。時にはそれが定義になっている。この直観的には単純な性格もMarkov過程論の中で定式化することは形式上はそれほど簡単でない。

S の n 個の直積空間を $S^{(n)}$ とする。このとき，

$$\gamma:\ \bigcup_{n=1}^{\infty} S^{(n)} \longrightarrow S$$

なる mapping γ をつぎの形で定義する．

いま，$\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_m \in S$ としよう。そのとき，

1) ある i に対して　$\bar{x}_i = \Delta$,

2) すべての i に対して　$\bar{x}_i = \partial$,

3) すべての i に対して　$\bar{x}_i \neq \Delta$ で，ある i に対しては確かに $\bar{x}_i \neq \partial$ となる．

の3つの場合が可能である。

$$(2.21)\qquad \gamma(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_m) = \begin{cases} \Delta, & 1)\ のとき, \\ \partial, & 2)\ のとき, \\ \gamma(x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{1n_1}, \cdots, x_{m1}, x_{m2}, \cdots, x_{mn_m}) & 3)\ のとき, \end{cases}$$

とする。こゝで 3) においては，代表

Sem. on Probab.
Vol.23- I 1966年
P1-137

$(x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{1n_1}) \in \bar{x}_1, \cdots, (x_{m1}, x_{m2}, \cdots, x_{mn_m}) \in \bar{x}_m$
なる代表を $\bar{x}_j \neq \partial$ なる j に対応するものについてとり出してならべる。

(2.21) で与えられる γ は確かに $\bigcup_{n=1}^{\infty} S^{(n)}$ から S への mapping になる。

[Remark] Example 2.1 の連続系数の Galton-Watson process のときは, $S \cong Z^+$ と考えてよい。いま $n_1, \cdots, n_m \in Z^+$ とすれば, (2.21) の γ は

(2.22) $\quad \gamma(n_1, n_2, \cdots, n_m) = n_1 + n_2 + \cdots + n_m$

である。

つぎに, X_t の fundamental space を Ω とし, その n 個の直積を $\Omega^{(n)}$ とする。さらに,

$$\tilde{\Omega} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega^{(n)}$$

とおく。$\tilde{\Omega} \ni \tilde{\omega}$ に対しては $\tilde{\omega} \in \Omega^{(n)}$ のとき,

$$\tilde{\omega} = (\omega^1, \cdots, \omega^n)$$

のような記号を用いる。$\tilde{\Omega} \supset \Omega^{(n)} \ni \tilde{\omega} \quad (\omega^1, \cdots, \omega^n)$ に対して, $X_t(\tilde{\omega})$ を

(2.23) $\quad \tilde{X}_t(\tilde{\omega}) = \gamma[X_t(\omega^1), X_t(\omega^2), \cdots, X_t(\omega^n)] \quad , \quad t \geqq 0,$ *1)

によって定義する。

$\tilde{X}_s$, $s \leq t$, から生成される $\tilde{\Omega}$ 上の σ-field を $\tilde{N}_t$ とし, $\tilde{N}_\infty = \bigvee_{t=0}^{\infty} \tilde{N}_t$ とおく。この measurable space $(\tilde{\Omega}, \tilde{N}_\infty)$ 上に新たな probability measure $\tilde{P}_{\bar{x}}$, $\bar{x} \in S$, をつぎの形で導入する: $S^n \ni \bar{x} \ni (x_1, \cdots, x_n)$ に対して

(2.24) $\quad \tilde{P}_{\bar{x}}[A] = \begin{cases} P_{x_1} \times \cdots \times P_{x_n}[A], \ ^{*2)} & A \in \tilde{N}_\infty, \ A \subset \Omega^{(n)} \text{ のとき}, \\ 0 & , \ A \in \tilde{N}_\infty \text{ かつ } A \subset \Omega^{(m)}, \ m \neq n \text{ のとき}. \end{cases}$

$\bar{x} = \partial, \Delta$ に対しては,

(2.25) $\quad \tilde{P}_{\bar{x}}[A] = \begin{cases} P_{\bar{x}}[A], & A \in \tilde{N}_\infty, \text{ かつ } A \subset \Omega \text{ のとき}, \\ 0 & ; \ A \in \tilde{N}_\infty, \text{ かつ } A \subset \Omega^{(m)}, \ m \neq 1 \text{ のとき}, \end{cases}$

---

*1) $X_t(\omega^j)$, $j = 1, \cdots, n$, は S に属するので, (2.21) によりその組に対して γ が定義される。

*2) $P_{x_1} \times \cdots \times P_{x_n}$ は P_{x_j}, $j = 1, \cdots, n$, の直積測度を意味する。

Sem. on Probab.
Vol.23-I 1966年
P1-137

とおく。

そうすると，つぎのことが言える。

Proposition 2.6 任意の $A \in \widetilde{N}_\infty$ に対して，$\widetilde{P}_{\bar{x}}[A]$ は $\bar{x}$ の表現 $(x_1, \cdots, x_n)$ のとり方に無関係である。すなわち，$\widetilde{P}_{\bar{x}}[A]$ が well-defined である。

Definition 2.5 Markov process $(\Omega, X_t, N_t, P_{\bar{x}};\ \bar{x} \in S)$ がつぎの性質をもつとき，Property B, I をもつという：

Property B,I $(\Omega, X_t, N_t, P_{\bar{x}};\ \bar{x} \in S)$ とそれに対して上で定義した $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{X}_t, \widetilde{N}_t, \widetilde{P}_{\bar{x}};\ \bar{x} \in S)$ が equivalent な Markov process である。*1)

[Proof of Proposition 2.6]

任意に $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_q$, $g_1, g_2, \cdots, g_q \in \mathcal{C}(S)$ をとるとき

$$E_{x_1} \times \cdots \times E_{x_n}[g_1(\widetilde{X}_{t_1}) \cdots g_q(\widetilde{X}_{t_q})], \quad x_j \in \mathcal{S}, \quad j = 1, 2, \cdots, n$$

が $(x_1, \cdots, x_n)$ の permutation *2) に無関係なことを言えばよいが，Lemma 2.1 (iii) に注意すると $g_1, \cdots, g_q$ がそれぞれ $\hat{f}_1, \cdots, \hat{f}_q$ の形をしているときにいえればよい。直積測度の性質から

$$E_{x_1} \times \cdots \times E_{x_n}[\hat{f}_1(\widetilde{X}_{t_1}) \cdots \hat{f}_q(\widetilde{X}_{t_q})]$$

$$= \prod_{j=1}^{n} E_{x_j}[\hat{f}_1(\widetilde{X}_{t_1}) \cdots \hat{f}_q(\widetilde{X}_{t_q})]$$

となり明らかに右辺は $(x_1, \cdots, x_n)$ の permutation に関し不変である。

q.e.d.

もう一つの性質をのべるために 2.3 の記号を準備する。X_t の $\mathcal{S}^n$ における stopped process，すなわちつぎのような process を考える。

$$\tau^*_{(n)}(\omega) = \begin{cases} \tau(\omega), & X_0(\omega) \in \mathcal{S}^n \text{ のとき}, \\ 0, & \text{その他のとき}, \end{cases} \tag{2.26}$$

---

*1) equivalent とは任意の cylinder set 上の measure が一致することを意味する。また，$(\widetilde{\Omega}, \widetilde{X}_t, \widetilde{N}_t, \widetilde{P}_{\bar{x}};\ \bar{x} \in S)$ は Markov process になることは一般に証明出来る。そのことに対しては，例えば Dynkin[1] 参照。

*2) $(1, \cdots, n)$ の permutation π に対して，$(x_{\pi(1)}, \cdots, x_{\pi(n)})$ をとることを $(x_1, \cdots, x_n)$ の permutation ということにする。

Sem. on Probab.
Vol.23- I 1966年
P1-137

$$X_t^*(\omega) = \begin{cases} X_t(\omega) , & t < \tau_{(n)}^*(\omega) \text{ のとき}, \\ X_{\tau_{(n)}^*}(\omega), & t \geqq \tau_{(n)}^*(\omega) \text{ のとき}, \end{cases}$$

とおく。X_s^*, $s \leq t$, から生成される σ-field を N_t^* として

(2.27) $\quad X_n = \{ \Omega, X_t^*, \tau_{(n)}^*, N_t^*, P_{\bar{x}} ; \bar{x} \in S \}$

を考える。

X_1 と equivalent な process

(2.28) $\quad Y^{(k)} = \{ \Omega^{(k)}, Y_t^{(k)}, \tau^{(k)}, N_t^{(k)}, P_{\bar{x}}^{(k)} ; \bar{x} \in S \}, \quad k = 1, 2, \cdots, n,$

を考える。

$$\bar{\Omega}^n = \Omega^{(1)} \times \Omega^{(2)} \times \cdots \times \Omega^{(n)} ,$$

$$\bar{Y}_t(\bar{\omega}) = (Y_t^{(1)}(\omega^{(1)}), \cdots, Y_t^{(n)}(\omega^{(n)})) , \quad \bar{\omega} = (\omega^{(1)}, \cdots, \omega^{(n)}) \in \bar{\Omega}^{(n)},$$

$$\tau^*(\bar{\omega}) = min\, (\tau^{(1)}(\omega^{(1)}), \cdots, \tau^{(n)}(\omega^{(n)}))$$

$$\bar{Y}_t^*(\bar{\omega}) = \begin{cases} \bar{Y}_t(\bar{\omega}) , & t < \tau^*(\bar{\omega}) \text{ のとき}, \\ \bar{Y}_{\tau^*}(\bar{\omega}) , & t \geqq \tau^*(\bar{\omega}) \text{ のとき}, \end{cases}$$

$Y_t^*(\bar{\omega}) = \gamma \bar{Y}_t^*(\bar{\omega})$, ただし γ は (2.21) の mapping とする。

$\bar{N}_t^*$ は $Y_s^*(\bar{\omega})$, $s < t$, で生成される σ-field, $\bar{N}_\infty^* = \bigvee_{t=0}^{\infty} \bar{N}_t^*$,

(2.29) $\quad \bar{P}_{\bar{x}} = P_{x_1}^{(1)} \times \cdots \times P_{x_n}^{(n)} , \quad \bar{x} \in \mathcal{S}^n , (x_1, \cdots, x_n) \in \bar{x}$ のとき,

(2.30) $\quad Y_n^* = \{ \bar{\Omega}^n, Y_t^*, \tau^*, \bar{N}_t^*, \bar{P}_{\bar{x}} : \bar{x} \in \mathcal{S}^n \}.$

とおく。さらに $\bar{x} \notin \mathcal{S}^n$ に対しては, Y_n^* を

$$\bar{P}_{\bar{x}} [Y_t^*(\bar{\omega}) = Y_0^*(\bar{\omega}) ; \ t \geqq 0] = 1$$

となるように拡張する。それを改めて Y_n^* と書く。

このとき, 先ずつぎのことが言える。

Proposition 2.7 (2.29) の $\bar{P}_{\bar{x}}$ は任意の $A \in \bar{N}_\infty^*$ に対して $\bar{P}_{\bar{x}}[A]$ の値は $\bar{x}$ の代表の取り方に無関係, すなわち $\bar{P}_{\bar{x}}$ は well-defined である。

Definition 2.6 Markov process ($\Omega, X_t, N_t, P_{\bar{x}}, \bar{x} \in S$) がつぎの性

Sem. on Probab.
Vol.23-Ⅰ 1966年
P1-137

質をもつとき，Property B.Ⅱをもつという：

Property B.Ⅱ　(2.27) の X_n と上に定義した $Y_n^*(\omega)$ が任意の $n=1,2,\cdots$ に対し equivalent である。

この条件は Property B.Ⅰ が全時間にわたる運動状態についての条件であったのに対し，今度は任意個から出発したとき，第1回の分裂の直後までの状態に関する条件である．応用では強 Markov 性は常に前提されているので，任意個から出発し第1回の分裂直後まで各粒子が独立に運動すれば Property B.Ⅰにのべた性質が出てくることは直観的には明らかであろう。

[Proof of Proposition 2.7]　任意に $0\leq t_1<t_2<\cdots<t_q$, $g_1,\cdots,g_q\in \mathbb{C}(S)$ をえらんだときに，

$$E_{x_1}^{(1)}\times\cdots\times E_{x_n}^{(n)}\Big[\prod_{j=1}^{q} g_j(Y_{t_j}^*)\Big]$$

が $(x_1,\cdots,x_n)$ の permutation に無関係であることを言えばよい．Y_t^* の個数を ξ_t^* と書くことにする。定義の仕方から，

$$E_{x_1}^{(1)}\times\cdots\times E_{x_n}^{(n)}\Big[\prod_{j=1}^{q} g_j(Y_{t_j}^*)\Big]$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{q}E_{x_1}^{(1)}\times\cdots\times E_{x_n}^{(n)}\Big[\prod_{j=1}^{q} g_j(Y_{t_j}^*);\ \xi_{t_1}^*=n,\cdots,\xi_{t_r}^*=n,\ \xi_{t_{r+1}}^*=m,\ \xi_{t_q}^*=m\Big]$$

である。Lemma 2.1，(ii) を考えれば，上式が $f_1,\cdots,f_q\in C^*(S)$ に対して，$\hat{f}_1,\cdots,\hat{f}_q$ を作り，それを $g_1,\cdots,g_q$ とするとき $(x_1,\cdots,x_n)$ の permutation に無関係になることを示せば充分である。いま $Y_t^{(k)}$ の個数を $\xi_t^{(k)}$ と書くことにしよう。そのとき

$$E_{x_1}^{(1)}\times\cdots\times E_{x_n}^{(n)}\Big[\prod_{j=1}^{q}\hat{f}_j(Y_{t_j}^*);\ \xi_{t_1}^*=n,\cdots,\ \xi_{t_r}^*=n,\ \xi_{t_{r+1}}^*=m,\cdots,\ \xi_{t_q}^*=m\Big] \tag{2.31}$$

$$=\sum_{(p^{(1)},\cdots,p^{(n)})}^{(m)}\prod_{k=1}^{n}E_{x_k}^{(k)}\Big[\prod_{j=1}^{q}\hat{f}_j(Y_{t_j}^{(k)});\ \xi_{t_1}^{(k)}=1,\cdots,\ \xi_{t_r}^{(k)}=1,\ \xi_{t_{r+1}}^{(k)}=P^{(k)},\cdots,\ \xi_{t_q}^{(k)}=p^{(k)}\Big]$$

となる。

Sem. on Probab.
Vol.23- I 1966年
P1-137

ここで $\sum\limits_{(p^{(1)},\cdots,p^{(n)})}^{(m)}$ は $p^{(1)}+\cdots+p^{(m)}=m$, $p^{(1)},\cdots,p^{(n)}\geq 0$ をみたす整数の組 $(p^{(1)},\cdots,p^{(n)})$ 全体についての和を表わす。

(2.31)の最後の式は明らかに $\bar{x}$ の代表の取り方に無関係である。　　*q.e.d.*

つぎには，Property B.II をさらに２つの部分に分けることを考える。分裂する直前まで粒子が相互に独立に運動するという条件と，１個だけが分裂１，残りはそのまゝという条件におきかえる。すなわち，

Definition 2.7　Markov process $(\Omega, X_t, N_t, P_{\bar{x}};\ \bar{x}\in S)$ がつぎの性質をもつとき，Property B.III をもつという：

Property B.III：任意の $f\in C^*(S)$ ，$\bar{x}\in S^n$ に対して，

(i)　$$E_{\bar{x}}[\hat{f}(X_t);\ t<\tau]=\prod_{j=1}^{n}E_{x_j}[\hat{f}(X_t);\ t<\tau],$$

(ii)　$$E_{\bar{x}}[\hat{f}(X_\tau);\ \tau\leq t]=\sum_{k=1}^{n}\int_0^t E_{x_k}[\hat{f}(X_\tau);\ \tau\in dS]\prod_{j\neq k}E_{x_j}[\hat{f}(X_S);\ s<\tau],$$

が成り立つ。こゝで $(x_1, x_2,\cdots, x_n)\in\bar{x}$ で，$n=2,3,\cdots$ とする。

以上の準備の下につぎの定理が証明される。この定理は branching Markov processについての議論をする際，しばしば重要な役割を果たす。

Theorem 2.1　$\{\Omega, X_t, N_t, P_{\bar{x}};\ \bar{x}\in S\}$ を右連続な強 Markov process とする。[*1)]　いまつぎの命題を考える。

(i)　X_t は branching Markov process である．

(ii)　X_t は Property B.I をもち条件 (C.1) をみたす。

(iii)　X_t は Property B.II をもち条件 (C.1) をみたす。

(iv)　X_t は Property B.III をもち条件 (C.1) をみたす．

そのとき，つぎの主張が成り立つ。

(a)　(i) と (ii) は同等である．

(b)　(ii) より (iii) が導かれる．

(c)　条件 (C.3) をみたすならば (iii) より (iv) が導かれる．

---

*1) つぎの§の証明をみればわかるが，この定理が成立つためには，$\{\tau_n;\ n=1,2,\cdots\}$ と e_Δ e_∂ に対して強 Markov 性が成立しておればよい。

Sem. on Probab.
Vol.23-I 1966年
P1-137

(d) 更に条件 (C.2), (C.3) をみたすならば (iv) より (i) が言える.
この定理は長くなるので節をあらためて，つぎの節で行なう。

[Remark] 上の定理で分裂法則の T_t, $\bar{P}_x$ の形での反映形態はわかったが，最も infinitesimal な表現である，T_t の生成作用素の形の反映形態が残っている。これを一般の形で言うには，定義域について2,3の困難がある．いま S: compact とし，branching Markov process X_t の semi-group T_t は Feller 型，すなわち $C(S)$，を不変にするとする．吉田-Hille のクラスであるので，その生成作用素 $\mathfrak{G}$，およびその定義域 $\mathfrak{D}(\mathfrak{G})$ が定まる。

いま $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{D}(\mathfrak{G})$ が存在し，

$$\hat{\mathfrak{D}} = \{ \hat{f}_{|S} ;\ f \in \mathfrak{D},\ \| f_{|S} \| < 1 \} \subset \mathfrak{D}(\mathfrak{G})$$

と仮定する。いま次のように定義しよう。

Definition 2.8 $f \in C^*(S)$, $g \in C(S)$ に対して

$$\text{(2.32)} \qquad \langle f | g \rangle (\bar{x}) = \begin{cases} 0 \quad , & \bar{x} = \partial \\ \sum_{k=1}^{n} g(x_k) \prod_{j \neq k} f(x_j), & \bar{x} \ni (x_1, \cdots, x_n),\ \bar{x} \in S^n, \\ 0 \quad , & \bar{x} = \Delta \end{cases}$$

とおく。

そのとき，$\hat{f} \in \hat{\mathfrak{D}}$ に対して，

$$\text{(2.33)} \qquad \mathfrak{G} \hat{f}(\bar{x}) = \langle \hat{f}_{|S} | (\mathfrak{G} \hat{f})_{|S} \rangle (\bar{x})$$

が成立つ。

[Poof] (2.4)，すなわち

$$T_t \hat{f}(\bar{x}) = \widehat{T_t \hat{f}}(\bar{x})$$

に注意する．いま Feller クラスであるので，X_t は右連続で強 Markov process と考えてよい。

(2.33) は $\bar{x} = \partial$，または Δ の時は成りたつ。故に
$n \geq 2, 3, \cdots$，$\bar{x} \ni (x_1, \cdots, x_n) \in S^n$ としてよい。

$$\text{(2.34)} \qquad \frac{T_t \hat{f}(\bar{x}) - \hat{f}(\bar{x})}{t} = \frac{1}{t} \left[\prod_{j=1}^{n} T_t \hat{f}(x_j) - \prod_{j=1}^{n} \hat{f}(x_j) \right]$$

Sem. on Probab.
Vol.23-Ⅰ 1966年
P1-137

$$=\frac{1}{n}\left\{\frac{1}{t}\sum_{k=1}^{n}\left[T_t\hat{f}(x_k)-\hat{f}(x_k)\right]\prod_{j\neq k}T_t\hat{f}(x_j)+\frac{1}{t}\sum_{k=1}^{n}\hat{f}(x_k)\left[\prod_{j\neq k}T_t\hat{f}(x_j)-\prod_{j\neq k}\hat{f}(x_j)\right]\right\}$$

こゝで *induction* を用いるために，$n-1$ の時は (2.33) が成立しているとしよう。$t\to 0$ の時，

第１項は $\mathfrak{G}$ の定義より

$$\sum_{k=1}^{n}\mathfrak{G}\hat{f}(x_k)\prod_{j\neq k}f(x_j)$$

第２項は *induction* の仮定より

$$\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\sum_{\substack{m=1\\ m\neq k}}^{n}\mathfrak{G}\hat{f}(x_m)\prod_{j\neq m,k}f(x_j)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{m=1\\ m\neq k}}^{n}\mathfrak{G}\hat{f}(x_m)\prod_{j\neq m}f(x_j)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\mathfrak{G}\hat{f}(x_m)\prod_{j\neq m}f(x_j)-\sum_{k=1}^{n}\mathfrak{G}\hat{f}(x_k)\prod_{j\neq k}f(x_j)$$

となるので (2.46) で $t\to 0$ として，

$$\mathfrak{G}\hat{f}(\bar{x})=\sum_{m=1}^{n}\mathfrak{G}\hat{f}(x_m)\prod_{j\neq m}f(x_j)=\langle\hat{f}_{|s}|(\mathfrak{G}\hat{f})_{|s}\rangle(\bar{x})$$

を得る。

具体的な *branching Markov process* では上の仮定がみたされ，しかも $\hat{\mathcal{D}}$ の *linear hull* が $\mathcal{D}(\mathfrak{G})$ の中で *dense* になることがしばしばあり，(2.33) が実際使われることがある。これらの条件についてはつぎの章であらためてふれる。

§2.3 Theorem 2.1 の Proof

こゝでは *Theorem 2.1* の証明をするのが目的である。

Proposition 2.8　X_t を *branching Markov process* とする。そのとき，X_t は *Property* B.Ⅰ をもち条件 (C.1) をみたす。

[Proof]　*branching Markov process* で右連続で強 *Markov* 性をもつとき，条件 (C.1) をみたすことは，既に *Proposition* 2.1 で示した。*Property* B.Ⅰ の定義をした，*Definition* 2.5 で X_t より構成した $\widetilde{X}_t$ を考え

Sem. on Probab.
Vol.23-Ⅰ 1966年
P1-137

よう。それに関して，任意に $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_q < \infty$，$g_1, \cdots, g_q \in \mathbb{C}(S)$ をとり，

$$E_{\bar{x}}\left[\prod_{j=1}^{q} g_j(X_{t_j})\right] = \widetilde{E}_{\bar{x}}\left[\prod_{j=1}^{q} g_j(\widetilde{X}_{t_j})\right] \tag{2.35}$$

を示せば充分である。ところで，*Lemma* 2.1 (iii) より各 g_j が $\hat{f}_j$ の形のときにいえればよい。しかしそれは

$$\widetilde{E}_{\bar{x}}\left(\prod_{j=1}^{q} \hat{f}_j(\widetilde{X}_{t_j})\right) = \prod_{i=1}^{n} E_{x_i}\left[\prod_{j=1}^{q} \hat{f}_j(X_{t_j})\right], \quad \bar{x} \ni (x_1, \cdots, x_n)$$

に注意すれば *Prop.* 2.4 より直ちにわかる。　　　　q. e. d.

Proposition 2.9　X_t が *Property* B. I をもち，条件 (*C.1*) をみたせば，X_t は *branching Markov process* である．

[Proof]　$f \in \mathbb{C}^*(\mathcal{S})$，$\bar{x} \in \mathcal{S}^n$，$(n = 1, 2, \cdots)$，とする。

X_t と *Property* B. I の $\widetilde{X}_t$ は *equivalent* であるので，

$$\begin{aligned} T_t \hat{f}(\bar{x}) &= E_{\bar{x}}[\hat{f}(X_t)] = \widetilde{E}_{\bar{x}}[\hat{f}(\widetilde{X}_t)] \\ &= \widetilde{E}_{\bar{x}}[\hat{f}(X_t(\omega^1))\hat{f}(X_t(\omega^2)) \cdots \hat{f}(X_t(\omega^n))] \\ &= E_{x_1} \times \cdots \times E_{x_n}[\hat{f}(X_t(\omega^1)) \cdots \hat{f}(X_t(\omega^n))] \\ &= \prod_{j=1}^{n} E_{x_j}[\hat{f}(X_t)] = \prod_{j=1}^{n} T_t \hat{f}(x_j) . \end{aligned}$$

$\bar{x} = \partial, \Delta$ に対しては条件 (*C.1*) をみたしているので

$$T_t \hat{f}(\partial) = 1, \qquad T_t \hat{f}(\Delta) = 0$$

となる。故に

$$T_t \hat{f}(\bar{x}) = \widehat{T_t \hat{f}_{|S}}(\bar{x})$$

である。　　　　q. e. d.

[Remark]　*Proposition* 2.8，2.9 より，*Theorem* 2.1 の (*a*) は証明された。上の証明で解るように *Proposition* 2.9 はほゞ定義そのまゝである。すなわち，*Property*，B. I と条件 (*C.1*) とより，*branching* の条件 (2.4) を導くのは簡単なことである．しかし後でのべるように，*Property* B. II と条件

Sem. on Probab.
Vol.23-Ⅰ 1966年
P1-137

(C.1)，または Property B.Ⅲ と条件（C.1）とから（2.4）を導くのは論理的にはあまり簡単でない。ところがこれまで所謂分枝過程の研究ではこれらを如何にも定義かの如く考え，Property B.Ⅰ 又は（2.4）式をその性質として用いてあることがしばしば見られる。その意味では問題はあったかもしれないが，しかしこれから示すように，結果的には 2,3 の附帯条件はあるが，それらは保証されることである。

<u>Proposition 2.10</u>　Markov過程 X_t が強Markov性をもつとする。そのとき X_t が Property B.Ⅰ をもてば，Property B.Ⅱ をみたす。

<u>[Proof]</u>　記号として，Property B.Ⅰ，Property B.Ⅱ を定義するときに用いたものはそのまゝ用いる。また $\tilde{X}_t$ の first branching time を $\tilde{\tau}$ とする。Property B.Ⅰ より，X_t と $\tilde{X}_t$ が equivalent であるので，X_t を τ で stop した process と $\tilde{X}_t$ を $\tilde{\tau}$ で stop した process は equivalent である。$\tilde{X}_t$ の定義より，$\tilde{\omega} = (\omega^1, \cdots, \omega^n)$ に対して，

$$\tilde{\tau}(\tilde{\omega}) \quad \min\{\tau(\omega^1), \cdots, \tau(\omega^n)\}$$

であることに注意すれば，任意の $\tilde{x} \in \mathcal{S}^n$，$n = 2, 3, \cdots$ に対し $\tilde{X}_t$ を $\tilde{\tau}(\tilde{\omega})$ で stop した process と，Property B.Ⅱ を定義する際に（2.30）で与えられた，Y_n^* は equivalent である。よって Property B.Ⅱ が言えたことになる。

q.e.d.

<u>[Remark]</u>　上の Proposition 2.10 により Theorem 2.1 の (b) の証明が終ったことになる。

<u>Proposition 2.11</u>　Markov過程 X_t が強Markov とする。そのとき，X_t が Property B.Ⅱ をもち，条件（C.3）をみたすならば，Property B.Ⅲ がみたされる。

<u>[Proof]</u>　Property B.Ⅱ の定義のときの記号はそのまゝ用いる。$\tilde{x} \in \mathcal{S}^n$, $\tilde{x} \ni (x_1, \cdots, x_n)$，$n = 1, 2, \cdots$　とする。f と $\mathbb{C}^*(\mathcal{S})$ に対して

$$
\begin{aligned}
& E_{\tilde{x}}[\hat{f}(X_t)\ ;\ t < \tau] \\
&= \bar{E}_{\tilde{x}}[\hat{f}(Y_t^*)\ ;\ t < \tau] \\
&= E_{x_1}^{(1)} \times \cdots \times E_{x_n}^{(n)}\left[\prod_{j=1}^{n} f(Y_t^{(j)})\ ;\ t < \tau^{(k)},\ k = 1, 2, \cdots, n\right] \\
&= \prod_{j=1}^{n} E_{x_j}^{(j)}[f(Y_t^{(j)})\ ;\ t < \tau^{(j)}]
\end{aligned}
$$

Sem. on Probab.
Vol.23- I 1966年
P1-137

$$= \prod_{j=1}^{n} E_{x_j}[f(X_t)\ ;\ t<\tau]$$

すなわち，Property B.Ⅲの(i)を得る。

つぎに

$$(2.36)\qquad \begin{aligned} &E_{\bar{x}}[\hat{f}(X_\tau)\ ;\ \tau\leq t] \\ =\ &\bar{E}_{\bar{x}}[\hat{f}(Y^*_{\tau^*})\ ;\ \tau^*\leq t] \end{aligned}$$

ここで条件(C.3)により，$k\neq j$ ならば

$$\bar{P}_{\bar{x}}[\tau^{(k)}(\omega^{(k)})=\tau^{(j)}(\omega^{(j)})] = 0$$

であるから，つぎの式を得る。

$$(2.36) = \sum_{k=1}^{n} \bar{E}_{\bar{x}}[\hat{f}(Y^*_{\tau^*});\ \tau^*=\tau^{(k)}(\omega^{(k)}),\ \tau^*\leq t]$$

$$= \int_0^t \sum_{k=1}^{n} \bar{E}_{\bar{x}}[\hat{f}(Y^*_{\tau^*});\ \tau^*=\tau^{(k)}(\omega^{(k)});\ \tau^{(k)}(\omega^{(k)})\in ds,\ s<\tau^{(j)},\ j\neq k]$$

$$= \int_0^t \sum_{k=1}^{n} E^{(k)}_{x_k}[\hat{f}(Y^*_{\tau^*});\ \tau^{(k)}\in ds] \prod_{j\neq k} E^{(j)}_{x_j}[\hat{f}(Y^{(j)}_s);\ s<\tau^{(j)}]$$

$$= \int_0^t \sum_{k=1}^{n} E_{x_k}[\hat{f}(X_\tau);\ \tau\in ds] \prod_{j\neq k} E_{x_j}[\hat{f}(X_s);\ s<\tau]\ .$$

よってProperty B.Ⅲ，(ii)を得る。 q.e.d.

[Remark] このProposition 2.11により，Theorem 2.1の(c)が示されたことになる。

最後にTheorem 2.1は(d)を示すことだけになったが，そのためには2,3の準備が必要になる。第7章でも同じ量を用いるので，それについての記号をまず導入しよう。

$$(2.37)\quad \begin{cases} T_t^{(r)} f(\bar{x}) = E_{\bar{x}}[f(X_t);\ \tau_r\leq t<\tau_{r+1}], & f\in\mathbb{B}(S),\ r=0,1,2,\cdots \\ \bar{\Psi}^{(n)}(\bar{x};\ ds\,d\bar{y}) = P_{\bar{x}}[\tau_n\in ds,\ X_{\tau_n}\in d\bar{y}], & n=0,1,2,\cdots \\ \bar{\Psi}^{(1)} = \bar{\Psi} & \\ \psi^{(n)}(\bar{x},t,d\bar{y}) = \int_0^t \bar{\Psi}^{(n)}(\bar{x};\ ds\,d\bar{y}), & n=0,1,2,\cdots \\ \bar{\Psi}_m(\bar{x},ds\,d\bar{y}) = \bar{\Psi}(\bar{x},ds\,d\bar{y})|_{S^m} (\equiv P_{\bar{x}}[\tau\in ds,\ X_\tau\in d\bar{y},\ \xi_\tau=m]), & m=0,1,2,\cdots \end{cases}$$

Sem. on Probab.
Vol.23-Ⅰ 1966年
P1-137

これらの記号を用いると Property B.Ⅲはつぎのように書ける：

Property B.Ⅲ. $f \in C^*(\mathcal{S})$ とすれば $\bar{x} \in \mathcal{S}^n$, $(x_1, \cdots, x_n) \in \bar{x}$ に対し

(2.38)

(i) $T_t^{(0)} \hat{f}(\bar{x}) = \prod_{k=1}^{n} T_t^{(0)} f(x_k)$

(ii) $\int_0^t \int_S \Psi(\bar{x}, ds d\bar{y}) \hat{f}(\bar{y}) = \sum_{k=1}^{n} \int_0^t \int_S \Psi(x_k, ds d\bar{y}) \hat{f}(\bar{y}) \prod_{j \neq k} T_s^{(0)} f(x_j)$,

がなりたつ。

Proposition 2.12 Markov 過程 X_t が右連続で強 Markov ならば，つぎのことが成り立つ。

(2.39) $$\Psi^{(n)}(\bar{x}, t, dy) = \int_0^t \int_S \Psi^{(k)}(\bar{x}; dv d\bar{z}) \Psi^{(n-k)}(\bar{z}, t-v, d\bar{y}), \qquad k = 0, 1, 2, \cdots, n$$

(2.40) $$T_t^{(n)} f(\bar{x}) = \int_0^t \int_S \Psi^{(k)}(\bar{x}, dv d\bar{z}) T_{t-v}^{(n-k)} f(\bar{z}), \qquad k = 0, 1, 2, \cdots, n, \quad f \in \mathbb{B}(S),$$

がなりたつ。

[Proof] 定義により，$k \leq n$ に対し，

$$\Psi^{(n)}(\bar{x}, t, d\bar{y}) = P_{\bar{x}}[\tau_n \leq t;\ X_{\tau_n} \in d\bar{y}]$$

$$= \int_0^t P_{\bar{x}}[\tau_k \in dv,\ \tau_n \leq t,\ X_{\tau_n} \in d\bar{y}]$$

$$= \int_0^t P_{\bar{x}}[\tau_k \in dv,\ E_{X_{\tau_k}}[\tau_{n-k} \leq t-v,\ X_{\tau_{n-k}} \in d\bar{y}]_{|v=\tau_k}]$$

$$= \int_0^t \int_S \Psi^{(k)}(\bar{x}, dv d\bar{z}) \Psi^{(n-k)}(\bar{z}, t-v, d\bar{y})$$

よって(2.39)が示された。

$$T_t^{(n)} f(\bar{x}) = E_{\bar{x}}[f(X_t);\ \tau_n \leq t < \tau_{n+1}]$$

$$= \int_0^t E_{\bar{x}}[f(X_t);\ \tau_k \in dv,\ \tau_n \leq t < \tau_{n+1}]$$

$$= \int_0^t E_{\bar{x}}[\tau_k \in dv,\ E_{X_{\tau_k}}[f(X_{t-v});\ \tau_{n-k} \leq t-v < \tau_{n+1-k}]_{|v=\tau_k}]$$

$$= \int_0^t \int_S \Psi'^{(k)}(\bar{x}, dv, d\bar{z}) T_{t-v}^{(n-k)} f(\bar{z}) \quad .$$

Sem. on Probab.
Vol.23-Ⅰ 1966年
P1-137

よって(2.40)が示された。 q.e.d.

Lemma 2.2 Markov 過程 X_t が強 Markov 性をもち，さらに条件(C.1)，(C.2)が成りたつとする。そのとき，$f(\Delta)=0$ なる任意の $f\in\mathbb{B}(S)$ に対して，

$$(2.41)\qquad T_t f(x)=\sum_{r=0}^{\infty} T_t^{(r)} f(x)\ ,\qquad x\in S$$

が成りたつ。

[Poof]

$$T_t f(x)=E_x[f(X_t);\ \tau_\infty=\infty]+E_x[f(X_t);\ \tau_\infty<\infty]$$

ここで右辺の第1項をⅠ，第2項をⅡとする。

$$\mathrm{I}=\sum_{r=0}^{\infty} E_x[f(X_t);\ \tau_r\le t<\tau_{r+1}\ ,\quad \tau_\infty=\infty]$$

$$\mathrm{II}=\sum_{r=0}^{\infty} E_x[f(X_t);\ \tau_r\le t<\tau_{r+1},\ \tau_\infty<\infty]+E_x[f(X_t);\ e_\Delta\le t<\infty,\ \tau_\infty<\infty]$$

上式の第1項を II_1，第2項を II_2 とする。

$$\mathrm{I}+\mathrm{II}_1=\sum_{r=0}^{\infty} E_x[f(X_t);\ \tau_r\le t<\tau_{r+1}]=\sum_{r=0}^{\infty} T_t^{(r)} f(x)$$

$$|\mathrm{II}_2|\le E_x[\,E_\Delta[\,|f|\,(X_{t-v})]\,|_{v=e_\Delta}]=0$$

よって(2.41)を得る。 q.e.d.

Lemma 2.3 X_t は右連続で強 Markov process とする。そのとき，$[0,\infty)\times S$ 上の任意の有界可測関数 $f(t,y)$ に対し，

$$(2.42)\qquad T_v^{(0)}\left\{\int_0^t\!\!\int_S \Psi(\cdot,\ ds\,dy)f(s,y)\right\}(x)=\int_v^{t+v}\!\!\int_S \Psi(x,\ ds\,dy)f(s-v,y)$$

が成りたつ。

[Proof]

$$T_v^{(0)}\left\{E.[f(\tau,X_\tau);\ \tau\le t]\right\}(x)$$

$$=E_x[E_{X_v}[f(\tau,X_\tau);\ \tau\le t];\ v<\tau]$$

$$=E_x[f(\tau(\theta_v\omega),\ X_{\tau(\theta_v\omega)}(\theta_v\omega));\ \tau(\theta_v\omega)\le t,\ v<\tau]$$

Sem. on Probab.
Vol.23- I 1966年
P1-137

こゝで

$$\{v+\tau(\theta_v\omega)=\tau(\omega),\ v<\tau\}=\{v<\tau\}$$

であるから，

$$=E_{\bar{x}}[f(\tau-v,X_\tau),\ v<\tau\leq v+t]$$

$$=\int_v^{v+t}\int_S \Psi(\bar{x},ds\,d\bar{y})\,f(s-v,\bar{y})$$

となり結論を得る． q.e.d.

<u>Lemma 2.4</u> Markov 過程 X_t は右連続で，強 Markov process とする。そのとき，$f\in C^*(S)$ に対し，

$$(2.43)\qquad T_v^{(0)}T_{t-v}^{(r)}\hat{f}(\bar{x})=\int_v^t\int_S \Psi(\bar{x},ds\,d\bar{y})\,T_{t-s}^{(r-1)}\hat{f}(\bar{y})\ ,\qquad r\geqq 1,$$

が成りたつ。

<u>[Proof]</u> (2.40) により，

$$T_{t-v}^{(r)}\hat{f}(\bar{x})=\int_0^{t-v}\int_S \Psi(\bar{x};ds\,d\bar{y})\,T_{t-v-s}^{(r-1)}\hat{f}(\bar{y})$$

である．従って，

$$T_v^{(0)}T_{t-v}^{(r)}\hat{f}(\bar{x})=T_v^{(0)}\left\{\int_0^{t-v}\int_S \Psi(\cdot;ds\,d\bar{y})\,T_{t-v-s}^{(r-1)}\hat{f}(\bar{y})\right\}(\bar{x})$$

こゝで Lemma 2.3 を使えば

$$=\int_v^t\int_S \Psi(\bar{x};ds\,dy)\,T_{t-v-s+v}^{(r-1)}\hat{f}(\bar{y})$$

$$=\int_v^t\int_S \Psi(\bar{x};ds\,dy)\,T_{t-s}^{(r-1)}\hat{f}(\bar{y})$$

q.e.d.

<u>Lemma 2.5</u> $T_t^{(0)}$, $\Psi(\bar{x},ds\,d\bar{y})$ は (2.38) (Property B.III) をみたすとする。$m\geqq n-1$, $m\neq n$, $(x_1,\cdots,x_n)\in\bar{x}$, $\bar{x}\in S^n$ に対し，

$$(2.44)\qquad \int_0^t\int_{S^m}\Psi_m(\bar{x},ds\,d\bar{y})\hat{f}(\bar{y})=\int_0^t\sum_{k=1}^{n}\int_{S^{m-(n-1)}}\Psi_{m-(n-1)}(x_k,ds\,d\bar{y})\hat{f}(y)\prod_{j\neq k}T_s^{(0)}f(x_j)$$

$$,\ f\in C^*(S),$$

が成りたつ。

<u>[Proof]</u> $0\leq\lambda\leq 1$ に対して，(2.38)，(ii) により，

Sem. on Probab.
Vol.23- I 1966年
P1-137

$$\int_0^t\int_S \Psi(\bar{x}, dsd\bar{y})\widehat{\lambda f}(\bar{y}) = \sum_{k=1}^{n}\int_0^t\int_S \Psi(x_k, dsd\bar{y})\widehat{\lambda f}(\bar{y})\prod_{j\neq k} T_s^{(0)}(\lambda f)(x_j)$$

である。ところが

$$\int_0^t\int_S \Psi(\bar{x}, dsd\bar{y})\widehat{\lambda f}(y) = \sum_{m=0}^{\infty}\lambda^m\int_0^t\int_{S^m}\Psi_m(\bar{x}; dsd\bar{y})\hat{f}(y)$$

$$\sum_{k=1}^{n}\int_0^t\int_S \Psi(x_k, dsd\bar{y})\widehat{\lambda f}(\bar{y})\prod_{j\neq k} T_s^{(0)}(\lambda f)(x_j)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{r=0}^{\infty}\lambda^{r+n-1}\int_0^t\int_{S^r}\Psi_r(x_k, dsd\bar{y})\hat{f}(\bar{y})\prod_{j\neq k} T_s^{(0)} f(x_j)$$

以上の3つの等式を併せると，(2.44)が成りたつ。 q. e. d.

前にのべたように，

(2.45) $$A = \left\{\frac{1}{m!}\sum_{\pi}\prod_{j=1}^{m} f_{\pi(j)}(x_j);\ f_1, \cdots, f_m \in C^*(S)\right\}$$

の linear hull は $C(S^m)$ の中で dense である。そこで(2.45)の形の関数に対して，$\Psi_m(\bar{x}; dsd\bar{y})$ がどう働くかをつぎにしらべる。

Lemma 2.6 $T_t^{(0)}$, $\Psi(\bar{x}, dsd\bar{y})$ は (2.38) (Property B.III) をみたしているとする。

そのとき，$\bar{x}\in S^n$, $\bar{x}\ni(x_1, \cdots, x_n)$, $m \geqq n-1$, $m \neq n$, $f_1, \cdots, f_m \in C^*(S)$ とすれば，つぎの関係式が成りたつ。

(2.46) $$\int_0^t\int_{S^m}\Psi_m(\bar{x}; dsd\bar{y})\left\{\frac{1}{m!}\sum_{\pi}\prod_{j=1}^{m} f_{\pi(j)}(y_j)\right\}$$

$$= \int_0^t\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{{}_mC_{n-1}}\sum_{(q_1,\cdots,q_{m-n+1})}\frac{1}{(n-1)!}\sum_{\hat{\pi}}^{(\hat{q})}\int_{S^{m-n+1}}\Psi_{m-n+1}(x_k, dsd\bar{y}')$$

$$\times\left\{\frac{1}{(m-n+1)!}\sum_{\pi}^{(q)}\prod_{h=1}^{m-n+1} f_{q_{\pi(h)}}(y'_h)\right\}\prod_{j\neq k} T_s^{(0)} f_{\hat{q}_{\hat{\pi}(j)}}(x_j),$$

こゝで $\sum_{(q_1,\cdots,q_{m-n+1})}$ は $(1, \cdots, m)$ より $(q_1, \cdots, q_{m-n+1})$ をとり出すえらび方全体についての和を表わす。$\sum_{\pi}^{(q)}$は $(q_1, \cdots, q_{m-n+1})$ の permutation についての和，すなわち $m-n+1$ 文字の permutation π についての和。$\sum_{\hat{\pi}}^{(\hat{q})}$ は $(1, \cdots, m)$ より $(q_1, \cdots, q_{m-n+1})$ をとり出した残り，$(\hat{q}_1, \cdots, \hat{q}_{n-1})$ の permutation，すなわち $n-1$ 文字の permutation $\hat{\pi}$ についての和。$\bar{y}'\ni(y'_1, \cdots, y'_{m-n+1})$ とする。

Sem. on Probab.
Vol.23- I 1966年
P1-137

[Proof] まず Lemma 2.1,(i)により

$$\sum_{\pi}\prod_{j=1}^{m} f_{\pi(j)}(y_j)=\prod_{j=1}^{m}\Big(\sum_{q=1}^{m} f_q(y_j)\Big)-\sum_{(k_1,\cdots,k_{m-1})}\prod_{j=1}^{m}\Big(\sum_{q=1}^{m-1} f_{k_q}(y_j)\Big)+$$

$$\cdots\cdots+(-1)^{m-1}\sum_{k'}\prod_{j=1}^{m} f_{k'}(y_j)$$

となるから，$\Psi_m(\bar{x}, ds d\bar{y})$ により項別して，各項毎に Lemma 2.5を適用することが出来る。その結果

$$\int_0^t\int_{S^m}\Psi_m(\bar{x}, ds d\bar{y})\Big\{\sum_{\pi}\prod_{j=1}^{m} f_{\pi(j)}(y_j)\Big\}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\int_0^t\int_{S^{m-n+1}}\Psi_{m-n+1}(x_k, ds d\bar{y}')\Big\{\prod_{r=1}^{m-n+1}\Big(\sum_{q=1}^{m} f_q(y'_r)\Big)\prod_{j\neq k} T_s^{(0)}\Big(\sum_{q=1}^{m} f_q\Big)(x_j)$$

$$-\sum_{(k_1,\cdots,k_{m-1})}\prod_{r=1}^{m-n+1}\Big(\sum_{q=1}^{m-1} f_{k_q}(y'_r)\Big)\prod_{j\neq k} T_s^{(0)}\Big(\sum_{q=1}^{m-1} f_q\Big)(x_j)+\cdots+$$

$$(-1)^{m-1}\sum_{k'}\prod_{r=1}^{m-n+1}(f_{k'}(y'_r))\prod_{j\neq k} T_s^{(0)}(f_{k'})(x_j)\Big\}$$

となる。上式をIとおく。上式の右辺の{ }の中に，補足の Lemma を用いると，

$$\mathrm{I}=\sum_{k=1}^{n}\int_0^t\int_{S^{m-n+1}}\Psi_{m-n+1}(x_k, ds d\bar{y}')\Big\{\sum_{\pi}\prod_{r=1}^{m-n+1} f_{\pi(r)}(y'_r)\prod_{j\neq k} T_s^{(0)}(f_{\pi(r_j)}(x_j)\Big\}$$

こゝで $(\pi(m-n+2),\cdots,\pi(m))$ を $\{\pi(r_j)\}$ と書いた。さらに，

$$\sum_{\pi}=\sum_{(q_1,\cdots,q_{m-n+1})}\sum_{\hat{\pi}}^{(\hat{q})}\sum_{\pi}^{(q)}$$

と分解すれば，

$$\mathrm{I}=\sum_{k=1}^{n}\int_0^t\sum_{(q_1,\cdots,q_{m-n+1})}\sum_{\hat{\pi}}^{(\hat{q})}\int_{S^{m-n+1}}\Psi_{m-n+1}(x_k, ds d\bar{y}')\Big\{\sum_{\pi}^{(q)}\prod_{h=1}^{m-n+1} f_{q_{\pi(h)}}(y'_h)\Big\}\times\prod_{j\neq k} T_s^{(0)} f_{\hat{q}_{\hat{\pi}(j)}}(x_j)$$

を得る。

上式から (2.46)を得るのは ${}_mC_{n-1}=m!/(n-1)!(m-n-1)!$ より明らか。

q.e.d.

後で引用する必要からつぎの Lemma は少し一般にのべておく。

Lemma 2.7　$\Psi(\bar{x}, ds d\bar{y})$ は $\Psi(\bar{x}, [0,\infty)\times S)\leq 1$ なる kernel であって，ds に関して point mass を持たない。$T_s^{(0)}$ は $B(S)$ 上の norm が 1 より小さい連続な semi-group とする。$T_t^{(n)}$，$n\geq 1$，は (2.40)式により，

Sem. on Probab.
Vol.23-Ⅰ 1966年
P1-137

Ψ と T_t^0 より逐次定義する。さらに，$T_t^{(n)}$，$\Psi(x, dsd\bar{y})$ は (2.43) をみたすとする。

そのとき，

(2.47) $$\sum_{(r_1,\cdots,r_n)}^{(r)} \int_0^t \sum_{k=1}^n \int_S \Psi(x_k, dvd\bar{y}) T_{t-v}^{(r_k)} \hat{f}(\bar{y}) \prod_{j\neq k} T_v^{(0)} T_{t-v}^{(r_j)} \hat{f}(x_j)$$

$$= \sum_{(r_1,\cdots,r_n)}^{(r+1)} \prod_{j=1}^n T_t^{(r_j)} \hat{f}(x_j) \text{ *1)}$$

である。

[Proof] いま

$$T_v^{(0)} T_{t-v}^{(r_j)} \hat{f}(x_j) = g^{(r_j)}(x_j, v)$$

とおく。$r_j = 0$ のときは，$g^{(r_j)}(x_j, v)$ は実は v に無関係である。$r_j \geqq 1$ のときは，(2.43) より

$$g^{(r_j)}(x_j, v) = \int_v^t \int_S \Psi(x_j, dsd\bar{y}) T_{t-s}^{(r_j-1)} \hat{f}(\bar{y})$$

である。従って

(2.48) $$\sum_{(r_1,\cdots,r_n)}^{(r)} \int_0^t \sum_{k=1}^n \int_S \Psi(x_k, dvd\bar{y}) T_{t-v}^{(r_k)} \hat{f}(\bar{y}) \prod_{j\neq k} T_v^{(0)} T_{t-v}^{(r_j)} \hat{f}(x_j)$$

$$= \sum_{(r_1,\cdots,r_n)}^{r} \int_0^t \sum_{k=1}^n d_v(-g^{(r_k+1)}(x_k, v)) \prod_{j\neq k} g^{(r_j)}(x_j, v) .$$

ここで r_{k+1} を r_k と書きなおし，$r_k = 0$ のときには $dg^{(r_k)}(x_k, v) \equiv 0$ であることに注意すれば，

$$(2.48) = \sum_{(r_1,\cdots,r_n)}^{(r+1)} \int_0^t \sum_{k=1}^n d_v(-g^{(r_k)}(x_k, v)) \prod_{j\neq k} g^{(r_j)}(x_j, v)$$

仮定より，$g^{(r_j)}(x_j, v)$ は v について連続であるから，

$$(2.48) = \sum_{(r_1,\cdots,r_n)}^{(r+1)} \int_0^t d\left(-\prod_{j=1}^n g^{(r_j)}(x_j, v)\right)$$

$$= \sum_{(r_1,\cdots,r_n)}^{(r+1)} \prod_{j=1}^n g^{(r_j)}(x_j, 0)$$

---

*1) $\sum\limits_{(r_1,\cdots,r_n)}^{(r)}$, $\sum\limits_{(r_1,\cdots,r_n)}^{(r+1)}$ は (2.30) 式と同じ意味である。

Sem. on Probab.
Vol.23-Ⅰ 1966年
P1-137

$$=\sum_{(r_1,\cdots,r_n)}^{(r+1)} T_t^{(r_j)}\hat{f}(x_j)$$

となる。 q. e. d.

<u>*Lemma* 2.8</u> $\Psi(\bar{x}, dsd\bar{y})$ は $\Psi(\bar{x},[0,\infty)\times S)\leq 1$ なる *kernel* で，$\bar{x}\in S^n$ のときは，

$$\Psi(\bar{x},[0,\infty)\times\bigcup_{k=0}^{n-2}S^k)=0$$

とする。さらに ds に関して *point-mass* を持たないとする。$T_t^{(0)}$ は $B(S)$ 上の *semi-group* で，*norm* が1より大でない。$T_t^{(n)}$，$\Psi^{(n)}(\bar{x}, dsd\bar{y})$ を $T_t^{(0)}$，$\Psi(\bar{x}, dsd\bar{y})$ より (2.37)，(2.39)，(2.40) により逐次定義する。さらに，それらが (2.43)，(2.44) をみたしているとする。また，$T_t^{(0)}$ は (2.38) の (i) をみたすとする。

そのとき，$r\geqq 0$ に対し，

(2.49) $$T_t^{(r)}\hat{f}(\bar{x})=\sum_{(r_1,\cdots,r_n)}^{(r)}\prod_{j=1}^{n}T_t^{(r_j)}\hat{f}(x_j)\quad,\quad \bar{x}\ni(x_1,\cdots,x_n),$$

がなりたつ。

<u>[Proof]</u> *Induction* で証明しよう。

$r=0$ の時は (2.49) は仮定の $T_t^{(0)}$ が (2.38) の (i) をみたすことである。(2.49) が $r(\geqq 0)$ で成立するとする。(2.40) より

$$T_t^{(r+1)}\hat{f}(\bar{x})=\int_0^t\int_S\Psi(\bar{x}, dvd\bar{y})T_{t-v}^{(r)}\hat{f}(\bar{y})$$

つぎに，Ψ の S^m への制限を Ψ_m と書き，$T_{t-v}^{(r)}$ に対して *induction* の仮定を用いると

(2.50) $$\int_0^t\int_S\Psi(\bar{x}, dvd\bar{y})T_{t-v}^{(r)}\hat{f}(\bar{y})$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\int_0^t\int_{S^m}\Psi_m(\bar{x}, dvd\bar{y})\sum_{(r_1,\cdots,r_m)}^{(r)}\prod_{j=1}^{m}T_{t-v}^{(r_j)}\hat{f}(y_j),\quad \bar{y}\ni(y_1,\cdots,y_m),$$

となる。いま

$$\sum_{(r_1,\cdots,r_m)}^{(r)}{}'$$

は $\sum_{(r_1,\cdots,r_m)}^{(r)}$ で，m 文字の *permutation* π により $(r_1,\cdots,r_m)$ を同一視したとき

Sem. on Probab.
Vol.23-Ⅰ 1966年
P1-137

の和，すなわち，$r_1+\cdots+r_m=r$ なる $(r_1,\cdots,r_m)$ で $(r_1,\cdots,r_m)$ と $(r_{\pi(1)},\cdots,r_{\pi(m)})$ を同一視したときの組のえらび方全体についての和とする。

$$(2.50)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{(r_1,\cdots,r_m)}^{(r)\prime}\int_0^t\int_{S^m}\Psi_m(\bar{x},dvd\bar{y})\Big\{\sum_{\pi}\prod_{j=1}^{m}T_{t-v}^{(r_{\pi(j)})}\hat{f}(y_j)\Big\}$$

となる。こゝで Ψ_m に対する性質 (2.46) を用いると，

$$(2.50)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{(r_1,\cdots,r_m)}^{(r)\prime}\int_0^t\sum_{k=1}^{n}\sum_{(q_1,\cdots,q_{m-n+1})}\sum_{\hat{\pi}}^{(\hat{q})}$$

$$\int_{S^{m-n+1}}\Psi_{m-n+1}(x_k,dvd\bar{y}')\Big\{\sum_{\pi}^{(q)}\prod_{h=1}^{m-n+1}T_{t-v}^{(\bar{r}_h)}\hat{f}(y_h')\prod_{j\neq k}T_v^{(0)}T_{t-v}^{(\hat{r}_j)}\hat{f}(x_j)\Big\}$$

となる。こゝで $\bar{r}_h=r_{q_{\pi(h)}}$，$\hat{r}_j=r_{\hat{q}_{\hat{\pi}(j)}}$ とおいた。つぎに

$$\sum_{(r_1,\cdots,r_m)}^{(r)\prime}\sum_{(q_1,\cdots,q_{m-n+1})}\sum_{\hat{\pi}}^{(\hat{q})}\sum_{\pi}^{(q)}=\sum_{(r_1,\cdots,r_n)}^{(r)}\sum_{(\bar{r}_1,\cdots,\bar{r}_{m-n+1})}^{(r_k)}$$

であることを用いて上の式を書きかえると，

$$(2.67)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{(r_1,\cdots,r_n)}^{(r)}\int_0^t\sum_{k=1}^{n}\int_{S^{m-n+1}}\Psi_{m-n+1}(x_k,dvd\bar{y}')$$

$$\times\Big\{\sum_{(\bar{r}_1,\cdots,\bar{r}_{m-n+1})}^{(r_k)}\prod_{h=1}^{m-n+1}T_{t-v}^{(\bar{r}_h)}\hat{f}(y_h')\Big\}\times\prod_{j\neq k}T_v^{(0)}T_{t-v}^{(r_j)}\hat{f}(x_j)$$

上式で $\{\ \}$ は $r_k\leq r$ であるから *induction* の仮定が使えて，$T_{t-v}^{(r_k)}\hat{f}(\bar{y}')$ となる。従って，m についての和を実行すれば，

$$(2.50)=\sum_{(r_1,\cdots,r_n)}^{(r)}\int_0^t\sum_{k=1}^{n}\int_S\Psi(x_k,dvd\bar{y})T_{t-v}^{(r_k)}\hat{f}(\bar{y})\prod_{j\neq k}T_v^{(0)}T_{t-v}^{(r_j)}\hat{f}(x_j)$$

となる。右辺に *Lemma* 2.7 を適用すれば

$$(2.50)=\sum_{(r_1,\cdots,r_n)}^{(r+1)}\prod_{j=1}^{n}T_t^{(r_j)}\hat{f}(x_j)$$

となり，$r+1$ に対して (2.49) が示された。 *q.e.d.*

<u>*Proposition 2.13*</u>　*Markov* 過程 X_t が強 *Markov* 性をもっていて *Property* B.Ⅲ をもち，条件 (C.1)，(C.2)，(C.3) をみたすならば，X_t は *branching Markov process* である。

<u>[*Proof*]</u>　*Lemma* 2.2 により，$\bar{x}\in S^n$，$\bar{x}\ni(x_1,\cdots,x_n)$ とすると

$$(2.51)\qquad T_t\hat{f}(\bar{x})=\sum_{r=0}^{\infty}T_t^{(r)}\hat{f}(\bar{x})$$

Sem. on Probab.
Vol.23-Ⅰ 1966年
P1-137

が成りたつ。同様に Lemma 2.2 により

$$(2.52)\qquad \prod_{j=1}^{n} T_t\hat{f}(x_j) = \sum_{r_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=0}^{\infty}\prod_{j=1}^{n} T_t^{(r_j)}\hat{f}(x_j)$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty}\left\{ \sum_{(r_1,\cdots,r_n)}^{(r)} \prod_{j=1}^{n} T_t^{(r_j)}\hat{f}(x_j) \right\} .$$

{ }に Lemma 2.8 を適用すれば，

$$(2.53)\qquad \prod_{j=1}^{n} T_t\hat{f}(x_j) = \sum_{r=0}^{\infty} T_t^{(r)}\hat{f}(\bar{x})$$

となる。(2.51)，(2.53)により，

$$T_t\hat{f}(\bar{x}) = \prod_{j=1}^{n} T_t\hat{f}(x_j) \ ,\qquad (x_1,\cdots,x_n)\in\bar{x},\ \bar{x}\in\mathcal{S}^n ,$$

となる。すなわち X_t は branching Markov process である。　　q.e.d.

これで Theorem 2.1 の (d) を示されたので，Theorem 2.1 はすべて証明された。

§2.4 個数の Process

前節までは branching Markov process の $\{X_t,\ t\geqq 0,\ P_{\bar{x}};\ \bar{x}\in S\}$ を考察して来たが，この節では，branching Markov process X_t が与えられると，それから自然に決まる $\xi=\{\xi_t,\ t\geqq 0,\ P_{\bar{x}};\ \bar{x}\in S\}$ について考えよう。この $\{\xi_t\}$ を便宜上 branching Markov process X_t の個数の process と呼ぶことにしよう。多くのこれまでの研究（例えば，Harris [1]）では，実は個数の process ξ_t のことを branching process と呼んで来ている。しかしすぐわかるように，個数の process はそれ自身では Markov 性を持たない。特に，ξ_t が Markov 性を持つとき，個数の process を Harris 達は Markov branching process と呼んでいる。現在の立場のものと，それらの関連を与えることは重要と思われるので，branching Markov process X_t が与えられたとき，個数の process がまた Markov 性をもつため 1 つの条件を与えておこう。

[条件] 2.1　　(i)　$0<c<\infty$ が存在して

$$P_x[\tau>t] = e^{-ct} \ ,\qquad x\in\mathcal{S},$$

Sem. on Probab.
Vol.23- I 1966年
P1-137

(ii) $q_n(x) = q_n$, $n = 0, 2, \cdots$ が定数，すなわちxに無関係。

以下この節ではこの条件が常にみたされているとする。

process $\{\xi_t\}$ の state space は $\mathbb{Z}^+ = \{0, 1, 2, \cdots, \infty\}$ である。いま ξ_s; $s \leq t$，より生成される σ-field を $N_t^{(\xi)}$ とし，

$$N_\infty^{(\xi)} = \bigvee_{t \geqq 0} N_t^{(\xi)}$$

とおく。また $\bar{x} \in \mathcal{S}^n$, $n \in \mathbb{Z}^+$，に対して，

$$P_n^{(\xi)}[B] = P_{\bar{x}}[B], \qquad B \in N_\infty^{(\xi)}$$

とおく。

Lemma 2.9　$P_{\bar{x}}[B]$, $\bar{x} \in \mathcal{S}^n$, $B \in N_\infty^{(\xi)}$ は $\mathcal{S}^n$ 上で定数，従って，$P_n^{(\xi)}$ は well-defined である。

[Proof]　$P_{\bar{x}}[\xi_t = m]$ が $\bar{x}$ の関数として，$\mathcal{S}^n$ 上では定数であることを言えばよい。そのためには，Theorem 2.1 により Property B. III に現われる諸量がその性質をもつことを言えばよい。ところが

$$(2.54) \qquad P_{\bar{x}}[\tau > t] = e^{-nct}, \quad \bar{x} \in \mathcal{S}^n, \quad n \in \mathbb{Z}^+$$

である。また

$$(2.55) \qquad P_{\bar{x}}[\tau \in dt, \xi_\tau = m] = \langle P.[t < \tau] \,|\, P.[\tau \in dt, \xi_\tau = m - n + 1] \rangle(\bar{x})$$

である。上式の右辺は Definition 2.4 によれば，$\mathcal{S}^n$ 上で定数。よって証明を終る。　q.e.d.

Proposition 2.14　右連続な branching Markov process で[仮定] 2.1 がみたされておれば，$\{\xi_t, N_t^{(\xi)}, P_n^{(\xi)}, n \in \mathbb{Z}^+\}$ は branching Markov process である。

[Proof]　まず Lemma 2.9 に注意する。$t_1 < t_2 < \cdots < t_p$ に対して

$$P_n^{(\xi)}[\xi_{t_1} = m_1, \cdots, \xi_{t_p} = m_p]$$
$$= P_{\bar{x}}[\xi_{t_1} = m_1, \cdots, \xi_{t_p} = m_p], \qquad \bar{x} \in \mathcal{S}^n$$

である。X_t の Markov 性より

$$= E_{\bar{x}}[\xi_{t_1} = m_1, \cdots, \xi_{t_{p-1}} = m_{p-1};\ P_{X_{t_{p-1}}}[\xi_{t_p - t_{p-1}} = m_p]]$$
$$= E_{\bar{x}}[\xi_{t_1} = m_1, \cdots, \xi_{t_{p-1}} = m_{p-1};\ P^{(\xi)}_{\xi_{t_{p-1}}}[\xi_{t_p - t_{p-1}} = m_p]]$$

Sem. on Probab.
Vol.23-Ⅰ 1966年
P1-137

再び Lemma 2.10 により,

$$= E_n^{(\xi)}[\xi_{t_1} = m_1, \cdots, \xi_{t_{p-1}} = m_{p-1} ; P^{(\xi)}_{\xi_{t_{p-1}}}[\xi_{t_p - t_{p-1}} = m_p]]$$

となるので, ξ_t の Markov 性が言える。

つぎに, Lemma 2.9 とつぎの事実に注意すれば結論が得られる。$g(x) = \lambda$, $x \in S$, $0 \leq \lambda < 1$, に対して

$$T_t \hat{g}(\bar{x}) = \widehat{T_t \hat{g}}(\bar{x})$$

一方

$$T_t \hat{g}(\bar{x}) = E_{\bar{x}}[\lambda^{\xi_t}] \ : \quad S^n \text{ 上で定数。}$$

故に

$$E^{(\xi)}_{\bullet}[\lambda^{\xi_t}] = \widehat{E_1^{(\xi)}[\lambda^{\xi_t}]}(\cdot)$$

であり, かつ $\hat{\lambda}$; $0 \leq \lambda < 1$, の linear hull は $C_0(\mathbb{Z}^+)$ の中で dense である。 q.e.d.

[Remark] Proposition 2.14 の場合は, 個数の process は連続系数の Galton-Watson process になっている。応用例では, しばしば仮定2.1 がみたされているので, この意味でも Galton-Watson process は branching Markov process の中で特に重要である。

Sem. on Probab.
Vol.23-I 1966年
P1-137

第3章　基本方程式

この章では branching process の semi-group やそれに関連した量がみたす方程式をしらべる。これらの方程式の解の性質やこれらの方程式から出発して branching process を構成する話は第7章であらためて論ずることにする。ただ，Skorohod equation については他の必要もあってこの章でその解の性質や一意性を論じておく。

§3.1 Moyal equation

Moyal [1] は Markov process をある特定の jump に関係する量とそれ以外の量とを分離して記述することを一般的に考え，一つの方程式を導いた。逆にその解より process の構成を考えた。現在の Markov process の理論で言えば，それは Markov time に関する Dynkin formula にすぎない。Dynkin の仕事とは一応別個に，Moyal はこれらを可算空間の step type の Markov process と branching process の類似性を念頭において，考えたと思われる。branching Markov process では first branching time が非常に重要な特別の役割を持つ時間であるので，それに関する Dynkin formula を特に Moyal equation と便宜的に呼ぶことにする。

この節ではつぎの条件がみたされているとする。

［仮定 3.1］　Branching Markov process X_t は強 Markov で branching system $\{\Pi(x, d\bar{y}) = \sum_{\substack{n=0\\ n\neq 1}}^{\infty} q_n(x)\Pi_n(x, d\bar{y}\cap \mathcal{S}^n)\}$ をもつ。*1)

定義より明らかなように，$\Pi(x, d\bar{y})$ は $\mathcal{S}\times(S-\mathcal{S})$ 上の正の kernel で $\Pi(x, S-\mathcal{S}) = 1 \quad \forall x\in\mathcal{S}$ である。

つぎに，X_t の non-branching part X_t^0 を考えよう。これに対して，§2.4 で導入した $T_t^{(0)}$, $\Psi^{(1)}(\bar{x}; dsd\bar{y}) = \Psi(\bar{x}; dsdy)$ を考えよう。いま念のた

---

*1) $X_{\tau-}$ の存在も併せ仮定する。

Sem. on Probab.
Vol.23-Ⅰ 1966年
P1-137

めに，繰返しのべると，τを X_t の *first branching time* とするとき，$f \in \mathbb{B}(S)$ に対して，

$$T_t^{(0)} f(\bar{x}) = E_{\bar{x}}[f(X_t);\ t < \tau] \quad , \qquad \bar{x} \in S .$$

また

$$\Psi(\bar{x};dt\,d\bar{y}) = P_{\bar{x}}[\tau \in dt,\ X_\tau \in d\bar{y}] ,\quad \bar{x} \in S ,\quad d\bar{y} \subset S ,$$

である。

このとき，既に§2.3 の *Theorem* 2.1 の証明でしばしば用いたことであるが，ここであらためてまとめてのべるとつぎの事実が成りたつ。

Proposition 3.1 1°）任意の $f \in \mathbb{B}(S)$ に対して，

$$T_t f(\bar{x}) = T_t^0 f(\bar{x}) + \int_0^t \int_S \Psi(\bar{x};dr\,d\bar{y})\, T_{t-r} f(\bar{y}) ,\quad \bar{x} \in S,\ t > 0 . \tag{3.1}$$

2°）$\bar{x} \in S$ に対して，

$$\begin{cases} T_t^0 1(\bar{x}) + \Psi(\bar{x};[0,t] \times S) = 1 \\ \Psi(\bar{x};[0,t]\times d\bar{y}) = \Psi(\bar{x};[0,r]\times d\bar{y}) + T_r^0[\Psi(\cdot;[0,t-r]\times d\bar{y})](\bar{x}) , \end{cases} \tag{3.2}$$
$$0 \le r < t .$$

[*Proof*] (3.1) はこれまでしばしば用いた *Dynkin* の公式を *first branching time* に適用したもの自身である。

2°）の最初の式は T_t^0 と Ψ の定義より明らか。後の式は

$$\Psi(\bar{x};[0,t]\times d\bar{y}) = P_{\bar{x}}[0 \le \tau \le r,\ x_\tau \in d\bar{y}] + P_{\bar{x}}[r < \tau \le t,\ x_\tau \in d\bar{y}]$$

$$= \Psi(\bar{x};[0,r]\times d\bar{y}) + E_{\bar{x}}[r < \tau;\ P_{X_r}[\tau \le t-r,\ X_\tau \in d\bar{y}]]$$

$$= \Psi(\bar{x};[0,r]\times d\bar{y}) + T_r^0[\Psi(\cdot;[0,t-r]\times d\bar{y})](\bar{x}) ,$$

より示される。 *q.e.d.*

[*Remark*] *Proposition* 3.1 の 1°)，2°) は *Moyal* [1] で (P^0; 4)-*condition* と呼ばれているもので，彼は例えば (3.2) のような条件の下で (3.1) の解を求める問題を論じている。

つぎに，§2.2 の *Theorem* 2.1 と *Property* B.Ⅲ とに注意すれば，(3.1) 式をつぎの形に変形できる。

いま，

Sem. on Probab.
Vol.23- I 1966年
P1-137

$$K(x;\, dt\,dy) = P_x[\tau\in dt,\ X_{\tau-}\in dy] \qquad x\in\mathcal{S},\quad dy\subset\mathcal{S},$$

(3.3)

$$F[x;f] = \int_{S-\mathcal{S}} \Pi(x,d\bar{y})\,\hat{f}(\bar{y}) \qquad x\in\mathcal{S}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} q_n(x)\int_{\mathcal{S}^n}\Pi_n(x,d\bar{y})\,\hat{f}(\bar{y})$$

とおく。このとき

<u>Proposition 3.2</u>　任意の $f\in\mathbb{B}^*(\mathcal{S})$ に対し

(3.4) $$T_t\hat{f}(\bar{x}) = \widehat{T_t^0\hat{f}|_{\mathcal{S}}}(\bar{x}) + \int_0^t \langle (T_s^0(T_{t-s}\hat{f}))|_{\mathcal{S}} \,\Big|\, \int_{\mathcal{S}} K(\cdot\,;dsdz)F[z;T_{t-s}\hat{f}|_{\mathcal{S}}]\rangle$$

がなりたつ。[*1)]

[Proof]　Theorem 2.1 により Property B. III がなりだつ。それをこれまで導入した記号（第２章 (2.32)）を用いてかくと (3.4) 式になる ((2.38)式参照)。

q. e. d.

これから Moyal equation を branching process と一応独立に定義するために $\{T_t^0, K, q_n, \Pi_n\}$ は branching process とは無関係にあたえられていると考える。

<u>Definition 3.1</u>　$\{T_t^0, K, q_n, \Pi_n\}$ は次の条件をみたす system である。

1°) $\mathcal{S}$ 上の Markov process $X^0=\{X_t^0,\ \zeta^0,\ P_x^0,\ x\in\mathcal{S}\}$ [*2)] があたえられ，しかも $X^0_{\zeta^0-}$ が $\mathcal{S}$ 上に定義可能とする。こゝで ζ^0 は X^0 の life time とする。そのとき，$\{T_t^0,\ K\}$ はつぎの式で定義される量である。

$$T_t^0 f(x) = E_x^0[f(X_t^0);\ t<\zeta^0] \qquad x\in\mathcal{S},\quad f\in\mathbb{B}(\mathcal{S}),$$

(3.5)

$$K(x;\,dtdy) = P_x^0[\zeta^0\in dt,\ X^0_{\zeta^0-}\in dy], \qquad x\in\mathcal{S},\quad dy\subset\mathcal{S}.$$

2°) (a) $\{q_n(x);\ n=0,1,2,\cdots+\infty\}$ は $\mathcal{S}$ 上の非負可測関数列で，

(3.6) $$\sum_{n=0}^{\infty} q_n(x) = 1, \quad x\in\mathcal{S}, \qquad q_1(x)=0, \quad x\in\mathcal{S},$$

---

*1) $T_t^0\hat{f}|_{\mathcal{S}} = T_t^0 f \quad x\in\mathcal{S}$ であるが，(3.4)式を $\hat{f}$ に関する式と考えることが大切であるのでこのようにかいた。

*2) 正確にいえば　$\mathcal{S}\cup\delta$ 上の死点 δ をもつ Markov 過程 X_t^0 。ζ^0 は δ への hitting time である。

Sem. on Probab.
Vol.23-Ⅰ 1966年
P1-137

をみたす。

(b) $\{\pi_n(x, d\bar{y})\,;\ n=0,1,2,\cdots,+\infty\}$ は $S\times S^n$ 上の kernel で

$$\pi_n(x, S^n)=1, \qquad x\in S, \qquad n=0,1,2,\cdots$$

とする。

第2章でのべたように，2°）の $\{q_n, \pi_n\}$ をあたえることと $\pi(x, S-S)=1$ なる $S\times(S-S)$ 上の正の kernel を与えることとは同じことであるので，system $\{T_t^0, K, q_n, \pi_n\}$ というかわりに system $\{T_t^0, K, \pi\}$ ということもある。もし仮定 3.1 をみたす branching Markov process X があれば，その non-branching part X^0 と，その branching system π から Def. 3.1 の system (T_t^0, K, π) が定まる。これを branching process X に対応する system (T_t^0, K, π) ということにする。

今このような system (T_t^0, K, π) があたえられたとき，それを S 上の半群及び kernel へ拡張することを考える。そのために必要な lemma をまずのべる。

Lemma 3.1　$\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_k$ を $S-\{\Delta\}$ 上の total variation 有限な signed measure とする。このとき $S-\{\Delta\}$ 上の signed measure μ で，任意の $f\in \mathbb{C}^*(S)$ に対し

$$(3.7)\qquad \int_{S-\{\Delta\}} \hat{f}\, d\mu = \prod_{i=1}^{k} \int_{S-\{\Delta\}} \hat{f}\, d\nu_i$$

となるものが唯1つ存在する。今この μ を

$$\mu = \nu_1 \otimes \nu_2 \otimes \cdots \otimes \nu_k$$

であらわすことにすると

$$(3.8)\qquad |\mu| = |\nu_1| \otimes |\nu_2| \otimes \cdots \otimes |\nu_k| \ ^{*1)}$$

$$(3.9)\qquad \mu(S-\{\Delta\}) = \prod_{i=1}^{k} \nu_i(S-\{\Delta\})$$

がなりたつ。したがって特に ν_i が正の測度ならば μ も正の測度 ν_i が確率測度ならば μ も確率測度である。

[Proof]　$k=2$ のとき示せば十分である。

$$\nu_i(f) \equiv \int_{S-\{\Delta\}} \hat{f}\, d\nu_i \qquad i=1,2 \qquad \text{としよう。}$$

---

*1) $|\mu|, |\nu|$, はそれぞれ μ, ν の total variation をあらわす。

Sem. on Probab.
Vol.23- I 1966年
P1-137

$$\nu_i(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{s^n} f(x_1) \cdots f(x_n)\, d\nu_i \qquad \text{より} \quad ^{*1)}$$

$$\nu_1(f)\,\nu_2(f) = \sum_{n,m=0}^{\infty} \int_{s^n \times s^m} f(x_1)\cdots f(x_n) f(y_1) \cdots f(y_m)\, d\nu_1(\bar{x})\, d\nu_2(\bar{y})$$

今 $\gamma :\ s^n \times s^m \longrightarrow s^{n+m}$ を第2章と同様に定義すると[*2)]

$$(3.10) \qquad \mu\big|_{s^{n+m}} = (\nu_1\big|_{s^n} \times \nu_2\big|_{s^m}) \circ \gamma^{-1}, \quad n,m = 0,1,2,\cdots$$

で定義される $S-\{\Delta\} = \bigcup_{n=0}^{\infty} s^n$ 上の測度 μ に対しあきらかに (3.7) がなりたつ。このような μ が一意的なことは第2章 *Lemma* 2.1 より明らか。又 (3.8) は一般に直積測度に関し $|\lambda \times \mu| = |\lambda| \times |\mu|$ の関係がなりたつことよりすぐわかる。又 (3.9) は (3.10) より $\mu(s^{n+m}) = \nu_1(s^n) \times \nu_2(s^m)$ となることよりすぐわかる。 *q.e.d.*

この *lemma* を用いて

Proposition 3.3　Def.3.1 の *system* $\{T_t^0, K, \pi\}$ があたえられたとする。

そのとき，1°) 各 $n = 0,1,2,\cdots,+\infty$ [*3)] に対し $s^n \times s^n$ 上の *kernel* $T^0(t,\bar{x},d\bar{y})$ で

$$(3.11) \qquad \int_{s^n} T^0(t,\bar{x},d\bar{y})\,\hat{f}(\bar{y}) = \widehat{T_t^0 f}(\bar{x}) \qquad {}^\forall f \in \mathbb{C}^*(s)$$

となるものが唯1つ存在する。$T^0(t,\bar{x},d\bar{y})$ は $(t\,x)$ を固定すると正の測度で $T^0(t,\bar{x},s^n) \leqq 1$, $\bar{x} \in s^n$, である。

2°) $S \times ([0,\infty) \times S)$ 上の正の *kernel* $\Psi(\bar{x}, ds\,d\bar{y})$ で

$$(3.12) \qquad \int_0^t \int \Psi(\bar{x}\,;ds\,d\bar{y})\,\hat{f}(\bar{y}) = \int_0^t \langle T_s^0 f \,|\, \int_s K(\cdot\,;ds\,dz)\,F[z;f] \rangle(\bar{x}) \ ^{*4)}$$

${}^\forall f \in \mathbb{C}^*(s)$ かつ

---

*1) $n = 0$ のとき $f(x_1)\cdots f(x_n) \equiv 1$ と理解する。

*2) すなわち $\bar{x} \in s^n$, $\bar{y} \in s^m$ に対し $\gamma(\bar{x},\bar{y}) \in s^{n+m}$ は $\bar{x}$ と $\bar{y}$ の両方の代表点から作った点を含む組。

*3) $n = +\infty$ のとき，$T^0(t,\Delta\,\{\Delta\}) = 1$ と定める。

*4) $F[z\,;f] = \int_{S-s} \pi(z,d\bar{y})\,\hat{f}(\bar{y})$, $f \in \overline{\mathbb{C}}^*(s)$

又 $\langle f|g \rangle$ の記号は第2章 (2.32) をみよ。

Sem. on Probab.
Vol.23-Ⅰ 1966年
P1-137

(3.13) $\Psi(\bar{x};[0,t]\times S)=1-T^0(t,\bar{x},S_n)$, $\bar{x}\in S_n$
$n=0,1,2\cdots+\infty$

となるものが唯1つ存在する。

3°) $f\in\mathbb{B}(S)$ に対し, 1°) で定まる T^0 を用いて

(3.14) $\boldsymbol{T}_t^0 f(\bar{x}) = \int_{S^n} T^0(t,\bar{x},d\bar{y})f(\bar{y})$, $\bar{x}\in S^n$, $n=0,1,2,\cdots,+\infty$

とおくと, $\boldsymbol{T}_t^0$, Ψ は Prop. 3.1 の (3.2) をみたす。

[Proof] まず (3.11), (3.12) によって $S-\{\Delta\}$ 上の正の測度 $T^0(t,\bar{x},\cdot)$ $\Psi(\bar{x};ds\,\cdot)$ が定まることは Lemma 3.1 よりわかる。あきらかに, $\bar{x}\in S^n$ ならば $T^0(t,\bar{x},d\bar{y})$ は S_n 以外に mass をもたない。

又, $F(x,1)\leq 1$ より

$$\Psi(\bar{x};[0,t]\times(S-\{\Delta\}))\leq\int_0^t\langle T_s^0 1\,|\int_S K(\cdot\,;ds\,dz)\rangle(\bar{x})$$

そこで $\Psi(\bar{x};[0,t]\times\{\Delta\})=\int_0^t\langle T_s^0 1\,|\int_S K(\cdot\,;ds\,dz)\rangle(\bar{x})$

$-\Psi(\bar{x};[0,t]\times(S-\{\Delta\}))$ とおく。

したがって $\Psi(\bar{x};[0,t]\times S)=\int_0^t\langle T_s^0 1\,|\int_S K(\cdot\,;ds\,dz)\rangle(\bar{x})$

ところが定義によって

(3.15) $T_t^0 1(x)+K(x;[0,t]\times S)=1$ であるから

$$\Psi(\bar{x};[0,t]\times S)(\bar{x})=\int_0^t\langle T_s^0 1\,|-d_s T_s^0 1\rangle(\bar{x})$$

である. $\bar{x}=\partial,\Delta$ の時は (3.2) が成立つのは明らかであるので, $\bar{x}\in S^n$, $n=1,2,\cdots$ としよう。そのときは Lemma 2.7 の証明の時と同じにして

$$\Psi(\bar{x};[0,t]\times S)(\bar{x})=-\widehat{T_s^0 1}(\bar{x})+1$$

が言える。故に (3.2) の第1の式が示された。

つぎに,

$$\int_0^t\int_S\Psi(\bar{x};ds\,d\bar{y})\hat{f}(\bar{y})=\int_0^r\int_S\Psi(\bar{x};ds\,d\bar{y})\hat{f}(\bar{y})$$
$$+\int_r^t\langle T_s^0 f\,|\int_S K(\cdot\,;ds\,dz)\,F[z;f]\rangle(\bar{x})$$
$$=\int_0^r\int_S\Psi(\bar{x};ds\,d\bar{y})\hat{f}(\bar{y})+\int_0^{t-r}\langle T_{s+r}^0 f\,|\int_S K(\cdot\,;ds(r+s)dz)F[z;f]\rangle(\bar{x})$$

Sem. on Probab.
Vol.23-Ⅰ 1966年
P1-137

$$=\int_0^r\int_S \Psi(\bar{x};dsd\bar{y})\hat{f}(\bar{y})+\int_0^{t-r}\langle T_r^\circ T_s^\circ f|\int_S T_r^\circ K(\cdot;dsdz)F[z;f]\rangle(\bar{x})$$

$$=\int_0^r\int_S \Psi(\bar{x};dsd\bar{y})\hat{f}(\bar{y})+\boldsymbol{T}_r^\circ\left\{\int_0^{t-r}\langle T_s^\circ f_{|s}|\int_S K(\cdot;dsdz F[z;f]\rangle\right\}(\bar{x})$$

$$=\int_0^r\int_S \Psi(\bar{x};dsd\bar{y})\hat{f}(\bar{y})+\boldsymbol{T}_r^\circ\left\{\int_0^{t-r}\int_S \Psi(\cdot;dsd\bar{y})\hat{f}(\bar{y})\right\}(\bar{x})$$

Lemma 2.1 の(iii)に注意して(3.2)の後半の式が得られた。 *q.e.d.*

今，*Def.* 3.1によって *system* $\{T_t^\circ, K, \Pi\}$ があたえられたとき，*Prop.* 3.3によって $\boldsymbol{T}_t^\circ$，Ψを構成する。

<u>*Definition* 3.2</u>　$f\in\mathbb{C}(S)$に対し

(3.16) $$u_t(\bar{x})=\boldsymbol{T}_t^\circ f(\bar{x})+\int_0^t\int_S \Psi(\bar{x};dsd\bar{y})u_{t-r}(\bar{y}), \quad \bar{x}\in S$$

を（$\{T_t^\circ, K, \Pi\}$に対応する） *Moyal equation*（*M-equation*）という。(3.16)の解を初期値 $f(\bar{x})$ の *M-equation* の解という。（明らかに $u_{0+}(\bar{x})=f(\bar{x})$ となるのでこのようにいう。）

<u>*Theorem* 3.4</u>　仮定3.1をみたす *branching Markov process* X_t に対して $u_t(\bar{x})=T_tf(\bar{x})$ は X_t に対応する *system* $\{T_t^\circ, K, \Pi\}$ に対応する *M-equation* の初期値 $f(\bar{x})$ の解である。*1)

<u>[*Proof*]</u>　*Prop.*3.2によって $f(\bar{x})$ が $\hat{f}(\bar{x})$，$f\in\mathbb{C}^*(S)$ ならばいえている。ところで，*Lemma* 2.1 より $\sum c_i\hat{f}(\bar{x})$ が $\mathbb{C}_0(S)$で *dense* なことよりすべての $f\in\mathbb{C}(S)$ でいえる。

<u>§3.2 *Skorohod equation*</u>

第1章でのべたように，*Skorohod* [1] は *branching Markov process* の *semi-group* T_t がみたす基本方程式を導いた。そのことによって，例えば§2.1でのべたところの $e_\Delta(t,\bar{x})$，$e_\partial(t,\bar{x})$，$\varphi(\bar{x},t)$等についての古くから知られていた積分方程式に *Markov* 過程論の見地からの統一があたえられた。*2)

---

*1) このように *system* $\{T_t^\circ, K, \Pi\}$ がある *branching system* X_t に対応したものであるとき，その *M-equation* を <u>X_t に対応した *M-equation*</u> ということがある。

Sem. on Probab.
Vol.23-Ⅰ 1966年
P1-137

まずここでも Def. 3.1 の system $\{T_t^\circ, K, \Pi\}$ があたえられたとする。前節と同様に $F[x; f] = \int_{S-\mathcal{S}} \Pi(x; d\bar{y}) \hat{f}(\bar{y})$ とおく。

Definition 3.3

$$(3.17) \qquad u_t(x) = T_t^\circ f(x) + \int_0^t \int_{\mathcal{S}} K(x; ds\,dy) F[y; u_{t-s}], \qquad x \in \mathcal{S},$$

を system $\{T_t^\circ, K, \Pi\}$ に対応する Skorohod equation (S-equation) という。(3.17) の解を初期値 f の S-equation の解という。(このことは容易にわかるごとく (3.17) の解であれば $u_{0+}(x) = f(x)$ となることよりそのようにいう。)

Theorem 3.5 仮定 (3.1) をみたす X_t に対し $\{T_t^\circ, K, \Pi\}$ を X_t に対応する Def. 3.1 の system とすると

$$u_t(x) \equiv T_t f(x) \quad , \qquad x \in \mathcal{S}$$

は $\{T_t^\circ, K, \Pi\}$ に対応する S-equation の解である。

[Proof] Moyal equation (3.4) を $\mathcal{S}$ の上でながめれば (3.17) になる。

q.e.d.

この証明よりあきらかなように, (3.17) は (3.4) の $\mathcal{S}$ への制限に他ならない。しかし, branching process の semi-group はその $\mathcal{S}$ 上への制限から全体が決定されるという特性があるので, この方程式は branching Markov process の研究において重要な役割をはたしている。

以下, 一応 branching Markov process をはなれて与えられた Def. 3.1 の system (T_t°, K, Π) に対応する S-equation の解の性質や解の構成などを論じよう。

Proposition 3.6 今, $q_\infty(x) \equiv 0$ とすると $f = 1$ に対し $u_t \equiv 1$ は初期値 1 の S-equation (3.17) の解である。

[Proof] $q_\infty(x) \equiv 0$ のときは

$F[x; 1] \equiv 1$ である。又, Def. 3.1 の仮定より

$T_t^\circ 1 + \int_0^t \int_{\mathcal{S}} K(x; ds\,dy) = 1$

であるので, この2つより明らかである。 q.e.d.

---

*2) 前の Moyal equation の場合と同様に, この方程式の特別な場合は古くから色々知られているので, これを Skorohod equation と呼ぶのは適当でないかも知れないが, このノートでは便宜上そのように呼ぶことを許していただきたい。

Sem. on Probab.
Vol.23-Ⅰ 1966年
P1-137

Remark　Th. 3.5 によって $T_t\hat{1}(x)=e_\Delta(t,x)$ は初期値 1 の S-equation の解である．一般には $q_\infty(x)\equiv 0$ であっても $e_\Delta(t,x)<1$ となることがあるので，初期値 1 に対する S-equation の解の一意性は一般にはこわれる。しかし，初期値 f が $0\leqq f<1$ のときには，だいたい解の一意性が保障される。このことはすぐ下で論じる。（なお，第5章§5.1 の Dynkin の定理参照）。

次に $f\in C(S)$ ，$0\leq f\leq 1$ なる f を初期値にもつ Skorohod equation の解の 1 つが次のように逐次近似によって容易に構成される。しかもこの解は $0\leq u_t\leq 1$ となる解の中で最小なものである。

まず $\{u_k(t,x)\}$ をつぎの式により逐次的に定義する。

$$(3.18)\qquad \begin{cases} u_0(t,x)\equiv 0 \\ u_k(t,x)=T_t^0 f(x)+\int_0^t\int_S K(x;drdy)F[y;u_{k-1}(t-r,\cdot)], \quad k=1,2,\cdots \end{cases}$$

Proposition 3.7　1°）任意の k に対して

$$(3.19)\qquad u_k(t,x)\leq u_{k+1}(t,x) \quad , \quad t\ \ 0,\ \ x\in S,$$

である。

2°）1°）により $u_\infty(t,x)=\lim_{k\to\infty}u_k(t,x)$ が定義可能で，$u_\infty(t,x)$ は初期待 f の Skorohod equation の解で，同じ初期値をもつ Skorohod equation の任意の non-negative な解 $v(t,x)$ に対して

$$(3.20)\qquad 0\leq u_\infty(t,x)\leq v(t,x) \quad , \quad t>0,\quad x\in S,$$

の関係をみたす。また，

$$(3.21)\qquad u_\infty(t,x)\leq 1 \quad , \quad t>0,\quad x\in S,$$

である。

[Proof]　この証明では，$g_1(x)\leq g_2(x)$，$x\in S$，$0\leq g_1$，$g_2\leq 1$ ならば

$$F[x,g_1]\leq F[x,g_2]$$

が成りたつことが重要な役割を果たす。ある $k\geqq 0$ に対して (3.20) が成立つとすると

$$u_{k+1}(t,x)=T_t^0 f(x)+\int_0^t\int_S K(x;drdy)F[y;u_k(t-r,\cdot)]$$

Sem. on Probab.
Vol.23- I 1966年
P1-137

$$\leq T_t^0 f(x) + \int_0^t \int_S K(x; drdy) F[y; u_{k+1}(t-r, \cdot)]$$

$$= u_{k+2}(t, x)$$

となるので，induction によりすべてのkに対して成りたつ。というのは，$k=0$ の時は，(3.19) は定義より明らかであるから。よって 1°) が言える。$u_\infty(t,x)$ の定義可能性は明らか。

つぎに，仮定より，

$$u_0(t, x) \leq v(t, x)$$

は明らか。いまあるkに対して，

$$u_k(t,x) \leq v(t,x) \quad , \quad t>0 , \quad x \in S ,$$

として induction を用いよう。そのとき，

$$u_{k+1}(t,x) = T_t^0 f(x) + \int_0^t \int_S K(x; drdy) F[y; u_k(t-r, \cdot)]$$

$$\leq T_t^0 f(x) + \int_0^t \int_S K(x; drdy) F[y; v(t-r, \cdot)]$$

$$= v(t, x) .$$

故に (3.20)を得る。

(3.21) は (3.20) と *Proposition* 3.4 より結論される。

$u_\infty(t,x)$ が (3.23)の第一式をみたすことは，(3.18) で $k \to \infty$ とすることにより容易に示される。そのとき，極限と積分の順序交換を行なうが，それらの可能性も明らか。

<u>*Proposition* 3.8</u>　　$f, g \in \mathbb{C}(S)$， $0 \leq f \leq g \leq 1$ とする。その時，初期値 f，g の逐次近似による *Proposition* 3.5の解をそれぞれ $u_\infty(t,x;f)$，$u_\infty(t,x;g)$ とする。そのとき

(3.22)　　$u_\infty(t,x;f) \leq u_\infty(t,x;g)$,　 $t>0$,　$x \in S$

がなりたつ。

<u>[*Proof*]</u>　　証明は再び induction による。明らかに，

$$u_1(t,x;f) = T_t^0 f \leq T_t^0 g = u_1(t,x;g)$$

である。あるkに対して

(3.23)　　$u_k(t,x;f) \leq u_k(t,x;g)$

Sem. on Probab.
Vol.23-Ⅰ 1966年
P1-137

としよう。そのとき

$$u_{k+1}(t,x;f)=T_t^\circ f(x)+\int_0^t\int_S K(x;drdy)F[y;u_k(t-r,\cdot;f)]$$

$$\leq T_t^\circ f(x)+\int_0^t\int_S K(x;drdy)F[y;u_k(t-r,\cdot;g)]$$

$$=u_{k+1}(t,x;g)$$

故に任意の k に対して (3.23) が成りたつ。依って結論が得られる。 *q.e.d.*

Remark　Proposition 3.3 の方法で，Skorohod equation があれば，それに対応する Moyal equation が構成される。しかも $f\in\mathbb{C}^*(S)$ に対して，branching Markov process の semi-group T_t により，$T_t\hat{f}$ をつくると，それは Skorohod equation と Moyal equation 双方の解である。一般にこの両者の間には興味ある関係があるが，それらについては第7章であらためて論ずる。

以下，よりくわしく Skorohod equation の解の一意性やその性質を論ずるため，少し状況をせばめて Def. 3.1 の system $\{T_t^\circ, K, \Pi\}$ に次の仮定をもうける。

仮定 8.2　Def. 3.1 の system $\{T_t^\circ, K, \Pi\}$ は次の条件をみたすとする。

1) 今，$\{T_t^\circ, K\}$ を与える S 上の Markov 過程 X_t° は次のようなものである。$\mathbb{C}(S)$ 上の強連続，正かつ $U_t1=1$ なる半群 U_t と $k(x)\in\mathbb{C}(S)^+$ に対し X_t° は U_t に対応する Hunt 過程 $\tilde{X}_t$ の $e^{-\int_0^t k(\tilde{X}_s)ds}$ sub-process である。

このとき次のことはよく知られている。T_t° は $\mathbb{C}(S)$ 上の強連続な半群でその生成作用素 $\mathfrak{G}^\circ$ の domain を $D(\mathfrak{G}^\circ)$，U_t の生成作用素 $\mathfrak{G}$ の domain を $D(\mathfrak{G})$ とすると

$$(3.24)\qquad D(\mathfrak{G}^\circ)=D(\mathfrak{G})\qquad\text{かつ}\qquad \mathfrak{G}^\circ=\mathfrak{G}-k \quad {}^{*1)}$$

又，第1章§2より K は次のようになる。

$$(3.25)\qquad \int_0^t\int_S K(x,dsdy)f(y)=\int_0^t T_s^\circ(k,f)\,ds\qquad \forall f\in\mathbb{C}(S)\quad x\in S$$

*1) これを T_t° の定義と考えてもよい。

Sem. on Probab.
Vol.23- I 1966年
P1-137

2) $\mathcal{S}\times(S'-\mathcal{S})$ 上の kernel $\pi(x,d\bar{y})$ は次の性質をみたす。前と同じように $F[x;f]=\int_{S-\mathcal{S}}\pi(x,d\bar{y})\hat{f}(\bar{y})$ とおくと $^\forall f\in\mathbb{C}^*(\mathcal{S})^+$ に対し $F[x;f]\in\mathbb{C}(\mathcal{S})$ となる。*1)

Proposition 3.9 仮定3.2をみたすDef. 3.1の system $\{T_t^0, K, \pi\}$ があたえられたとき，それに対応する Skorohod equation (3.17) は $f\in\mathbb{C}(\mathcal{S})$ $0\leqq f<1$ に対し $0\leq u_t\leq 1$ なる unique な解 u_t をもつ。この解を $u_t(x)\equiv u_t(x;f)$ とかくと

a) $\|u_t(\cdot;f)-f\|\longrightarrow 0 \qquad (t\downarrow 0)$

b) $u_t(\cdot;f)\in\mathbb{C}(\mathcal{S})$

c) $0\leq u_t(\cdot;f)<1$ 　　　　　　　がなりたつ。

証明に先だち次の Lemma を示す。

Lemma 3.2 　$0<r<1$ に対し定数 C_r が存在し，$f, g\in\mathbb{C}(\mathcal{S})$，$0\leqq f$, $g\leqq r$ なる任意の f, g に対し

$$(3.26)\qquad \|\hat{f}-\hat{g}\|_S\leq C_r.\|f-g\|_{\mathcal{S}}$$

Proof 　$\hat{f}(\bar{x})-\hat{g}(\bar{x})=\prod_{j=1}^{n}f(x_i)-\prod_{j=1}^{n}g(x_i)$

$$=\sum_{k=1}^{n}(f(x_k)-g(x_k))f(x_1)\cdots f(x_{k-1})g(x_{k+1})\cdots g(x_n)$$

故に $\|\hat{f}-\hat{g}\|\leq(\sup_n n, r^{n-1})\|f-g\|$

q.e.d.

この Lemma よりただちに $0<r<1$ のとき $f, g\in\mathbb{C}(\mathcal{S})$ $0\leqq f$, $g\leqq r$ なる任意の f, g に対し

$$(3.27)\qquad |F[x;f]-F[x;g]|\leq C_r\|f-g\|$$

となることがわかる。

Proposition 3.9 の証明

Prop. 3.7 において定義された $u_k(t,x)$，$u_\infty(t,x)$ を考える。まず $u_t(\cdot;$

---

*1) T_t^0 が strong Feller すなわち $\mathbb{B}(\mathcal{S})\to\mathbb{C}(\mathcal{S})$ ならば，この条件は必ずしも必要でない。

Sem. on Probab.
Vol.23-Ⅰ 1966年
P1-137

$f) = u_\infty(t,x)$ に対し，a), b), c) のなりたつことをみよう。

最初に次のことがなりたつことに注意する。$0 \le g \le 1$ に対し

$$
\begin{aligned}
(3.28) \qquad 0 &\le T_t^0 f + \int_0^t \int_S K(x; ds dy) F[y; g] \\
&\le T_t^0 f + \int_0^t \int_S K(x; ds dy) \\
&= T_t^0 f(x) + 1 - T_t^0 1 = 1 - T_t^0 (1-f)
\end{aligned}
$$

ところが　$1-f>0$　であるので，任意の $T>0$ に対し $A_T<1$ が存在し $1-T_t^0(1-f) \le A_T$，$\forall t \in [0,T]$　となる。

したがって，$\sup_{0\le t\le T} \|u_n(t,\cdot)\| \le A_T$　かつ　$\sup_{0\le t\le T} \|u_\infty(t,\cdot)\| \le A_T$　がなりたつ。故に c) が示された。

c) と (3.27) に注意すると ((3.25) を用いて)　$t\in[0,T]$ のとき

$$
\|u_n(t,\cdot)-u_{n-1}(t,\cdot)\| = \left\|\int_0^t ds \int_S P^0(s,\cdot\, dy) k(y) \{F[y; u_{n-1}(t-s,\cdot)] - F[y; u_{n-2}(t-s,\cdot)]\}\right\|
$$

$$
\leqq \|k\| C_{A_T} \int_0^t \|u_{n-1}(s,\cdot) - u_{n-2}(s,\cdot)\| ds
$$

がなりたつ。これをくりかえすことにより

$$
\sup_{0\le t\le T} \|u_n(t,\cdot)-u_{n-1}(t,\cdot)\| \le \frac{(KC_{T_A})^n}{n!} T^n
$$

となり

$u_\infty(t,\cdot) = \lim u_n(t,\cdot)$　が　$\mathbb{C}(S)$ の topology でいえる。$u_n(t,\cdot) \in \mathbb{C}(S)$ はあきらかであるので，$u_\infty(t,\cdot)\in\mathbb{C}(S)$ がわかる。かくして b) が示された。次に

$$
\|u_\infty(t,\cdot)-f\| \leqq \|f-T_t^0 f\| + \left\|\int_0^t\int_S K(\cdot\,; ds dy)\right\|
$$

$$
\leqq \|f-T_t^0 f\| + \|1-T_t^0 1\| \underset{t\downarrow 0}{\longrightarrow} 0
$$

故に a) も示された。

最後に解の uniqueness であるが，(3.17) の $0\le u_t \le 1$ なる解は (3.28) によって　$\sup_{0\le t<T} \|u_t\| \le A_T$　をみたす。

すると，上と同じ計算によって

Sem. on Probab.
Vol.23-Ⅰ 1966年
P1-137

$$\sup_{0\le t\le T}\|u_t-u_\infty(t,\cdot)\|\le (KC_{T_A})^n\int_0^t dt_1\int_0^{t_1}\cdots\int_0^{t_{n-1}}dt_n\,\|u_{t_n}-u_\infty(t_n\cdot)\|$$

となり $u_t\equiv u_\infty(t,\cdot)$ がなりたつことがわかる。 q.e.d.

§3.3. Semi-linear parabolic equation (Backward equation)

すでに第0章でのべたように，Kolmogoroff-Petrovsky-Piscunoff [1] は1937年に遺伝に関する Fisher [1] の研究に出て来る方程式を理想化して，semi-linear parabolic equation の典型的なあるクラスを定式化し，その性質を研究した。われわれの知る限りでは，確率論に semi-linear equation が体系的に現われたのは，これが最初と思われる。彼等が取り上げたものはつぎの形のものであった。

$$(3.29)\qquad \frac{\partial v}{\partial t}=\frac{1}{2}\Delta v+U(v),$$

こゝで $U(\xi)$ は ξ に関し連続で，必要な回数だけ微分可能であり，さらにつぎの条件をみたす：

$$(3.30)\qquad \begin{cases} U(0)=U(1)=0, \\ U(\xi)>0, \quad 0<\xi<1, \\ U'(0)=\alpha>0, \text{ かつ } U'(\xi)<\alpha, \quad 0<\xi<1. \end{cases}$$

(3.30) の条件の下で，方程式 (3.29) を研究することは，もう少し一般化された形で偏微分方程式の研究に数多く表われている。わが国でもいくつかの研究があるが，例えば Murakami [1] 等もその系統に属すると言えるだろう。また (3.30) の条件は単に技術的なものでなく，応用の際に対象の構造から規定される条件のある一種として出て来る。それらのことも含め，semi-linear な場合についての重要な注意が Gelfand [1] に与えられている。ところで (3.29) の型の微分方程式が branching process の理論に重要な役割をはたすことが知られている。例えば $U(x;\xi)=\xi(1-\xi)|x|^\gamma$， $\gamma>0$ は (3.30) の条件をみたしているが，これがある branching Markov process と関係のあることは Ito-McKean [1] によって示された。さらに Skorohod [1] は Skorohod-equation から (3.29) の形の non-linear equation を導いている。しかし，Skorohod の議論はあまりにも簡単にのべられ，S上の半群との関連も明確には

Sem. on Probab.
Vol.23-Ⅰ 1966年
P1-137

論じられていないので，ここではそれをくわしく論じてみる。

この節では，仮定3.1をみたすBranching Markov process X_t があたえられ，それに対応するDef. 3.1のsystem (T_t^o, K, Π) は前節の仮定3.2をみたすと仮定する。

このとき，まず X_t に対応する半群 T_t は $\mathbb{C}_0(S)$ 上の強連続な半群になっていることを示そう。

Proposition 3.10　X_t は仮定3.1をみたすBranching Markov process で，それに対応するDef. 3.1のsystem (T_t^o, K, Π) は仮定3.2をみたすとする。このとき，X_t の半群は $\mathbb{C}_0(S)$ 上の強連続な半群である。

[Proof]　$0 \leqq f < r$ に対し $(r < 1)$，$u_t(x) = T_t\hat{f}(x)$　$x \in \mathcal{S}$ は S-equation (3.17) の解であるが，Prop. 3.9により $0 \leqq u_t(\cdot) < 1$ かつ $u_t \in \mathbb{C}(\mathcal{S})$ であった。故に，$T_t\hat{f}(\bar{x}) = \hat{u}_t(\bar{x}) \in \mathbb{C}_0(S)$ がわかる。また $\|u_t(x) - f\| \to 0$ であったが，これとLemma 3.2より $\|T_t\hat{f} - \hat{f}\|_S \to 0$ がわかる。

すると後は Lemma 2.1，(iii)により直ちにProp. 3.10がなりたつことがわかる。　*q.e.d.*

T_t はHille-Yosidaの理論が適用できる場合になっている。そこで $\mathbb{C}_0(S)$ 上の半群 T_t，および $\mathbb{C}(\mathcal{S})$ 上の半群 T_t^o の生成作用素をそれぞれ $\mathfrak{G}$，$\mathfrak{G}^o$，そのdomainを $D(\mathfrak{G})$，$D(\mathfrak{G}^o)$ であらわそう。

Proposition 3.11　$0 \leq f < 1$，$f \in D(\mathfrak{G}^o)$ ならば $\hat{f} \in D(\mathfrak{G})$ かつ

$$\mathfrak{G}\hat{f}(\bar{x}) = \langle f \mid \mathfrak{G}^o f + k(\cdot)F[\cdot\,; f] \rangle(\bar{x}), \quad \bar{x} \in S \tag{3.32}$$

がなりたつ。*1)

証明に先だち必要なLemmaを示す。

---

*1) 第2章で定義したように $f \in \mathbb{C}^*(\mathcal{S})$，$g \in \mathbb{C}(\mathcal{S})$ に対し $\langle f \mid g \rangle \in \mathbb{C}_0(S)$ は次の式であたえられる。

$$\langle f \mid g \rangle(\bar{x}) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} g(x_k) \prod_{j \neq k} f(x_j) & \bar{x} \ni (x_1, \cdots, x_n) \\ 0 & \bar{x} = \Delta \ \text{又は}\ \partial \end{cases}$$

$\bar{x} \in \mathcal{S}$ のとき $\langle f \mid g \rangle$ は g と一致する。

Sem. on Probab.
Vol.23-Ⅰ 1966年
P1-137

Lemma 3.3

$f,\ g \in \mathcal{C}^*(\mathcal{S}),\quad 0 \leqq \|g\|,\ \|f\| \leqq r < 1\quad,\qquad h \in \mathcal{C}(\mathcal{S})$

とするとき,

(3.33) $$\left\| \frac{1}{t}(\hat{g}-\hat{f}) - \langle f|h\rangle \right\|_{\mathcal{S}} \leq c_1(r)\left\| \frac{1}{t}(g-f) - h \right\| + c_2(r)\|h\|\,\|g-f\|$$

[Proof]

$\bar{x} \in \mathcal{S}^n,\quad \bar{x} \ni (x_1, \cdots, x_n)$ のとき

$$\hat{g}(\bar{x}) - \hat{f}(\bar{x}) = \prod_{j=1}^{n} g(x_j) - \prod_{j=1}^{n} f(x_j)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (g(x_k) - f(x_k))\, f(x_1)\cdots f(x_{k-1})\, g(x_{k+1})\cdots g(x_n)$$

$$\langle f|h\rangle(\bar{x}) = \sum_{k=1}^{n} h(x_k) \prod_{j\neq k} f(x_j)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} h(x_k) f(x_1)\cdots f(x_{k-1})\, g(x_{k+1})\cdots g(x_n)$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} h(x_k) f(x_1)\cdots f(x_{k-1})\{f(x_{k+1})\cdots f(x_n) - g(x_{k+1})\cdots g(x_n)\}$$

故に

(3.34) $$\frac{1}{t}(\hat{g}-\hat{f})(\bar{x}) - \langle f|h\rangle(\bar{x})$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{1}{t}(g(x_k) - f(x_k)) - h(x_k) \right\} f(x_1)\cdots f(x_{k-1})\, g(x_{k+1})\cdots g(x_n)$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} h(x_k) f(x_1)\cdots f(x_{k-1}) \left\{ \sum_{j=1}^{n-k} (f(x_{k+j}) - g(x_{k+j}))\, f(x_{k+1})\cdots f(x_{k+j-1})\cdot g(x_{k+j+1})\cdots g(x_n) \right\}$$

故に

(3.35) $$\sup_{\bar{x}\in\mathcal{S}^n} \left| \frac{1}{t}(\hat{g}-\hat{f})(\bar{x}) - \langle f|h\rangle(\bar{x}) \right|$$

$$\leq n r^{n-1} \left\| \frac{1}{t}(g-f) - h \right\| + \frac{n(n+1)}{2} r^{n-2} \|h\|\,\|g-f\|$$

したがって

$$\sup_{n}(n r^{n-1}) = C_1(r) < \infty, \qquad \sup_{n}\left(\frac{n(n+1)}{2} r^{n-2} \right) = C_2(r) < \infty$$

とおけば (3.33) がなりたつ。 q.e.d.

[Prop. 3.11 の Proof]

Prop. 3.9 により $\sup_{0\leq t\leq T} \|T_t \hat{f}|_{\mathcal{S}}\| \leq A_T < 1$ なることと

Sem. on Probab.
Vol.23- I 1966年
P1-137

$T_t\hat{f}(\bar{x}) = \widehat{T_t\hat{f}|_S}(\bar{x})$ なることに注意して Lemma 3.3 よりある定数 C_1, C_2 に対し

$$\| \frac{1}{t}(T_t\hat{f}-\hat{f}) - \langle f \mid \mathcal{G}^0 f + k(\cdot)F[\cdot\,;f]\rangle \|_S \tag{3.36}$$
$$\leq C_1 \| \frac{1}{t}(T_t\hat{f}|_S - f) - \mathcal{G}^0 f - k(\cdot)F[\cdot\,;f]\|$$
$$+ C_2 \| \mathcal{G}^0 f + k(\cdot)F[\cdot\,;f]\| \, \| T_t\hat{f}|_S - f\|$$

今，$u_t(x) \equiv T_t\hat{f}|_S(x)$， $x \in S$ とおくと u_t は S-equation

$$u_t = T_t^0 f + \int_0^t ds \int_S P^0(s, \cdot\, dy)\, k(y)\, F[y;\, u_{t-s}]\, ds$$

をみたすから

$$\| \frac{1}{t}(u_t - f) - \mathcal{G}^0 f - k(\cdot)F[\cdot\,;f]\|$$
$$\leq \| \frac{1}{t}(T_t^0 f - f) - \mathcal{G}^0 f\| + \| \frac{1}{t}\int_0^t ds \int_S P^0(s, \cdot\, dy)\, k(y) F[y;\, u_{t-s}] - k(\cdot)F[\cdot\,;f]\|$$

ところで，この第２項に(3.27)を適用すると

$$\text{第2項} \leq K \cdot \sup_{0 \leq s \leq t} \|k\| \cdot \|u_{t-s} - f\| \longrightarrow 0 \qquad (t \downarrow 0)$$

となり，また明らかに第１項 $\longrightarrow 0$ $(t \downarrow 0)$

又，Prop. 3.9 より $\|u_t - f\| \to 0$ であるので(3.36)右辺の第２項も 0 へいく。

故に(3.36)より $\hat{f} \in D(\mathcal{G})$ かつ $\mathcal{G}\hat{f}$ は(3.32)であたえられることがわかる。 q.e.d.

したがって，Hille-Yosida の一般論より $f \in D(\mathcal{G}^0)$ $0 \leq f < 1$ のとき $T_t\hat{f}(\bar{x}) \in D(\mathcal{G})$ かつ $\mathcal{C}_0(S)$ の強微分の意味で

$$\frac{\partial T_t\hat{f}}{\partial t} = \mathcal{G}\, T_t\hat{f} = T_t\, \mathcal{G}\hat{f} \tag{3.37}$$

がなりたつ。$\dfrac{\partial T_t\hat{f}}{\partial t} = \mathcal{G}\, T_t\hat{f}$ は後向き方程式(Backward equation)．$\dfrac{\partial T_t\hat{f}}{\partial t} = T_t\, \mathcal{G}\hat{f}$ は前向き方程式(Forward equation)と呼ばれる。

まず，Backward equationをよりくわしく考察しよう。(3.37)の意味する

Sem. on Probab.
Vol.23-Ⅰ 1966年
P1-137

ことは,

(3.38) $\quad \| \dfrac{T_{t+h}\hat{f} - T_t \hat{f}}{h} - \mathcal{G} T_t \hat{f} \|_S \longrightarrow 0 \qquad (h \downarrow 0)$

であるが，今，これを S の上でながめてみると次のようになる。

今，$u_t(x) \equiv T_t \hat{f}(x)$, $\quad x \in S \quad$ とおいて

(3.39) $\quad \| \dfrac{u_{t+h} - u_t}{h} - \mathcal{G} T_t \hat{f}\big|_S \| \longrightarrow 0 \qquad (h \downarrow 0)$

他方，$u_{t+h}(x) \quad T_{t+h}\hat{f}(x) \quad T_h T_t \hat{f}(x)$

$\qquad\qquad\qquad\qquad T_h \hat{u}_t(x) \qquad x \in S$

に注意すれば u_{t+h} は S-equation

$$u_{t+h} = T_h^{\circ} u_t + \int_0^h ds \int_S P^{\circ}(s, \cdot, dy) k(y) F[y; u_{t+h-s}]$$

をみたしている。したがって

(3.40) $\quad \dfrac{u_{t+h} \quad u_t}{t} = \dfrac{T_h^{\circ} u_t \quad u_t}{h} + \dfrac{1}{h}\int_0^h ds \int_S P^{\circ}(s, \cdot dy) k(y) F[y; u_{t+h-s}]$

ところで，前と同様に

(3.41) $\quad \| \dfrac{1}{h}\int_0^h ds \int_S P^{\circ}(s, \cdot dy) k(y) F[y; u_{t+h-s}] - k(\cdot) F[\cdot; u_t] \| \longrightarrow 0$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (h \downarrow 0)$

となることはすぐわかる。すると (3.39), (3.40), (3.41) より

(3.42) $\quad \| \dfrac{T_h^{\circ} u_t - u_t}{h} - \mathcal{G} T_t \hat{f}\big|_S + k(\cdot) F[\cdot; u_t] \| \longrightarrow 0 \qquad (h \downarrow 0)$

となる。このことは $\quad u_t \in D(\mathcal{G}^{\circ})$ で

(3.43)
$$\begin{aligned} \mathcal{G}^{\circ} u_t &= \mathcal{G} T_t \hat{f}\big|_S - k(\cdot) F[\cdot; u_t] \\ &= \frac{\partial T_t \hat{f}}{\partial t}\Big|_S - k(\cdot) F[\cdot; u_t] \\ &= \frac{\partial u_t}{\partial t} - k(\cdot) F[\cdot; u_t] \end{aligned}$$

を意味する。

以上まとめて

Theorem 3.12 $\quad X_t$ は Prop. 3.10 と同じ仮定をみたす Branching Markov process とする。このとき

(3.44) $\quad u_t(x) = T_t \hat{f}(x), \quad 0 \leq f < 1, \quad f \in D^{\circ}(\mathcal{G}) \qquad x \in S$

Sem. on Probab.
Vol.23-Ⅰ 1966年
P1-137

とおくと，各 $t \geqq 0$ に対し $u_t \in D^0(\mathcal{G})$ かつ $\mathcal{C}(\mathcal{S})$ の強微分の意味で

$$\frac{\partial u_t}{\partial t} = \mathcal{G}^0 u_t + k(\cdot) F[\cdot\,; u_t] , \tag{3.45}$$

$$\| u_t - f \| \longrightarrow 0 \qquad t \downarrow 0 \tag{3.46}$$

がなりたつ。*1)

(3.45) を仮定 3.2 を考慮して書きなおすと ($\mathcal{G}^0 = \mathcal{G} - k(\cdot)$ に注意して)

$$\frac{\partial u_t}{\partial t} = \mathcal{G} u_t + k(\cdot)(F[\cdot\,; u_t] - u_t) \tag{3.45$'$}$$

となる。また，$F[\cdot\,; u_t]$ の定義をもう一度くりかえしておくと

$$F[\cdot\,; u_t] = \int_{S-\mathcal{S}} \hat{u}_t(\bar{y})\, \pi(x, d\bar{y}) \tag{3.46}$$

$$= \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq 1}}^{\infty} q_n(X)\, \pi_n(X, d\bar{y})\, u_t(y_1) \cdots u_t(y_n)$$

である。かくして我々は *Branching Markov process* の半群 T_t に対し，$u_t = T_t \hat{f}\,|_{\mathcal{S}}$ が *semi-linear* な *parabolic equation* (3.45) 又は (3.45)$'$ をみたすことがわかった。

特に $\pi(x, d\bar{y}) = \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq 1}}^{\infty} q_n(x)\, \delta_{\overbrace{(x \cdots x)}^{n}}(d\bar{y} \cap \mathcal{S}^n)$

となっているとき

$$F[x\,; \xi] = \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq 1}}^{\infty} q_n(x)\, \xi^n$$

とおき，さらに

$$U(x, \xi) = -k(x)[F(x\,; 1-\xi) - (1-\xi)]$$

とおく。上の *Theorem* 3.12 より，$v_t = 1 - u_t$ は $D(\mathcal{G})$ に属し

$$\frac{\partial v_t}{\partial t} = \mathcal{G} v_t + U(\cdot\,, v_t) \tag{3.47}$$

が $\mathcal{C}(\mathcal{S})$ の強微分の意味でなりたつ。ところで，$k(x) > 0$，$q_0(x) = q_\infty(x) \equiv 0$ のときは，この $U(x, \xi)$ は (3.30) の条件をみたしている。このようにして，この節の最初にのべた *Kolmogorov-Petrovsky-Piscunov* [1] の論文であつかわれている *non-linear* な方程式の特別な場合は *branching process*

---

*1) $f \in D(\mathcal{G}^0)$ が $f < 1$ をみたさなくても $u_t < 1$ かつ $u_t \in D(\mathcal{G}^0)$ となっていれば $t > 0$ に対し定理は正しい。それは上の証明で明らかであろう。

Sem. on Probab.
Vol.23-Ⅰ 1966年
P1-137

と密接な関係があることがわかる。尚，これらの関係については附録で 2.3 の Remark をあたえる。

Th. 3.13の Corollaryをいくつかのべておこう。

Corollary 1　Th. 3.12 と同じ仮定のもとで

$e_\partial(t;x)=P_x(e_\partial\le t)$ は $D(\mathcal{G})$ に属し

(3.48)　$\dfrac{\partial e_\partial}{\partial t}=\mathcal{G}e_\partial+k(\cdot)(F[\cdot\,;e_\partial]-e_\partial)$;　$\|e_\partial\|\to 0\quad(t\downarrow 0)$

がなりたつ。

[Proof]　定理 3.12 で $f\equiv 0$ とおけばよい。　q.e.d.

Corollary 2　同じ仮定のもとで，さらに $f\in\mathbb{C}(S)$, $0<f\le 1$ ${}^{\exists}x_0\in S$ $f(x_0)<1$ ならば $T_t\hat{f}|_S<1$ とする。*1)

もし $T_t\hat{1}|_S\in D(\mathcal{G}^0)$ ならば

$u(t,x)=T_t\hat{1}|_S=P_x[e_\Delta>t]$ は

(3.49)　$\begin{cases}\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t}=\mathcal{G}^0u(t,x)+k(x)F[x;\,u(t,x)]\\[2mm] u(0+,\,x)=1\end{cases}$

をみたす。

[Proof]　$t_0>0$ が存在し $T_t\hat{1}|_S=1$ (${}^{\forall}t\le t_0$) とすると semi-group property ですべての t に対し $T_t\hat{1}|_S=1$ となる。仮定から $\mathcal{G}^0 1=-k$, $F[x;1]=1$ であるので (3.49) は成立する。

(ii) ${}^{\exists}x_0\in S$　$T_t\hat{1}(x_0)<1$ とすると仮定より $T_t\hat{1}|_S<1$ となる。したがって，Th. 3.12, 脚注の注意より (3.49) がしたがう。　q.e.d.

今までは branching process X_t に対応する Def. 3. 1 の system $\{T_t^0, K, \Pi\}$ が仮定3.2をみたすことをもとにして，semi-linear な parabolic equation (3.45) 又は (3.45)′ を導いたが，それは結局は X_t の半群 T_t の生成作用素の表現をまとめたことに他ならない。ところで，仮定 3.2 においては，X_t の non-branching part X_t^0 は S上のある conservative Hunt process $\tilde{X}_t$ の $e^{-\int_0^t k(\tilde{X}_s)ds}$-subprocess であったが，それを一般にして $e^{-\varphi_t}$-

---

*1) さらに $q_\infty(x)\equiv 0$ とする。

Sem. on Probab.
Vol.23-Ⅰ 1966年
P1-137

subprocess （但し φ_t は $\tilde{X}_t$ の non-negative continuous a.f.）とすると，もはや仮定 3.2 は一般にはなりたたない。このような場合の T_t の生成作用素の表現を最近の Markov 過程論でよく用いられている potential 論的方法によってあたえる。

ここで，Markov 過程の一般論を復習する。（くわしくは Ito [1] を参照）。X_t はある Markov 過程とする。*1) その Resolvent operator G_λ を

$G_\lambda f(x) = E_x[\int_0^\infty e^{-\lambda t} f(x_t)\,dt]$ で定義し，

$\mathcal{B}(S)$ の G_λ による像を $\mathcal{R}$ （λに無関係）

$G_\lambda f = 0$ となる $f \in \mathcal{B}(S)$ の全体を $\mathcal{N}$ （λに無関係） とする。

$$\mathfrak{G} = \lambda - G_\lambda^{-1} \quad : \quad D(\mathfrak{G}) \equiv \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{B}/\mathcal{N}$$

なる operator を Ito [1] の意味の generator ということにする。

ここで，Markov 過程 X_t に対する次の仮定を考える。

仮定(A) ある測度 $m(dx)$ と $S \times S$ 上の正の関数 $g_\lambda(x,y)$ が存在し

(i) $G_\lambda f(x) = \int g_\lambda(x,y) f(y) m(dy)$

(ii) X_t の任意の正かつ連続な a.f. ψ に対し，正の測度μが一意的に対応し

$$E_x[\int_0^\infty e^{-\lambda t} f(x_t)\,d\psi_t] = \int g_\lambda(x,y) f(y) \mu(dy)$$

とかける。

この仮定 (i), (ii) は一次元 diffusion や多くの多次元 diffusion あるいは Hunt のポテンシャルの論文 [Ⅲ] の仮定 [F] をみたす（c.f. Meyer [1]）Markov過程等でみたされている。 このとき

Definition 3.4 $D = \{u\,;$ ある $\lambda > 0$ に対し
$u(x) = \int g_\lambda(x,y)\sigma(dy)$ とあらわされる$\}$

ここで σ は有界変動な signed measure である。

Definition 3.5 $u \in D$， $u = \int g_\lambda(x,y)\sigma(dy)$ に対し

(3.50) $$\Phi_{[u]}(dx) = \lambda u(X)\, m(dx) - \sigma(dx)$$

[Remark] $\Phi_{[u]}$ はuから unique にきまり，uをあらわすλやσの

---

*1) 状態空間をSとかくが，一応 branching process で考えるSと無関係なものである。

Sem. on Probab.
Vol.23-Ⅰ 1966年
P1-137

とり方に無関係である。

このとき，上の Ito[1] の意味の generator は次のようになる。

$$\mathfrak{N} = \{ f \in B(S) \,;\quad f = 0 \quad a.e \quad m(dx) \}$$

$D(\mathfrak{G}) = \{ u \in D$, $\Phi_{[u]}(dX)$ は $m(dX)$ について絶対連続かつその density は有界にされる$\}$

$$(3.51)\qquad \mathfrak{G}u = \frac{d\Phi_{[u]}}{dm}$$

そこで再び branching Markov process X_t への話をもどし，次の仮定をおく。*1)

仮定　(1)　X_t の non-branching part X_t^0 は $\mathcal{S}$ 上のある conservative Hunt process $\widetilde{X}_t$ の $e^{-\varphi_t}$ subprocess である。ここで φ_t は $\widetilde{X}_t$ の正かつ連続な a.f.

(2)　$\widetilde{X}_t$ は上の仮定(A) (i), (ii) をみたす。

もちろん X_t は仮定3.1をみたすとし，その branching system を $\pi(x, d\bar{y})$　$x \in \mathcal{S}$, $d\bar{y} \subset S - \mathcal{S}$，とする。以後簡単のため $\pi(x, S-(\mathcal{S}\cup\Delta)) = 1$　すなわち　$q_\infty(x) \equiv 0$　と仮定する。

このとき X_t の Ito[1] の意味の generator の $\mathcal{S}$ 上での表現を考えよう。

$f \in \mathbb{B}_0(S) \equiv \{ f \in \mathbb{B}(S),\ f(\Delta) = 0 \}$ に対し，$u(t,\bar{x}) = E_{\bar{x}}[f(X_t)]$; $\bar{x} \in S - \{\Delta\}$ とおくと，第1章§2の結果を用いて，$x \in \mathcal{S}$ のとき，

$$(3.52)\qquad u(t,x) = E_x[f(X_t);\ t<\tau] + E_x\Big[\int_{S-\mathcal{S}} \pi(X_{\tau-}, dy)\, u(t-\tau, \bar{y});\ t \geq \tau\Big]$$

$$= \widetilde{E}_x[e^{-\varphi_t} f(\widetilde{X}_t)] + \widetilde{E}_x\Big[\int_0^t e^{-\varphi_s} \int_{S-\mathcal{S}} \pi(\widetilde{X}_s, d\bar{y})\, u(t-s, \bar{y})\, d\varphi_s\Big]$$

今，

$$(3.53)\qquad v(\bar{x}) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} u(t, \bar{x})\, dt \qquad \bar{x} \in S - \{\Delta\}$$

$$(3.54)\qquad \pi v(x) = \int_{S-\{\mathcal{S}\cup\Delta\}} \pi(x, d\bar{y})\, v(\bar{y}) \qquad x \in \mathcal{S}$$

とおくと，(3.52)の両辺の Laplace 変換をとることにより

---

*1)　X_t の $\mathcal{S}^n$ での non-branching part で考えても，以下の議論は同様にいくが，簡単のため　$n = 1$　とした。

Sem. on Probab.
Vol.23-Ⅰ 1966年
P1-137

$x \in S$ のとき

$$(3.55)\qquad v(x) = \widetilde{E}_x\left[\int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{-\varphi_t} f(\widetilde{X}_t)\, dt\right] + \widetilde{E}_x\left[\int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{-\varphi_t} \Pi v(\widetilde{X}_t)\, d\varphi_t\right]$$

となる。ところで，*Kac* の公式の変形（*cf.* *Itô*[1]，*Sato-Nagasawa*[1]）を行なうと

$$v_1(x) \equiv \widetilde{E}_x\left[\int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{-\varphi_t} f(\widetilde{X}_t)\, dt\right] = \widetilde{E}_x\left[\int_0^\infty e^{-\lambda t} f(\widetilde{X}_t)\, dt\right] - \widetilde{E}_x\left[\int_0^\infty e^{-\lambda t} v_1(\widetilde{X}_t)\, d\varphi_t\right]$$

$$v_2(x) \equiv \widetilde{E}_x\left[\int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{-\varphi_t} \Pi v(\widetilde{X}_t)\, d\varphi_t\right] = \widetilde{E}_x\left[\int_0^\infty e^{-\lambda t} \Pi v(\widetilde{X}_t)\, d\varphi_t\right] - \widetilde{E}_x\left[\int_0^\infty e^{-\lambda t} v_2(\widetilde{X}_t)\, d\varphi_t\right]$$

故に

$$v(x) = \widetilde{E}_x\left[\int_0^\infty e^{-\lambda t} f(\widetilde{X}_t)\, dt\right] + \widetilde{E}_x\left[\int_0^\infty e^{-\lambda t} \Pi v(\widetilde{X}_t)\, d\varphi_t\right] - \widetilde{E}_x\left[\int_0^\infty e^{-\lambda t} v(\widetilde{X}_t)\, d\varphi_t\right]$$

したがって　$v \in \widetilde{D}$ *1)　かつ，仮定(A), (ii) によって φ_t に対応する測度を $\nu(dx)$ とするとき

$$(3.56)\qquad \widetilde{\Phi}_{[v]}(dx) = \lambda v(x) m(dx) - [f(x) m(dx) + \Pi v(x) \nu(dx) - v(x) \nu(dx)]$$

となる。

故に

$$(3.57)\qquad [\lambda v(x) - f(x)]\, m(dx) = \widetilde{\Phi}_{[v]}(dx) + [\Pi v(x) - v(x)]\, \nu(dx) \;.$$

以上より直ちに，

<u>*Theorem 3.13*</u>　今，$v(\bar{x})$ が *branching process* X_t に対応する半群 T_t の *Ito*[1] の意味の *generator* $\mathfrak{G}$ の *domain* $D(\mathfrak{G})$ に属するとする。このとき $v(\bar{x})$ の S への制限 $v(x)$ は $\widetilde{D}$ に属し，測度

---

*1) $\widetilde{D}$ は $\widetilde{X}_t$ に対応する *Def* 3.4 の D。 $\widetilde{\Phi}_{[v]}$ 等 も同様。

Sem. on Probab.
Vol.23-Ⅰ　1966年
P1-137

$$\tilde{\Phi}_{[v]}(dx)+[\Pi v(x)-v(x)]\,\nu(dx)$$

はmについて絶対連続になり，さらに

$$(\mathfrak{A}v)(x)=\tilde{\Phi}_{[v]}(dx)+[\Pi v(x)-v(x)]\,\nu(dx)\big/m(dx) \qquad (x\in\mathcal{S}) \tag{3.58}$$

となる。

特に　$v\in D(\mathfrak{A})$ が　$v(\bar{x})=\widehat{v|_{\mathcal{S}}}(\bar{x})$ をみたすときは　$\Pi v(x)=F[x;v]$ となるので，(3.58) は

$$(\mathfrak{A}v)(x)=\tilde{\Phi}_{[v]}(dx)+[F[x;v]-v(x)]\,\nu(dx)\big/m(dx) \tag{3.59}$$

(3.59) の右辺は (3.45)′ の右辺のある意味の一般化になっている。

さらに，$v(t,\bar{x})=T_t\hat{f}(\bar{x})$ とおくとき　$v(t,\cdot)\in D(\mathfrak{A})$で

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\mathfrak{A}v \qquad \text{がなりたつときは}$$

$$\frac{\partial v(t,x)}{\partial t}=\tilde{\Phi}_{[v]}(dx)+[F[x;v]-v(x)]\,\nu(dx)\big/m(dx) \tag{3.60}$$

となる。$f\in\mathbb{B}(\mathcal{S})$ がどのようなとき　$v(t,\bar{x})$がこれらの性質をみたすかが問題であるが，$\tilde{X}_t$ が適当な境界条件をみたす1次元 *diffusion* であれば十分一般の $f\in\mathbb{B}(\mathcal{S})$ に対し (3.60) がなりたつであろうと思われる。尚，このとき

$$\tilde{\Phi}_{[v]}(dx)=d\cdot\frac{d^+v}{ds}(x)$$

であたえられることはよく知られている。(*Ito-McKean* [1] 参照。sは *canonical scale*.)

§3.4 *Forward equation*

前節で得た *semi-linear* な微分方程式は実は *branching process* に対応する *semi-group* T_t の *backward equation*

$$\frac{\partial T_t}{\partial t}=\mathfrak{A}T_t$$

を$\mathcal{S}$におとしてみたものであった。そこで今度は *forward equation* $\frac{\partial T_t}{\partial t}=T_t\mathfrak{A}$　を考察する。これも *branching process* の研究には昔から色々用いられてきたものである。

Sem. on Probab.
Vol.23-Ⅰ 1966年
P1-137

まず，ここでも branching Markov process X_t は仮定3.1をみたし，それに対応する Def. 3.1 の system (T_t°, K, Π) は仮定3.2をみたすとしよう。Prop. 3.11より $0 \leq f < 1$，$f \in D(\mathfrak{G}^\circ)$ に対し "forward equation"

$$(3.61) \qquad \frac{\partial T_t \hat{f}}{\partial t}(\bar{x}) = T_t \mathfrak{G} \hat{f}$$

$$= T_t \langle f | \mathfrak{G}^\circ f + k(\cdot) F[\cdot\,; f] \rangle (\bar{x}), \quad \bar{x} \in S$$

が（$\mathbb{C}(\mathcal{S})$ の強微分の意味で）なりたつ。(3.61) 自身，S 上の半群 T_t に関する方程式と考えられるが，これを一応半群と独立な形の方程式へ変形しよう。そのため，まず functional derivative を導入する。今後

$$(3.62) \qquad \mathcal{D}^+ = \{ f : f \in \mathbb{C}(\mathcal{S}),\ 0 < f < 1 \}$$ とおき，

$\mathcal{D}^+$ で定義された関数 $A(f)$ に対し $f_0 \in \mathcal{D}^+$，$g \in \mathbb{C}(\mathcal{S})$ として

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{A(f_0 + \varepsilon g) - A(f_0)}{\varepsilon} \equiv D_g A(f_0)$$

が存在するとき $A(f)$ は $f = f_0$ で，方向 g の derivative $D_g A(f_0)$ をもつという。

次に，簡単のため $f \in D(\mathfrak{G}^\circ) \cap \mathcal{D}^+$ に対し

$$(3.63) \qquad C(f) = \mathfrak{G}^\circ f + k(\cdot) F[\cdot\,; f]$$

とかくことにする。

<u>Theorem 3.14</u>　各 $\bar{x} \in S - \{\Delta\}$ に対し

$A_{\bar{x}}(t, f) = T_t \hat{f}(\bar{x})$，$f \in \mathcal{D}^+$ とおくと

$$(3.64) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial A_{\bar{x}}(t,f)}{\partial t} = D_{C(f)} A_{\bar{x}}(t,f), & f \in \mathcal{D}^+ \cap D(\mathfrak{G}^\circ) \\ A_{\bar{x}}(0+, f) = \hat{f}(\bar{x}) \end{cases}$$

がなりたつ。

<u>[Proof]</u>　$\mathfrak{G}\hat{f} = \langle f | C(f) \rangle$　$f \in \mathcal{D}^+ \cap D(\mathfrak{G}^\circ)$ に注意すると，Lemma (3.3) より

$$\left\| \frac{\widehat{f + \varepsilon C(f)} - \hat{f}}{\varepsilon} - \mathfrak{G}\hat{f} \right\| \longrightarrow 0 \quad (\varepsilon \to 0)$$

となる。

Sem. on Probab.
Vol.23- I 1966年
P1-137

故に $\quad \left\| \dfrac{A_{\bar{x}}(t, f+\varepsilon C(f)) - A_{\bar{x}}(t, f)}{\varepsilon} - T_t \mathcal{G} \hat{f} \right\|_S$

$$= \left\| T_t \left(\frac{\widehat{f+\varepsilon C(f)} - \hat{f}}{\varepsilon} - \mathcal{G} \hat{f} \right) \right\|_S \longrightarrow 0 \qquad \varepsilon \downarrow 0$$

故に $\quad D_{C(f)} A_{\bar{x}}(t, f)$ が存在し $\quad T_t \mathcal{G} \hat{f} = \dfrac{\partial T_t \hat{f}}{\partial t}$

$$= \frac{\partial A_{\bar{x}}(t, f)}{\partial t}$$

に等しい。 $\qquad$ q.e.d.

Sが1点や有限個の点よりなるときは，上の functional derivative は普通の微分になり，(3.64) は昔からよく知られた方程式（第5章参照）をあたえる。

又，(3.64) の解の一意性については第7章で論ずる。

§3.5 平均個数の方程式

前の第2章で注意したように，多くの branching process のこれまでの研究では，個数の process ξ_t が主要な対象であった。それにともなって個数の平均のみたす方程式が古くから知られている。この節ではこれまでと同様な立場で一般化された平均個数の方程式を導く。

この節でも，§3.1，仮定 3.1 をみたす Branching Markov process を考察する。また，これまで semi-group は T_t はしばしば $B(S)$ 上で考えてきたが，T_t が積分作用素であることに注意すれば，必ずしも有界でない関数に対してもそれをほどこすことができる．実際このような場合がこの節では重要になる。

これからの議論においては，次の $B(\mathcal{S})$ の関数を S 上の関数に拡張する操作 ” $\vee$ “ が重要な働きをする。

<u>Definition 3.6</u> $\quad f \in B(\mathcal{S})$ に対し，S 上の可測関数 $\check{f}$（又は $f^{\vee}$）を次の式で定義する。

$$(3.65) \qquad \check{f}(\bar{x}) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} f(x_j) & \bar{x} \ni (x_1, \cdots x_n) \\ 0, & \bar{x} = \partial \text{ 又は } \Delta \end{cases}$$

Sem. on Probab.
Vol.23-Ⅰ 1966年
P1-137

$\check{f}$は一般には有界でない。第２章で定義された操作 ”$\frown$“ とは次の関係で結ばれている。

$f \in \mathbb{B}(S)^+$,　$0 \le \lambda \le 1$　に対し　$g(x) = \lambda^{f(x)}$

とおくと

(3.66)　$\hat{g}(\bar{x}) = \lambda^{\check{f}(\bar{x})}$,　$\bar{x} \in S - \{\Delta\}$ 。

又，操作 ”$\smile$“ は ”$\frown$“ と異なり linear である。すなわち

(3.67)　$\overbrace{af + bg} = a\check{f} + b\check{g}$　(a, b は定数)。

特に　$f \equiv 1$　のとき

(3.68)　$\check{1}(x) = \check{f}(\bar{x}) = n$,　$\bar{x} \in S^n$,　$n = 0, 1, 2, \cdots$

したがって

(3.69)　$\check{1}(X_t) = \xi_t$,　$t < e_\Delta$

平均をとって

(3.70)　$T_t \check{1}(\bar{x}) = E_{\bar{x}}[\xi_t ;\ t < e_\Delta]$

となる。この意味で ”$\vee$“ は個数をあたえる操作と考えることができる。*1)

Lemma 3.4　$f \in \mathbb{B}(S)^+$,　$h \in \bar{\mathbb{B}}^*(S)^+$　に対し

(3.71)　$T_t[\hat{h}(\check{f})^k](\bar{x}) = \sum_{(k_1,\cdots,k_n)}^{(k)} \frac{k!}{k_1! \cdots k_n!} \prod_{j=1}^{n} T_t[\hat{h}(\check{f})^{k_j}](x_j)$

$\bar{x} \in S^n$,　$\bar{x} \ni (x_1, \cdots, x_n)$　*2)

[Proof]　$g = e^{-\lambda f}$,　$\lambda > 0$　とおく。T_t が linear であるので

$$T_t \hat{h} \hat{g}(\bar{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} T_t[\hat{h}(\check{f})^k](\bar{x})$$

である。故に，$\bar{x} \ni (x_1, \cdots, x_n)$ に対し

---

*1) $E \subset S$ の特性函数 χ_E を考えれば

$\check{\chi}_E(X_t)$ = 時間 t に E 内にいる粒子の数となる。

*2) $+\infty = +\infty$　の場合を含めて，等号がなりたつ。また，右辺の和の意味は第２章を見よ。

Sem. on Probab.
Vol.23-Ⅰ　1966年
P1-137

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} T_t[\hat{h}(\check{f})^k] = \sum_{k_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k_1+\cdots+k_n}}{k_1!\cdots k_n!} \prod_{j=1}^{n} T_t[\hat{h}(\check{f})^{k_j}](x_j)$$

となるが，λが任意であるので（3.71）がなりたつ。

Proposition 3.15　　$0 \leq f < \infty$,　$f \in \mathbb{B}(S)$ と $h \in \overline{\mathbb{B}}^*(S)^+$ に対し

1°）

(3.72)　　$T_t \hat{h} \check{f}(\bar{x}) = \langle T_t \hat{h}|_S \,|\, T_t \hat{h} \check{f}|_S \rangle (\bar{x})$

2°）　とくに

$$0 < e(x) = P_x[e_\Delta = \infty] \quad , \quad x \in S$$

ならば

(3.73)　　$\dfrac{1}{\hat{e}(\bar{x})} T_t(\hat{e}\check{f})(\bar{x}) = \left(\overbrace{\frac{1}{e} T_t \hat{e} \check{f}|_S}\right)(\bar{x})$　　$\bar{x} \in S$

である。したがって特に　$e = 1$ ならば

(3.74)　　$T_t \check{f}(\bar{x}) = \overbrace{T_t \check{f}|_S^{\circ}}(\bar{x})$

[Proof]　　$\bar{x} = \partial, \Delta$ の時に（3.72）は明らかであるので $\bar{x} \in S^n$，$n \geqq 1$ とする。（3.71）で　$k = 1$　とおけば

$$T_t[\hat{h}\check{f}](\bar{x}) = \sum_k T_t[\hat{h}\check{f}](x_k) \prod_{j \neq k} T_t \hat{h}(x_j)$$

となり，（3.72）が得られる。ここで，$h = e$ とおけば容易に（3.73）をうる。

q.e.d.

[Remark]　第4章でも用いるのであるが，上の $e(x)$ はつぎの性質をもつ

(3.74)　　$P_{\bar{x}}[e_\Delta = \infty] = \hat{e}(\bar{x})$　，　$\bar{x} \in S$

(3.75)　　$T_t e(\bar{x}) = e(\bar{x})$

上の式は $e(\bar{x})$ が T_t-harmonic ということである。このことは
$P_{\bar{x}}[e_\Delta = \infty] = \lim\limits_{t \to 0} T_t \hat{1}(\bar{x})$　より明らか。

つぎに作用素 G を次のように定義する。$f \geqq 0$ が $\mathcal{B}(S)$ 可測のとき

(3.76)　　$G(x; f) = \int \Pi(x, d\bar{y}) \check{f}(y) \hat{e}(\bar{y})$

Sem. on Probab.
Vol.23-Ⅰ 1966年
P1-137

一般の $\mathcal{B}(S)$ 可測な f に対しては $f = f^+ - f^-$ として

(3.77) $$G(x;f) = G(x;f^+) - G(x;f^-)$$

(但し $\infty - \infty$ となるときは定義しない。)

次に，$f \geqq 0$ なる $\mathcal{B}(S)$ 可測関数 f に対し *1)

(3.78) $$H_t f(\bar{x}) = \frac{1}{\hat{e}(\bar{x})} T_t(\hat{e}\check{f})(\bar{x})$$

これを G の場合と同様に一般の $\mathcal{B}(S)$-可測な f へ拡張する。

<u>Theorem 3.16</u>　$0 < e(x) \leq 1$，$x \in S$ とする。このとき $f \in \mathcal{B}(S)^+$ に対し

1° (3.79) $$H_{t+s} f(x) = H_t H_s f(x), \quad f \in \mathcal{B}(S)^+, \quad x \in S$$

2° (3.80) $$H_t f(x) = \frac{1}{e} T_t^0 ef(x) + \frac{1}{e}\int_0^t \int_S K(x; ds\,dy)\, G(y; H_{t-s} f)$$

がなりたつ。

[<u>Remark</u>]　(3.80) は *linear* な積分方程式である。

[<u>Proof</u>]　1° は (3.73) に注意すると T_t の *semi-group property* より明らか。

2° も *Skorohod equation* の証明と全く同様にできる。　　*q.e.d.*

そこで方程式

(3.81) $$u_t(x) = \frac{1}{e} T_t^0 (ef)(x) + \frac{1}{e}\int_0^t \int_S K(x; ds\,dy)\, G(y; u_{t-s})$$

を<u>初期値 f の平均個数の方程式</u>ということにする。

以下，H_t のよりくわしい性質をしらべ，又 (3.81) を微分方程式にかきあらためるため，これまで度々導入した仮定をここでも導入しよう。

---

*1) 一々くりかえすのはめんどうなのでこのような f の全体を $f \in \mathcal{B}(S)^+$ であらわそう。

Sem. on Probab.
Vol.23-Ⅰ 1966年
P1-137

1°) X_t に対応する Def. 3.1 の system (T_t^0, K, Π) は仮定 3.2 をみたす。さらに

2°) G は $\mathbb{C}(S)$ 上の有界作用素，すなわち $f \in \mathbb{C}(S)$ ならば $G(\cdot\,; f) \in \mathbb{C}(S)$ かつ $M > 0$ が存在して

$$(3.82) \qquad \| G(\cdot\,; f) \| \leq M \| f \| \qquad \text{がなりたつ。}$$

3°) $0 < e(x) \in \mathbb{C}(S)$

今，2°) より

$$\| G(\cdot\,; f) - G(\cdot\,; g) \| \leq M \| f - g \|$$

であり，又 $f \leq g$ ならば

$$G(\cdot\,, f) \leq G(\cdot\,; g)$$

である。

この２性質に注意すると，Prop. 3.7 ～ 3.12 の証明が方程式 (3.81) に対しても全く同様にできることはすぐわかる。紙数に制限もあるので，同じことをくりかえすのはやめ，結果だけをまとめておくことにしよう。

<u>Theorem 3.17</u> 仮定 1°) ～ 3°) のもとで

a) 平均個数の方程式 (3.81) は初期値 $f \in \mathbb{C}(S)$ に対して $u_t \in \mathbb{C}(S)$ なる unique な解をもつ（したがって，$u_t = H_t f$ である）。

b) $H_t f$ は $\mathbb{C}(S)$ 上の強連続な正の半群である $c > 0$ に対し

$$(3.83) \qquad \| H_t \| \leq e^{ct}$$

がなりたつ。

c) $u_t = H_t f$ とおくと，$ef \in D(\mathfrak{G}^0)$ のとき $eu_t \in D(\mathfrak{G}^0)$ かつ $\mathbb{C}(S)$ の強連続の意味で

$$(3.84) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u_t}{\partial t} = \dfrac{1}{e}\, \mathfrak{G}^0 (e u_t) + \dfrac{1}{e}\, k \cdot G(\cdot\,; u_t) \\[2ex] \| u_t - f \| \longrightarrow 0 \qquad t \downarrow 0 \end{cases}$$

がなりたつ。

(3.84) は

Sem. on Probab.
Vol.23-Ⅰ　1966年
P1-137

$$(3.84)' \qquad \frac{\partial u_t}{\partial t} = \frac{1}{e}\mathcal{G}(eu_t) + \frac{1}{e}k(G(\cdot\,;u_t) - eu_t)$$

とかくこともできる。

証明は上にのべたように前と同じであるのでくりかえさないが，(3.83) のみしめしておこう。

$$u_0(t,x) \equiv 0$$

$$u_n(t,x) = \frac{1}{e}T_t^0 ef(x) + \frac{1}{e}\int_0^t\int_S K(x;dsdy)\,G(y;u_{n-1}(t-s,\cdot))$$

とおくと　$u_n \uparrow H_t f$　となるのは前と同様であるが

今
$$\|u_n(t,\cdot)\| \le \sum_{j=0}^{n} \frac{(M\|\frac{k}{e}\|t)^j}{j!}\|f\|$$

と仮定すると

$$|u_{n+1}(t,x)| \le \|f\| + M\left\|\frac{k}{e}\right\|\int_0^t \sum_{j=0}^{n}\left(M\left\|\frac{k}{e}\right\|s\right)^j \Big/ j!\cdot\|f\|$$

$$\le \|f\| + \sum_{j=1}^{n+1}\left(M\left\|\frac{k}{e}\right\|t\right)^j \Big/ j!\ \|f\|$$

$$= \sum_{j=0}^{n+1}\frac{(M\|\frac{k}{e}\|t)^j}{j!}\cdot\|f\|$$

したがって，すべてのnでこの評価式がなりたつ。

故に
$$\|H_t f\| \le \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(M\|\frac{k}{e}\|t)^j}{j!}\cdot\|f\|$$

$$= e^{M\|\frac{k}{e}\|t}\cdot\|f\|$$

[注意]　1°) (3.84) は creation の項をもつ linear な parabolic equation である。Ito-McKean [1] はここでのべた仮定をみたさないが，同種類の問題を論じている。

2°) 簡単のため $e(X) \equiv 1$ としよう。

このとき　$G(\cdot\,;f) = \dfrac{\partial}{\partial\lambda}F[\cdot\,;\lambda^f]\Big|_{\lambda=1}$　となっている。

このとき方程式 (3.84) は方程式 (3.45) の両辺をλで微分してえられる。

Sem. on Probab.
Vol.23-Ⅰ 1966年
P1-137

第４章　Branching Markov Process の変換

§4.1 Branching Markov process の mulplicative functional

Markov process X の multiplicative functinal M_t があり，$E_x[M_t] \leqq 1$ をみたしているならば，X を M_t で変換して Markov process X^M が得られることは，Markov 過程論の一般論としてよく知られている。そのことについては第１章でも簡単にふれておいた。詳しくは Dynkin [1]，Kunita-T. Watanabe [1]，Ito-S. Watanabe [1] 等をみていただきたい。

さて，この節の目的は一般論をのべることではない。X が branching Markov process のとき，X^M が又 branching Markov process になるのは M_t がどのような条件をみたすかということを考える。以下でそのようなことについて考える際の出発点になるいくつかの事実を注意しよう。実は M_t の満たすべき性質はすでに第２章，Theorem 2.1 でのべた事実の中に含まれているといった方がよいかもしれない。

便宜上，この章を通じて branching Markov process X は path space で定義されているとしよう。その path space を W で表わす。第２章，Property B.I でのべたように，W の n ケの直積空間を $W^{(n)}$ とする。γ は (2.21) で定義した $\bigcup_{n=1}^{\infty} S^{(n)} \longrightarrow S$ の mapping として mapping

$$\phi : \widetilde{W} = \bigcup_{n=1}^{\infty} W^{(n)} \longrightarrow W$$

をつぎのように定義する：　$\widetilde{w} = (w^1, \cdots, w^n) \in W^{(n)}$，　$w^j \in W$，$(j = 1, 2, \cdots, n)$ に対し　$\phi\widetilde{w} \in W$ は

$$(4.1) \qquad X_t(\phi\widetilde{w}) = (\phi\widetilde{w})(t) = \gamma\{X_t(w^1), \cdots, X_t(w^n)\} \quad , \quad t \geqq 0$$

をみたす path である。

この§では，multiplicative functional M_t によって変換された process X^M は△では常に trap となっているとするように修正されているとする。

Definition 4.1　　M_t は

Sem. on Probab.
Vol.23- I 1966年
P1-137

(4.2) $$E_{\bar{x}}[M_t] \leq 1, \qquad \bar{x} \in S, \quad t \geqq 0$$

をみたす X_t の multiplicative functional とする。

そのとき，次の条件をみたすならば，M_t を Branching type であるという；
$\tilde{w} = (w^1, \cdots, w^n) \in W^{(n)}$，$(n \geqq 1)$ に対し

(4.3) $$M_t(\phi\tilde{w}) = \prod_{j=1}^{n} M_t(w^j), \quad \forall t \geqq 0, \quad (a.s.\ \tilde{P}_{\bar{x}},\ \bar{x} \in S^n)$$

であって，さらに

(4.4) $$P_\partial[M_t = 1] = 1,$$
$$P_\Delta[M_t = 1] = 1.$$

をみたす。ここで $\tilde{P}_{\bar{x}} = P_{x_1} \times \cdots \times P_{x_n}$，$(x_1, \cdots, x_n) \in \bar{x}$ である。((2.24) 及び Proposition 2.6 参照)。

このように定義すると次の事実が証明出来る。

Theorem 4.1　X を strong Markov な Branching Markov process とし，(4.2) をみたすとする。X の multiplicative functional M_t によって変換された Markov process を X^M とする。

そのとき，次の条件は同等である。

(i)　X^M は Branching Markov process である。

(ii)　M_t は Branching type である。

[Proof]　まず (i)⇒(ii) を示す。

X^M の measure $P_{\bar{x}}^M$ による平均を $E_{\bar{x}}^M$ と書くことにしよう。任意に $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_p = t$，$f_1, \cdots, f_p \in C^*(S)$ をとる。まず

(4.5) $$E_{\bar{x}}^M\Big[\prod_{j=1}^{p} \hat{f}_j(X_{t_j})\Big] = E_{\bar{x}}\Big[\prod_{j=1}^{p} \hat{f}_j(X_{t_j}) M_t\Big]$$

に注意する。Theorem 2.1 により X_t は Property B.I をみたしているから，$(x_1, \cdots, x_n) \in \bar{x}$ に対し

(4.6) $$E_{\bar{x}}\Big[\prod_{j=1}^{p} \hat{f}_j(X_{t_j}) M_t\Big] = E_{x_1} \times \cdots \times E_{x_n}\Big[\prod_{j=1}^{p} \hat{f}_j(X_{t_j}(\phi\tilde{w})) M_t(\phi\tilde{w})\Big]$$

をみたす。一方

Sem. on Probab.
Vol.23-I 1966年
P1-137

$$(4.7)\quad \prod_{i=1}^{n} E_{x_i}\Big[\prod_{j=1}^{p}\hat{f}_j(X_{t_j})M_t\Big] = E_{x_1}\times\cdots\times E_{x_n}\Big[\prod_{j=1}^{p}\hat{f}_j(X_{t_j}(\Phi\tilde{w}))\prod_{j=1}^{n}M_t(w^j)\Big]$$

である。X_t^M は Branching Markov process であることを仮定したから，Proposition 2.4により

$$(4.8)\quad E_{\bar{x}}^M\Big[\prod_{j=1}^{p}\hat{f}_j(X_{t_j})\Big] = \prod_{i=1}^{n} E_{x_i}^M\Big[\prod_{j=1}^{p}\hat{f}_j(X_{t_j})\Big]$$

がなりたつ。従って (4.5), (4.6), (4.7), (4.8) により

$$E_{x_1}\times\cdots\times E_{x_n}\Big[\prod_{j=1}^{p}\hat{f}_j(X_{t_j}(\Phi\tilde{w}))\Big\{M_t(\Phi\tilde{w})-\prod_{j=1}^{n}M_t(w^j)\Big\}\Big] = 0$$

である。故に Lemma 2.1 により任意の $\Phi^{-1}\bar{\mathcal{N}}_t$-可測函数 $F(\tilde{w})$ に対し

$$E_{x_1}\times\cdots\times E_{x_n}\Big[F(\tilde{w})\Big\{M_t(\Phi\tilde{w})-\prod_{j=1}^{n}M_t(w^j)\Big\}\Big] = 0$$

従って，$(w^1,\cdots,w^n)=\tilde{w}$, $w^j\in\bar{W}$, $(j=1,2,\cdots,n)$ に対し

$$M_t(\Phi\tilde{w}) = \prod_{j=1}^{n}M_t(w^j)\ ,\qquad (a.s.\ \tilde{P}_{\bar{x}},\ \bar{x}\in S^n)$$

がなりたつ。すなわち (4.3)である。

∂, Δ が X_t^M の trap であることに注意すれば，(4.4) は明らかである.

逆を示そう。

X は Branching Markov process であるから，Theorem 2.1 により Property B.I をみたしている。従って，$(x_1,\cdots,x_n)\in\bar{x}$ に対し，$f\in\mathbb{B}^*(S)$ として

$$E_{\bar{x}}[\hat{f}(X_t)M_t] = E_{x_1}\times\cdots\times E_{x_n}[\hat{f}(X_t(\Phi\tilde{w}))\ M_t(\Phi\tilde{w})]$$

ここで (ii) を用いると，(4.1) に注意して，

$$= E_{x_1}\times\cdots\times E_{x_n}\Big[\prod_{j=1}^{n}\hat{f}(X_t(w^j))\prod_{j=1}^{n}M_t(w^j)\Big]$$

$$= \prod_{j=1}^{n}E_{x_j}[\hat{f}(X_t)M_t]$$

である。故に (4.5) に注意すれば

$$E_{\bar{x}}^M[\hat{f}(X_t)] = \prod_{j=1}^{n}E_{x_j}^M[\hat{f}(X_t)]\quad ,\qquad \bar{x}\in S^n\ ,\quad n\geq 1$$

$E_\partial^M[\hat{f}(X_t)]=1$, $E_\Delta^M[\hat{f}(X_t)]=0$ となることは (4.4) から明らかである。従って X^M は Branching Markov process である。　　　　q.e.d.

Sem. on Probab.
Vol.23-Ⅰ 1966年
P1-137

次に，Theorem 2.1 の Property B.Ⅲ を考えに入れて上の定義を少し弱めよう。

Definition 4.2　M_t は (4.2) をみたす X の multiplicative functional とする。

そのとき，次の条件をみたすならば，M_t を弱い意味の Branching type であるという：

$\tilde{w}=(w^1, \cdots, w^n)\in \tilde{W}^{(n)}$ ，　$(n\geqq 1)$　に対し

$$M_t(\phi\tilde{w})=\prod_{j=1}^{n} M_t(w^j)\ ,\quad 0\leqq t\leqq \tau(\phi\tilde{w}),\ (a.s.\ \tilde{P}_{\bar{x}},\ \bar{x}\in S^n) \tag{4.3'}$$

であって，(4.4) をみたす。

次の事実を証明しよう。

Theorem 4.2　X を strong Markov 性をもつ Branching Markov process で条件 (C.3) をみたすとする。さらに，X^M は X を (4.2) をみたす multiplicative functional M_t によって変換された Markov process であって，しかも [条件] (C.1)，(C.2)，(C.3)*) をみたしているとしよう。

そのとき，次の条件は同等である。

(i)　X^M は Branching Markov process である。

(ii)　M_t は弱い意味の Branching type である。

[Proof]　(i) ⟹ (ii) は Theorem 4.1 から明らか。実際 Theorem 4.1 より (i) ⟹ M_t は Branching type，が出る。M_t が Branching type のとき，それが弱い意味の Branching type であることは明らかである。

つぎに (ii) ⟹ (i) を示そう。

まず，$(x_1, \cdots, x_n)\in \bar{x}$ として

$$E^M_{\bar{x}}[\hat{f}(X_t);\quad t<\tau]=E_{\bar{x}}[\hat{f}(X_t)M_t;\ t<\tau] \tag{4.9}$$

であることに注意しよう。Property B.I と (ii) により

$$E_{\bar{x}}[\hat{f}(X_t)M_t;\quad t<\tau]$$

*) 第2章，§2.1 参照

Sem. on Probab.
Vol.23-Ⅰ 1966年
P1-137

$$= E_{x_1} \times \cdots \times E_{x_n}[\hat{f}(X_t(\phi\tilde{w}))\ M_t(\phi\tilde{w})\ ;\ t < \tau(\phi\tilde{w})]$$

$$= E_{x_1} \times \cdots \times E_{x_n}[\prod_{j=1}^{n} \hat{f}(X_t(w^j)) \prod_{j=1}^{n} M_t(w^j) \prod_{j=1}^{n} \chi(t < \tau(w^j))]$$

$$= \prod_{j=1}^{n} E_{x_j}[\hat{f}(X_t) M_t\ ;\ t < \tau]$$

従って,

$$E^M_{\tilde{x}}[\hat{f}(X_t)\ ;\ t < \tau] = \prod_{j=1}^{n} E^M_{x_j}[\hat{f}(X_t)\ ;\ t < \tau]$$

すなわち, X^M は *Property* B.Ⅲの (i) をもつ。次に X^M は *Property* B.Ⅲ, (ii) をもつことを示そう。Xに対する *Property* B.Ⅰと (ii) により

$$E_{\tilde{x}}[\hat{f}(X_t) M_t\ ;\ \tau \in dt]$$

$$= E_{x_1} \times \cdots \times E_{x_n}[\hat{f}(X_t(\phi\tilde{w})) M_t(\phi\tilde{w})\ ;\ \tau(\phi\tilde{w}) \in dt]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} E_{x_1} \times \cdots \times E_{x_n}[\prod_{j=1}^{n} \hat{f}(X_t(w^j)) \prod_{j=1}^{n} M_t(w^j)\ ;\ \tau(w^k) \in dt,$$

$$\tau(w^j) > t \text{ for } j \neq k]\ ^{*)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} E_{x_k}[\hat{f}(X_t) M_t\ ;\ \tau \in dt] \prod_{j \neq k} E_{x_j}[\hat{f}(X_t) M_t\ ;\ t < \tau]$$

となる。従って (4.9) に注意して

$$E^M_{\tilde{x}}[\hat{f}(X_t); \tau \in dt] \quad \sum_{k=1}^{n} E^M_{x_k}[\hat{f}(X_t); \tau \in dt] \prod_{j \neq k} E^M_{x_j}[\hat{f}(X_t)\ ;\ t < \tau]$$

すなわち, X^M に対する *Property* B.Ⅲ, (ii) である。

X^M は [条件] (C.1), (C.2), (C.3) をみたしていることは仮定したから, X^M も強Markov性をもつことに注意すれば Theorem 2.1 により, X^M は Branching Markov process である。　　　q.e.d.

[注意]　Xが Hunt processで [条件] (C.3) をみたしていて, 特に $M_t \leq 1$ ならば, X^M は [条件] (C.1), (C.2), (C.3) をみたすことがわかる。実際, そのときには X^M は $\Omega = W \times [0, \infty)$ 上に構成するが (第1章参照), そのとき $\tau^M(w, u) = \tau(w) \wedge u$, $e^M_\Delta(w, u) = e_\Delta(w) \wedge u$ であり, $\tau_\infty(w) < \infty$

---

*) $\tau(\phi\tilde{w}) = \min\{\tau(w^1), \cdots, \tau(w^n)\}$ で条件 (C.3) をみたしていることに注意せよ。

Sem. on Probab.
Vol.23- I　1966年
P1-137

の下で，$\tau_\infty^M(w, u) = \tau_\infty(w) \wedge u$　であることに注意すればよい。

§4.2 変換の例

ここでは前節でのべた型の変換の例をあげよう。これらは単に変換としてのみならず，*branching Markov process* の研究の多くの場面で出て来て，その意味でも重要なものである。

[*Example* 4.1]　調和変換

$$e(\bar{x}) = e_\Delta(\infty, \bar{x}) \quad , \quad \bar{x} \in S$$

とおく。第２章，３章でのべたように，

$$e_\Delta(\infty, \bar{x}) = \lim_{t \to \infty} T_t \hat{1}(\bar{x})$$

であることに注意すれば，

$$(4.10) \qquad e(\bar{x}) = \hat{e}(\bar{x}) \quad , \quad T_t e(\bar{x}) = e(\bar{x})$$

がなりたつことがわかる。事情を簡単にするために

$$(4.11) \qquad 0 < e(\bar{x}) < 1 \qquad \bar{x} \in S - \{\Delta\}$$

がみたされているとしよう。$e(\bar{x})$ により

$$(4.12) \qquad M_t(w) = \frac{e(X_t(w))}{e(X_0(w))} \quad , \quad X_0(w) \neq \Delta, \partial \quad \text{のとき,}$$

$$= 1 \quad , \quad X_0(w) = \partial \quad \text{のとき,}$$

$$= 1 \quad , \quad X_0(w) = \Delta \quad \text{のとき,}$$

とおく。このとき，M_t が *multiplicative functional* になることはよく知られている。さらに M_t は *branching type* である。実際，$\tilde{w} = (w^1, \cdots, w^n)$ として，

$$M_t(\phi\tilde{w}) = \frac{e(X_t(\phi\tilde{w}))}{e(X_0(\phi\tilde{w}))} = \frac{\hat{e}(X_t(\phi\tilde{w}))}{\hat{e}(X_0(\phi\tilde{w}))} = \frac{\prod_{j=1}^n \hat{e}(X_t(w^j))}{\prod_{j=1}^n \hat{e}(X_0(w^j))} = \prod_{j=1}^n M_t(w^j)$$

となって，(4.3) をみたしている。(4.4) は明らかである。

従って，X^M は *Theorem* 4.1 により，*Branching Markov process* になる。

Sem. on Probab.
Vol.23- I 1966年
P1-137

なお，(4.10) に注意すれば，

$$E_{\bar{x}}[M_t \wedge e_\Delta] = \frac{e(\bar{x})}{e(\bar{x})}$$

となるので，M_t は Ito-S. Watanabe [1] の意味で regular である。また，X^M の semi-group T_t^M は良く知られているように，

$$T_t^M \hat{f}(\bar{x}) = \frac{1}{\hat{e}(\bar{x})} T_t(\hat{e}\hat{f})(\bar{x}) \qquad , \quad f \in \overline{\mathbb{B}^*}(S)$$

で与えられる。

[Example 4.2] (non-branching part の killing)

$f \geqq 0$，$f \in \mathbb{B}(S)$ と $\lambda > 0$ とによって，

(4.13) $$M_t(w) = \exp\left\{-\lambda \int_0^t \check{f}(X_s(w))\, ds\right\}^{*)}, \quad X_0(w) \neq \Delta, \partial \text{ のとき}$$

$$= 1 \qquad , \qquad X_0(w) = \Delta, \partial \quad \text{のとき}$$

とおくと，M_t は X_t の decreasing multiplicative functional である。これが Branching type であることは，ほとんど明らかである。実際，$\tilde{w} = (\tilde{w}^1, w^2, \cdots, w^n)$ に対して

$$M_t(\phi\tilde{w}) = \exp\left\{-\lambda \int_0^t \check{f}(X_s(\phi\tilde{w}))\, ds\right\}$$

$$= \exp\left\{-\lambda \sum_{j=1}^n \int_0^t \check{f}(X_s(w^j))\, ds\right\}$$

$$= \prod_{j=1}^n \exp\left\{-\lambda \int_0^t \check{f}(X_s(w^j))\, ds\right\}$$

$$= \prod_{j=1}^n M_t(w^j)$$

となって，(4.3) をみたしている。(4.4) は明らか。

このとき，X^M は Theorem 4.1 により Branching Markov process に

---

*) $$\check{f}(\bar{x}) = \begin{cases} \sum_{j=1}^n f(x_j), & \bar{x} \in S^n \\ 0, & \bar{x} = \Delta, \partial \end{cases}$$ であった。§3.3 参照。

Sem. on Probab.
Vol.23-Ⅰ 1966年
P1-137

なる。Xが $q_\infty(x)=0$ をみたしていても X^M は $q_\infty^M(x)>0$ となって，killing（といっても explosionと考えるべきだが）になっている。

特に $f=1$ をとってみると，

$$M_t(w)=\exp\left\{-\lambda\int_0^t \xi_s(w)\,ds\right\}$$

となる。ここで $\xi_s(w)$ は $X_t(w)$ の個数である。これによる X^M は，non-branching part の λ-order の killing に対応している。

Sem. on Probab.
Vol.23- I 1966年
P1-137

第5章 Example

この章では branching process と呼ばれている stochastic process のいくつかの例について，これまでの立場からの定式化をあたえる。ここでのべるもののうち，あるものについては，それ自体，このノート全体を使っても書ききれない位，種々の立場からの沢山の研究がある。それらの中には現在のような統一的立場からみても，数学的興味をそそるものがあるが，ここではそれらにふれることは出来ないので，例えば，Harris [1]，Bartlett [1]，Bharucha-Reid [1] 等を見ていただきたい。なお，以下で考える branching Markov process は断らないかぎり仮定 [C.2] をみたしているとする。そのような branching Markov process はその non-branching part と branching system から一意的に定まるが，逆に，non-branching part と branching system をあたえたとき，仮定 [C.2] をみたす branching Markov process の存在は第6章で保証される。したがって，ここでは，そのことを基礎において，non-branching part と branching system によって，branching Markov process の定義をあたえる。

§5.1 (Continuous parameter) Galton Watson process

この例については第2章でふれた。すなわち，$S=\{a\}$：1点の場合である。(Harris [1] 第5章参照)。これは1個の粒子が e^{-ct} の割合で消滅し，それと同時に $q_2, q_3 \cdots$ の確率で 2，3 … 個の粒子が生まれ，確率 q_0 で消滅する。そうして，新しく生れた粒子は，互いに独立に最初の粒子と同じ行動をとるものである。

今，S は1点よりなるので，$C(S) \ni f$ は実数 f と同一視できる。
又，$S^n \ni (\overbrace{a, a \cdots a}^{n})$ を n と同一視する。すると $\mathbb{S}$ は $\bar{\mathbb{Z}}^+ = \{0, 1, 2, \cdots +\infty\}$ と同一視できる。S 上の process（正確にいえば，$S \cup \{\delta\}$ 上の死点 δ をもつ Markov 過程）は，S での holding time（かならず指数型 holding time である。）で完全にきまる。

Sem. on Probab.
Vol.23-Ⅰ 1966年
P1-137

今　$c>0$ と $q_n \geqq 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} q_n = 1$　$(q_1 = 0)$ *1)

に対し，その non-branching part が

(5.1)　$P_1[t<\tau] = e^{-ct}$

その branching system が

(5.2)　$\pi(1,\{n\}) = q_n, \quad n = 0, 2, 3, \cdots, +\infty$

となるような Markov branching process を (c, q_n) に対応する Galton-Watson process という。この process は（存在するとすれば）必ず仮定[C.2]をみたす。実際，第２章で $\sup_{x\in S} T_t \hat{0}(x) < 1$ ならば，仮定[C.2]のなりたつことを示したが，今の場合，$T_t\hat{0}(1) \leqq P_1[t \geqq \tau] = 1 - e^{-ct} < 1$ より明らかである。したがって，このような process は存在するとすれば唯１つであるが，その存在は第６章で一般的に保証されている。又，その存在は次のようにいってもよい。もし存在するとすれば，第２章の Th. 2.1 より

(5.3)　$P_n[t<\tau] = e^{-cnt}$,　$P_n[X_\tau = m] = q_{m-n+1}$　となるはずで

又，[C.2] をみたすことから，minimal chain でなければならない。ところで，(5.3)をみたす minimal chain が一意的に存在することは Markov chain 論でよく知られている。

(5.3)より Th. 2.1 の仮定 B.Ⅲ が容易にでるので，その Markov chain は branching Markov process である。(その他色々な解析的証明もある。Harris[1] 又は第７章をみよ。)

第３章の記号にしたがって

(5.4)　$F[1;f] \equiv F[f] = \sum_{n=0}^{\infty} q_n f^n \qquad |f| \leqq 1$

とおく。

(5.1)より

(5.5)　$T_t^0 f(1) = e^{-ct} f$

---

*1) $q_\infty > 0$ でもよい。そのとき Σ は $+\infty$ も含めた意味にする。

Sem. on Probab.
Vol.23- I 1966年
P1-137

(5.6) $$\int_0^t \int K(1;\, dr\,db) f(b) = \int_0^t cf\, e^{-cs}\, ds$$

で system (T_t^o, K, Π) は第３章の仮定(3.2)をみたすことは明らかである。このことより Galton Watson process X_t の半群 T_t は $\mathcal{C}_0(S)$上の強連続な半群である。

(i) $u(t;f) = T_t \hat{f}(1)$ とおくと，$(|f| \leqq 1)$，$u(t;f)$ は Skorohod equation：

(5.7) $$u(t;f) = fe^{-ct} + c\cdot\int_0^t F[u(t-s;f)]\, e^{-cs}\, ds$$

をみたす。

$u(t;f)$ は T_t の semi-group property と $T_t \hat{f}(n) = (T_t \hat{f}(1))^n$ より

(5.8) $$u(t; u(s;f)) = u(t+s; f) \quad , \quad u(0+, f) = f$$

をみたす。これは，$u(t;f)$ が fractional iteration の解であることを示す。

fractional iteration は，解析の古典的問題の１つである。例えば，Koenigs，Abel，Hadamard 等の仕事がある。これらについての文献および結果のごく簡単な紹介は Harris [1]，Chapter V，§５に見られる。

(ii) $\{T_t^o, K, \Pi\}$ が第３章，仮定3.2をみたしているので，第３章の結果がすべてなりたつ。まず，T_t^o の Hille Yosida の意味の generator $\mathcal{G}^o$ は(5.5)によって　$\mathcal{G}^o f = -cf$　となるので，その Forward equation 及び Backward equation はそれぞれ

(5.9) $$\frac{\partial T_t \hat{f}(i)}{\partial t} = T_t \langle f | -cf + cF[f] \rangle (i) \quad , \quad T_{0+} \hat{f}(i) = f^i$$

(5.10) $$\begin{cases} \dfrac{\partial T_t \hat{f}(i)}{\partial t} = \langle f | -cT_t \hat{f}|_1 + cF[T_t \hat{f}|_1] \rangle (i) \\ T_{0+} \hat{f}(i) = f^i \end{cases}$$

である。

(5.9)を§3.4にしたがって書きなおすと

(5.9)′ $$\frac{\partial T_t \hat{f}(i)}{\partial t} = c\{F[f]-f\} \frac{\partial T_t \hat{f}(i)}{\partial f} \quad , \quad T_{0+} \hat{f}(i) = f^i \ ,$$

(Harris [1]，第５章(4.2)式)　となる。

次に，$T_t \hat{f}(i) = \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}(t) f^j$　に注意して(5.9)，(5.10)を書きかえると

Sem. on Probab.
Vol.23-Ⅰ 1966年
P1-137

$$(5.9)'' \quad \begin{cases} \dfrac{\partial p_{ik}(t)}{\partial t} = -kcp_{ik}(t) + c\sum_{j=1}^{k+1} p_{ij}(t)\, j q_{k-j+1}, & i,k \geqq 0 \\ p_{ik}(0+) = \delta_{ik} \end{cases}$$

$$(5.10)' \quad \begin{cases} \dfrac{\partial p_{ik}(t)}{\partial t} = -icp_{ik}(t) + ci\sum_{j=i-1}^{\infty} q_{j-i+1} p_{jk}(t), & i>0 \\ \dfrac{\partial p_{ok}}{\partial t} = 0 \\ p_{ik}(0+) = \delta_{ik} \end{cases}$$

となる。これは古くからよく知られた Forward equation 及び Backward equation である。

方程式(5.9)″は Galton Watson process を完全に決定づけるが，(5.10)′は一般に多くの解をもち，その最小解が Galton Watson process になる。（Harris[1]又はこのノートの第7章参照）。

(iii) (5.10)を $i=1$ でみると，§3.3の semi-linear parabolic equation: $u(t;f) = T_t\hat{f}(1)$ とおいて $(|f| \leq 1)$

$$(5.11) \qquad \frac{\partial u(t;f)}{\partial t} = c\{F[u(t;f)] - u(t;f)\}, \quad u(0+;f) = f$$

がなりたつ。

$|f|<1$ ならば unique な解をもち

$$\int_f^{u(t;f)} \frac{d\xi}{F[\xi]-\xi} = ct$$

となる。これから直ちに次の定理が証明される（Harris[1]第5章 Th. 9.1）。

<u>Theorem 5.1 (Dynkin)</u>

$$T_t\hat{1}(1) = 1 \Longleftrightarrow {}^\forall\varepsilon>0 \text{ に対し } \int_{1-\varepsilon}^{1} \frac{d\xi}{F(\xi)-\xi} \text{ が発散する。}$$

［注意］ $T_t\hat{1}(1) = P_1[e_\Delta > t]$。したがって，Th. 5.1 は $P_1[e_\Delta = +\infty] = 1$ となる必要十分条件をあたえている。なお，これについてはさらにこの章の最後に再論する。

(iv) 平均個数の方程式

$$G[1;f] \equiv G[f] = \sum_{n=0}^{\infty} nq_n f = F'[1]\cdot f$$

Sem. on Probab.
Vol.23- I 1966年
P1-137

そこで，今 $F'[1]<\infty$とすると $m(f;t)\equiv H_t f = E_1(X_t)\cdot f$ は次の方程式の解である。

$$(5.12)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial m(f;t)}{\partial t} = c(G-1)\,m(f,t) \\ m(f,+0) = f \end{cases}$$

これより $m(f,t)=f\cdot e^{c(G-1)t}$ となる。

最も簡単な Galton-Watson process は birth and death process である。これは $c=\mu+\lambda$ であって

$$q_0=\frac{\mu}{\mu+\lambda},\quad q_2=\frac{\lambda}{\mu+\lambda},\quad \text{他の } q_n \text{ はすべて } 0$$

という場合の (c, q_n) に対応する Galton-Watson process である。このとき (5.11)式は簡単に

$$\frac{\partial u(t;f)}{\partial t}=(1-u(t;f))(\mu-\lambda u(t;f)),\quad u(0+;f)=f$$

となる。これは Riccati 型の方程式で，解は

$$u(t;f)=\frac{\mu(1-e^{(\lambda-\mu)t})-(\lambda-\mu e^{(\lambda-\mu)t})f}{\mu-\lambda e^{(\lambda-\mu)t}-\lambda(1-e^{(\lambda-\mu)t})f}$$

となり

$$u(t;f)=\sum_{n=0}^{\infty}p_{1n}(t)\,f^n \quad \text{より}$$

$$p_{1n}(t)=(1-\alpha(t))(1-\beta(t))\beta(t)^{n-1}$$

$$p_{10}(t)=\alpha(t)$$

ここで

$$\alpha(t)=\frac{\mu(e^{(\lambda-\mu)t}-1)}{\lambda e^{(\lambda-\mu)t}-\mu}$$

$$\beta(t)=\frac{\lambda(e^{(\lambda-\mu)t}-1)}{\lambda e^{(\lambda-\mu)t}-\mu}$$

である。

一般に Galton-Watson process について，その推移確率の固有函数展開の理論が Karlin-McGregor [1] であたえられた。

§5.2 multiple type の Galton Watson process

これは第1節の例の一般化で，その粒子の種類が k あるとした場合である。

Sem. on Probab.
Vol.23- I 1966年
P1-137

この場合，$\mathcal{S}$ は k 個の点よりなる集合：$\mathcal{S}$ $\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$ とする。

今 $\mathcal{S}^n$ の1点 $\bar{x}$ を $\bar{x} \ni [\overbrace{a_1 \cdots a_1}^{i_1}, \overbrace{a_2 \cdots a_2}^{i_2}, \cdots \overbrace{a_k, \cdots a_k}^{i_k}]$ とするとき

$\bar{x}$ を $(i_1, i_2, \cdots i_k)$ と同一視することができる。この同一視のもとで S は $\overline{\mathbb{Z}_+^k}$: $\mathbb{Z}_+$ の k 個の直積の1点 compact 化と同一視できる。特に $a_1, \cdots, a_k$ にはそれぞれ $e_1 \cdots e_k$（但し $e_i = (0 \cdots \overset{i}{\dot{1}} \cdots 0)$）が対応する。

そこで，S上の branching Markov process で，その $\mathcal{S} = \{e_1, \cdots, e_k\}$ 上の non-branching part X_t^0 は各 e_i から出たとき holding time τ のあとすぐ死ぬ process：

$$(5.13) \qquad P_{e_i}[\tau > t] = e^{-c_i t} \qquad c_i > 0\ ,\ i = 1, 2, \cdots, k$$

又，branching system $\pi\{e_i, \cdot\}$ は各 e_i $i = 1, 2, \cdots, k$ につき $S - \mathcal{S}$ 上の任意の probability measure とする。その一意的存在は前節と同様にしていえる．

今 $C(\mathcal{S}) \ni f$ は，k 次元空間の点 $f = (f(1), \cdots, f(k))$ と同一視できる（5.13）より

$$(5.14) \qquad \begin{cases} T_t^0 f(e_i) = e^{-c_i t} f(i), & i = 1, 2, \cdots, k, \\ K(e_i\,;\, ds \times \{e_j\}) = \delta_{ij}\, c_i e^{-c_i s}\, ds \end{cases}$$

となる。system $\{T_t^0, K, \pi\}$ は第３章の仮定3.2をみたすので，X_t に対応する半群 T_t は $C_0(S)$ を $C_0(S)$ にうつし，強連続で第３章の一般論より　今 $F[e_i\,;f] = F_i[f] = \int \pi(e_i, d\bar{y})\hat{f}(\bar{y})$ とおくと

$u(t, i) = T_t \hat{f}(e_i)$ は Skorohod equation：

$$(5.15) \qquad u(t, i) = f(i) e^{-c_i t} + c_i \int_0^t F_i[u(t-s, \cdot)]\, e^{-c_i s}\, ds$$

semi-linear な微分方程式：

$$(5.16) \qquad \frac{\partial u(t, i)}{\partial t} = c_i \{F_i[u(t, \cdot)] - u(t, i)\} \quad , \quad u(0+, i) = f(i)$$

をみたす。

又，Forward equation：$\bar{x} = (i_1, i_2, \cdots, i_k)$ として　$f = (f(1), \cdots, f(k)) \in (0, 1)^k$ で

$$(5.17) \qquad \frac{\partial T_t \hat{f}(\bar{x})}{\partial t} = \sum_{i=1}^{k} c_i \{F_i[f] - f(i)\} \frac{\partial T_t \hat{f}(\bar{x})}{\partial f(i)} \quad , \quad T_{0+} \hat{f}(\bar{x}) = \prod_{i=1}^{k} f(i)^{i_k}$$

Sem. on Probab.
Vol.23- I 1966年
P1-137

がなりたつ（Harris[1]参照）。

§5.3 Age dependent branching process, 1.

年令 a の個体が $e^{-(k_{a+t}-k_a)}$ の割合で死滅し，その時点で新たに年令 0 の個体が $q_n(a)$，$(n=0,1,2,\cdots)$ なる確率で n ケ生まれる。このような process を age-dependent branching process と呼ぶ（Harris[1] 第6章，Bortlett[1] §4.3，§4.4）。

これは次のように定式化される。まず，時間と個体の位置を同一視する。従って，基礎になる Markov-process は $[0,\infty)$ 上の uniform motion である（第6章参照）。

$S=[0,\infty)$ とする。$k\in C(S)$，$k\geq 0$ ととり，

$$k_t=\int_0^t k(s)\,ds \qquad \text{とおくと}$$

$$P_a[t<\tau]=e^{-(k_{a+t}-k_a)}$$

$$(5.18)\quad \begin{cases} T_t^0 f(a)=f(a+t)\,e^{-\int_a^{a+t}k(s)\,ds} \\ \qquad\qquad =f(a+t)\,e^{-(k_{a+t}-k_a)} \\ \int_0^t K(a;ds\,db)f(b)=\int_0^t k(a+s)f(a+s)\,e^{-(k_{a+s}-k_a)}\,ds \end{cases}$$

となる。$\{q_n(a),\ n=0,1,2,\cdots\}$ は任意にとる：$0\leq q_n\in C(S))$，$\sum_{n=0}^{\infty}q_n(a)=1$

π_n は process に対する条件から自動的に

$$(5.19)\quad \begin{cases} \pi_0(a,\{\partial\})=1 \\ \pi_n(a,\underbrace{(0,\cdots,0)}_{n})=1 \qquad n=1,2,\cdots \end{cases}$$

となる。

従って，$F[a,f]$ は

$$(5.20)\qquad F[a,f]=\sum_{n=0}^{\infty}q_n(a)\,f_{(0)}^n$$

となる。

(i) このとき，$u(t,a)=T_t\hat{f}(a)$ のみたす Skorohod equation は

$$(5.21)\quad u(t,a)=f(a+t)\,e^{-(k_{a+t}-k_a)}+\int_0^t k(a+r)F[a+r,\,u(t-r,\cdot)]\,e^{-(k_{a+r}-k_a)}\,dr$$

Sem. on Probab.
Vol.23-Ⅰ 1966年
P1-137

となる。特に $f=const.$ とすると，$T_t\hat{f}(a)$ は個数 ξ_t の generating ft. になることはすでに注意した。

(ii) 以下では $f\in C^*(\mathcal{S})$ に対し $F[a,f]\in C(\mathcal{S})$ を仮定しよう。すなわち $\sum_{n=0}^{\infty} q_n(a)$ が一様収束するとしよう。そのとき，system (T_t^0, K, Π) は仮定 (3.2) をみたすので，その semi-group T_t は $\mathbb{C}_0(S)$ を不変にし強連続となり，X_t は Hunt process となる。

T_t^0 の generator $\mathfrak{G}^0$ は

$$\mathfrak{G}^0 f = \frac{\partial f}{\partial a} - kf$$

である。従って，Forward equation と Backward equation は $f\in\mathcal{D}(\mathfrak{G}^0)\cap C^*(\mathcal{S})$ に対して

$$(5.22)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial T_t\hat{f}(\bar{a})}{\partial t} = T_t\langle f\,|\,\dfrac{\partial f}{\partial a} - kf + kF[\cdot, f]\rangle(\bar{a}) \\ T_{0+}\hat{f}(\bar{a}) = \hat{f}(\bar{a}) \end{cases}$$

$$(5.23)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial T_t\hat{f}(\bar{a})}{\partial t} = \langle f\,|\,\dfrac{\partial T_t\hat{f}|_S}{\partial a} - kT_t\hat{f}|_S + kF[\cdot\,; T_t\hat{f}|_S]\rangle(\bar{a}) \\ T_{0+}\hat{f}(\bar{a}) = \hat{f}(\bar{a}) \end{cases}$$

となる。

(iii) 従って，Skorohod equation に対応する semi-linear parabolic equation は (5.23) から

$$(5.24)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u(t,a)}{\partial t} = \dfrac{\partial u(t,a)}{\partial a} - k(a)\{u(t,a) - F[a, u(t,\cdot)]\} \\ u(0+, a) = f(a) \end{cases}$$

となり，$f\in\mathcal{D}(\mathfrak{G}^0)\cap C^*(S)$ に対し，$u(t,a)=T_t\hat{f}(a)$ は (7.24) の unique solution である。($q_n\equiv 0$, $(n\neq 2)$ の場合を Bartlett [1] §4.51((1) 式) で扱っている。)

(iv) 平均個数の方程式

$$G[a,f] = \sum_{n=0}^{\infty} n\, q_n(a)\, f(0)$$

である。$G(a)=\sum_{n=0}^{\infty} n q_n(a) < \infty$, $G(a)$: continuous を仮定しよう。そのとき，$H_t f(a) = T_t\check{f}(a)$ は $f\in\mathcal{D}(\mathfrak{G}^0)$ に対し

Sem. on Probab.
Vol.23- I 1966年
P1-137

$$(5.25)\qquad \frac{\partial u(t,a)}{\partial t} = \frac{\partial u(t,a)}{\partial a} - k(a)\,u(t,a) + k(a)G(a)\,u(t,0)$$

をみたしている。特に，平均個数 $m(t,a) = H_t\check{1}(a) = E_a[\xi_t]$ は (5.25) の解である。

特に，k が constant で，q_n も constant ならば，第２章で注意したように，個数 ξ_t が Branching Markov process (Galton-Watson process) になる。それが §5.1 又は第２章でのべたように，$\mathbb{Z}^+$ 上の Markov process になることと，X_t と ξ_t がある意味で同じ Markov process になることから，この場合は早くから Markov process の立場から詳しく研究されている。

逆に，$k \in \mathbb{C}(S)^+$ でなく，一般論でなく，この場合個有の具体的計算を用いるともっと一般の k に対して考えることも出来る。

§5.4 Age dependent branching process 2. age-dependent birth and death process

年令 a の個体が $e^{-(k_{t+a}-k_a)}$ の割合で死滅し，その時点で新たに年令 0 の $n-1$ 個の個体 0 と年令 a の個体１個を生む確率が $q_n(a)$，$(n=2,3,\cdots\ )$，なにも生まない確率を $q_0(a)$ とする。これは１個の個体が何回でも子供を生めるということにすぎない。

従って，S, k, T_t^0, K, $\{q_n(a);\ n=0,2,\cdots\}$ は前節と同様であって，π_n が次の場合である。

$$(5.26)\qquad \begin{cases} \pi_0\{a,\{\partial\}\} = 1 \\ \pi_n\{a,\{a,\underbrace{0,\cdots,0}_{n-1}\}\} = 1 \end{cases}$$

従って，$F[a,f]$ は

$$(5.27)\qquad F[a,f] = q_0(a) + \sum_{n=2}^{\infty} q_n(a)f(a)f^{n-1}(0)$$

となる。

特に，　$k(a) = \lambda(a) + \mu(a)$　，　$\lambda(a);\ \mu(a) > 0$，　であって，

$$(5.28)\qquad \begin{cases} q_0(a) = \dfrac{\mu(a)}{\lambda(a)+\mu(a)} \end{cases}$$

Sem. on Probab.
Vol.23-Ⅰ 1966年
P1-137

$$q_2(a) = \frac{\lambda(a)}{\lambda(a)+\mu(a)}$$

のとき，*branching Markov process* X_t を *age dependent birth and death process* と呼ぶ（Kendall [1], [2]，Bartlett [1]，§4.3）。

system $(T_t^0; K, \Pi)$ が仮定3.2をみたすので，その *semi-group* T_t は $\mathbb{C}_0(S)$ を不変にし強連続，従って *Hunt process* である。

(i) *Skorohod equation* は

$$(5.29) \qquad u(t,a) = f(a+t)e^{-(k_{a+t}-k_a)} + \int_0^t \{\mu(a+r)+\lambda(a+r)u(t-r, a+r)u(t-r, 0)\} e^{-(k_{a+r}-k_a)} dr$$

となる。しかも，$u(t,a) = T_t\hat{f}(a)|_S$ はこの解である。

(ii) *Skorohod equation* に対応する *semi-linear parabolic equation* は

$$(5.30) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u(t,a)}{\partial t} = \dfrac{\partial u(t,a)}{\partial a} + \lambda(a)\{u(t,0)u(t,a) - u(t,a)\} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + \mu(a)\{1-u(t,a)\} \\ u(0+, a) = f(a) \end{cases}$$

となる。$f \in \mathfrak{D}(\mathfrak{G}^0) \cap C^*(S)$ に対し，$u(t,a) = T_t\hat{f}(a)$ は (5.30) の *unique solution* である。（Batlett [1955]，§4.3，(2), (3)式）

特に $\lambda(a)$, $\mu(a)$ が *constant* のときには，*explicite* な解の形が知られている。

$$(5.31) \qquad T_t\hat{f}(a) = 1 + \frac{(\lambda-\mu)\{(f(a+t)-1)e^{-\mu t} + \lambda\int_0^t (f(u)-1)e^{(\lambda-\mu)t} e^{-\lambda u} du\}}{(\lambda-\mu) - \lambda\int_0^t \{f(u)-1\} e^{-\mu u}\{\lambda e^{(\lambda-\mu)(t-u)} - \mu\} du}$$

である。（Batlett [1955]，§4.3，(9)）

［注意］ *age-dependent process* に対しても *multiple-type* を考えることが出来る。そのためには *state space* を $S = [0,\infty) \times \{1, 2, \cdots, N\}$ として議論すればよい。そのとき，

$$(5.32) \qquad \begin{cases} T_t^0 f((a,j)) = f((a+t, j))\, e^{-(k^j_{t+a} - k^j_a)} \\ \int_S (a; dt\, db) f(b) = k^j(a+t) f(a+t, j)\, e^{-(k^j_{a+t} - k^j_a)} dt \end{cases}$$

ここで $\quad k^j_t = \int_0^t k^j(r)\, dr$

Sem. on Probab.
Vol.23-Ⅰ 1966年
P1-137

であって，π_n は条件

$$(5.33)\qquad \sum_{j_1=1}^{N}\cdots\sum_{j_n=1}^{N}\pi_n((a,k),((0,j_1),\cdots,(0,j_n)))=1$$

をみたすようにする（§5.3の意味の *age-dependent process* のとき）。

Skorohod equation は

$$(5.34)\qquad u(t,(a,j))=f((a+t,j))e^{-(k^j_{t+a}-k^j_a)}+\int_0^t F[(a+r,j),u(t-r,\cdot)]e^{-(k^j_{a+r}-k^j_a)}k^j(a+r)\,dr$$

となる。しかも $u(t,(a,j))=T_t\hat{f}((a,j))|_S$ はこの解である。

［注意］ 今後，§5.3，§5.4で議論した *process* で π_n をかってにとったものを *age-dependent process in wide sense* と呼ぶことにする。

この場合も前の節と同様に，k を一般化することは出来る。

前の節の時もこの節の時も基本的な式は1階の *semi-linear* な偏微分方程式である。*multiple type* の時はその *system* である。

§5.5 宇宙線の *electron-photon cascade* に現われる *branching process*

高 *energy* の *electron* あるいは *photon* が物質中に入射すると，*electron* は *photon* を発生させ，*photon* は *positive electron* と（*negative*）*electron* の *pair production* を行なう。これが相互にくりかえされて，*electron-photon cascade* が生ずる。これらについては数学的立場からは，例えば Harris [1] 第7章に詳しく論じてある。（また Bharuch-Reid [1] 参照）。ここではその中の *finite crossection* と呼ばれる時を，次のように定式化しよう。

なお，*infinite crossection* の時はこのノートの定式化をそのまま適用するには困難な点が多い。それらについては附録を参照。

まず，

$$S=[0,\infty)\times\{1,2,3\}$$

とする。T_t^0 及び K は次のように与える。

$$(5.35)\qquad \begin{cases} T_t^0 f(a,j)=f(a,j)e^{-c_j t}, \quad 0<c_j<\infty, \quad j=1,2,3 \quad a\in[0,\infty) \\ \\ \int_S K((a,j);\,dt\,dy)\,f(y)=c_j f(a,j)\,e^{-c_j t}\,dt, \end{cases}$$

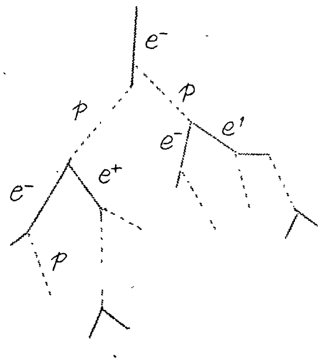
Sem. on Probab.
Vol.23-Ⅰ 1966年
P1-137

branching system $\{q_n, \pi_n\}$ は次の条件をみたす。

$$(5.36)\quad \begin{cases} q_2((a,j)) = 1, & j = 1, 2, 3 \\ \pi_2((a,1); ((au,2), (a(1-u),3), \ 0 \le u \le 1) = 1 & \\ \pi_2((a,k); ((au,1), (a(1-u),k)), \ 0 \le u \le 1) = 1, & k = 1, 2 \end{cases}$$

物理的には，$[0,\infty)\times\{1\}$ は photon の energy，$[0,\infty)\times\{2\}$，$[0,\infty)\times\{3\}$ はそれぞれ positive，negative electron の energy を表わす空間である。又「時間」t はここでは粒子の飛行距離を表わす parameter である。

従って，条件 (5.36) は energy a の photon はそれぞれ energy au, $a(1-u)$ の positron と electron を対創生し，その反応で energy は保存する。又，positron (electron) は物質にあたって散乱を起し，energy au の photon を発生し，自分の energy は $a(1-u)$ に減少する（このとき energy は保存すると仮定しているが，実際には減少する）。これを簡単に図示すれば左図のようになる。e^+, e^- は positron, electron, p は photon を表わす。



［注意］ 我々の model では electron の photon 発生の crosssection が有限であるときのみを扱っている。勿論，対創生の crosssection も有限である。

さらに，次の仮定をもうけることにしよう。

［仮定］ (i) $c_2 = c_3$

(ii) $0 \le k_1(u)$, $k_2(u) < \infty$ が存在して，$k_1(u) = k_1(1-u)$ であって

$$(5.37)\quad \begin{cases} \pi_2((a,1); d((au,2), (a(1-u),3))) = k_1(u)\,du \\ \pi_2((a,k); d((au,1), (a(1-u),k))) = k_2(u)\,du, \quad k = 2, 3 \end{cases}$$

Sem. on Probab.
Vol.23-Ⅰ 1966年
P1-137

をみたす。ここで $k_1(u)$, $k_2(u)$ は α に depend しない。

(5.36) により

(5.38) $\int_0^1 k_1(u)\,du = 1$, $\int_0^1 k_2(u)\,du = 1$

をみたしている。

上の仮定から，特に $f \in \mathbb{C}^*(\mathcal{S})$ として，$x=(\alpha, 2)$ と $x=(a, 3)$ では同じ値をとる関数をとれば，

(5.39) $$T_t \hat{f}(a, 2) = T_t \hat{f}(\alpha, 3)$$

である。今後，とくに $f \in \mathbb{C}^*(\mathcal{S})$ として $x=(\alpha, 2)$ と $x=(\alpha, 3)$ では同じ値をとる関数のみを考えることにして，2と3を同一視することにしよう。

$F[(a, j), f]$ は次のようになる。

(5.40) $$\begin{cases} F[(a, 1), f] = \int_0^1 f(au, 2) f(\alpha(1-u), 2)\, k_1(u)\,du \\ F[(a,2), f] = \int_0^1 f(au, 1) f(a(1-u), 2)\, k_2(u)\,du \end{cases}$$

これからきまる branching process X_t を cascade process と呼ぶことにしよう。条件から，cascade process のその semi-group T_t は $\mathbb{C}_0(S)$ を不変にし強連続になる。従って，Hunt process である。

$F[x, f]$ $x \in \mathcal{S}$ は

(5.41) $$|F[x, f] - F[x, g]| \leq C\|f-g\|$$

をみたしていることを注意しておく。

(i) cascade process に対する Skorohod equation は $f \in \mathbb{B}^*(\mathcal{S})$ に対し

(5.42) $$\begin{cases} u(t,(a,1)) = f(a,1)e^{-c_1 t} + c_1\int_0^t\left\{\int_0^1 u(t-r,(au,2))\,u(t-r,\right. \\ \qquad\qquad \left.(a(1-u,2))\,k_1(u)\,du\right\} e^{-c_1 r}\,dr \\ u(t,(a,2)) = f(a,2)e^{-c_2 t} + c_2\int_0^t\left\{\int_0^1 u(t-r,(au,1))\,u(t-r,\right. \\ \qquad\qquad \left.(a(1-u),2))\,k_2(u)\,du\right\} e^{-c_2 r}\,dr \end{cases}$$

となる。そうして $T_t\hat{f}(\bar{x}) = u(t, \bar{x})_{|\mathcal{S}}$ はこの解である。これらは適当に変形す

Sem. on Probab.
Vol.23-Ⅰ 1966年
P1-137

ると infinite crosssection の時も本質的に同じことが成りたつ。

(ii) Skorohod equation に対応する semi-linear parabolic equation は

$$\mathcal{G}^{\circ} f(a,j) = -c_j f(a,j) \quad , \quad j=1,2$$

であるから，(5.41)に注意すると，(5.42)から次のようになる。

$$(5.43)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u_1(t,a)}{\partial t} = -c_1 u_1(t,a) + c_1 \displaystyle\int_0^1 u_2(t,au)\, u_2(t,a(1-u))\, k_1(u)\, du \\ \dfrac{\partial u_2(t,a)}{\partial t} = -c_2 u_2(t,a) + c_2 \displaystyle\int_0^1 u_1(t,au)\, u_2(t,a(1-u))\, k_2(u)\, du \end{cases}$$

となる。$u_1(t,a) = T_t \hat{f}(a,1)$，$u_2(t,a) = T_t \hat{f}(a,2)$ は (5.43) の解になっている。（Harris [1]，第7章（15.2）式）

（iii）平均個数の方程式

まず，$G[(a,j),f]$ を求めると，

$$(5.44)\quad \begin{cases} G[(a,1),f] = 2\displaystyle\int_0^1 f(au,2)\, k_1(u)\, du \\ G[(a,2),f] = \displaystyle\int_0^1 \{ f(au,1) + f(a(1-u),2) \}\, k_2(u)\, du \end{cases}$$

であるから，$H_t f(a,j) = T_t \check{f}(a,j)$ は

$$(5.45)\quad \begin{cases} H_t f(a,1) = f(a,1) e^{-c_1 t} + 2c_1 \displaystyle\int_0^t \Big\{ \int_0^1 H_{t-r} f(au,2)\, k_1(u)\, du \Big\} e^{-c_1 r}\, dr \\ H_t f(a,2) = f(a,2) e^{-c_2 t} + c_2 \displaystyle\int_0^t \Big\{ \int_0^1 \{ H_{t-r} f(au,1) + H_{t-r} f(a(1-u),2) \}\, k_2(u)\, du \Big\} e^{-c_2 r}\, dr \end{cases}$$

をみたす。従って，対応する parabolic equation は

$$(5.46)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial h_1(t,a)}{\partial t} = -c_1 h_1(t,a) + 2c_1 \displaystyle\int_0^1 h_2(t,au)\, k_1(u)\, du \\ \dfrac{\partial h_2(t,a)}{\partial t} = -c_2 h_2(t,a) + c_2 \displaystyle\int_0^1 \{ h_1(t,au) + h_2(t,a(1-u)) \}\, k_2(u)\, du \end{cases}$$

となる。$h_1(t,a) = H_t f(a,1)$，$h_2(t,a) = H_t f(a,2)$ は (5.46) の解である。

物理的に興味のある量として，energy が E より大なる electron（又は positron）の個数の generating function を考えよう。そのために

$$g_E(x) = \begin{cases} 0 \ , & x=(a,1),\ x=(a,2) \text{ で } a<E,\ x=(a,3) \text{ で } a<E \\ 1 \ , & x=(a,2),\text{ で } a \geqq E,\ x=(a,3) \text{ で } a \geqq E \end{cases}$$

Sem. on Probab.
Vol.23-Ⅰ 1966年
P1-137

とおく。

(5.47) $\quad N_t(E,\omega)=\check{g}_E(X_t(\omega))$, ただし $N(E,\omega)=\infty$, if $X_t(\omega)=0$,

とおけば，$N_t(E,\omega)$ は energy が E より大なる electron (or positron) の個数を表わしている。

$0\leq\lambda<1$ として，

$$f_E(x)=\lambda^{g_E(x)}$$

とおくと，

$$T_t\hat{f}_E(x)=E_x[\lambda^{N_t(E,\omega)}]$$

は $N(E,\omega)$ の generating function である。g の形と，π についての仮定 (5.37) に注意すると

$$T_t\hat{f}_E(a,j)=T_t\hat{f}_{\frac{E}{a}}(1,j)$$

であるから

$$\varphi_1(t,E)=T_t\hat{f}_E(1,1)$$
$$\varphi_2(t,E)=T_t\hat{f}_E(1,2)$$

とおくと，(5.43) は

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\varphi_1(t,E)}{\partial t}=-c_1\varphi_1(t,E)+c_1\displaystyle\int_0^t\varphi_2\left(t,\frac{E}{u}\right)\varphi_2\left(t,\frac{E}{1-u}\right)k_1(u)\,du\\[2ex]\dfrac{\partial\varphi_2(t,E)}{\partial t}=-c_2\varphi_2(t,E)+c_2\displaystyle\int_0^t\varphi_1\left(t,\frac{E}{u}\right)\varphi_2\left(t,\frac{E}{1-u}\right)k_2\,du\end{cases}$$

となる。(Harris [1], 第７章 (11, 14) 式)。

$$m_1(t,E)=H_t\check{g}_E(1,1)$$
$$m_2(t,E)=H_t\check{g}_E(1,2)$$

とおくと，g の形と π に関する (5.37) の仮定に注意すると $H_t\check{g}_E(a,j)$ $H_t\check{g}_{\frac{E}{a}}(1,j)$ 故に，(5.46) は

$$\begin{cases}\dfrac{\partial m_1(t,E)}{\partial t}=-c_1m_1(t,E)+2c_1\displaystyle\int_0^1m_2\left(t,\frac{E}{u}\right)k_1(u)\,du\\[2ex]\dfrac{\partial m_2(t,E)}{\partial t}=-c_1m_2(t,E)+c_2\displaystyle\int_0^1\left\{m_1\left(t,\frac{E}{u}\right)+m_2\left(t,\frac{E}{1-u}\right)\right\}k_2(u)\,du\end{cases}$$

となる。(Harris [1]，第７章 (12.1) 式)

これらの方程式の性質および，それから導かれる応用的な事柄については，Harris [1], 第７章に詳しい。

Sem. on Probab.
Vol.23-Ⅰ 1966年
P1-137

§5.6 Branching Brownian motion

Ito-McKean[1] は大まかに言えばつぎのような branching Markov process X を考えている（Ito-McKean[1], Chapter 5）。

R^d の Brownian motion B $(B_t, P_x^{(B)};\ x \in R^d)$ を考え，その continuous non-negative additive functional φ_t をとって来る。X の non-branching part が B の $e^{-\varphi_t}$-subprocess と equivalent で，

$$(5.48)\qquad \begin{aligned} &q_2(x) = 1, \quad x \in R^d, \\ &\pi_2(x; d\bar{y}) = \delta_{(x,x)}(d\bar{y}), \quad x \in R^d \end{aligned}$$

とする。

ところが R^d が compact でないので，このままではこれまでの吾々の定式化にははいらない。それをこれまでの枠組に入れるには種々の方法が考えられるが，その1つは $\mathcal{S}$ として R^d の一点 compact 化 $\overline{R^d} = R^d \cup \{\delta\}$ をとることである。そのときは

$$P_\delta^{(B)}[B_t = \delta, \quad t \geqq 0] = 1$$

として $P^{(B)}$ を $\mathcal{S}$ 上に拡張出来ることは Brown 運動の結果として知られている。このように拡張したものをあらためて B とする。いま

$$\mathbb{C}_0(\mathcal{S}) = \{f;\ \ f \in \mathbb{C}_0(\mathcal{S}),\ f(\delta) = 0\}$$

とおき，

$$\mathbb{C}_0^*(\mathcal{S}) = \mathbb{C}^*(\mathcal{S}) \cap \mathbb{C}_0(\mathcal{S}).$$

とおく。そのとき

$$(5.49)\qquad T_t^{(B)}\mathbb{C}_0(\mathcal{S}) \subseteq \mathbb{C}_0(\mathcal{S})$$

である。ここで $T_t^{(B)}$ は B_t の semi-group とする。

さらに

$$P_\delta^{[B]}[\varphi_t \equiv 0, \quad t \geqq 0] = 1$$

とする。

このとき，non-branching part が B の $e^{-\varphi_t}$-subprocess と同等であるような branching Markov process を branching Markov process という。(branching system は任意)。

以下事情を簡単にするために，

$$\varphi_t = \int_0^t k(B_s)\,ds, \quad 0 < k \in \mathbb{C}(R^d), \quad k(\delta) = 0,$$

Sem. on Probab.
Vol.23- I 1966年
P1-137

で，

$$q_n \in \mathbb{C}(\mathcal{S}), \quad \sum_{n=1}^{\infty} q_n(x) = 1 \quad (\text{一様収束}), \quad q_1 = 0$$

の場合を考えよう。

このとき，そのような branching Brownian process が実際存在するかということが問題になる。それは右連続で強 Markov で，しかも e_Δ 以前では quasi-left-continuous なものを構成出来る。それは右連続で強 Markov process で，e_Δ 以前で quasi-left continuous である。

以下，k は R^d 上で連続で，かつ有界とする。その時はこれまでの議論で $k \in \mathbb{C}(\mathcal{S})$ の条件は必ずしもみたされていないので，そのままではないが，k が有界なことに注意すれば，修正が出来て，

(i) $f \in \mathbb{C}_0^*(\mathcal{S})$ に対して，$u(t,x) = T_t\hat{f}(x)|_{\mathcal{S}}$ は Skorohod equation

$$u(t,x) = T_t^0 f(x) + \int_0^t T_r^0 [kF[\cdot, u(t-r, *)]](x)\,dr \tag{5.50}$$

(ii) 又，$f \in \mathbb{C}_0^*(\mathcal{S})$ に対し，$H_t f(x) = T_t \check{f}(x)$ は $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n q_n(x)$ として

$$H_t f(x) = T_t^0 f(x) + \int_0^t dr\, T_r^0 [k G H_{t-r} f](x) \tag{5.51}$$

をみたしている。

(iii) semi-linear parabolic equation

$f \in C^2(R^d) \cap \mathbb{C}_0^*(\mathcal{S})$ に対し，$u(t,x) = T_t\hat{f}(x)$ は semi-linear parabolic equation

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\Delta u(t,x) - k(x)\{u(t,x) - \sum_{n=0}^{\infty} q_n(x) u^n(t,x)\} \\ u(0+, x) = f(x) \end{cases} \tag{5.52}$$

をみたす。

(iv) $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n q_n(x) < \infty$ とする。そのとき平均個数の方程式は

$$\frac{\partial h(t,x)}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta h(t,x) + k(x)\{G(x) - 1\} h(t,x) \tag{5.53}$$

となる。$h(t,x) \equiv H_t f(x) = T_t \check{f}(x)$ は (5.51) をみたす。

特に $q_2 = 1$ とすると，(5.52)，(5.53) は

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta u(t,x) - k(x)\{u(t,x) - u^2(t,x)\} \tag{5.52'}$$

Sem. on Probab.
Vol.23-Ⅰ 1966年
P1-137

$$\frac{\partial h(t,x)}{\partial t} = \frac{1}{2}\bar{\Delta} h(t,x) + k(x)h(t,x) \tag{5.53'}$$

となる。この場合には $f \in \mathbb{C}^2(R^d) \cap \bar{\mathbb{C}}_0^*(S)$ に対し $u = T_t \hat{f}(x)$, $h = H_t \check{f}$ は (5.52'), (5.53') の unique solution になる。

ところが, $k(x)$ が有界でないと, (5.52') は unique solution をもたない場合が起って来る。それについてはここでは詳細にはふれないが, つぎのような Ito-McKean[1] の例がある。

[Ito-McKean の例]　ここでは k は R^d で連続ではあるが有界ではない。すなわち, 特に S は一次元とし, $k(x) = |x|^\gamma$ $(\gamma > 0)$ $q_2 = 1$ とする。
そのとき (5.50), (5.51) は

$$u(t,x) = T_t^0 f(x) + \int_0^t T_r^0 [k u^2(t-r,\cdot)](x)\, dr \tag{5.54}$$

$$u(t,x) = T_t^0 f(x) + \int_0^t T_r^0 [2k u(t-r,\cdot)](x)\, dr \tag{5.55}$$

となる。

k が有界でないため, これまでのことはそのままは適用出来ないが, 形式的には (5.52), (5.53) に対応して

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + |x|^\gamma \{u^2(t,x) - u(t,x)\} \tag{5.54'}$$

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + |x|^\gamma u(t,x) \tag{5.55'}$$

なる方程式が対応している。Ito-McKean[1] によれば (5.52') は $\gamma \leq 2$ ならば $f = 1$ に対して unique な解をもち, $\gamma > 2$ ならば $f = 1$ に対し $u = 1$ の他に non-trivial な解が存在する。このことは確率論的にいうと $\gamma > 2$ ならば $P_x[e_\Delta > t] < 1$ となるのに反し $\gamma \leq 2$ では $P_x[e_\Delta \leq t] = 1$ $\forall t$ となることを意味している。

§5.7 age-dependent Branching Brownian motion

$R^d \times [0,\infty)$ 上の space time の Brown motion *1) を B_t としよう。そ

Sem. on Probab.
Vol.23- I 1966年
P1-137

の semi-group を T_t とする。その generator $C^2(R^d\times[0,\infty))\ni u$ に対し

$$\mathcal{G}u = \frac{1}{2}\Delta u + \frac{\partial u}{\partial a}$$

で与えられるとする。但し，Δ は d 次元の Laplacian 。

そのとき，B_t の continuous non-negative additive functional φ_t によって x_t の $e^{-\varphi_t}$-subprocess を non-branching part としてもつ Branching Markov process を age-dependent Branching Brownian motion と呼ぶことにしよう。

特に k を $[0,\infty)$ 上の有界な non-negative conti. ft. とし，

$$\varphi_t(\omega) = \int_0^t k(B_t^a)\,dt$$

とおく。但し $B_t=(B_t^{\cdot}, B_t^a)$ ，$(B_t^{\cdot}\in R^d,\ B_t^a\in[0,\infty))$ である。

このときには，T_t^0 は

$$T_t^0 f(x,a) = T_t f(x,a)\, e^{-\int_a^{t+a}k(r)dr}$$

で与えられ，

$$\int_{R^d\times[0,\infty)} K((x,a);\ dtdb)f(b) = k(a+t)\,T_t f(x,a)e^{-\int_a^{t+a}k(r)dr}$$

で与えられる。

今 $q_n(a)\geqq 0$，$\sum_{n=0}^{\infty} q_n(a)=1$，（$x$ には independent）とし，π_n を

$$\pi_0((x,a),\ \{\partial\})=1$$

$$\pi_n((x,a),\ (\underbrace{(x,0),\ \cdots,\ (x,0)}_{n}))=1 \qquad n=1,2,\cdots$$

とする。従って

$$F[(x,a),\ f] = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(a) f^n(x,0)$$

である。

これは年令 a の Brownian particle が $e^{-\int_a^{t+a}k(r)dr}$ の割合で死滅し，その時点で新たに $q_n(a)$ なる確率で年令 0 の Brownian particle を生むということである。

---

*1) それについては例えば Ito-McKean [1] を参照。

Sem. on Probab.
Vol.23-Ⅰ 1966年
P1-137

§5.8 Branching diffusion process

(i) 簡単のため, d 次元 Euclidean space で D はなめらかな境界 ∂D をもち, $\bar{D}=D\cup\partial D$ は compact な domain であるとする。$a^{ij}(x)$, $b^{j}(x)$ を $\bar{D}=D\cup\partial D$ 上の必要なだけなめらかな函数とし,

$$Au(x)=\sum_{i,j=1}^{d}\frac{1}{\sqrt{a(x)}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(a^{ij}(x)\sqrt{a(x)}\frac{\partial u}{\partial x^j}(x)\right)+\sum_{j=1}^{d}b^{j}(x)\frac{\partial u}{\partial x^j}(x)$$

とおく。ここで $\sqrt{a(x)}=det(a^{ij}(x))^{-1}$ である。

$$(5.56)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x)=Au(t,x) & , \quad x\in D, \quad t>0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}(t,x)=0 & , \quad x\in\partial D, \quad t>0 \end{cases}$$

ここで $\frac{\partial}{\partial n}$ は $a^{ij}(x)$ からきまる内向き法線微分である。いま, A が strictly eliplic になっているとき, (5.56) の基本解を $p(t,x,y)$ としよう。よく知られているように, $p(t,x,y)\,dm(y)$ を推移確率にもった $\bar{D}$ 上の conservative[*1] で連続な Markov process X' が存在する. いわゆる reflecting A-diffusion である (Sato-Ueno [1] 参照)。ここで $dm(x)=\sqrt{a(x)}\,dx^1\cdots dx^d$ である. 又 $a^{ij}(x)$ からきまる境界上の measure を $d\tilde{m}$ としよう。そのとき, ∂D 上の local time (additive functional) φ_t で, つぎの条件をみたすものが存在する:

$$E'_x[\varphi_t]=\int_0^t ds\int_{\partial D}p(t,x,y)\,\tilde{m}(dy) \quad , \quad x\in\bar{D}$$

$\bar{D}$ の上函数 $C(x)\geqq 0$ と ∂D 上函数 $\beta(x)\geqq 0$ を考える。共に充分なめらかとする。そのとき

$$M_t(w)=exp\left\{-\int_0^t c(x_s)\,ds-\int_0^t\beta(x_s)\,d\varphi_s\right\}$$

とし, M_t-subprocess を作ると, それは

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x)=Au(t,x)-C(x)u(t,x) & , \quad x\in D, \quad t>0 \\ \dfrac{\partial}{\partial u}u(t,x)-\beta(x)u(t,x)=0 & , \quad x\in\partial D, \quad t>0 \end{cases}$$

*1) 実は recurrent である (c.f. Nagasawa [1])

Sem. on Probab.
Vol.23-Ⅰ 1966年
P1-137

に対応する diffusion X^0 になる（Sato-Ueno [1], 第3章参照）。その推移確率の density $\bar{p}^0(t,x,y)$ は

$$\bar{p}^0(t,x,y)=p(t,x,y)-E'_x\left[\int_0^t p(t-s,\ x_s,\ y)\,d(-M_s)\right]$$

で与えられる（Nagasawa-Sato [1], Ikeda-Nagasawa-Sato [1]）。

branching system $\{q_n(x),\ \pi_n(x,d\bar{y})\}$ を適当に与え，X^0 を non-branching part とする $S=D\cup\partial D$ 上の branching process を Branching reflecting (A)-diffusion process と呼ぶことにしよう。そのとき，X^0 の semi-group T_t^0 及び $K(t)$ は

$$T_t^0 f(x)=\int \bar{p}^0(t,x,y)f(y)m(dy)$$

及び

$$K(x;\ dt\,dy)=\bar{p}^0(t,x,y)c(q)m(dy)dt+\bar{p}^0(t,x,y)\beta(y)\tilde{m}(dy)\,dt$$

で与えられる（Nagasawa-Sato [1], Ikeda-Nagasawa-Sato [1]）。

T_t^0 がいま $\mathbb{B}(S)$ を $\mathbb{C}(S)$ にうつすことに注意すれば Branching (A)-diffusion X_t の semi-group T_t は $C_0(S)$ を $C_0(S)$ に移し，強連続である。従って X_t は Hunt process になっている。

Skorohod equation は

$$(5.57)\qquad T_t\hat{f}(x)=T_t^0 f(x)+\int_0^t\int_{\bar{D}}K(ds,\ x,\ dy)F[y:\ T_{t-s}\hat{f}|_{\bar{D}}]$$

となる。それに対応する semi-linear parabolic equation は

$$(5.58)\quad\begin{cases}\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t}=Au(t,x)+c(x)\{F[x;u(t,x)]-u(t,x)\} & ,\ x\in D,\ t>0\\[2ex] \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial n}-\beta(x)\{u(t,x)-F[x,u(t,x)]\}=0 & ,\ x\in\partial D;\ t>0\\[2ex] u(0+,x)=f(x) & x\in\bar{D}\end{cases}$$

である。

[Remark] 特に $c(x)\equiv 0$ の場合を考えてみると，それは non-linear な境界条件を持った parabolic equation であることを注意する。

(ii) T. I. Watanabe [1] では，特に $\sum_{n=1}^{\infty}p_n=1$，（p_n は constant）をとり

$$q_n(x)=\begin{cases}p_n & ,\ x\in D\qquad n=1,2,3,\cdots\\ 0 & ,\ x\in\partial D\end{cases}$$

Sem. on Probab.
Vol.23-Ⅰ 1966年
P1-137

$$q_0(x) = \begin{cases} p_0 & , \quad x \in D \\ 1 & , \quad x \in \partial D \end{cases}$$

とし， $\pi_n(x, d\bar{y}) = \delta_{\{x,\cdots,x\}}(d\bar{y})$, $(n=1,2,3,\quad)$ ， $\pi_0(x,d\bar{y}) = \delta_{\{\partial\}}(d\bar{y})$
とした場合を考えている。

そのとき． $u(t,x) = T_t\hat{f}(x)$ は Skorohod equation (2.54) から $\|f\|<1$, $f\in C(\bar{D})$ として，

$$u(t,x) = \int_{\bar{D}} \bar{p}^\circ(t,x,y) f(y) m(dy) + \int_0^t \int_D \bar{p}^\circ(r,x,y)\, c(y) F[u(t-r,y)]\, m(dy)\, dr$$

$$+ \int_0^t \int_{\partial D} \bar{p}^\circ(r,x,y)\, \beta(y) \tilde{m}(dy)\, dr$$

となる。ここで $F[\xi] = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \xi^n$ である。（第２項の積分領域は $m(dy)$ が境界上に mass をもたないから $\bar{D}$ におきかえてよい）。第２項は Sato-Ueno [1], Lemma 2.2 により $x\in\bar{D}$ に関し連続微分可能である。従って $u(t,x)$ は (t,x) に関し Hölder condition をみたすから， $F[u(t-s,y)]$ も満たす。従って， Sato-Ueno [1] , Theorem 2.2 により

$$(5.59)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial}{\partial t} - A + c(x)\right) u(t,x) = c(x) F[u(t,x)] & , \; x\in D ,\; t>0 \\[2ex] \left(\beta(x) - \dfrac{\partial}{\partial n}\right) u(t,x) = \beta(x) & , \; x\in D ,\; t>0 \\[2ex] u(0+, x) = f(x) & x\in\bar{D} \end{cases}$$

をみたすことがわかる。

[Remark] 上の Remark の場合以外にも，一般の場合にも， $f\in C^*(\bar{D})$ として， $F[x, T_t\hat{f}|_{\bar{D}}]$ が (t,x) に関し $[0,t_0]\times\bar{D}$ で Hölder 連続になれば $u(t,x) = T_t\hat{f}(x)$ は (5.58) をみたすことがわかる。ここで t_0 は任意の $0<t_0<\infty$ なるもの。

[Remark 2] $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$ （p_n は const.）， $\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{p}_n = 1$ （$\tilde{p}_n$ は const.）
とし，

$$q_n(x) = \begin{cases} p_n & , \quad x\in D \\ \tilde{p}_n & , \quad x\in\partial D \end{cases} \qquad n = 0, 2, 3, \cdots$$

$$\pi_n(x, d\bar{y}) = \delta_{\{x,\cdots,x\}}(d\bar{y}) \quad (n=2,3,\cdots) \quad , \quad \pi_0(x,d\bar{y}) = \delta_{\{\partial\}}(d\bar{y})$$

とする。 $F[\xi] = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \xi^n$, $\tilde{F}[\xi] = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{p}_n \xi^n$ とする。

Sem. on Probab.
Vol.23-Ⅰ 1966年
P1-137

そのとき，Branching (A)-diffusion が存在し，Hunt process になっている。

(iii) 吸収壁の Branching diffusion

記号は(i)と同様とする。そのとき，∂D への first hitting time を $\sigma_{\partial D}$ とし，$\sigma_{\partial D}$ で killing した process は吸収壁の diffusion になる。

そのとき，x_t を吸収壁の diffusion とし，

$$\varphi_t = \int_0^t c(x_r)\,dr$$

とおく。x_t と独立で $P_x[z \in ds] = e^{-s}ds$ となる確率変数 $z(\omega)$ をとって

$$T(w) = \inf\{t;\ \varphi_t(w) \geqq z(w)\}$$

としよう。

$\bar{D} = D \cup \{\delta\}$ を D の one-point compact 化とし，

$$\begin{aligned} \dot{x}_t &= x_t \quad , \quad t < T \wedge \sigma_{\partial D} \\ &= \delta \quad , \quad t \geqq T \wedge \sigma_{\partial D} \end{aligned}$$

とする。

そのとき，$(\dot{x}_t,\ T\wedge\sigma_{\partial D},\ P_x)$ を non-branching part としてもつ $s = \bar{D}$ 上の branching Markov process X_t を吸収壁の Branching A-diffusion と呼ぶ。

特に，q_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を constant で $\sum_{n=1}^{\infty} q_n = 1$ をみたすものをとり

$$q_n(x) = \begin{cases} q_n &, \quad x \in D \\ 0 &, \quad x = \delta \end{cases}$$

$$q_0(x) = 0$$

とし，$\pi_n(x, d\bar{y}) = \delta_{\{x, x, \cdots, x\}}(d\bar{y})$ ，$(x \in \bar{D}\ ,\ n = 2, 3, \cdots)$

$$\pi_0(x, d\bar{y}) = \delta_{\{\partial\}}(d\bar{y})$$

とする。このとき，第2章の Definition に関して注意したように，ξ_t としては $s^n \ni x_t = (x_t^{(1)}, \cdots, x_t^{(n)})$ のとき，$x_t^{(j)} = \delta$ でない j の個数として定義する。そうすると，Sevastiyanov [1]，S. Watanabe [1] の問題は，上の process で $A = \frac{1}{2}\Delta$ の場合の問題として考えることが出来る。

さて

Sem. on Probab.
Vol.23-Ⅰ 1966年
P1-137

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} = Au(t,x) - cu(t,x) \quad , \quad x \in D, \quad t>0 \\ u(t,x)=0 \quad , \quad x \in \partial D \quad , \quad t>0 \end{cases}$$

の基本解を $p^\circ(t,x,y)$ としよう。そのとき，

$$T_t^\circ f(x) = \int_D p^\circ(t,x,y) f(y) m(dy)$$

$$K(dt,x,dy) = p^\circ(t,x,y) c(y) m(dy) dt$$

となる。いま，$f \in \mathbb{B}(D)$ は必ず $f(\delta)=1$ と拡張して $\hat{f}$ を定義し，$f(\delta)=0$ と拡張して $\check{f}$ を定義する。

そのとき，Skorohod equation は $f \in \overline{\mathbb{B}^*(D)}$ に対し

$$T_t\hat{f}(x) = \int_D p^\circ(t,x,y) f(y) m(dy) + \int_0^t\int_D p^\circ(s,x,y) c(y) F[T_t\hat{f}(y)] m(dy)\, ds$$

となる。

$f \in \mathbb{C}^*(D)$ に対し，$u(t,x) = T_t\hat{f}(x)$ とおくと，$u(t,x)$ は semi-linear parabolic equation：

$$(5.60) \quad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial}{\partial t} - A + c(x)\right) u(t,x) = c(x) F[u(t,x)] \ , \quad x \in D, \quad t>0 \\ \lim\limits_{x \to y} u(t,x) = 1 \quad , \quad y \in \partial D \ , \quad t>0 \\ u(0+,x) = f(x) \ , \quad x \in D \end{cases}$$

をみたしている。

(iv) (ii) 及び (iii) の Branching diffusion で，特に $P_x[e_\Delta = +\infty] = 1$ となっていることを仮定しよう。そのとき，$u(t,x) = T_t\check{f}(x)$，$f \in \mathbb{C}^*(\delta)$ は次の平均個数の方程式をみたす。

(ii) の場合

$$(5.61) \quad u(t,x) = \int_{\overline{D}} \bar{p}^\circ(t,x,y) f(y) m(dy) + G\int_0^t\int_D \bar{p}^\circ(s,x,y) c(y) u(t-s,y) m(dy)\, ds$$

$$+\int_0^t\int_{\partial D} \bar{p}^\circ(s,x,y) \beta(y) \tilde{m}(dy)\, ds$$

ここで $G = \sum_{n=1}^{\infty} n p_n$

従って，$u(t,x)$ は $f \in C(\overline{D})$，$f \geqq 0$ として，parabolic equation

Sem. on Probab.
Vol.23- I 1966年
P1-137

$$(5.62)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial}{\partial t} - A + c(x)\right)u(t,x) = G c(x) u(t,x), & x \in D, \quad t > 0 \\ \left(\beta(x) - \dfrac{\partial}{\partial n}\right) u(t,x) = \beta(x), & x \in \partial D, \quad t > 0 \\ u(0+, x) = f(x) \end{cases}$$

をみたしている。

(iii) の場合

$$(5.63)\quad u(t,x) = \int_D p^0(t,x,y) f(y) m(dy) + G\int_0^t \int_D p^0(s,x,y) c(y) u(t-s,y) m(dy) ds$$

ここで $G = \sum_{n=1}^{\infty} n q_n$

従って, $u(t,x)$ は $f \in C(\bar{D})$ $t \geqq 0$ として, *parabolic equation*

$$(5.64)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial}{\partial t} - A + c(x)\right)u(t,x) = G\cdot c(x) u(t,x), & x \in D, \quad t > 0 \\ \lim\limits_{\substack{x \to y \\ x \in D}} u(t,x) = 0, & y \in \partial D, \quad t > 0 \\ u(0+, x) = f(x), & x \in D \end{cases}$$

をみたしている。

§5.9 一次元の *Branching diffusion process*

$S = [r_1, r_2]$, $-\infty \leq r_1 < r_2 \leq \infty$ とする。S 上に *local infinitesimal generator* が

$$A\, u(x) = \frac{u^+(dx)}{m(dx)}$$

の形で与えられる, *regular inteval* の 1 次元 *diffusion* を考える。そのとき, S 上の *non-negative measure* $k(dx)$ に対応する *non-negative continuous additive functional* φ_t によって, $e^{-\varphi_t}$-*subprocess* を作ると, S 上の *local infinitesimal generator*

$$(5.65)\quad \mathfrak{G}^0 u(x) = \frac{u^+(dx) - k(dx)u(x)}{m(dx)}$$

なる *diffusion* が得られる。境界点 r_1, r_2 は良く知られているように, *reg-*

Sem. on Probab.
Vol.23-I 1966年
P1-137

ular, exit, entrance, natural の4種類が可能であるが, regular の時は

$$(5.66)\qquad p_j^{(1)}u(r_j)+(-1)^j p_j^{(2)}\lim_{x\to r_j}\frac{d}{dx}u(x)+p_j^{(3)}\lim_{x\to r_j}\mathfrak{G}^0u(x)=0$$

$$p_j^{(1)},\ p_j^{(2)},\ p_j^{(3)}\ \geqq\ 0$$

をみたしている。*1)

そのとき, S 上の Branching Markov process X_t で $\mathfrak{G}^0$ と適当な境界条件から定まる一次元 diffusion と equivalent な non-branching part をもつものが存在する。それを特に一次元の Branching (regular) diffusion process と呼ぶことにしよう。このとき, branching system は第2章に要求された条件をみたす範囲内で自由にとれる。いま境界点が吸収になっている時は第2章にのべた意味の Definition についての修正をすると, X_t は Hunt process と考えられる。

scale の変換と $m(dx)$, $k(dx)$ を適当にとることによって, §5.8で $D=(r_1, r_2)$ の場合は上の場合にふくまれることは言うまでもない。

$u(t,x)=T_t\hat{f}(x)$, $f\in C^*(S)$, が Skorohod equation をみたすことは, X_t が strong Markov で quasi-left continuous の時は常に示されることであった。従って, この場合も勿論成立つ。このときは, Ito-McKean [1], 又は McKean [1] の結果を用いると, (5.65) なる方程式で必要ならば (5.66) 型の境界条件を考えた時の基本解を $p^0(t,x,y)$ とすれば non-branching part の推移確率 $P^0(t,x,dy)$ は

$$P^0(t,x,dy) = p^0(t,x,y)\,m(dy)$$

で与えられる。更に

$$K(x;dtdy) = p^0(t,x,y)\,k(dy)\,dt$$

となる。従って, Skorohod equation は $f\in C^*(S)$

$$(5.67)\qquad u(t,x)=\int_S p^0(t,x,y)f(y)m(dy)+\iint_{S\,0}^{\,t} p^0(r,x,y)F(y;u(t-r,\circ)]k(dy)dr$$

となる。ただし,

$$F[x;f]=\int_S \pi(x;dy)f(y)$$

*1) 1次元 Diffusion に関しては Ito-McKean [1] 又は Dynkin [1] 参照。

Sem. on Probab.
Vol.23- I 1966年
P1-137

$$\pi(x;dy) = \sum_n q_n(x)\,\pi_n(x;dy \cap S^n)$$

また，m，kは境界条件に応じて，1次元diffusion の理論で知られている方法で境界点の上まで拡張されたものである。

ところで，(5.67)に形式的に対応するsemi-linear parabolic equationは

$$(5.68) \qquad \frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = \frac{u^+(t,dx)+k(dx)[F[x;u(t,\cdot)]-u(t,x)]}{m(dx)}, \quad x\in(r_1,r_2),$$

$$p_j^{(1)}(u(t,r_j)-F(r_j;u(t,\cdot))+(-1)^j p_j^{(2)}\lim_{x\to r_j}\frac{d}{dx}u(x)+\lim_{x\to r_j}\mathcal{G}^0 u(x) = 0,$$

となる。(5.68)は第3章の後半でのべた方程式の特別な場合にあたる。$u(t,x) = T_t\hat{f}(x)$ が本当に(5.68)の解になることは(5.67)にMcKean[1]の結果をあわせれば示せると思うが，現在のところきっちりとは証明できていない。

§5.10 一次元のBranching transport process

transport problemに関する問題をMarkov process の立場から考えることは，粒子のcreationがなければ Nomoto-Ikeda[1]で定式化された。しかし，現実問題に良く対応するためには，branching processの立場で考えるべきであることは，Wing[1]その他に注意してある。その方向のことについては，既に§5.5で宇宙線の問題に関して，photon-electron-cascade としてのべた。実際はそれを単純化したものにすぎないが，transport problemで取扱われているある型のbranching process を branching Markov process として定式化すると，つぎの形のものが得られる。

$D = R^1\times\{0,1\}$，$0<c<\infty$，$0<\lambda<\infty$，を考え，

$$(5.69) \qquad T_t^0 f((a,j)) = f((a+c(-1)^j t, j))\,e^{-\lambda t}, \quad (a,j)\in D,\ f\in B(S)$$

とする。これがS上のMarkov processのsemi-group になることは，良く知られている。

branching system として，

$$(5.70) \qquad \begin{aligned} &q_2((a,j)) = 1, \quad q_n((a,j)) = 0, \quad n\neq 2, \\ &\pi_2((a,j);\{(a,0)\times(a,1)\}) = 1 \end{aligned}$$

をとった時，第2章の定義に関する注意を用いれば，$S = \overline{D} = \overline{R^1}\times\{0,1\}$ 上の

Sem. on Probab.
Vol.23-Ⅰ 1966年
P1-137

branching Markov process で，non-branching part の semi-group が T_t^0，branching system が (5.70) で与えられるものが存在する。これを便宜上 S 上の2粒子型の branching transport process ということにする。この時は $f\in\overline{C^*(S)}$ に対して，$T_t\hat{f}(x)=u(t,x)$ は Skorohod equation

$$u(t,(a,j))=f((a+c(-1)^j t,j))e^{-\lambda t}+\lambda\int_0^t u(t-r,(a,0))u(t-r,(a,1))e^{-\lambda r}dr$$

となる。更に，$f((a,j))$ を a の関数として $C^1(\overline{R^1})$ に属するとすれば $u(t,(a,j))$ は

$$(5.71)\quad \begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t}(t,(a,j))=c(-1)^j\frac{\partial u}{\partial a}(t,(a,j))-\lambda u(t,(a,j))+\lambda u(t,(a,0))u(t,(a,1)) \qquad (a,j)\in D,\\ &u(0+,(a,j))=f(a,j)\end{aligned}$$

の解になる。なお，上の (5.71) 式は $f(a,0)=f(a,1)=f(a)$ に対し

$$u_j(t,a)=u(t,(a,j))$$

とおけば

$$(5.72)\quad \begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial t}u_0(t,a)=c\dfrac{\partial}{\partial a}u_0(t,a)-\lambda u_0(t,a)+\lambda u_0(t,a)u_1(t,a)\\[2mm] \dfrac{\partial}{\partial t}u_1(t,a)=-c\dfrac{\partial}{\partial a}u_1(t,a)-\lambda u_1(t,a)+\lambda u_0(t,a)u_1(t,a),\quad a\in R^1,\\[2mm] u_0(0+,a)=f(a),\qquad u_1(0+,a)=f(a)\end{cases}$$

なる初期条件 $f(a)$ の R^1 上の semi-linear な方程式の system を得る。

これらの方程式の adjoint な equation が所謂 transport problem に現われている方程式である。*1) Nomoto-Ikeda [1] では，所謂 transport process と Brownian motion の関連を極限定理として考えたが，branching transport process と branching Brownian motion の関係をしらべることは今日のところ，残されたままである。

---

*1) 物理その他では Markov process で出て来る作用素の adjoint なものを考えることが多い。また，transport problem に関する方程式については簡単なものは Wing [1] で見られる。

Sem. on Probab.
Vol.23-Ⅰ 1966年
P1-137

§5.11 Remark (Dynkinの定理)

continuous parameter の Galton-Watson process X に対する Skorhod equation より導かれる semi-linear equation の一意性について，Theorem 5.1 で 1 つの結果をのべた。いま一度繰返すと，つぎのようなことである。

系列 $\{q_n\}$ は

$$q_1 = 0, \quad 0 \leq q_n < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} q_n = 1 \quad ^{*1)}$$

をみたす。$0 < c < \infty$ とする。

$$F(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n \xi^n, \qquad 0 \leq |\xi| \leq 1$$

を考える。このとき，non-branching part の semi-group T_t^0 が

$$T_t^0 f(1) = e^{-ct} f(1)$$

で，$\{q_n\}$ で定まる branching system をもつ $\mathbb{Z}^+$ 上の Galton-Watson process X を考える。[*2)] 一方 X に対応する semi-linear な parabolic equation

$$(5.73) \qquad \begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = c[F[u(t)] - u(t)] \\[2ex] u(0+) = 1 \end{cases}$$

を考える。そのとき，Theorem 5.1 の内容はつぎの3つの主張が同等ということである：

(1) (5.73) の $0 \leq u(t) \leq 1$ なる解が一意的である。

(2) $P_{\bar{x}}[e_\Delta = \infty] = 1, \quad \bar{x} \in S - \{\Delta\}$

(3) $1 > \varepsilon \geq 0$ なる任意の ε に対して

$$\int_{1-\varepsilon}^{1} \frac{d\xi}{F(\xi) - \xi} = -\infty .$$

(1) と (2) の同等性は3章にのべた事実を用いると明らか。そこで (3) と (1) または (2) との同等性を論ずればよい。

ところで，(5.73) は semi-linear な常微分方程式であるので，それについての一般論によれば

---

*1) この和は通常の意味である。すなわち2章の記号では $q_\infty = 0$.

*2) Galton Watson process が T_t^0 と $\{q_n\}$ より定まることは §5.1 より明らか。

$$F^*[\xi] = F[\xi] - \xi$$

が $Lipschitz$ の条件をみたせば，解は unique になる。ところが，Fの定義よりrを $0 \leq r < 1$ なるように 1 つ固定すれば，$0 \leq \xi \leq r$ では $F^*[\xi]$ は $Lipschitz$ の条件をみたしている。従って後は $\xi = 1$ の近傍で何等かの条件を与えればよい。それが (3) であるというのが Theorem 5.1 の主張である。

ここでは事情を一層鮮明にするために，

$$\text{"} q_0 = 0 \text{"}$$

を以下仮定してこの証明を与える。*1) なお，Theorem 5.1 は Zolotarev[1] に証明なしで Dynkin の結果としてのべあり，Harris[1] には一般の場合にその証明がのべてある。われわれの証明は Harris の場合と異なって，出来るだけ Markov 過程論の結果を使うようにした。

$$\lim_{t \uparrow \infty} T_t \hat{1}(n) = e(n)$$

に注意すれば

$$e(n) = \widehat{e(1)}(n) = (e(1))^n \tag{5.74}$$

で，$T_t \hat{e}(1) = e(1)$ であるので

$$e(1) = 1 \text{ 又は } 0 \tag{5.75}$$

である。まず

$$E_1[e_\Delta] = \infty \iff P_1[e_\Delta = \infty] = 1 \tag{5.76}$$

を示そう。 $P_1[e_\Delta = \infty] = 1$ ならば $E_1[e_\Delta] = \infty$ は明らかであるので，$E_1[e_\Delta] = \infty$ より $P_1[e_\Delta = \infty] = 1$ を示せばよい。

$E_1[e_\Delta] = \infty$ のとき，$P_1[e_\Delta = \infty] < 1$ とすれば (5.75) により

$$P_1[e_\Delta = \infty] = 0$$

となる。すなわち

$$P_1[e_\Delta < \infty] = 1$$

である。この場合は

$$T_t \hat{1}(1) < 1, \quad \forall t > 0 \tag{5.78}$$

*1) この証明はなんら一般性をうしなわない。必要ならば Harris [1] でよく用いられている conditional process を考えるとよい。

Sem. on Probab.
Vol.23-Ⅰ 1966年
P1-137

を示そう。今もし，あるtに対して

$$T_t\hat{1}(1) = 1$$

ならば，$^\forall s \leqq t$ に対して

$$T_s\hat{1}(1) = 1$$

である。更に $T_{t_0}\hat{1}=1$ とすれば $\widehat{T_{t_0}\hat{1}}(n) = \hat{1}(n)$，

$$T_{nt_0}\hat{1}(1) = T_{(n-1)t_0}(T_{t_0}\hat{1})(1) = T_{(n-1)t_0}\hat{1}(1)$$

より $^\forall n$ に対して

$$T_{nt_0}\hat{1}(1) = \hat{1}(1)$$

となる。故に $^\forall t \leq nt_0$ に対し

$$T_t\hat{1}(1) = 1$$

である。故に

$$\lim_{t\to\infty} T_t\hat{1}(1) = 1$$

となり，$P_1[e_\Delta < \infty] = 1$ に矛盾する。よって，$^\forall t > 0$ に対して $T_t\hat{1}(1) < 1$ が示された。

つぎに $0 < t_0 < \infty$ を1つ固定すると，

$$T_{nt_0}\hat{1}(1) < (T_{t_0}\hat{1}(1))^n$$

を証明しよう。実際 $T_t\hat{1}(i) = (T_t\hat{1}(1))^i \leq T_t\hat{1}(1)$ $i=1,2,\cdots$ に注意して

$$T_{nt_0}\hat{1}(1) = T_{t_0}(T_{(n-1)t_0}\hat{1})(1) \leq T_{t_0}\hat{1}(1)\,T_{(n-1)t_0}\hat{1}(1)$$

より

$$T_{nt_0}\hat{1}(1) \leq (T_{t_0}\hat{1}(1))^n$$

である。

よって，ある定数K，$0 < K < \infty$ が存在して，

$$T_t\hat{1}(1) \leq e^{-Kt}$$

となる。故に

$$E_1[e_\Delta] = \int_0^\infty T_t\hat{1}(1)\,dt < \infty$$

となる。これは仮定に矛盾。従って，$P_1[e_\Delta = \infty] = 1$ となる。よって (5.76) が示された。[*1]

---

*1) この証明と同様にして，一般の branching process について $q_0(x) \equiv 0$，のとき $\sup_{x\in S} T_t\hat{1}(x) < 1$ ならば $E_x(e_\Delta) < +\infty$ $^\forall x \in S$ となる。

Sem. on Probab.
Vol.23-Ⅰ 1966年
P1-137

故に (1) と (2) の同等性を用いれば

$$(1) \iff E_1[e_\Delta] = +\infty$$

が言えた。そこで

$$(3) \iff E_1[e_\Delta] = +\infty$$

を示せば充分である。

上の仮定の下では

$$P_1[\tau_\infty = e_\Delta] = 1$$

であるので，

$$(3) \iff E_1[\tau_\infty] = \infty$$

を言えばよい。ところが，定義より

$$\tau_\infty = \sum_{k=1}^{\infty}(\tau_k - \tau_{k-1}) = \sum_{k=1}^{\infty}\tau(\theta_{\tau_{k-1}}\omega)$$

である。故に

$$E_1[\tau_\infty] = \sum_{k=1}^{\infty} E_1[E_{X_{\tau_{k-1}}}[\tau]]$$

である。一方

$$E_1[E_{X_{\tau_{k-1}}}[\tau]]$$
$$= \sum_{n_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{n_k=1}^{\infty} q_{n_1+1}\cdots q_{n_k+1}\ \frac{1}{n_1+n_2+\cdots+n_k+1}\ \frac{1}{c}$$

である。ところが，$1 > \varepsilon > 0$ に対して

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{n_k=1}^{\infty} q_{n_1+1}\cdots q_{n_k+1}\ \frac{(1-\varepsilon)^{j_1+j_2+\cdots+j_k+1}}{n_1+n_2+\cdots+n_k+1} < \infty$$

に注意すれば

$$E_1[\tau_\infty] = \infty$$
$$\iff$$
$$\int_{1-\varepsilon}^{1}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{n_k=1}^{\infty} q_{n_1+1}\cdots\cdots q_{n_k+1}\ \xi^{n_1+\cdots+n_k}\,d\xi = \infty$$

一方，

$$\int_{1-\varepsilon}^{1}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{n_k=1}^{\infty} q_{n_1+1}\cdots q_{n_k+1}\ \xi^{n_1+\cdots+n_k}\,d\xi$$

$$= \int_{1-\varepsilon}^{1}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\bar{H}(\xi)}{\xi}\right)^k d\xi = \int_{1-\varepsilon}^{1}\frac{1}{1-\frac{F(\xi)}{\xi}}\,d\xi$$

Sem. on Probab.
Vol.23-Ⅰ　1966年
P1-137

$$= \int_{1-\varepsilon}^{1} \frac{\xi}{\xi - F(\xi)} \, d\xi$$

故に

$$E_1[\tau] = \infty \iff \int_{1-\varepsilon}^{1} \frac{1}{\xi - F[\xi]} \, d\xi = \infty$$

である。故に

$$E_1[\tau] \quad \infty \iff (3)$$

が示された。

[Remark]　上で $T_t \hat{1}(1) < 1$ より $E_1(e_\Delta) < \infty$ をしめしたが，次のような別証もある。$T_t \hat{1}(1) < 1$ より $\lim_{n\to\infty} T_t \hat{1}(n) = \lim_{n\to\infty} (T_t \hat{1}(1))^n = 0$

故に　$v(n) = G_1 \hat{1}(n) \equiv \int_0^\infty e^{-t} T_t \hat{1}(n) \, dt$　とおくと　$\lim_{n\to\infty} v(n) = 0$

又　$v(n) < 1 \quad {}^\forall n = 1, 2, \cdots$　も明らか。故に　$\sup_n v(n) \equiv \alpha < 1$

T_t の生成作用素を $\mathfrak{G}$ とすると　$\mathfrak{G} v = v - \hat{1}$ であるので

$\sup_n \mathfrak{G} v(n) = \alpha - 1 < 0$　するとDynkinの公式（cf. Ito [1]）

より

$$E_1[v(X_{e_\Delta \wedge n})] - v(1) = E_1\left[\int_0^{e_\Delta \wedge n} \mathfrak{G} v(X_t) \, dt\right] \leqq (\alpha - 1) E_1(e_\Delta \wedge n)$$

故に

$$E_1(e_{\Delta \wedge n}) \leqq \frac{1}{1-\alpha} E_1(v(X_{e_{\Delta \wedge n}})) \leqq \frac{1}{1-\alpha}$$

$n \to \infty$ として

$$E_1(e_\Delta) \leqq \frac{1}{1-\alpha} < +\infty \qquad q.e.d.$$

Sem. on Probab.
Vol.23-Ⅰ 1966年
P1-137

1966年1月発行 確率論セミナー