Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

SEMINAR ON PROBABILITY

Vol. 22

拡散過程と境界上のマルコフ過程

国田　寛・佐藤健一
福島正俊・本尾　実

1965

確率論セミナー

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

拡散過程と境界上のマルコフ過程

国田 寛 ・ 佐藤健一
福島正俊 ・ 本尾 実

Seminar on Probability Vol. 22

確率論セミナー

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

まえがき

確率論セミナーの１９６４年の４月セミナーは広島大学で行われたが、主テーマとしてMarkov過程の境界問題がとりあげられ，６単位にわたって次のような話が行われた．

1. 問題の定式化　（佐藤）
2. U－process（上野による境界上のprocess）とDirichletノルム（福島）
3. Θ－kernelによるDirichletノルムの表現（内部が可算個の点から成る場合）（国田）
4. Minimalな部分とU－processへの分解 I（佐藤）
5. Minimalな部分とU－processへの分解 II（本尾）
6. U－processの性質（本尾）

４月セミナーが終ってから，この話をSeminar on Probabilityの一冊としてまとめようということになったが，この後本尾の研究が進み，境界から内部へ連続にもどったり境界上で飛躍したりするのみならず境界に滞留することおよび境界から内部へ飛躍でもどることを許した最も一般の場合に，Markov過程からその行動を定めるいくつかの要素を取り出すこと，更に，それらの要素（U－processはその最も重要な一つである）がみたすべき必要十分条件を明かにすることに成功した．すなわち，与えられた要素から逆にMarkov過程を構成することができた．（その結果は，１９６５年度の４月セミナーと，第５回Berkeleyシンポジウムで発表された．）それは，pathの境界における行動の深い分析にもとずく精妙な結果である．そこでSeminar on Probabilityは本尾の結果を体系的に述べることを主目的としてまとめることに変更したが，それがこのノートである．一方，福島はDoob [1] のDirichletノルム，Neumann問題の研究を利用して，Euclid空間（ないしGreen空間）の一般の（なめらかでない境界をもつ）領域に対し，Martin境界でcompact化した所で反射壁のBrown運動を

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

構成することに成功した．これも重要な結果と思われるが，このノートには含まれていない．（結果の一部は福島［2］として発表された．Dirichlet ノルムをどのように使うかは付録Ⅰでも解説されている．）

§1～§8は佐藤がまとめたが，その主な部分すなわち§1～§6は本尾の研究を本尾[4]の原稿などにもとずいて まとめなおしたものである．§7はDirichlet ノルムに関する福島の研究を，本尾の研究の形式の上でまとめた．§8は今後の問題点などである．付録Ⅰは国田によるもので，内部が可算個の点から成る場合に，調和函数のDirichlet ノルムのMartin境界上での積分による表現と，resolventの福島による構成の自己共役でない場合への拡張が述べられている．付録Ⅱは福島によるもので，古典的な反射壁拡散過程の場合に そのU－processの生成作用素の表現が得られている．

１９６４年の４月セミナーでの話のうち，1は§8に含まれている．2は§7と佐藤，長沢，福島［1］の中の福島の執筆した部分（才４章）とにほぼ含まれており，3は付録Ⅰに含まれている．4は，近く論文（佐藤［1］）が印刷されるので,省略した．5，6は一般化された形で §3～§5 に含まれている．

（１９６５．９．７．　佐藤記）

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

目　次

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

§1. 準備I（一般的準備）

Sを，オ2可算公理をみたす局所compactなHausdorff空間とする．$S^* = S \cup \{\Delta_S\}$を，$S$がcompactでない時は$S$の一点compact化とし，$S$自身がcompactの時は，一点$\Delta_S$を孤立点として付加したものとする．$\mathcal{B}(S)$，$\mathcal{B}(S^*)$を，それぞれ$S$，$S^*$の開集合の全体によって生成されるBorel集合体とする．W_Sを，写像$w : [0,+\infty] \longrightarrow S^*$で次のような$s \in [0,+\infty]$の存在するものの全体とする：

$$t < s \quad ならば \quad w(t) \in S$$
$$t \geqq s \quad ならば \quad w(t) = \Delta_S .$$

このsを$s = \zeta(w)$とかく．$t \in [0,+\infty]$を時間$w \in W_S$をpath，$\zeta(w)$をpath wの消滅時間という．wの座標函数を$x_t(w)$と記す．すなわち$x_t(w) = w(t)$．$w \in W_S$，$s \in [0,+\infty]$に対し$w_s^+ \in W_S$を，$w_s^+(t) = w(s+t)$によって定義する．

$W \subset W_S$が与えられ，すべての$s \in [0,+\infty]$に対し変換$w \longrightarrow w_s^+$で閉じているとする．$\mathcal{B}_t$を，Wの上のBorel集合体で$\{x_s : s \leqq t\}$を可測にする最小のものとし，$\mathcal{B}_{+\infty} = \mathcal{B}$と記す．$\mathcal{B}$を$\mathcal{B}(W)$ともかく．$\mathcal{B}$上の確率測度の系$\{P_x : x \in S^*\}$が与えられ，次の条件をみたすとする．

1) $B \in \mathcal{B}$を固定した時，$P_x(B)$はxの函数として$\mathcal{B}(S^*)$可測．

2) $$P_x(x_0(w) = x) = 1, \qquad x \in S^*.$$

3) W上の任意の有界$\mathcal{B}$可測函数fと任意の$x \in S^*$と$t \in [0,\infty]$に対し

$$E_x(f(w_t^+) \mid \mathcal{B}_t) = E_{x_t}(f), \qquad P_x\text{-}a.e.$$

この時，組$(W, P_x : x \in S^*)$を<u>Sの上の時間的一様なMarkov過程</u>，あるいは単に<u>Sの上のMarkov過程</u>といい，$\mathbb{M} = (W, P_x : x \in S^*)$と記す，条件2)により，$P_{\Delta_S}$は必ず一つのpath（ずっと$\Delta_S$にいるというpath）だけに集中しているから，単に$\mathbb{M} = (W, P_x : x \in S)$ともかく．$S$を$\mathbb{M}$の状態空間，$\Delta_S$をextra

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

point，Wを$\mathbb{M}$のpath空間という．条件3)をMarkov性という．

Markov過程$\mathbb{M}$のpath空間Wが次の条件をみたす時，拡散過程という：$\forall w \in W$に対し$x_t(w)$が$0 \leq t < \zeta(w)$で連続．また，$\forall w \in W$に対し$x_t(w)$がtについて右連続であるとき，右連続なMarkov過程という．Markov過程$\mathbb{M}$が$\forall x \in S$に対し$P_x(\zeta(w) = +\infty) = 1$をみたすとき，conservativeであるという．

Markov過程$\mathbb{M} = (W, P_x : x \in S^*)$が与えられた時，これを$W_S$をpath空間として表現することができる．すなわち，$\pi : W \to W_S$を$w \in W$にそれ自身を対応させる写像とすると$(W, \mathcal{B}(W))$から$(W_S, \mathcal{B}(W_S))$への可測写像となるが，$B \in \mathcal{B}(W_S)$に対して$\hat{P}_x(B) = P_x(\pi^{-1}(B))$とおくことによって$\hat{P}_x$を定義すると，$\hat{\mathbb{M}} = (W_S, \hat{P}_x : x \in S^*)$はMarkov過程になる．$\hat{\mathbb{M}}$を，$W_S$をpath空間とする$\mathbb{M}$の表現という．2つのMarkov過程に対し$W_S$をpath空間とする表現が一致する時，これらは同値である，あるいは互いにversionであるという．

事象Bが与えられ，$\forall x \in S^*$に対し$P_x(B) = 1$が成り立つ時，Bはa.s.（殆んど確実）に成り立つという．また，$\forall x \in S^*$に対し$P_x(B \cap B') = P_x(B')$が成り立つ時，BはB'上でa.s.に成り立つという．S^*上の測度μに対し，$P_\mu(B) = \int_{S^*} P_x(B)\mu(dx)$，$E_\mu(f) = \int_S E_x(f)\mu(dx)$等の記号を用いる．

Hunt [1]によって導入された条件(A)を定義するために，まずいくつかのBorel集合体を定義する．$\mathcal{B}^\mu(S)$をS上の確率測度μによる$\mathcal{B}(S)$の完備化とし，μがS上のすべての確率測度を動くときの$\mathcal{B}^\mu(S)$の交わりを$\mathcal{F}(S)$と記す．同称にSをS^*にかえて$\mathcal{F}(S^*)$を定義する．$\mathcal{B}_t^\mu$をP_μによる$\mathcal{B}_t$の完備化とし，μがS^*上のすべての確率測度を動くときの$\mathcal{B}_t^\mu$の交わりを$\mathcal{F}_t'$と記す．$\mathcal{F}_{+\infty}'$を単に$\mathcal{F}'$と記す．Wから$[0, +\infty]$への写像σが，すべての$t \in [0, +\infty]$に対し$\{\sigma < t\} \in \mathcal{F}_t'$をみたす時，$\sigma$をMarkov時間という．

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

σ が Markov 時間であるとき，$A \cap \{\sigma < t\} \in \mathfrak{F}_t$ をみたす $A \in \mathfrak{F}'$ の全体を $\mathfrak{F}_\sigma$ と記す．$\mathfrak{F}'$ を $\mathfrak{F}$ とも記すことにする．

S の上の Markov 過程 $\mathbb{M} = (W, P_x : x \in S)$ が次の 3 つの条件をみたす時，<u>条件（A）をみたす</u> という．

（A1）　任意の *path* $w \in W$ に対し $x_t(w)$ は $0 \leq t < +\infty$ で右連続，かつ，$0 < t < +\infty$ で左からの極限をもつ（S^* の位相で）.（従って，$0 < \zeta(w) < +\infty$ ならば $\lim_{t \uparrow \zeta} x_t(w) = x_{\zeta-}(w)$ も存在する．）

（A2）　（強 Markov 性．）任意の Markov 時間 σ，W 上の任意の有界 $\mathcal{B}$ 可測函数 f，任意の $x \in S^*$ に対して

$$E_x(f(w_\sigma^+) \mid \mathfrak{F}_\sigma) = E_{x_\sigma}(f) \qquad P_x\text{-a.e.}$$

（A3）　$\{\sigma_n\}$ が単調非減少な Markov 時間の列で $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma$ とすると，$\{\sigma < +\infty\}$ の上で a.s. に $\lim_{n\to\infty} x_{\sigma_n} = x_\sigma$ が成り立つ．

定義に関しては大体において本尾 [2] に従う．定義に関連して注意すべき種々のことを省略するので，くわしくは本尾 [2]，近藤 [1] あるいは更に Meyer [1] を参照のこと．たとえば，(A2) を述べる前に w_σ^+ が $(W, \mathfrak{F})$ から $(W, \mathfrak{F})$ への写像として可測になること，$x_\sigma(w)$ が $(W, \mathfrak{F})$ から $(S^*, \mathcal{B}(S^*))$ への写像として可測になることを注意するべきであった．

定数 t は Markov 時間であるが，$\mathbb{M}$ が条件（A）をみたせば $\mathfrak{F}_t = \mathfrak{F}_t'$ が成り立つ．

S の上の有界かつ $\mathfrak{F}(S)$ 可測な実数値函数の全体を $F(S)$ で表わし，有界かつ $\mathcal{B}(S)$ 可測な実数値函数の全体を $B(S)$，有界連続な実数値函数の全体を $C(S)$ で表わす．これらは Banach 空間である．ノルム $\|f\|$ としては $|f(x)|$ の S における上限をとる．また，$S \times S$ の上の有界かつ $\mathcal{B}(S) \times \mathcal{B}(S)$ 可測な実数値函数の全体を $B(S \times S)$ で表わし，$f \in B(S \times S)$ かつ $\forall x \in S$, $f(x, x) = 0$ なる f の全体を $B_0(S \times S)$ で表わす．$B^+(S)$，$C^+(S)$ 等で，$B(S)$, $C(S)$ 等に属する函数で非負なものの全体を表わす．S 上の函数 f は，特に断らない限りいつも $f(\Delta_S) = 0$ として S^* 上の函数と考える．

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

f が $S \times S$ 上の函数の場合も，特に断らない限り，x または y が Δ_S の時は $f(x,y)=0$ として $S^* \times S^*$ の上の函数と考える．

$S_1, S_2 \subset S$ とする．$x \in S_1$ と $E \in \mathcal{B}(S_2)$ の函数 $K(x,E)$ が x を固定すれば E について σ－有限な測度であり，E を固定すれば x について $\mathcal{B}(S_2)$ 可測の函数である時，S_1からS_2への核という．S_2 の上の $\mathcal{B}(S_2)$ 可測函数 f の $K(x,\cdot)$ による積分が存在する時，

$$Kf(x) = \int_{S_2} K(x, dy) f(y)$$

と記す．また，$S_1 \times S_2$ の上の可測函数 $f(x,y)$ に対し

$$Kf(x) = \int_{S_2} K(x, dy) f(x, y)$$

と記す．S から S への核を単に核という．$\delta(x,E)$ で次のような核を表わす．

$$\delta(x, E) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \notin E \end{cases}$$

Markov過程 $\mathbb{M}$ に対し 核 $T_t(x,E) = P_x(x_t \in E)$ を推移確率，核 $G_\alpha(x,E) = E_x\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t} \chi_E(x_t)\,dt\right)$ を α 位の Green測度 または Green核とよぶ．作用素としては

$$T_t f(x) = E_x(f(x_t))$$
$$G_\alpha f(x) = E_x\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t} f(x_t)\,dt\right)$$

である．G_αを作用素として考える時，α次の Green 作用素という．推移確率が一致することは，2つのMarkov過程が同値であるための必要十分条件である．また，Green 核が一致することは，2つの右連続なMarkov過程が同値であるための必要十分条件である．

推移確率は次の性質をもつ．

(1.1) $\quad T_t T_s = T_{t+s} \qquad (t, s \geq 0)$

(1.2) $\quad T_0 = I \qquad$（I は恒等作用素）

(1.3) $\quad f \geq 0 \implies T_t f \geq 0$

(1.4) $\quad \| T_t f \| \leq \| f \|$.

また，Green 作用素は次の性質をもつ．

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

(1.5) $G_\alpha - G_\beta + (\alpha-\beta) G_\alpha G_\beta = 0 \qquad (\alpha, \beta > 0)$

(1.6) $f \geq 0 \implies G_\alpha f \geq 0$

(1.7) $\|G_\alpha f\| \leq \|f\|/\alpha$

条件(A)をみたすMarkov過程の存在のための十分条件として，Blumenthal [1] は次のことを証明した．証明は近藤 [1]，Meyer [1] にもある．次の定理では，Sがcompactの時は $C'(S) = C(S)$ とし，Sがcompactでない時はcompactな台をもつS上の連続函数の全体の $C(S)$ における閉包を $C'(S)$ とかく．

定理 1.1. $C'(S)$ から $C(S)$ の中への作用素の族 $\{T_t : t \geq 0\}$ が (1,1)～(1,4) をみたし更に

(1.8) $\forall f \in C'(S)$ に対し $\lim_{t \downarrow 0} \|T_t f - f\| = 0$

をみたすならば，条件(A)をみたすSの上のMarkov過程で，推移確率による作用素が T_t と一致するものが(同値を除いて唯一つ)存在する．

Sをcompactとし，S上の右連続なMarkov過程 $\mathbb{M}$ があり，その推移確率 T_t が $C(S)$ を $C(S)$ の中へうつす時(これは，G_α が $C(S)$ を $C(S)$ の中へうつすことと同等)には，(1.8)が自動的にみたされるから，$C(S)$ における半群 T_t のHille－吉田の意味の生成作用素 $\mathfrak{G}$ が存在するが，$\mathfrak{G}$ をMarkov過程 $\mathbb{M}$ の生成作用素ということにする．このような2つのMarkov過程は，同じ生成作用素をもてば互に同値である．逆に生成作用素から半群を与えるHille－吉田の定理を，後で使う形で述べておく．

定理 1.2. $C(S)$ から $C(S)$ の中への作用素の族 $\{G_\alpha : \alpha > 0\}$ が (1.5)～(1.7) をみたし，更に

(1.9) G_α の値域((1.5)により α によらない)が $C(S)$ で稠密

をみたすならば，$C(S)$ から $C(S)$ の中への作用素 $\{T_t : t \geq 0\}$ で (1.1)～(1.4) および

(1.10) $\forall f \in C(S)$ に対し $\lim_{t \downarrow 0} \|T_t f - f\| = 0$

をみたすもので

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

$$G_\alpha f = \int_0^\infty e^{-\alpha t} T_t f\, dt, \qquad f \in C(S)$$

となるものが唯一つ存在する。

$\mathbb{M} = (W, P_x : x \in S)$ を Markov 過程とする。集合 $E \in \mathcal{B}(S^*)$ に対し

$$\sigma_E(w) = \inf\{t > 0 : x_t \in E\}$$

とおき（空集合の下限は $+\infty$ とする），E への到達時間という。

定理 1.3.（Hunt [1]）　$\mathbb{M}$ が条件 (A) をみたすならば，任意の $E \in \mathcal{B}(S^*)$ に対し σ_E は Markov 時間である。

この結果はもっと広いクラスの E に対しても成り立つ。定理 1.3 のくわしい証明は Dynkin [1] にある。

$\alpha \geq 0$ とする。$\mathcal{F}(S)$ 可測な非負（$+\infty$ を許す）の函数 u が，任意の $t > 0$ に対し $e^{-\alpha t} T_t u \leq u$ をみたし，かつ $\lim_{t \downarrow 0} e^{-\alpha t} T_t u(x) = u(x)$, $x \in S$ である時，（$\mathbb{M}$ に関し）α-excessive な函数という。$\mathbb{M}$ が条件 (A) をみたす時，次の２つの命題をあげておく。

<u>命題 1.1.</u>（Hunt [1]）　u を α-excessive，$E \in \mathcal{B}(S)$ とし，$v(x) = E_x(e^{-\alpha\sigma} u(x_\sigma))$ とおくと，v も α-excessive で $v \leq u$ である。

<u>命題 1.2.</u>（Hunt [1]）　任意の α-excessive 函数 u は，有界な α-excessive 函数 u_n から成る非減少列で近似される。

証明は近藤 [1] にもある。

$\mathbb{M}$ が<u>条件 (L)</u> をみたすとは，S 上に局所有限な測度 η が存在し任意の $\alpha \geq 0$ に対し次のような性質をもつこととする。

u が α-excessive かつ η-a.e. に $0 \implies u \equiv 0$

これは Meyer [2] によって導入された条件である。η を $\mathbb{M}$ の標準測度（reference measure）という。η としては有限なものをとれる。（η に絶対連続な有限測度をつくればよい。）条件 (A) をみたす Markov 過程 $\mathbb{M}$ が条件 (L) をみたすための必要十分条件は，S 上に局所有限な測度 η（α, x によらない）が存在して，$G_\alpha(x, dy)$ が η に関して絶対連続となることである。　（これが十

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

分条件であることは，α-excessive 函数 u は $\beta G_{\alpha+\beta}u(x)\to u(x)$, $\beta\to\infty$ をみたすことから分る．必要条件であることは，定理1.6による.)

以下，$\mathbb{M}$ は条件(A)をみたす Markov 過程とする．

$[0,+\infty]\times W$ の上で定義された函数 $A(t,w)$ が次の条件(a.1)〜(a.6)をみたすとき，$\mathbb{M}$ の加法的汎函数という．

(a.1) $-\infty < A(t,w) \leq +\infty$

(a.2) $A(t+,w)=\lim_{s\downarrow t}A(s,w)$ が $\forall t\in[0,+\infty]$ で存在し，
$A(t-,w)=\lim_{s\uparrow t}A(s,w)$ が $\forall t\in(0,+\infty)$ で存在する．

(a.3) $A(t,w)=A(\zeta-,w)$, $\quad t\geq\zeta$

(a.4) $A(t,w)$ は $\mathcal{F}_t$ 可測．

(a.5) $P_x(\forall t\in[0,+\infty]$ に対し $A(t,w)<+\infty)=1$, $\quad x\in S^*$.

(a.6) $A(t+s,w)=A(t,w)+A(s,w_t^+)$, $\quad t,s\geq 0,\ w\in W$.

A を $\mathbb{M}$ の加法的汎函数とする．A が $0\leq A(t,w)\leq+\infty$ をみたす時 非負加法的汎函数という．A が $\forall w$ を固定した時 t について右連続である時，右連続な加法的汎函数といい，連続であるとき連続な，あるいはクラス C に属する加法的汎函数という．A が

$P_x(0\leq t<s\leq\zeta$ ならば $A(t,w)<A(s,w))=1$, $\quad x\in S$

をみたす時，単調増加（真に単調増加の意）の加法的汎函数という．

2つの加法的汎函数 A, B が与えられたとする．

$P_x(\forall t$ に対し $A(t,w)\leq B(t,w))=1$, $\quad x\in S^*$

であるとき。$A\ll B$ とかく．$A\ll B$ かつ $A\gg B$ であるとき。$A\approx B$ とかき，A, B は同値であるという。

$\mathbb{M}$ の非負右連続な加法的汎函数 A と S 上の非負 $\mathcal{F}(S)$ 可測函数 f に対しては，$B(t,w)=\int_{[0,t]}f(x_s)\,dB(s)$ が A に対する(a.5)の例外 path を除いて定義される．A に対する(a.5)の例外 path w では $B(t,w)=+\infty$, $t\geq 0$, と定義することにより，B は(a.1)〜(a.4), (a.6)をみたす．B が更に(a.5)をみたせば（たとえば f が有界なら十分），

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

B に対する (a.5) の例外 path w では $B(t,w)=+\infty, t\geqq 0$, と定義しなおすことにより, B は非負連続な加法的汎函数となる. これを fA とかく. 特に A が連続ならば, fA も連続となる.

Markov 時間 σ に対し右連続加法的汎函数 A は, $A(\sigma)$ が $\mathcal{F}_\sigma$ 可測となる (本尾 [2] p.15).

$\alpha\geqq 0$ とする.

非負右連続加法的汎函数 A に対し $u_\alpha(x)=E_x(\int_0^\infty e^{-\alpha t}dA(t))$ を A の α-potential という. これは, α-excessive な函数となる. 非負加法的汎函数が右連続, かつ, a.s. に $x_t(w)$ と不連続点を共有しないとき, クラス $\mathfrak{U}$ に属するという. クラス $\mathfrak{U}$ に属し, かつ α-potential が S 上で有限になるとき, クラス $\mathfrak{U}^\alpha$ に属するという. すべての $\alpha>0$ に対しクラス $\mathfrak{U}^\alpha$ に属するとき, クラス $\mathfrak{U}^{0+}$ に属するという. 非負加法的汎函数がクラス $\mathcal{C}$ に属しかつその α-potential が S 上で有限であるとき, クラス $\mathcal{C}^\alpha$ に属するという. すべての $\alpha>0$ に対しクラス $\mathcal{C}^\alpha$ に属するとき, クラス $\mathcal{C}^{0+}$ に属するという.

以下, 命題 1.10 の終りまでずっと条件 (A), (L) をみたす Markov 過程 $\mathbb{M}$ が与えられたとし, 加法的汎函数に関する結果など今後用いるものをあげて行く. 命題 1.10 までで省略した証明はすべて本尾 [2] にある.

u を α-excessive な函数とする. 条件 (A), (L) から G_α は $F(S)$ を $B(S)$ にうつし, 従って u は $\mathcal{B}(S)$ 可測になる. 任意の Markov 時間の列 $\{\sigma_n\}$ と任意の $x\in S$ に対し $e^{-\alpha\sigma_n}u(x_{\sigma_n})$ が P_x-一様可積分である時, u はクラス D に属するという. また, Markov 時間の任意の非減少列 $\sigma_n\uparrow\sigma$ に対し $\lim_{n\to\infty}e^{-\alpha\sigma_n}u(x_{\sigma_n})=u(x_\sigma)$ a.s. が成り立つとき, u を正則であるという. α-excessive な函数 u に対し, u が正則かつクラス D に属する必要十分条件は, u が有限で, Markov 時間の任意の非減少列 $\sigma_n\uparrow\sigma$ に対し

$$\lim_{n\to\infty} E_x(e^{-\alpha\sigma_n}u(x_{\sigma_n}))=E_x(e^{-\alpha\sigma}u(x_\sigma)),\qquad x\in S,$$

が成り立つことである. (Meyer [2], 本尾 [2] p.38.)

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

<u>定理 1.4.</u> (Meyer [2]). クラス $\mathfrak{U}^\alpha$ の非負加法的汎函数は、その α-potential により、同値を除いて定まる。すなわち、クラス $\mathfrak{U}^\alpha$ に属する2つの非負加法的汎函数が同じ α-potential をもてば、これらは同値である。

<u>定理 1.5.</u> (Meyer [2], Šur [1]) クラス $\mathfrak{C}^\alpha$ の非負加法的汎函数は クラスDの正則な α-excessive 函数である。逆に、クラスDの正則な α-excessive 函数は、クラス $\mathfrak{C}^\alpha$ に属するある非負加法的汎函数の α-potential である。

次の注意は本尾 [3] p. 321 による。

<u>命題 1.3.</u> クラス $\mathfrak{C}^\alpha$ に属する任意の非負加法的汎函数に対し、それと同値な加法的汎函数 A を

(a.4') $A(t, w)$ は $\mathcal{B}_t$ 可測

をみたすようにとれる。

<u>定義</u> S上の局所有限な測度λが非負右連続加法的汎函数 A の標準測度 (canonical measure) であるとは、任意の $f \in F^+(S)$ に対し

$$fA \approx 0 \iff f = 0, \quad \lambda\text{-a.e.}$$

が成り立つこととする。

明らかに、A の標準測度が存在すれば、有限な標準測度が存在する。

<u>定理 1.6.</u> (本尾 [1], [2]) 任意の非負右連続加法的汎函数に対し、その標準測度が存在する。

<u>命題 1.4</u> A を非負右連続加法的汎函数、λをその標準測度とし、f, g を有限非負 $\mathfrak{F}(S)$ 可測函数で fA, gA が共に加法的汎函数になるものとする。この時、$fA \approx gA$ となる必要十分条件は、$f = g$, λ-a.e. となることである。

次の定理は加法的汎函数に対する Radon-Nikodym 式の定理である。

<u>定理 1.7.</u> (本尾 [1], [2]) A, B をクラス $\mathfrak{C}$ の 非負加法的汎函数、λをAの標準測度とするとき、次の (i), (ii) は同値で

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

ある．

(i) $f\in F^+(S)$, $fA\approx 0 \Longrightarrow fB\approx 0$

(ii) 有限非負$\mathcal{F}(S)$可測函数gが存在して，$B\approx gA$ とかける．

(ii) においてgは，λ測度0を除き唯一つに定まる．時にAが(a.4)をみたす時にはgを$\mathcal{B}(S)$可測にとれる．$A\gg B$ の時には(ii)のgは$0\le g\le 1$, λ-a.e. となる．

定理1.6, 1.7, 命題1.4は本尾[1]ではやや弱い形であり，上の形では本尾[2]にある．

$A\gg B$の條件として次のようなものがある．

<u>命題 1.5.</u> A, Bが共にクラスC^αの非負加法的汎函数で，

$$E_x\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t}f(x_t)\,dA\right)\geq E_x\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t}f(x_t)\,dB\right),\qquad x\in S, \tag{1.11}$$

が任意の$f\in B^+(S)$に対して成り立つとすると，$A\gg B$ である．

<u>証明</u> (1.11)は$f\in F^+(S)$に対してもいえることになるから，A, Bは定理1.7の(i)をみたす．故に$\mathcal{F}(S)$可測な$g\geq 0$が存在して$f\approx gA$ とかける．$\{x: g(x)>1\}$の特性函数をhとすると，

$$E_x\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t}h\,dB\right)=E_x\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t}hg\,dA\right)\geq E_x\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t}h\,dA\right)$$

であるから(1.11)と合せて

$$E_x\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t}h\,dB\right)=E_x\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t}h\,dA\right)$$

故に定理1.4により $hA\approx hB$ である．従って，

$$A-B\approx(1-h)(A-B)\approx(1-h)(1-g)A\gg 0$$

である．

q.e.d.

K, K'を核，A, A'を非負右連続加法的汎函数とする．$(Kf)A$が加法的汎函数になる（すなわち(a.5)をみたす）ようなすべての$f\in B^+(S\times S)$に対し$(K'f)A'$も加法的汎函数になり$(Kf)A\gg(K'f)A'$が成り立つ時，$(K,A)\gg(K',A')$ とかく．$(K,A)\gg(K',A')$ かつ $(K,A)\ll(K',A')$ であるとき，$(K,A)\approx$

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

(K', A') とかく．定理1.7（$A \gg B$の場合）は次の形に拡張される．

命題 1.6.（本尾 [4]） K, K' を核，A, A' を非負連続加法的汎函数とし，$(K, A) \gg (K', A')$ とする．更に，$E_n \uparrow S \times S$ なる $E_n \in \mathcal{B}(S \times S)$ とある $\alpha \geq 0$ が存在して，各 n に対し $E_x(\int_0^\infty e^{-\alpha t} K\chi_{E_n}(x_t)\,dA)$ が x の有界函数であるとする．この時，$0 \leq g \leq 1$ をみたす $g \in B(S \times S)$ が存在して $(K', A') \approx (K_g, A)$ となる．ただし K_g は次のような核：

$$K_g(x, E) = \int_E K(x, dy)\, g(y).$$

証明　η を $\mathcal{M}$ の有限な標準測度とする．$E \in \mathcal{B}(S \times S)$ に対し　$\mu(E) = E_\eta(\int_0^\infty e^{-\alpha t} K\chi_E\, dA)$,　$\nu(E) = E_\eta(\int_0^\infty e^{-\alpha t} K'\chi_E\, dA')$

とおくと，仮定により $\mu(E) \geq \nu(E)$ で，μ, σ は σ-有限な測度である．故に Radon-Nikodym の定理によって $0 \leq g \leq 1$ なる $g \in B(S \times S)$ が存在し $\nu(E) = \int_E g\, d\mu$ とかける．故に $\forall f \in B^+(S \times S)$ に対し

$$(1.12) \qquad E_\eta(\int_0^\infty e^{-\alpha t} K' f\, dA') = \int_{S \times S} f\, d\nu = \int_{S \times S} fg\, d\mu = E_\eta(\int_0^\infty e^{-\alpha t} K_g f\, dA)$$

となる．しばらく n, f を固定し $B = K'(\chi_{E_n} f)A' + K_g(\chi_{E_n} f)A$ とおこう．B は非負連続加法的汎函数となるから定理1.7により $l, m \in B^+(S)$ が存在して $K'(\chi_{E_n} f)A' \approx lB$, $K_g(\chi_{E_n} f)A \approx mB$ とかける．従って，任意に $h \in B^+(S)$ をとり，(1.12) で f の代りに $h(x)\chi_{E_n}(x, y) f(x, y)$ を入れれば

$$E_\eta(\int_0^\infty e^{-\alpha t}\, h\, l\, dB) = E_\eta(\int_0^\infty e^{-\alpha t}\, h\, m\, dB)$$

を得る．従って，集合 $\{x : l(x) \geq m(x)\}$ の特性函数を h_1 とおけば

$$E_x(\int_0^\infty e^{-\alpha t} h_1 l\, dB) = E_x(\int_0^\infty e^{-\alpha t} h_1 m\, dB), \qquad \eta\text{-a.e.}$$

を得る．この両辺は共に α-excessive であるから，この等式はす

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

べての x に対して成り立つ．同様に，集合 $\{x : l(x) < m(x)\}$ の特性函数 h_2 に対し

$$E_x\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t} h_2\, l\, dB\right) = E_x\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t} h_2\, m\, dB\right)$$

となるから，$h_1 + h_2 = 1$ に注意して，定理1.4により $lB \approx mB$ を得る．すなわち，$K'(\chi_{E_n} f)A' \approx K_g(\chi_{E_n} f)A$ である．従って $(K', A') \approx (K_g, A)$ が分る．

<u>定義</u>　L が $\mathbb{M}$ の非負連続加法的汎函数，Q が S から S への核で $Q(x, \{x\}) = 0$ かつ次の性質をもつ時，(Q, L) を $\mathbb{M}$ の Lévy 系という：$\forall f \in B_0^+(S \times S)$，$\forall x \in S$，$\forall t > 0$ に対し

$$(1.13)\quad E_x\left(\sum_{0<s\leq t} f(x_{s-}, x_s)\right) = E_x\left(\int_0^t Qf(x_s)\, dL(s)\right)$$

が成り立つ（もちろん $+\infty = +\infty$ を許して）．

下の命題1.7に注意すれば，$(Q\, L)$ が $\mathbb{M}$ の Lévy 系である条件を次のようにいいかえることができる：$\forall f \in B_0^+(S \times S)$，$\forall x \in S$，$\forall \alpha > 0$ に対し

$$(1.14)\quad E_x\left(\sum_{0<s<+\infty} e^{-\alpha s} f(x_{s-}, x_s)\right) = E_x\left(\int_0^\infty e^{-\alpha s} Qf(x_s)\, dL(s)\right).$$

<u>定理 1.8.</u>（本尾 [2]，渡辺信三 [1]）　Lévy 系は必ず存在する．(Q, L)，(Q', L') が共に $\mathbb{M}$ の Lévy 系なら，$(Q, L) \approx (Q', L')$ である．

<u>命題 1.7.</u>　任意の $\alpha > 0$ に対し $E_n \uparrow S \times S - \{(x, x) : x \in S\}$ なる $E_n \in \mathcal{B}(S \times S)$ を次のようにとれる：各 n に対し $E_x\left(\sum_{0<s<\infty} e^{-\alpha s} \chi_{E_n}(x_{s-}, x_s)\right)$ は x の函数として有界．

<u>証明</u>　$\sigma^i(w)$ を $dis(x_{s-}, x_s)^{(注)} > \frac{1}{i}$ なる $s > 0$ の下限とし，

(注)　S は局所 compact な Hausdorff 空間であるから正則空間である．更に S は第2可算公理をみたすとしたから，「第2可算公理をみたす正則空間は距離づけ可能である」という定理によって，距離空間と見なすことができる．その距離を1つ固定し，x, y の距離を $dis(x, y)$ で表わす．

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

$E_x(e^{-\alpha\sigma^i}) < 1-\frac{1}{j+1}$ なる $x \in S$ の全体を B_{ij} とおく。$\bigcup_{j=1}^{\infty} B_{ij} = S$ である。$E_x(e^{-\alpha\sigma^i}) = \lim_{t\downarrow 0} E_x(e^{-\alpha(t+\sigma^i(w_t^+))})$ であるから，$E_x(e^{-\alpha\sigma^i})$ は $\mathcal{B}(S)$ 可測，従って $B_{ij} \in \mathcal{B}(S)$ である。$dis(x_{s-}, x_s) > \frac{1}{i}$ が $x_s \in B_{ij}$ なる $s>0$ の下限を σ^{ij} とおき，$\sigma_1 = \sigma^{ij}$，$\sigma_n = \sigma_{n-1} + \sigma^{ij}(w^+_{\sigma_{n-1}})$ によってMarkov時間 σ_n $(n=1,2,\cdots)$ を定義する。

$\{\sigma_n < \infty\}$ の上で a.s. に $x_{\sigma_n} \in B_{ij}$ であるから，

$$E_x(e^{-\alpha\sigma_n}) = E_x(e^{-\alpha\sigma_{n-1}} E_{x_{\sigma_{n-1}}}(e^{-\alpha\sigma^{ij}}) : \sigma_{n-1} < \infty)$$

$$\leqq \left(1-\frac{1}{j+1}\right) E_x(e^{-\alpha\sigma_{n-1}}),$$

従って

$$E_x(e^{-\alpha\sigma_n}) \leqq \left(1-\frac{1}{j+1}\right)^{n-1}$$

である。故に，$F_{ij} = \{(x,y) : dis(x,y) > \frac{1}{i},\ y \in B_{ij}\}$ とおくと，

$$E_x\left(\sum_{0<s<\infty} e^{-\alpha s} \chi_{F_{ij}}(x_{s-}, x_s)\right) = E_x\left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha\sigma_n}\right) \leqq \sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{j+1}\right)^{n-1} = j+1$$

である。$E_1 = F^{11}$，$E_2 = F^{12} \cup F^{21}$，$\cdots$，一般に

$$E_n = F^{1,n} \cup F^{2,n-1} \cup \cdots \cup F^{n,1}$$

とおけば，これが求めるものである。 q.e.d.

<u>命題 1.8.</u> 任意のMarkov時間 σ，非負連続加法的汎函数 A，および $f \in B_0^+(S\times S)$ に対して，

$$E_x\left(\sum_{0<s\leqq\sigma} e^{-A(s)} f(x_{s-}, x_s)\right) = E_x\left(\int_0^{\sigma} e^{-A(s)} Qf(x_s)\, dL(s)\right)$$

が成り立つ。

<u>証明</u> α に対し $E_j \uparrow S\times S - \{(x,x) : x \in S\}$ を命題1.7の集合列とする。

$$E_x\left(\sum_{0<s\leqq\sigma} e^{-\alpha s} \chi_{E_j} f(x_{s-}, x_s)\right)$$

$$= E_x\left(\sum_{0<s<\infty} e^{-\alpha s} \chi_{E_j} f(x_{s-}, x_s)\right) - E_x\left(e^{-\alpha\sigma} E_{x_\sigma}\left(\sum_{0<s<\infty} e^{-\alpha s} \chi_{E_j} f(x_{s-}, x_s)\right)\right)$$

$$= E_x\left(\int_0^{\infty} e^{-\alpha s} Q(\chi_{E_j} f)\, dL\right) - E_x\left(e^{-\alpha\sigma} E_{x_\sigma}\left(\int_0^{\infty} e^{-\alpha s} Q(\chi_{E_j} f)\, dL\right)\right)$$

$$= E_x\left(\int_0^{\sigma} e^{-\alpha s} Q(\chi_{E_j} f)\, dL\right)$$

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

$j \to \infty$とし，次に $\alpha \downarrow 0$ とすると

(1.15) $$E_x\left(\sum_{0<s\leq\sigma} f(x_{s-}, x_s)\right) = E_x\left(\int_0^\sigma Qf(x_s)\,dL\right)$$

を得る．

$\rho = \inf\{t : A(t) > \frac{1}{i}\}$ とし，$\rho_0 = 0$, $\rho_n = \rho_{n-1} + \rho(w^+_{\rho_{n-1}})$

とおく．ρ_nは $\lim_{n\to\infty} \rho_n = \infty$, a.s. となるMarkov時間であるから，(1.15)を用いて変形すると

$$E_x\left(\sum_{0<s<\infty} e^{-A(s)} f(x_{s-}, x_s)\right) \leq E_x\left(\sum_{n=0}^\infty e^{-A(\rho_n)} \sum_{\rho_n<s\leq\rho_{n+1}} f(x_{s-}, x_s)\right)$$

$$= E_x\left(\sum_{n=0}^\infty e^{-A(\rho_n)} E_{x_{\rho_n}}\left(\sum_{0<s\leq\rho} f(x_{s-}, x_s)\right)\right) = E_x\left(\sum_{n=0}^\infty e^{-A(\rho_n)} E_{x_{\rho_n}}\left(\int_0^\rho Qf(x_s)\,dL\right)\right)$$

$$= E_x\left(\sum_{n=0}^\infty e^{-A(\rho_n)} \int_{\rho_n}^{\rho_{n+1}} Qf(x_s)\,dL\right) \leq e^{\frac{1}{i}} E_x\left(\int_0^\infty e^{-A(s)} Qf(x_s)\,dL\right)$$

である．同様に

$$E_x\left(\sum_{0<s<\infty} e^{-A(s)} f(x_{s-}, x_s)\right) \geq e^{-\frac{1}{i}} E_x\left(\sum_{n=0}^\infty e^{-A(\rho_n)} \sum_{\rho_n<s\leq\rho_{n+1}} f(x_{s-}, x_s)\right)$$

$$\geq e^{-\frac{1}{i}} E_x\left(\int_0^\infty e^{-A(s)} Qf(x_s)\,dL\right)$$

であるから，$i \to \infty$とすると

(1.16) $$E_x\left(\sum_{0<s<\infty} e^{-A(s)} f(x_{s-}, x_s)\right) = E_x\left(\int_0^\infty e^{-A(s)} Qf(x_s)\,dL(s)\right)$$

を得る．(1.16) で $A(s)$ の代りに $A(s)+\alpha(s\wedge\sigma)$ を入れ，f の代りに$\chi_{E_j} f$ を入れると両辺共に有限だから，次の計算ができる．

$$E_x\left(\sum_{0<s\leq\sigma} e^{-A(s)-\alpha s} \chi_{E_j} f(x_{s-}, x_s)\right)$$

$$= E_x\left(\sum_{0<s<\infty}\right) - E_x e^{-A(\sigma)-\alpha\sigma} E_{x_\sigma}\left(\sum_{0<s<\infty}\right)$$

$$= E_x\left(\int_0^\infty e^{-A(s)-\alpha s} Q(\chi_{E_j} f)\,dL\right) - E_x\left(e^{-A(\sigma)-\alpha\sigma} E_{x_\sigma}\left(\int_0^\infty e^{-A(s)-\alpha s} Q(\chi_{E_j} f)\,dL\right)\right)$$

$$= E_x\left(\int_0^\sigma e^{-A(s)-\alpha s} Q(\chi_{E_j} f)\,dL\right).$$

$j \downarrow \infty$とし，次に $\alpha \downarrow 0$ とすると，命題 1.8 が証明される．q.e.d.

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

Lévy 系は $\mathbb{M}$ の飛躍を表わす量であったが，次に $\mathbb{M}$ の消滅を表わす量を定義する．

<u>定義</u>　Z がクラス $\mathcal{C}^0$ の非負連続加法的汎函数で

(1.17)　$E_x(Z(\infty)) = P_x(0<\zeta<\infty)$,　　$x \in S^*$

をみたすとき，$\mathbb{M}$ の消滅を表わす加法的汎函数という．

明らかに，$\mathbb{M}$ の消滅を表わす加法的汎函数は，もし存在すれば，同値を除いて唯一である．(1.17) は次の (1.18) とも，(1.19) とも同等である．

(1.18)　$E_x(Z(t)) = P_x(0<\zeta\leq t)$,　　$0<t<\infty$, $x\in S^*$

(1.19)　$E_x(\int_0^\infty e^{-\alpha t} dZ) = E_x(e^{-\alpha\zeta})$,　　$\alpha>0$, $x\in S$.

<u>命題 1.9.</u>　状態空間 S が compact ならば，$\mathbb{M}$ の消滅を表わす加法的汎函数 Z が存在する．

<u>証明</u>　$u(x) = P_x(0<\zeta<\infty)$ とおく．u がクラス D の正則な 0-excessive 函数であることをいえばよい．$E_x(u(x_t)) = P_x(t<\zeta<\infty)$ から excessive は明らか．σ_n を単調非減少で σ へ収束する Markov 時間の列としよう．$\lim_{n\to\infty} E_x(u(x_{\sigma_n})) = E_x(u(x_\sigma))$ を示せば証明を終る．$W_1 = \{\forall n$ に対し $\sigma_n<\sigma\}$, $W_2 = \{\exists_n, \sigma_n = \sigma\}$ とおく．

$E_x(u(x_{\sigma_n})) = P_x(\sigma_n<\zeta<\infty) = P_x(\sigma_n<\zeta<\infty, W_1) + P_x(\sigma_n<\zeta<\infty, W_2)$

である．$\{\sigma_n<\zeta<\infty\}$ なる事象列は n について非増加であるが，$\bigcap_{n=1}^\infty \{\sigma_n<\zeta<\infty\} = B$ とおくと $\{\sigma<\zeta<\infty\}\subset B\subset\{\sigma\leq\zeta<\infty\}$ である．(A3) と S の compact 性から $P_x(\sigma=\zeta<\infty, W_1) = P_x(\sigma=\zeta<\infty, \lim_{n\to\infty} x_{\sigma_n} = x_\sigma, W_1) = 0$ ($\lim_{n\to\infty} x_{\sigma_n} \in S$ になるから) である．従って，

$$\lim_{n\to\infty} P_x(\sigma_n<\zeta<\infty, W_1) = P_x(B\cap W_1) = P_x(\sigma<\zeta<\infty, W_1)$$

である．一方

$$\lim_{n\to\infty} P_x(\sigma_n<\zeta<\infty, W_2) = P_x(\sigma<\zeta<\infty, W_2)$$

は明かであるから，

$$\lim_{n\to\infty} E_x(u(x_{\sigma_n})) = P_x(\sigma<\zeta<\infty) = E_x(u(x_\sigma))$$

となる．　　q.e.d.

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

命題 1.10. Z を $\mathbb{M}$ の消滅を表わす加法的汎函数とする．任意の Markov 時間 σ, 非負連続加法的汎函数 A, および $f\in B(S)$ に対し

$$E_x(e^{-A(\zeta)}f(x_{\zeta-}):\zeta\leq\sigma,\ \zeta<\infty)=E_x(\int_0^\sigma e^{-A(s)}f(x_s)dZ(s)),\quad x\in S.$$

が成り立つ．

証明　まず (1.17) と強 Markov 性から

$$(1.20)\quad E_x(Z(\sigma))=P_x(\zeta\leq\sigma,\ \zeta<\infty),\qquad x\in S$$

となる．次に

$$(1.21)\quad E_x(f(x_{\zeta-}):\zeta<\infty)=E_x(\int_0^\infty f(x_s)dZ(s)),\qquad x\in S$$

をいう．$f\in C(S)$ としていえば十分である．$\rho^0_\cdot=\inf\{t:t<\zeta,\ |f(x_t)-f(x_0)|>\frac{1}{i}\}$ とし，$\rho^0_0=0$, $\rho^0_N=\rho^0_{n-1}+\rho^0(w^+_{\rho_{n-1}})$ とおく．ρ^0_n は $\lim_{n\to\infty}\rho^0_n=\infty$ となる Markov 時間である．

$$I^0_1=E_x(\sum_{n=0}^\infty f(x_{\rho^0_n})\int_{\rho^0_n}^{\rho^0_{n+1}}dZ),\quad I^0_2=E_x(\sum_{n=0}^\infty f(x_{\rho^0_n})\chi_{\{\rho^0_n<\zeta\leq\rho^0_{n+1},\ \zeta<\infty\}})$$

とおくと (1.20) により

$$I^0_1=E_x(\sum_{n=0}^\infty f(x_{\rho^0_n})E_{x_{\rho^0_n}}(Z(\rho)))=E_x(\sum_{n=0}^\infty f(x_{\rho^0_n})P_{x_{\rho^0_n}}(\zeta\leq\sigma,\ \zeta<\infty))=I^0_2$$

しかも

$$|I^0_1-E_x(\int_0^\infty f(x_s)dZ)|\leq\frac{1}{i}E_x(Z(\infty))\leq\frac{1}{i}$$

$$|I^0_2-E_x(f(x_{\zeta-}):\zeta<\infty)|\leq\frac{1}{i}$$

であるから，(1.21) がいえた．従って

$$(1.22)\quad E_x(f(x_{\zeta-}):\zeta\leq\sigma,\ \zeta<\infty)=E_x(\int_0^\sigma f(x_s)dZ),\qquad x\in S$$

である．次に

$$(1.23)\quad E_x(e^{-A(\zeta)}f(x_{\zeta-}):\zeta<\infty)=E_x(\int_0^\infty e^{-A(s)}f(x_s)dZ),\qquad x\in S$$

をいうために，命題 1.8 の証明の場合と同じ ρ_n を用い，

$$I_1=E_x(\sum_{n=0}^\infty e^{-A(\rho_n)}\int_{\rho_n}^{\rho_{n+1}}f(x_t)dZ),\quad I_2=E_x(\sum_{n=0}^\infty e^{-A(\rho_n)}f(x_{\zeta-})\chi_{\{\rho_n<\zeta\leq\rho_{n+1},\ \zeta<\infty\}})$$

とおく．(1.22) により

$$I_1=E_x(\sum_{n=0}^\infty e^{-A(\rho_n)}E_{x_{\rho_n}}(\int_0^\rho f(x_s)dZ))=E_x(\sum_{n=0}^\infty e^{-A(\rho_n)}\chi_{\{\rho_n<\zeta\}}E_{x_{\rho_n}}(f(x_{\zeta-}):\zeta\leq\rho,\ \zeta<\infty))$$

$$=I_2$$

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

であり，また

$$|I_1-E_x(\int_0^\infty e^{-A(s)}f(x_s)dz)|\leq(1-e^{-\frac{1}{\varepsilon}})E_x(\int_0^\infty|f(x_t)|dz)$$

$$|I_2-E_x(e^{-A(\zeta)}f(x_{\zeta-}):\zeta<\infty)|\leq(|1-e^{-\frac{1}{\varepsilon}})E_x(|f(x_{\zeta-})|:\zeta<\infty)$$

であるから（1.23）がいえた．（1.23）から

$$E_x(\int_0^\sigma e^{-A}fdz)=E_x(\int_0^\infty e^{-A}fdz)-E_x(e^{-A(\sigma)}E_{x_\sigma}(\int_0^\infty e^{-A}fdz))$$

$$=E_x(e^{-A(\zeta)}f(x_{\zeta-}):\zeta<\infty)-E_x(e^{-A(\sigma)}\chi_{\{\sigma<\zeta\}}E_{x_\sigma}(e^{-A(\zeta)}f(x_{\zeta-}):\zeta<\infty))$$

$$=E_x(e^{-A(\zeta)}f(x_{\zeta-}):\zeta<\infty,\ \zeta\leq\sigma).$$

q.e.d.

<u>定理 1.9.</u>（本尾 [3]） $\mathbb{M}=(W,P_x:x\in S)$ を条件（A）をみたす Markov 過程，A を（a.4′）をみたす $\mathbb{M}$ の非負連続加法的汎函数で，S のある閉部分集合（従って才2可算公理をみたす局所 compact 空间）F に対し次の2条件をみたすとする．

(1.24) $A(\sigma_F)=0$, a.s.

(1.25) $P_x(\forall t>0$ に対し $A(t)>0)=1$, $x\in F$.

A に対し

(1.26) $\tau(s,w)=\sup\{t\geq0:A(t,w)\leq s\}$

とおき，$w\in W$ に対し

$$\tilde{w}(t)=\begin{cases}x_{\tau(t,w)}(w), & t<A(\infty,w)\\ \Delta_F, & t\geq A(\infty,w)\end{cases}$$

とおくと $\tilde{w}\in W_F$ となる． $\pi:W\to W_F$ を $\pi(w)=\tilde{w}$ によって定義すると π は $(W,\mathcal{B}(W))$ から $(W_F,\mathcal{B}(W_F))$ への可測写像となる．$B\in\mathcal{B}(W_F)$, $x\in F$ に対し $\hat{P}_x(B)=P_x(\pi^{-1}B)$ とおく．この時，$\hat{\mathbb{M}}=(W_F,\hat{P}_x:x\in F)$ は F の上の Markov 過程となり，しかも，F の上の右連続な Markov 過程に同値である．A が更に

(1.27) $(w:\sup\{t:x_t\in F\}=\infty)$ の上で a.s. に $A(\infty)=\infty$

をみたすならば，$\hat{\mathbb{M}}$ は条件 (A) をみたす F 上の Markov 過程に同値である．A が（1.27）をみたし $\mathbb{M}$ が条件（L）をもみたすならば，$\hat{\mathbb{M}}$

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

は条件 (A), (L) をみたす F 上の Markov 過程に同値である。

本尾 [3] は特別の加法的汎函数を扱っているが、その証明を追えば、上のようなことがいえるのである。$\mathbb{M}$ から $\widetilde{\mathbb{M}}$ あるいは $\widetilde{\mathbb{M}}$ に同値な Markov 過程を得る上のような操作を、$\mathbb{M}$ に対し A によって時間変更を施すという。

念のため、(1.24) から次の (1.28) がいえ、(1.24), (1.25) から (1.29) がいえることを注意しておこう。

(1.28) P_x($t_1 < \forall t < t_2$ に対し $x_t \notin F$ ならば、$A(t_1)=A(t_2)$) $=1$, $x \in S$.

(1.29) P_x($t_1 < \exists t < t_2$ に対し $x_t \in F$ ならば、$A(t_1) < A(t_2)$) $=1$, $x \in S$.

(1.28) の証明。 r を固定すると (1.24) により

$A(\sigma_F(w_r^+), w_r^+)=0$ a.s. であるから、

$W' = \bigcap_{r \in \mathbb{Q}^+} \{w : A(\sigma_F(w_r^+), w_r^+)=0\}$ とおくと[(注)], $P_x(W')=1$, $x \in S$ である。$w \in W'$ なら、w に対し (1.28) の括弧内のことが成り立つ。

次に (1.29) の証明は、$\rho = \inf\{t : A(t)>0\}$ とおくと (1.24) により $\rho \geq \sigma_F$ a.s. である。

(1.25) を使うと

$$P_x(\rho=\sigma_F, \sigma_F<\infty) = P_x(\rho(w_{\sigma_F}^+)=0, \sigma_F<\infty) = E_x(E_{x_{\sigma_F}}(\rho=0) : \sigma_F<\infty)$$
$$= P_x(\sigma_F<\infty)$$

であるから、$\rho = \sigma_F$ a.s. である。$W'' = \bigcap_{r \in \mathbb{Q}^+} \{w : \rho(w_r^+) = \sigma_F(w_r^+)\}$

とおくと、$P_x(W')=1$, $x \in S$ で、しかも、$w \in W''$ ならば w に対し (1.29) の括弧内のことが成り立つ。

次のことは定理 1.9 の系であるが、早く Volkonskii [1] によって得られた。

<u>系</u> $\mathbb{M}$ を条件 (A) をみたす S 上の Markov 過程, A をその非負連続加法的汎函数で (a.4') をみたし、

(1.30) $P_x(\forall t>0$ に対し $A(t)>0) = 1$, $x \in S$

をみたすとする。$\widetilde{P}_x$ を定理 1.9 で $F=S$ として同様に定義すると $\widetilde{\mathbb{M}} = (W_S, \widetilde{P}_x : x \in S)$ は S の上の Markov 過程になり、しかも右

(注) $\mathbb{Q}^+$ は 非負有理数の全体.

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

連続なMarkov過程に同値である．

$\mathbb{M}$を条件(A)をみたすMarkov過程とする．$[0,+\infty]\times W$の函数$M(t,w)$が次の$(m.1)\sim(m.5)$をみたすとき，$\mathbb{M}$の右連続な乗法的汎函数という．

$(m.1)$　　$0\leq M(t,w)<+\infty$

$(m.2)$　　$M(t,w)$はtについて$[0,+\infty)$で右連続，$(0,+\infty)$で左から極限をもつ．

$(m.3)$　　$M(t,w)=M(\zeta-,w)$,　　$t\geq\zeta$

$(m.4)$　　$M(t,w)$は$\mathfrak{F}_t$可測

$(m.5)$　　$M(t+s,w)=M(t,w)M(s,w_t^+)$,　　$t,s\geq 0$, $w\in W$.

これを少し弱め，$M(t,w)$が$(m.1)\sim(m.4)$と次の$(m.5')$をみたすとき，右連続なほとんど乗法的汎函数という．

$(m.5')$　　$P_x(M(t+s,w)=M(t,w)M(s,w_t^+))=1$,　　$t,s\geq 0$,　$x\in S^*$.

右連続な乗法的(またはほとんど乗法的)汎函数$M(t,w)$が，

$$M(t,w)\leq 1,\qquad t\geq 0,\quad w\in W$$

をみたすとき，「1を越えない」という形容詞をつける．2つの右連続乗法的(またはほとんど乗法的)汎函数$M(t,w)$, $N(t,w)$が

$$P_x(\forall t\text{ に対し } M(t,w)=N(t,w))=1,\qquad x\in S^*$$

をみたすとき，同値であるという．

T_tを$\mathbb{M}$の推移確率とする．1を越えない右連続なほとんど乗法的汎函数$M(t,w)$に対し$S_tf(x)=E_x(M(t)f(x_t))$とおくと，S_tは$F(S)$を$F(S)$内へうつす作用素で，

(1.31)　　$S_tS_s=S_{t+s}$　　$t,s\geq 0$　　($S_0=I$とは限らない).

(1.32)　　$f\geq 0\implies S_tf\geq 0$

(1.33)　　$\forall x$に対し，$\lim_{t\downarrow 0}S_t1(x)=S_0 1(x)$

(1.34)　　$f\geq 0\implies S_tf\leq T_tf$

をみたす。逆に次の定理1.10が成り立つ．(この定理は説明に引用するだけで，直接には使わない．)

<u>定理1.10.</u> (Dynkin [1] − Meyer [2]). $\mathbb{M}$は条件(A)をみたすとする．$\{S_t : t\geq 0\}$が$F(S)$を$F(S)$内にうつす作用素の族で

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

(1.31)〜(1.34) をみたせば，$\mathbb{M}$ の 1 を越えない右連続ほとんど乗法的汎函数 $M(t)$ が存在して，$S_t f(x) = E_x(M(t) f(x_t))$ とかける．しかも，このような $M(t)$ は同値を除いてただ1つ定まる．

右連続な乗法的汎函数によって次のようなMarkov過程の変換ができる．

<u>定理 1.11</u>（主として Dynkin [1]）$\mathbb{M} = (W, P_x : x \in S)$ を条件(A) をみたすMarkov過程，$M(t)$ を1を越えない右連続乗法的汎函数で

(1.35) $\lim_{t \downarrow 0} E_x(M(t)) = 1$ $x \in S$ について一様．

をみたすとする　P を $[0, +\infty]$ の上の確率測度で $P(dt) = e^{-t}dt$ とし，$\Omega = W \times [0, +\infty]$，$P_x^{\Omega} = P_x \times P$ とする．$\omega = (w, s) \in \Omega$ に対し

$$x'_t(\omega) = \begin{cases} x_t(w), & M(t, w) > e^{-s} \text{ の時} \\ \Delta_S, & M(t, w) \leq e^{-s} \text{ の時} \end{cases}$$

とおき，$\pi : \Omega \to W_S$ を $x_t(\pi(\omega)) = x'_t(\omega)$ で定義する．π は $(\Omega, \mathcal{B}(W) \times \mathcal{B}([0, +\infty]))$ から $(W_S, \mathcal{B}(W_S))$ への可測写像となるので，$x \in S$，$B \in \mathcal{B}(W_S)$ に対し $P'_x(B) = P_x^{\Omega}(\pi^{-1}(B))$ とおく．この時，$\widetilde{\mathbb{M}} = (W_S, P'_x : x \in S)$ は S の上のMarkov過程で，条件(A) をみたす S の上のMarkov過程に同値である．$\mathbb{M}$ が条件(L) をもみたす時には，$\widetilde{\mathbb{M}}$ は条件(A), (L) をみたす S 上のMarkov過程に同値である．

証明は省略するが，条件(L) については，$\mathbb{M}$ のGreen核 $G_\alpha(x, dy)$ が測度 η に関し絶対連続ならば，$\widetilde{\mathbb{M}}$ のGreen核 $\widetilde{G}_\alpha(x, dy)$ も $\widetilde{G}_\alpha \leq G_\alpha$ により η に関し絶対連続になることから，直ちに分る．

以上が，§2〜§6で用いる諸定理であるが，§7では，Hunt [1] の導入した強い方の条件で話を進め，上にあげた以外のいくつかの結果を用いる．その際，次の条件を用いる．

条件(A) をみたすMarkov過程 $\mathbb{M} = (W, P_x : x \in S)$ が<u>条件(F) をみたす</u>とは，$\mathbb{M}$ に対し S 上の局所有限な測度 μ と条件(A) をみた

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

すもう一つの Markov 過程 $\hat{M}=(\hat{W}, \hat{P}_x : x\in S)$ が存在して，次の(F1)，(F2) をみたすこととする．($\hat{M}$ に関連する核は順序を逆にしてたとえば Green 核 $\hat{G}_\alpha(dy, x)$ のように書き，また f の $\hat{G}_\alpha(dy, x)$ による積分は $f\hat{G}_\alpha(x)$ のように記す.)

(F.1) 任意の $f, g\in B^+(S)$ に対して

$$\int_S f(x)G_\alpha g(x)\mu(dx)=\int_S f\hat{G}_\alpha(x)g(x)\mu(dx)$$

が成り立つ．

(F.2) $\forall\alpha>0$, $\forall x\in S$ に対し，$G_\alpha(x, dy)$, $\hat{G}_\alpha(dy, x)$ は共に μ に関し絶対連続．

$\hat{M}$ を，μ の上で M に対して共役な Markov 過程という．(F.1) から $\forall f\in B^+(S)$ に対し $\alpha\int_S G_\alpha f(x)\mu(dx)\leq\int_S f(x)\mu(dx)$ であるから，μ は M に関しいわゆる excessive な測度になる．同様に μ は $\hat{M}$ に関し excessive な測度となる．なお，条件 (A)，(F) をみたせば，(F.2) により条件 (L) もみたされる．

<u>命題 1.11.</u> (国田 [1]) M を条件 (A)，(F) をみたす S の上の Markov 過程とすると，$\forall\alpha>0$ に対し次のような非負 $B(S)\times B(S)$ 可測函数 $g_\alpha(x, y)$ が存在する．

(1.36) y を固定すると x の函数として M に関し α-excessive，x を固定すると y の函数として $\hat{M}$ に関し α-excessive

(1.37) $G_\alpha(x, dy)=g_\alpha(x, y)\mu(dy)$, $\hat{G}_\alpha(dy, x)=\mu(dy)g_\alpha(y, x)$.

§2. 準備 II. (加法的汎函数に関するある等式)

いくつかの連続あるいは右連続の非負加法的汎函数に関する期待値の間の関係式を証明する．§1 と同じく S は第2可算公理をみたす局所 compact な Hausdorff 空間とする．条件 (A)，(L) をみたす Markov 過程 M が与えられたとする．(Q, L) を M の Lévy 系とし，$g\in B^+(S\times S)$ に対して

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

$$Q_g(x, E) = \int_E Q(x, dy)\, g(x, y)$$

とおく．

定理 2.1. A, B, C を非負連続の加法的汎函数，M を右連続加法的汎函数とする．非負 $\mathcal{B}(S)$ 可測な函数 f に対し

$$K_1 f(x) = E_x\left(\int_0^\infty e^{-B(t)} M(t) f(x_t)\, dA(t)\right)$$

$$K_2 f(x) = E_x\left(\int_0^\infty e^{-C(t)} M(t) f(x_t)\, dA(t)\right)$$

とおくと，

$$K_1 f(x) + E_x\left(\int_0^\infty e^{-B(t)} M(t)\, K_2 f(x_t)\, dB(t)\right)$$

(2.1)

$$= K_2 f(x) + E_x\left(\int_0^\infty e^{-B(t)} M(t)\, K_2 f(x_t)\, dC(t)\right)$$

が成り立つ．従って各項が有限の時には

(2.2) $\quad K_1 f(x) - K_2 f(x) + E_x\left(\int_0^\infty e^{-B(t)} M(t)\, K_2 f(x_t)(dB(t) - dC(t))\right) = 0.$

定理 2.2. A, B を非負連続の加法的汎函数，m，n を 1 を越えない $B_0^+(S \times S)$ の函数とし，

$$M(t) = \prod_{0<s\leq t} (1 - m(x_{s-}, x_s)), \quad N(t) = \prod_{0<s\leq t} (1 - n(x_{s-}, x_s))$$

とおく． $u(x) = E_x\left(\int_0^\infty e^{-B(t)}\, dA(t)\right)$ とおく時 S で有限になるとし，更に次の (2.3) または (2.4) が成り立つとする．

(2.3) $\quad P_x(\forall t < \infty$ に対し $M(t), N(t) > 0) = 1, \qquad x \in S.$

(2.4) $\quad E_x\left(\int_0^\infty e^{-B(t)} Q_m u(x_t)\, dL\right), E_x\left(\int_0^\infty e^{-B(t)} Q_n u(x_t)\, dL\right)$ が $\forall x \in S$ で有限．

この時，$f \in B^+(S)$ に対し

$$K_1 f(x) = E_x\left(\int_0^\infty e^{-B(t)} M(t) f(x_t)\, dA(t)\right)$$

$$K_2 f(x) = E_x\left(\int_0^\infty e^{-B(t)} N(t) f(x_t)\, dA(t)\right)$$

とおくと $K_1 f(x)$, $K_2 f(x)$, $E_x\left(\int_0^\infty e^{-B(t)} M(t) Q_m K_2 f(x_t)\, dL\right)$,

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

$E_x\left(\int_0^\infty e^{-B(t)} M(t) Q_n K_2 f(x_t) dL\right)$ はすべて $\forall x \in S$ で有限で，

(2.5) $\quad K_1 f(x) - K_2 f(x) + E_x\left(\int_0^\infty e^{-B(t)} M(t)(Q_m - Q_n) K_2 f(x_t) dL\right) = 0$

が成り立つ．

上の２定理を合せると次の等式を得る．

定理 2.3 $\quad A, B, C$ を非負連続な加法的汎函数，m, n を1を越えない $B_0^+(S \times S)$ の函数とし，

$$M(t) = \prod_{0<s\le t} (1 - m(x_{s-}, x_s)), \quad N(t) = \prod_{0<s\le t} (1 - n(x_{s-}, x_s))$$

とおく．$E_x\left(\int_0^\infty (e^{-B(t)} + e^{-C(t)}) dA\right)$ および $E_x\left(\int_0^\infty e^{-B(t)} (Q_m + Q_n) 1(x_t)\, dL\right)$ が S 上で有界とする．この時，$f \in B^+(S)$ に対し

$$K_1 f(x) = E_x\left(\int_0^\infty e^{-B(t)} M(t) f(x_t) dA(t)\right)$$

$$K_2 f(x) = E_x\left(\int_0^\infty e^{-C(t)} N(t) f(x_t) dA(t)\right)$$

とおくと，

(2.6) $\quad K_1 f(x) - K_2 f(x) + E_x\left(\int_0^\infty e^{-B(t)} M(t) \{K_2 f(x_t)(dB - dC) + (Q_m - Q_n) K_2 f(x_t) dL\}\right)$
$\qquad = 0$

が成り立つ．

補題 2.1. $\quad 0 \le t_0 \le +\infty$，$0 \le p_0 \le +\infty$ とし，$p(t)$ を $[0, t_0]$ から $[0, p_0]$ の上への単調非減少な右連続函数とする．$C(S) = \sup\{t : p(t) \le S\}$，$C_0 = \sup\{t : p(t) < \infty\}$ とおくと，任意の非負可測函数 $f(t)$ に対して

$$\int_{[0, C_0)} f(t)\, dp(t) = \int_{[0, p_0)} f(C(S))\, dS$$

が成り立つ．

これは Meyer [2] p.198 （長沢・佐藤 [1] p.198，佐藤・長沢・福島 [1] p.14）にある．証明は f が区間の特性函数の時いえば十分であることを注意し，その場合には，定義から分る．

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

<u>定理 2.1 の証明</u> $\tau(s,w)=\sup\{t : B(t,w)\leq s\}$ とおき上の補題を使う．$\tau(s)$ は Markov 時間，$M(\tau(s))$ は $\mathcal{F}_{\tau(s)}$ 可測だから，

$$E_x\left(\int_0^\infty e^{-B(t)}M(t)K_2f(x_t)\,dB(t)\right)$$

$$=E_x\left(\int_0^\infty \chi_{\{\tau(s)<\infty\}}e^{-s}M(\tau(s))K_2f(x_{\tau(s)})\,ds\right)$$

$$=E_x\left(\int_0^\infty \chi_{\{\tau(s)<\infty\}}e^{-s}M(\tau(s))ds\int_0^\infty e^{-C(t,w^+_{\tau(s)})}M(t,w^+_{\tau(s)})f(x_t(w^+_{\tau(s)}))\cdot dA(t,w^+_{\tau(s)})\right)$$

$$=E_x\left(\int_0^\infty \chi_{\{\tau(s)<\infty\}}e^{-s+C(\tau(s))}ds\int_{\tau(s)}^\infty e^{-C(t)}M(t)f(x_t)\,dA(t)\right)$$

$$=E_x\left(\int_0^\infty e^{-B(s)+C(s)}dB(s)\int_s^\infty e^{-C(t)}M(t)f(x_t)\,dA(t)\right)$$

$$=E_x\left(\int_0^\infty e^{-C(t)}M(t)f(x_t)\,dA(t)\int_0^t e^{-B(s)+C(s)}\,dB(s)\right)$$

同様に

$$E_x\left(\int_0^\infty e^{-B(t)}M(t)K_2f(x_t)\,dC(t)\right)$$

$$=E_x\left(\int_0^\infty e^{-B(s)+C(s)}dC(s)\int_s^\infty e^{-C(t)}M(t)f(x_t)\,dA(t)\right)$$

$$=E_x\left(\int_0^\infty e^{-C(t)}M(t)f(x_t)\,dA(t)\int_0^t e^{-B(s)+C(s)}\,dC(s)\right)$$

である．故に

$$e^{-B(t)}+e^{-C(t)}\int_0^t e^{-B(s)+C(s)}dB(s)=e^{-C(t)}+e^{-C(t)}\int_0^t e^{-B(s)+C(s)}dC(s)$$

をいえば (2.1) がいえる．この式は，各項有限であるから，両辺の差を計算すれば 0 になることから，すぐわかる． q.e.d.

<u>定理 2.2 の証明</u> $u_M(x)=E_x\left(\int_0^\infty e^{-B(t)}M(t)\,dA\right)$，$u_N(x)=E_x\left(\int_0^\infty e^{-B(t)}N(t)\,dA\right)$ とおく．

1° 証明の前半では

(2.7) $$E_x\left(\int_0^\infty e^{-B(t)}M(t)Q_m u(x_t)\,dL(t)\right)\leq u(x)$$

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

$$(2.8)\qquad E_x\left(\int_0^\infty e^{-B(t)}Q_m u_M(x_t)\,dL(t)\right)\leq u(x)$$

を示す．MをN，mをnにかえても同様である．

まず，$\varepsilon>0$が存在して $dis(x,y)\leq\varepsilon$ では $m(x,y)=0$ とする．$\sigma=\inf\{t:dis(x_t,x_0)>\varepsilon\}$，$\sigma_0=0$，$\sigma_k=\sigma_{k-1}+\sigma(w^+_{\sigma_{k-1}})$ とおく．

$$E_x\left(\int_0^\infty e^{-B(t)}(1-M(t))\,dA(t)\right)$$

$$=E_x\left(\sum_{k=1}^\infty(1-M(\sigma_k))\int_{\sigma_k}^{\sigma_{k+1}}e^{-B(t)}dA(t)\right)\qquad(=*\ \text{とおく})$$

であるが，

$$1-M(\sigma_k)=\sum_{l=1}^{k}M(\sigma_{l-1})(1-M(\sigma,w^+_{\sigma_{l-1}}))=\sum_{l=1}^{k}M(\sigma_{l-1})\,m(x_{\sigma_l-},x_{\sigma_l})$$

$(M(0)=N(0)=1$ とおく$)$，しかも $\sum_{k=1}^\infty\sum_{l=1}^{k}=\sum_{l=1}^\infty\sum_{k=l}^\infty$ であるから

$$*=E_x\left(\sum_{l=1}^\infty M(\sigma_{l-1})\,m(x_{\sigma_l-},x_{\sigma_l})\int_{\sigma_l}^\infty e^{-B(t)}dA(t)\right)$$

$$=E_x\left(\sum_{l=1}^\infty M(\sigma_{l-1})\,m(x_{\sigma_l-},x_{\sigma_l})\,e^{-B(\sigma_l)}u(x_{\sigma_l})\right)$$

$$=E_x\left(\sum_{l=1}^\infty M(\sigma_{l-1})\,e^{-B(\sigma_{l-1})}E_{x_{\sigma_{l-1}}}\left(e^{-B(\sigma)}m(x_{\sigma-},x_\sigma)\,u(x_\sigma)\right)\right)$$

命題1.8により

$$=E_x\left(\sum_{l=1}^\infty M(\sigma_{l-1})\,e^{-B(\sigma_{l-1})}E_{x_{\sigma_{l-1}}}\left(\int_0^\sigma e^{-B(t)}Q_m u\,dL\right)\right)$$

$$=E_x\left(\sum_{l=1}^\infty M(\sigma_{l-1})\int_{\sigma_{l-1}}^{\sigma_l}e^{-B}Q_m u\,dL\right)$$

$$=E_x\left(\int_0^\infty e^{-B(t)}M(t)\,Q_m u(x_t)\,dL\right).$$

故に(2.7)を得る．

$$1-M(\sigma_k)=\sum_{l=1}^{k}\left(M(\sigma_{k-l},w^+_{\sigma_l})-M(\sigma_{k-l+1},w^+_{\sigma_{l-1}})\right)=\sum_{l=1}^{k}M(\sigma_{k-l},w^+_{\sigma_l})(1-M(\sigma,w^+_{\sigma_{l-1}}))$$

を使うと，

$$E_x\left(\int_0^\infty e^{-B(t)}(1-M(t))\,dA(t)\right)$$

$$=E_x\left(\sum_{l=1}^\infty(1-M(\sigma,w^+_{\sigma_{l-1}}))\sum_{k=l}^\infty M(\sigma_{k-l},w^+_{\sigma_l})\int_{\sigma_k}^{\sigma_{k+1}}e^{-B}dA\right)$$

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

$$= E_x\left(\sum_{\ell=1}^{\infty}(1-M(\sigma, w^+_{\sigma_{\ell-1}}))e^{-B(\sigma_\ell)}E_{x_{\sigma_\ell}}\left(\int_0^{\infty}e^{-B(t)}M(t)\,dA(t)\right)\right)$$

$$= E_x\left(\sum_{\ell=1}^{\infty} m(x_{\sigma_\ell -}, x_{\sigma_\ell})e^{-B(\sigma_\ell)}u_M(x_{\sigma_\ell})\right)$$

$$= E_x\left(\int_0^{\infty}e^{-B(t)}\ Q_m u_M(x_t)\,dL\right)$$

故に (2.8) を得る．一般の場合

$$m_\varepsilon(x, y) = \begin{cases} m(x, y) & dis(x, y) > \varepsilon \text{ の時} \\ 0 & dis(x, y) \leq \varepsilon \text{ の時} \end{cases}$$

$$M_\varepsilon(t) = \prod_{0<s\leq t}(1-m_\varepsilon(x_{s-}, x_s))$$

とおくと，今証明したことによって

$$E_x\left(\int_0^{\infty}e^{-B(t)}M(t)Q_{m_\varepsilon}u\,dL\right) \leq E_x\left(\int_0^{\infty}e^{-B(t)}M_\varepsilon(t)Q_{m_\varepsilon}u\,dL\right) \leq u(x),$$

$$E_x\left(\int_0^{\infty}e^{-B(t)}Q_{m_\varepsilon}u_M\,dL\right) \leq E_x\left(\int_0^{\infty}e^{-B(t)}Q_{m_\varepsilon}u_{M_\varepsilon}\,dL\right) \leq u(x)$$

である． $\varepsilon\downarrow 0$ とすると $m_\varepsilon \uparrow m$ であるから (2.7)，(2.8) を得る．

2° 定理の証明にうつる．$K_1 f$，$K_2 f$ が有限なことは u が有限であることから明かであるが，M，N に対する (2.7)，(2.8) により

$$E_x\left(\int_0^{\infty}e^{-B(t)}M(t)Q_m K_2 f(x_t)\,dL\right),\ E_x\left(\int_0^{\infty}e^{-B(t)}M(t)Q_n K_2 f(x_t)\,dL\right) \text{ も有}$$

限となる．さて，(2.5) をいうには，f が連続の場合にいえばよい．まず，$dis(x, y) \leq \varepsilon$ では $m(x, y) = n(x, y) = 0$ である場合を考える．σ_k を 1° と同じもとにとる．

$$K_1 f(x) - K_2 f(x) = E_x\left(\int_0^{\infty}e^{-B(t)}(M(t)-N(t))f(x_t)\,dA(t)\right)$$

$$= E_x\left(\sum_{k=1}^{\infty}(M(\sigma_k)-N(\sigma_k))\int_{\sigma_k}^{\sigma_{k+1}}e^{-B(t)}f(x_t)\,dA(t)\right) \quad (= * \text{ とおく})$$

であるが

$$M(\sigma_k) - N(\sigma_k) = \sum_{\ell=1}^{k}(M(\sigma_\ell)N(\sigma_{k-\ell}, w^+_{\sigma_\ell}) - M(\sigma_{\ell-1})N(\sigma_{k-\ell+1}, w^+_{\sigma_{\ell-1}}))$$

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

$$= \sum_{\ell=1}^{k} M(\sigma_{\ell-1})(M(\sigma, w^+_{\sigma_{\ell-1}}) - N(\sigma, w^+_{\sigma_{\ell-1}}))\, N(\sigma_{k-\ell}, w^+_{\sigma_\ell})$$

と $\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{k} = \sum_{\ell=1}^{\infty}\sum_{k=\ell}^{\infty}$ により

$$* = E_x\Big(\sum_{\ell=1}^{\infty} M(\sigma_{\ell-1})(M(\sigma, w^+_{\sigma_{\ell-1}}) - N(\sigma, w^+_{\sigma_{\ell-1}}))e^{-B(\sigma_\ell)} E_{x_{\sigma_\ell}}\Big(\int_0^\infty e^{-B(t)} N(t) f\, dA\Big)\Big)$$

$$= E_x\Big[\sum_{\ell=1}^{\infty} M(\sigma_{\ell-1}) e^{-B(\sigma_{\ell-1})} E_{x_{\sigma_{\ell-1}}}\big((M(\sigma) - N(\sigma))e^{-B(\sigma)} K_2 f(x_\sigma)\big)\Big]$$

$M(\sigma) - N(\sigma) = n(x_{\sigma-}, x_\sigma) - m(x_{\sigma-}, x_\sigma)$ であるから命題 1.8 により

$$= E_x\Big[\sum_{\ell=1}^{\infty} M(\sigma_{\ell-1}) e^{-B(\sigma_{\ell-1})} E_{x_{\sigma_{\ell-1}}}\Big(\int_0^\sigma e^{-B(t)}(Q_n - Q_m) K_2 f(x_t)\, dL\Big)\Big]$$

$$= E_x\Big(\sum_{\ell=1}^{\infty} M(\sigma_{\ell-1}) \int_{\sigma_{\ell-1}}^{\sigma_\ell} e^{-B(t)}(Q_n - Q_m) K_2 f(x_t)\, dL\Big)$$

$$= E_x\Big(\int_0^\infty e^{-B(t)} M(t)(Q_n - Q_m) K_2 f(x_t)\, dL\Big)$$

故にこの場合に (2.5) がいえた．上の変形では和の順序交換を自由に用いたが，これが許されることは

$$|M(\sigma) - N(\sigma)| \le m(x_{\sigma-}, x_\sigma) + n(x_{\sigma-}, x_\sigma)$$

に注意すれば容易に確かめられる．

次に，「$dis(x, y) \le \varepsilon$ で $m(x, y) = n(x, y) = 0$」という仮定のない場合を考える．(2.4) が成り立つとしよう．$\varepsilon > 0$ に対し $m_\varepsilon(x, y)$, $M_\varepsilon(t)$ を 1° のように定義し，$n_\varepsilon(x, y)$, $N_\varepsilon(t)$ も同様に定義すると，$\varepsilon \downarrow 0$ の時 $m_\varepsilon \uparrow m$, $n_\varepsilon \uparrow n$, $M_\varepsilon \downarrow M$, $N_\varepsilon \downarrow N$ であるから，M_ε, N_ε に対する (2.5) から M, N に対する (2.5) がいえる．この際

$$M_\varepsilon(t)\int Q_{m_\varepsilon}(x_t, dy) E_y\Big(\int_0^\infty e^{-B(t)} N_\varepsilon(t) f(x_t)\, dA(t)\Big) \le \|f\|\, Q_m U(x_t)$$

等の評価と (2.4) により Lebesgue の有界収束定理が使えるのである．

残った場合として，(2.3) が成り立つとする．(2.3) と 10 から a.s. に

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

$$\int_0^t (Q_m + Q_n) u(x_s)\, dL(s) < \infty, \qquad \forall t < \infty$$

となる．故に，これを $C(t)$ とおくと非負連続加法的汎函数である．
$\varepsilon > 0$ に対し $B_\varepsilon(t) = B(t) + \varepsilon C(t)$ とおくと

$$u_\varepsilon(x) = E_x\left(\int_0^\infty e^{-B_\varepsilon(t)}\, dA(t)\right) \leq u(x) < \infty,$$

$$E_x\left(\int_0^\infty e^{-B_\varepsilon(t)} (Q_m - Q_n) u_\varepsilon\, dL\right) \leq E_x\left(\int_0^\infty e^{-B_\varepsilon(t)} (Q_m + Q_n) u\, dL\right)$$

$$\leq E_x\left(\int_0^\infty e^{-\varepsilon C(t)}\, dC(t)\right) \leq \frac{1}{\varepsilon}$$

であるから，(2.5) で B を B_ε にかえた等式が成り立つ．$\varepsilon \downarrow 0$ とすると証明すべき (2.5) が得られる．　q.e.d.

<u>定理 2.3 の証明</u>　一般に，A_0, B_0 が非負連続加法的汎函数，m_0 が 1 を越えない $B_0^+(S \times S)$ の函数，$M_0(t) = \prod_{0 < s \leq t} (1 - m_0(x_{s-}, x_s))$ で，

$E_x\left(\int_0^\infty e^{-B_0(t)} M_0(t) \chi_E(x_t)\, dA_0(t)\right)$ が核になる時，これを $K(M_0, B_0, A_0)$ で表わすこととする．

はじめに，$E_x\left(\int_0^\infty e^{-B}\, dC\right)$ が有界と仮定して (2.6) を証明する．
$\sigma = \inf\{t : N(t) = 0\}$ とおき

$$N'(t) = \begin{cases} N(t) & 0 \leq t < \sigma \\ 0 & t \geq \sigma \end{cases}$$

とおくと，$N'(t) = \lim_{s \downarrow t} N(s)$ であるから，$N'(t)$ は 1 を越えない右連続加法的汎函数となり，しかも

$$K(N, B, A) = E_x\left(\int_0^\infty e^{-B(t)} N'(t) \chi_E(x_t)\, dA(t)\right)$$

等が成り立つ．故に，定理 2.1 が適用できて

(2.9)　$K(N, B, A) - K(N, C, A) + K(N, B, B - C) K(N, C, A) = 0$

となる．定理 2.2 から得られる

$$K(M, B, A) - K(N, B, A) + K(M, B, L)(Q_m - Q_n) K(N, B, A) = 0$$

を (2.9) と合せると

(2.10)　$K(M, B, A) - K(N, B, A) = -K(M, B, L)(Q_m - Q_n) K(N, B, A)$

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

$$= -K(M,B,L)(Q_m-Q_n)K(N,C,A)$$
$$+K(M,B,L)(Q_m-Q_n)K(N,B,B-C)K(N,C,A)$$

である．一方，やはり定理2.2から

$$K(M,B,B-C)-K(N,B,B-C)+K(M,B,L)(Q_m-Q_n)K(N,B,B-C)=0$$

であり，これと(2.9)と合せると

$$K(N,B,A)-K(N,C,A)=-K(N,B,B-C)K(N,C,A)$$
$$=-K(M,B,B-C)K(N,C,A)-K(M,B,L)(Q_m-Q_n)K(N,B,B-C)K(N,C,A)$$

である．この式と(2.10)により

$$K(M,B,A)-K(N,C,A)$$
$$=-K(M,B,L)(Q_m-Q_n)K(N,C,A)-K(M,B,B-C)K(N,C,A)$$

を得る．これは，(2.6)にほかならない．一般に $E_x(\int_0^\infty e^{-B}dC)$ が有界という仮定のない場合には，Bを$B+\varepsilon C$でおきかえ，Cを$(1+\varepsilon)C$でおきかえた時得られる式において，$\varepsilon\downarrow 0$とすればよい．

q.e.d.

§3 境界上のlocal time

Sは第2可算公理をみたす局所compactなHausdorff空間とし，以下§7の終りまでずっと，DをS内の開集合でSにおける閉包がSと一致するものとする．従って境界$\partial D=S-D$である．∂Dは空ではないとする．なおこの節の命題3.8から先は∂Dがcompactであると仮定する．

条件(A),(L)をみたすS上のMarkov過程$\mathfrak{M}=(W,P_x:x\in S)$が与えられ，

(M.1) $\forall\xi\in\partial D$に対し $P_\xi(\sigma_{\partial D}=0)=1$ (これを，∂Dが$\mathfrak{M}$に関し正則であるという．)

をみたすとする．$\mathfrak{M}$のクラスC^αの非負加法的汎函数に対し，∂Dへの掃散という新しい加法的汎函数を得る操作を定義し，それのいく

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

つかの性質を証明しよう．掃散はもっと一般の集合に対し定義され，またクラス $\mathfrak{U}^\alpha$ の非負加法的汎函数に対して定義されて，それの一般論が本尾［3］にあるが，ここではそのうち後に必要なものだけを述べる．

以下§7までずっと，$\sigma_{\partial D}$ を単に σ と書くことにする．

$$H_\alpha^\sigma(x, E) = E_x(e^{-\alpha\sigma} : x_\sigma \in E), \qquad x \in S,\ E \in \mathcal{B}(\partial D)$$

という記号を用いよう．

補題 3.1. A をクラス $\mathfrak{C}^\alpha$ の非負加法的汎函数，u をその α-*potential* とすると，$H_\alpha^\sigma u$ はクラス D の正則な α-*excessive* 函数である．

証明 命題 1.1 により $v = H_\alpha^\sigma u$ は有限な α-*excessive* 函数であるから，補題を証明するには，§1 に述べたように，任意の Markov 時間の非減少列 $\rho_n \uparrow \rho$ に対し $E_x(e^{-\alpha\rho_n} v(x_{\rho_n})) \longrightarrow E_x(e^{-\alpha\rho} v(x_\rho))$ をいえばよい．$\overline{\rho}_n = \rho_n + \sigma(w^+_{\rho_n})$，$\overline{\rho} = \rho + \sigma(w^+_\rho)$ とおく．$E_x(e^{-\alpha\rho_n} v(x_{\rho_n})) = E_x(e^{-\alpha\overline{\rho}_n} u(x_{\overline{\rho}_n}))$，$E_x(e^{-\alpha\rho} v(x_\rho)) = E_x(e^{-\alpha\overline{\rho}} u(x_{\overline{\rho}}))$ であるから，$\overline{\rho}_n \uparrow \overline{\rho}$ をいえば，u 自身がクラス D の正則な α-*excessive* 函数であること（定理 1.5）によって証明を終る．以下，$\overline{\rho}_n \uparrow \overline{\rho}$ を示す．$\overline{\rho}_n$ が非減少列で $\rho_n \le \overline{\rho}_n \le \overline{\rho}$ なることは明か．4つの場合に分けて考える．① $\rho(w) = \infty$ なら $\rho_n(w) \to \infty$ だから $\overline{\rho}_n(w) \to \infty = \overline{\rho}(w)$ である．② $\rho(w) = 0$ なら $\rho_n(w) = 0$ だから $\overline{\rho}_n(w) = \overline{\rho}(w)$ である．③ ある番号 n_0 に対し $\rho(w) < \overline{\rho}_{n_0}(w)$ ならば $\overline{\rho}(w) = \overline{\rho}_{n_0}(w)$ となるから $\overline{\rho}_n(w) \longrightarrow \overline{\rho}(w)$ である．④ $B = \{w : 0 < \rho(w) < \infty$ かつ $\forall n$ に対し $\overline{\rho}_n(w) \le \rho(w)\}$ で考える．$\rho_n(w) \le \overline{\rho}_n(w) \le \rho(w)$ から分るように B 上では $\lim_{n\to\infty} \overline{\rho}_n = \rho$ である．また (A.3) により B 上で *a.s.* に $x_\rho \in \partial D$ であるから，(M.1) を用いて

$$P_x(\rho = \overline{\rho}, B) = P_x(\sigma(w^+_\rho) = 0, B) = E_x(P_{x_\rho}(\sigma = 0) : B) = P_x(B)$$

を得る．

q.e.d.

上の補題の $H_\alpha^\sigma u$ は定理 1.5 により，$\mathfrak{C}^\alpha$ に属するある非負加法的汎函数 $\widetilde{A}_\alpha$ の α-*potential* である．$\widetilde{A}_\alpha$ は同値を除いて唯一

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

つ定まる（定理 1.4）.

<u>定義</u>　クラス $\mathcal{C}^\alpha$ の非負加法的汎函数Aからクラス $\mathcal{C}^\alpha$ の非負加法的汎函数 $\widetilde{A}_\alpha$ を得る上の操作を，境界へのα次掃散という．

<u>命題 3.1.</u>　A, B を $\mathcal{C}^\alpha$ の非負加法的汎函数とする．

(i) $(\widetilde{A+B})_\alpha = \widetilde{A}_\alpha + \widetilde{B}_\alpha$

(ii) $(\widetilde{cA})_\alpha = c\widetilde{A}_\alpha$　　（cは非負定数）

(iii) $A \ll B \Longrightarrow \widetilde{A}_\alpha \ll \widetilde{B}_\alpha$

<u>証明.</u>　(i), (ii)は明か．(iii) $A \ll B$ ならある $\mathcal{C}^\alpha$ の非負加法的汎函数Cによって $A+C=B$ とかけるから，(i)から分る．

<u>命題 3.2.</u>　Aをクラス $\mathcal{C}^\alpha$ の非負加法的汎函数とする時，次の3つは互いに同値である．

(i) $A \approx \widetilde{A}_\alpha$

(ii) $A \approx \chi_{\partial D} A$

(iii) $A(\sigma)=0$　　a.s.

<u>証明.</u>　(iii)が成り立てば，

$$E_x\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t} d\widetilde{A}_\alpha\right) = \int H_\alpha^\sigma(x,dy)\, E_x\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t} dA\right) = E_x\left(\int_\sigma^\infty e^{-\alpha t} dA\right)$$

$$= E_x\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t} dA\right)$$

であるから(i)が成り立つ．(i)⇒(iii)も上式から明か．(ii)⇒(iii)も $\chi_{\partial D}A$ の定義から明かである．(iii)⇒(ii)を示そう．D_i を開集合の増大列で $\overline{D_i} \subset D_{i+1}$、$\bigcup_{i=1}^\infty D_i = D$ にとり，Markov時間の列 $\rho_n=\rho_n(i,w)$, $\sigma_n=\sigma_n(i,w)$ を $\rho_0=0$, $\sigma_n=\rho_{n-1}+\sigma(w^+_{\rho_{n-1}})$, $\rho_n=\sigma_n+\sigma_{D_i}(w^+_{\sigma_n})$ と定義する．$\rho_n<\infty$ ならば $x_{\rho_n}\in\overline{D_i}$ で $\rho_n<\sigma_{n+1}$ であり，$\sigma_n<\infty$ なら $x_{\sigma_n}\in\partial D$ で $\sigma_n<\rho_n$ である．従って，pathが左極限をもつことから，$\forall w\in W$ に対し $\lim_{n\to\infty}\sigma_n(w)=\lim_{n\to\infty}\rho_n(w)=\infty$ である．ρ_n の定義により $E_x(\int_{\sigma_n}^{\rho_n}\chi_{D_i}(x_t)dA)=0$ であるが，(iii)を仮定すると更に

$$E_x\left(\int_{\rho_{n-1}}^{\sigma_n}\chi_{D_i}(x_t)dA\right)=E_x\left(E_{x_{\rho_{n-1}}}\left(\int_0^\sigma \chi_{D_i}(x_t)dA\right)\right)=0$$

であるから，$E_x(\int_0^\infty\chi_{D_i}(x_t)dA)=0$ である．$i\to\infty$ として $\chi_D A\approx 0$

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

を得るから (ii) がいえる。

命題 3.3. クラス $\mathfrak{C}^\alpha$ の任意の非負加法的汎函数 A に対し $\widetilde{A}_\alpha(\sigma)=0$ a.s. 従って(命題 3.2 により) $\widetilde{A}_\alpha \approx \chi_{\partial D}\widetilde{A}_\alpha$

証明. 命題 3.2 により, $\widetilde{A}_\alpha$ を ∂D へ α 次掃散しても変らないことをいえばよい. これは, $u \geq 0$ に対し $H^\sigma_\alpha H^\sigma_\alpha u = H^\sigma_\alpha u$ であることから明か. q.e.d.

命題 3.4. A が $\mathfrak{C}^\alpha$ の単調増加(定義は §1)非負加法的汎函数ならば、a.s. に次のことが成り立つ:

$0 \leq t_1 < t_2 < t_3$, $x_{t_2} \in \partial D$ ならば $\widetilde{A}_\alpha(t_1) < \widetilde{A}_\alpha(t_3)$

系. $\mathfrak{C}^\alpha$ の単調増加の非負加法的汎函数 A に対し $\rho = \inf\{t : \widetilde{A}_\alpha(t) > 0\}$ とおくと, $\rho = \sigma$ a.s.

命題 3.4 の証明. まず系の方を先に証明し, これを使って命題 3.4 を示す. $u = E_x(\int_0^\infty e^{-\alpha t} dA)$ とおくと命題 1.1 より $u \geq H^\sigma_\alpha u$ である. ρ は Markov 時間になるから $\forall \xi \in \partial D$ に対し

$$E_\xi(\int_0^\rho e^{-\alpha t} d\widetilde{A}_\alpha) = H^\sigma_\alpha u(\xi) - E_\xi(e^{-\alpha\rho} H^\sigma_\alpha u(x_\rho))$$

$$\geq u(\xi) - E_\xi(e^{-\alpha\rho} u(x_\rho)) = E_\xi(\int_0^\rho e^{-\alpha t} dA)$$

左辺は ρ の定義により 0 だから, $E_\xi(\int_0^\rho e^{-\alpha t} dA) = 0$ である. A が単調増加だから $\rho = 0$, P_ξ-a.e. となる. 従って $x \in D$ に対しても

$$P_x(\rho > \sigma) = P_x(\rho(w^+_\sigma) > 0, \sigma < \infty) = E_x(P_{x_\sigma}(\rho > 0) : \sigma < \infty) = 0$$

となり, $\rho = \sigma$ a.s. がいえた. 従って $\forall r \in \mathbb{Q}^+$ (非負有理数)に対し $\rho(w^+_r) = \sigma(w^+_r)$ a.s. である. $W' = \bigcap_{r \in \mathbb{Q}^+}(w : \rho(w^+_r) = \sigma(w^+_r))$ とおけば $P_x(W') = 1$ で, $w \in W'$ に対しては, $0 \leq t_1 < t_2 < t_3$, $x_{t_2} \in \partial D$ ならば $\widetilde{A}_\alpha(t_1) < \widetilde{A}_\alpha(t_3)$ が成り立つ. なぜなら, $\widetilde{A}_\alpha(t_1) = \widetilde{A}_\alpha(t_3)$ とすると, $t_1 \leq r < t_2$ なる $r \in \mathbb{Q}^+$ をとる時 $r + \sigma(w^+_r) \leq t_2$, $r + \rho(w^+_r) \geq t_3$ となって不合理だから q.e.d.

次のような性質も今後用いる.

補題 3.2. ρ を Markov 時間で, $\{\rho < \infty\}$ の上で a.s. に $x_\rho \in \partial D$ をみたすとする. クラス $\mathfrak{C}^\alpha$ の任意の非負加法的汎函数

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

A に対し

$$E_\xi\left(\int_0^\rho e^{-\alpha t} dA\right) = E_\xi\left(\int_0^\rho e^{-\alpha t} d\widetilde{A}_\alpha\right), \qquad \xi \in \partial D$$

となる．

証明． ∂D では $E_\xi(\int_0^\infty e^{-\alpha t} dA) = E_\xi(\int_0^\infty e^{-\alpha t} d\widehat{A}_\alpha)$ であることに注意すれば，

$$E_\xi\left(\int_0^\rho e^{-\alpha t} dA\right) = E_\xi\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t} dA\right) - E_\xi\left(e^{-\alpha\rho} E_{x_\rho}\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t} dA\right) : \rho < \infty\right)$$

および $E_\xi(\int_0^\rho e^{-\alpha t} d\widehat{A}_\alpha)$ に対する同様の式から分る． q.e.d.

補題 3.3. $B(t)$ を連続な加法的汎函数で，a.s. に

$$0 \leq \forall t \leq \sigma \text{ に対し } B(t) = 0$$

をみたすものとすると，クラス C^α の任意の非負加法的汎函数 A に対し

$$(3.1) \qquad E_x\left(\int_\sigma^\infty e^{-\alpha t + B(t)} dA\right) = E_x\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t + B(t)} d\widetilde{A}_\alpha\right), \qquad x \in S$$

となる．

証明． $\varepsilon > 0$ とし，$\rho = \inf\{t : |B(t)| > \varepsilon\}$ として，$\sigma_1 = \sigma$，$\rho_n = \sigma_n + \rho(w^+_{\sigma_n})$，$\sigma_{n+1} = \rho_n + \sigma(w^+_{\rho_n})$ とおく．$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \infty$ かつ $\sigma_n + \sigma_2(w^+_{\sigma_n}) = \sigma_{n+1}$ である．(3.1) の左辺を I_1 右辺を I_2 とおく．補題 3.2 により

$$E_\xi\left(\int_0^{\sigma_2} e^{-\alpha t} dA\right) = E_\xi\left(\int_0^{\sigma_2} e^{-\alpha t} d\widehat{A}_\alpha\right) \ (= \varphi(\xi) \text{ とおく}), \quad \xi \in \partial D$$

であることに注意し，また $t \in [\rho_n, \sigma_{n+1}]$ では $B(t) = B(\rho_n)$ であることに注意すると，

$$e^{-\varepsilon} E_x\left(\sum_{n=1}^\infty e^{-\alpha\sigma_n + B(\sigma_n)} \varphi(x_{\sigma_n})\right) \leq I_i \leq e^{\varepsilon} E_x\left(\sum_{n=1}^\infty e^{-\alpha\sigma_n + B(\sigma_n)} \varphi(x_{\sigma_n})\right), \quad i = 1, 2$$

を得る．ε は任意だから，$I_1 = I_2$ すなわち (3.1) を得る．

q.e.d.

ここで α 次の掃散と β 次の掃散との関係をのべておく．まず，

$$G^\sigma_\alpha(x, E) = E_x\left(\int_0^\sigma e^{-\alpha t} \chi_E(x_t) dt\right)$$

とおくと

$$(3.2) \qquad H^\sigma_\alpha - H^\sigma_\beta + (\alpha - \beta) G^\sigma_\alpha H^\sigma_\beta = 0$$

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

が成り立つことを注意しておく．これは

$$G_\alpha^\sigma H_\beta^\sigma f(x) = E_x[\int_0^\sigma e^{-\alpha t} dt\, E_{x_t}(e^{-\beta\sigma} f(x_\sigma) : \sigma < \infty)]$$

$$= E_x(\int_0^\sigma e^{-\alpha t - \beta\sigma(w_t^+)} f(x_\sigma) dt : \sigma < \infty)$$

$$= \frac{1}{\alpha-\beta} E_x((e^{-\beta\sigma} - e^{-\alpha\sigma}) f(x_\sigma) : \sigma < \infty)$$

によって分る．次に，A を C^α かつ C^β の非負加法的汎函数とするとき A の α-potential u_α と β-potential u_β との関係は

(3.3) $\quad u_\alpha - u_\beta + (\alpha-\beta) G_\alpha u_\beta = 0$

である．これは直接にも容易に証明できるが，定理 2.1 において $M(t)=1$，$f=1$，$B(t) = \alpha(t \wedge \zeta) + \varepsilon A(t)$，$C(t) = \beta(t\wedge\zeta) + \varepsilon A(t)$ とおき $\varepsilon \downarrow 0$ としても得られる．

以下，

(3.4) $\quad T(t) = T(t, w) = t \wedge \zeta(w)$

とおく．$T(t) = \int_0^t \chi_S(x_s) ds$ であるから，これは連続な非負加法的汎函数である．しかもクラス C^{0+} に属することが明かである．

<u>命題 3.5.</u> A を C^{0+} の非負加法的汎函数とする．この時 $v_\alpha(x) = E_x(\int_0^\sigma e^{-\alpha t} dA)$ とおくと $v_\alpha T$ も C^{0+} に属し，任意の $\beta > \alpha > 0$ に対し

(3.5) $\quad \tilde{A}_\alpha \approx \tilde{A}_\beta + (\beta-\alpha)(\widetilde{v_\alpha T})_\beta$

が成り立つ．

<u>証明.</u> $\forall \gamma > 0$ に対し $v_\alpha T$ の γ-potential $= G_\gamma v_\alpha \le G_\gamma u_\alpha$ でこれは (3.3) により有限だから $v_\alpha T$ は C^{0+} に属す．$\tilde{A}_\alpha$ は C^α 従って C^β でもあるから，$\tilde{A}_\alpha$ の α-potential を $\tilde{u}_{\alpha,\alpha}$，$\beta$-potential を $\tilde{u}_{\alpha,\beta}$ とおくと (3.3) により，

$$\tilde{u}_{\alpha,\beta}(x) = \tilde{u}_{\alpha,\alpha}(x) + (\alpha-\beta) G_\beta \tilde{u}_{\alpha,\alpha}(x)$$

$\tilde{u}_{\alpha,\alpha} = H_\alpha^\sigma u_\alpha$ と，(3.2) を用いると

$$= H_\beta^\sigma u_\alpha + (\alpha-\beta)(G_\beta - G_\beta^\sigma) H_\alpha^\sigma u_\alpha$$

第1項には (3.3) を用い，第2項には $G_\beta = G_\beta^\sigma + H_\beta^\sigma G_\beta$ を用いると

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

$$= H^{\sigma}_{\beta} u_{\beta} + (\beta-\alpha)(H^{\sigma}_{\beta} G_{\beta} u_{\alpha} - H^{\sigma}_{\beta} G_{\beta} H^{\sigma}_{\alpha} u_{\alpha})$$
$$= H^{\sigma}_{\beta} u_{\beta} + (\beta-\alpha) H^{\sigma}_{\beta} G_{\beta} v_{\alpha}$$

これの第1項は $\widetilde{U}_{\beta,\beta}$ であり，第2項は $(\beta-\alpha)(\widetilde{v_{\alpha} T})_{\beta}$ の β-potential であるから，(3.5) を得る． q.e.d.

上の命題から直ちに

命題 3.6. A をクラス $\mathcal{C}^{0+}$ の非負加法的汎函数とすると，任意の $\alpha > 0$ に対し $\widehat{A}_{\alpha}$ はクラス $\mathcal{C}^{0+}$ に属する．

また，$\alpha \downarrow 0$ の時，$\widetilde{A}_{\alpha}$ は単調非減少である．A の 0-potential が有限なら，もちろん，$\lim_{\alpha \downarrow 0} \widetilde{A}_{\alpha} = \widetilde{A}_0$ である．(A の 0-potential が有限でなくても，$v_0(x) = E_x(A(\sigma))$ が有界なら，$\forall \beta > 0$ に対し

$$\lim_{\alpha \downarrow 0} E_x\left(\int_0^{\infty} e^{-\beta t} d\widehat{A}_{\alpha}\right) = E_x\left(\int_0^{\infty} e^{-\beta t} d\widehat{A}_{\beta}\right) + \lim_{\alpha \downarrow 0} (\beta-\alpha) E_x\left(\int_0^{\infty} e^{-\beta t} d(\widetilde{v_{\alpha} T})_{\beta}\right)$$
$$= \quad \text{〃} \quad + \lim_{\alpha \downarrow 0} (\beta-\alpha) E_x\left(\int_{\sigma}^{\infty} e^{-\beta t} v_{\alpha} dt\right)$$
$$= \quad \text{〃} \quad + \beta E_x\left(\int_{\sigma}^{\infty} e^{-\beta t} v_0 dt\right) < +\infty$$

である．故に 本尾 [2] P. 30～31 により，任意の減少列 $\alpha_n \downarrow 0$ に対し $\mathcal{C}^{0+}$ の非負加法的汎函数 B が存在して $\lim_{\alpha \downarrow 0} \widehat{A}_{\alpha} = B$ となる．B は，同値を除いて α_n のとり方によらないから $B = \widehat{A}_0$ ともかく．

(3.6) $\qquad \widehat{A}_0 \approx \widehat{A}_{\beta} + \beta(\widetilde{v_0 T})_{\beta}$

である．

次の定理では，$f \in B(S)$ に対し $f(x_t(w)) = f_t(w)$ とかき，$\lim_{s \uparrow t} f_s(w)$ が存在するとき，$f_{t-}(w)$ とかく．

$\boxed{\text{定理 3.1.}}$ (近似定理) A をクラス $\mathcal{C}^{0+}$ の非負加法的汎函数で $\chi_{\partial D} A \approx 0$ をみたすとする．D_i を開集合の列で

(3.7) $\qquad \overline{D}_i \subset D_{i+1}, \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i = D$

をみたすとし，$\rho(i) = \rho(i, w)$ を Markov 時間で

(3.8) $\qquad \rho(i) \leq \frac{1}{i} \wedge \sigma_{D_i}$

であり，$\sigma_1(i) = \sigma$，$\rho_n(i) = \sigma_n(i) + \sigma_n(i) + \rho(i, w^+_{\sigma_n(i)})$，$\sigma_{n+1}(i) =$

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

$\rho_n(i)+\sigma(w^+_{\rho_n(i)})$ とおくとき

(3.9) $\lim_{n\to\infty}\rho_n(i)=\lim_{n\to\infty}\sigma_n(i)=\infty$ a.s.

をみたすとする．$f\in B(S)$ が

(3.10) P_x (すべての $t\in(0,\infty)$ に対し f_{t-} が存在) $=1$, $x\in S$

および

(3.11) $\forall t\in[0,\rho(i))$ に対し $|f_t-f_0|\leq\frac{1}{i}$

をみたすとすると，$\forall\alpha,\beta>0$ に対し 次式が成り立つ．

(3.12) $\lim_{i\to\infty}E_x(\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\alpha\rho_n(i)}f_{\rho_n(i)-}v_\beta(x_{\rho_n(i)}))=E_x(\int_0^\infty e^{-\alpha t}f(x_t)\,d\tilde{A}_\beta)$.

ただし，$v_\beta(x)=E_x(\int_0^\sigma e^{-\beta t}dA)$ とする．

注意． ρ が (3.9) をみたすMarkov時間なら，$P_\xi(\rho>0)=1$, $\xi\in\partial D$ である．何となれば，$\{\rho=0\}$ の上では a.s. に $\rho_n=0$ となるからである．従って，この時次の命題が a.s. にいえる：「$\sigma_n<\infty$ ならば $0\leq\sigma_1<\rho_1\leq\sigma_2<\rho_2\leq\cdots\leq\sigma_n<\rho_n$ である.」

定理3.1の証明． $\rho_n(i)$, $\sigma_n(i)$ を単に ρ_n, σ_n と書くことにする．(3.12) の左辺の lim をとる前を I_1 とおく．証明の方針は，I_1 を順に 次のようなもので近似する．

$$I_2=E_x(\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\alpha\sigma_n}f_{\sigma_n}v_\beta(x_{\rho_n})).$$

v_β の 定義により，$I_2=E_x(\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\alpha\sigma_n}f_{\sigma_n}E_{x_{\sigma_n}}(e^{\beta\rho}\int_\rho^{\sigma_2}e^{-\beta t}dA))$.

$$I_3=E_x(\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\alpha\sigma_n}f_{\sigma_n}E_{x_{\sigma_n}}(\int_0^{\sigma_2}e^{-\beta t}dA)).$$

補題3.2，命題3.3により

$$I_3=E_x(\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\alpha\sigma_n}f_{\sigma_n}E_{x_{\sigma_n}}(\int_0^{\sigma_2}e^{-\beta t}d\tilde{A}_\beta))$$

$$=E_x(\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\alpha\sigma_n}f_{\sigma_n}E_{x_{\sigma_n}}(\int_0^{\rho}e^{-\beta t}d\tilde{A}_\beta))$$

である．次に

$$I_4=E_x(\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\alpha\sigma_n}f_{\sigma_n}E_{x_{\sigma_n}}(\int_0^{\rho}e^{-\alpha t}d\tilde{A}_\beta)).$$

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

I_4 は

$$= E_x\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_{\sigma_n} \int_{\sigma_n}^{\rho_n} e^{-\alpha t}\, d\hat{A}_\beta\right)$$

であり，これは(3.12)の右辺に近づくのである．（上の変形では $E_x\left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha\sigma_n}|f_{\sigma_n}|\, v_\beta(x_{\rho_n})\right)<\infty$ 等々の可積分性を使ったが，これらは以下ですぐに分る.）

まず

$$E_x\left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha\sigma_n} v_\beta(x_{\rho_n})\right) \le e^{(\alpha\vee\beta)/i}\, \tilde{u}_{\beta,\alpha}(x) \tag{3.13}$$

を示そう． $\tilde{u}_{\beta,\alpha}$ は $\hat{A}_\beta$ の α-potential とする．

$$\text{左辺} = E_x\left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha\sigma_n} E_{x_{\rho_n}}\left(\int_0^{\sigma} e^{-\beta t}\, dA\right)\right)$$

$$= E_x\left(\sum e^{-\alpha\sigma_n} E_{x_{\sigma_n}}\left(e^{\beta\rho}\int_\rho^{\sigma_2} e^{-\beta t}\, dA\right)\right)$$

$$\le e^{\beta/i} E_x\left(\sum e^{-\alpha\sigma_n} E_{x_{\sigma_n}}\left(\int_0^{\sigma_2} e^{-\beta t}\, dA\right)\right)$$

補題3.2，命題3.3により

$$= e^{\beta/i}\, E_x\left(\sum e^{-\alpha\sigma_n} E_{x_{\sigma_n}}\left(\int_0^{\rho} e^{-\beta t}\, d\hat{A}_\beta\right)\right)$$

$\alpha\le\beta$ なら $e^{-\beta t}\le e^{-\alpha t}$ であり $\alpha>\beta$ なら $e^{-\beta t}\le e^{(\alpha-\beta)/i}e^{-\alpha t}$ であるから

$$\le e^{(\alpha\vee\beta)/i}\, E_x\left(\sum e^{-\alpha\sigma_n} E_{x_{\sigma_n}}\left(\int_0^{\rho} e^{-\alpha t}\, d\hat{A}_\beta\right)\right)$$

$$= e^{(\alpha\vee\beta)/i}\, \tilde{u}_{\beta,\alpha}(x).$$

これで(3.13)がいえた．これによって，I_1 が有限であることも分る．

$$|I_1 - I_2| \le E_x\left(\sum_{n=1}^{\infty} |e^{-\alpha\rho_n} - e^{-\alpha\sigma_n}|\,|f_{\rho_n}|\, v_\beta(x_{\rho_n})\right) + E_x\left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha\sigma_n}|f_{\rho_n} - f_{\sigma_n}|\, v_\beta(x_{\rho_n})\right)$$

であるから，$|e^{-\alpha\rho_n} - e^{-\alpha\sigma_n}| = e^{-\alpha\sigma_n}(1-e^{-\alpha(\rho_n-\sigma_n)}) \le e^{-\alpha\sigma_n}(1-e^{-\alpha/i})$ と $|f_{\rho_n} - f_{\sigma_n}| \le \frac{1}{i}$ と(3.13)により

$$|I_1 - I_2| \le \left((1-e^{-\alpha/i})\|f\| + \frac{1}{i}\right) e^{(\alpha\wedge\beta)/i}\ \tilde{u}_{\beta,\alpha}(x)$$

となり，これは $i\to\infty$ の時0に近づく．また，

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

$$E_x\Big(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha\sigma_n} f_{\sigma_n} E_{x_{\sigma_n}}\Big(\int_{\rho}^{\sigma_z} e^{-\beta t}\,dA\Big)\Big) = E_x\Big(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha\sigma_n} f_{\sigma_n} e^{-\beta\rho(w^+_{\sigma_n})}\, v_\beta(x_{\rho_n})\Big)$$

を間に入れて考えれば

$$|I_2 - I_3| \leq (1-e^{-\beta/i})\|f\| E_x\Big(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha\sigma_n}\, v_\beta(x_{\rho_n})\Big) + \|f\|\, E_x\Big(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha\sigma_n} E_{x_{\sigma_n}}\Big(\int_0^{\rho} e^{-\beta t}\,dA\Big)\Big)$$

第1項には(3.13)を用い、第2項には $\rho \leq \sigma_{D_i}$ を用いると

$$\leq (1-e^{-\beta/i})\|f\| e^{(\alpha\vee\beta)/i}\, \tilde{u}_{\beta,\alpha}(x) + \|f\| E_x\Big(\int_0^{\infty} e^{-(\alpha\wedge\beta)t}\, \chi_{D_i^c}(x_t)\,dA\Big)$$

であるが、$\chi_{\partial D} A \approx 0$ によりこれは $i\to\infty$ の時0に近づく．次に，I_3 と I_4 を比較すると，$|e^{-\beta t}-e^{-\alpha t}| \leq (e^{|\alpha-\beta| t}-1)e^{-\alpha t}$ と $\rho \leq \frac{1}{i}$ により，

$$|I_3 - I_4| \leq (e^{|\alpha-\beta|/i}-1)\|f\| E_x\Big(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha\sigma_n} E_{x_{\sigma_n}}\Big(\int_0^{\rho} e^{-\alpha t}\,d\hat{A}_\beta\Big)\Big)$$

$$= (e^{|\alpha-\beta|/i}-1)\,\|f\|\; \tilde{u}_{\beta,\alpha}(x)$$

となり，これも $i\to\infty$ の時0に近づく．最後に $t\in[\sigma_n, \rho_n)$ で $|f_{\sigma_n} - f_t| \leq \frac{1}{i}$ であることと，

$$E_x\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \int_{\rho_n}^{\sigma_{n+1}} e^{-\alpha t} f(x_t)\, d\hat{A}_\beta\Big) = 0 \quad (\text{ただし } \rho_0 = 0 \text{ とおく})$$

と(3.9)に注意すれば

$$\Big|I_4 - E_x\Big(\int_0^{\infty} e^{-\alpha t} f(x_t)\, d\tilde{A}_\beta\Big)\Big| \leq \frac{1}{i} E_x\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\sigma_n}^{\rho_n} e^{-\alpha t}\, d\tilde{A}_\beta\Big) = \frac{1}{i}\,\hat{u}_{\beta,\alpha}(x)$$

でこれも0に近づくことがわかり，証明を終る． q.e.d.

<u>定義</u>　Φ がクラス C^α の加法的汎函数で，C^α の単調増加非負加法的汎函数を ∂D へ α 次掃散することによって得られたものである時，（Mの）広義の境界上の *local time* と呼ぶ．

広義の境界上の *local time* は確かに存在する．たとえば(3.4)で定義した T を掃散すればよい．Φ を広義の境界上の *local time* とし，$\tau = \tau(s, w)$ をその逆函数とする．Φ は単調非減少(a.s.)ではあるが単調増加ではないから，τ は次のように定義する：

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

(3.14) $\quad \tau(S,w) = \sup\{t \geq 0 : \Phi(t,w) \leq S\} = \inf\{t \geq 0 : S < \Phi(t)\}$

τ の簡単な性質をあげる.

<u>命題 3.7.</u> $\quad$ a.s. に次のことが成立する.

(i) $\quad S < \Phi(t) \iff \tau(S) < t$

$\quad S < \Phi(\infty) \iff \tau(S) < \zeta$

$\quad S \geq \Phi(\infty) \iff \tau(S) = \infty$

(ii) $\quad S < \Phi(\infty) \implies \Phi(\tau(S)) = \Phi(\tau(S-)) = S$

$\quad S \geq \Phi(\infty) \implies \Phi(\tau(S)) = \Phi(\infty) = \Phi(\tau(S-))$

(iii) $\quad \tau(\Phi(t)) \geq t \geq \tau(\Phi(t)-)$

(iv) $\quad \tau(S)$ は S について右連続

(v) $\quad 0 \leq S_1 < S_2 < \Phi(\infty) \implies \tau(S_1) < \tau(S_2)$

(vi) $\quad \tau(S_1 + S_2, w) = \tau(S_1, w) + \tau(S_2, w^+_{\tau_{S_1}})$.

(vii) $\quad S < \Phi(\infty) \implies x_{\tau(S)} \in \partial D$

$\quad S \geq \Phi(\infty) \implies x_{\tau(S)} = \Delta_S$.

(viii) $\quad \tau(0) = \sigma$

(ix) $\quad S < \Phi(\infty),\ \tau(S-) < t < \tau(S) \implies x_t \in D$

(x) $\quad \tau(\Phi(\infty)-) = \inf\{t \geq 0 : \Phi(t) = \Phi(\infty)\} = \sup\{t \geq 0 : x_t \in \partial D\}$

ただし空集合の $\sup$ は 0 とする.

<u>証明.</u> (i) τ の定義と (a.3) から明か.

(ii) $S < \Phi(\infty)$ とする. $\Phi(\tau(S)) \leq S$ は τ の定義から明か. (i)により $\tau(S) < \infty$ だから $\Phi(\tau(S)) < S$ とすると $\exists t > \tau(S)$ があって $\Phi(t) < S$ となり τ の定義に矛盾する. 故に $S < \Phi(\infty) \implies \Phi(\tau(S)) = S$ である. $S \geq \Phi(\infty) \implies \Phi(\tau(S)) = \Phi(\infty)$ は (i) から明か. また $S \leq \Phi(\infty)$ では $\Phi(\tau(S-)) = \lim_{S' \uparrow S} \Phi(\tau(S')) = \lim_{S' \uparrow S} S' = S$ である. $S > \Phi(\infty)$ では $\Phi(\tau(S-)) = \Phi(\infty)$.

(iii) $\tau(\Phi(t)) \geq t$ は τ の定義から明か. $t \geq \tau(\Phi(t)-)$ は (i) から分る.

(iv) $S \geq \Phi(\infty)$ では (i)による. $S < \Phi(\infty)$ としよう. $\tau(S) < \infty$ だから与えられた $\varepsilon > 0$ に対し $\Phi(\tau(S)+\varepsilon) = S_1$ とおくと $S_1 > S$ ある. $S < S' < S_1$ なる S' に対しては $\tau(S) \leq \tau(S') \leq \tau(S) + \varepsilon$

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

である。

(v) $\tau(S_1) \leq \tau(S_2)$ は明か。$\tau(S_1) \neq \tau(S_2)$ は (ii) による。

(vi) $S_1 < \Phi(\infty)$ とする。(ii) により

$\tau(S_1+S_2) = \sup\{t \geq \tau(S_1) : \Phi(t) \leq S_1+S_2\} = \tau(S_1) + \sup\{t : \Phi(\tau(S_1)+t) \leq S_1+S_2\}$

かつ，$\Phi(\tau(S_1)+t) = S_1 + \Phi(t, w^+_{\tau(S_1)})$ であるから，

$\tau(S_1+S_2) = \tau(S_1) + \tau(S_2, w^+_{\tau(S_1)})$ である。$S_1 \geq \Phi(\infty)$ では両辺共に ∞ となって成立する。

(vii) $S \geq \Phi(\infty)$ の場合は (i) による。$S < \Phi(\infty)$ としよう。(i) により $x_{\tau(S)} \in S$ である。命題3.3により $\{w : \forall t$ に対し $\Phi(t) = \int_0^t \chi_{\partial D}(x_s)\, d\Phi(s)\}$ を考えればよく，$x_{\tau(S)} \in D$ ならば $\exists t > \tau(S)$, $\Phi(\tau(S)) = \Phi(t)$ となって不合理である。

(viii) 命題 3.4 の系による。$\tau(0) = \rho$ である。

(ix) (i) により $x_t \in S$ となる。しかも，(ii) により $\Phi(\tau(S)) = \Phi(\tau(S-))$ だから命題 3.4 により $x_t \notin \partial D$ である。

(x) $\tau(\Phi(\infty)-) \leq \inf\{t \geq 0 : \Phi(t) = \Phi(\infty)\}$ は τ の定義から明か。$\inf\{t \geq 0 : \Phi(t) = \Phi(\infty)\} \leq \sup\{t \geq 0 : x_t \in \partial D\}$ は命題 3.3 による。$\sup\{t \geq 0 : x_t \in \partial D\} \leq \tau(\Phi(\infty)-)$ をいうには $\tau(\Phi(\infty)-) < t \Longrightarrow x_t \notin \partial D$ をいえばよい。(ii) により $\Phi(\tau(\Phi(\infty)-)) = \Phi(\infty)$ となることに注意すれば，これは命題 3.4 の帰結である。

<u>注意</u> 上の説明から分るように (i)〜(vii) は $\Phi(\sigma) = 0$ a.s. をみたす任意の非負連続加法的汎函数に対して τ を (3.14) によって定義すればいつも成り立つ。したがって，掃散によって得られたすべての Φ に対し成り立つ。(viii)〜(x) の証明には Φ が広義の境界上の local time であることを用いている。

以下，∂D が compact とする random な時間集合 $\mathbb{Z}$ を

$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}(w) = \{t \geq 0 : x_t \in \partial D\} \cup \{t \geq 0 : x_{t-} \in \partial D\}$

$\mathbb{Z}_+ = \mathbb{Z}_+(w) = \{t \geq 0 : x_t \in \partial D\}$

と定義する。$\mathbb{Z}$ の構造を，広義の境界上の local time Φ とその逆函数 τ に関係させて調べよう。更に，$\mathbb{M}$ の path の飛躍に関す

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

る性質を $\mathfrak{Z}$ に関連させて調べることにする.

w を1つ固定する. $0\leq t<\infty$ が $\forall t'>t$ に対し $\Phi(t',w)>\Phi(t,w)$ である時 t は Φ の右増加時点であるということにし, $0<t<\infty$ が $\forall t'<t$ に対し $\Phi(t',w)<\Phi(t,w)$ である時 Φ の左増加時点であるということにする. Φ の右増加時点, 左増加時点を Φ の増加時点と総称する.

命題 3.8. Φ の右増加時点の全体 $=\{\tau(s): 0\leq s<\Phi(\infty)\}$ $=\{\tau(s): s\geq 0$ かつ $\tau(s)<\infty\}$ a.s.

Φ の左増加時点の全体 $=\{\tau(s-): s>0$ かつ $\tau(s-)<\infty\}$ a.s.

証明 t が Φ の右増加時点である必要十分条件は $\tau(\Phi(t))=t$ であるから, $\{\Phi$ の右増加時点$\}\subset\{\tau(s): 0\leq s<\Phi(\infty)\}$ である. 逆に $t=\tau(s)$ $(0\leq s<\Phi(\infty))$ なら $\Phi(t)=s$ $\tau(\Phi(t))=\tau(s)=t$ であるから t は Φ の右増加時点になる. 故に前半がいえた. 次に

(3.15) t が Φ の左増加時点 $\Longleftrightarrow \Phi(t)>0$, $\tau(\Phi(t)-)=t$

である. 証明.命題 3.7 (iii) により $t\geq\tau(\Phi(t)-)$ であるが, t が Φ の左増加時点である時は, $t>\tau(\Phi(t)-)$ とすると $t>t'>\tau(\Phi(t)-)$ なる t' では $\Phi(t')=\Phi(t)$ となって矛盾を生じるから, $t=\tau(\Phi(t)$ である. 逆に, $\tau(\Phi(t)-)=t$ の時は, $t'<t$ とすると $\exists s<\Phi(t)$, $\tau(s)>t'$ であるから $\Phi(t')\leq s<\Phi(t)$ となり, t は Φ の左増加時点である. (3.15) がいえた. これにより, $\{\Phi$ の左増加時点の全体$\}\subset\{\tau(s-): s>0$ かつ $\tau(s-)<\infty\}$ である. 逆に $t=\tau(s-)<\infty$, $s>0$ ならば, $s\leq\Phi(\infty)$ だから命題 3.7 (ii) により $\Phi(t)=\Phi(\tau(s-))=s$, 従って $\tau(\Phi(t)-)=\tau(s-)=t$ であるから, (3.15) により t は Φ の左増加時点である. q.e.d.

命題 3.9 $\mathfrak{Z}=\{\tau(s): s\geq 0$ かつ $\tau(s)<\infty\}\cup\{\tau(s-): s>0$ かつ $\tau(s-)<\infty\}$ a.s.

これを証明するためにまず,

補題 3.4. a.s. に次のことがいえる: $0<t<\sigma$ なるすべての t および $\exists s>0$, $\tau(s-)<t<\tau(s)$ なるすべての t に対し $x_{t-}\neq\partial D$.

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

証明. 開集合の列 D_i を (3.7) のようにとる. D_i^c への到達時間 μ_i はMarkov時間の非減少列である. $\lim_{i\to\infty}\mu_i=\mu$ とおく. (A.3) により $\{\mu<\infty\}$ の上で a.s. に $x_{\mu_i}\to x_\mu$, 従って $\{\mu<\infty\}$ の上で a.s. に $x_\mu\in\partial D\cup\{\Delta_S\}$ である. 一方 $\mu\le\sigma$ は明かだから, $\{\mu<\infty,\ x_\mu\in\partial D\}$ の上では a.s. に $\mu=\sigma$ であり, $\{\mu<+\infty, x_\mu=\Delta_S\}$ の上では a.s. に $\mu=\zeta<\sigma=\infty$, $x_{\mu-}=\Delta_S$ である. 従って, a.s. に, $\forall t\in(0,\sigma)$ に対し $x_{t-}\notin\partial D$ である. 故に $\forall r\in\mathbb{Q}^+$ に対し a.s. に $\forall t\in(r, r+\sigma(w_r^+))$, $x_{t-}\notin\partial D$ である. 命題 3.7 (viii) により $\sigma(w_r^+)=\tau(0,w_r^+)$ a.s. なることに注意し, $W'=\bigcap_{r\in\mathbb{Q}^+}\{w:\sigma(w_r^+)=\tau(0,w_r^+)$, かつ $\forall t\in(r,r+\sigma(w_r^+)),\ x_{t-}\notin\partial D\}$ とおくと $P_x(W')=1$, $x\in S$ で, $w\in W'$ に対しては証明すべき命題が成り立つ.

命題 3.9 の証明. $\mathbb{Z}'=\{\tau(s):s\ge0$ かつ $\tau(s)<\infty\}\cup\{\tau(s-):s>0$ かつ $\tau(s-)<\infty\}$ とおく. 命題 3.7 (vii) により $\{\tau(s):s\ge0$ かつ $\tau(s)<\infty\}\subset\mathbb{Z}_+$ であり, 命題 3.7 (v), (vii) と ∂D の compact 性により $\{\tau(s-):s>0$ かつ $\tau(s-)<\infty\}\subset\{t:0<t<\infty$ かつ $x_{t-}\in\partial D\}$ である. 故に $\mathbb{Z}'\subset\mathbb{Z}$ である. さて, 命題 3.7 の (iv), (viii), (ix) と補題 3.4 にのべた命題の成り立つ w で考える. $t\in\mathbb{Z}_+$ すなわち $x_t\in\partial D$ とする. $t\ge\sigma=\tau(0)$ となるが, $t=\tau(0)$ なら直ちに $t\in\mathbb{Z}'$ である. $t>\tau(0)$ としよう. $s=\inf\{s':t<\tau(s')\}$ とおくと $s>0$ となり, しかも (iv) により $\tau(s-)\le t\le\tau(s)$ である. $\tau(s-)=\tau(s)$ なら $t\in\mathbb{Z}'$ であり, $\tau(s-)<\tau(s)$ なら命題 3.7 (ix) により $t\in\mathbb{Z}'$ であるから, いずれの場合にも $t\in\mathbb{Z}'$ がいえた. 次に, $0<t<\infty$, $x_{t-}\in\partial D$ とし, $t\in\mathbb{Z}'$ をいう. 補題 3.4 により $t\ge\sigma$ であり, 以下同じ論法で $t\in\mathbb{Z}'$ がいえる. 故に $\mathbb{Z}\subset\mathbb{Z}'$ である.

q.e.d.

注意. $\mathbb{Z}_+\supset\{\tau(s):s\ge0$ かつ $\tau(s)<\infty\}$ であるが, ここで等号は必ずしも成り立たない.

命題 3.10. a.s. に次の命題が成り立つ.

(i) $\mathbb{Z}$ は空かまたは完全集合 (すなわち孤立点をもたない閉集

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

合）

(ii) $\mathbb{Z}$ は $\mathbb{Z}_+$ に $\mathbb{Z}_+$ の左からの集積点を加えたものである。

(iii) 任意の閉区間 I に対し、$I \cap \mathbb{Z}$ は空かまたは連続濃度をもつ。

証明. (i) $\mathbb{Z} \neq \phi$ としよう。$t_n \in \mathbb{Z}$ を $t_n > t$, $t_n \downarrow t$ とすると、$x_{t_n'} \in \partial D$ なる部分列 t_n' をえらべるか、または、$x_{t_n'-} \in \partial D$ なる部分列がえられる。path の右連続性により、いずれの場合にも $x_t \in \partial D$ となる。$t_n \in \mathbb{Z}$ を $t_n < t < \infty$, $t_n \uparrow t$ とした時も、∂D が compact であることに注意すれば同じ論法で $x_{t-} \in \partial D$ を得る。従って $\mathbb{Z}$ は閉集合である。任意の $t \in \mathbb{Z}$ が $\mathbb{Z}$ の集積点であることは、命題 3.7 (iv), (v) に注意すれば命題 3.9 から分る。

(ii) (i) により $\mathbb{Z}$ は閉だから、$\mathbb{Z}_+$ の左からの集積点を加えても $\mathbb{Z}$ を出ない。一方、$t = \tau(\xi-) < \infty$, $S > 0$ ならば t は $\mathbb{Z}_+$ の左からの集積点であるから、命題 3.9 から (ii) がいえる。

(iii) (i) から、「完全集合は連続濃度をもつ」（たとえば、辻正次，集合論をみよ）という Bernstein の定理によって分る。また、命題 3.7 (iv), (V) に注意すれば、命題 3.9 から直接にも分る。

q. e. d.

$[0, +\infty) - \mathbb{Z}$ は $[0, +\infty)$ における開集合であるから、その連結成分は $[0, t)$ の形の区間かまたは $(0, \infty)$ 内の開区間である。補題 3.4 に注意すると $\{\sigma > 0\}$ では a.s. に $[0, +\infty) - \mathbb{Z} = [0, \sigma) \cup \bigcup_j E_j$ とかけ、また $\{\sigma = 0\}$ では a.s. に $[0, +\infty) - \mathbb{Z} = \bigcup_j E_j$ とかける。いずれの場合も E_j は $(\sigma, +\infty)$ 内の高々可算個の互いに交らない開区間である。E_j の各々におけるマルコフ過程 $\mathbb{M}$ の運動を D 内への excursion という。また E_j の各々を excursion の時間区間または excursion 区間という。E_j の番号 j は一般に時間の順序と一致するようにつけることはできないが、$E_j = (\tau_j, \tau_j')$ とかくとき（excursion 区間が $j-1$ 個あるいはそれ以下しかないときには $\tau_j = \tau_j' = \infty$ とおく）、τ_j, τ_j' が $\mathfrak{F}$ 可測になるようにつけておく。

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

それにはたとえば次のようにすればよい．すべての正の有理数に番号をつけて $\mathbb{Q}^+ - \{0\} = \{r_n : n = 1, 2, \cdots\}$ とし，有理数はこの順序で考える．r_n が $[0, +\infty) - \mathbb{Z} - [0, \sigma)$ に属す最初の有理数である時，r_n を含む excursion 区間を $\mathbb{E}_1$ とする．次に，$r_{n+n'}$ が $[0, +\infty) - \mathbb{Z} - [0, \sigma) - \mathbb{E}_1$ に属す最初の有理数である時，$r_{n+n'}$ を含む excursion 区間を $\mathbb{E}_2$ とする．以下この操作をつづける．

なお，path の右連続性から，a.s. に次のことが成り立つ：

(3.16) $x_t \in D$ なら，$0 \leq t < \sigma$ であるから，t はある excursion 区間に属すか，ある excursion 区間の左端であるかである．

命題 3.11. a.s. に次のことが成り立つ．すべての excursion 区間 $\mathbb{E}_j$ は ${}^{\exists}s > 0$ によって $\mathbb{E}_j = (\tau(s-), \tau(s))$ とかける．逆に，$s > 0$，$\tau(s-) < \tau(s)$ ならば $(\tau(s-), \tau(s))$ はある excursion 区間と一致する．

証明. $\mathbb{E}_j = (\tau_j, \tau_j')$ とする．$\tau_j' = \infty$ としよう．$\infty = \tau(\Phi(\infty))$，$\Phi(\infty) > 0$ で，命題 3.7 (vii) により $\tau(\Phi(\infty)-) \leq \tau_j$ であるから，命題 3.7 (x) と命題 3.10 (ii) により $\tau(\Phi(\infty)-) = \tau_j$ である．故に，$\mathbb{E}_j = (\tau(\Phi(\infty)-), \tau(\Phi(\infty)))$ となる．次に，$\tau_j' < \infty$ としよう．$\tau_j' \in \mathbb{Z}$ だから命題 3.9 により $0 < {}^{\exists}s < \Phi(\infty)$，$\tau_j' = \tau(s)$ または $0 < {}^{\exists}s \leq \Phi(\infty)$，$\tau_j' = \tau(s-)$ であるが，$\tau_j' = \tau(s-)$ は不合理だから $\tau_j' = \tau(s)$ の方である．命題 3.7 (viii) により $\tau(s-) \leq \tau_j$ であるから命題 3.7 (ix) と補題 3.4 により $\tau(s-) = \tau_j$ である．

逆に，$s > 0$，$\tau(s-) < \tau(s)$ ならば $s \leq \Phi(\infty)$ であり，$x_{\tau(s-)-} \in \partial D$ となる．また，$x_{\tau(s)} \in \partial D$ または $\tau(s) = \infty$ となる．命題 3.7 (ix)，(x) と命題 3.10 (ii) によって，$(\tau(s-), \tau(s))$ は excursion 区間である．

q.e.d.

さて，$\mathbb{J} = \{t : 0 < t < \infty, x_{t-} \neq x_t\}$ とおき，$t \in \mathbb{J}$ を飛躍時点と呼ぶことにする．

定理 3.2. a.s. に次の命題が成り立つ．$t \in \mathbb{J}$ すなわち

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

t を飛躍時点とすると

(i) $x_{t-} \in \partial D$, $x_t \in D \cup \{\Delta_S\}$

$\Longleftrightarrow$ t はある excursion 区間の左端

(ii) $x_{t-} \in D$, $x_t \in \partial D$

$\Longleftrightarrow$ $t = \sigma$ または t はある excursion の右端

(iii) $x_{t-} \in \partial D$, $x_t \in \partial D$

$\Longleftrightarrow$ $t \in \mathbb{Z}$, $t \neq \sigma$ かつ t は excursion 区間の端点ではない。

(iv) $x_{t-} \in D$, $x_t \in D \cup \{\Delta_S\}$

$\Longleftrightarrow$ $t \notin \mathbb{Z}$.

証明. (i) $x_{t-} \in \partial D$, $x_t \in D \cup \{\Delta_S\}$ としよう。$\exists t_1 > t$ が存在して $t < \forall t' < t_1$ で $t' \notin \mathbb{Z}$ となる。一方、補題3.4により $t > \sigma$ だから (t, t_1) はある $\mathbb{E}_j$ に含まれる。$t \notin \mathbb{E}_j$ だから t は $\mathbb{E}_j$ の左端である。逆を示すために、t がある excursion 区間 $\mathbb{E}_j$ の左端であるとしよう。命題3.11によって $\mathbb{E}_j = (\tau(S-), \tau(S))$ だから $t = \tau(S-)$ である。$S \leq \Phi(\infty)$ だから命題3.7 (V), (VII) と ∂D の compact 性によって $x_{t-} \in \partial D$ となる。あとは、$x_t \notin \partial D$ をいえばよい。D_i を(3.7)をみたす開集合列とし、$\rho = \rho(i, w) = \frac{1}{i} \wedge \sigma_{D_i} \wedge \inf\{t' \leq \zeta : dis(x_{t'}, x_0) > \frac{1}{i}\}$ とおき、$\sigma_1 = \sigma$, $\rho_n = \sigma_n + \rho(w^+_{\sigma_n})$, $\sigma_{n+1} = \rho_n + \sigma(w^+_{\rho_n})$ とおく。$\{\sigma_n < \infty\}$ の上で $\sigma_n < \rho_n$ a.s. かつ $\sigma(w^+_{\sigma_n}) = 0$ a.s. である。また $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} \rho_n = \infty$ a.s. であり、$\{x_{\rho_n} \in \partial D\}$ の上で $\rho_n = \sigma_{n+1}$ a.s. である。これらと命題3.7の諸命題が成り立つ w だけ考える。$S > 0$ だから ある $n = n(i)$ が存在して、$\sigma_n < \tau(S) \leq \sigma_{n+1}$ となる。σ_{n+1} の定義により $t = \tau(S-) \leq \rho_n$ である。命題3.7 (ix), (x) により $\sigma_n \leq \tau(S-) = t$ であるが、更に、σ_n は $\mathbb{Z}_+$ の時点の右からの集積点であるから、$\sigma_n \leq \tau(S-) = t$ である。従って ρ_n の定義により $dis(x_{\sigma_n}, x_{t-})$, $dis(x_{\sigma_n}, x_{\rho_n-})$ は共に $1/i$ を越えず、故に $dis(x_{t-}, x_{\rho_n-}) \leq 2/i$ である。故に $\lim_{i\to\infty} x_{\rho_{n(i)}(i)} = x_{t-}$ である。さて、$x_t \in \partial D$ とすると $t = \tau(S-) < \rho_n$ となり ($t = \rho_n$ なら $x_{\rho_n} \in \partial D$ 従って $\rho_n = \sigma_{n+1}$ となって $\tau(S-) < \tau(S)$ に矛盾)、故に $0 < \rho_n - t < 1/i$ となるから、$\lim_{i\to\infty} x_{\rho_{n(i)}(i)-} = x_t$ となる。故に $x_{t-} = x_t$ となり、これは $t \in \mathbb{J}$ に矛盾する。$x_t \in D \cup \{\Delta_S\}$ がいえた。

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

(iii) の ($\Longrightarrow$) の証明．　$x_{t-} \in \partial D$, $x_t \in \partial D$ とする．$t \in \mathbb{Z}$ は明か．t が excursion 区間の左端でないことは (i) によっていえている．μ, μ_i を 補題 3.4 の証明の中で定義したものとする．$\{\mu < \infty\}$ の上では $\lim_{i\to\infty} x_{\mu_i} = x_\mu \in \partial D \cup \{\Delta_S\}$ である．$\{0 < \sigma < \infty,\ x_{\sigma-} \in \partial D\}$ の上では $\mu_i < \sigma$, $\mu = \sigma$ a.s.　従って $x_\sigma = x_{\sigma-}$ a.s. である．このことから補題 3.4 の証明と同様にして，a.s. に次のことが成り立つ：$\tau(s-) < \tau(s) < \infty$, $x_{\tau(s)-} \in \partial D$ なら $x_{\tau(s)-} = x_{\tau(s)}$ である．以上と命題 3.11 によって $t = \sigma$ であり，t は excursion 区間の右端でもない．

(ii)　$x_{t-} \in D$, $x_t \in \partial D$, $t > \sigma$ ならば，$0 < \exists t_1 < t$ が存在して (t_1, t) はある excursion 区間 $\mathbb{E}_j$ に属する．$t \notin \mathbb{E}_j$ だから t は $\mathbb{E}_j$ の右端である．故に ($\Longrightarrow$) がいえた．逆をいうため，$t = \sigma$ または t はある $\mathbb{E}_j$ の右端であるとしよう．命題 3.11 に注意すれば，$\exists s \geqq 0$, $t = \tau(s) < \infty$ だから，$x_t \in \partial D$ である．従って，(iii) の ($\Longrightarrow$) と下の注意を用いれば，$x_{t-} \in D$ がいえる．

(iii) の ($\Longleftarrow$) の証明．　$t \in \mathbb{Z}$ から，$x_{t-} \in \partial D$ または $x_t \in \partial D$ である．$x_{t-} \in \partial D$ の場合，(i) により $x_t \in \partial D$ にもなる．$x_t \in \partial D$ の場合 (ii) により $x_{t-} \notin D$ であるから，下の注意により $x_{t-} \in \partial D$ になる．

(iv) は，(i), (ii), (iii) と下の注意の帰結である．　q.e.d.

<u>注意</u>．　任意の t' $(0 < t' < \infty)$ に対し $\{x_{t'-} = \Delta_S\}$ の上では $x_{t'} = \Delta_S$ a.s. である．なぜなら，S が compact なら Δ_S は孤立点だから $x_{t'-} = \Delta_S$ から $t' > \zeta$ が出るし，S が compact でないなら補題 3.4 の証明と同じく (A3) を用いた議論をすればよい．

最後に次のことを示しておこう．

$\boxed{\text{定理 3.3}}$　$\Phi = \widetilde{A}_\alpha$ を広義の境界上の local time で $A \geqq cT$ (c は定数 > 0, T は (3.4) で定義) とすると，a.s. に次のことが成り立つ．

$\mathbb{Z}$ が 有界集合 $\Longleftrightarrow$ $\Phi(\infty) < \infty$

証明. 命題 3.7 (X) により, $\sup\{t \geqq 0 : x_t \in \partial D\} = \inf\{t \geqq 0 : \Phi(t) = \Phi(\infty)\}$ であるから, ($\Longrightarrow$) は ($A \geqq cT$ という条件がなくても) 明かである. ($\Longleftarrow$) をいうため, $W' = \{w : \mathbb{Z}$ が有界でない$\}$ とおく. β を $\beta > 1$ かつ $\beta \geqq \alpha$ とする. 命題 3.1, 3.5 により $\Phi \geqq c\tilde{T}_\alpha \geqq c\tilde{T}_\beta$ であるから, W' の上で a.s. に $\tilde{T}_\beta(\infty) = \infty$ となることをいえばよい. Markov 時間の列 ρ_n を $\rho_1 = 1 + \sigma(w_1^+)$, $\rho_n = \rho_{n-1} + \rho_1(w^+_{\rho_{n-1}})$, $n \geqq 2$ と定義する. 命題 3.10 (ii) により, 確率 0 を除き $W' = \{w ; \mathbb{Z}_+$ が有界でない$\}$ であるから, 確率 0 を除き $W' = \{$すべての n に対し $\rho_n < \infty\}$ である. (従って W' は予可測.) 故に, $X = \int_0^{\rho_1} e^{-\beta t} d\tilde{T}_\beta$ とおいて

$$(3.17) \qquad \sup_{\xi \in \partial D} E_\xi(e^{-X} : \zeta > \rho_1) < 1$$

といえば, (3.17) の左辺を a とおくとき

$$E_x(e^{-\tilde{T}_\beta(\rho_n)} : \zeta > \rho_n) = E_x(e^{-\tilde{T}_\beta(\rho_{n-1})} E_{x_{\rho_{n-1}}}(e^{-\tilde{T}_\beta(\rho_1)} : \zeta > \rho_1) : \zeta > \rho_{n-1})$$
$$\leqq a E_x(e^{-\tilde{T}_\beta(\rho_{n-1})} : \zeta > \rho_{n-1})$$

となり, これをくりかえして

$$E_x(e^{-\tilde{T}_\beta(\rho_n)} : \zeta > \rho_n) \leqq a^n$$

となるから, $n \to \infty$ として $E_x(e^{-\tilde{T}_\beta(\infty)} : W') = 0$ を得て証明を終る. (3.17) を示そう.

$$X^2 = 2\int_0^{\rho_1} e^{-\beta t} d\tilde{T}_\beta(t) \int_t^{\rho_1} e^{-\beta s} d\tilde{T}_\beta(s) \leqq 2\int_0^{\rho_1} e^{-\beta t} d\tilde{T}_\beta(t) \int_t^{\infty} e^{-\beta s} d\tilde{T}_\beta(s)$$

であるから

$$E_\xi(X^2) \leqq 2 E_\xi\left(\int_0^{\rho_1} e^{-2\beta t} H^\sigma_\beta u(x_t)\, d\tilde{T}_\beta(t)\right)$$

ただし $u = E_\xi\left(\int_0^{\zeta} e^{-\beta t} dt\right)$ である. $H^\sigma_\beta u \leqq u \leqq \frac{1}{\beta}$ であるから,

$E_\xi(X^2) \leqq \frac{2}{\beta} E_\xi(X)$ である. また補題 3.2 により

$$E_\xi(X) = E_\xi\left(\int_0^{\rho_1} e^{-\beta t} dT\right) \geqq E_\xi\left(\int_0^{1} e^{-\beta t} dt : \zeta > \rho_1\right) = \frac{1-e^{-\beta}}{\beta} P_\xi(\zeta > \rho_1)$$

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

である．故に，$P_\xi(\zeta>\rho_1)\geqq\frac{1}{2}$ なる $\xi\in\partial D$ に対しては

$$E_\xi(e^{-X}:\zeta>\rho_1)\leqq E_\xi(e^{-X})\leqq 1-E_\xi(X)+\frac{1}{2}E_\xi(X^2)$$
$$\leqq 1-(1-\frac{1}{\beta})E_\xi(X)\leqq 1-(1-\frac{1}{\beta})\frac{1-e^{-\beta}}{2\beta}$$

が成り立つ．一方，$P_\xi(\zeta>\rho_1)<\frac{1}{2}$ なる $\xi\in\partial D$ に対しては $E_\xi(e^{-X}:\zeta>\rho_1)<\frac{1}{2}$ であるから，(3.17) がいえた． q.e.d.

§4. 拡散過程（広義）の分解

§7の終りまでずっと，S は第2可算公理をみたす compact な Hausdorff 空间，D は S 内の開集合でその閉包が S と一致するものである．D における拡散過程 $\mathbb{M}^{min}=(W^{min},P_x^{min}:x\in D)$ で，D 上の Markov 過程として条件 (A)，(L) をみたし更に次の条件をみたすものが与えられたとする．

(Min. 1) $0<\zeta(w)<\infty$ なる $\forall w\in W^{min}$ に対し $\lim_{t\uparrow\zeta}x_t(w)$ が S において存在する．（$D^*=D\cup\{\Delta_D\}$ において存在することは，D 上の Markov 過程として条件 (A) をみたすことによって仮定されているから，(Min. 1) は 極限が D^* の位相で Δ_D になった時 S の位相でも極限が ∂D 上に存在することを要請しているのである．

以下，$x_{\zeta-}$ は S における極限値を表わす．$\mathbb{M}^{min}$ の α 次 Green 核 $(\alpha>0)$ を G_α^{min} とかき，また ∂D への α 次の到達測度 $(\alpha\geqq 0)$ H_α を

$$H_\alpha(x,E)=E_x^{min}(e^{-\alpha\zeta}:\zeta<\infty,\ x_{\zeta-}\in E),\qquad x\in D,\ E\in\mathcal{B}(\partial D)$$

で定義する．H_0 を H ともかく．以後，$G_\alpha^{min}(x,\partial D)=0$ $(x\in D)$，$G_\alpha^{min}(\xi,S)=0$ $(\xi\in\partial D)$ とおいて G_α^{min} は S から S への核と考える．また，$H_\alpha(\xi,E)=\delta(\xi,E)$ $(\xi\in\partial D)$ とおいて H_α は S から ∂D への核と考える．

(Min. 2) $\forall f\in C(S)$ と $\forall\alpha>0$ に対し $G_\alpha^{min}f(x)$ は S 上連続

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

(Min. 3)　$\forall f \in C(\partial D)$ と $\forall \alpha \geqq 0$ に対し $H_\alpha f(x)$ は S 上連続

(Min. 4)　$\inf_{x \in S} a(x) > 0$ なる $a \in B^+(S)$ と定数 $\gamma > 0$ が存在して，$b = G_\gamma^{min} a$ とおくとき $b \in C(S)$（D 上では $b > 0$ となる）で，$\forall f \in C(S)$，$\forall \alpha > 0$ に対して $G_\alpha^{min} f(x)/b(x)$ が S 上の連続函数に拡張される．

$G_\alpha^{min} f(x)/b(x)$ の拡張の境界値を $J_\alpha f(\xi)$ とかく．J_α は ∂D から S への核と考えることができる．

(Min.5)　$f \in C(S)$ によって

$$u(x) = \begin{cases} G_\alpha^{min} f(x)/b(x), & x \in D \\ J_\alpha f(x), & x \in \partial D \end{cases}$$

の形にかける函数が $C(S)$ において稠密．

以下，§7の終りまで，以上のような性質をもつ $\mathbb{M}^{min}$ を1つ固定して考える．a．b．γ とかく時は（Min.4）の a．b．γ をさすものとする．G_α^{min} に対する resolvent 等式

(4.1)　$$G_\alpha^{min} - G_\beta^{min} + (\alpha - \beta) G_\alpha^{min} G_\beta^{min} = 0$$

と（Min.2）により，（Min.4）はある $\alpha > 0$ に対して成り立てばすべての $\alpha > 0$ に対して成り立つ．(4.1) から

(4.2)　$$J_\alpha - J_\beta + (\alpha - \beta) J_\alpha G_\beta^{min} = 0$$

となる．(4.2) と（Min.2）により，（Min.5）も，ある $\alpha > 0$ に対して成り立てばすべての $\alpha > 0$ に対して成り立つ．H_α に対する次の式も重要である．

(4.3)　$$H_\alpha - H_\beta + (\alpha - \beta) G_\alpha^{min} H_\beta = 0.$$

(4.3) の証明は (3.2) と全く同様．

条件 (A)，(L) をみたす S の上の Markov 過程 $\mathbb{M} = (W, P_x : x \in S)$ が（M.1）および次の2つの条件（M.2），(M.3) をみたす時，$\mathbb{M}$ は内部で $\mathbb{M}^{min}$ と一致する広義の拡散過程，あるいは $\mathbb{M}^{min}$ を minimal な部分とする広義の拡散過程であるという．

(M.2)　$\forall w \in W$，$0 < \forall t < \infty$ に対し

$$x_{t-}(w) \neq x_t(w), \quad x_t(w) \neq \Delta_S \implies x_{t-}(w) \in \partial D$$

が成り立つ．（すなわち，内部からは飛躍しない．）

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

次の条件を述べるために，path $w \in W$ に対して path $\pi(w) = w'$ を，$t < \sigma(w)$ の時 $x_t(w') = x_t(w)$，$t \geq \sigma(w)$ の時 $x_t(w') = \Delta_D$ となる path として定義する．$\forall w \in W$ に対し $\pi(w) \in W^{min}$ となれば，定理 1.3 により π は $(W, \mathcal{F})$ から $(W^{min}, \mathcal{B}(W^{min}))$ への可測写像となる．

(M.3) $\forall w \in W$ に対し $\pi(w) \in W^{min}$ となり，

$$P_x(\pi^{-1}(B)) = P_x^{min}(B) \qquad B \in \mathcal{B}(W^{min}),\ x \in D$$

が成り立つ．

境界から境界または D 内への飛躍は許しているため，§1 に定義した拡散過程とはいえないので，広義の拡散過程といったのである．

(M.1), (M.3) から，$\forall f \in B(S)$, $\forall x \in S$, $\forall \alpha > 0$ に対し

$$E_x\left(\int_0^{\sigma} e^{-\alpha t} f(x_t)\,dt\right) = G_\alpha^{min} f(x) \tag{4.4}$$

となる．path の右連続性に注意すれば，逆に，任意の f, α に対し $x \in D$ で (4.4) が成り立てば (M.3) がいえる．また，任意の f, α に対し $x \in \partial D$ で (4.4) が成り立てば (M.1) がいえる．

<u>注意</u>　$\mathbb{M}^{min}$ は拡散過程であるから，(M.3) があれば $\mathbb{M}$ に同値なものとして σ までは連続な path をもつものがとれる．しかし，(M.3) だけでは内部から境界への飛躍があり得るから，(M.2) が (M.3) からは出て来ない．

S 上の Markov 過程 $\mathbb{M}$ が $\int_0^\infty \chi_{\partial D}(x_t)\,dt = 0$ a.s. をみたすとき，<u>境界上に滞留しない</u> という．

条件 (A), (L), (M.1) をみたす S 上の Markov 過程 $\mathbb{M}$ に対し，境界上の local time を次のように定義する．

<u>定義</u>　f を $B^+(S)$ に属しかつ $\inf_{x \in S} f(x) > 0$ なる函数，T を (3.4) で定義した加法的汎函数すなわち $T = T(t, w) = t \wedge \sigma(w)$，$\alpha$ を正の数とする．$f\,T$ に対して ∂D への α 次掃散を施して得られる非負加法的汎函数 Φ を，($\mathbb{M}$ に対する) <u>函数 f から定まる境界上の α 次 local time</u>，または，<u>境界上の (f, α)-local time</u> と

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

いう．Φとしてはいつも(a.4')をみたすものとをとることにする（命題1.3により可能）．

すなわち，$\Phi=(\widehat{fT})_\alpha$である．命題3.6により，$\Phi$はクラス$C^{0+}$に属する．$\Phi$を境界上の$(f,\alpha)$-local time，$\Phi'$を$(f',\alpha')$-local timeとすると，正の定数$c_1, c_2$が存在して$c_1\Phi \ll \Phi' \ll c_2\Phi$となる．（なぜなら，$(\inf f)\tilde{T}_\alpha \ll \Phi \ll \|f\|\tilde{T}_\alpha$であり，また命題3.5から$\tilde{T}_{\alpha\vee\alpha'} \ll \tilde{T}_{\alpha\wedge\alpha'} \ll \frac{\alpha\vee\alpha'}{\alpha\wedge\alpha'}\tilde{T}_{\alpha\vee\alpha'}$であるから，）
また$E_x(\sigma\wedge\zeta)$が有界の時は$\Phi'=\lim_{\alpha\downarrow 0}(\widehat{fT})_\alpha$が定義されて同じ不等式をみたす．

境界上の(f,α)-local timeのα-potentialは$\leq\|f\|/\alpha$であるから，任意の$\beta>0$に対し(f,α)-local timeのβ-potentialは，有限であるのみならず有界である．

以下，$(\partial D)_0=\{\xi : J_\alpha\chi_{\partial D}(\xi)>0\}$とおく．(4.2)によりこれは$\alpha$によらない．まず，次の2つの定理を証明しよう．

$\boxed{\text{定理}4.1.}$ $\mathbb{M}$を内部で$\mathbb{M}^{min}$と一致する広義の拡散過程，Φをその境界上の(a,γ)-local time，νをΦの標準測度，K^αを

(4.5) $$K^\alpha(\xi,E)=E_\xi\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t}\chi_E(x_t)\,d\Phi\right),\quad \xi\in\partial D,\ E\in\mathcal{B}(\partial D)$$

で定義された∂Dから∂Dへの核とする．この時，$l, m\in B^+(\partial D)$および∂DからDへの核Nを

(4.6) $$la+m+N\mathbb{1}=1 \qquad \nu\text{-a.e.}$$

(4.7) $(\partial D)_0$の上でν-a.e.に$m=0$

をみたすものが存在して，$\mathbb{M}$のGreen作用素G_αは次のように分解される．

(4.8) $$G_\alpha f=G_\alpha^{min}f+H_\alpha K^\alpha(l+mJ_\alpha+NG_\alpha^{min})f,\qquad f\in B(S).$$

上のような$l(\xi)$, $m(\xi)$, $N(\xi,\cdot)$はν-測度0を除いて一意的に定まる．

$\boxed{\text{定理}4.2}$ 定理4.1によって定まるl, m, Nは次のような性質をもつ

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

(i) $\ell\,\Phi \approx \chi_{\partial D} T$ である. $\ell = 0$ ν-a.e. となる必要十分条件は $\mathbb{M}$ が境界上に滞留しないことである.

(ii) $\forall f \in B(\partial D)$, $\forall x \in S$ に対し

(4.9) $E_x\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t} f(x_t) m(x_t)\, d\Phi\right) = E_x\left(\sum_j \chi_{\{\tau_j \notin \mathbb{J}\}} e^{-\alpha \tau_j} f(x_{\tau_j'}) \int_{\tau_j'}^{\tau_j} e^{-\gamma(t-\tau_j)} a(x_t)dt\right)$

である. ただし, §3で定義したように τ_j, τ_j' は excursion の時間区間 E_j の左端, 右端, $\mathbb{J}$ は飛躍時点である. $m = 0$ ν-a.e. になる必要十分条件は a.s. に次の命題が成立することである.

(4.10) $\forall j$ に対し $x_{\tau_j'} \in D$

すなわち, 境界から内部にはいる時は必ず飛躍ではいるということである

(iii) (Q, L) を $\mathbb{M}$ の Lévy 系とし, Q_D を $Q_D(x, E) = Q(x, E)$, $E \in \mathcal{B}(D)$ なる S から D への核とすると, $(N, \Phi) \approx (\chi_{\partial D} Q_D, C)$ である. $N = 0$ νa.e. となる. 必要十分条件は a.s. に境界から内部への飛躍がないことである.

<u>補題 4.1.</u> $\mathbb{M}$ を内部で $\mathbb{M}^{min}$ と一致する広義の拡散過程とすると,

$$E_x(e^{-\alpha\sigma} : x_\sigma \in E) = H_\alpha(x, E), \qquad x \in S,\ E \in \mathcal{B}(\partial D)$$

である.

<u>証明</u> $x \in \partial D$ では (M.1) により明か. D_i を (3.7) をみたす開集合列とし, $S - D_i$ への到達時間を σ_i, $\lim_{i\to\infty} \sigma_i = \sigma'$ とおくと $\sigma' \leq \sigma$ である. (A3) により $\{\sigma' < \infty\}$ の上で a.s. に $\lim_{i\to\infty} x_{\sigma_i} = x_{\sigma'}$ であるから, $\{\sigma' < \infty\}$ の上で a.s. に $x_{\sigma'} \in \partial D$, 従って $\sigma = \sigma'$ a.s. である. 一方, $\{\sigma < \infty\}$ の上では $x_\sigma \in \partial D$ だから, (M2) により $\{0 < \sigma < \infty\}$ の上では $x_{\sigma-} \in \partial D$ である. 故に $\{0 < \sigma < \infty\}$ の上では $\sigma_i < \sigma$ である. 従って $\{0 < \sigma < \infty\}$ の上で a.s. に $x_\sigma = \lim_{i\to\infty} x_{\sigma_i} = x_{\sigma-}$ である. これを用いると, $\forall f \in B(\partial D)$ と $\forall x \in D$ に対し

$$E_x(e^{-\alpha\sigma} f(x_\sigma)) = E_x(e^{-\alpha\sigma} f(x_{\sigma-}) : 0 < \sigma < \infty) = E_x(e^{-\alpha\sigma'} f(x_{\sigma'-}) : 0 < \sigma' < \infty)$$

(＝＊ とおく)

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

である、(M3) を述べる際に定義した写像 $\pi: W \to W^{min}$ を用いると $\{\sigma > 0\}$ の上では $\sigma_i(w) = \sigma_i(\pi(w)) < \sigma(w)$ 従って $\sigma'(w) = \sigma'(\pi(w))$ であるから

$$* = E_x(e^{-\alpha\sigma'(\pi(w))} f(x_{\sigma'(\pi(w))-}(\pi(w))) : 0 < \sigma'(\pi(w)) < \infty)$$

故に (M3) により

$$= E_x^{min}(e^{-\alpha\sigma'} f(x_{\sigma'-}) : 0 < \sigma' < \infty)$$

W^{min} では $\{0 < \sigma' < \infty\}$ の上で $\sigma' = \zeta$ であり、$\{0 < \zeta < \infty,\ x_{\zeta-} \in \partial D\}$ の上でも $\sigma' = \zeta$ であるから

$$= E_x^{min}(e^{-\alpha\zeta} f(x_{\zeta-}) : 0 < \zeta < \infty,\ x_{\zeta-} \in \partial D) = H_\alpha f(x). \qquad q.e.d.$$

<u>定理 4.1 の証明</u>. D_i を (3.7) をみたすようにとり，$\rho(i)$ を (3.8)、(3.9) をみたす Markov 時間とする．まず，a.s. に次のことが成り立つことを注意しておく．

(4.11) $\quad \forall \mathbb{E}_j$ に対し $\exists i_0$ があって，$\forall i \geq i_0$ に対し $\exists n \geq 1$, $\rho_n(i) \in \mathbb{E}_j^*$.

ただし $\mathbb{E}_j^*$ は $\mathbb{E}_j$ に左端を加へたものである：$\mathbb{E}_j^* = [\tau_j, \tau_j')$. なぜなら，$\frac{1}{i} < \tau_j' - \tau_j$ なる i に対しては，$\sigma_n(i) < \tau_j$ なる $\sigma_n(i)$ のうち最大のものを $\sigma_{n_0}(i)$ とすると $\rho_{n_0}(i) \in \mathbb{E}_j^*$ になるからである．

M の Lévy 系を (Q, L) とし，Q_D を $Q_D(x, E) = (x, E)$, $E \in \mathcal{B}(D)$ なる S から D への核とする．

任意の $f, g \in \mathcal{B}^+(S)$, $x \in S$, $\alpha > 0$ に対し

$$(4.12) \quad \lim_{i\to\infty} E_x\Big(\sum_{n=1}^\infty e^{-\alpha\rho_n(i)} \chi_{\partial D} f(x_{\rho_n(i)-}) \chi_D g(x_{\rho_n(i)})\Big) = E_x\Big(\int_0^\infty e^{-\alpha t} \chi_{\partial D} f Q_D g\, dL\Big)$$

を証明する．(3.16) により $x_{\rho_n(i)-} \in \partial D$, $x_{\rho_n(i)} \in D$ ならば ρ_n はある $\mathbb{E}_j$ の左端であるから

$$E_x\Big(\sum_{n=1}^\infty e^{-\alpha\rho_n(i)} \chi_{\partial D} f(x_{\rho_n(i)-}) \chi_D g(x_{\rho_n(i)})\Big)$$

$$= E_x\Big(\sum_j \chi_{\{\exists n \geq 1 : \tau_j = \rho_n(i)\}} e^{-\alpha\tau_j} \chi_{\partial D} f(x_{\rho_n(i)-}) \chi_D g(x_{\rho_n(i)})\Big)$$

(= * とおく)

である．$i \to \infty$ とすると

$$\lim_{i\to\infty} * = E_x\Big(\sum_j e^{-\alpha\tau_j} \chi_{\partial D} f(x_{\tau_j-}) \chi_D g(x_{\tau_j})\Big) \qquad (= ** \text{ とおく})$$

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

となる．なぜなら，$\varlimsup_{i\to\infty} * \leq **$ は明かであり，また (4.11) と $\rho(i) \leq \sigma_{D_i}$ によって

$$\lim_{i\to\infty} \chi_{\{\exists n \geq 1 : \tau_j = \rho_n(i)\}} \chi_D(x_{\tau_j}) = \chi_D(x_{\tau_j})$$

であるために Fatou の補題により $** \leq \varliminf_{i\to\infty} *$ となるのである．定理 3.2 により

$$(4.13) \qquad ** = E_x\left(\sum_{t>0} e^{-\alpha t} \chi_{\partial D} f(x_{t-}) \chi_D g(x_t)\right)$$

であるから，Lévy 系の定義により (4.12) がいえた．

次に，任意の $f, g \in C^+(S)$，$x \in S$，$\alpha > 0$ に対し

$$(4.14) \qquad \lim_{i\to\infty} E_x\left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha \rho_n(i)} \chi_D f(x_{\rho_n(i)-}) g b(x_{\rho_n(i)})\right)$$

$$= E_x\left(\sum_j \chi_{\{\tau_j \notin \mathbb{J}\}} e^{-\alpha\tau_j} f g(x_{\tau_j}) \int_{\tau_j}^{\tau_j'} e^{-\gamma(t-\tau_j)} a(x_t)\, dt\right)$$

を証明する． $\rho_n(i)$ は Markov 時間だから

$$E_x\left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha\rho_n(i)} \chi_D f(x_{\rho_n(i)-}) g b(x_{\rho_n(i)})\right)$$

$$= E_x\left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha\rho_n(i)} \chi_D f(x_{\rho_n(i)-}) g(x_{\rho_n(i)}) \int_{\rho_n(i)}^{\sigma_{n+1}(i)} e^{-\gamma(t-\rho_n(i))} a(x_t)\, dt\right)$$

$\mathbb{E}_j$ は $\rho_n(i)$ $(n=1,2,\cdots)$ を高々 1 つしか含まない． $\rho_n(i) \in \mathbb{E}_j$ である時 $\rho_n(i) = \rho_j'(i)$ とかく． $x_{\rho_j'(i)-} \in D \cup \{\Delta_S\}$ である．

$$= E_x\left(\sum_j \chi_{\{\exists n \geq 1, \rho_n(i) \in \mathbb{E}_j\}} e^{-\alpha\rho_j'(i)} f(x_{\rho_j'(i)-}) g(x_{\rho_j'(i)}) \int_{\rho_j'(i)}^{\tau_j'} e^{-\gamma(t-\rho_j'(i))} a(x_t)\, dt\right)$$

（＝＊とおく）

$\rho(i) \leq \frac{1}{i}$ だから $\lim_{i\to\infty} \rho_j'(i) = \tau_j$ である．また a.s. に「$x_{\rho_n(i)} \in \partial D \Longrightarrow \rho_n(i) = \sigma_{nH}(i)$」なることと (4.11) により

$$(4.15) \qquad \lim_{i\to\infty} \chi_{\{\exists n \geq 1, \rho_n(i) \in \mathbb{E}_j\}} = \chi_{\{\tau_j \notin \mathbb{J}\}}$$

である．

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

$$e^{-\alpha\rho_j'(i)}\int_{\rho_j'(i)}^{\tau_j'} e^{-\gamma(t-\rho_j'(i))} a\,dt \leq \int_{\rho_j'(i)}^{\tau_j'} e^{-(\alpha\wedge\gamma)t} a\,dt \leq \int_{\tau_j}^{\tau_j'} e^{-(\alpha\wedge\gamma)t} a\,dt$$

かつ

$$\sum_j \int_{\tau_j}^{\tau_j'} e^{-(\alpha\wedge\gamma)t} a\,dt \leq \frac{1}{\alpha\wedge\gamma}\|a\|$$

であるから Lebesgue の定理により極限と積分の交換が可能で

$$\lim_{i\to\infty} * = E_x\Big(\sum_j \chi_{\{\tau_j\notin J\}} e^{-\alpha\tau_j} f g(x_{\tau_j})\int_{\tau_j}^{\tau_j'} e^{-\gamma(t-\tau_j)} a(x_t)\,dt\Big)$$

となり (4.14) がいえた.

$\Phi = (\widehat{aT})_\gamma$, $\Phi_0 = (\widehat{\chi_D aT})_\gamma$, $\Phi_1 = \chi_{\partial D} a T$ とし, いずれも(a.4') をみたすようにとっておく. $\Phi = \Phi_0 + \Phi_1$ である. 任意の $f \in B(S)$, $\alpha > 0$, $x \in S$ に対し

$$E_x\Big(\int_0^\infty e^{-\alpha t} f(x_t)\,d\Phi_0\Big)$$

(4.16)
$$= E_x\Big(\sum_j \chi_{\{\tau_j\notin J\}} e^{-\alpha\tau_j} f(x_{\tau_j})\int_{\tau_j}^{\tau_j'} e^{-\gamma(t-\tau_j)} a(x_t)\,dt\Big) + E_x\Big(\int_0^\infty e^{-\alpha t}\chi_{\partial D} f(x_t) Q_D b\,dL\Big)$$

である. なぜなら, $f \in C^+(S)$ とし $\rho(i) = \frac{1}{i}\wedge\sigma_{D_i}\wedge\inf\{t : |f(x_t) - f(x_0)| > \frac{1}{i}\}$ にとると近似定理 (定理 3.1) により

$$E_x\Big(\int_0^\infty e^{-\alpha t} f(x_t)\,d\Phi_0\Big) = \lim_{i\to\infty} E_x\Big(\sum_{n=1}^\infty e^{-\alpha\rho_n(i)} f(x_{\rho_n(i)})\, b(x_{\rho_n(i)})\Big)$$

であるから (4.12), (4.14) により (4.16) がいえる. $f \in C^+(S)$ に対していえたから $f \in B(S)$ にまでいえる.

$\Phi_3 = (\chi_{\partial D} Q_D b) L$ とおくと命題 1.5 により $\Phi_0 \geq \Phi_3$ である. $\Phi_0 - \Phi_3 = \Phi_2$ とおくと Φ_2 も非負連続加法的汎函数で, $\forall f \in B(S)$ に対し

(4.17)
$$E_x\Big(\int_0^\infty e^{-\alpha t} f(x_t)\,d\Phi_2\Big) = E_x\Big(\sum_j \chi_{\{\tau_j\notin J\}} e^{-\alpha\tau_j} f(x_{\tau_j})\int_{\tau_j}^{\tau_j'} e^{-\gamma(t-\tau_j)} a\,dt\Big)$$

である.

$f \in C^+(S)$ とする. 補題 4.1 により

$$G_\alpha f(x) - G_\alpha^{\min} f(x) = H_\alpha G_\alpha f(x), \qquad x \in S$$

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

であり，また

$$G_\alpha f(\xi)=E_\xi\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t}\frac{f}{\alpha}d\Phi_1\right)+E_\xi\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t}d(\widetilde{\chi_D fT})_\alpha\right),\qquad \xi\in\partial D$$

であるが，近似定理により

$$E_\xi\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t}d(\widetilde{\chi_D fT})_\alpha\right)=\lim_{i\to\infty}E_\xi\left(\sum_{n=1}^\infty e^{-\alpha\rho_n(i)}G_\alpha^{min}f(x_{\rho_n(i)})\right)$$

$$=\lim_{i\to\infty}E_\xi\left(\sum_{n=1}^\infty e^{-\alpha\rho_n(i)}\chi_D(x_{\rho_n(i)-})\frac{G_\alpha^{min}f}{b}(x_{\rho_n(i)})b(x_{\rho_n(i)})\right)+\lim E_x\left(\sum_{n=1}^\infty e^{-\alpha\rho_n(i)}\chi_{\partial D}(x_{\rho_n(i)-})G_\alpha^{min}f(x_{\rho_n(i)})\right)$$

(Min.4) を用いると (4.12)；(4.14) により

$$=E_\xi\left(\sum_j\chi_{\{\tau_j\in J\}}e^{-\alpha\tau_j}J_\alpha f(x_{\tau_j})\int_{\tau_j}^{\tau_j'}e^{-\gamma(t-\tau_j)}a\,dt\right)+E_\xi\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t}\chi_{\partial D}Q_D G_\alpha^{min}f\,dL\right)$$

$$=E_\xi\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t}J_\alpha f(x_t)d\Phi_2\right)+E_\xi\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t}\frac{Q_D G_\alpha^{min}f}{Q_D b}d\Phi_3\right)$$

である．定理 1.7 により $l, m, n\in B^+(S)$ が存在して $\Phi_1=l_0\Phi_0$，$\Phi_2=m\Phi_0$，$\Phi_3=n\Phi_0$ であるが，$l=\frac{l_0}{a}$，$N\frac{n}{b}Q_D$ ($Q_Db(\xi)=0$ なる ξ では $Q_D(\xi,\cdot)$ であるから，$N(\xi,\cdot)=0$ とおく) とおけば，(4.8) が成り立つ．

(4.6) を示そう．$\{\xi\in\partial D: Qb(\xi)=0\}$ の特性函数を h とおくと $n\Phi\approx\Phi_3=h\Phi_3\approx hn\Phi$．であるから $n=hn$，ν-a.e.，従って $\{\xi\in\partial D: Qb(\xi)=0\}$ の上では $n=0=Nb$，ν-a.e. である．一方 $\{\xi\in\partial D: Q_Db(\xi)>0\}$ の上では明かに $Nb=n\frac{Q_Db}{Q_Db}=n$ であるから，∂D の上で ν-a.e. に $n=Nb$ である．故に

$$l_a+m+Nb=l_0+m+n=1,\qquad \nu\text{-a.e.}$$

すなわち (4.6) がいえた．

(4.7) を示そう．(4.8) により $G_\alpha\chi_{\partial D}=H_\alpha K^\alpha(l+mJ_\alpha\chi_{\partial D})$ であるが，一方，$G_\alpha\chi_{\partial D}=E_x\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t}\chi_{\partial D}dt\right)=E_x\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t}\chi_{\partial D}l\,d\Phi\right)=H_\alpha K^\alpha l$ であるから，$K^\alpha(mJ_\alpha\chi_{\partial D})=0$ である．故に $mJ_\alpha\chi_{\partial D}=0$，$\nu$-a.e.

次に一意性の証明． l, m, N および l', m', N' が共に定理 4.1 の性質をもつとする．

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

$$K^\alpha(\ell + mJ_\alpha + NG_\alpha^{min})f = K^\alpha(\ell' + m'J_\alpha + N'G_\alpha^{min})f, \qquad f \in B(S)$$

である．$f = \chi_{\partial D}$ とおくと（4.7）により $K^\alpha \ell = K^\alpha \ell'$ であるから，$\ell 玉 \approx \ell' 玉$ 故に命題1.4により $\ell = \ell'$ ν-a.e. である．故に $K^\alpha(mJ_\alpha + NG_\alpha^{min}) = K^\alpha(m'J_\alpha + N'G_\alpha^{min})$ となるから，

$$f = \begin{cases} J_\alpha g & \text{on } \partial D, \\ \dfrac{G_\alpha^{min} g}{\mathscr{E}} & \text{on } D, \end{cases} \qquad g \in C(S)$$

なる形の f に対しては

(4.18) $\quad K^\alpha(mf + N(\mathscr{E} f)) = K^\alpha(m'f + N'(\mathscr{E} f))$

である．ここで（Min.5）をはじめて用いると，上の形の f は $C(S)$ で稠密だから（4.18）はすべての $f \in B(S)$ に対して成り立つ．$f = \chi_{\partial D}$ とおくと $K^\alpha m = K^\alpha m'$ を得るから $m = m'$ ν-a.e. である．従って $N = N'$, ν-a.e. にもなる．

<u>定理4.2の証明.</u> ℓ, m, N を定理4.1の条件をみたすものとする．定理4.1の証明の中で構成した ℓ, m, N をここでは ℓ', m', N' と書く．定理4.1の中の一意性により，$\ell = \ell'$, $m = m'$, $N = N'$, ν-a.e. である．

$\ell 玉 \approx \chi_{\partial D} T$ は $\ell' 玉 \approx \frac{1}{a} 玉_1 = \chi_{\partial D} T$ から明らか．従って命題1.4により (i) の後半もいえる．(ii) の (4.9) も (4.17) から明か．$m = 0$ ν-a.e. となる必要十分条件は $E_x(\int_0^\infty e^{-\gamma t} m\, d 玉) = 0$ すなわち $E_x(\sum_j \chi_{\{\tau_j \neq \sigma_j\}} \int_{\tau_j}^{\sigma_j} e^{-\gamma t} a\, dt) = 0$ であるから，定理3.2によって (ii) の後半がいえる．$\forall f \in B(D)$ に対し $(Nf)玉 \approx (N'f)玉 \approx n \dfrac{Q_D f}{Q_D \mathscr{E}} 玉 \approx \dfrac{Q_D f}{Q_D \mathscr{E}} 玉_3 \approx (\chi_{\partial D} Q_D f) L$ であるから，(iii) の前半が分る．この式と Lévy 系の定義から (iii) の後半も明かである．

q.e.d.

さて，$\mathbb{M}$ を内部で $\mathbb{M}^{min}$ と一致する拡散過程とし，玉をその境界上の (a, γ)-local time としよう．

<u>定義</u> 玉によって $\mathbb{M}$ に時間変更を施して得られる境界上

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

のMarkov過程 $\widetilde{\mathbb{M}}^{(0)}$ を，<u>$\mathbb{M}$ から導かれる0次の境界上のMarkov過程</u>，または（上野[1]によって最初に導入されたので）<u>$\mathbb{M}$ から導かれる0次U過程</u>という．

命題3.4の系と定理3.3により Φ は定理1.9の条件をみたすので，上のような時間変更により 条件(A),(L)をみたす ∂D 上のMarkov過程を得ることが可能である．以後 $\widetilde{\mathbb{M}}^{(0)}=(W^{(0)},\widetilde{P}_{\xi}^{(0)}:\xi\in\partial D)$ としてはこのような version をとることにする．$\widetilde{\mathbb{M}}^{(0)}$ を，(0)を略して $\widetilde{\mathbb{M}}=(\widetilde{W},\widetilde{P}_{\xi}:\xi\in\partial D)$ ともかく． その λ 次Green核を K_{λ}^{0} あるいは K_{λ} とかく．

次に，$\alpha>0$ に対し α 次U過程を定義しよう．$\mathbb{M}$ に対し乗法的汎函数 $e^{-\alpha t}$ によって消滅法を施して得られる S の上のMarkov過程を $\mathbb{M}^{(\alpha)}$ とする。定理1.11によって $\mathbb{M}^{(\alpha)}$ として条件(A),(L)をみたすものをとれる．(M.1)をみたすようにとれることも明か．以後 $\mathbb{M}^{(\alpha)}=(W^{(\alpha)},P_x^{(\alpha)}:x\in S)$ としては，(A),(L),(M1)をみたす version をとることにする．$\mathbb{M}^{(\alpha)}$ の加法的汎函数 $\Phi^{(\alpha)}$ を次のように定義する．Ω, x_t', P_x', π 等を，$\mathbb{M}$ とその乗法的汎函数 $e^{-\alpha t}$ から定理1.11のようにして作ったものとしよう．$\omega=(w,s)$ に対し $\zeta'(\omega)=\zeta(w)\wedge\frac{s}{\alpha}$ とおき，$\Phi'(t,\omega)$ を $t<\zeta'(\omega)$ では $\Phi'(t,\omega)=\Phi(t,w)$，$t\geq\zeta'(\omega)$ では $\Phi'(t,\omega)=\Phi(\zeta(w)\wedge\frac{s}{\alpha},w)=\Phi(\frac{s}{\alpha},w)$ とおく．$w\in W^{(\alpha)}$ とする．$w=\pi(\omega)$ なる $\omega\in\Omega$ があれば $\Phi^{(\alpha)}(t,w)=\Phi'(t,\omega)$ とおき，そのような ω がなければ $\Phi^{(\alpha)}(t,w)\equiv\infty$ とおく．このような定義が許されるためには，$w=\pi(\omega_1)=\pi(\omega_2)$ ならば $\Phi'(t,\omega_1)=\Phi'(t,\omega_2)$ であることを示しておかなくてはならないが，これは次のようにして分る．$\omega_1=(w_1,s_1)$，$\omega_2=(w_2,s_2)$ とすると $x_t'(\omega_1)=x_t'(\omega_2)$ であるから，$\zeta'(\omega_1)=\zeta(w_1)\wedge\frac{s_1}{\alpha}=\zeta'(\omega_2)=\zeta(w_2)\wedge\frac{s_2}{\alpha}$ で（$\zeta'(\omega_i)=\inf(t:x_t'(\omega_i)=\Delta_S)$ に注意），かつ $t<\zeta'(\omega_1)$ では $x_t(w_1)=x_t(w_2)$ である．従って，$\Phi(t,w)$ の $\mathcal{B}_t$ 可測性によって $t<\zeta'(\omega_1)$ では $\Phi(t,w_1)=\Phi(t,w_2)$ である．従って $t\leq\zeta'(\omega_1)$ で $\Phi(t,w_1)=\Phi(t,w_2)$ となり，$\forall t$ に対し $\Phi'(t,\omega_1)=\Phi'(t,\omega_2)$ がいえた．$\Phi^{(\alpha)}(t,w)$ は $\mathbb{M}^{(\alpha)}$ の非負連続加法的汎函数となりしかも定理

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

1.9 の条件をみたすことが容易に分る。

<u>定義</u> $\mathfrak{M}^{(\alpha)}$, $\Phi^{(\alpha)}$を上のように構成し，$\mathfrak{M}^{(\alpha)}$に対し$\Phi^{(\alpha)}$による時間変更を施して得られるMarkov過程$\widetilde{\mathfrak{M}}^{(\alpha)}$を，<u>$\mathfrak{M}$から導かれる$\alpha$次の境界上のMarkov過程</u> または <u>$\mathfrak{M}$から導かれるα次U過程</u>という。

定理1.9により$\widetilde{\mathfrak{M}}^{(\alpha)}$は条件(A), (L)をみたす$\partial D$上のMarkov過程とすることができる．以後，$\widetilde{\mathfrak{M}}^{(\alpha)} = (\widetilde{W}^{(\alpha)}, \widetilde{P}_\xi^{(\alpha)} : \xi \in \partial D)$としてはこのようなversionをとる．$\widetilde{\mathfrak{M}}^{(\alpha)}$の$\lambda$次Green核を$K_\lambda^\alpha$とかく．なお，境界上のMarkov過程に対しては，時刻tにおける値を$x_t(w)$でなく$\xi_t(w)$とかくことにする．

<u>命題4.1.</u> $\alpha \geq 0$とする．$\mathfrak{M}$から導かれるα次U過程$\widetilde{\mathfrak{M}}^{(\alpha)}$の推移確率，Green核は

$$\widetilde{P}_\xi^{(\alpha)}(\xi_t \in E) = E_\xi(e^{-\alpha\tau(t)} : x_{\tau(t)} \in E) \tag{4.19}$$

$$K_\lambda^\alpha(\xi, E) = E_\xi\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t - \lambda\Phi(t)} \chi_E(x_t)\, d\Phi(t)\right) \tag{4.20}$$

である．ただし$\tau(t)$は(3.14)のように定義したΦの逆函数である．従って，$\alpha > 0$ならば$\widetilde{\mathfrak{M}}^{(\alpha)}$の0次Green核$K_0^\alpha$が存在して(4.5)の$K^\alpha$と一致する．

<u>証明.</u> $\Phi^{(\alpha)}(t, w)$の逆函数を$\tau^{(\alpha)}(t, w)$, $\Phi'(t, \omega)$の逆函数を$\tau'(t, \omega)$とおき，また$\omega = (w, s)$に対し$x_t(\omega) = x_t(w)$, $\Phi(t, \omega) = \Phi(t, w)$, $\tau(t, \omega) = \tau(t, w)$とおく．$\tau^{(\alpha)}(t, \pi(\omega)) = \tau'(t, \omega)$であり，また$t < \Phi'(\infty, \omega) = \Phi(\zeta'(\omega), \omega)$では$\tau'(t, \omega) = \tau(t, \omega)$であるから，

$$\widetilde{P}_\xi^{(\alpha)}(\xi_t \in E) = P_\xi^{(\alpha)}(x_{\tau^{(\alpha)}(t)} \in E) = P_\xi^\Omega(x_{\tau^{(\alpha)}(t, \pi(\omega))}(\pi(\omega)) \in E)$$

$$= P_\xi^\Omega(x'_{\tau'(t,\omega)}(\omega) \in E) = P_\xi^\Omega(x_{\tau'(t,\omega)}(\omega) \in E,\ \tau'(t, \omega) < \zeta')$$

$$= P_\xi^\Omega(x_{\tau(t,\omega)}(\omega) \in E : \tau(t, \omega) < \zeta') = E_\xi^\Omega(P_\xi^\Omega(\tau(t,\omega) < \zeta' \mid \mathcal{B}) : x_{\tau(t)} \in E)$$

ただし$\mathcal{B}$は$\{x_t(\omega) : t \in [0, \infty]\}$によって生成されたBorel集合体とする

$$= E_\xi^\Omega(e^{-\tau(t,\omega)} : x_{\tau(t,\omega)}(\omega) \in E) = E_\xi(e^{-\alpha\tau(t)} : x_{\tau(t)} \in E)$$

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

(4.19) がいえた．これと補題2.1を用いると，

$$K_\lambda^\alpha(\xi,E)=\tilde{E}_\xi^{(\alpha)}\left(\int_0^\infty e^{-\lambda t}\chi_E(\xi_t)dt\right)=E_\xi\left(\int_0^\infty e^{-\lambda t-\alpha\tau(t)}\chi_E(x_{\tau(t)})dt\right)$$

$$=E_\xi\left(\int_0^\infty e^{-\lambda\Phi-\alpha t}\chi_E(x_t)\,d\Phi\right). \qquad q.e.d.$$

resolvent 等式により，任意の非負の数 α,λ,μ に対し

(4.21) $$K_\lambda^\alpha-K_\mu^\alpha+(\lambda-\mu)K_\lambda^\alpha K_\mu^\alpha=0$$

である．ただし，$\alpha=0$ の時は λ,μ を正に限る．更に，K_λ^α と K_λ^β との関係を述べよう．

<u>定義</u>　定理4.1の ℓ,m,N を用いて，$\alpha>0$ に対し ∂D から ∂D への核 U_α を次のように定義する．

(4.22) $$U_\alpha=\alpha(\ell\delta+mJ_\alpha H+NG_\alpha^{min}H)$$

ただし，$\delta(x,E)$ は§1で定義したデルタ核である．U_α は ν 測度0の自由性を除いて定まる．　$U_0=0$ とおく．

<u>命題4.2</u>　任意の $\alpha,\beta,\lambda\geqq 0$ に対し

(4.23) $$K_\lambda^\alpha-K_\lambda^\beta+K_\lambda^\alpha(U_\alpha-U_\beta)K_\lambda^\beta=0$$

ただし，α または β が0の時は λ は正に限る．

<u>証明</u>　$f\in B(\partial D)$ とする．

$$E_x\left(\int_0^\infty e^{-\beta t-\lambda\Phi}f(x_t)d\Phi\right)=E_x\left(\int_\sigma^\infty e^{-\beta t-\lambda\Phi}f(x_t)d\Phi\right)=H_\beta K_\lambda^\beta f(x)$$

であるから，定理2.1により

$$K_\lambda^\alpha f(\xi)-K_\lambda^\beta f(\xi)+(\alpha-\beta)E_\xi\left(\int_0^\infty e^{-\lambda t-\lambda\Phi}H_\beta K_\lambda^\beta f(x_t)dt\right)=0$$

である．一方，定理4.1により

$$E_x\left(\int_\sigma^\infty e^{-\alpha t}g(x_t)dt\right)=E_x\int_0^\infty e^{-\alpha t}(\ell+mJ_\alpha+NG_\alpha^{min})g\,d\Phi).$$

であるから，補題3.3を使うと

$$E_x\left(\int_\sigma^\infty e^{-\alpha t-\lambda\Phi}g\,dt\right)=E_x\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t-\lambda\Phi}(\ell+mJ_\alpha+NG_\alpha^{min})g\,d\Phi\right)$$

である．故に，

$$K_\lambda^\alpha f-K_\lambda^\beta f+(\alpha-\beta)K_\lambda^\alpha(\ell+mJ_\alpha+NG_\alpha^{min})H_\beta K_\lambda^\beta f=0$$

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

である．従って次の等式をいえば（4.23）を得る．

(4.24) $$U_\alpha - U_\beta = (\alpha-\beta)(\ell\delta + mJ_\alpha H_\beta + NG_\alpha^{min} H_\beta).$$

これは次のようにして（4.1），（4.2），（4.3）から導かれる．

$$U_\alpha - U_\beta = (\alpha-\beta)\ell\delta + m(\alpha J_\alpha - \beta J_\beta)H + N(\alpha G_\alpha^{min} - \beta G_\beta^{min})H,$$

$$(\alpha J_\alpha - \beta J_\alpha)H = (\alpha J_\alpha - \beta J_\alpha - \beta(\alpha-\beta)J_\alpha G_\beta^{min})H$$

$$= (\alpha-\beta)J_\alpha(H - \beta G_\beta^{min}H) = (\alpha-\beta)J_\alpha H_\beta$$

同様にして

$$(\alpha G_\alpha^{min} - \beta G_\beta^{min})H = (\alpha-\beta)G_\alpha^{min}H_\beta.$$ q.e.d.

定理4.3. 内部で $\mathbb{M}^{min}$ と一致する広義の拡散過程は，その0次U過程と定理4.1の ℓ, m, N によって，同値を除いて定まる．（すなわち，$\mathbb{M}$, $\mathbb{M}'$ を共に内部で $\mathbb{M}^{min}$ と一致する広義の拡散過程とし，境界上の (a,γ)-local time によって同値な0次U過程を導くとする．定理4.1の諸量を $\mathbb{M}$ に対しては ν, ℓ, m, N で表わし，$\mathbb{M}'$ に対しては ν', ℓ', m', N' で表わそう．ν, ν' は互いに絶対連続となるが，今，$\ell=\ell'$, $m=m'$, $N=N'$ が ν-a.e. に成り立つとすると，$\mathbb{M}$, $\mathbb{M}'$ は同値である．）

証明　$\mathbb{M}$, $\mathbb{M}'$ を共に内部で $\mathbb{M}^{min}$ と一致する広義の拡散過程であるとし，同値の U-過程を導くとする．

$$\nu(E)=0 \iff E_x\left(\int_0^\infty \chi_E\, d\Phi\right)=0 \iff E_x\left(\int_0^\infty e^{-\lambda\Phi}\chi_E\, d\Phi\right)=0 \iff$$

$$K_\lambda^0 \chi_E = 0$$

だから，ν, ν' は互いに絶対連続となる．ν-a.e. に $\ell=\ell'$, $m=m'$, $N=N'$ としよう．$\mathbb{M}$, $\mathbb{M}'$ は同じ U_α を定める．（4.23）から

(4.25) $$K_\lambda^\alpha = \sum_{n=0}^\infty (-K_\lambda^0 U_\alpha)^n K_\lambda^0 \qquad \text{if } \|K_\lambda^0 U_\alpha\| < 1$$

であるが，$\|K_\lambda^0\| \le \frac{1}{\lambda}$, $\|U_\alpha\| < \infty$ であり，また $K_\lambda^0 = (K_\lambda^0)'$, $\forall\lambda>0$ であるから，任意の $\alpha>0$ に対し，λ を十分大にとれば $K_\lambda^\alpha = (K_\lambda^\alpha)'$ である．更に，（4.21）から

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

$$(4.26)\qquad K_\mu^\alpha=\sum_{n=0}^\infty((\lambda-\mu)K_\lambda^\alpha)^n K_\lambda^\alpha \quad \text{if} \quad \|(\lambda-\mu)K_\lambda^\alpha\|<1$$

さあるが，$0<\mu<\lambda$ では $\|(\lambda-\mu)K_\lambda^\alpha\|\leq\frac{\lambda-\mu}{\lambda}<1$ だから，すべての α, λ に対して $K_\lambda^\alpha=(K_\lambda^\alpha)'$ を得る．故に $(K^\alpha)'=K^\alpha$ となり，定理 4.1 により $G_\alpha=G_\alpha'$，従って $\mathbb{M}$, $\mathbb{M}'$ は同値である。

q.e.d.

定義　内部で $\mathbb{M}^{min}$ と一致する広義の拡散過程 $\mathbb{M}$ に対し，その 0 次 U 過程，l, m, N の 4 つを合せて $\mathbb{M}$ の境界要素という．(ただし，(Min. 4) の a, γ を固定し，境界上の (a,γ)-local time を媒介として考える.)

命題 4.3.　すべての $\alpha\geq 0$ に対し $\widetilde{\mathbb{M}}^{(\alpha)}$ の Green 作用素が $C(\partial D)$ を $C(\partial D)$ 内にうつすとし，U_α も $C(\partial D)$ を $C(\partial D)$ 内にうつすとする．この時 $\widetilde{\mathbb{M}}^{(\alpha)}$ の生成作用素 $\widetilde{\mathcal{G}}^{(\alpha)}$ は $\mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{G}}^{(\alpha)})=\mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{G}}^{(\alpha)})$ かつ $\widetilde{\mathcal{G}}^{(\alpha)}=\widetilde{\mathcal{G}}^{(0)}-U_\alpha$ をみたす．

以下，$\widetilde{\mathcal{G}}^{(0)}$ を単に $\widetilde{\mathcal{G}}$ ともかく．

証明　生成作用素の定義域は $C(\partial D)$ における Green 作用素の値域と一致するから，$\mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{G}}^{(\alpha)})=\mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{G}}^{(0)})$ は命題 4.2 から分る．$K_\lambda^\alpha-K_\lambda^0+K_\lambda^\alpha U_\alpha K_\lambda^0=0$ に $\lambda-\widetilde{\mathcal{G}}^{(\alpha)}$ を作用させると $I-(\lambda-\widetilde{\mathcal{G}}^{(\alpha)})K_\lambda^0+U_\alpha K_\lambda^0=0$ すなわち $(\lambda-(\widetilde{\mathcal{G}}^{(\alpha)}+U_\alpha))K_\lambda^0=I$ だから，$\widetilde{\mathcal{G}}^{(\alpha)}+U_\alpha=\widetilde{\mathcal{G}}^{(0)}$ を得る．

q.e.d.

なお，上の命題の条件は次のように弱められる．

命題 4.4.　すべての $\alpha\geq 0$ に対し U_α は $C(\partial D)$ を $C(\partial D)$ 内にうつすとする．$\alpha_0+\lambda_0>0$ なるある $\alpha_0\geq 0$, $\lambda_0\geq 0$ に対し $K_{\lambda_0}^{\alpha_0}$ が $C(\partial D)$ を $C(\partial D)$ 内にうつせば，$\alpha+\lambda>0$ なるすべての α, $\lambda\geq 0$ に対して K_λ^α が $C(\partial D)$ を $C(\partial D)$ 内にうつす．

証明　$\alpha_0>0$ とする．$\forall\lambda\geq 0$ に対し $K_\lambda^{\alpha_0}$ が $C(\partial D)\to C(\partial D)$ であることは (4.26) による．この際 $\lambda=0$ の所までいうには

$$K_{\lambda_0}^{\alpha_0}1(\xi)=E_\xi\left(\int_0^\infty e^{-\alpha_0 t-\lambda_0\Phi}d\Phi\right)<E_\xi\left(\int_0^\infty e^{-\lambda_0\Phi}d\Phi\right)=\frac{1}{\lambda_0}$$

に注意すればよい．$\forall\alpha\geq 0$ にまで拡張するには，(4.23) から得ら

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

れる(4.25)の形の式を用いればよい．$\alpha_0=0$ の場合も同様である．

q.e.d.

$\mathfrak{M}^{min}$ に対し，作用素 $\mathfrak{G}_D$ を次のように定義する．u が $C(S)$ に属し，かつ

(4.27) $$\lim_{\substack{U\downarrow\{x\}\\ U:\text{開集合}}} \frac{1}{E_x^{min}(\sigma_{U^c})}\left[E_x^{min}(u(x_{\sigma_{U^c}})-u(x))\right]$$

(ただし $U^c=D^*-U$) が $\forall x\in D$ に対して存在し，これを $u'(x)$ とおくとき，$u'(x)$ は S 上の連続函数に拡張されるとする．($E_x^{min}(\sigma_{U^c})=\infty$ のときは(4.27)において $1/E_x^{min}(\sigma_{U^c})=0$ とおく．(4.27)が $u'(x)$ であるとは，任意の $\varepsilon>0$ に対し，x のある近傍 V が存在して，$V\supset U\ni x$ なる任意の開集合 U に対し

$$\left|u'(x)-\frac{1}{E_x^{min}(\sigma_{U^c})}\left[E_x^{min}(u(x_{\sigma_{U^c}}))-u(x)\right]\right|<\varepsilon$$

が成り立つこととする．) この時 u を $\mathfrak{D}(\mathfrak{G}_D)$ に属すとし，u' の S への拡張を $\mathfrak{G}_D u$ とおく．

次に，$C(S)$ のある部分集合から $C(\partial D)$ への写像 $\frac{\partial}{\partial\varepsilon}$ を次のように定義する．u が境界で 0 であるような連続函数で，D 上の連続函数 $\frac{u}{\varepsilon}$ が S 上の連続函数まで拡張されるとき，その境界における値を $\frac{\partial}{\partial\varepsilon}u$ とかく．これは，法線微分係数をとることの analogy である．

$\boxed{\text{定理 4.4.}}$ (境界条件)．　$\mathfrak{M}$ を内部で $\mathfrak{M}^{min}$ と一致する広義の拡散過程，$\widetilde{\mathfrak{M}}$，l，m，N をその境界要素とする．$\mathfrak{M}$ の Green 作用素 G_α が $C(S)$ を $C(S)$ 内に，$\widetilde{\mathfrak{M}}$ の Green 作用素 K_α が $C(\partial D)$ を $C(\partial D)$ 内にうつすとし，$\mathfrak{M}$，$\widetilde{\mathfrak{M}}$ の生成作用素を $\mathfrak{G}$，$\widetilde{\mathfrak{G}}$ とする．更に，

(4.28) $f\in C(S)$ ならば $\forall\alpha>0$ に対し $l[f]_{\partial D}+mJ_\alpha f+NG_\alpha^{min}f\in C(\partial D)$ を仮定する．この時 $\mathfrak{G}$ は $\mathfrak{G}_D$ の縮小で，次の2つは同値である．

(i) $u\in\mathfrak{D}(\mathfrak{G})$

(ii) $u\in\mathfrak{D}(\mathfrak{G}_D)$，$[u]_{\partial D}\in\mathfrak{D}(\widetilde{\mathfrak{G}})$，$u-Hu\in\mathfrak{D}(\frac{\partial}{\partial\varepsilon})$，かつ $\forall\xi\in\partial D$ に対し $u-Hu$ は $N(\xi,\cdot)$ 可積分で

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

(4.29) $$\widetilde{\mathfrak{g}}[u]_{\partial D} - \ell\mathfrak{g}_D u + m\frac{\partial}{\partial \theta}(u - Hu) + N(u - Hu) = 0$$

が ∂D で成り立つ.

<u>証明</u> $u = G_\alpha f$, $f \in C(S)$ とすると $u \in \mathfrak{D}(\mathfrak{g}_D)$ で $(\alpha - \mathfrak{g}_D)u = f$ となる(たとえば伊藤[1])から, $\mathfrak{g}$ は $\mathfrak{g}_D$ の縮小である. (i) ⟹ (ii)を示すために, $u \in \mathfrak{D}(\mathfrak{g})$ としよう. $\exists f \in C(S)$ によって $u = G_{T\alpha} f$ となるから, $u = G_\alpha^{min} f + H_\alpha G_\alpha f = G_\alpha^{min} f + H_\alpha u$ である. 従って $u - Hu = u - H_\alpha u - \alpha G_\alpha^{min} Hu$ は $\mathfrak{D}(\frac{\partial}{\partial \theta})$ に属し, かつ $N(\xi, \cdot)$ 可積分である. (4.28)により $NG_\alpha^{min} 1(\xi)$ が $\forall \xi$ で有限となることを用いた. 境界では定理4.1.により $u = K^\alpha(\ell + mJ_\alpha + NG_\alpha^{min})f$ であるから(4.28)により $[u]_{\partial D} \in \mathfrak{D}(\widetilde{\mathfrak{g}}^{(\alpha)}) = \mathfrak{D}(\widetilde{\mathfrak{g}})$ であって,

$$\widetilde{\mathfrak{g}}^{(\alpha)} u = -(\ell + mJ_\alpha + NG_\alpha^{min})f$$

である. 一方 $\widetilde{\mathfrak{g}}^{(\alpha)} u = \widetilde{\mathfrak{g}} u - U_\alpha u = \widetilde{\mathfrak{g}} u - \alpha(\ell + mJ_\alpha + NG_\alpha^{min})Hu$ であるから

$$\widetilde{\mathfrak{g}} u + (\ell + mJ_\alpha + NG_\alpha^{min})(f - \alpha Hu) = 0$$

である. $G_{T\alpha}^{min}(f - \alpha Hu) = u - Hu$ $J_\alpha(f - \alpha Hu) = \frac{\partial}{\partial \theta}(u - Hu)$ であり, また境界では $f - \alpha Hu = f - \alpha u = -\mathfrak{g}_D u$ であるから(4.29)を得る.

逆に, u が(ii)をみたすとしよう. $(\alpha - \mathfrak{g}_D)u = f$ とおく. $(\alpha - \mathfrak{g}_D)G_\alpha^{min} f = f$, $(\alpha - \mathfrak{g}_D)H_\alpha u = 0$ であるから, $(\alpha - \mathfrak{g}_D)(u - H_\alpha u - G_\alpha^{min} f) = 0$ である. しかも $u - H_\alpha u - G_{T\alpha}^{min} f$ は境界で0であるから, S 全体で0である(0でないとすると正の最大値をとる内点または負の最小値をとる内点で矛盾を生じる). 故に前と同様に $u - Hu = G_{T\alpha}^{min}(f - \alpha Hu)$, $\frac{\partial}{\partial \theta}(u - Hu) = J_\alpha(f - \alpha Hu)$, $-[\mathfrak{g}_D u]_{\partial D} = [f - \alpha Hu]_{\partial D}$ となって, (4.29)から ∂D 上で $u = K^\alpha(\ell + mJ_\alpha + NG_{T\alpha}^{min})f$ を得る. 従って定理4.1により $u = G_\alpha^{min} f + H_\alpha u = G_{T\alpha} f$ となって $u \in \mathfrak{D}(\mathfrak{g})$ を得る.

q.e.d.

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

§5. 境界要素のみたす条件 I.

§4に述べた条件をみたす$\mathbb{M}^{min}$が与えられたとし，内部Dで$\mathbb{M}^{min}$と一致する広義の拡散過程の境界要素のみたす必要十分条件を求めるのを目的とする．Iを恒等作用素とする．

<u>補題5.1</u>　$\beta J_{\alpha+\beta} H_\alpha$，$\beta J_\beta (I-H) 1(\xi)$ は β に関し単調非減少である．（1はSで1，Δ_Sで0をとる函数.）

<u>証明</u>　$\beta G^{min}_{\alpha+\beta} H_\alpha = H_\alpha - H_{\alpha+\beta}$ は β に関し単調非減少だから $\beta J_{\alpha+\beta} H_\alpha$ もそうである．$B = \{\zeta=\infty\} \cup \{\zeta<\infty,\ x_{\zeta-} \in D\}$ とおく．$\beta G^{min}_\beta (I-H) 1(x) = \beta G^{min}_\beta 1 + H_\beta 1 - H1 = E^{min}_x (1-e^{-\beta\zeta}) - E^{min}_x (1-e^{-\beta\zeta} : \zeta<\infty,\ x_{\zeta-} \in \partial D) = E^{min}_x (1-e^{-\beta\zeta} : B)$ により，$\beta G^{min}_\beta (I-H) 1$ が単調非減少だから，$\beta J_\beta (I-H) 1(\xi)$ も単調非減少である．

<u>Θ_α, Θ, θ, h の定義</u>　$\alpha \geq 0$ に対し ∂D から ∂D への核 Θ_α を次のように定義する．

$$\Theta_\alpha (\xi, \{\xi\}) = 0$$

$E \in \mathcal{B}(\partial D)$，$E \not\ni \xi$ なら $\Theta_\alpha(\xi, E) = \lim_{\beta\to\infty} \beta J_{\alpha+\beta} H_\alpha \chi_E$

Θ_0 を単にΘともかく．∂D上の$\mathcal{B}(\partial D)$可測函数θを次のように定義する．

$$\theta(\xi) = \lim_{\beta\to\infty} \beta J_\beta (I-H) 1(\xi)$$

またD上の有界$\mathcal{B}(D)$可測函数hを次のように定義する．

$$h(x) = P^{min}_x (\zeta=\infty) + P^{min}_x (\zeta<\infty,\ x_{\zeta-} \in D).$$

Θ_α が核であることは補題5.1からすぐ分る．$f \in B^+_0 (\partial D \times \partial D)$ に対し $\Theta_\alpha f(\xi) = \lim_{\beta\to\infty} \beta (J_{\alpha+\beta} H_\alpha) f(\xi)$（注1）が成り立ち，また$\Theta_\alpha$ は α について単調非増加である．なお，$f \in B^+(\partial D)$ に対し

（5.1）　$\Theta f(\xi) = \lim_{\alpha\to 0} \Theta_\alpha f(\xi)$

である．

（注1）$(J_{\alpha+\beta} H_\alpha) f$ の意味を念のため注意しておく：

$$(J_{\alpha+\beta} H_\alpha) f(\xi) = \iint_{S\times\partial D} J_{\alpha+\beta}(\xi, dx) H_\alpha (x, d\eta) f(\xi, \eta).$$

故に $f \in B(S\times\partial D)$ の時 $(J_{\alpha+\beta} H_\alpha) f$ と $J_{\alpha+\beta}(H_\beta f)$ とは一般に相異る．

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

(5.1)の証明. $f\in B_0^+(\partial D\times\partial D)$として証明すれば十分であるから、そうする。$\alpha\downarrow 0$の時、$\textcircled{H}_\alpha f$は非減少だから$\lim_{\alpha\to 0}\textcircled{H}_\alpha f$が存在し$\leq\textcircled{H} f$である。一方 $\beta J_\beta H f=\lim_{\alpha\to 0}\beta J_{\alpha+\beta}H_\alpha f\leq\lim_{\alpha\to 0}\textcircled{H}_\alpha f$ から $\textcircled{H} f\leq\lim_{\alpha\to 0}\textcircled{H}_\alpha f$ である。

注意. $\beta G^{min}_{\alpha+\beta}H_\alpha=H_\alpha-H_{\alpha+\beta}$ だから $x\in D$ で $\dfrac{\beta G^{min}_{\alpha+\beta}H_\alpha f}{e}(x)$
$=\dfrac{H_\alpha f}{e}-\dfrac{H_{\alpha+\beta}f}{e}\longrightarrow\dfrac{H_\alpha f}{e}(x)$ $(\beta\to\infty)$ である。ところで $f\in C(\partial D)$ とすると $\beta G^{min}_{\alpha+\beta}H_\alpha f/e$ の境界値が $\beta J_{\alpha+\beta}H_\alpha f$ だから $f\in C^+(\partial D)$, $f(\xi)=0$ なる f に対して $\textcircled{H}_\alpha f(\xi)$ は $H_\alpha f/e$ の境界点 ξ における何らかの意味での極限値と考えられる。

以下、§6までかかって次の諸定理を証明する。これは境界要素のほぼ完全な特徴づけを与えている。$(\partial D)_0$ は前節で定義した通り $(\partial D)_0=\{\xi: J_\alpha\chi_{\partial D}(\xi)>0\}$ とする。

定理 5.1 $\mathbb{M}$を内部で$\mathbb{M}^{min}$と一致する広義の拡散過程とする。この時$\mathbb{M}$の境界要素$\widetilde{\mathbb{M}}, l, m, N$は次の諸条件をみたす。

(B.1) $\widetilde{\mathbb{M}}$に関するTの標準測度0を除いて$(\partial D)_0$上で $m=0$.

(B.2) $\widetilde{\mathbb{M}}$のLévy系を$(\widetilde{Q},\widetilde{L})$とすると$(\widetilde{Q},\widetilde{L})\gg((m\textcircled{H}+NH)_C, T)$.

ただし $C(\xi,\eta)=\begin{cases}1, & \xi\neq\eta\\ 0 & \xi=\eta\end{cases}$ とする。(注2)

(B.3) $\widetilde{\mathbb{M}}$の消滅を表わす加法的汎函数を$\widetilde{Z}$とすると
$\widetilde{Z}\gg(m\theta+Nk)T$.

(B.4) $\sigma_1=\inf\{t:\int_0^t l(\xi_s)ds>0\}$, $\sigma_2=\inf\{t:\int_0^t m(\xi_s)ds>0\}$,
$\sigma_3=\inf\{t:\int_0^t NI(\xi_s)ds=+\infty\}$ とおくと、$\widetilde{P}_\xi(\sigma_1\wedge\sigma_2\wedge\sigma_3=0)=1$,
$\xi\in\partial D$.

注意 $\mathbb{M}$の境界上の(a,γ)-local time Φ の標準測度νが丁度$\widetilde{\mathbb{M}}$に関すTの標準測度となる。条件(B.1)〜(B.4)はν測

(注2) $(NH)_C$の意味は次のような核である。$f\in B^+(\partial D\times\partial D)$に対し
$(NH)_C f=\iint_{D\times\partial D}N(\xi,dx)H(x,d\eta)C(\xi,\eta)f(\xi,\eta)$.

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

度0だけの l, m, N の変化に影響されない．すなわち，$l=l'$，$m=m'$，$N=N'$，ν-a.e. とし，l, m, N が (B1)〜(B4) をみたすならば，l', m', N' も (B1)〜(B4) をみたす．

$\boxed{\text{定理 5.2}}$ $\widetilde{M}$ を条件 (A), (L) をみたす境界上の Markov 過程，l, m を $B^+(\partial D)$ に属する函数，N を境界から D への核とし，$\widetilde{M}$ に対する T の標準測度に関し a.e. に $la+m+Nb=1$ とする．

(5.2) $\widetilde{M}$ の Green 作用素は $C(\partial D)$ を $C(\partial D)$ 内にうつす．

(5.3) $f\in C(S)$ ならば $\forall\alpha>0$ に対し $l[f]_{\partial D}+mJ_\alpha f+NG_\alpha^{min}f\in C(\partial D)$

とする．$\widetilde{M}$，l, m, N が (B.1)〜(B.4) をみたすとする．この時 $\widetilde{M}$，l, m, N は内部で M^{min} と一致するある広義の拡散過程 M の境界要素である．しかもこの M は

(5.4) M の Green 作用素は $C(S)$ を $C(S)$ 内にうつす

をみたす．

$\boxed{\text{定理 5.3}}$ 条件 (A), (L) をみたす境界上の Markov 過程 $\widetilde{M}$ が，内部で M^{min} と一致する拡散過程（広義のではなく，真の意味の）で境界に滞留せずしかも (5.4) をみたすような M から導かれる0次U過程であるための必要十分条件は，$\widetilde{M}$ が

(B.2)′ $\widetilde{M}$ の Lévy 系を $(\widetilde{Q}, \widetilde{L})$ とすると $(\widetilde{Q}, \widetilde{L})\approx(\mathbb{H}, T)$

(B.3)′ $\widetilde{M}$ の消滅を表わす加法的汎函数を $\widetilde{Z}$ とすると $\widetilde{Z}\geqslant 0T$

および (5.2) をみたすことである．M と $\widetilde{M}$ との対応は同値を除き1対1である．

定理 5.1 の (B.2)，(B.3) に対しては，もっとくわしく次のことがいえる．

$\boxed{\text{定理 5.4}}$ 定理 5.1 と同じ仮定の下に次のことがいえる．

(i) $\forall f\in B_0^+(\partial D\times\partial D)$，$\forall\xi\in\partial D$，$\forall t$ に対し

$$(5.5)\quad \widetilde{E}_\xi\left(\int_0^t\widetilde{Q}f(\xi_s)\,d\widetilde{L}(s)\right)=\widetilde{E}_\xi\left(\int_0^t(m\mathbb{H}+NH)f(\xi_s)\,ds\right)+E_\xi\left(\int_0^{\tau(t)}\chi_{\partial D}(x_s)Q_{\partial D}f(x_s)\,dL(s)\right)$$

が成り立つ．

$(\widetilde{Q}, \widetilde{L})\approx(m\mathbb{H}+(NH)_c, T)$ となるための必要十分条件は，M が a.s.

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

に境界から境界への飛躍をしないことである．

(ii) $\forall \xi \in \partial D$, $\forall t$ に対し

(5.6) $$\widetilde{E}_\xi(\widetilde{Z}(t))=\widetilde{E}_\xi\left(\int_0^t (m\Theta+Nh)(\xi_s)ds\right)+P_\xi(\varsigma \leqq \tau(t), \varsigma<\infty, x_{\varsigma-}\in \partial D)$$

が成り立つ．$\widetilde{Z} \approx (m\Theta+Nh)T$ となるための必要十分条件は，$\mathbb{M}$ が $\{\varsigma<\infty\}$ の上で a.s. に $x_{\varsigma-}\in D$ なることである．もし $\mathbb{M}$ が conservative で $h=0$ ならば，$\widetilde{\mathbb{M}}$ も conservative になる．

(iii) $\mathbb{M}$ が拡散過程になるための必要十分条件は，$(\widetilde{Q},\widetilde{L}) \approx (m\Theta, T)$，かつ，$\widetilde{\mathbb{M}}$ に対する T の標準測度に関し a.e. に $N=0$ であることである．

(iv) $\mathbb{M}$ が conservative になるための必要十分条件は，$\widetilde{Z} \approx (m\Theta+Nh)T$ かつ $P_x^{min}(\varsigma<\infty, x_{\varsigma-}\in D)=0$, $x\in D$ である．

なお，0次の U 過程 $\widetilde{\mathbb{M}}$ と α 次の U 過程 $\widetilde{\mathbb{M}}^{(\alpha)}$ との間の関係について，次の注意を与える．命題 4.1 から明らかなように $\widetilde{\mathbb{M}}$ の推移確率 $\widetilde{T}_t$ と $\widetilde{\mathbb{M}}^{(\alpha)}$ の推移確率 $\widetilde{T}_t^{(\alpha)}$ に対し，$f\geqq 0$ ならば $\widetilde{T}_t^{(\alpha)}f \leqq \widetilde{T}_t f$ がみたされる．故に定理 1.10 によって $\widetilde{\mathbb{M}}^{(\alpha)}$ は $\widetilde{\mathbb{M}}$ から何らかの，1 を越えない右連続乗法的汎函数による消滅法によって得られることが予想されるが，実は，その乗法的汎函数の形を具体的に与えることができる．すなわち，次の定理が成り立つ．（0次 U 過程の代りに $\mathbb{M}$ の path 空間 W での $x_{\tau(t)}$ をとれば $e^{-\alpha\tau(t)}$ がそのような乗法的汎函数（乗法的汎函数の定義を適当に拡張して）であるが，これは そのままでは $\widetilde{\mathbb{M}}=(\widetilde{W}, \widetilde{P}_\xi)$ の乗法的汎函数と見なせない．）

$\boxed{\text{定理 5.5}}$ 定理 5.1 と同じ仮定の下に，$\mathbb{M}$ の α 次 U 過程 $(\alpha>0)$ $\widetilde{\mathbb{M}}^{(\alpha)}$ の推移確率 $\widetilde{T}_t^{(\alpha)}$ は，0次 U 過程 $\widetilde{\mathbb{M}}$ によって次のように表わされる．

(5.7) $$\widetilde{T}_t^{(\alpha)}(\xi, E)=\widetilde{E}_\xi\left(e^{-\int_0^t g_\alpha(\xi_s)ds}\prod_{0<s\leqq t}(1-p_\alpha(\xi_{s-},\xi_s)) : \xi_t\in E\right).$$

ただし，p_α は $B_0^+(\partial D\times\partial D)$ に属し 1 を越えない函数で，

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

(5.8) $\quad V_\alpha(\xi,E)=\alpha[m(J_\alpha H)_c(\xi,E)+(NG_\alpha^{min}H)_c(\xi,E)]$

とおく時，任意の $f\in B^+(\partial D\times\partial D)$ に対し

(5.9) $\quad (V_\alpha f)T \simeq (\widetilde{Q}(p_\alpha f))\widehat{L}$

をみたすもの，g_α は $B^+(\partial D)$ に属し

(5.10) $\quad g_\alpha(\xi)=\alpha\ell(\xi)+\alpha[m(J_\alpha H)(\xi,\{\xi\})+(NG_\alpha^{min}H)(\xi,\{\xi\})]$

によって定義される函数とする．

<u>注意</u> $\quad V_\alpha(\xi,E)\leq m\textcircled{H}(\xi,E)+(NH)_c(\xi,E)$ であるから，(B.2) と命題1.6 によって上の定理にいうような p_α が存在する．

<u>定理5.1，5.4の証明</u> $\quad f\in B^+(S)$ に対し

$$E_\xi\left(\int_0^\infty f(x_t)\,d\Phi\right)=E_\xi\left(\int_0^\infty f(x_{\tau(t)})\,dt\right)=\widetilde{E}_\xi\left(\int_0^\infty f(\xi_t)\,dt\right)$$

であるから，Mの境界上の (α,γ)-local time Φ の標準測度 ν は，$\widetilde{M}$に対するTの標準測度である．故に (B.1) は既に定理4.1 の中で示したことになる．(B.2) をいうためにまず，$\forall f\in B^+(\partial D\times\partial D)$，$\forall x\in S$，$\forall\alpha>0$，$\forall\beta>0$ に対し

(5.11)
$$E_x\left(\sum_j e^{-\alpha\tau_j'}(1-e^{-\beta(\tau_j'-\tau_j)})f(x_{\tau_j-},x_{\tau_j'})\right)$$
$$=E_x\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t}\beta(mJ_{\alpha+\beta}H_\alpha+NG_{\alpha+\beta}^{min}H_\alpha)f(x_t)\,d\Phi\right)$$

を証明する．τ_j,τ_j' は§3で定義したように excursion 区間 $\mathbb{E}_j$ の左端，右端である．$f(\xi,\eta)=h_1(\xi)h_2(\eta)$，$h_1,h_2\in C^+(\partial D)$ の場合にいえば十分である．更に，$h_1,h_2\in C^+(S)$ と仮定してよい．D_i を定理3.1のようにとり

$$\rho(i)=\frac{1}{i}\wedge\sigma_{D_i}\wedge\inf\left\{t:dis(x_0,x_t)>\frac{1}{i}\right\}$$

とおき $\rho_n(i)$，$\sigma_n(i)$ を定理3.1のように定義すると，(3.8)，(3.9) をみたす．

$$I(i)=E_x\left(\sum_{n=1}^\infty e^{-\alpha\sigma_{n+1}(i)}\beta h_1(x_{\rho_n(i)-})h_2(x_{\sigma_{n+1}(i)})\int_{\rho_n(i)}^{\sigma_{n+1}(i)}e^{-\beta(t-\rho_n(i))}dt\right)$$

とおく．$I(i)$ においては $x_{\rho_n(i)}\in D$ なる n だけ考えればよいが，(3.16) により，$x_{\rho_n(i)}\in D$ ならば $\exists j$ が存在して $\rho_n(i)\in\mathbb{E}_j^*=$

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

$[\tau_j, \tau_j')$ 従って $\sigma_{n+1}(i) = \tau_j'$ である．また i, j を固定した時 $\rho_n(i) \in \mathbb{E}_j^*$ なる $\rho_n(i)$ は高々 1 つである．（$\rho_n(i), \rho_{n+1}(i)$ が共に $\mathbb{E}_j^*$ にあるとすると，$\rho_n(i) < \sigma_{n+1}(i)$ では $x_{\sigma_{n+1}(i)} \in \partial D$ となり不合理，$\rho_n(i) = \sigma_{n+1}(i)$ では $\sigma_{n+1}(i)$ に十分近い $t > \sigma_{n+1}(i)$ で $x_t \in \partial D$ なるものがあるはずだから不合理．）故に

$$I(i) = E_x\left(\sum_j \chi_{\{\exists n, \rho_n(i) \in \mathbb{E}_j^*\}} e^{-\alpha \tau_j'} \beta h_1(x_{\rho_j'(i)-}) h_2(x_{\tau_j'}) \int_{\rho_j'(i)}^{\tau_j'} e^{-\beta(t-\rho_j'(i))} dt\right)$$

である．ただし，$\rho_n(i) \in \mathbb{E}_j^*$ の時 $\rho_n(i) = \rho_j'(i)$ とおく．（4.11）で述べたように，$\forall j$ に対し $\lim_{i\to\infty} \chi_{\{\exists n, \rho_n(i) \in \mathbb{E}_j^*\}} = 1$ である．また $\rho_n(i) \in \mathbb{E}_j^*$ ならば $\sigma_n(i) < \tau_j \leq \rho_n(i)$ であるから $dis(x_{\sigma_n(i)}, x_{\tau_j-}) \leq 1/i$ である．$dis(x_{\sigma_n(i)}, x_{\rho_n(i)-}) \leq 1/i$ も明らかであるから $dis(x_{\tau_j-}, x_{\rho_n(i)-}) \leq 2/i$ となり，結局，$\lim_{i\to\infty} x_{\rho_j'(i)-} = x_{\tau_j-}$ がいえる．（これは定理 3.2 (i) の証明でも同様のことをいった．）
$\lim_{i\to\infty} \rho_j'(i) = \tau_j$ も明らかである．更に，

$$e^{-\alpha\tau_j'} \int_{\rho_j'(i)}^{\tau_j'} e^{-\beta(t-\rho_j'(i))} dt \leq e^{-\alpha\tau_j'} \int_{\rho_j'(i)}^{\tau_j'} dt \leq \int_{\tau_j}^{\tau_j'} e^{-\alpha t} dt,$$

$$\sum_j \int_{\tau_j}^{\tau_j'} e^{-\alpha t} dt \leq \int_0^\infty e^{-\alpha t} dt = \frac{1}{\alpha}$$

によって Levesque の有界収束定理が使えるから

$$\lim_{i\to\infty} I(i) = E_x\left(\sum_j e^{-\alpha\tau_j'} \beta h_1(x_{\tau_j-}) h_2(x_{\tau_j'}) \int_{\tau_j}^{\tau_j'} e^{-\beta(t-\tau_j)} dt\right)$$

を得る．一方，

$$I(i) = E_x\left(\sum_{n=1}^\infty e^{-\alpha\rho_n(i)} \beta h_1(x_{\rho_n(i)-}) h_2(x_{\sigma}(w^+_{\rho_n(i)})) e^{-\alpha\sigma(w^+_{\rho_n(i)})} \int_0^{\sigma(w^+_{\rho_n(i)})} e^{-\beta t} dt\right)$$

$$= E_x\left(\sum_{n=1}^\infty e^{-\alpha\rho_n(i)} h_1(x_{\rho_n(i)-}) E_{x_{\rho_n(i)}}\left((e^{-\alpha\sigma} - e^{-(\alpha+\beta)\sigma}) h_2(x_\sigma)\right)\right)$$

更に（4.3）によって

$$= E_x\left(\sum_{n=1}^\infty e^{-\alpha\rho_n(i)} \beta h_1(x_{\rho_n(i)-}) G^{min}_{\alpha+\beta} H_\alpha h_2(x_{\rho_n(i)})\right)$$

であるから，（4.12），（4.14）によって

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

$$\lim_{i=\infty} I(i) = \beta E_x\left(\sum_j \chi_{\{\tau_j \notin J\}} e^{-\alpha\tau_j} h_1 J_{\alpha+\beta} H_\alpha h_2(x_{\tau_j}) \int_{\tau_j}^{\tau_j'} e^{-\gamma(t-\tau_j)} a(x_t) dt\right)$$

$$+\beta E_x\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t} \chi_{\partial D} h_1 Q_D G^{min}_{\alpha+\beta} H_\alpha h_2 \, dL\right)$$

を得る．これは定理 4.2 によって

$$=\beta E_x\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t} m h_1 J_{\alpha+\beta} H_\alpha h_2 \, d\Phi\right) + \beta E_x\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t} h_1 N G^{min}_{\alpha+\beta} H_\alpha h_2 \, d\Phi\right)$$

であるから，(5.11) が証明できた．

Φ の逆函数 $\tau(t)$ を前節と同様に (3.14) で定義する．命題 3.11 により (5.11) の左辺は

$$E_x\left(\sum_{0<s<\infty} e^{-\alpha\tau(s)} (1-e^{-\beta(\tau(s)-\tau(s-))}) f(x_{\tau(s-)-}, x_{\tau(s)})\right)$$

に等しい．(5.11) の右辺は有界であるから，$\tau(t)$ が Markov 時間であること，強 Markov 性，および命題 3.7 (iv) を使って

$$E_x\left(\sum_{0<s\le t} e^{-\alpha\tau(s)} (1-e^{-\beta(\tau(s)-\tau(s-))}) f(x_{\tau(s-)-}, x_{\tau(s)})\right)$$

$$= E_x\left(\int_0^{\tau(t)} e^{-\alpha s} \beta (m J_{\alpha+\beta} H_\alpha + N G^{min}_{\alpha+\beta} H_\alpha) f(x_s) \, d\Phi\right)$$

を得る．$f \in B_0^+(\partial D \times \partial D)$ としよう．上式で $\beta \to \infty$ とすると

$$E_x\left(\sum_{0<s\le t} \chi_{\{\tau(s-)<\tau(s)\}} e^{-\alpha\tau(t)} f(x_{\tau(s-)-}, x_{\tau(s)})\right)$$

$$= E_x\left(\int_0^{\tau(t)} e^{-\alpha s} (m \Theta_\alpha + N H_\alpha) f(x_s) \, d\Phi\right)$$

を得る．更に $\alpha \downarrow 0$ とし補題 2.1 を使うと

$$(5.12) \quad E_x\left(\sum_{0<s\le t} \chi_{\{\tau(s-)<\tau(s)\}} f(x_{\tau(s-)-}, x_{\tau(s)})\right) = E_x\left(\int_0^{\tau(t)} (m\Theta + NH) f(x_{\tau(s)}) \, ds\right)$$

$$= E_\xi\left(\int_0^t (m\Theta + NH) f(x_{\tau(s)}) ds\right) = \widetilde{E}_\xi\left(\int_0^t (m\Theta + NH) f(\xi_s) ds\right)$$

を得る．さて定理 1.9 の写像 π を用いると $x_{\tau(s-)-}(w) = \lim_{t\uparrow s} x_{\tau(t)}(w)$ $= \lim_{t\uparrow s} \xi_s(\pi(w)) = \xi_{s-}(\pi(w))$ であるから

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

$$E_\xi(\sum\int_0^t \tilde{Q}f(\xi_s)d\tilde{L}) = \tilde{E}_\xi(\sum_{0<s\le t} f(\xi_{s-},\xi_s)) = E_\xi(\sum_{0<s\le t} f(x_{\tau(s-)-}, x_{\tau(s)}))$$

$$= E_\xi(\sum_{0<s\le t}\chi_{\{\tau(s-)<\tau(s)\}} f(x_{\tau(s-)-}, x_{\tau(s)})) + E_\xi(\sum_{0<s\le t}\chi_{\{\tau(s-)=\tau(s)\}} f(x_{\tau(s-)-}, x_{\tau(s)}))$$

である．才1項は(5.12)の通りである．命題3.9，命題3.11，定理3.2(iii)により才2項 $= E_\xi(\sum_{0<s\le\tau(t)}\chi_{\{x_{s-},x_s\in\partial D\}} f(x_{s-},x_s)) = E_\xi(\int_0^{\tau(t)}\chi_{\partial D} Q_{\partial D} f\,dL)$ である．故に，(5.5)が証明できた．定理5.4(i)の後半も(5.5)から明らかである．(5.5)から任意の $t_1<t_2$，任意の $f\in B_0^+(\partial D\times\partial D)$ に対し

$$\tilde{E}_\xi(\int_{t_1}^{t_2}\tilde{Q}f(\xi_s)d\tilde{L}) \ge \tilde{E}_\xi(\int_{t_1}^{t_2}(m\oplus + NH)f(\xi_s)ds)$$

従って

$$\tilde{E}_\xi(\int_0^\infty e^{-\alpha t}\tilde{Q}f d\tilde{L}) \ge \tilde{E}_\xi(\int_0^\infty e^{-\alpha t}(m\oplus + NH)f\,ds)$$

となるから，命題1.5により(B2)がいえた．

次に(B3)を定理5.4(ii)と共に証明する．M の path 空間 W に属する w に対し $\tilde{\zeta}(w) = \inf\{t : x_{\tau(t)} = \Delta_S\}$ とかく．$\tilde{\zeta} = \Phi(\infty)$ である．a.s. に次の諸命題が成り立つ．

$\tilde{\zeta}<\infty \iff \tau(\tilde{\zeta}-)<\infty$ （定理3.3，命題3.10(ii)による）

$\tau(\tilde{\zeta}-)<\zeta \iff$ ある excursion 区間 E_j が存在して $\tau_j<\zeta\le\tau_j'=\infty$，$\tau(\tilde{\zeta}-)=\zeta<\infty \iff \zeta<\infty$ かつ $x_{\zeta-}\in\partial D$
（命題3.11と $\tau(\tilde{\zeta})=\infty$，$\tau(\tilde{\zeta}-)\le\zeta$ による．）故に

(5.13) $\tilde{P}_\xi(\zeta<\infty) = P_\xi(\tilde{\zeta}<\infty) = E_\xi(\sum_j\chi_{\{\tau_j<\zeta\le\tau_j'=\infty\}}) + P_\xi(\zeta<\infty, x_{\zeta-}\in\partial D)$

である．$D(i)$，$\rho(i)$，$\rho_n(i)$，$\sigma_n(i)$ を定理3.1のようにとり

$$J(i) = E_x\sum_{n=1}^\infty e^{-\alpha\rho_n(i)}\chi_{\{\rho_n(i)<\zeta\le\sigma_{n+1}(i)=\infty\}}\beta\int_{\rho_n(i)}^\zeta e^{-\beta(t-\rho_n(i))}dt)$$

とおくと

$$J(i) = E_x(\sum_j\chi_{\{\exists n,\rho_n(i)\in E_j^*\}}\chi_{\{\rho_j'(i)<\zeta\le\tau_j'=\infty\}}e^{-\alpha\rho_j'(i)}\beta\int_{\rho_j'(i)}^\zeta e^{-\beta(t-\rho_j'(i))}dt)$$

であり，$\sum_j\chi_{\{\tau_j'=\infty\}}\le 1$ だから有界収束定理が使えて

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

$$\lim_{i\to\infty} J(i) = E_x\Big(\sum_j \chi_{\{\tau_j<\zeta\le\tau_j'=\infty\}} e^{-\alpha\tau_j}\beta\int_{\tau_j}^{\zeta} e^{-\beta(t-\tau_j)}\,dt\Big)$$

$$= E_x\Big(\sum_j \chi_{\{\tau_j<\zeta\le\tau_j'=\infty\}} e^{-\alpha\tau_j}(1-e^{-\beta(\zeta-\tau_j)})\Big)$$

となる．一方，

$$J(i) = E_x\Big[\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha\rho_n(i)}\chi_{\{\rho_n(i)<\zeta\}} E_{x_{\rho_n(i)}}\Big(\beta\int_0^{\zeta} e^{-\beta t}dt : \sigma=\infty\Big)\Big]$$

であり，(4.4) と補題 4.1 により

$$E_x\Big(\beta\int_0^{\zeta} e^{-\beta t}dt : \sigma=\infty\Big) = E_x(1-e^{-\beta(\sigma\wedge\zeta)}) - E_x(1-e^{-\beta(\sigma\wedge\zeta)} : \sigma<\infty)$$

$$= \beta G_\beta^{min} 1(x) - H1(x) + H_\beta 1(x) = \beta G_\beta^{min}(I-H)1(x)$$

であるから，

$$J(i) = E_x\Big(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha\rho_n(i)}\beta G_\beta^{min}(I-H)1(x_{\rho_n(i)})\Big)$$

故に (4.12)，(4.14) により

$$\lim_{i\to\infty} J(i) = E_x\Big(\sum_j \chi_{\{\tau_j\notin \mathcal{J}\}} e^{-\alpha\tau_j}\beta J_\beta(I-H)1(x_{\tau_j})\int_{\tau_j}^{\tau_j'} e^{-\gamma(t-\tau_j)}a(x_t)\,dt\Big)$$

$$+E_x\Big(\int_0^{\infty} e^{-\alpha t}\beta\chi_{\partial D}Q_D G_\beta^{min}(I-H)1(x_t)\,dL\Big)$$

定理 4.2 により

$$= E_x\Big(\int_0^{\infty} e^{-\alpha t}\beta(mJ_\beta + NG_\beta^{min})(I-H)1(x_t)\,d\Phi\Big).$$

従って

$$(5.14)\quad E_x\Big(\sum_j \chi_{\{\tau_j<\zeta\le\tau_j'=\infty\}} e^{-\alpha\tau_j}(1-e^{-\beta(\zeta-\tau_j)})\Big) = E_x\Big(\int_0^{\infty} e^{-\alpha t}\beta(mJ_\beta+NG_\beta^{min})(I-H)1\,d\Phi\Big)$$

である． $\alpha\downarrow 0$，$\beta\uparrow\infty$ とすると

$$(5.15)\quad E_x\Big(\sum_j \chi_{\{\tau_j<\zeta\le\tau_j'=\infty\}}\Big) = E_x\Big(\int_0^{\infty}(m\theta + Nh)\,d\Phi\Big)$$

であるから，(5.13) と合せて

$$(5.16)\quad \tilde{P}_\xi(\zeta<\infty) = E_\xi\Big(\int_0^{\infty}(m\theta+Nh)d\Phi\Big) + P_\xi(\zeta<\infty,\ x_{\zeta-}\in\partial D),\quad \xi\in\partial D$$

を得る．故に

$$\tilde{P}_\xi(t<\zeta<\infty) = \tilde{E}_\xi(\tilde{P}_{\tilde{\xi}_t}(0<\zeta<\infty)) = E_\xi(\tilde{P}_{x_{\tau(t)}}(0<\zeta<\infty))$$

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

$$= E_\xi\left(\int_{\tau(t)}^{\infty}(m\theta+N h)d\Phi\right)+P_\xi(\tau(t)<\zeta<\infty,\ x_{\zeta-}\in\partial D)$$

であるから，(5.6)が説明された．定理5.4(ii)の残りの2命題も(5.6)から明かであり，また(5.5)から(B2)を証明したようにして(5.6)から(B3)がいえる．なお，「$\mathbb{M}$がconservativeで$h=0$ならば$\widetilde{\mathbb{M}}$もconservative」は，$P_x(\sigma<\infty)=1$．となることと定理3.3から直接にも証明できる．

定理5.4(iii)は定理5.4(i)と定理4.2(iii)とからの帰結である．

定理5.4(iv)の証明．$\mathbb{M}$がconservativeならば(ii)により$\widetilde{Z}\approx(m\theta+Nh)T$であり，また$P_x^{min}(\zeta<\infty, x_{\zeta-}\in D)=E_x(\sigma\wedge\zeta<\infty, x_{(\sigma\wedge\zeta)-}\in D)=E_x(\sigma<\infty, x_{\sigma-}\in D)=0$である．逆に$P_x^{min}(\zeta<\infty, x_{\zeta-}\in D)=0$ならば$P_x(\sigma\wedge\zeta<\infty, x_{(\sigma\wedge\zeta)-}\in D)=0$だから$P_x(\zeta<\infty, x_{\zeta-}\in D)=P_x\left(\bigcup_{r\in\mathbb{H}^+}\{\sigma(w_r^+)=\infty,\ \zeta(w_r^+)<\infty,\ x_{\zeta-}(w_r^+)\in D\}\right)$

$=0$である．

最後に(B4)を証明する．0－1法則により$\widetilde{P}_\xi(\sigma_1>0)$も$\widetilde{P}_\xi(\sigma_2>0)$も$\widetilde{P}_\xi(\sigma_3>0)$も0または1であるから，$\widetilde{P}_\xi(\sigma_1>0)=\widetilde{P}_\xi(\sigma_2>0)=\widetilde{P}_\xi(\sigma_3>0)=1$なる$\xi$が存在したとして矛盾を出せばよい．

$$1=\widetilde{P}_\xi\left(\exists t>0, \int_0^t l(\xi_s)dS=0\right)=P_\xi\left(\exists t>0, \int_0^t l(x_{\tau(s)})dS=0\right)$$

$$=P_\xi\left(\exists t>0, \int_0^{\tau(t)} l(x_s)d\Phi=0\right)=P_\xi\left(\exists t>0, \int_0^t l(x_s)d\Phi=0\right)$$

であるから，$\widetilde{\sigma}_1=\inf\{t:\int_0^t l(x_s)d\Phi>0\}$とおくと$P_\xi(\widetilde{\sigma}_1>0)=1$である．同様に$\widetilde{\sigma}_2=\inf\{t:\int_0^t m(x_s)d\Phi>0\}$とおくと$P_\xi(\widetilde{\sigma}_2>0)=1$であり，$\widetilde{\sigma}_3=\inf\{t:\int_0^t NI(x_s)d\Phi=\infty\}$とおくと$P_\xi(\widetilde{\sigma}_3>0)=1$である．さて$\widetilde{\sigma}_4=\inf\{t:\int_0^t NI(x_s)d\Phi>1\}$とおく．$[0,\widetilde{\sigma}_3]$では$\int_0^t NI(x_s)d\Phi$は連続だから$\widetilde{P}_\xi(\widetilde{\sigma}_4>0)=1$である．$\rho=\widetilde{\sigma}_1\wedge\widetilde{\sigma}_2$

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

$\wedge \tilde{\sigma}_4$ とおくと定理 4.1 により

$$\alpha G_\alpha I(\xi) = \alpha E_\xi\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t}(l + mJ_\alpha 1 + NG_\alpha^{min} I)\,d\Phi\right)$$

$$= \alpha E_\xi\left(\int_0^\rho e^{-\alpha t} N G_\alpha^{min} I\, d\Phi\right) + \alpha E_\xi\left(e^{-\alpha\rho} H G_\alpha I(x_\rho)\right)$$

$$\leq E_\xi\left(\int_0^\rho e^{-\alpha t} N 1\, d\Phi\right) + E_\xi\left(e^{-\alpha\rho}\right).$$

$\int_0^\rho e^{-\alpha t} N 1\, d\Phi \leq \int_0^{\tilde{\sigma}_4} N 1\, d\Phi \leq 1$ と $P_\xi(\rho > 0) = 1$ に注意し，$\alpha \to \infty$ とすると $\lim_{\alpha\to\infty} \alpha G_\alpha 1(\xi) = 0$ を得る．これは，一般に $\lim_{\alpha\to\infty} \alpha G_\alpha 1(\xi) = 1$ であることに矛盾する．

<u>定理 5.5 の証明.</u>　　$\alpha \geq 0$，$\lambda > 0$ に対して

(5.17)　$$\tilde{K}_\lambda^\alpha(\xi, E) = \tilde{E}_\xi\left(\int_0^\infty \chi_E(x_t)\, e^{-\alpha t - \int_0^t g_\alpha(\xi_s)\,ds} \prod_{0<s\leq t}(1 - p_\alpha(\xi_{s-}, \xi_s))\,dt\right)$$

とおく．ただし，$p_0 = 0$, $g_0 = 0$ とおく．定理 5.5 の証明には，$\tilde{K}_\lambda^\alpha = K_\lambda^\alpha$ を示せばよい．$\tilde{K}_\lambda^0 = K_\lambda^0$ は明かであるから，

(5.18)　$$\tilde{K}_\lambda^\alpha - \tilde{K}_\mu^\alpha + (\lambda - \mu)\tilde{K}_\lambda^\alpha \tilde{K}_\mu^\alpha = 0$$

(5.19)　$$\tilde{K}_\lambda^\alpha - \tilde{K}_\lambda^\beta + \tilde{K}_\lambda^\alpha (U_\alpha - U_\beta)\tilde{K}_\lambda^\beta = 0$$

の2つがいえれば，(4.21)，(4.23) を考え合せ，$\|K_\lambda^\alpha\| \leq 1/\lambda$，$\|\tilde{K}_\lambda^\alpha\| \leq 1/\lambda$ に注意し (4.25)，(4.26) の形の式を使って $\tilde{K}_\lambda^\alpha = K_\lambda^\alpha$ が得られる．さて，(5.18) の証明であるが，定理 2.3 の証明の中で述べた通り (5.17) の右辺における $\prod_{0<s\leq t}(1 - p_\alpha(\xi_{s-}, \xi_s))$ は右連続に変形してよいから，定理 2.1 から直ちに (5.18) が得られる．(5.19) の証明は定理 2.3 による．$\lambda > 0$ と (5.9) によって ($V_\alpha 1$ が有界であることに注意) 定理 2.3 の仮定がみたされるから，$f \in B^+(\partial D)$ に対し

$$\tilde{K}_\lambda^\alpha f - \tilde{K}_\lambda^\beta f + \tilde{E}_\xi\left(\int_0^\infty e^{-\lambda t - \int_0^t g_\alpha(\xi_s)\,ds}\left(\prod_{0<s\leq t}(1 - p_\alpha(\xi_{s-}, \xi_s))\right)\left\{(g_\alpha - g_\beta)\right.\right.$$

$$\left.\left.\tilde{K}_\lambda^\beta f(\xi_t)\,dt + (\tilde{\omega}_{p_\alpha} - \tilde{\omega}_{p_\beta})\tilde{K}_\lambda^\beta f(\xi_t)\,d\tilde{L}\right\}\right) = 0$$

である．左辺は (5.9) と $g_\alpha g + V_\alpha g = U_\alpha g \quad (\forall g \in B^+(\partial D))$ によって $\tilde{K}^\alpha_\lambda - \tilde{K}^\beta_\lambda + \tilde{K}^\alpha_\lambda (U_\alpha - U_\beta) \tilde{K}^\beta_\lambda$ である． q.e.d.

§6．境界要素のみたす条件 II．

定理 5.2，5.3 の証明を与えることにする．それには境界要素から，D 内で $\mathbb{M}^{min}$ と一致する S 上の広義の拡散過程を構成しなければならない．

<u>補題 6.1.</u> $\mathbb{M}$ を条件 (A) をみたす S 上の Markov 過程とする．

$$(6.1) \qquad E_x\left(\int_0^\sigma e^{-\alpha t} \chi_E(x_t)\,dt\right) = G_\alpha^{min}(x, E), \quad \alpha > 0,\ x \in S,\ E \in \mathcal{B}(D)$$

および

$$(6.2) \qquad E_x(e^{-\alpha\sigma} : x_\sigma \in E) = H_\alpha(x, E), \qquad \alpha \geq 0,\ x \in S,\ E \in \mathcal{B}(\partial D),$$

が成り立つならば，$\mathbb{M}$ は (A), (M.1), (M.2), (M.3) をみたす Markov 過程に同値である．

<u>証明</u> (M.1) は (6.2) から $P_\xi(\sigma = 0) = \lim_{\alpha \to \infty} E_\xi(e^{-\alpha\sigma} : x_\sigma \in \partial D) = \lim_{\alpha \to \infty} H_\alpha(\xi, \partial D) = 1$ によっていえる．(M.3) は (6.1) から分る．(M.2) をみたす同値なものがとれることをいうには，

$$(6.3) \qquad E_x\left(\sum_{0<t<\infty} \chi_D(x_{t-}) \chi_S(x_t) c(x_{t-}, x_t)\right) = 0, \qquad x \in S$$

をいえばよい．ただし $c(x, y)$ は $x \neq y$ のとき 1，$x = y$ のとき 0 とする．まず，$\mathbb{M}^{min}$ が拡散過程であることと (M.3) により

$$E_x\left(\sum_{0<t\leq\sigma} \chi_D(x_{t-}) \chi_D(x_t) c(x_{t-}, x_t)\right) = E_x\left(\sum_{0<t<\sigma} \chi_D(x_{t-}) \chi_D(x_t) c(x_{t-}, x_t)\right)$$

$$= E_x^{min}\left(\sum_{0<t<\zeta} \chi_D(x_{t-}) \chi_D(x_t) c(x_{t-}, x_t)\right) = 0, \qquad x \in D.$$

である．また

$$E_x\left(\sum_{0<t\leq\sigma} \chi_D(x_{t-}) \chi_{\partial D}(x_t)\right) = E_x(\chi_D(x_{\sigma-}) \chi_{\partial D}(x_\sigma) : \sigma > 0) = 0, \quad x \in D$$

である．なぜなら，(6.2) と (M.3) により

$$P_x(0 < \sigma < \infty) = P_x(x_\sigma \in \partial D) = H_0 1(x) = P_x^{min}(\zeta < \infty,\ x_{\zeta-} \in \partial D)$$

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

$$= P_x(\sigma\wedge\zeta<\infty,\ x_{(\sigma\wedge\zeta)-}\in\partial D)$$

であり，$\{\sigma_{D^c_t}\}$ に対し条件 (A3) を用いると $\{\sigma\wedge\zeta<\infty,\ x_{(\sigma\wedge\zeta)-}\in\partial D\}$ の上で a.s. に $\sigma\wedge\zeta=\sigma$, $x_{\sigma-}=x_{(\sigma\wedge\zeta)-}=x_\sigma$ がいえるので,結局，$\{0<\sigma<\infty\}$ の上で a.s. に $x_{\sigma-}\in\partial D$ であるから 故に，

$$E_x\Big(\sum_{0<t\le\sigma}\chi_D(x_{t-})\chi_S(x_t)c(x_{t-},x_t)\Big)=0,\quad x\in D$$

である．従って $r\geq 0$ を固定した時

$$E_x\Big(\chi_D(x_r)\sum_{r<t\le r+\sigma(w_r^+)}\chi_D(x_{t-})\chi_S(x_t)c(x_{t-},x_t)\Big)=0,\quad x\in S$$

である．

$$B=\bigcap_{r\in\mathbb{Q}^+}\Big\{w:\chi_D(x_r)\sum_{r<t\le r+\sigma(w_r^+)}\chi_D(x_{t-})\chi_S(x_t)c(x_{t-},x_t)=0\Big\}$$

とおけば $P_x(B)=0$, $x\in S$ でしかも $w\in B$ に対しては

$$\sum_{0<t<\infty}\chi_D(x_{t-})\chi_S(x_t)c(x_{t-},x_t)=0$$

である．故に (6.3) がいえた． q.e.d.

<u>補題 6.2.</u> $la+m+Nb=0$ を除いて定理 5.2 と同じ仮定をする．$Nb(\xi)$ が有界とし，また $la+m+Nb\geq\delta$ なる正数 δ が存在するとする．この時定理 5.5 の P_α, g_α ($\alpha=0$ の時は $P_\alpha=0$, $g_\alpha=0$ とする) を用いて，$\alpha+\lambda>0$ なる $\alpha\geq0$, $\lambda\geq0$ に対し

(6.4) $$K_\lambda^\alpha(\xi,E)=\tilde{E}_\xi\Big(\int_0^\infty e^{-\lambda t-\int_0^t g_\alpha(\xi_s)ds}\Big(\prod_{0<s\le t}(1-P_\alpha(\xi_{s-},\xi_s))\Big)f(\xi_t)\,dt\Big)$$

とおくと，K_λ^α は $C(\partial D)$ を $C(\partial D)$ 内にうつす有界作用素で $\xi\in\partial D$, $E\in\mathcal{B}(\partial D)$

(6.5) $$K_\lambda^\alpha-K_\mu^\alpha+(\lambda-\mu)K_\lambda^\alpha K_\mu^\alpha=0$$

$$K_\lambda^\alpha-K_\lambda^\beta+K_\lambda^\alpha(U_\alpha-U_\beta)K_\lambda^\beta=0$$

$$\alpha K_0^\alpha(l+mJ_\alpha+NG_\alpha^{min})1\le1$$

をみたす，ただし，$U_\alpha=\alpha(l+mJ_\alpha+NG_\alpha^{min})H$ とおく．

なお，K_λ^0 が $\tilde{M}$ の 0 次 Green 核であること，$\lambda>0$ の時 $\|K_\lambda^\alpha\|\le1/\lambda$ なることは明かである．また (6.7) から

(6.8) $$\|K_0^\alpha U_\alpha\|\le1$$

である．

証明　$\lambda>0$ の時 (6.5)，(6.6) が成り立つことは既に定理 5.5 の証明の中で示した．$\lambda>0$ の時 K_λ^α が $C(\partial D)$ を $C(\partial D)$ 内にうつすことも，(5.2)，(5.3) により K_λ^0 と U_α が $C(\partial D)$ を $C(\partial D)$ 内にうつすことから示される．$f\in C(\partial D)$ ならば，$K_\lambda^\alpha f$ が (4.25)，(4.26) によって連続函数列の一様収束極限で表わされるからである．さて，(6.7) でいえたとすると，$1=J_\gamma a=J_\alpha(a+(\alpha-\gamma)b)$，$b=G_\gamma^{min}a=G_\alpha^{min}(a+(\alpha-\gamma)b)$ を使って

$$K_0^\alpha 1\le\frac{1}{\delta}K_0^\alpha(la+m+Nb)=\frac{1}{\delta}K_0^\alpha(l+mJ_\alpha+NG_\alpha^{min})(a+(\alpha-\gamma)b)$$
$$\le\frac{1}{\alpha\delta}\|a+(\alpha-\gamma)b\|<\infty$$

であるから K_0^α も有界である．そして，(6.5)，(6.6) で λ または μ が 0 の場合が，$\lambda\downarrow 0$ または $\mu\downarrow 0$ とすることによって得られる．また $\|K_\lambda^\alpha\|<\frac{1}{\lambda}$ となる．($\|K_\lambda^\alpha\|=1/\lambda$ とすると，$\exists\xi_0\in\partial D$ で $K_\lambda^\alpha 1(\xi_0)=1/\lambda$，従って，$\hat{P}_{\xi_0}$ 測度 1 で $\zeta=\infty$ かつ a.e. t に対し $e^{-\int_0^t \gamma_\alpha(\xi_s)ds}\prod_{0<s\le t}(1-p_\alpha(x_{s-},x_s))=1$ となり $K_0^\alpha 1(\xi_0)=\infty$ となって矛盾) 故に (4.26) により K_0^α も $C(\partial D)$ を $C(\partial D)$ 内にうつす．

以下，(6.7) の証明．$C_\alpha=\alpha(l+mJ_\alpha+NG_\alpha^{min})$ とおく．$K_0^\alpha C_\alpha 1\le 1$ をいえばよい．$\varepsilon>0$ に対し

$$v_\alpha^\varepsilon(\xi)=\int_{\partial D}V_\alpha(\xi,d\eta)\chi_{\{dis(\xi,\eta)>\varepsilon\}}(\xi,\eta)$$
$$C_\alpha^\varepsilon(\xi)=\gamma_\alpha(\xi)+v_\alpha^\varepsilon(\xi)+C_\alpha(I-H)1(\xi)$$

とおく．$\varepsilon\downarrow 0$ の時 $v_\alpha^\varepsilon(\xi)\uparrow V_\alpha 1(\xi)$ であり，$C_\alpha=U_\alpha+C_\alpha(I-H)$ であるから $C_\alpha^\varepsilon(\xi)\uparrow C_\alpha 1(\xi)$ である．$\rho=\inf\{s:0<s<\zeta,\ dis(x_{s-},x_s)>\varepsilon\}$ とおき，$\rho_0=0$，$\rho_{n+1}=\rho_n+\rho(w_{\rho_n}^+)$ とおく．明らかに，$\lim_{n\to\infty}\rho_n=\infty$ である．$\rho_n<\infty$ の時 $\gamma(n,\varepsilon)=1-p_\alpha(\xi_{\rho_n-},\xi_{\rho_n})$ とおく．

$$K_0^\alpha C_\alpha^\varepsilon(\xi)\le\hat{E}_\xi\left(\int_0^\infty e^{-\int_0^t\gamma_\alpha(\xi_s)ds}\left(\prod_{\rho_n\le t}\gamma(n,\varepsilon)\right)C_\alpha^\varepsilon(\xi_t)\,dt\right)$$

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

$$= \widetilde{E}_\xi\left(\sum_{n=0}^{\infty}\int_{\rho_n}^{\rho_{n+1}} e^{-\int_0^t g_\alpha(\xi_s)ds}\left(\prod_{m\le n}\gamma(m,\varepsilon)\right)C_\alpha^\varepsilon(\xi_t)\,dt\right)$$

$$= \widetilde{E}_\xi\left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-g_\alpha T(\rho_n)}\left(\prod_{m\le n}\gamma(m,\varepsilon)\right)\chi_{\{\rho_n<\infty\}}\widetilde{E}_{\xi_{\rho_n}}\left(\int_0^{\rho} e^{-g_\alpha T(t)}C_\alpha^\varepsilon(\xi_t)\,dt\right)\right)$$

（$=*$ とおく）

$\rho\wedge\zeta=\rho'$ とおく．$C_\alpha(I-H)1=\alpha(mJ_\alpha+NG_\alpha^{min})(I-H)1\le m\Theta+Nh$ （補題5.1参照）と(B3), (5.9) により

$$\widetilde{E}_\xi\left(\int_0^{\rho} e^{-g_\alpha T(t)}C_\alpha^\varepsilon(\xi_t)\,dt\right)=\widetilde{E}_\xi\left(\int_0^{\rho'}\right)=\widetilde{E}_\xi\left(\int_0^{\rho'} e^{-g_\alpha T(t)}(g_\alpha+v_\alpha^\varepsilon+C_\alpha(I-H)1)(\xi_t)\,dt\right)$$

$$\le \widetilde{E}_\xi\left(\int_0^{\rho'} e^{-g_\alpha T(t)}(g_\alpha dt+\widetilde{Q}(p_\alpha f)\,d\widetilde{L}+d\widetilde{Z})\right).$$

ただし $f(\xi,\eta)$ は $\{(\xi,\eta): dis(\xi,\eta)\ge\varepsilon\}$ の特性函数とする．更に命題4.8、4.9を使うと

$$= \widetilde{E}_\xi\left(\int_0^{\rho'} e^{-g_\alpha T(t)}g_\alpha dt+\sum_{0<t\le\rho'} e^{-g_\alpha T(t)}(p_\alpha f)(\xi_{t-},\xi_t)+\chi_{\{\zeta\le\rho,\ \zeta<\infty\}}e^{-g_\alpha T(\rho')}\right)$$

$$= \widetilde{E}_\xi\left(1-e^{-g_\alpha T(\rho)}+\chi_{\{\rho<\infty\}}e^{-g_\alpha T(\rho)}p_\alpha(\xi_{\rho-},\xi_\rho)+\chi_{\{\rho=\infty,\ \zeta<\infty\}}e^{-g_\alpha T(\rho)}\right)$$

$$\le \widetilde{E}_\xi\left(1-e^{-g_\alpha T(\rho)}(1-p_\alpha(\xi_{\rho-},\xi_\rho))\chi_{\{\rho=\infty\}}\right)$$

であるから、

$$*\le \widetilde{E}_\xi\left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-g_\alpha T(\rho_n)}\chi_{\{\rho_n<\infty\}}\left(\prod_{m\le n}\gamma(m,\varepsilon)\right)\left(1-e^{-(g_\alpha T(\rho_{n+1})-g_\alpha T(\rho_n))}\frac{\chi_{\{\rho_{n+1}<\infty\}}}{\gamma(n+1,\varepsilon)}\right)\right)$$

$$\le 1$$

である．即ち $K_0^\alpha C_\alpha^\varepsilon(\xi)\le 1$ がいえたから $\varepsilon\downarrow 0$ として $K_0^\alpha C_\alpha 1\le 1$ を得る。

q.e.d.

<u>補題6.3</u>　$\ell a+m+N\mathcal{C}=1$ を除いて定理5.2と同じ仮定をする．$N\mathcal{C}(\xi)$ が有界とし，また $\ell(\xi)\ge\delta$ なる正数 δ が存在するとする．(6.4)で定義した K_0^α を用いて

(6.9)　　$G_\alpha=G_\alpha^{min}+H_\alpha K_0^\alpha(\ell+mJ_\alpha+NG_\alpha^{min}),\qquad \alpha>0$

とおく．この時，D内で $\mathbb{M}^{min}$ と一致する広義の拡散過程 $\mathbb{M}$ でそ

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

の Green 核が G_α と一致するようなものが存在する．

証明　(5.3) と補題 6.2 により G_α は $C(\partial D)$ を $C(\partial D)$ 内へうつすから，定理 1.2 の諸条件をみたすことを確かめれば，$C(S)$ の上の半群を構成することができる．それに対し定理 1.1 によって条件 (A) をみたす Markov 過程を構成し，それが D 内で $\mathbb{M}^{min}$ と一致する広義拡散過程であることを示す．

まず $f \geq 0 \Longrightarrow G_\alpha f \geq 0$、すなわち G_α の非負性は，(6.9) の右辺に現われている作用素がすべて非負だから自明．次に $\|G_\alpha\| \leq 1/\alpha$ は (6.7) からいえる．すなわち，

$$\alpha G_\alpha 1 \leq \alpha G_\alpha^{min} 1 + \alpha H_\alpha K_0^\alpha (\ell + m J_\alpha + N G_\alpha^{min}) 1$$

$$\leq \alpha G_\alpha^{min} 1 + H_\alpha 1 = E_x(1 - e^{-\alpha(\sigma\wedge\zeta)} + e^{-\alpha\sigma}) \leq 1.$$

次に resolvent 等式は

$$G_\alpha G_\beta = G_\alpha^{min} G_\beta^{min} + G_\alpha^{min} H_\beta K_0^\beta(\ell + mJ_\beta + NG_\beta^{min}) + H_\alpha K_0^\alpha (mJ_\alpha + NG_\alpha^{min}) G_\beta^{min}$$

$$+ H_\alpha K_0^\alpha(\ell + mJ_\alpha + NG_\alpha^{min}) H_\beta K_0^\beta(\ell + mJ_\beta + NG_\beta^{min}),$$

(4.1), (4.2), (4.3), (4.24), (6.6) により

$$(\alpha-\beta) G_\alpha G_\beta = -(G_\alpha^{min} - G_\beta^{min}) - (H_\alpha - H_\beta) K_0^\beta(\ell + mJ_\beta + NG_\beta^{min})$$

$$- H_\alpha K_0^\alpha (mJ_\alpha - mJ_\beta + NG_\alpha^{min} - NG_\beta^{min}) + H_\alpha K_0^\alpha (U_\alpha - U_\beta) K_0^\beta (\ell + mJ_\beta + NG_\beta^{min})$$

$$= -(G_\alpha - G_\beta)$$

で証明される．残りの (1.9) をいうには

(6.10) $$\lim_{\alpha\to\infty} \|\alpha G_\alpha f - f\| = 0, \qquad f \in C(S)$$

をいえばよい．　$C_\alpha = \alpha(\ell + mJ_\alpha + NG_\alpha^{min})$ とおく．

$$\alpha G_\alpha f - f = \alpha G_\alpha^{min} f + H_\alpha f - f + H_\alpha(K_0^\alpha C_\alpha f - f),$$

$$K_0^\alpha C_\alpha f - f = K_0^\alpha U_\alpha f - f + K_0^\alpha C_\alpha (I - H) f$$

であるから

(6.11) $$\|\alpha G_\alpha^{min} f + H_\alpha f - f\| \to 0, \qquad f \in C(S)$$

(6.12) $$\|K_0^\alpha U_\alpha f - f\| \to 0, \qquad f \in C(\partial D)$$

(6.13) $$\|K_0^\alpha C_\alpha f\| \to 0, \qquad f \in C'(D)$$

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

の3つを示せばよい．ただし $C'(D)=\{f: f\in C(S)$ かつ ∂D で $f=0\}$ とおく．$\overline{G}_\alpha=G_\alpha+\frac{1}{\alpha}H_\alpha$ とおくと $\overline{G}_\alpha$ は $C(S)$ を $C(S)$ 内にうつし，非負，$\|\overline{G}_\alpha\|\leq 1/\alpha$ で resolvent 等式をみたす．しかも，$\forall f\in C(S)$, $\forall x\in S$ に対し $\alpha\overline{G}_\alpha f(x)\to f(x)\ (\alpha\to\infty)$ であるから，$C(S)$ の有界加法的汎函数で $\overline{G}_\alpha$ の値域で 0 なるものは $C(S)$ 全体で 0，故に Hahn-Banach の定理によって，$\overline{G}_\alpha$ の値域は $C(S)$ で稠密である．故に定理 1.2 により $\overline{G}_\alpha$ は $C(S)$ の上のある強連続半群の resolvent に等しく，従って (6.11) が成り立つ．

さて，(6.12)，(6.13) 証明ではじめて $l\geq\delta>0$ を用いる．(今までは，$la+m+Nb\geq\delta>0$ ならよかった．) まず，

(6.14) $$\|K_0^\alpha\|\leq 1/\alpha\delta$$

となることに注意しておく．(6.12) を示そう．$f=K_\lambda^0 g$ の場合

$$K_0^\alpha U_\alpha f-f=(K_0^\alpha-K_\lambda^\alpha)U_\alpha f+K_\lambda^\alpha U_\alpha K_\lambda^0 g-K_\lambda^0 g=\lambda K_0^\alpha K_\lambda^\alpha U_\alpha f-K_\lambda^\alpha g$$

であるから (6.8)，(6.14) により

$$\|K_0^\alpha U_\alpha f-f\|\leq\frac{\lambda}{\alpha\delta}\|f\|+\frac{1}{\alpha\delta}\|g\|$$

となり (6.12) が成り立つ．K_λ^0 の値域は稠密だから，一般の $f\in C(\partial D)$ に対しては $\forall\varepsilon>0$ に対し f_1 を K_λ^0 の値域から選んで $\|f-f_1\|<\varepsilon$ とすれば，(6.8) により

$$\begin{aligned}\|K_0^\alpha U_\alpha f-f\|&\leq\|K_0^\alpha U_\alpha(f-f_1)\|+\|K_0^\alpha U_\alpha f_1-f_1\|+\|f_1-f\|\\&\leq 2\varepsilon+\|K_0^\alpha U_\alpha f_1-f_1\|\end{aligned}$$

であるから，やはり (6.12) がいえる．(6.11) から G_α^{min} の $C'(D)$ における値域は稠密であるから，(6.13) は $g\in C'(D)$ によって $f=G_\beta^{min}g$ とかける時にいえばよい．

$$C_\alpha G_\beta^{min}g=\alpha(mJ_\alpha G_\beta^{min}+NG_\alpha^{min}G_\beta^{min})g=\alpha(mJ_\beta G_\alpha^{min}+NG_\beta^{min}G_\alpha^{min})g$$

だから

$$\|C_\alpha G_\beta^{min}g\|\leq\frac{1}{\alpha\delta}\|mJ_\beta 1+NG_\beta^{min}1\|\cdot\|g\|\to 0\qquad(\alpha\to\infty)$$

となる．

以上で G_α が定理 1.2 の条件をみたすことが証明されたので，定理 1.1，1.2 により，S の上に G_α を Green 核とし条件 (A) をみたす Markov 過程が存在する．これを $\mathbb{M}=(W, P_x: x\in S)$ で表わす．

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

$\forall f\in B(\partial D)$ と $\forall\alpha>0$ に対し $f/\ell\in B(\partial D)$ で (B.1) と $G_\alpha^{min}\chi_{\partial D}=0$ により $G_\alpha(\chi_{\partial D}\frac{f}{\ell})=H_\alpha K_0^\alpha f$ であり従って,

$$G_\alpha(\chi_{\partial D}\frac{f}{\ell})=E_x\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t}\chi_{\partial D}\frac{f}{\ell}dt\right)=E_x\left(e^{-\alpha\sigma}G_\alpha(\chi_{\partial D}\frac{f}{\ell})(x_\sigma)\right)$$

$$=E_x\left(e^{-\alpha\sigma}K_0^\alpha f(x_\sigma)\right)$$

である. 故に $H_\alpha K_0^\alpha f=E_x(e^{-\alpha\sigma}K_0^\alpha f(x_\sigma))$. K_0^α の値域は K_λ^0 の値域に等しく, 従って $C(\partial D)$ で稠密だから, (6.2) が $\alpha>0$ に対していえた. $\alpha\downarrow 0$ とすることによって, $\alpha=0$ の場合の (6.2) も得られる. これを使うと $f\in B(S)$ に対し

$$G_\alpha^{min}f=G_\alpha f-H_\alpha K_0^\alpha(\ell+mJ_\alpha+NG_\alpha^{min})f=G_\alpha-H_\alpha G_\alpha f=E_x\left(\int_0^\sigma e^{-\alpha t}f(x_t)dt\right).$$

すなわち (6.1) も得られた. 故に, 補題6.1 により, $\mathbb{M}$ は条件 (A), (M1), (M2), (M3) をみたす Markov 過程に同値である. これを同じ文字 $\mathbb{M}$ で表わそう.

次に, $\mathbb{M}$ が条件 (L) をみたすことをいう. η を $\mathbb{M}^{min}$ の標準測度とし, ν を $\widetilde{\mathbb{M}}$ に関する T の標準測度とする. u が $\mathbb{M}$ に関し α-excessive で $\eta+\nu$ に関し a.e. に 0 とする時, $u=0$ であることをいおう. 命題1.2 により, u を有界としていえばよい. u の D への制限は (M.3) と u の有界性により $\mathbb{M}^{min}$ に関し α-excessive だから, u は D 内で 0 である. (B1) により $G_\alpha u=H_\alpha K_0^\alpha(\ell u)$ であるが, $K_\lambda^0(\ell u)=0$ したがって (6.5), (6.6) から $K_0^\alpha(\ell u)=0$ であるから, $G_\alpha u=0$ である. 故に $u=\lim_{\alpha\to\infty}\alpha G_\alpha u=0$. 故に $\eta+\nu$ が $\mathbb{M}$ の標準測度である. 以上により, $\mathbb{M}$ が D 内で $\mathbb{M}^{min}$ と一致する広義拡散過程であることがいえた. q.e.d.

<u>注意</u> 上に構成した $\mathbb{M}$ の境界要素 $\widetilde{\mathbb{M}}'$, ℓ', m', N' を求めておこう. $\widetilde{\mathbb{M}}'$ に関する T の境界要素を ν' とする. $\forall f\in B(S)$ に対し

$$G_\alpha f=G_\alpha^{min}f+H_\alpha K_0^\alpha(\ell+mJ_\alpha+NG_\alpha^{min})f=G_\alpha^{min}f+H_\alpha K'^\alpha(\ell'+m'J_\alpha+N'G_\alpha^{min})f$$

が成り立つ. $f=\chi_{\partial D}\frac{g}{\ell}$, $g\in B(\partial D)$ とおくと, $K_0^\alpha g=K'^\alpha(\frac{\ell'}{\ell}g)$ を得る. 故に

$$K'^{\alpha}\left(\frac{l'}{l}(l+mJ_\alpha+NG_{T_\alpha}^{min})f\right)=K'^{\alpha}(l'+m'J_\alpha+N'G_{T_\alpha}^{min})f$$

である．特に $\alpha=\gamma$, $f=a$ の場合として $K'^{\gamma}\left(\frac{l'}{l}(la+m+Nb)\right)=K'^{\gamma}I$ を得るから $\frac{l'}{l}(la+m+Nb)=1$, ν'-a.e. である(命題1.4)．従って $l'>0$, ν'-a.e. であるから，$K_0^{\alpha}g=K'^{\alpha}(\frac{l'}{l}g)$, $\forall g\in B(\partial D)$ によって ν と ν' とが互いに絶対連続であることが分る．故に，定理1.1の一意性によって，$\widetilde{M}'$, $\frac{l'}{l}l$, $\frac{l'}{l}m$, $\frac{l'}{l}N$. すなわち，$\widetilde{M}'$, $\frac{l}{la+m+Nb}$, $\frac{m}{la+m+Nb}$, $\frac{1}{la+m+Nb}N$ が M の境界要素である．また，$\forall g\in B(\partial D)$ に対し $K'^{\alpha}g=K_0^{\alpha}((la+m+Nb)g)$ である．

さて，定理5.2の証明にうつる．与えられた $\widetilde{M}$, l, m, N を少し変化させて上の補題の条件をみたすようにし，対応する広義拡散過程に時間変更を施して，求めるものを構成するのである．

<u>定理5.2の証明</u>　$\widetilde{M}$, l, m, N を定理5.2の仮定で与えられた諸要素とすると，すぐ分るように，$\widetilde{M}$, $1+l$, m, N は補題6.3の仮定をみたす．$\widetilde{M}$, $1+l$, m, N から補題6.3によって構成した，D内で M^{min} と一致する広義拡散過程を $\overline{M}=(\overline{W}, \overline{P}_x: x\in S)'$ とする．$\overline{M}$ の境界における (a,γ)-local time を Φ とおき，$\overline{M}$ の Green 核を $\overline{G}_\alpha$ とおき，

$$\overline{K}_x^{\alpha}(x,E)=\overline{E}_x\left(\int_0^\infty e^{-\lambda\Phi-\alpha t}\chi_E(x_t)\,d\Phi\right)$$

とおく．

$$\overline{G}_\alpha=G_{T_\alpha}^{min}+H_\alpha\overline{K}_0^{\alpha}(\overline{l}+\overline{m}J_\alpha+\overline{N}G_\alpha^{min}),$$

$$\overline{l}=\frac{1+l}{2},\quad \overline{m}=\frac{m}{2},\quad \overline{N}=\frac{1}{2}N$$

となる．$\widetilde{M}$ の λ 次 Green 核 $\widetilde{G}_\lambda$ は

$$(6.15)\qquad \widetilde{G}_\lambda f(\xi)=\overline{E}_\xi\left(\int_0^\infty e^{-\frac{\lambda}{2}\Phi(t)}f(x_t)\frac{1}{2}\,d\Phi\right)$$

となる．その証明は次の通り

$$\overline{K}_\lambda^{\alpha}f(\xi)=\overline{E}_\xi\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t-\frac{\lambda}{2}\Phi}f(x_t)\frac{1}{2}\,d\Phi\right)$$

とおく．

$$\overline{E}_x\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t}g\,dt\right)=\overline{E}_x\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t}(\overline{l}+\overline{m}J_\alpha+\overline{N}G_\alpha^{min})g\,d\Phi\right)$$

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

から補題 3.3 により

$$\overline{E}_\xi\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t-\frac{\lambda}{2}\overline{\Phi}} g\,dt\right)=\overline{E}_\xi\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t-\frac{\lambda}{2}\overline{\Phi}}(\overline{l}+\overline{m}J_\alpha+\overline{N}G_\alpha^{min})g\,d\overline{\Phi}\right).$$

従って定理 2.1 により

$$\overline{\overline{K}}{}_\lambda^\alpha f-\overline{\overline{K}}{}_\lambda^\beta f=-(\alpha-\beta)\overline{E}_\xi\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t-\frac{\lambda}{2}\overline{\Phi}} H_\beta\overline{\overline{K}}{}_\lambda^\beta f\,dt\right)$$

$$=\overline{E}_\xi\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t-\frac{\lambda}{2}\overline{\Phi}}(\overline{\overline{U}}_\alpha-\overline{\overline{U}}_\beta)\overline{\overline{K}}{}_\lambda^\beta f\,\frac{1}{2}d\overline{\Phi}\right)$$

である．ただし，$\overline{\overline{U}}_\alpha=\alpha(1+l+mJ_\alpha+NG_\alpha^{min})H$ とおくと $(\alpha-\beta)(1+l+mJ_\alpha+NG_\alpha^{min})H_\beta=\overline{\overline{U}}_\alpha-\overline{\overline{U}}_\beta$ となることを用いた．
故に

$$\overline{\overline{K}}{}_\lambda^\alpha-\overline{\overline{K}}{}_\lambda^\beta+\overline{\overline{K}}{}_\lambda^\alpha(\overline{\overline{U}}_\alpha-\overline{\overline{U}}_\beta)\overline{\overline{K}}{}_\lambda^\beta=0$$

である．また，

$$\overline{\overline{K}}{}_\lambda^\alpha-\overline{\overline{K}}{}_\mu^\alpha+(\lambda-\mu)\overline{\overline{K}}{}_\lambda^\alpha\overline{\overline{K}}{}_\mu^\alpha=0$$

も定理 2.1 から明らかである．$\overline{\overline{K}}{}_\lambda'^\alpha$ は $\widetilde{M}$, $1+l$, m, N から補題 6.2 によって構成した核としよう．補題 6.3 の後で注意したように $\overline{\overline{K}}{}_0^\alpha=\overline{\overline{K}}{}_0'^\alpha$ であるから，上の２式から $\overline{\overline{K}}{}_\lambda^\alpha=\overline{\overline{K}}{}_\lambda'^\alpha$ を得る．故に，$\alpha=0$ の場合として (6.15) がいえた．

$$\Phi=\chi_D T+\frac{l}{2}\overline{\Phi},\quad \rho=\inf\{t:\Phi(t)>0\}\ とおく．$$

(6.16) $\quad \overline{M}$ に関し a.s. に $\rho=0$

を証明しよう．

$\forall f\in B(S)$，$\forall\xi\in\partial D$ に対し

(6.17) $\quad \overline{E}_\xi(e^{-\gamma\sigma_D}f(x_{\sigma_D}):x_{\sigma_D}\in D)=\overline{E}_\xi\left(\sum_{0<t\le\sigma_D}e^{-\gamma t}\chi_{\partial D}(x_{t-})\chi_D(x_t)f(x_t)\right)$

$$=\overline{E}_\xi\left(\int_0^{\sigma_D}e^{-\gamma t}\chi_{\partial D}\overline{Q}_D f\,d\overline{L}\right)=\overline{E}_\xi\left(\int_0^{\sigma_D}e^{-\gamma t}\overline{N}f\,d\overline{\Phi}\right)$$

であるから

$$\overline{E}_\xi\left(\int_0^{\sigma_D}e^{-\gamma t}\overline{N}b\,d\overline{\Phi}\right)=\overline{E}_\xi(e^{-\gamma\sigma_D}b(x_{\sigma_D}))=\overline{E}_\xi\left(\int_{\sigma_D}^{\sigma_D+\sigma(w_{\sigma_D}^+)}e^{-\gamma t}a(x_t)\,dt\right)$$

$$=\overline{E}_\xi\left(\int_0^{\sigma_D+\sigma(w_{\sigma_D}^+)}e^{-\gamma t}\chi_D a\,dt\right)$$

補題 3.2 により

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

$$= E_\xi\left(\int_0^{\sigma_D+\sigma(w_{\sigma_D}^+)} e^{-\gamma t}\, d(\widetilde{\chi_D a T})_\gamma\right)$$

$(\widetilde{\chi_D a T})_\gamma = \Phi - \bar{l}\, a\, \Phi = (\bar{m} + \bar{N} b)\Phi$ であるから

$$= E_\xi\left(\int_0^{\sigma_D} e^{-\gamma t}(\bar{m} + \bar{N} b)\, d\Phi\right)$$

故に

$$(6.18) \qquad E_\xi\left(\int_0^{\sigma_D} e^{-\gamma t}\, \bar{m}\, d\Phi\right) = 0, \quad \xi \in \partial D$$

である．(6.16) は $x \in D$ から出発した時は明かであるから，$\xi \in \partial D$ から出発した場合を考える．

$$E_\xi\left(\int_0^{\rho} l(x_s)\, d\Phi\right) \leq 2E_\xi(\Phi(\rho)) = 0.$$

Φ の定義により $\rho \leq \sigma_D$ であるから (6.18) により

$$E_\xi\left(\int_0^{\rho} m(x_s)\, d\Phi\right) \leq E_\xi\left(\int_0^{\sigma_D} m(x_s)\, d\Phi\right) = 0.$$

また，(6.17) により

$$E_\xi\left(\int_0^{\rho} N1(x_s)\, d\Phi\right) \leq E_\xi\left(\int_0^{\sigma_D} N1(x_s)\, d\Phi\right) = 2E_\xi(e^{-\gamma\sigma_D} : x_{\sigma_D} \in D) \leq 1.$$

故に，

$$(6.19) \qquad P_\xi\left(\int_0^{\rho} (l+m)(x_s)\, d\Phi = 0 \text{ かつ } \int_0^{\rho} N1(x_s)\, d\Phi < \infty\right) = 1$$

である．ところが，Φ の右連続逆函数を $\tau(t)$ とおくと，$P_\xi(\tau(0) = 0) = 1$ であるから

$$P_\xi\left(\exists t > 0, \int_0^{t} (l+m)(x_s)\, d\Phi = 0 \text{ かつ } \int_0^{t} N1(x_s)\, d\Phi < \infty\right)$$

$$= P_\xi\left(\exists t > 0, \int_0^{\tau(t)} (l+m)(x_s)\, d\Phi = 0 \text{ かつ } \int_0^{\tau(t)} N1(x_s)\, d\Phi < \infty\right)$$

$$= P_\xi\left(\exists t > 0, \int_0^{t} (l+m)(x_{\tau(s)})\, ds = 0 \text{ かつ } \int_0^{t} N1(x_{\tau(s)})\, ds < \infty\right)$$

$\frac{1}{2}\Phi$ の逆函数は $\tau(2s)$ であることに注意し，(6.15) を使うと

$$= P_\xi\left(\exists t > 0, \int_0^{t/2} (l+m)(\xi_s)\, ds = 0 \text{ かつ } \int_0^{t/2} N1(\xi_s)\, ds < \infty\right)$$

これは，(B4) によって 0 である．故に (6.19) は $P_\xi(\rho = 0) = 1$ を意味し，(6.16) がいえた．

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

定理1.9の系を適用して$\overline{M}$に対しΦによる時間変更を施して得られるS上のMarkov過程を$M=(W, P_x : x\in S)$とする．Mは右連続なpathをもつ．MのGreen核をG_αとする．

(6.20) $$G_\alpha(x,E) = \overline{E}_x\left(\int_0^\infty e^{-\alpha\Phi(t)} \chi_E(x_t)\, d\Phi\right)$$

である．

(6.21) $$K_\lambda^\alpha f(\xi) = \overline{E}_\xi\left(\int_0^\infty e^{-\alpha\Phi-\frac{\lambda}{2}\Xi} f(x_t)\,\frac{1}{2}\,d\Xi\right)$$

(6.22) $$U_\alpha = \alpha(l + mJ_\alpha + NG_\alpha^{min})H$$

とおく．K_0^αが$C(\partial D)$を$C(\partial D)$内にうつす有界作用素であることを示そう．

$$\overline{E}_x\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t}\chi_D g\,dt\right) = H_\alpha \overline{K}_0^\alpha(\bar m J_\alpha + \bar N G_\alpha^{min})g = \overline{E}_x\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t}(\bar m J_\alpha + N G_\alpha^{min}) g\, d\Xi\right)$$

であり$T - \chi_{\partial D}T + \frac{l}{2}\Xi = \Phi$であるから補題3.3を用いて

(6.23) $$\overline{E}_\xi\left(\int_0^\infty e^{-\alpha\Phi-\frac{\lambda}{2}\Xi}\chi_D g\,dt\right) = \overline{E}_\xi\left(\int_0^\infty e^{-\alpha\Phi-\frac{\lambda}{2}\Xi}(\bar m J_\alpha + \bar N G_\alpha^{min}) g\, d\Xi\right)$$

故に，定理2.1により

$$K_\lambda^\alpha f - K_\lambda^\beta f = -\overline{E}_\xi\left(\int_0^\infty e^{-\alpha\Phi-\frac{\lambda}{2}\Xi}(\alpha-\beta)H_\beta K_\lambda^\beta f\,d\Phi\right)$$

$$= -\overline{E}_\xi\left(\int_0^\infty e^{-\alpha\Phi-\frac{\lambda}{2}\Xi}(\alpha-\beta)\frac{l}{2}K_\lambda^\beta f\,d\Xi\right) - \overline{E}_\xi\left(\int_0^\infty e^{-\alpha\Phi-\frac{\lambda}{2}\Xi}(\alpha-\beta)\chi_D H_\beta K_\lambda^\beta f\,dt\right)$$

$$= -(\alpha-\beta)\overline{E}_\xi\left(\int_0^\infty e^{-\alpha\Phi-\frac{\lambda}{2}\Xi}(l+mJ_\alpha+NG_\alpha^{min})H_\beta K_\lambda^\beta f\,\frac{1}{2}\,d\Xi\right)$$

$$= -K_\lambda^\alpha(U_\alpha - U_\beta)K_\lambda^\beta f.$$

故に

(6.24) $$K_\lambda^\alpha - K_\lambda^\beta + K_\lambda^\alpha(U_\alpha-U_\beta)K_\lambda^\beta = 0, \qquad \lambda>0,\ \alpha,\beta\ge 0$$

である．またやはり定理2.1により

(6.25) $$K_\lambda^\alpha - K_\mu^\alpha + (\lambda-\mu)K_\lambda^\alpha K_\mu^\alpha = 0 \qquad \lambda,\mu>0,\ \alpha\ge 0$$

である．$K_\lambda^0 = \widetilde{G}_\lambda : C(\partial D)\to C(\partial D)$であるから(4.25),(4.26)により$K_\lambda^\alpha$ $(\alpha>0,\ \lambda>0)$も$C(\partial D)$を$C(\partial D)$内にうつす．$\alpha>0$ならば$\overline{P}_\xi$に関し確率1で

$\int_0^\infty e^{-\alpha\Phi-\frac{\lambda}{2}\Xi}\frac{1}{2}d\Xi < \int_0^\infty e^{-\frac{\lambda}{2}\Xi}\frac{1}{2}d\Xi \le \frac{1}{\lambda}$ であることに注意すれ

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

ば $\|K^{\alpha}_{\lambda}\| < 1/\alpha$ であるから，同じ方法で K^{α}_{0} も $C(\partial D)$ を $C(\partial D)$ にうつす有界作用素であることが分る.

(6.26) $\quad G_\alpha = G_\alpha^{min} + H_\alpha K_0^\alpha (\ell + m J_\alpha + N G_\alpha^{min})$

を次に示そう. (6.23) を得たと同様にして

$$E_x\left(\int_\sigma^\infty e^{-\alpha\Phi} f \chi_D dt\right) = E_x\left(\int_0^\infty e^{-\alpha\Phi}(\bar{m} J_\alpha + \bar{N} G_\alpha^{min}) f d\Phi\right)$$

であるから,

$$E_x\left(\int_\sigma^\infty e^{-\alpha\Phi} f d\Phi\right) = E_x\left(\int_\sigma^\infty e^{-\alpha\Phi} f \frac{\ell}{2} d\Phi\right) + E_x\left(\int_\sigma^\infty e^{-\alpha\Phi} f \chi_D dt\right)$$

$$= E_x\left(\int_\sigma^\infty e^{-\alpha\Phi}(\ell + mJ_\alpha + NG_\alpha^{min}) f \frac{1}{2} d\Phi\right) = H_\alpha K_0^\alpha(\ell + mJ_\alpha + NG_\alpha^{min}) f$$

一方

$$E_x\left(\int_0^\sigma e^{-\alpha\Phi} f d\Phi\right) = E_x\left(\int_0^\sigma e^{-\alpha t} f dt\right) = G_\alpha^{min} f$$

であるから，(6.26) を得る.

(6.26) により G_α は $C(S)$ を $C(S)$ 内にうつす. しかも path の右連続性により $\forall x \in S$, $\forall f \in C(S)$ に対し $\alpha G_\alpha f(x) \longrightarrow f(x)$ $(\alpha \longrightarrow \infty)$ であるから，$C(S)$ における G_α の値域は稠密である. 故に定理 1.1, 1.2 により M と同値な Markov 過程で条件 (A) をみたすものが存在する. これを再び同じ文字 M で表わす. η を $\bar{M}$ に関する Φ の標準測度とすると $f \in B^+(S)$ に対し

$$E_x\left(\int_0^\infty f(x_t) dt\right) = 0 \iff E_x\left(\int_0^\infty f(x_t) d\Phi\right) = 0 \iff f = 0 \quad \eta\text{-a.e.}$$

となる. 故に，M は条件 (L) をみたす. Φ の定義により，M は境界につく時刻 σ までは $\bar{M}$ と一致するから，M は $\bar{M}$ と同じく (6.1), (6.2) をみたす. したがって補題 6.1 により，M は，適当に同値なものをとれば，D 内で M^{min} と一致する広義拡散過程である.

M の境界要素を $\bar{M}'$, ℓ', m', N' とする. M の境界における (a,γ)-local time を Φ,

$$K'^{\alpha}_{\lambda} f(\xi) = E_\xi\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t - \lambda\Phi} f(x_t) d\Phi\right)$$

とおくと

$$G_\alpha = G_\alpha^{min} + H_\alpha K'^{\alpha}_0 (\ell' + m' J_\alpha + N' G_\alpha^{min})$$

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

である．これと(6.26)を $f=a+(\alpha-\gamma)b$ に対して適用すると

$$K_0^{\prime\alpha}1=K_0^{\prime\alpha}(l'a+m'+N'b)=K_0^{\alpha}(la+m+Nb)=K_0^{\alpha}1$$

すなわち

(6.27) $$E_\xi\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t}d\Phi\right)=\bar{E}_\xi\left(\int_0^\infty e^{-\alpha\Phi}\frac{1}{2}d\Phi\right)$$

を得る．このことから，$\forall f\in B(\partial D)$ に対し

(6.28) $$E_\xi\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t}f(x_t)\,d\Phi\right)=\bar{E}_\xi\left(\int_0^\infty e^{-\alpha\Phi}f(x_t)\frac{1}{2}d\Phi\right)$$

を示そう．それには，$f\in C(\partial D)$ に対していえばよい．f を $C(S)$ に拡張しておく．$\varepsilon>0$ に対し $\rho=\inf\{t:|f(x_t)-f(x_0)|>\varepsilon\}$，$\rho_0=0$，$\rho_{n+1}=\rho_n+\rho(w^+_{\rho_n})$ とおく．Φ の逆函数 $\mu(s)=\sup\{t:\Phi(t)\leq s\}$ を使って $\pi:\bar{W}\to W_S$ を $x_t(\pi(w))=x_{\mu(t)}(w)$ によって定義する．$\Phi(t)$ は単調増加だから $\rho(\pi(w))=\Phi(\rho(w),w)$，$\rho(w)=\mu(\rho(\pi(w)),w)$ である．故に，$x_{\rho(\pi(w))}(\pi(w))=x_{\mu(\rho(\pi(w)),w)}(w)=x_{\rho(w)}(w)$ となり，

$$E_x(g(x_\rho)e^{-\alpha\rho})=\bar{E}_x(g(x_{\rho(\pi(w))}(\pi(w)))e^{-\alpha\rho(\pi(w))})=\bar{E}_x(g(x_\rho)e^{-\alpha\Phi(\rho)})$$

となる．$\Phi(\rho_{n+1})=\Phi(\rho_n)+\Phi(\rho(w^+_{\rho_n}),w^+_{\rho_n})$ であるから帰納法により

$$E_x(g(x_{\rho_n})e^{-\alpha\rho_n})=\bar{E}_x(g(x_{\rho_n})e^{-\alpha\Phi(\rho_n)})$$

を得る．故に，(6.27)の両辺を $\varphi(\xi)$ とおき

$$I_1=E_\xi\left(\sum_{n=0}^\infty f(x_{\rho_n})\int_{\rho_n}^{\rho_{n+1}}e^{-\alpha t}d\Phi\right)$$

とおくと

$$\begin{aligned}I_1&=E_\xi\left(\sum e^{-\alpha\rho_n}f(x_{\rho_n})(\varphi(x_{\rho_n})-E_{x_{\rho_n}}(\varphi(x_\rho)e^{-\alpha\rho}))\right)\\&=\bar{E}_\xi\left(\sum e^{-\alpha\Phi(\rho_n)}f(x_{\rho_n})(\varphi(x_{\rho_n})-\bar{E}_{x_{\rho_n}}(\varphi(x_\rho)e^{-\alpha\Phi(\rho)}))\right)\\&=\bar{E}_\xi\left(\sum_{n=0}^\infty f(x_{\rho_n})\int_{\rho_n}^{\rho_{n+1}}e^{-\alpha\Phi}\frac{1}{2}d\Phi\right)\quad(=I_2\ \text{とおく})\end{aligned}$$

である．

$$\left|E_\xi\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t}f(x_t)\,d\Phi\right)-I_1\right|\leq\varepsilon K_0^{\prime\alpha}1(\xi)$$

$$\left|\bar{E}_\xi\left(\int_0^\infty e^{-\alpha\Phi}f(x_t)\frac{1}{2}d\Phi\right)-I_2\right|\leq\varepsilon K_0^{\prime\alpha}1(\xi)$$

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

であるから，その任意性により（6.28）を得る．

（6.28）から $K_0'^{\alpha} = K_0^{\alpha}$ である．$K_\lambda'^{\alpha}$ も K_λ^{α} と同じく（6.24），（6.25）をみたすから，$K_\lambda'^{\alpha} = K_\lambda^{\alpha}$ となる．従って $\widetilde{\mathbb{M}}$ と $\widetilde{\mathbb{M}}'$ は同値であり，定理 4.1 の一意性と（6.26）により $\widetilde{\mathbb{M}}, l, m, N$ が $\mathbb{M}$ の境界要素となる．

以上で，定理 5.2 の証明を終った．

定理 5.3 は定理 5.1，5.2，5.4 に定理 4.1，4.2 を組合せれば得られる．すなわち，$\mathbb{M}$ が内部で $\mathbb{M}^{min}$ と一致する拡散過程で，境界に滞留しなければ，その Green 核 G_α は

（6.29）　$G_\alpha = G_\alpha^{min} + H_\alpha K_0^\alpha J_\alpha$

と表わされ，更に G_α が $C(S)$ を $C(S)$ 内にうつせば，（Min. 4），（Min. 5）により K_0^α は $C(\partial D)$ を $C(\partial D)$ 内にうつす．このことから $\mathbb{M}$ の 0 次 U 過程の Green 核も $C(\partial D)$ を $C(\partial D)$ 内にうつすことが証明される．

なお，定理 5.3 と全く同様に次のことが分る．条件（A），（L）をみたす境界上の Markov 過程 $\widetilde{\mathbb{M}}$ が，内部で $\mathbb{M}^{min}$ と一致する広義の拡散過程 $\mathbb{M}$ で境界に滞留せず，境界から内部に飛躍せず，しかも（5.4）をみたすようなものから導かれる 0 次 U 過程であるための必要十分条件は，$\widetilde{\mathbb{M}}$ が

（B.2）″　$\widetilde{\mathbb{M}}$ の Lévy 系を $(\widetilde{Q}, \widetilde{L})$ とすると $(\widetilde{Q}, \widetilde{L}) \gg (\mathbb{H}, T)$

および（B.3）′，（S.2）をみたすことである．$\mathbb{M}$ と $\widetilde{\mathbb{M}}$ との対応は同値を除き 1 対 1 である．

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

§7 Dirichlet ノルム

<u>Dirichlet ノルムの一般論</u>　条件 (A), (F) をみたす S の上の Markov 過程 $\mathbb{M}$ が与えられたとする．μ を条件 (F) における S 上の測度，$\hat{\mathbb{M}}$ を μ に関し $\mathbb{M}$ と共役な S 上の Markov 過程とする．$\mathbb{M}$, $\hat{\mathbb{M}}$ は conservative であると仮定し，μ は $\mathbb{M}$, $\hat{\mathbb{M}}$ の有界な不変測度であると仮定する．更に，$f \in C(S)$ ならば $G_\alpha f$, $f\hat{G}_\alpha \in C(S)$ となることを仮定する．$\mathbb{M}$, $\hat{\mathbb{M}}$ の生成作用素を $\mathfrak{G}$, $\hat{\mathfrak{G}}$ で表わす．

$u \in \mathfrak{D}(\mathfrak{G})$ に対し u の $\mathbb{M}$ に関する Dirichlet ノルム $D(u)$ を次のように定義する．$\alpha > 0$ に対し

$$S_\alpha(t, w) = e^{-\alpha t} u(x_t) - u(x_0) + \int_0^t e^{-\alpha s}(\alpha - \mathfrak{G}) u(x_s)\, ds$$

とおくと，$\lim_{t \to \infty} S_\alpha(t, w)$ が存在し（これを $S_\alpha(+\infty, w)$ とおく），S_α は平均 0（すなわち，$\forall t$, $\forall x$ に対し $E_x(S_\alpha(t)) = 0$）の加法的汎函数である．$E_x(S_\alpha(+\infty)^2)$ は有界な 2α-excessive 函数となり，しかも S 上の測度 ν により

$$E_x(S_\alpha(+\infty)^2) = \int_S g_{2\alpha}(x, y)\, \nu(dy) \tag{7.1}$$

の形に一意的に表現される．ただし，$\{g_\alpha(x, y) : \alpha > 0\}$ は $\mathbb{M}$, $\hat{\mathbb{M}}$ に対し命題 1.11 によって定まる函数である．ν の全測度 $\nu(S)$ は有限で，α によらないが，これを $\mathbb{M}$ に関する u の <u>Dirichlet ノルム</u> $D(u)$ と呼ぶ．（正確には $\sqrt{D(u)}$ を Dirichlet ノルムと呼ぶべきだが，ここではこのようにする．）これに対し，次の形の表現が証明される．

$$D(u) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} E_x((u(x_t) - u(x_0))^2), \tag{7.2}$$

$$D(u) = -2 \int_S u(x) \cdot \mathfrak{G} u(x)\, \mu(dx). \tag{7.3}$$

以上のことは 佐藤・長沢・福島 [1] の福島による第4章を参照すれば証明することが出来る．

さて，具体的な問題に戻り，今までと同様 S 内に開集合 D が与えられ，D の境界は $S-D$ であるとする．D の上に2つの Markov

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

過程$\mathbb{M}$, $\hat{\mathbb{M}}$ が与えられ, 共に条件 (A), (L), (Min.1)〜(Min.5) をみたすとする. $\hat{\mathbb{M}}$ に関する量は $\hat{G}_\alpha^{min}(dy,x)$, $\hat{H}_\alpha(d\xi,x)$ のように表わす. 次のことを仮定する.

<u>仮定 1.</u>　D内で$\mathbb{M}^{min}$と一致する広義拡散過程$\mathbb{M}$とD内で$\hat{\mathbb{M}}^{min}$と一致する広義拡散過程$\hat{\mathbb{M}}$が与えられ, $\mathbb{M}$, $\hat{\mathbb{M}}$はある有界測度μに関し互いに共役で, 条件 (F) をみたすとする. 更に, $\mathbb{M}$, $\hat{\mathbb{M}}$は共に境界からD内への飛躍をしないとする.

$\hat{\mathbb{M}}$に関する量は$\hat{G}_\alpha(dy,x)$, $\hat{K}^\alpha(d\eta,\xi)$ のように表わす. G_α, $\hat{G}_\alpha$ は次のように表現される.

(7.4)　$$G_\alpha f = G_\alpha^{min} f + H_\alpha K^\alpha (\ell + m J_\alpha) f,$$

(7.5)　$$f\hat{G}_\alpha = f\hat{G}_\alpha^{min} + f(\hat{\ell} + \hat{m}\hat{J}_\alpha)\hat{K}^\alpha \hat{H}_\alpha.$$

$\mathbb{M}$が境界に滞留しないことは, 明らかに, $\mu(\partial D)=0$ と同等である. 従って, $\mathbb{M}$が境界に滞留しないことと, $\hat{\mathbb{M}}$が境界に滞留しないこととは同等である.

核J_αは$\hat{H}_\alpha$によって表現することができることを証明する. (同様に$\hat{J}_\alpha$はH_αによって表現される.) a, γを$\mathbb{M}^{min}$に対する条件 (Min.4) に現れたもの, $\hat{a}$, $\hat{\gamma}$を$\hat{\mathbb{M}}^{min}$に対する条件 (Min.4) に現れたものとする. まず,

(7.6)　$$\nu(E) = \iint_{\partial D\times S} \chi_E(\xi)\hat{H}_\gamma(d\xi,x)\,a(x)\,\mu(dx), \qquad E\in\mathcal{B}(\partial D)$$

とおく. νは境界上の有界測度である.

<u>命題 7.1</u>　νは$\mathbb{M}$に対する境界上の (a,γ)-*local time* Φの標準測度である.

<u>証明</u>　Hunt [1] 第III部 p. 168, (18.3) (または近藤 [1] p. 97) として

(7.7)　$$\int_{\partial D} H_\alpha(x,d\xi)\,g_\alpha(\xi,y) = \int_{\partial D} g_\alpha(x,\xi)\,\hat{H}_\alpha(d\xi,y), \quad \alpha>0,\ x,y\in S$$

が証明されている. ただし, $\{g_\alpha(x,y);\alpha>0\}$ は$\mathbb{M}$, $\hat{\mathbb{M}}$に対し命題1.11によって定まる函数である. これを用いると,

$$E_x\left(\int_0^\infty e^{-\gamma t}\,d\Phi\right) = E_x\left(\int_\sigma^\infty e^{-\gamma t}\,a(x_t)\,dt\right) = H_\gamma G_\gamma a(x)$$

$$= \iint H_\gamma(x, d\xi)\, g_\gamma(\xi, y)\, a(y)\, \mu(dy) = \iint g_\gamma(x,\xi)\, \hat{H}_\gamma(d\xi, y)\, a(y)\, \mu(dy)$$

$$= \int g_\alpha(x,\xi)\, \nu(d\xi).$$

従って，長沢・佐藤[1] P.204，定理4.1（または佐藤・長沢・福島[1] P.32）によって，$\forall \alpha > 0$, $\forall f \in B(\partial D)$ に対し

$$(7.8) \qquad E_x\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t} f(x_t)\, d\Phi\right) = \int_{\partial D} g_\alpha(x,\xi)\, f(\xi)\, \nu(d\xi)$$

が成り立つ．故に，$f \in F^+(S)$, $f = 0$ (ν-a.e.) ならば，$f\Phi \approx 0$ であり，逆に $f\Phi \approx 0$ ならば（$\int_S \mu(dx)\, g_\alpha(x,\xi) > 0$ に注意して）$f = 0$ (ν-a.e.) である． q.e.d.

<u>命題7.2.</u> $\nu_1(d\xi) = a(\xi)\, \chi_{\partial D}(\xi)\, \mu(d\xi)$,
$\nu_2(d\xi) = \nu(d\xi) - \nu_1(d\xi)$ とおく．（$\nu_2 \geq 0$ となる．）任意の $\alpha > 0$, $f \in B(S)$ に対し，

$$(7.9) \qquad \nu_\alpha^f(E) = \iint_{\partial D \times S} \chi_E(\xi)\, \hat{H}_\alpha(d\xi, x)\, f(x)\, \chi_D(x)\, \mu(dx), \quad E \in \mathcal{B}(\partial D)$$

とおくと，ν_α^f は ν_2 に関し絶対連続で

$$(7.10) \qquad J_\alpha f(\xi) = \frac{\nu_\alpha^f(d\xi)}{\nu_2(d\xi)}$$

が成り立つ．

<u>証明</u>　(7.8) と $la\Phi = (\widetilde{\chi_{\partial D}\, a\, T})_\gamma = \chi_{\partial D}\, a\, T$ によって

$$\int_{\partial D} g_\gamma(x,\xi)\, l(\xi)\, a(\xi)\, \nu(d\xi) = E_x\left(\int_0^\infty e^{-\gamma t}\, l\, a\, d\Phi\right)$$

$$= E_x\left(\int_0^\infty e^{-\gamma t} \chi_{\partial D}\, a\, dt\right) = \int_{\partial D} g_\gamma(x,\xi)\, \chi_{\partial D}(\xi)\, a(\xi)\, \mu(d\xi).$$

ポテンシャルが一致すれば測度が一致する（Hunt [1] I P.82 または近藤 [1] P.73）から，

$$(7.11) \qquad l(\xi)\, a(\xi)\, \nu(d\xi) = \chi_{\partial D}(\xi)\, a(\xi)\, \mu(d\xi) = \nu_1(d\xi)$$

を得る．$la + m = 1$, ν-a.e. であるから $\nu_1 \leq \nu$ で，

$$(7.12) \qquad m(\xi)\, \nu(d\xi) = \nu_2(d\xi)$$

である．(7.4), (7.8) により

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

$$H_\alpha G_\alpha f(x) = H_\alpha K^\alpha(\ell+mJ_\alpha)f(x) = E_x\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t}(\ell+mJ_\alpha)f\,d\Phi\right)$$

$$= \int_{\partial D} g_\alpha(x,\xi)(\ell+mJ_\alpha)f(\xi)\,\nu(d\xi),$$

一方，(7.7)により

$$H_\alpha G_\alpha f(x) = \iint_{\partial D\times S} g_\alpha(x,\xi)\hat{H}_\alpha(d\xi,y)f(y)\mu(dy)$$

であるから，

$$(7.13)\quad \iint_{\partial D\times S}\chi_E(\xi)\hat{H}_\alpha(d\xi,x)f(x)\mu(dx) = \int_{\partial D}\chi_E(\xi)(\ell+mJ_\alpha)f(\xi)\,\nu(d\xi)$$

を得る．境界上では $\hat{H}_\alpha(\cdot,\xi)$ が ξ における点測度であることに注意すれば，(7.13)，(7.12) から

$$\iint_{\partial D\times S}\chi_E(\xi)\hat{H}_\alpha(d\xi,x)f(x)\chi_D(x)\mu(dx) = \int_{\partial D}\chi_E(\xi)m(\xi)J_\alpha f(\xi)\,\nu(d\xi)$$

$$= \int_{\partial D}\chi_E(\xi)J_\alpha f(\xi)\,\nu_2(d\xi)$$

を得る．

$\mathbb{M}^{min}$と$\hat{\mathbb{M}}^{min}$に関しては次のことを注意しておこう．

命題7.3　$\mathbb{M}^{min}$，$\hat{\mathbb{M}}^{min}$は$[\mu]_D$に関し互いに共役な条件(F)をみたす．

証明　$G_\alpha^{min} = G_\alpha - H_\alpha G_\alpha$，$\hat{G}_\alpha^{min} = \hat{G}_\alpha - \hat{G}_\alpha\hat{H}_\alpha$と，(7.7)を用いると

$$\int_D f\cdot G_\alpha^{min} g\,d\mu = \int_S (f\chi_D)\hat{G}_\alpha\cdot g\chi_D\,d\mu - \int_S (f\chi_D)\hat{G}_\alpha\hat{H}_\alpha\cdot g\chi_D\,d\mu$$

$$= \int_D f\,\hat{G}_\alpha^{min}\cdot g\,d\mu. \qquad \text{q.e.d.}$$

$\mathbb{M}$の境界要素ℓが，Φの標準測度に関しa.e.に正である時，$\mathbb{M}$は境界上いたる所で滞留をもつということにする．それに対する必要十分条件は，$[\mu]_{\partial D}$がΦの標準測度になることである．これは，(7.11)により$\ell(\xi)\nu(d\xi) = [\mu]_{\partial D}(d\xi)$であることから明らかである．$\mathbb{M}$，$\hat{\mathbb{M}}$が共に境界上いたる所で滞留をもつ時，次のことがいえる．

命題7.4.　$\inf_{\xi\in\partial D}\ell(\xi)>0$，$\inf_{\xi\in\partial D}\hat{\ell}(\xi)>0$ ならば，次のような α'，$\hat{\alpha}'\in B^+(S)$ が存在する．$\inf_{x\in S}\alpha'(x)>0$，$\inf_{x\in S}\hat{\alpha}'(x)>0$，

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

$G_\gamma^{min} a'$, $\hat{a}'\hat{G}_\gamma^{min} \in C(S)$ を、$\mathbb{M}^{min}$は a', γ に関し条件 (Min.4) をみたし、$\hat{\mathbb{M}}^{min}$は $\hat{a}', \gamma$ に関し条件 (Min.4) をみたし、しかも $\forall E \in \mathcal{B}(\partial D)$ に対し

$$\iint_{\partial D \times S} \chi_E(\xi) \hat{H}_\gamma(d\xi, x) a'(x) \mu(dx) = \iint_{S \times \partial D} \mu(dx) \hat{a}'(x) H_\gamma(x, d\xi) \chi_E(\xi)$$

が成り立つ。

<u>証明</u>　　$f \in B^+(\partial D)$ とする。$\xi \in \partial D$ では $\hat{H}_\gamma(\cdot, \xi)$ が点 ξ における点測度であることと、命題7.2 によって、$\forall E \in \mathcal{B}(\partial D)$ に対し

$$\iint_{\partial D \times S} \chi_E(\xi) \hat{H}_\gamma(d\xi, x)(\chi_D a + \chi_{\partial D} f)(x) \mu(dx)$$

$$= \int_{\partial D} \chi_E(\xi) \nu_2(d\xi) + \int_{\partial D} \chi_E(\xi) f(\xi) \mu(d\xi)$$

仮定により $l > 0$, ν-a.e. であるから (7.11), (7.12) により $\nu_2(d\xi) = m(\xi)\nu(d\xi) = \frac{m(\xi)}{l(\xi)} [\mu]_{\partial D}(d\xi)$ となり、

$$= \int_{\partial D} \chi_E(\xi) \left(\frac{m(\xi)}{l(\xi)} + f(\xi) \right) \mu(d\xi)$$

となる。同様に $\hat{f} \in B^+(\partial D)$ とすると

$$\iint_{S \times \partial D} \mu(dx)(\chi_D \hat{a} + \chi_{\partial D} \hat{f})(x) H_\gamma(x, d\xi) \chi_E(\xi)$$

$$= \int_{\partial D} \mu(d\xi) \left(\frac{\hat{m}}{l} + \hat{f} \right)(\xi) \chi_E(\xi)$$

である。故に、たとえば

$$f = \frac{\hat{m}}{l} + 1, \quad \hat{f} = \frac{m}{l} + 1, \quad a' = \chi_D a + \chi_{\partial D} f, \quad \hat{a}' = \chi_D \hat{a} + \chi_{\partial D} \hat{f}$$

とおけばよい。　　q.e.d.

命題7.4 の仮定をみたす場合でなくても、上のような a', $\hat{a}'$ が存在する場合がある。$\mathbb{M}$ が自己共役の場合すなわち $\mathbb{M}$, $\hat{\mathbb{M}}$ が同値な Markov 過程である場合そうであることは自明である。また反射壁の境界条件をみたす古典的拡散過程でもそうであろう。そこで、仮定1に加えて次のような仮定をおく。

<u>仮定2.</u>　　次のような $a, \hat{a} \in B^+(S)$ が存在する。$\inf_{x \in S} a(x) > 0$, $\inf_{x \in S} \hat{a}(x) > 0$, $G_\gamma^{min} a \in C(S)$, $\hat{a}\hat{G}_\gamma^{min} \in C(S)$ で、$\mathbb{M}^{min}$は a, γ に関し条件 (Min.4) をみたし、$\hat{\mathbb{M}}^{min}$ は $\hat{a}, \gamma$ に関し条件

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

(Min. 4)をみたし，しかも $\forall E \in \mathcal{B}(\partial D)$ に対し

$$(7.14)\quad \iint_{\partial D\times S} \chi_E(\xi)\hat{H}_\gamma(d\xi,x)a(x)\mu(dx)=\iint_{S\times\partial D}\mu(dx)\hat{a}(x)H_\gamma(x,d\xi)\chi_E(\xi)$$

が成り立つ．

以下，G_α の分解(7.4)，$\mathbb{M}$の境界要素等は$\mathbb{M}$の境界上の(a,γ)－local time 至 を経由して考え，$\hat{G}_\alpha$ の分解(7.5)，$\hat{\mathbb{M}}$の境界要素等は$\hat{\mathbb{M}}$の境界上の$(\hat{a},\gamma)$－local time $\hat{至}$ を経由して考える．(7.14)の両辺を $\nu(E)$ で表わす．(7.11)により
$\ell(\xi)\nu(d\xi)=\chi_{\partial D}(\xi)\mu(d\xi)=\hat{\ell}(\xi)\nu(d\xi)$ であるから $\ell=\hat{\ell}$ である．

Dirichlet ノルムを考えるために，更に次の仮定をおく．

<u>仮定 3.</u>　$\mathbb{M}^{min}$, $\hat{\mathbb{M}}^{min}$ は $H1=1$, $1\hat{H}=1$ をみたす．$\mathbb{M}$, $\hat{\mathbb{M}}$ は共に conservative とする．(従って μ は $\mathbb{M}$, $\hat{\mathbb{M}}$ の不変測度．) $G_\alpha, \hat{G}_\alpha$ は $C(S)$ を $C(S)$ 内にうつし，$K^\alpha, \hat{K}^\alpha, U_\alpha, \hat{U}_\alpha$ は $C(\partial D)$ を $C(\partial D)$ 内にうつす($\forall\alpha>0$)．

<u>命題 7.5.</u>　任意の $\alpha\geqq 0$ に対し，$\mathbb{M}$ の α 次U過程 $\tilde{\mathbb{M}}^{(\alpha)}$ と $\hat{\mathbb{M}}$ の α 次U過程 $\tilde{\hat{\mathbb{M}}}^{(\alpha)}$ とは ν に関し互いに共役で，条件(F)をみたす．$\tilde{\mathbb{M}}^{(0)}$, $\tilde{\hat{\mathbb{M}}}^{(0)}$ は conservative で，ν は $\tilde{\mathbb{M}}^{(0)}$, $\tilde{\hat{\mathbb{M}}}^{(0)}$ の不変測度である．

<u>証明</u>　(7.8)および $\hat{至}$ に対する(7.8)と同様の式から，前半は長沢・佐藤[1] p.314，定理6.1 (または佐藤・長沢・福島[1] p.41) に証明されている．$\mathbb{M}$, $\hat{\mathbb{M}}$ が conservative で，$H1=1\hat{H}=1$ であるから，定理5.4(ii)により0次U過程も conservative である．0次U過程が conservative で ν に関し互いに共役だから，ν は不変測度である．

<u>定義</u>　$u\in\mathcal{D}(\mathfrak{J})$ に対し $\mathbb{M}$ に関する u の Dirichlet ノルムを $D(u)$ で表わす．また，$v\in\mathcal{D}(\tilde{\mathfrak{J}})$ ($\tilde{\mathfrak{J}}=\tilde{\mathfrak{J}}^{(0)}$) に対し $\tilde{\mathbb{M}}^{(0)}$ に関する v の Dirichlet ノルムを $\tilde{D}(v)$ で表わす．仮定1.3により $D(u)$ が定義可能，命題7.5により $\tilde{D}(v)$ が定義可能である．(命題4.4によって $\tilde{\mathbb{M}}^{(0)}$ の Green 作用素は $C(\partial D)$ を $C(\partial D)$ 内にうつす．)

<u>命題 7.6</u>　$u\in\mathcal{D}(\mathfrak{J})$ とし，$u-Hu=u_0$, $u-u\hat{H}=\hat{u}_0$ と

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

おく。この時，$[u]_{\partial D} \in \mathcal{D}(\widetilde{\mathfrak{G}})$ となり

(7.15) $$D(u) = -2\int_D \hat{u}_0(x)\,\mathfrak{G}_D u_0(x)\,\mu(dx) + \widetilde{D}([u]_{\partial D})$$

が成り立つ。

証明　$[u]_{\partial D} \in \mathcal{D}(\widetilde{\mathfrak{G}})$ となることは定理4.4で示した。同じ定理で述べたように

$$\widetilde{\mathfrak{G}}[u]_{\partial D} - l\,\mathfrak{G}_D u + m\frac{\partial}{\partial \theta}(u - Hu) = 0$$

であるが，$u = G_\alpha f$ とすると

$$\mathfrak{G}_D u = \mathfrak{G} u = \alpha u - f$$
$$u - Hu = u - H_\alpha u - \alpha G_\alpha^{min} Hu = G_\alpha^{min}(f - \alpha Hu)$$

であるから，

$$\widetilde{\mathfrak{G}}[u]_{\partial D} = (l + mJ_\alpha)(\alpha Hu - f)$$

である。$\widetilde{D}([u]_{\partial D})$ を表現(7.3)を用いて表わすと，

$$\widetilde{D}([u]_{\partial D}) = -2\int_{\partial D} u(\xi)\,\widetilde{\mathfrak{G}}u(\xi)\,\nu(d\xi)$$
$$= -2\int_{\partial D} u(\xi)\,(l + mJ_\alpha)(\alpha Hu - f)(\xi)\,\nu(d\xi)$$
$$= -2\iint_{\partial D\times S} u(\xi)\,\hat{H}_\alpha(d\xi, x)(\alpha Hu(x) - f(x))\,\mu(dx) \quad \text{((7.13)による)}$$

$u\hat{H}_\alpha = u\hat{H} - \alpha u\hat{H}\hat{G}_\alpha^{min}$ により

$$= -2\int_S u\hat{H}(x)(\alpha Hu(x) - f(x))\,\mu(dx) + 2\alpha\int_S u\hat{H}\,G_\alpha^{min}(x)(\alpha Hu(x) - f(x))\,\mu(dx)$$

第2項に対し命題7.3を用い，$G_\alpha^{min}(f - \alpha Hu) = u - Hu$ を用いると，

$$\widetilde{D}([u]_{\partial D}) = -2\int_S u\hat{H}(x)(\alpha u(x) - f(x))\,\mu(dx)$$

を得る。これは，

$$= -2\int_S u\hat{H}(x)\,\mathfrak{G}_D u(x)\,\mu(dx)$$
$$= -2\int_S u(x)\,\mathfrak{G}u(x)\,\mu(dx) + 2\int_D \hat{u}_0(x)\,\mathfrak{G}_D u(x)\,\mu(dx)$$

これは(7.15)を示している。　　q.e.d.

命題7.7　$\nu_2(d\xi)\,\textcircled{H}(\xi, d\eta) = \hat{\textcircled{H}}(d\xi, \eta)\,\hat{\nu}_2(d\eta)$

証明　任意の $g, h \in B^+(\partial D)$ に対し命題7.2により

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

$$\alpha \iint_{\partial D\times\partial D} f(\xi)\,\nu_2(d\xi)\,(J_\alpha H)(\xi,d\eta)\,h(\eta)$$
$$-\alpha \iiint_{\partial D\times S\times\partial D} f(\xi)\,\nu_2(d\xi)\,J_\alpha(\xi,dx)\,H(x,d\eta)\,h(\eta)$$
$$=\alpha \iiint_{\partial D\times S\times\partial D} f(\xi)\,\hat{H}_\alpha(d\xi,x)\,\chi_D(x)\,\mu(dx)\,H(x,d\eta)\,h(\eta).$$

同様に

$$\alpha \iint_{\partial D\times\partial D} f(\xi)\,(\hat{H}\,\hat{J}_\alpha)(d\xi,\eta)\,\hat{\nu}_2(d\eta)\,h(\eta)$$
$$-\alpha \iiint_{\partial D\times S\times\partial D} f(\xi)\,\hat{H}(d\xi,x)\,\chi_D(x)\,\mu(dx)\,H_\alpha(x,d\eta)\,h(\eta)$$

であるがこれは.

$$=\alpha \iiint_{\partial D\times S\times\partial D} f(\xi)\,\hat{H}(d\xi,x)\,\chi_D(x)\,\mu(dx)\,\big(H(x,d\eta)-\alpha(G_{T_\alpha}^{min}H)(x,d\eta)\big)h(\eta)$$

故に，$\hat{H}-\alpha\hat{H}G_{T_\alpha}^{min}=\hat{H}_\alpha$ を用いると

$$=\alpha\iiint_{\partial D\times S\times\partial D} f(\xi)\,\hat{H}_\alpha(d\xi,x)\,\chi_D(x)\,\mu(dx)\,H(x,d\eta)\,h(\eta)$$

と同じものになる，故に任意の $f\in B(\partial D\times\partial D)$ に対し

$$\alpha\iint\nu_2(d\xi)(J_\alpha H)(\xi,d\eta)f(\xi,\eta)=\alpha\iint(\hat{H}\,\hat{J}_\alpha)(d\xi,\eta)\,\hat{\nu}_2(d\eta)\,f(\xi,\eta)$$

である．$f\in B_0^+(\partial D\times\partial D)$ とし，$\alpha\to\infty$ とすると命題7.7を得る．

q.e.d.

$\boxed{\text{定理 7.1.}}$ 任意の $u\in\mathfrak{D}(\mathcal{T})$ に対し，

$$\mathfrak{D}(u)\geq\iint_{\partial D\times\partial D}(u(\xi)-u(\eta))^2\,\nu_2(d\xi)\,\mathbb{H}(\xi,d\eta)$$
$$=\iint_{\partial D\times\partial D}(u(\xi)-u(\eta))^2\,\hat{\mathbb{H}}(d\xi,\eta)\,\hat{\nu}_2(d\eta).$$

<u>証明</u> 命題7.7により，はじめの不等式を証明すれば十分である．$\hat{M}^{(0)}$ の推移確率を $\hat{T}_t$，$\hat{M}^{(\alpha)}$ の推移確率を $\hat{T}_t^{(\alpha)}$ とかくと，任意の $f\in C(\partial D)$ に対し

(7.16) $$\lim_{t\to 0}\left\|\frac{1}{t}(\hat{T}_t-\hat{T}_t^{(\alpha)})f-U_\alpha f\right\|=0$$

である．なぜなら，$f\in\mathfrak{D}(\mathcal{T})$ ならば命題4.3から明らかであるし，一般の $f\in C(\partial D)$ に対しては $\varepsilon>0$ に対し $g\in\mathfrak{D}(\mathcal{T})$ を $\|f-g\|<\varepsilon$ に選ぶと

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

$$\left\| \frac{1}{t}(\widetilde{T}_t - \widetilde{T}_t^{(\alpha)}) f - U_\alpha f \right\| \leq \left\| \frac{1}{t}(\widetilde{T}_t - \widetilde{T}_t^{(\alpha)})(f - g) \right\|$$

$$+ \left\| \frac{1}{t}(\widetilde{T}_t - \widetilde{T}_t^{(\alpha)}) g - U_\alpha g \right\| + \| U_\alpha (g - f) \|$$

$$\leq \varepsilon \left\| \frac{1}{t}(\widetilde{T}_t - \widetilde{T}_t^{(\alpha)}) 1 \right\| + \left\| \frac{1}{t}(\widetilde{T}_t - \widetilde{T}_t^{(\alpha)}) g - U_\alpha g \right\| + \varepsilon \| U_\alpha \| ,$$

故に

$$\limsup_{t \to 0} \left\| \frac{1}{t}(\widetilde{T}_t - \widetilde{T}_t^{(\alpha)}) f - U_\alpha f \right\| \leq 2\varepsilon \| U_\alpha \| .$$

εは任意だから、(7.16) がいえた.

$\widetilde{D}(u)$ に対し 表現 (7.2) を用いると

$$\frac{1}{t} \iint_{\partial D \times \partial D} \nu(d\xi) \widetilde{T}_t(\xi, d\eta)(u(\eta) - u(\xi))^2 \longrightarrow \widetilde{D}(u) \quad (t \to 0)$$

であるが、左辺は

$$\geq \frac{1}{t} \iint \nu(d\xi)(\widetilde{T}_t(\xi, d\eta) - \widetilde{T}_t^{(\alpha)}(\xi, d\eta))(u(\eta) - u(\xi))^2$$

である. $t \to 0$ とする時, ν が有界測度だから積分と極限の交換が可能で

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \iint \nu(d\xi)(\widetilde{T}_t(\xi, d\eta) - \widetilde{T}_t^{(\alpha)}(\xi, d\eta))(u(\eta) - u(\xi))^2$$

$$= \int \nu(d\xi) \left[\int U_\alpha(\xi, d\eta) u(\eta)^2 - 2u(\xi) \int U_\alpha(\xi, d\eta) u(\eta) + u(\xi)^2 \int U_\alpha(\xi, d\eta) \right]$$

$$= \iint \nu(d\xi) U_\alpha(\xi, d\eta)(u(\eta) - u(\xi))^2$$

である. 従って,

$$\widetilde{D}(u) \geq \iint_{\partial D \times \partial D} \nu(d\xi) U_\alpha(\xi, d\eta)(u(\eta) - u(\xi))^2$$

である. $U_\alpha(\xi, d\eta) = \alpha l(\xi) \delta(\xi, d\eta) + \alpha m(\xi)(J_\alpha H)(\xi, d\eta)$ で, $\alpha l(\xi) \delta(\xi, d\eta)$ の方は関係しないから, $\alpha \to \infty$ として,

$$\widetilde{D}(u) \geq \iint_{\partial D \times \partial D} \nu(d\xi) m(\xi) Ⓗ(\xi, d\eta)(u(\eta) - u(\xi))^2$$

を得る. (7.12) により, 定理が証明された. q.e.d.

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

§8. 今後の問題

Feller の問題　compact でない局所 compact 空間 D の上に拡散過程 $\mathbb{M}^{min}$ が与えられ、その消滅時間 $\zeta(w)$ が D 内のすべての compact 集合を出る時刻 $\sigma(w)$ と一致しているとする。その時、D の適当な compact 化 S の上における Markov 過程 $\mathbb{M}$ で、$\mathbb{M}$ を σ で殺せば $\mathbb{M}^{min}$ と一致するようなものをすべて求めること、更にそれの確率論的構造を調べること、という問題を Feller は考えた。彼はこれを1次元の場合（即ち D が直線の場合）に完全に解いた（1952）。（その確率論的構造は Dynkin，伊藤，McKean によって調べられた。）1次元以外の場合，すなわち D が多次元 Euclid 空間の領域の場合などには，一般に境界が大きくなるので，問題は極めて難かしくなる。

これを扱うのに2つの方向が考えられる。1つは，適当な compact 化 S（たとえば Martin 式）を求め，D 上の $\mathbb{M}^{min}$ から S 上の Markov 過程 $\mathbb{M}$ を構成して行くこと，もう1つは，D の compact 化 S の上に $\mathbb{M}$ があったとし十分の正則性を持つ時に，境界近くでの $\mathbb{M}$ の行動を分析することである。このノートでは，Feller の問題に対し主として後者の方から接近している。

半群による定式化　D を N 次元 Euclid 空間の有界領域とする。Feller の問題は，次のような問題を特別の場合として含んでいる。すなわち，A を $\bar{D}$ 上の2階楕円型偏微分作用素，$\bar{A}$ を $C(\bar{D})$ における A の適当な閉拡大とする時，$C(\bar{D})$ 上の非負の強連続半群 T_t で $\|T_t\| \leq 1$ をみたし，その生成作用素 $\mathfrak{A}$ が $\bar{A}$ の制限になっているものをすべて求めること，という問題である。$\mathfrak{D}(\mathfrak{A})$ を定める条件を境界条件と呼ぶ。A を与えることは $\mathbb{M}^{min}$ を与えることに相当し，$\mathfrak{D}(\mathfrak{A})$ を定めることは $\mathbb{M}$ の境界での行動を定めることに相当する。

Ventsel' の境界条件　上のような半群が一つ与えられた

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

とし，適当な正則性を仮定する．uを十分なめらかな函数とする．Ventteel' は，T_t により次のような形の L という作用素が定まり，u が $\mathfrak{D}(\mathfrak{O}_J)$ に入る必要十分条件は $Lu(\xi)=0$，$\xi\in\partial D$ で表わされることを見出した（1959）．L の形は

$$Lu(\xi)=\sum_{i,j=1}^{N-1}\alpha_{ij}(\xi)\frac{\partial^2 u}{\partial\xi_i\partial\xi_j}(\xi)+\sum_{i=1}^{N-1}\beta_i(\xi)\frac{\partial u}{\partial\xi_i}(\xi)+\gamma(\xi)u(\xi)$$

$$+\delta(\xi)Au(\xi)+\mu(\xi)\frac{\partial u}{\partial n}(\xi)+\int_{D\cup\partial D}\Big[u(y)-u(\xi)-\sum_{i=1}^{N-1}\frac{\partial u}{\partial\xi_i}(\xi)(\xi_i(y)-\xi_i(\xi))\Big]\nu_\xi(dy).$$

ただしξの近傍では ∂D が $\xi^N=0$ で表わされているとし，α_{ij} は非負定符号行列，$\gamma\leq 0$，$\delta\leq 0$，$\mu\geq 0$，$\frac{\partial}{\partial n}$ は内側向き法線微分，ν_ξ は $D\cup\partial D$ 上の測度とする．

<u>U過程</u>　上野 [1] は次のことを示した（1960）．$\mathbb{M}$ を $\overline{D}$ 上の Markov 過程で Ventteel' の扱った場合とすると，$\mathbb{M}$ の Green 作用素 G_α は

(8.1)　$$G_\alpha=G_\alpha^{min}+H_\alpha(-\overline{L}H_\alpha)^{-1}\overline{L}G_\alpha^{min}$$

と表わされる．ただし，G_α^{min} は $\mathbb{M}$ を $\sigma_{\partial D}$ で殺した Markov 過程 $\mathbb{M}^{min}$ の Green 作用素，$\overline{L}$ は Ventteel' の境界条件を表わす作用素 L のある拡張，H_α は ∂D への α 次到達測度である．そして，上の分解に現われた作用素 $\overline{L}H_\alpha$ は境界上の Markov 過程の生成作用素に近い性質をもっている．（たとえば，u が正の最大値をとる点 ξ_0 では $\overline{L}H_\alpha u(\xi_0)\leq 0$ となる．）逆に，ある $\alpha\geq 0$ に対し $\overline{L}H_\alpha$ を生成作用素とする Markov 過程 $\widetilde{\mathbb{M}}^{(\alpha)}$ が存在すれば，境界条件 $\overline{L}u=0$ をみたす $\overline{D}$ 上の Markov 過程 $\mathbb{M}$ が存在する．

$\widetilde{\mathbb{M}}^{(\alpha)}$ のことを $\mathbb{M}$ に対する α 次の U 過程と呼ぶ．

以上を準備として，§1～§7に述べた結果に対する注意や残された問題などを列挙して行こう．

I.　本尾の結果のうち，§4に述べた Green 作用素の分解は，丁度上野の分解（8.1）に対応している．すなわち，G_α^{min} は

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

境界で0であるから，$(-\overline{L}H_\alpha)^{-1} = K^\alpha$，$\int_D f(y)\,\nu_\xi(dy) = Nf(\xi)$ とおくと（8.1）は

$$G_\alpha f = G_\alpha^{min} f + H_\alpha K^\alpha(-\delta + \mu\frac{\partial}{\partial n}G_\alpha^{min} + NG_\alpha^{min})f$$

とかけるから，適当な函数倍を除いて$-\delta$，μ，Nと本尾の分解のl，m，Nがそれぞれ対応している．本尾の分解は確率論的であるために，状態空間の微分構造や微分作用素とは無関係になっており，また，各要素のもつ意味が明瞭になっている．

2．$\mathbb{M}$が拡散過程の場合，すなわち$\mathbb{M}$が境界からの飛躍をもたない場合には，本尾の分解（§4の諸定理）を次のように解釈することが出来ると思われる．この場合，境界要素のうち独立なものは$\widetilde{\mathbb{M}}$とlである（$N=0$，$la+m=1$だから）が，$\mathbb{M}$の*path*の軌跡（*path*から時間を捨象した幾何的図形．しかし時間を捨象するといっても時間の進むはやさを無視するだけであって，時間的順序まで無視するのではない．すなわち，$x_t(w)$の値域ではない．）のうち境界にある所だけ見たものが0次U過程の軌跡であり，これをつなぐD内の*excursion*は$\mathbb{M}^{min}$から定まり，この軌跡の上をどういう時間で動くか（特に境界で）をlが定めると思われる．$\mathbb{M}$の運動を定める要素は$\mathbb{M}^{min}$，$\widetilde{\mathbb{M}}$，lであるが，$\widetilde{\mathbb{M}}$についてはその軌跡だけでよく$\widetilde{\mathbb{M}}$に時間変更の自由性がないということが多分いえるであろう．

$\mathbb{M}$に対し境界からの飛躍を許した場合には事情はもっと複雑になり，上のような解釈はむずかしいと思われる．たとえば，

$$\frac{\partial}{\partial n}Hu(\xi) = \int_{\partial D}\Big[u(y) - u(\xi) - \sum_{i=1}^{N-1}\frac{\partial u}{\partial \xi_i}(\xi)(\xi_i(y) - \xi_i(\xi))\Big]\nu_\xi^0(dy) + \sum_{i=1}^{N-1}\beta_i^0(\xi)\frac{\partial u}{\partial \xi_i}(\xi)$$

と表わされたとし，

$$L_1 u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0$$

を境界条件とする$\mathbb{M}_1$と

$$L_2 u = \sum_{i=1}^{N-1}\beta_i^0\frac{\partial u}{\partial \xi_i} + \frac{\partial u}{\partial n} + \int_{\partial D}\Big[u(y) - u(\xi) - \sum_{i=1}^{N-1}\frac{\partial u}{\partial \xi_i}(\xi)(\xi_i(y) - \xi_i(\xi))\Big]\nu_\xi^0(dy)$$

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

を境界条件とする$\mathbb{M}_2$があったとし，共に，境界での滞留も境界から内部への飛躍ももたないとする．この時$\mathbb{M}_1$の0次U過程の軌跡と$\mathbb{M}_2$の0次U過程の軌跡とは一致しているが，もちろん$\mathbb{M}_1$と$\mathbb{M}_2$は同じではない．

3．本尾の研究は，$\mathbb{M}^{min}$に対しては十分の正則性を仮定し，D内で$\mathbb{M}^{min}$と一致する一般の$\mathbb{M}$を分析しているので，$\mathbb{M}^{min}$に対しては相当強い解析的条件がついている．この条件，特に(Min.4)，(Min.5)の代りにもっと確率論的な条件を与えることが望ましい．

なお，本尾は(Min.4)，(Min 5)を仮定しない場合，D内で$\mathbb{M}^{min}$と一致するS上のMarkov過程$\mathbb{M}$のGreen核G_αは次のように分解されることを証明した．すなわち，γを固定し$\{G_\alpha^{min}f/G_\gamma^{min}1 : f\in C(S)\}$をすべて連続にするようなcompact化を$D\cup(\partial D)_{en}$とすると，$\xi\in\partial D$に対し$(\partial D)_{en}$上の測度$\nu_\xi$が存在して

$$G_\alpha f(x)=G_\alpha^{min}f(x)+\int_{\partial D}H_\alpha(x,d\xi)\int_{\partial D}K^\alpha(\xi,d\xi')\int_{(\partial D)_{en}}\nu_{\xi'}(d\eta)J_\alpha f(\eta),$$

$$J_\alpha f(\eta)=\lim_{y\to\eta}\frac{G_\alpha^{min}f(y)}{G_\gamma^{min}1(y)}$$

とかける．

4．§5，§6にのべた本尾の結果は，$\mathbb{M}$の境界要素$\widetilde{\mathbb{M}}$，l，m，Nのみたす必要十分条件をほぼ明らかにしている．すなわち，ある条件をみたす$\widetilde{\mathbb{M}}$，l，m，Nがもし与えられれば，これを境界要素とするような$\mathbb{M}$が存在するのである．しかし，この条件をみたす$\widetilde{\mathbb{M}}$，l，m，Nの存在はごく特別な場合にしか分らない．それ故$\mathbb{M}$の存在は一般には証明されていない．今の所分るのは，境界点が有限個の場合，Dが円または球で$\mathbb{M}$が回転不変の場合などである．

5．本尾の結果を見ると，$\widetilde{\mathbb{M}}$，l，m，Nからそれを境界要素とするような$\mathbb{M}$を構成する場合，まず$\widetilde{\mathbb{M}}$，l，m，Nからα次U過程に当るものを構成する部分は極めて確率論的である((5.7)

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

を見出したのは驚くべき分析である）が，それから先で補題6.3に当る部分は解析的にGreen作用素を構成して定理1.1，1.2に訴えている．$\mathbb{M}$の構造を明かにする上で，この部分をもより確率論的方法で行うことが望ましく思われる．これとほぼ同じ問題であるが，$\mathbb{M}$の要素$\mathbb{M}^{min}$，$\widetilde{\mathbb{M}}$，l，m，Nから$\mathbb{M}$のpathを再構成することが望ましい．$\mathbb{M}$と共役なMarkov過程を$\widehat{\mathbb{M}}$とし，$\mathbb{M}$，$\widehat{\mathbb{M}}$の境界への到達測度が$h(x,\xi)\nu(d\xi)$，$\nu(d\xi)\hat{h}(\xi,x)$とかけるとし，t_1，t_2，ξ，ηを固定する時$\mathbb{M}^{min}$を$h(\cdot,\eta)$で優調和変換し$\hat{h}(\xi,\cdot)$で相対優調和変換した形のMarkov過程$x_{(t_1,t_2,\xi,\eta)}(t)$，$t_1<t<t_2$，すなわちD上のMarkov過程で$x(t_1+)=\xi$，$x(t_2-)=\eta$という条件つきの$\mathbb{M}^{min}$（これはNeveu[3]が考えている）が再構成に利用できると考えられる．

6．Ventsel'の境界条件において$\delta=0$，$\mu>0$，$\nu_3(D)=0$の場合には，$\mu=1$とすると$LG_\alpha^{min}=\frac{\partial}{\partial n}G_\alpha^{min}$となるから，$\mathbb{M}$は$\mathbb{M}^{min}$と$\alpha$次U過程$\overline{L}H_\alpha$によって定まる．従って，$\mathbb{M}^{min}$と0次U過程によって定まる．§4に述べたような本尾の扱っている場合でも，$\mathbb{M}$が境界に滞留せず，境界から内部に飛躍しない時には，$\mathbb{M}$を定める要素は$\mathbb{M}^{min}$と0次U過程$\widetilde{\mathbb{M}}$の2つである．しかし，この結果は全く一般には（境界が$\mathbb{M}$に関し正則でも）必ずしも成り立たないことを，本尾による次の例が示している．$S=[-1,1]$，$D=[-1,0)\cup(0,1]$，$\partial D=\{0\}$とし，$\mathbb{M}_1$をs-scale$=x$，m-測度$=dx/2$なる$[-1,1]$の上の拡散過程，$\mathbb{M}_2$を$[-1,0]$ではs-scale$=x$，m-測度$=dx/2$，$(0,1]$ではs-scale$=2x$，m-測度$=dx/4$なる拡散過程とする．-1と1は$\mathbb{M}_1$についても$\mathbb{M}_2$についても反射壁としておく．この時，$\mathbb{M}_1$のminimalな部分，$\mathbb{M}_2$のminimalな部分は共に0で吸収されるBrown運動であり，$\mathbb{M}_1$の0次U過程，$\mathbb{M}_2$の0次U過程は同じで共に点0にいつまでも静止しているが，$\mathbb{M}_1$，$\mathbb{M}_2$は一致していない．（この例はまた，境界が$\mathbb{M}$に関し正則になっていても望ましいcompact化であるとは限らないということを示して

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

いる.) 佐藤 [1] は, $\mathfrak{M}$がその minimal な部分 $\mathfrak{M}^{min}$と0次U過程とで定めるための十分条件で§4の本尾の条件とは異るものを与えた. 主な付加条件は,

$G_\alpha(x, dy) = g_\alpha(x, y)\,u(dy)$ とかけること (μ は $\mathfrak{M}^{min}$ に関連したある条件をみたすとするが, $\mathfrak{M}$の excessive 測度ではなくてよい),

$$f\hat{G}_\alpha(y) = \int_S f(x)\,u(dx)\,g_\alpha(x, y)$$

と定義する時 $\hat{G}_\alpha$ は $C(S)$ を $C(S)$ 内にうつし $\lim_{\alpha\to\infty} \alpha\hat{G}_\alpha f = f$ なること ($\mathfrak{M}$の共役過程は存在しなくてよい) である. この時, 時間を逆転した path を用いて作用素 $\hat{H}_\alpha$ と ∂D 上の測度 νを適当に定義し

$$G_\alpha = G_\alpha^{min} + H_\alpha K^\alpha \hat{H}_\alpha \qquad \left(K^\alpha f(\xi) = \int_{\partial D} g_\alpha(\xi, \eta) f(\eta)\,\nu(d\eta)\right)$$

という分解を与えた. $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ が同じ minimal な部分をもちかつμを共通にとれるならば, $\hat{H}_\alpha$, ν は $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ に共通にとれる. 従ってこの場合$\mathfrak{M}$は $\mathfrak{M}^{min}$と0次U過程という2つの要素から定まる. 佐藤 [1] の条件と本尾の条件との関係は分っていない.

7. 定理4.4の (4.29) 式は境界条件 $Lu = 0$ に当る式であるが, $LHu + (L - LH)u = 0$ というような形になっているために, Lに当る作用素が定義されているとは云いがたい. Lに当るものを見出すことはむしろ残された問題である. Lに対してはたとえば,「$\mathfrak{M}$が拡散過程である時には L は局所性をもつ」ということが証明されなければならない.

8. Ventcel' の境界条件を表わす作用素 Lは, 境界上のある Markov 過程の生成作用素の形をした作用素 Bの部分とそれ以外の部分とから成っている. すなわち,

$$Lu = Bu + \delta Au + \mu\frac{\partial u}{\partial n} + \int_D \left[u(y) - u(\xi) - \sum_{i=1}^{N-1}\frac{\partial u}{\partial \xi_i}(\xi)\,(\xi_i(y) - \xi_i(\xi))\right]\nu_\xi(dy)$$

という形をしている. 生成作用素 Bを持った境界上の Markov 過程は, 境界条件 $Lu = 0$ に対する S上の Markov 過程とどのような関

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

連をもっているのであろうか？ 一般の場合に$\mathbb{M}$から，生成作用素Bをもった*Markov*過程に当るものを，何らかの方法で取り出すことはできないであろうか？ これは興味ある問題である．$\mathbb{M}$が拡散過程ならばこれは境界上の拡散過程になるであろう．$\mathbb{M}$に境界から内部への飛躍がない時には $\nu_\xi(D)=0$ と考えてよいであろうから，

$$LHu = Bu + \mu \frac{\partial}{\partial n} Hu$$

となり，この問題は0次U過程から$\mathbb{M}$の反射にもとずく飛躍を除去するという問題と考えられる．$\mathbb{M}$が拡散過程の場合には0次U過程からすべての飛躍を除去すればよいであろうが，これもまだ成功していない．

9. 広義の拡散過程をいくつかの要素へ分解することへの，このノートのやり方と違った接近の仕方はないであろうか？ Venttsel'のLに当るものを違ったやり方で確率論的に出すことはできないであろうか？ 拡散過程すなわち連続の場合にも，それを分解するのに，U過程という複雑な飛躍をする運動を介在させることを避けられないのであろうか？

10. $\mathbb{M}$の*minimal*な部分$\mathbb{M}^{min}$に関する函数uの*Dirichlet*ノルムを$D^{min}(u)$で表わそう．$\mathbb{M}$が自己共役の場合，命題7.6は

$$D(u) = D^{min}(u_0) + \tilde{D}([u]_{\partial D})$$

を示している．自己共役でない場合にも，命題7.6に対し類似の意味づけを与えられるのかも知れない．

11. 福島は，$\mathbb{M}^{min}$が*Green*空間上の*Brown*運動またはなめらかな領域の上の古典的拡散過程（十分なめらかな係数をもつ2階楕円型偏微分作用素に対応する拡散過程）の場合に

$$D^{min}(Hu) = \iint_{\partial D\times\partial D} (u(\xi)-u(\eta))\,\Theta(\xi,\eta)\,\nu(d\xi)\,\nu(d\eta))$$

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

を示した．ただし ν は ∂D 上の適当な測度で $\Theta(\xi, d\eta) = \theta(\xi,\eta)\nu(d\eta)$ とする．この $\theta(\xi,\eta)$ は Feller の U 核に当るが，Brown 運動の場合 Naïm [1] の θ 核に定数倍を除いて一致する．（以上については Doob [1]，福島 [1] および佐藤・長沢・福島 [1] の福島による才4章を参照．またこのノートの付録 I，II も参照．）また，古典的反射壁拡散過程では

(8.2) $\quad \forall u \in \mathcal{D}(\mathfrak{G})$ に対し $\quad \widetilde{D}(u) = D^{min}(Hu)$

が成り立つ．(佐藤・長沢・福島 [1] 才4章.) また，渡辺信三は平均0の加法的汎函数の表現に関する本尾・渡辺信三の研究の結果を応用して，

(8.3) $\quad \forall u \in \mathcal{D}(\mathfrak{G})$ に対し $\quad D(u) = D^{min}(u)$

であることは $\mathbb{M}$ が境界で増加する平均 0 の加法的汎函数をもたないことと同値であることを示し，その系として，(8.3) が成り立ちかつ $\mathbb{M}^{min}$ が拡散過程であるならば，$\mathbb{M}$ も拡散過程になることを示した．一般に $D(u) - D^{min}(u)$ は境界で増加する平均 0 の加法的汎函数がどれだけあるかを表わしている．$\widehat{D}(u) - D^{min}(Hu)$ も同様であろう．一般に，境界条件が

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \sum_{i=1}^{N-1} \beta_i \frac{\partial u}{\partial \xi_i} = 0$$

の形の場合には (8.2) あるいは (8.3) が成り立つこと，逆に (8.2) あるいは (8.3) が成り立てば境界条件が上と類似の形で表わされることがいえないであろうか？ またこのようなクラス内では P_x 測度が互いに絶対連続であろうかという問題（答えは恐らく否定的）もある．

12. 古典的拡散過程では $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ を境界条件とするものを反射壁をもつと呼ぶ．これは境界から連続に内部に戻っている拡散過程の中で最も簡単なものであろう．一般の拡散過程の場合，minimal な部分 $\mathbb{M}^{min}$ だけが与えられた時に反射壁に当るもの（あるいは境界から連続に内部に戻ってくるもの）を構成するとい

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

う問題は，既に数年前から提起されている．

13. $\mathfrak{M}^{min}$ が Green 空間上の Brown 運動である時，福島は最近，$\frac{\partial u}{\partial n}=0$ を境界条件とする拡散過程すなわち反射壁 Brown 運動を構成したとのことである．ここで $\frac{\partial}{\partial n}$ は Doob [1] が定義したものである．構成の才1段階として Green 作用素を L^2 において構成する時（福島 [2]）には Dirichlet ノルムを用いるが，その方法は付録 I に解説されている．

14. 長沢 [1] によると，$\mathfrak{M}$ が境界条件

$$Lu=\frac{\partial u}{\partial n}+\sum_{i=1}^{N-1}\beta_i\frac{\partial u}{\partial \xi_i}=0$$

に対応する古典的拡散過程で不変測度をもてば，$\mathfrak{M}$ の共役過程の境界条件は

$$\hat{L}u=\frac{\partial u}{\partial n}-\sum_{i=1}^{N-1}\beta_i\frac{\partial u}{\partial \xi_i}=0$$

となる．従って，このようなクラス内の $\mathfrak{M}$ に対しては，$L=\hat{L}$ と $\beta_i\equiv 0$ とが同値である．一般の場合にも反射壁拡散過程に当るものに同様な特徴づけを与えられないであろうか？ たとえば，$\mathfrak{M}^{min}$ が自己共役な拡散過程である時，(8.2) あるいは (8.3) をみたす自己共役な $\mathfrak{M}$ として（または (8.2) あるいは (8.3) をみたし自己共役な 0 次 U 過程をもつような $\mathfrak{M}$ として），反射壁拡散過程に当るものを特徴づけられないであろうか？

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

文　献

Martin 境界関係のはあげてないので，國田 [1] を参照.

R. M. Blumenthal [1] An extended Markov property, Trans. Amer. Math. Soc., 85 (1957), 52 − 72.

J. L. Doob [1] Boundary properties of functions with finit Dirichlet integrals, Ann. Inst. Fourier 12 (1962), 573 − 622.

E. B. Dynkin [1] Foundations of the theory of Markov processes, Moscow, 1959.

[2] Markov processes, Moscow, 1963.

W. Feller [1] On boundaries and lateral conditions for the Kolmogorov differential equations, Ann. of Math. 65 (1957), 527 − 570.

福島正俊 [1] On Feller's kernel and the Dirichlet norm, Nagoya Math. J., 24 (1964), 167 − 175.

[2] Resolvent kernels on a Martin space, Proc. Japan Acad., 41 (1965), 260 − 263.

G. A. Hunt [1] Markov processes and potentials, Illinois J. Math., 1 (1957), 44 − 93, 316 − 369; 2 (1958), 151 − 213.

池田信行 [1] On the construction of two dimensional diffusion processes satisfying Wentzell's boundary conditions and its application to boundary value problems, Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, Ser. A, 33 (1961), 367 − 427.

池田信行，上野正，田中洋，佐藤健一 [1] 多次元拡散過程の境界問題，Sem. on Prob. 5 (1960), 6 (1961).

伊藤　清 [1] 確率過程，岩波講座現代応用数学，1957.

伊藤　清，H. P. McKean, Jr. [1] Diffusion processes and their sample paths, Springer, 1965.

[2] Brownian motions on a half line, Illinois J. Math., 7 (1963), 181 - 231.

近藤亮司 [1] Markov過程とpotential, Sem. on. Prob. 11 (1962).

国田 寛 [1] Markov過程とMartin境界, Sem. on Prob. 17 (1963).

国田 寛, 渡辺 毅 [1] Notes on transformations of Markov processes connected with multiplicative functionals. Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ., Ser. A, 17 (1963), 181-191; 18 (1964), 114-117.

P.-A. Meyer [1] Seminaire Brelot-Choquet-Deny, 5 (1960/61).

[2] Fonctionnelles multiplicatives et additives de Markov, Ann. Inst. Fourier 12 (1962), 125-230.

本尾 実 [1] Representation of a certain class of excessive functions and a generator of Markov processes, Sci. Pap. Coll. Gen. Ed. Univ. Tokyo, 12 (1962), 143-159.

[2] マルコフ過程のadditive functional, Sem. on Prob. 15 (1963).

[3] The sweeping-out of additive functionals and processes on the boundary, Ann. Inst. Stat. Math., 16 (1964), 317-345.

[4] Application of additive functionals to the boundary problem of Markov process, Proc. 5th Berkeley Symp. on Math Stat. and Prob. 予定.

長沢正雄 [1] The adjoint process of diffusion with reflecting barrier, Kōdai Math. Sem. Rep. 13 (1961), 235-248.

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

長沢正雄・佐藤健一 [1] Some theorems on time change and killing of Markov processes, Kōdai Math. Sem. Rep. 15 (1963), 195-219.

L. Naïm [1] Sur le rôle de la frontière de R. S. Martin dans la théorie du potential, Ann. Inst. Fourier 7 (1957), 183-281.

J. Neveu [1] Lattice methods and submarkovian processes, Proc. 4th Berkeley Symp. on Math. Stat. and Prob. 347-391.

[2] Une généralisation des processus à acroissements positifs independents, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 25 (1961), 36-61.

[3] Sur les états dentrée et les états fictifs dun processus de Markov, Ann. Inst. Poincaré 17 (1962), 324-337.

[4] Colloquim on combinatorial mathods in probability theory, Aarhus Univ.

佐藤健一 [1] A decomposition of Markov processes, J. Math. Soc. Japan 予定.

佐藤健一, 長沢正雄, 福島正俊 [1] マルコフ過程の変換と境界問題, Sem. on Prob. 16 (1963).

佐藤健一, 上野正 [1] Multidimensional diffusion and the Markov process on the boundary, J. Math. Kyoto Univ. 予定.

A. V. Skorohod [1] Boundary conditions for certain Markov processes. Theory Prob. Appl. 9 (1964), 644-654.

M. G. Šur [1] Continuous additive functionals of Markov processes and excessive functions, Dokl. Akad. Nauk SSSR 137 (1961), 800-803.

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

T. Ueno [1] The diffusion satisfying Wentzell's boundary condition and the Markov process on the boundary, Proc. Japan Acad. 36 (1960), 533-533, 625-629.

V. A. Volkonskii [1] Additive functionals of Markov processes, Trudy Moskov. Mat. Obšč. 9 (1960), 143-189.

渡辺信三 [1] On discontinuous additive functionals and Lévy measures of a Markov process, Japan. J. Math. 34 (1964), 53-70.

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

付録I. Markov連鎖のDirichletノルム

国田 寛

§0. 前書き

境界がなめらかでない領域において反射壁をもつBrown運動や拡散過程の構成の問題，更に空間に座標が入っていないMarkov過程において反射壁を考える際，normal derivativeやDirichletノルムに対応する概念を何らかの意味で定義する必要が起る。この問題に関してはDoob [1]，Fukushima [4] の研究があるが，この付録の§1では上記の結果を参考にしてMarkov連鎖の場合にnormal derivativeやDirichletノルムの定義を行う。尚§2ではDirichletノルムを用いてMarkov連鎖のresolventの構成を行うが，これが反射壁をもつMarkov連鎖のresolventであるかどうかには疑問の点もあり，一つの試みにすぎないことをおことわりしておきたい。

始めに古典的なGreenの公式と対比してDoob，Fukushimaの結果を簡単に紹介したい。Dをn次元ユークリッド空間の有界領域で，その境界∂Dは十分なめらかとする。u, vを$D \cup \partial D = \bar{D}$上の十分なめらかな函数とすれば次のGreenの公式

$$(0.1) \qquad \int_D v \Delta u \, dV + \int_D \nabla u \cdot \nabla v \, dV = -\int_{\partial D} v \frac{\partial u}{\partial n} dS$$

が成立する。ここにΔはラプラシアン$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$，$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \cdots\cdots \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$，$\frac{\partial}{\partial n}$は内側法線でのnormal derivativeであり，dVはvolume element，dSは∂Dのsurface elementである。$D(u, v) = \int_D \nabla u \nabla v \, dV$をDirichlet精分という。

我々は先ず(0.1)の両辺を微分と無関係に定義することを考える。uをD上の調和函数とすればJensenの不等式によりu^2は劣調和である。$-u^2$のRiesz分解におけるポテンシャル部分をu_p. u_pのRiesz表現を

$$(0.2) \qquad u_p(x) = \int G(x, y) \, \mu(dy)$$

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

とする．ここに $G(x,y)$ は $\overline{D}$ 上の Green 函数である．このとき $\mu(D)=2D(u,u)$ が成立する．実際，(0.2) の右辺に Δ を (Schwartz の distribution の意味で) 作用すれば
$\Delta u_p(x) = -\frac{\mu(dx)}{dV}$ 一方

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u^2 = 2u\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + 2\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2$$

だから $\Delta(u_p) = -\Delta(u^2) = -2\nabla u\cdot\nabla u$．故に $\mu(D)=2D(u,u)$ が得られる．次に (0.1) の右辺について考える．u を D 上の調和函数で $\overline{D}$ 上で連続とすれば Poisson の公式

$$(0.3) \qquad u(x) = \frac{1}{g}\int_{\partial D} u(\eta)\frac{\partial G(x,\eta)}{\partial n_\eta}\,dS_\eta, \quad g=(n-2)\omega, \quad \omega$$

単位球の表面積

が成立する．上式で $x=\xi\in\partial D$ で normal derivative と考える

$$(0.4) \qquad \frac{\partial u(\xi)}{\partial n_\xi} = \frac{1}{g}\int_{\partial D} u(\eta)\frac{\partial G(\xi,\eta)}{\partial n_\xi\partial n_\eta}\,dS_\eta.$$

したがって

$$(0.5) \qquad \int_{\partial D} u(\xi)\frac{\partial u(\xi)}{\partial n}\,dS_\xi = \frac{1}{g}\int_{\partial D}\int_{\partial D} u(\xi)u(\eta)\frac{\partial G(\xi,\eta)}{\partial n_\xi\partial n_\eta}\,dS_\xi$$

又 (0.4) において $u\equiv 1$ とおくと

$$(0.6) \qquad \int \frac{\partial G(\xi,\eta)}{\partial n_\xi\partial n_\eta}\,dS_\xi\,dS_\eta = 0.$$

(0.5) 及び (0.6) を用いて形式的計算をすれば

$$(0.7) \qquad -\int u(\xi)\frac{\partial u(\xi)}{\partial n}\,dS_\xi = \frac{1}{2g}\int_{\partial D}\int_{\partial D}(u(\xi)-u(\eta))^2\frac{\partial G(\xi,\eta)}{\partial n_\xi\partial n_\eta}\,dS_\xi\,dS_\eta$$

故に

$$(0.8) \qquad 2D(u,u) = \frac{1}{g}\int_{\partial D}\int_{\partial D}(u(\xi)-u(\eta))^2\frac{\partial G(\xi,\eta)}{\partial n_\xi\partial n_\eta}\,dS_\xi\,dS_\eta.$$

が得られる．

Doob は境界がなめらかでない場合でも，Martin 境界 ∂D に定義された Naim の Θ-核 ([9]) を用いて，適当な正則条件を

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

つ調和函数に対して

$$(0.9)\qquad D(u,u)=\frac{\delta}{2}\int_{\partial D}\int_{\partial D}(u(\xi)-u(\eta))^2\,\theta(\xi,\eta)\,\mu_0(d\xi)\,\mu_0(d\eta)$$

が成りたつことを示した。以下 (0.9) の右辺を $D'(u,u)$ また $D(u,v)=\frac{1}{4}\{D'(u+v,u+v)-D'(u-v,u-v)\}$ とおく。

$\overline{X}_t$ をなめらかな境界をもつ領域D上の反射壁の Brown 運動，X_t をその minimal な Brown 運動とする。$\overline{X}_t$，X_t の resolvent をそれぞれ $\overline{G}_\alpha$，G_α と書く。$K_\alpha(x,\xi)=\frac{\partial G_\alpha(x,\xi)}{\partial n_\xi}$，$K_\alpha f(x)=\int K_\alpha(x,\xi)f(\xi)dS_\xi$，$K_\alpha^* f(\xi)=\int K_\alpha(x,\xi)f(x)\,dV$ と書くことにすれば，Ueno の表現より $\overline{G}_\alpha=G_\alpha-K_\alpha(LK_\alpha)^{-1}K_\alpha^*$ と表わされる。ここに $L=\frac{\partial}{\partial n}$ である。$v=-K_\alpha(LK_\alpha)^{-1}K_\alpha^* f$ とおくと（v の境界函数は $-(LK_\alpha)^{-1}K_\alpha^* f$）、$Lv=-LG_\alpha f$ だから，Green の公式により

$$D(u,v)+\alpha\int uv\,dV=\int u\varphi\,dS\qquad \varphi=K_\alpha^* f$$

が成りたつ。ただし u は調和函数とする．したがって

$$(0.10)\qquad U_\alpha(\xi,\eta)=\alpha\int K(x,\xi)K_\alpha(x,\eta)\,dV$$

とおけば

$$(0.11)\qquad D(u,v)+\iint U_\alpha(\xi,\eta)u(\xi)v(\eta)\,dS_\xi dS_\eta=\int u(\xi)\varphi(\xi)\,dS_\xi$$

が成りたつ．言いかえれば v は上式の解になっている。

境界がなめらかでないとき，Martin 境界を考えれば $\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial n_\xi}$ には Martin 核 $K(x,\xi)$，$\frac{\partial G_\alpha(x,\xi)}{\partial n_\xi}$ には α－次の Martin 核 $K_\alpha(x,\xi)$ が対応するから (0.11) に対応する式は

$$(0.12)\qquad \frac{1}{2}D_\alpha(u,v)\equiv\frac{1}{2}D'(u,v)+\int U_\alpha(\xi,\eta)\,u(\xi)\,v(\eta)\,\mu_0(d\xi)\mu_0(d\eta)$$
$$=\int u(\xi)\varphi(\xi)\mu_0(d\xi)$$

になっている．福島氏は $\varphi=K_\alpha^* f$ を与えたとき，$D'(u,u)$ をみたすすべての u に対し (0.12) をみたす v が唯一つ存在することを示した．更にこの v を $M_\alpha\varphi$ と書くとき，

$$(0.13)\qquad \overline{G}_\alpha f=G_\alpha f+\int K_\alpha(x,\xi)M_\alpha K_\alpha^* f(\xi)\mu_0(d\xi)$$

を resolvent にもつ連続な path の Markov 過程が存在することを

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

示した。

以上に対比して，Markov 連鎖の場合に以下の§であつかうことのあらすじをのべる．(A) 調和函数 u の Dirichlet ノルムを u^2 の Riesz 分解におけるポテンシャル部分の Riesz 測度の total mass として定義する．(B) Martin 境界上に θ－核を定義する．なお Green 核が対称でないため，exit 境界と entrance 境界が異る．θ－核 $\theta(\xi,\eta)$ において，ξ は entrance 境界点，η は exit 境界点である．(C) exit 境界点と entrance 境界点の idntification を行い，(D) 適当な仮定の下に (0.9) と類似の結果が成立することを示す．(E) (0.12) に対応する式を用いて (0.13) の様にして Markov 連鎖の resolvent を構成する．

§1 θ－核と Dirichlet ノルム

1° 記号と定義

S を離散位相の入った可算集合，S に孤立点 Δ をつけ加えた空間を $S\cup\Delta$ とする．$T=[0,+\infty]$ から $S\cup\Delta$ への写像 w の内，(i) 右連続かつ左極限をもち，(ii) $\zeta(w)$ が存在し $t<\zeta(w)$ で $x_t(w)\in S$，$t\geqq\zeta(w)$ で $x_t(w)=\Delta$ をみたす，ものの全体を W で表わす．ここに $x_t(w)$ は w の t 座標である．$\mathbb{B}_t$ を $\{x_s(w)=y\}$ $(y\in S\cup\Delta,\ s\leq t)$ を含む最小の σ－algebra，又 $\mathbb{B}$ をすべての $\mathbb{B}_t$，$t>0$ を含む最小の σ－algebra とする．$(W,\mathbb{B}_t)$ 上に定義された $S\cup\Delta$ 上の Markov 過程を $X=(x_t,\zeta,P_x)$ で表わし，これを Markov 連鎖と呼ぶ．Markov 連鎖 X に次の記号を導入する．

$$(1.1)\qquad \begin{aligned} &G_\alpha(x,y)=E_x\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t}\chi_y(x_t)\,dt\right)\ (\alpha\geqq 0),\quad G(x,y)=G_0(x,y)\\ &g_x=E_x(\sigma_1),\qquad \pi(x,y)=P_x(x_{\sigma_1}=y)\end{aligned}$$

ただし χ_y は一点 y の特性函数であり，$\sigma_1(w)=\inf\{t>0\,;\,x_t(w)\neq x_0(w)\}$ である．

S 上の有限値(実)函数 $u(x)$ が

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

(1.2) $u(x) \geqq \sum_{y \in S} \pi(x, y) u(y) \qquad \forall x \in S$

をみたすとき X－優調和，特に上式で常に等号が成立するとき X－調和という．尚考えている連鎖 X が明らかなときは X を省略して単に優調和等という．非負優調和函数と *excessive function* は同値である．

(1.3) $u = Gf \equiv \sum_{y \in S} G(x, y) f(y), \qquad f \geqq 0$

と書けるとき u をポテンシャルという．S 上の（集合）函数 $\nu(x)$ が

(1.4) $\nu(x) \geqq g_x^{-1} \sum_{y \in S} \nu(y) g_y \pi(y, x) \qquad \forall x \in S$

をみたすとき X－優調和集合函数，更に上式で等号が成りたつとき X－調和集合函数という．同様に X－はしばしば省略する．非負優調和函数は *excessive measure* と同値である．

Markov 連鎖に次の仮定をおく

(X.1) X は *transient* 即ちすべての $x \in S$ で $G(x, x) < \infty$.

(X.2) $\sum_{y \in S} \pi(x, y) = 1 \qquad \forall x \in S$

(X.3) すべての x で $\nu_0(x) > 0$ となる調和集合函数が存在する．

以下 (X.3) をみたす ν_0 を固定し，X の ν_0 による相対優調和変換連鎖を $X^{\nu_0} = (x_t, \zeta, P_x^{\nu_0})$ で表わす（[7] を参照）．X^{ν_0} に対応する (1.1) の諸量を $G_\alpha^{\nu_0}(x, y)$ 等と書くことにする．$G_\alpha(x, y)$ の y に関する ν_0－*density* を $g_\alpha(x, y)$.（$g(x, y) = g_0(x, y)$）と書けば

$$G_\alpha^{\nu_0}(x, y) = \frac{\nu_0(y)}{\nu_0(x)} G_\alpha(y, x) = \nu_0(y) g_\alpha(y, x).$$

したがって X と X^{ν_0} は ν_0－測度に関し互に *adjoint* になっている．

<u>定義</u>．$u = Gf$ をポテンシャルとすれば

$$u(x) = \int g(x, y) \mu(dy), \qquad \mu(dy) = f(y) \nu_0(y)$$

と表現できる．μ をポテンシャル u の *Riesz* の測度という．

2° *Martin* 境界

Markov 連鎖の *Martin* 境界の構成は [5]，[7] にくわしい

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

のでここでは定義と後に必要な結果のみをのべる．S上の非負測度γが$0<\gamma G(y)\equiv\int_S\gamma(dx)G(x,y)<\infty$をみたすとき reference 測度という．reference 測度γを一つ固定し，$K(x,y)=G(x,y)/\gamma G(y)$とおく．S上の距離

$$\rho(x,y)=\sum_{z\in S}\frac{|K(z,x)-K(z,y)|}{1+|K(z,x)-K(z,y)|}m(z),\ m(z)>0,\qquad \sum_{z\in S}m(z)<\infty$$

によるSの完備化をM，$\partial S=M-S$と書き，MをMartin空間，∂SをMartin境界という．このとき$K(x,\eta)\equiv\lim_{y\to\eta(\rho)}K(x,y)$が存在し，$S\times M$上の連続函数で$x$に関し優調和となる．$K(\cdot,1)$がextreme優調和かつ$\int\gamma(dx)K(x,\eta)=1$をみたす$\eta\in M$の全体を$M_1$で表わす．調和函数のMartin表現については[7]を参照．

$$(1.5)\qquad K_\alpha(x,\eta)=K(x,\eta)-\alpha\sum_{y\in S}G_\alpha(x,y)K(y,\eta)$$

とおき$K_\alpha(\cdot,1)\equiv0$のときηを passive point，$K_\alpha(\cdot,\eta)\not\equiv0$のとき exit point という．Mの exit point の全体をM_{ex}で表わす．

注意．$\eta\in S$のとき$K_\alpha(x,\eta)=G_\alpha(x,y)\gamma G(y)^{-1}$.

定理 1.1

$$(1.6)\qquad G_\alpha^*(\eta,x)\equiv\gamma G(x),K_\alpha(x,\eta)$$

を resolvent 核にもつM_{ex}上の右連続な強Markov過程$X^*=(x_t,\zeta,P_\eta^*)$が存在する．

証明は[6]，[7]にあるので，ここでは筋道のみを述べる．$\eta\in S$のとき$G_\alpha^*(\eta,x)=\gamma G(x)G_\alpha(x,\eta)\gamma G(\eta)^{-1}$だから$X$を$\gamma G(\cdot)$によって相対優調和変換したMarkov連鎖を$X^\gamma=(x_t,\zeta,P_\eta^\gamma)$（$\eta\in S$）とすれば$X^\gamma$は求める$X^*$の空間$S$への制限になっている．$X^\gamma$を$M_{ex}$上に拡張するには次の様にすればよい．$G^*(\eta,x)=\gamma G(x)K(x,\eta)$とおき，$a(x)>0$（$x\in S$）を級数$\sum_{x\in S}G^*(\eta,x)a(x)$が$\eta$の函数とみて一様収束する様に選べば

$$(1.7)\qquad \hat{G}^*f(\eta)=\sum_{x\in S}G^*(\eta,x)\,a(x)\,f(x)$$

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

は $\mathbb{C}(M)^{*)}$ を $\mathbb{C}(M)$ に移す有界作用素である。したがって

$$\hat{G}^*_\alpha \equiv \sum_{n=0}^{\infty}(-\alpha)^n[\hat{G}^*]^{n+1} \qquad \alpha<\|\hat{G}^*\|^{-1}$$

も $\mathbb{C}(M)$ を $\mathbb{C}(M)$ に移す作用素である。$\hat{G}^*_\alpha$ の空间 S への制限は X^r を *additive functional* $\varphi_t=\int_0^t a(x_s)\,ds$ の逆函数によって時间変更した連鎖の *resolvent* と一致する。ゆえに $\hat{G}^*_\alpha$ は非負作用素で $\|\hat{G}^*_\alpha\|\le\frac{1}{\alpha}$ をみたす。函数族 $\{\hat{G}^*_\alpha f;\ f\in\mathbb{C}(M)\}$ は M の二点を分離するから、Ray の定理（[6]）によって右連続な強 Markov 過程 $\hat{X}^*=(x_t,\zeta,\hat{P}^*_\eta)$ $(\eta\in M)$ で $\hat{G}^*_\alpha$ を *resolvent* にもつものが存在する。更に $\hat{X}^*$ の *branching point* の全体は M_1 と一致するので $\hat{X}^*$ は M_1 上の Markov 過程と考えられる。$\hat{X}^*$ を $\varphi_t=\int_0^t\frac{ds}{a(x_s)}$ の逆函数で時间変更した Markov 過程を $X^*=(x_t,\zeta,P^*_\eta)$ とする。η が *passive point* のとき $\varphi_t=\infty$ $(\forall t>0)$ a.e. $\hat{P}^*_\eta$ となるので X^* では η は *trap* になっている。η が *exit point* のとき φ_t は連続（a.e. $\hat{P}^*_\eta$）となるので 0 次の *resolvent* は元の $G^*(\eta,x)$ と一致する。ゆえに $X^*=(x_t,\eta,P^*_\eta)$ を M_{ex} 上に制限したものが求める Markov 過程である。

3° Martin 双対境界

$0<G\varphi(x)\equiv\sum_{y\in S}G(x,y)\varphi(y)<\infty$ をみたす函数 $\varphi\ge0$ を固定し、$K^*(y,x)=G(y,x)G\varphi(y)^{-1}$ とおく。S 上の距離

$$\rho^*(x,y)=\sum_{z\in S}\frac{|K^*(y,z)-K^*(x,z)|}{1+|K^*(y,z)-K^*(x,z)|}\,m^*(dz),\ m^*(z)>0,\ \sum m^*(z)<\infty$$

による S の完備化を M^*, $\partial S^*=M^*-S$ と書き、それぞれ Martin 相対空间, Martin 双対境界と呼ぶ。このとき $K^*(\xi,x)=\lim_{y\to\xi(\rho^*)}K^*(y,x)$ が存在し $M^*\times S$ 上の連続函数で x に関しては優調和集合函数となる。$K^*(\xi,\cdot)$ が *extreme* かつ $\int K^*(\xi,dx)\varphi(x)=1$ となる ξ の全体を M_1 と書く。

(1.8) $\quad K^*_\alpha(\xi,x)\equiv K^*(\xi,x)-\alpha\sum_{y\in S}K^*(\xi,y)G_\alpha(y,x)$

---

*) $\mathbb{C}(M)$ は M 上の連続函数の全体。

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

とおき $K_\alpha^*(\xi,\cdot)\equiv 0$ のとき ξ を双対 passive point, $K_\alpha^*(\xi,\cdot)\not\equiv 0$ のとき entrance point という。M_1^* の entrance point の全体を M_{en}^* と書く。

定理 1.2

(1.9) $$G_\alpha^\varphi(\xi,x)=K_\alpha^*(\xi,x)\,G\varphi(x)$$

を resolvent にもつ M_{en}^* 上の右連続な強Markov過程 $X^\varphi=(X_t,\xi,P_\xi^\varphi)$ が存在する。

証明 は定理1.1と同様である。なおこの X^φ の S への制限は X を $G\varphi$ で優調和変換したものと等しい。

定義 X^* 及び X^φ は右連続な強Markov過程だから M_{en} 及び M_{en}^* 上に細位相が定義される。X^* による M_{en} 上の細位相を $(X^*,\mathfrak{F})$, X^φ による M_{en}^* 上の細位相を $(X^\varphi,\mathfrak{F})$ で表わす。

注意. X の Martin 双対境界は X^{ν_0} の Martin境界に一致する。実際 $\varphi\nu_0$ を X^{ν_0} の reference測度にとれば

$$K^{\nu_0}(x,y)\equiv G^{\nu_0}(x,y)/\varphi\nu_0 G^{\nu_0}(y)=K^*(y,x)\,\nu_0(x)^{-1}.$$

したがって X^{ν_0} の Martin 境界と X の Martin双対境界が一致し, $K^{\nu_0}(x,\xi)=K^*(\xi,x)\,\nu_0(x)^{-1}$ が成立する。以下 ν_0 の双対標準測度([7]) (あるいは I の X^{ν_0}－連鎖における標準測度)を μ_0^* とすれば, X^{ν_0}－連鎖に関して class (D) の調和函数 v に対して境界函数 $v(\xi)$ が存在し

(1.10) $$v(x)=\int_{M_1^*}\frac{K^*(\eta,x)}{\nu_0(x)}\,v(\eta)\,\mu_0^*(d\eta)$$

と表現される([7]). 尚 I の X－連鎖に関する標準測度を μ_0 とすれば X－連鎖の class (D) の調和函数 u に対して同様に境界函数 $u(\eta)$ が存在して

(1.11) $$u(x)=\int_{M_1}K(x,\eta)\,u(\eta)\,\mu_0(d\eta)$$

と表現できる。

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

4°. Θ－核

Lemma 1.1 (Surmedian の regularization) $(\overline{S}, \mathbb{B}_{\overline{S}})$ をある可測空間，m を $(\overline{S}, \mathbb{B}_{\overline{S}})$ 上の測度とする．S 上の resolvent G_α が m に関し絶対連続で $G_\alpha(x, dy) = g_\alpha(x, y)\, m(dy)$ と書けているとする．m－測度 0 を除いて定義された非負可測函数 v が，$\alpha G_\alpha v(x) \leqq v(x)$, a.e. m $(\forall \alpha > 0)$ をみたすとする．このとき $\alpha G_\alpha v$ は α と共に増加し $u = \lim_{\alpha \to \infty} \alpha G_\alpha v$ は G_α-excessive かつ $G_\alpha u(x) = G_\alpha v(x)$, $\forall \alpha > 0$, $\forall x \in S$ をみたす．

定義．この u を surmedian v の regularization という．

証明 (i) v は有界とする．$\alpha \leqq \beta$ のときすべての $x \in S$ で

$$\alpha G_\alpha v(x) - \beta G_\beta v(x) = \alpha G_\alpha v(x) - \beta\left[G_\alpha v(x) - (\beta - \alpha) G_\alpha G_\beta v(x)\right]$$
$$= (\alpha - \beta) G_\alpha v(x) + \beta(\beta - \alpha) G_\alpha G_\beta v(x)$$
$$\leqq (\alpha - \beta) G_\alpha v(x) + (\beta - \alpha) G_\alpha v(x) = 0$$

したがって $\alpha G_\alpha v$ は α と共に増加する．u の定義から

$$G_\beta u = \lim_{\alpha \to \infty} \alpha G_\beta G_\alpha v = \lim_{\alpha \to \infty} \frac{\alpha}{\alpha - \beta}\left[G_\beta v - G_\alpha v\right] = G_\beta v$$

又この関係から $\beta G_\beta u = \beta G_\beta v \leq u$ かつ $\lim_{\beta \to \infty} \beta G_\beta u = u$ が得られる．

(ii) v が非有界のとき $v_n = v \wedge n$ は surmedian であることは容易に分る．u_n を v_n の regularization とすれば $u_n \uparrow$．ゆえに $u = \lim_{n \to \infty} u_n$ は G_α－excessive である．一方 $G_\beta u_n = G_\beta v_n$ だから $n \longrightarrow \infty$ として $G_\beta u = G_\beta v$ が得られる．

以下簡単のために連鎖 X は

$$(X.4) \qquad M_1 = M_{es}, \quad M_1^* = M_{en}^*$$

をみたすとする．

Θ－核の定義 (i) $\xi, \eta \in S$ のとき

$$(1.12) \qquad \Theta(\xi, \eta) \equiv \frac{G(\xi, \eta)}{G\Phi(\xi)\, \gamma G(\eta)} = K^*(\xi, \eta)\frac{1}{\gamma G(\eta)}.$$

(ii) $\xi \in M_{en}^*$, $\eta \in S$ のとき，$\xi_n \in S$ を ξ に収束する（ρ^*－位相で）点列とする．

$$(1.13) \qquad \Theta(\xi, \eta) \equiv \lim_{n \to \infty} \Theta(\xi_n, \eta) = K^*(\xi, \eta)\frac{1}{\gamma G(\eta)}.$$

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

(iii) $\xi \in M_{en}^*$, $\eta \in M_{en}$ のとき，(ii) の $\theta(\xi,\eta)$ は η に関し G_α^*-surmedian（m を S の各点に1の mass をもち $m(\partial S_{ex})=0$ をみたす測度と考える）だから Lemma 1.1 により

(1.14) $$\theta(\xi,\eta)\equiv \lim_{\alpha\to\infty}\alpha G_\alpha^*\theta(\xi,\eta)$$

が存在する．$\eta\in S$ のとき $\theta(\xi,\eta)$ は X^* の S への制限に関し excessive だから (1.14) の θ は (1.13) の θ に一致する　この θ を θ－核という．θ－核は ξ に関し X^p- excessive, η に関し X^*- excessive である．

注意．Naim [9] はある領域 D でラプラシアン Δ に対応する Green 函数 $G(x,y)$ を用いて θ－核を定義した．先ず D の Martin 境界 ∂D 上に細位相を導入し，D 内の ξ,η に対し (1.12) 式と同じに定義された θ－核が境界上まで細位相で連続拡大されることを示した。我々の定義も Naim の定義と本質的に同じである．実際我々の $\theta(\xi,\eta)$ は ξ に関し $(X^p,\mathcal{F})$－連続，η に関し $(X^*,\mathcal{F})$－連続だから，内部を (1.12) によって定義した $\theta(\xi,\eta)$ を境界上まで $(X^p,\mathcal{F})$ 及び $(X^*,\mathcal{F})$ によって連続拡大したものに他ならない．尚　福島氏 [3] は Brown 運動のとき Naim の θ－核と Feller の U－核が一致することを示したが，このことは Markov 連鎖についても成立する．実際 (1.14) の右辺は

$$\lim_{\alpha\to\infty}\alpha\sum_{y\in S}K^*(\xi,y)\frac{1}{\gamma G(y)}\ \gamma G(y)K_\alpha(y,\eta)$$
$$=\lim_{\alpha\to\infty}\alpha\sum_{y\in S}K^*(\xi,y)K_\alpha(y,\eta).$$

由えに

(1.15) $$U_\alpha(\xi,\eta)=\alpha\sum_{y\in S}K^*(\xi,y)K_\alpha(y,\eta),\quad U(\xi,\eta)=\lim_{\alpha\to\infty}U_\alpha(\xi,\eta)$$

とおけば $\theta(\xi,\eta)=U(\xi,\eta)$ この $U(\xi,\eta)$ が Feller の U－核と呼ばれるものである．

5° ポテンシャルの normal derivative

Martin 境界には普通の意味の法線方向の定義はないが，そ

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

れを細位相で代用する．又法線方向の距離の代りに Green 核 $VG(x)$, $G\varphi(x)$ 等を用いる．例えば $K^*(\xi, x)$ は $G(x, y)$ を Green 核 $G\varphi(x)$ で測った normal derivative と考えることができる．実際 ξ が境界点のとき $G(\xi, x) = G\varphi(\xi) = 0$ と形式上みなせるから

$$K^*(\xi, x) = \lim_{y \to \xi} \frac{G(y, x) - G(\xi, x)}{G\varphi(y) - G\varphi(\xi)}$$

と書ける．一般のポテンシャルについても同じ事実が成立する．即ち

<u>Lemma 1.2</u>　u を excessive function とすると

(1.16)　$$(X^\varphi, \mathfrak{F}) - \lim_{x \to \xi} \frac{u(x)}{G\varphi(x)} \qquad \xi \in M^*_{ex}$$

が存在する．

<u>証明</u>　$v(x) = u(x) \cdot G\varphi(x)^{-1}$ は S 上で X^φ- excessive だから Lemma 1.1 によって $v(x)$ は M^*_{ex} 上の X^φ- excessive function に一意に連続拡大（$(X^\varphi, \mathfrak{F})$- 位相で）される．ゆえに (1.16) が存在する．

<u>定義</u>　u がポテンシャルのとき (1.16) の値を u の ξ における normal derivative と言い $\frac{\partial u}{\partial G}(\xi)$ で表わす．

<u>系</u>　u がポテンシャル，μ をその Riesz 測度とすると

(1.17)　$$\frac{\partial u}{\partial G}(\xi) = \int_S \theta(\xi, y)\, \mu_1(dy), \quad \mu_1(dy) = \gamma G(y) \nu_0(y)^{-1} \mu(dy).$$

<u>証明</u>　$x \in S$ のとき

$$\frac{u(x)}{G\varphi(x)} = \int_S \theta(x, y)\, \mu_1(dy)$$

であり，両辺は X^φ- excessive だから M^*_{en} 上に一意的な連続拡大をもつ．ゆえにこの結果が成立する．

<u>定理 1.3</u>　（ポテンシャルと調和函数に対する Green の公式）．v を X^{φ}- 調和でその表現は (1.10) で与えられているとする．u をポテンシャルで μ をその Riesz 測度とすれば

(1.18)　$$\int_S v(x)\, \mu(dx) = \int_{M^*_{en}} v(\xi) \frac{\partial u}{\partial G}(\xi)\, \mu^*_0(d\xi)$$

特に $v = 1$ のとき

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

$$(1.19)\qquad \mu(S)=\int_{M^*_{en}}\frac{\partial u}{\partial G}(\xi)\,\mu_0^*(d\xi).$$

証明

$$\int_{M^*_{en}} v(\xi)\frac{\partial u}{\partial G}(\xi)\mu_0^*(d\xi)=\int_{M^*}\mu_0^*(d\xi)\,v(\xi)\int_S\theta(\xi,y)\mu_1(dy)$$

$$=\iint_{M^*\times S}\mu_0^*(d\xi)v(\xi)\frac{K_0^*(\xi,y)}{\nu_0(y)}\cdot\frac{\nu_0(y)}{\gamma G(y)}\,\mu_1(dy)=\int_S v(y)\mu(dy).$$

注意. Green の第二公式より

$$\int_D(v\Delta u-u\Delta v)\,dV=-\int_{\partial D}\left(v\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial v}{\partial n}\right)dS$$

したがって v が調和，u がポテンシャルのとき $\Delta v>0$. $u(\xi)=0$ $(\xi\in\partial D)$ だから

$$-\int_D v\Delta u\,dV=\int_{\partial D}v\frac{\partial u}{\partial n}\,dS$$

定理 1.3 は上式の analogue である.

6° 境界の identification

Exit 境界と entrance 境界の identification は Markov 過程の境界条件の問題や，構成の問題を考える際重要であり，種々の立場からその試みがなされている．ここでは調和函数の Dirichlet ノルムの Doob 式表現を求めるのに必要な identification を行う.

定義 $\eta\in M_1$, $\xi\in M_1^*$ とする．η の $(X^*, \mathcal{F})$－近傍の S への制限が ξ のある $(X^{\mathcal{F}}, \mathcal{F})$－近傍の S への制限になっており，又この逆が成りたつとき $\eta\longleftrightarrow\xi$ と書き η と ξ と同一視する.

細位相は元の ρ－位相より細かいから $\eta\in M_1$ に対し異る ξ_1, $\xi_2\in M_1^*$ が対応することはあり得ない.

$$\overline{\partial S}=\{y\in\partial S_1;\ \exists y^*\in\partial S^*;\ y^*\longleftrightarrow y\},\quad \overline{M}=\overline{\partial S}\cup S$$

とおく．$(X^*, \mathcal{F})$ の $\overline{M}$ への制限を $\mathcal{F}_{\overline{M}}$ と書く．$\eta,\xi\in\overline{M}$ のとき $K(x,\eta)$ 及び $K^*(\xi,x)$ は η 及び ξ に関し $\mathcal{F}_{\overline{M}}$－連続である.

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

7° 調和函数の Dirichlet ノルム

以下次の仮定をおく

(X.5) $\overline{M} = M_1 = M_1^*$

u が調和のとき Jensen の不等式により $-u^2$ は優調和である. $-u^2$ の Riesz 分解([7]) のポテンシャル部分を u_p としその Riesz 測度を μ とする.

定義. $\mu(S)$ を調和函数 u の Dirichlet ノルムといい $D(u, u)$ で表わす.

定理 1.4 u は調和で u^2 は class (D) に属するとする. u の境界函数を $u(\xi)$ とおくと,

$$(1.20) \quad \frac{\partial u_p}{\partial G}(\xi) = \mathcal{F}_{\overline{M}} - \lim_{y \to \xi} \frac{u_p(y)}{G\varphi(y)} = \int (u(\xi) - u(\eta))^2 \Theta(\xi, \eta) \mu_0(d\eta).$$

証明 u^2 の調和部分は

$$\int K(x, \xi) u(\xi)^2 \mu_0(d\xi) = Hu^2(x)$$

と表現できる. したがって

$$\frac{u_p(y)}{G\varphi(y)} = \frac{1}{G\varphi(y)}\{Hu^2(y) - u(y)^2\} = \int_{\partial S} \frac{u(\eta)^2 - u(y)^2}{G\varphi(y)} K(y, \eta) \mu_0(d\eta)$$

$$= \int_{\partial S} [u(\eta) - u(\xi)]^2 \Theta(y, \eta) \mu_0(d\eta) - \frac{1}{G\varphi(y)} [u(\xi) - u(y)]^2.$$

上式の左辺及び右辺の第一項は $\overline{M}$ 上に一意的な連続拡大をもつから, 右辺の第二項を省略して

$$(1.21) \quad \frac{\partial u_p}{\partial G}(\xi) \leqq \int_{\partial S} (u(\eta) - u(\xi))^2 \Theta(\xi, \eta) \mu_0(d\eta)$$

が得られる一方

$$\int_{\partial S} \frac{u(\eta)^2 - u(y)^2}{G\varphi(y)} K(y, \eta) \mu_0(d\eta) = \int_{\partial S} (u(\eta) - u(y))^2 \Theta(y, \eta) \mu_0(d\eta)$$

が成立するから, $\mathcal{F}_{\overline{M}} - \lim_{y \to \xi} u(y) = u(\xi)$ ([5, 6章]) に注意して Fatou の Lemma を用いれば

$$(1.22) \quad \frac{\partial u_p}{\partial G}(\xi) \geqq \int_{\partial S} (u(\xi) - u(\eta))^2 \Theta(\xi, \eta) \mu_0(d\eta).$$

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

(1.21) 及び (1.22) より求める結果が得られる.

__定理 1.5__ 前定理と同じ条件の下で

$$D(u,u)=\int_{\partial S}\int_{\partial S}(u(\xi)-u(\xi))^2\,\theta(\xi,\eta)\,\mu_0^*(d\xi)\,\mu_0(d\eta).$$

__証明__ (1.19) に (1.20) を代入すればよい.

__注意__ ポテンシャルの Riesz 測度は ν_0 の取り方に関係する. したがって調和函数の Dirichlet ノルムも ν_0 が変れば変る. 一方 θ ー核は ν_0 に無関係に定義されている. したがって Dirichlet ノルムの ν_0 による違いは μ_0^* の違いとして現われるわけである. (μ_0^* は ν_0 の標準測度であった). 尚 Brown 運動のときは ν_0 (に対応する測度として) Lebesgue 測度をとれば $D(u.u)$ は classical な Dirichlet 積分と一致する.

§2. Resolvent の構成

この節では Markov 連鎖 X は前節の仮定 (X.1)−(X.5) をみたすものとする. μ^* を $\overline{\partial S}=\overline{M}-S$ 上の測度で μ_0 は μ^* に関して絶対連続とする. μ^* に関する L_2−空間を $L_2(\overline{\partial S},\mu^*)$, その内積を $(\ ,\ )_0$, ノルムを $\|\ \ \|_0$ で表わす. $\overline{\partial S}$ 上の可測函数 u, v に対し

$$(2.1)\quad \begin{aligned} &U_\alpha(\xi,v)=\int U_\alpha(\xi,\eta)\,v(\eta)\,\mu_0(d\eta),\quad U_\alpha(u,\eta)=\int U_\alpha(\xi,\eta)\,u(\xi)\,\mu^*(d\xi)\\ &U_\alpha(u,v)=\int U_\alpha(\xi,v)\,u(\xi)\,\mu^*(d\xi)\end{aligned}$$

とおく. 更に

$$(2.2)\quad \mu_\alpha(d\xi)=U_\alpha(\xi,1)\,\mu^*(d\xi)+U_\alpha(1,\xi)\,\mu_0(d\xi)$$

とおき μ_α に関する L_2 を L_2^α, その内積を $(\ ,\ )_\alpha$, ノルム $\|\ \ \|_2$ で表わす. 更に

$$(2.3)\quad D(u,v)=\iint(u(\xi)-u(\eta))(v(\xi)-v(\eta))\,\theta(\xi,\eta)\,\mu^*(d\xi)\,\mu_0(d\xi)$$

$$(2.4)\quad \begin{aligned} &D_\alpha(u,v)=D(u,v)+2m\,U_\alpha(u,v)\qquad 0<m\leqq 1\\ &\mathcal{D}_\alpha=\{u;\ D(u,u)<\infty\ \text{かつ}\ \|u\|_\alpha<\infty\}\end{aligned}$$

とおく.

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

この節の目的は，(i) $\varphi(\xi)=K^*_\alpha(\xi,\cdot)$ に対し

(2.5) $\quad D_\alpha(u,v)=2m(u,\varphi)_0 \qquad \forall u\in\mathcal{D}_\alpha$

をみたす解 $v\in\mathcal{D}_\alpha$ が存在し，(ii) その対応を $v=M_\alpha K^*_\alpha$ と書けば，$\overline{G_\alpha}=G'_\alpha+K_\alpha M_\alpha K^*_\alpha$ が resolvent となっている，ことを示すことである．その際 $M_\alpha K^*_\alpha$ の存在証明が本質的であるが，それには福島氏による Hilbert 空間論の方法を用いる．しかし $D_\alpha(u,v)$ は u と v に関して対称でないため，$D_\alpha(u,v)$ を対称化した．

(2.6) $$\begin{aligned}\langle u,v\rangle_\alpha &= \frac{1}{2}\{D_\alpha(u,v)+D_\alpha(v,u)\}\\ &= D(u,v)+m\{U_\alpha(u,v)+U_\alpha(v,u)\}\end{aligned}$$

に対し $\langle u,v\rangle_\alpha=(u,\varphi)_0$ をみたす $v=M^0_\alpha\varphi$ を求めそれを補正することによって求める作用素が得られることを示す．尚その補正は Lax-Milgram [8] の方法による．

Lemma 2.1. (i) $u\in\mathcal{D}_\alpha$ のとき $\langle u,u\rangle_\alpha\geqq 0$ で $|||u|||_\alpha=\sqrt{\langle u,u\rangle_\alpha}$ とおくと

(2.7) $\quad |||\ \ |||_\alpha\geqq\sqrt{m}\,\|\ \ \|_\alpha\geqq k\|\ \ \|_0$

ただし $k>0$．

(ii) $u,v\in L^\alpha_2$ のとき $|U_\alpha(u,v)|\leqq\|u\|_\alpha\|v\|_\alpha$

証明．(i) $\Theta\geqq U_\alpha$ だから

$$\begin{aligned}\langle u,u\rangle_\alpha &\geqq \iint(u(\xi)-u(\eta))^2U_\alpha(\xi,\eta)\mu^*(d\xi)\mu_0(d\eta)+2mU_\alpha(u,u)\\ &\geqq m\{\iint(u(\xi)-u(\eta))^2U_\alpha(\xi,\eta)\mu^*(d\xi)\mu_0(d\eta)+2U_\alpha(u,u)\}\\ &= m\|u\|^2_\alpha\end{aligned}$$

ゆえに $\langle u,u\rangle_\alpha\geqq 0$ かつ (2.7) の左辺の不等式が成立する．右辺の不等式を導くには次の様にすればよい．$U_\alpha(\xi,1)$ は ξ に関し X^φ-excessive だから下半連続．M^* は compact だから $\exists\xi_0\in M^*$ を $\inf_{\xi\in M^*}U_\alpha(\xi,1)=U_\alpha(\xi_0,1)$ をみたすものは存在する．もし $U_\alpha(\xi_0,1)=0$ ならば $K^*_\alpha(\xi_0,\cdot)\equiv 0$ だから ξ_0 は passive point となり (X.4) に矛盾する．ゆえに $\inf U_\alpha(\xi,1)>0$．$\sqrt{m}^{-1}k=\inf U_\alpha(\xi,1)$ と置けば求める結果が得られる．

(ii) Schwarz の不等式より

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

$$|U_\alpha(u,v)| \leqq \left[\int u(\xi)^2 U_\alpha(\xi,\eta)\mu^*(d\xi)\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int v(\eta)^2 U_\alpha(\xi,\eta)\mu_0(d\eta)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqq \|u\|_\alpha \|v\|_\alpha .$$

Lemma 2.2. $\mathcal{D}_\alpha$, $\langle\ ,\ \rangle_\alpha$ は Hilbert 空間である.

証明. (i) $\langle u,v\rangle_\alpha = \langle v,u\rangle_\alpha$, (ii) $\langle cu,v\rangle_\alpha = c\langle u,v\rangle_\alpha$ (c は定数), (iii) $\langle u,u\rangle_\alpha \geq 0$ は明らかだから (iv) 完備性を証明すればよい. 今 $\{u_n\}$ を $|||\ \ |||_\alpha$ に関する Cauchy 列とすると (2.7) より $\{u_n\}$ は $\|\ \ \|_\alpha$ - Cauchy 列である. したがって L_2^α の元 u_∞ で $\|u_\infty - u_n\|_\alpha \longrightarrow 0$ をみたすものが存在する. 今 $\{u_{n_k}\}$ を u_∞ に μ_α - 測度 0 を除いて収束する(概収束)する $\{u_n\}$ の部分列とする.

(2.0) 及び Fatou の Lemma により

$$D(u_\infty,u_\infty) \leq \varliminf_{k\to\infty} D(u_{n_k},u_{n_k}) \leqq \varlimsup_{k\to\infty} |||u_{n_k}|||_\alpha - 2m \varliminf_{k\to\infty} U_\alpha(u_{n_k}, u_{n_k}) < \infty$$

したがって $u_\infty \in \mathcal{D}_\alpha$ である. 次に

$$|||u_\infty - u_n|||_\alpha^2 \leq \varliminf_{k\to\infty} D(u_{n_k}-u_n, u_{n_k}-u_n) + \varliminf_{k\to\infty} 2mU_\alpha(u_{n_k}-u_n, u_{n_k}-u_n)$$

$$\leqq \varliminf_{k\to\infty} |||u_{n_k}-u_n|||_\alpha \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 .$$

ゆえに $\mathcal{D}_\alpha$ は完備である.

注意. $\mathcal{D}_\alpha$ は α に無関係である. 実際 $\alpha \leqq \beta$ のとき $U_\alpha(\xi,\eta) \leqq U_\beta(\xi,\eta)$ だから $\|\ \ \|_\alpha \leqq \|\ \ \|_\beta$, 一方 $\frac{1}{\alpha}U_\alpha(\xi,\eta) \geqq \frac{1}{\beta}U_\beta(\xi,\eta)$ だから $\frac{1}{\alpha}\|\ \ \|_\alpha \geqq \frac{1}{\beta}\|\ \ \|_\beta$. 以下では $\mathcal{D}_\alpha$ を $\mathcal{D}$ で表わす.

Lemma 2.3. $\varphi \in L_2(\partial S, \mu^*)$ 又は $\varphi = U(\cdot, w)$ $(w \in \mathcal{D})$ に対し

(2.8) $\langle u,v\rangle_\alpha = 2m(u,\varphi)_0 \qquad \forall u \in \mathcal{D}$

をみたす v が唯一つ(μ^*- 測度 0 を除いて)定まる.

証明. (2.8) の右辺を $F_\varphi(u)$ とおく. $\varphi \in L_2(\partial S, \mu^*)$ のとき

$$|F_\varphi(u)| \leqq 2m\|u\|_0 \|\varphi\|_0 \leqq \frac{2m}{k} |||u|||_\alpha \|\varphi\|_0$$

又 $\varphi = U_\beta w$ のとき

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

$$|F_\varphi(u)| = |2m\, U_\beta(u,w)| \leqq 2m \|u\|_\beta \|w\|_\beta \leqq 2m\, K |||u|||_\alpha \|w\|_\beta$$

（Kは$\beta \leqq \alpha$のとき1，$\alpha < \beta$のとき$\frac{\beta}{\alpha}$でよい）だからいずれにしても$F_\varphi(u)$は$\mathcal{D}, <\ ,\ >_\alpha$上の連続な線型作用素ゆえに$v \in \mathcal{D}$が存在し（2.8）が成立する．

Lemma 2.3で定まるvを$M_\alpha^0 \varphi$と書く．

<u>*Lemma* 2.4</u>　$w \in \mathcal{D}$のとき

(2.9)　$$<u, v>_\alpha = m\{U_\alpha(u, w) - U_\alpha(w, u)\} \qquad \forall u \in \mathcal{D}$$

をみたすvが唯一つ存在する．この対応を$v = T_\alpha w$と書けばT_αは$|||T_\alpha|||_\alpha \leqq 2$をみたす$\mathcal{D}$上の *anti-symmetric* 作用素　即ち$<T_\alpha u, v> = -<u, T_\alpha v>$である．

<u>証明</u>　前半は *Lemma* 2.3とほとんど同じ．*anti-symmetric* であることは（2.9）より明らか．最後にT_αのノルムは次の計算よりわかる．

$$|||T_\alpha u|||_\alpha^2 = <T_\alpha u, T_\alpha u>_\alpha = 2m\{U_\alpha(T_\alpha u, u) - U_\alpha(u, T_\alpha u)\}$$
$$\leqq 2m \|T_\alpha u\|_\alpha \|u\|_\alpha \leqq 2\, |||T_\alpha u|||_\alpha |||u|||_\alpha .$$

<u>*Lemma* 2.5</u>　Iを$\mathcal{D}$上の恒等作用素とすると$I + T_\alpha$は$\mathcal{D}$を$\mathcal{D}$の上に1対1に移す作用素でありかつ$(I+T_\alpha)^{-1}$も連続な作用素である．

<u>証明</u>　T_αは *anti-symmetric* だから$S_\alpha \equiv i\, T_\alpha$は$\mathcal{D}$を複数拡大した *Hilbert* 空间（簡単のために同じ記号$\mathcal{D}, <\ ,\ >_\alpha$で表わす）上の *symmetric* 作用素である．S_αのスペクトル分解を$S_\alpha = \int_{-2}^{2} \lambda\, dE_\lambda$とする．ここに$E_\lambda$は単位の分解である．$(I - iS_\alpha)^{-1} \equiv \int_{-2}^{2} \frac{1}{1-i\lambda}\, dE_\lambda$は

$$|||(I - iS_\alpha)^{-1}|||_\alpha \leqq \int_{-2}^{2} \frac{1}{|1-i\lambda|}\, d\, |||E_\lambda|||_\alpha < \infty$$

をみたすから，$\mathcal{D}$を$\mathcal{D}$に移す連続な線型作用素で$(I - iS_\alpha)(I - iS_\alpha)^{-1} = (I - iS_\alpha)^{-1}(I - iS_\alpha) = I$をみたす．$-iS_\alpha = T_\alpha$だから$(I - iS_\alpha)^{-1}$が求める$(I + T_\alpha)^{-1}$である．ゆえに$I + T_\alpha$は$\mathcal{D}$を$\mathcal{D}$の上に移す1対1作用素である．

<u>定義</u>　$M_\alpha \varphi \equiv (I + T_\alpha)^{-1} M_\alpha^0 \varphi \quad (\varphi \in L_2(\partial S, \mu^*)$ 又は $\varphi = K^*(\cdot, x))$ とおく．

<u>*Lemma* 2.6</u>　すべての$u \in \mathcal{D}$に対して

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

$$(2.10)\qquad D_\alpha(u, M_\alpha\varphi) = 2m(u,\varphi)_0.$$

証明　先ず $\langle u, v\rangle_\alpha = D_\alpha(u,(I+T_\alpha)^{-1}v)$ をみたすことを示す. $w\in\mathcal{D}$ のとき

$$\begin{aligned}\langle u,(I+T_\alpha)w\rangle_\alpha &= \langle u,w\rangle_\alpha + \langle u, T_\alpha w\rangle_\alpha\\ &= D(u,w)+mU_\alpha(u,w)+mU_\alpha(w,u)+mU_\alpha(u,w)-\\ &\qquad -mU_\alpha(w,u)\\ &= D(u,w)+2mU_\alpha(u,w)\end{aligned}$$

特に $w=(I+T_\alpha)^{-1}v$ とおくと求める式が得られる. 故に

$$D_\alpha(u,M_\alpha\varphi) = D_\alpha(u,(I+T_\alpha)^{-1}M_\alpha^0\varphi) = \langle u, M_\alpha^0\varphi\rangle_\alpha = 2m(u,\varphi)_0.$$

Lemma 2.7　$M_\alpha - M_\beta + M_\alpha(U_\alpha - U_\beta)M_\beta = 0,$
$M_\alpha U_\alpha 1 = 1$

証明　(2.10) 式より

$$(2.11)\qquad D(u,M_\alpha\varphi)+2mU_\alpha(u,M_\alpha\varphi) = 2m(u,\varphi)_0$$

$$(2.12)\qquad D(u,M_\beta\varphi)+2mU_\beta(u,M_\beta\varphi) = 2m(u,\varphi)_0$$

$$(2.13)\qquad D(u,M_\alpha U_\alpha M_\beta\varphi)+2mU_\alpha(u,M_\alpha U_\alpha M_\beta\varphi) = 2mU_{\beta\alpha}(u,M_\beta\varphi)$$

$$(2.14)\qquad D(u,M_\alpha U_\beta M_\beta\varphi)+2mU_\alpha(u,M_\alpha U_\beta M_\beta\varphi) = 2mU_\beta(u,M_\beta\varphi).$$

(2.11)−(2.12)+(2.13)−(2.14) を計算すれば

$$D_\alpha(u, M_\alpha\varphi - M_\beta\varphi + M_\alpha(U_\alpha-U_\beta)M_\beta\varphi) = 0.$$

故に才一式が得られる. 次に

$$D(u, M_\alpha U_\alpha 1) + 2mU_\alpha(u, M_\alpha U_\alpha 1) = 2m(u, U_\alpha 1)_0$$
$$D(u,1) \qquad\qquad + 2mU_\alpha(u,1) \qquad\qquad = 2m(u,U_\alpha 1)_0$$

より $D_\alpha(u, M_\alpha U_\alpha 1 - 1) = 0$ が得られる. 故に $M_\alpha U_\alpha 1 = 1$.

定理 2.1

$$(2.15)\qquad \overline{G}_\alpha(x,y) = G_\alpha(x,y) + \int K_\alpha(x,\eta)M_\alpha K_\alpha^*(\eta,y)\mu_0(d\eta)$$

は resolvent equation

$$(2.16)\qquad \overline{G}_\alpha(x-y) - \overline{G}_\beta(x,y) + (\alpha-\beta)\overline{G}_\alpha\overline{G}_\beta(x,y) = 0$$

及び $\alpha\sum_{y\in S}\overline{G}_\alpha(x,y)=1$ をみたす.

証明　簡単のために (2.15) の右辺の才二項を $K_\alpha M_\alpha K_\alpha^*$ と表わす. G_α が resolvent equation をみたすことに注意すれば, (2.16) の左辺は

$$K_\alpha M_\alpha K_\alpha^* + K_\beta M_\beta K_\beta^* + (\alpha-\beta) K_\alpha M_\alpha K_\alpha^* G_\beta + (\alpha-\beta)\ G_\alpha K_\beta M_\beta K_\beta^*$$
$$+ (\alpha-\beta) K_\alpha M_\alpha K_\alpha^* K_\beta M_\beta K_\beta^*$$

となる．上式に $(\alpha-\beta) G_\alpha K_\beta = K_\beta - K_\alpha$，$(\alpha-\beta) K_\alpha^* G_\beta = K_\beta^* - K_\alpha^*$ 及び $(\alpha-\beta) K_\alpha^* K_\beta = U_\alpha - U_\beta$（証明は[2]）を代入し，Lemma 2.1 を使えば 0 になることがわかる．次に

$$\alpha \sum_{y\in S} \overline{G}_\alpha(x,y) = \alpha \sum_{y\in S} G_\alpha(x,y) + K_\alpha M_\alpha U_\alpha 1 = 1 - K_\alpha 1 + K_\alpha 1 = 1.$$

文　献

[1] J. L. Doob, Boundary properties of functions with finite Dirichlet integrals, Ann. Inst. Fourier, 12 (1962), 573-621.

[2] W. Feller, On boundaries and lateral conditions for Kolmogorov differential equations, Ann. of Math., 65 (1957), 527-570.

[3] M. Fukushima, On Feller's kernel and the Dirichlet norm, Nagoya Math. J., 24 (1964), 167-175.

[4] ――――――, Resolvent kernels on a Martin space. Proc. Japan Acad., 41 (1965), 260-263.

[5] 国田，Markov 過程と Martin 境界，Sem. on Prob. 17 (1963).

[6] 国田，野本，Markov 過程の compact 化の方法とその応用，Sem. on Prob. 14 (1962).

[7] 国田，渡辺，Markoff chain と Martin 境界 I, II. 数学 13 (1961)，14 (1962).

[8] P. D. Lax, A. N. Milgram, Parabolic equations, contribution to the theory of partial differential equations, Ann. Math Stud., 33 (1954).

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

[9] L. Naïm, Sur le rôle de la frontière de R.S. Martin dans la théorie du potentiel, Ann. Inst Fourier, 7(1957), 183-285.

[10] 佐藤，長沢，福島，マルコフ過程の変換と境界問題，Sem. on Prob. 16 (1963).

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

付録 II. 楕円型偏微分作用素によって定まる法線微分の積分表示

福島 正俊

多次元ユークリッド空間の滑らかな境界を持つ領域に於ける拡散過程の典型的なものとして 吸収壁拡散過程と反射壁拡散過程がある。これ等は各々"境界値＝0"、"境界に於ける法線微分＝0"という境界条件を満す楕円型偏微分方程式の基本解を推移確率の密度とする連続なマルコフ過程のことである。ここでは 楕円型偏微分作用素によって定まる法線微分を積分作用素の極限として表わし、しかもその積分核が 吸収壁拡散過程の *path* が境界に収束する *speed* と収束先の位置の分布によって一定の仕方で定まることを示す。このことは法線方向という幾何学的概念が、吸収壁過程の基本的量によって *intrinsic* に記述されることを示し、従って反射壁拡散過程が吸収壁拡散過程に関する情報のみに基ずいて決定されている事情を明らかにする。

見通しをよくするために [I] で 2次元半平面の最も簡単な場合で説明する。[II] では *Laplace* 作用素の場合（自己共役な楕円型作用素でもよいが）には 境界に全く滑らかさを要求しない場合でも 境界に於ける法線微分という概念の定義が可能で、しかもそれは上に述べたような積分作用素の弱い意味での極限になっていることを説明する。[III] で 古典的な拡散過程での事情の説明と証明を行なう。

[I] 半平面での法線微分の積分表示

R^2 の半平面 $D=\{(x^1,x^2)\mid x^2>0\}$ を考える。D の境界 $\partial D=\{x^2=0\}$ 上の連続函数 f を境界値とする D での調和函数を Hf で表わす。$(\frac{\partial}{\partial n}H)f=\frac{\partial}{\partial n}(Hf)$ によって $\mathbb{C}(\partial D)$ の部分空間か

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

ら $\mathbb{C}(\partial D)$ への operator $\frac{\partial}{\partial n}H$ が定義されるが，その適当な閉拡大を生成作用素とする強連続な $\mathbb{C}(\partial D)$ 上の semigroup が存在する．この semigroup から決まる ∂D 上の Markov process はよく知られているように ∂D 上の Brown 運動を指数 $1/2$ の stable law で subordinate したものである．[10]．従って subordination された process の生成作用素の公式 [6] により容易に次の式が導びける．$f\in\mathbb{C}^2(\partial D)$ なら

(1) $$\frac{\partial}{\partial n}Hf(x)=\int_0^\infty du\int_{\partial D}(f(y)-f(x))A_u(x,y)\,dy,\quad x\in\partial D.$$

但し A_u は D に於ける吸収壁 Brown 運動の transition function $p(u;x,y)$ によって $A_u(x,y)=\frac{\partial}{\partial n_x}\frac{\partial}{\partial n_y}p(u,x,y)$ として定義される量である．

(1) 式は直接の計算によっても導びかれるが本質的に同じ計算によって (1) に相当する式をもっと複雑な場合に [III] で導く．

[II] Martin 境界における一般化された法線微分．

N次元ユークリッド空間の任意の有界領域を D としよう．D の Martin 境界を M とする．$M\ni x$ に対応する K-function を $K(Z,x)$，$Z\in D$ とし $\alpha=0$ に対し

(2) $K_\alpha(Z,x)=K(Z,x)-\alpha\int_D G_\alpha(Z,Z')K(Z',x)\,dZ'$ とおく．

但し $G_\alpha(Z,Z')=\int_D^\infty e^{-\alpha t}p(t,Z,Z')\,dt$ で，$p(t,Z,Z')$ は D での Brown 運動の transition function．$\alpha>0$ に対し

$U_\alpha(x,y)=\alpha\int_D K_\alpha(Z,x)K(Z,y)\,dZ$　$U(x,y)=\lim_{\alpha\to+\infty}U_\alpha(x,y)$ とおく．$x,y\in M$．

D での Dirichlet 積分有限な調和函数は path に沿っての境界値 u を持ち，その Dirichlet 積分は

(3) $\mathbb{D}(u,u)=\iint_{M\,M}(u(x)-u(y))^2\,U(x,y)\,\mu(dx)\,\mu(dy)$．と一致する [1]，[3]，（$\mu$ は調和測度）．

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

$\mathbb{D}(u,u)<+\infty$ なるM上の函数全体を $\mathfrak{D}$ とするとき、Greenの第一公式の一般化として法線微分を次の様に定義する.[1]. M上の函数 φ が $u\in\mathfrak{D}$ を境界値とする調和函数 Hu の法線微分 $\frac{\partial}{\partial n}Hu$ に一致するとは,

(4) $\mathbb{D}(u,v)=-2\int\varphi(x)\,v(x)\,\mu(dx)$

が任意の $v\in\mathfrak{D}$ について成立すること。但し $\mathbb{D}(u,v)$ は (3) から定まる内積である。

今 $\mathfrak{D}$ の部分空間 $\mathfrak{D}'=\{u\in\mathfrak{D}\mid {}^{\exists}\alpha>0,$
$\int_M\int_M|u(x)|\,U_\alpha(x,y)\,|u(y)|\,\mu(dx)\,\mu(dy)<+\infty\}$ を考える. [4].

$u,v\in\mathfrak{D}'$ ならば Fubini の定理によって

$$\mathbb{D}(u,v)=-2\lim_{\alpha\to\infty}\int_M v(x)\,\mu(dx)\left[\int_M(u(y)-u(x))\,U_\alpha(x,y)\,\mu(dy)\right].$$

従って $u\in\mathfrak{D}'$ と M 上のある函数 φ に対して, $\frac{\partial}{\partial n}Hu=\varphi$ ならば $\mathfrak{D}'$ の要素との内積の意味で次の式が成立する.

(5) $\lim_{\alpha\to\infty}\int_M(u(y)-u(x))\,U_\alpha(x,y)\,\mu(dy)=\varphi(x)$

[III] に於て境界と u に強い正則性を要求すれば (5) 式が各点収束として成立することを示す.

[III] 楕円型微分作用素によって定まる法線微分の積分表示.

D をN次元ユークリッド空間の有界領域とし, D の境界 ∂D は C^3 級の N−1 次元超曲面とする. 微分作用素

(6) $Au(x)=\frac{1}{\sqrt{a(x)}}\sum_{i,j}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(a^{ij}(x)\sqrt{a(x)}\,\frac{\partial u(x)}{\partial x^j}\right)+\sum_i b^i(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x^i}$ を考える.

$(x^1,x^2,\cdots\cdots,x^N)$ は x の近傍の局所座標で $a^{ij}(x)$、$b^i(x)$ は反変テンソル. $a^{ij}(x)$ は $\overline{D}$ で正定値. $a^{ij}(x)$, $b^i(x)\in C^3(\overline{D})$, $a(x)=\det(a^{ij}(x))^{-1}$ とする. $a^{ij}(x)$ より定まる境界での法線微分を $\frac{\partial}{\partial n}$ と

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

し，$a^{ij}(x)$ より定まる体積要素，表面積要素を $m(dx)$，$\widetilde{m}(dx)$ とする．定義は例えば [5] 才二章 §1を見よ．

さて，楕円型作用素 A と境界条件

(7) $u(x)=0$ ， $x\in\partial D$． に対応する基本解を $p(t,x,y)$ としよう． [7] [5]．$p(t,x,y)m(dy)$ を推移確率とするD上の拡散過程 X^0 が存在しこれを吸収壁 A-*diffusion* と呼ぶ．[5]．以下我々の当面必要とする A-*diffusion* X^0 の諸量を $p(t,x,y)$ を用いて表わそう．証明は [5] の結果と基本解 $p(t,x,y)$ の評価式によって比較的容易であり 省略する．

$$(8)\quad \begin{aligned} H_u(x,y) &= \frac{\partial}{\partial n_y} p(u,x,y), \quad u>0,\ x\in D,\ y\in\partial D, \\ K_\alpha(x,y) &= \int_0^\infty e^{-\alpha u} H_u(x,y)\,du, \quad \alpha\geqq 0,\ x\in D,\ y\in\partial D. \end{aligned}$$

とおくと任意の $\alpha\geqq 0$，∂D 上の有界可測な任意の函数 f に対して

(9) $E_x(e^{-\alpha\sigma}f(X_{\sigma-}))=\int_{\partial D} K_\alpha(x,y)f(y)\widetilde{m}(dy)$ が成立する．

但し σ は X^0 の *path* X_t の 消滅時間，$X_{\sigma-}=\lim_{t\uparrow\sigma} X_t$，$E_x$ は *process* X^0 に関する平均である．つまり $H_u(x,y)$ は σ と $X_{\sigma-}$ の同時分布の密度であり，$K_0(x,y)$ は Martin-K-*function* に相当するわけである．K_0 と K_α に関して [II] (2) と同じ関係式が成立する．

次に (8) の *dual* として

$$(10)\quad \begin{aligned} \hat{H}_u(x,y) &= \frac{\partial}{\partial n_x} p(u,x,y), \quad u>0,\ x\in\partial D,\ y\in D. \\ \hat{K}_\alpha(x,y) &= \int_0^\infty e^{-\alpha u} \hat{H}_u(x,y)\,du, \quad \alpha>0,\ x\in\partial D,\ y\in D. \end{aligned}$$

とおく．X^0 の *dual process* なる概念がはっきりしないので $\hat{H}_u$ を X^0 に関係させて簡単にいうわけにはいかないが $\hat{K}^0$ は Martin の *dual* の K-*function* に当り，$\hat{K}_\alpha(x,y)=\frac{\partial}{\partial n_x}G_\alpha(x,y)$ である．ここに $G_\alpha(x,y)=\int_0^\infty e^{-\alpha t}p(t,x,y)\,dt$ である．

今

(11) $A_u(x,y)=\int_D \hat{H}_{u-v}(x,z)H_v(z,y)m(dz)$, $x,y\in\partial D$, $0<v<u$.

とおくと

(12) $A_u(x,y)=\frac{\partial}{\partial n_x}\frac{\partial}{\partial n_y}p(u,x,y)$

である．実際，定義より

$$A_u(x, y) = \int_D \frac{\partial}{\partial n_x} p(u-v, x, z) \frac{\partial}{\partial n_y} p(v, z, y) m(dz)$$

$$= \frac{\partial}{\partial n_x} \frac{\partial}{\partial n_y} p(u, x, y)$$

だから，A_u は Markov chain に対して Neveu [8] が導入した量である．更に [II] の場合と同じく

(13) $\quad U_\alpha(x, y) = \alpha \int_D \hat{K}_\alpha(x, z) K(z, y)\, dz, \quad \alpha > 0, \ x, y \in \partial D.$

とおくと

(14) $\quad U_\alpha(x, y) = \int_0^\infty (1 - e^{-\alpha u}) A_u(x, y)\, du$

である．cf. [9] p. 97.

$$U(x, y) = \lim_{\alpha \to +\infty} U_\alpha(x, y) = \int_0^\infty A_u(x, y)\, du$$

が Feller の U-kernel あるいは Naim の θ-kernel に当り，[II] や [9] p. 118 で見る如く，調和函数の Dirichlet 積分を表現する kernel である．

A－調和函数の ∂D の点での法線微分は U でもって表わすことはできないが，U_α 又は A_u を用いて (1) (5) の如く積分表示される．次の定理の証明が我々の目的である．

<u>定理.</u> $x_0 \in \partial D$, $u \in \mathbb{C}^2(\partial D)$ とすると，

(1)′ $\quad \frac{\partial}{\partial n} \hbar u(x_0) = \int_0^\infty du \int_{\partial D} A_u(x_0, y)(u(y) - u(x_0))\, \widetilde{m}(dy).$

(5)′ $\quad = \lim_{\alpha \to \infty} \int_{\partial D} U_\alpha(x_0, y)(u(y) - u(x_0))\, \widetilde{m}(dy).$

但し $\hbar u$ は u を境界値とする A 調和函数，つまり

$$\hbar u(x) = \int_{\partial D} K_0(x, y)\, u(y)\, \widetilde{m}(dy) \quad \text{である．}$$

<u>注.</u> (5)′ に於て 極限を積分記号の中に入れることはできない．

この定理の証明のために以下 x_0 の近傍 $U(x_0)$ と $U(x_0)$ に於ける次の条件を満す $\mathbb{C}^3$ 級局所座標 (x^i) をとって固定する．

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

$$(15)\begin{cases} \text{i)} & x \in D \cap U(x_0) \Longleftrightarrow x^N > 0 \\ & x \in \partial D \cap U(x_0) \Longleftrightarrow x^N = 0 \\ \text{ii)} & x \in \partial D \cap U(x_0) \\ & \Longrightarrow a_{Ni}(x) = a_{iN}(x) = \begin{cases} 0 & i \neq N \\ 1 & i = N \end{cases} \end{cases}$$

但し $a_{ij}(x)$ は $a^{ij}(x)$ の逆行列の要素で共変テンソルである。

$U'(x_0)$ と (x^i) の存在については [5] p. 48 を見よ．この座標によれば a^{ij} よりきまる法線微分 $\frac{\partial}{\partial n}$ は

$$(16)\qquad \frac{\partial u}{\partial n}(x_0) = \frac{\partial u}{\partial x^N}(x_0) = \lim_{x_N \downarrow 0} \frac{u(x) - u(x_0)}{x^N},$$

と簡単になる．ここに x は $U(x_0)$ に属し x_0 を原点としたときの x^N 軸上にあるとする．つまり $x^i = x_0^i \quad i = 1, 2, \cdots, N-1$ とする．以後 断わりなしに x と書けば この条件を満すものとする．

<u>補題</u> $u \in \mathbb{C}^2(\partial D)$ なら

$\exists \delta > 0$, $\exists \varepsilon > 0$, $0 \leq x^N < \delta$ で一様に

$$(17)\qquad \frac{1}{x^N}\int_{\partial D}\frac{\partial}{\partial n_y} p(u, x, y)(u(y) - u(x_0))\,\widetilde{m}(dy) = O(u^{-1+\varepsilon}).$$

この補題の証明が長いので 先ずこの補題を承認して 定理の証明をしよう。

<u>定理の証明</u>

$u \in \mathbb{C}^2(\partial D)$ とする．

$$\frac{\partial}{\partial n} h u(x_0) = \lim_{x^N \downarrow 0} \frac{1}{x^N}\left(\int_{\partial D} K_0(x, y) u(y)\,\widetilde{m}(dy) - u(x_0)\right)$$

$$= \lim_{x^N \downarrow 0} \frac{1}{x^N}\int_{\partial D} K_0(x, y)(u(y) - u(x_0))\,\widetilde{m}(dy).$$

従って $v(y) = u(y) - u(x_0)$ なる函数 v を考えると $v(x_0) = 0$ であって しかも

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

(18) $\dfrac{\partial}{\partial n} h u(x_0) = \dfrac{\partial}{\partial n} h v(x_0)$.

今 $h_\alpha v(x) = \displaystyle\int_{\partial D} K_\alpha(x, y)\, v(y)\, \widetilde{m}(dy)$ とおけば

(19) $\dfrac{\partial}{\partial n} h v(x_0) = \dfrac{\partial}{\partial n}(hv - h_\alpha v)(x_0) + \dfrac{\partial}{\partial n} h_\alpha v(x_0)$ であるが,

(20) $$\frac{\partial}{\partial n}(hv - h_\alpha v)(x_0) = \frac{\partial}{\partial n_x}\alpha \int_D G_\alpha(x, z)\, hv(z)\, m(dz)\Big|_{x=x_0}$$

$$= \alpha\int_D \hat{K}_\alpha(x_0, z)\, hv(z)\, m(dz) = \int_{\partial D} U_\alpha(x_0, y)\, v(y)\, \widetilde{m}(dy)$$

$$= \int_D^\infty (1 - e^{-\alpha u})\, du \int_{\partial D} A_u(x_0, y)\, v(y)\, \widetilde{m}(dy).$$

上の変形は hv が $\overline{D}$ で一様有界であることから保証される. 一方補題によって

(21) $$\frac{\partial}{\partial n} h_\alpha v(x_0) = \lim_{x^N \downarrow 0} \frac{1}{x^N}\int_0^\infty e^{-\alpha u}\, du \int_{\partial D} \frac{\partial}{\partial n_y} p(u, x, y)(u(y) - u(x_0))\, \widetilde{m}(dy)$$

$$\underset{(17)}{=} \int_0^\infty e^{-\alpha u}\, du \left[\frac{\partial}{\partial n_x}\int_{\partial D} \frac{\partial}{\partial n_y} p(u, x, y)(u(y) - u(x_0))\, \widetilde{m}(dy)\right]_{x = x_0}$$

$$= \int_0^\infty e^{-\alpha u}\, du \int_{\partial D} A_u(x_0, y)(u(y) - u(x_0))\, \widetilde{m}(dy).$$

(18) (19) (20) (21) より定理の (1)$'$ を得る. (19) の右辺で $\alpha \to +\infty$ とするとき右辺の第2項が 0 に収束することから, 定理の (5)$'$ を得る. (q, e, d.)

かくて定理の証明は補題の証明に帰着された.

補題の証明

我々の座標のとり分 (15) により

$$\lim_{x^N \downarrow 0}\left|\frac{a_{Ni}(x)}{x^N}\right| = \left|\frac{\partial}{\partial x^N} a_{Ni}(x_0)\right| < +\infty \qquad i \neq N.$$

$\displaystyle\lim_{x_N \downarrow 0} a_{NN}(x) = 1$ であるから

(22) $\begin{cases} \exists c > 0,\ 1 > \exists c' > 0,\ \exists h > 0,\ 0 \le x^N < h \text{ なる任意の } x \\ \text{に対して} \\ |a_{Ni}(x)| \le c\, x^N \ (N \neq i),\quad a_{NN}(x) \ge c'. \end{cases}$

我々は $U(x_0)$ に含まれる次の様な円筒 $V(x_0)$ をとる.

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

$V(x_0)=\{y:\sum_{i=1}^{N-1}(y^i-x_0^i)^2<\frac{r^2}{2}\ ;\ 0\leq y^N<h\}$

但し r は $0<r<\sqrt{\frac{c'}{c}}$ を満す適当な数，さて，

(23) $\quad p^*(t,y,x)=p(t,x,y)$ とおく．

$p^*(t,y,x)$ は A の adjoint operator A^* と吸収壁の条件 (7) に対する基本解である．$p^*(t,y,x)$ は無限級数として次のように constructive に求められている．[7]，[5]．

(24) $\quad p^*(t,y,x)=g(t,y,x)+\sum_{n=1}^{\infty}\Phi_n(t,y,x).$

$g(t,y,x)$ は A^* と (7) に対応する所謂 parametrics である．補題の評価を (24) の $g(t,y,x)$ と残りの部分とに分けて

[第一段] $\quad 0\leq x^N<h$ で一様に確かめる．

(25) $\quad \frac{1}{x^N}\int_{V(x_0)\cap\partial D}\frac{\partial}{\partial y^N}g(t,y,x)(u(y)-u(x_0))\widetilde{m}(dy)=O(t^{-\frac{1}{2}})$

であることの証明．(既に述べたように x は x_0 を原点とする x^N軸上にあるとする.)

(一，イ)

$g(t,y,x)$ の定義から計算すると，$y\in\partial D\cap V(x_0)$ ならば

$$\frac{1}{x^N}\frac{\partial}{\partial y^N}g(t,y,x)=-\frac{1}{a(x)}\left(\frac{a(x)}{4\pi t}\right)^{\frac{N}{2}}\left(\sum_{j=1}^{N-1}\frac{a_{Nj}}{x^N}\frac{(y^j-x^j)}{2t}\right)W(x,y)\tag{26}$$

$$+2\frac{1}{a(x)}\left(\frac{a(x)}{4\pi t}\right)^{\frac{N}{2}}a_{NN}(x)\frac{1}{2t}\ W(x,y)$$ となる．

但し

$$W(x,y)=\exp\frac{-\sum_{ij}^{N-1}a_{ij}(x)(y^i-x_0^i)(y^j-x_0^j)+\sum_{j=1}^{N-1}a_{Nj}(x)x^N(y^j-x_0^j)-a_{NN}(x)(x^N)^2}{4t}$$

である．(26) の右辺の第一項，第二項を各々 $v_1(t,y,x)$，$v_2(t,y,x)$ と記すことにする．

(一，ロ)

(27) $\quad W_0(x,y)=\left(\frac{a(x)}{4\pi t}\right)^{\frac{N-1}{2}}\exp\frac{-\sum_{ij}^{N-1}a_{ij}(x)(y^i-x_0^i)(y^j-x_0^j)}{4t}$

とおく，$x,y\in V(x_0)$ ならば (22) より

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

$$\sum_{j=1}^{N-1}|a_{Nj}(x)|\,x^N|y^j-x_0^j|-a_{NN}(x)(x^N)^2$$
$$\leq C(x^N)^2\sum_{j=1}^{N-1}|y^j-x_0^j|-C'(x^N)^2\leq C(x^N)^2\left(\sum_{j=1}^{N-1}|y^j-x_c^j|-\frac{C'}{C}\right)$$
$$\leq C(x^N)^2\left(\gamma-\frac{C'}{C}\right)<0$$

であるから

$$\left(\frac{a(x)}{4\pi t}\right)^{\frac{N-1}{2}}W(x,y)<W_0(x,y)$$

である。従って，

$$\int_{\partial D\cap V(x_0)}\left(\frac{a(x)}{4\pi t}\right)^{\frac{N}{2}}t^{-1}|y^j-x_0^j||y^k-x_0^k|\,W(x,y)\,dy'\cdots dy^{N-1}$$
$$\leq L\int_{\partial D\cap V(x_0)}t^{-\frac{3}{2}}|y^j-x_0^j||y^k-x_0^k|\,W_0(x,y)\,dy'\cdots dy^{N-1}$$
$$\leq t^{-\frac{1}{2}}\cdot L'.$$

ここに L, L' は x に無関係な定数である．

(一,ハ) $u\in\mathbb{C}^2(\partial D)$ だから

$$u(y)-u(x_0)=\sum_{k=1}^{N-1}u_k(x_0)(y^k-x_0^k)+\frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{N-1}u_{ij}(\xi_y)(y^k-x_0^k)(y^l-x_0^l).$$

u_k, u_{ij} は u の偏微分で ξ_y は y と x_0 を結ぶ線分上の適当な点である．

又 $a(\cdot)\in\mathbb{C}^3(\overline{D})$ だから

$$m(dy)=a(y)dy'\cdots dy^{N-1}=a(x_0)dy'\cdots dy^{N-1}+\left(\sum_{k=1}^{N-1}\frac{\partial}{\partial\xi^k}a(\xi)(y^k-x_0^k)\right)dy'\cdots dy^{N-1}$$

(一イ)(一ロ)(一ハ)より次のことがわかる．

$$\int_{\partial D\cap V(x_0)}(u(y)-u(x_0))\,v_1(t,y,x)\,m(dy)=O(t^{-\frac{1}{2}})$$

$$\int_{\partial D\cap V(x_0)}\sum_{k,l=1}^{N-1}u_{ij}(\xi_y)(y^k-x_0^k)(y^l-x_0^l)\,v_2(t,y,x)\,m(dy)=O(t^{-\frac{1}{2}})$$

$$\int_{\partial D\cap V(x_0)}(y^l-x_0^l)\,v_2(t,y,x)\left(\sum_{k=1}^{N-1}\frac{\partial}{\partial\xi^k}a(\xi)(y^k-x_0^k)\right)dy'\cdots dy^{N-1}=O(t^{-\frac{1}{2}})$$

いずれも uniformly in x.

(一,ニ) 従って オ一段の目的 (25) を示すためには

$$(28)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{\partial D\cap V(x_0)} (y^k - x_0^k)\, v_2(t, y, x)\, dy^1 \cdots dy^{N-1} = O(t^{-\frac{1}{2}}) \\ \text{uniformly in } x. \quad (1 \le k \le N-1) \end{cases}$$

をいえばよい。(28) の証明をする.

$$\frac{4\pi}{a_{NN}(x)} \int_{\partial D\cap V(x_0)} (y^k - x_0^k)\, v_2(t, y, x)\, dy^1 \cdots dy^{N-1}$$

$$= \int_{\partial D\cap V(x_0)} (y^k - x_0^k)\, t^{-\frac{3}{2}} W_0(x, y)\, e^{-\frac{a_{NN}(x)(x^N)^2}{4t}}\, dy^1 \cdots dy^{N-1}$$

$$- \int_{\partial D\cap V(x_0)} (y^k - x_0^k)\, t^{-\frac{3}{2}} W_0(x, y) \left(1 - \exp \frac{\sum_{j=1}^{N-1} a_{Nj}(x)\, x^N (y^j - x_0^j)}{4t}\right) e^{-\frac{a_{NN}(x)(x^N)^2}{4t}}\, dy^1 \cdots dy^{N-1}$$

$= \mathrm{I} - \mathrm{II}$ とおく.

$$\mathrm{I} = e^{-\frac{a_{NN}(x)(x^N)^2}{4t}} \int_{\sum_{l=1}^{N-1} (y^l - x_0^l)^2 \le \frac{r^2}{2}} (y^k - x_0^k)\, e^{-\sum_{i,j}^{N-1} a_{ij}(x)(y^i - x_0^i)(y^j - x_0^j)}\, dy^1 \cdots dy^{N-1}$$

$$= e^{-\frac{a_{NN}(x)(x^N)^2}{4t}} \int_{\sum_{l=1}^{N-1} (\bar{y}^l - \bar{x}_0^l)^2 \le \frac{r^2}{2}} \sum_{m=1}^{N-1} Q_{km} (\bar{y}^m - \bar{x}_0^m)\, e^{-\sum_{i=1}^{N-1} \bar{a}_{ii}(x)(\bar{y}^i - \bar{x}^i)^2}\, d\bar{y}^1 \cdots d\bar{y}^{N-1}$$

$= 0.$ 但し (Q_{km}) は $(a_{ij}(x))$ を対角化する直交行列で

$$Q'(a_{ij}(x))Q = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11}(x) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \bar{a}_{N-1,N-1}(x) \end{pmatrix}$$ とした.

IIについては

$$\left| 1 - \exp \frac{\sum_{j=1}^{N-1} a_{Nj}(x)\, x^N (y^j - x^j)}{4t} \right| e^{-\frac{a_{NN}(x)(\;)(\;)^2}{4t}}$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{N-1} \frac{a_{Nj}(x)\, x^N |y^j - x^j|}{4t}\right) e^{\frac{\theta \sum_{j=1}^{N-1} a_{Nj}(x)\, x^N (y^j - x^j)}{4t}}\, e^{-\frac{a_{NN}(x)(x^N)^2}{4t}}, \quad 0 < \theta < 1,$$

であるが,

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

$$\theta \sum_{j=1}^{N-1} a_{Nj}(x)\, x^N (y^j - x^j) - a_{NN}(x)(x^N)^2 \leqq \left(\sum_{j=1}^{N-1} |y^j - x^j| - \frac{C'}{C}\right)(x^N)^2 \leqq -\delta (x^N)^2 \quad (\exists \delta > 0)$$

であるから

$$|\mathrm{II}| \leqq \int_{\partial D \cap V(x_0)} |y^k - x_0^k|\, t^{-\frac{3}{2}} w_0(x,y) \cdot C \cdot \sum_{j=1}^{N-1} |y^j - x_0^j| \frac{(x^N)^2}{4t} e^{-\frac{\delta (x^N)^2}{4t}}\, dy^1 \cdots dy^{N-1}$$

$$\leq C_1 \int_{\partial D \cap V(x_0)} t^{-\frac{3}{2}} |y^k - x_0^k| \left(\sum_{j=1}^{N-1} |y^j - x_0^j|\right) w_0(x,y)\, e^{-\frac{\delta'(x^N)^2}{4t}}\, dy^1 \cdots dy^{N-1}$$

$= O(t^{-\frac{1}{2}})$ *uniformly in* x.

(28) が証明できた．才一段は終った．

補題の証明は次の才二段，才三段によって完結する．才二段は $\overline{\Phi}_n(t, y, x)$ の評価式によって導かれる．才三段は $p(t, x, y)$ の簡単な評価式から出る．いずれの証明も省略する．

[才二段]

$u \in \mathbb{C}^1(\partial D)$ なら　$0 \leq x^N < h$ で一様に

$$\int_{V(x_0) \cap \partial D} \frac{\partial}{\partial x^N} \frac{\partial}{\partial y^N} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \overline{\Phi}_n(t, y, x)\right)(u(y) - u(x_0))\, \widetilde{m}(dy) = O(t^{-\frac{1}{2}}).$$

[才三段]

$u \in \mathbb{C}(\partial D)$ なら　x^N に関し一様に

$$\int_{V(x_0)^c \cap \partial D} \frac{\partial}{\partial x^N} \frac{\partial}{\partial n_y} p(t, x, y)(u(y) - u(x_0))\, \widetilde{m}(dy) = O(1).$$

文　献

[1] J. L. Doob, *Boundary properties of functions with finite Dirichlet integrals*, Annales Inst. Fourier 12 (1962), 573-621

[2] W. Feller, *On boundaries and lateral conditions for*

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

the Kolmogorov differential equations. Ann, of Math., 65 (1957), 527–570.

[3] M. Fukushima, On Feller's kernel and the Dirichlet norm, Nagoya Math. J, 24 (1964), 167–175.

[4] M. Fukushima, Resolvent kernels on a Martin space. Proc, Japan Acad., 41 (1965), 260–263.

[5] 池田信行，上野正，田中洋，佐藤健一，多次元拡張過程の境界問題(上)(下). Seminar on Prob. vol 5, 6.

[6] 伊藤清，Subordination について，数理科学研究オ2班報告 オ6号 (1959), 44–54.

[7] S. Ito, Fundamental solutions of parabolic differential equations and boundary value problems. Japan, J. Math. 27 (1957), 55–102.

[8] J. Neveu, Une généralisation des processus à accroissements positifs independents. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 25. (1961). 37–61.

[9] 佐藤健一，長沢正雄，福島正俊，マルコフ過程の変換と境界問題. Seminar on prob. vol 16. (1963).

[10] T. Ueno, The diffusion satisfying Wentzell's boundary condition and the Markov process on the boundary. I, II. Proc. Japan Acad., 36 (1960), 533–538, 625–629.

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

補　　足

1．Ｄ上のMarkov過程$\mathbb{M}^{min}$が（Min.2），（Min.4）をみたせば，$\inf_{x\in S} a'(x)>0$ なる任意の$a'\in C(S)$と任意の$\gamma'>0$をとる時，$\forall f\in C(S)$，$\forall\alpha>0$に対し$G_\alpha^{min}f(x)/G_{\gamma'}^{min}a'(x)$がＳ上の連続函数に拡張される．$G_0^{min}1(x)$がＤ上で有限の時には，$\gamma'\geqq 0$，$\alpha\geqq 0$でも同様であり，また$\gamma=0$として（Min.4）がみたされても十分である．

証明

$$\frac{G_\alpha^{min}f}{G_{\gamma'}^{min}a'}=\frac{G_\alpha^{min}f}{G_\gamma^{min}a}\Big/\frac{G_{\gamma'}^{min}a'}{G_\gamma^{min}a}$$

だから，$G_{\gamma'}^{min}a'/G_\gamma^{min}a$ のＤにおける下限が正であることをいえばよい．（$G_0^{min}1$が有限の時は$\|G_\alpha^{min}\|=\max_{x\in D}G_\alpha^{min}1<\frac{1}{\alpha}$となり，従って$G_0^{min}$は有界で$C(S)$を$C(S)$内にうつすから，同様に考えてよい．）　$\sup a=k_1$，$\inf a'=k_2$とおくと

$$\frac{G_{\gamma'}^{min}a'}{G_\gamma^{min}a}\geqq\frac{k_2}{k_1}\frac{G_{\gamma'}^{min}1}{G_\gamma^{min}1}$$

であるが，$\gamma\geqq\gamma'$なら$G_{\gamma'}^{min}1\geqq G_\gamma^{min}1$により明かであり，

$\gamma'>\gamma>0$なら

$$G_\gamma^{min}1=G_{\gamma'}^{min}1+(\gamma'-\gamma)G_{\gamma'}^{min}G_\gamma^{min}1\leqq\left(1+\frac{\gamma-\gamma'}{\gamma}\right)G_{\gamma'}^{min}1$$

による．$\gamma'>\gamma=0$の時は$\sup G_0^{min}1=k_3$とおくと

$$G_{\gamma'}^{min}1=\frac{1}{\gamma'}E_x^{min}(1-e^{-\gamma'\zeta})\geqq E_x^{min}(\zeta-\tfrac{1}{2}\gamma'\zeta^2)$$

$$E_x^{min}(\zeta^2)=2G_0^{min}G_0^{min}1\leqq 2k_3G_0^{min}1$$

であるから，$0<\gamma'<\frac{1}{2k_3}$ならば

$$G_{\gamma'}^{min}1\geqq(1-k_3\gamma')G_0^{min}1\geqq\frac{1}{2}G_0^{min}1$$

である．

なお，∂Dにおける値だけならa'をどのようにかえてもよいことは，$G_\alpha^{min}\chi_{\partial D}=0$から明らかである．

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

2. 条件 (A), (L) をみたす D上の拡散過程 M^{min} が (Min. 1) – (Min. 4) をみたし，

(Min. 5)′ $\{ J_\alpha f : f \in C(S) \}$ が $C(\partial D)$ で稠密

ならば (Min. 5) もみたされる．((4.2) により J_α による $C(S)$ の値域は α によらない.)

証明 $\alpha \geqq \gamma$ としよう． $f \in C(S)$ に対し

$$R_\alpha f(x) = \begin{cases} G_\alpha^{min} f(x) / b(x), & x \in D \\ J_\alpha(bf)(x), & x \in \partial D \end{cases}$$

とおく．b は (Min. 4) の $G_\gamma^{min}\alpha$ である．R_α は $C(S)$ を $C(S)$ 内にうつす非負作用素で，

(1) $(\alpha - \gamma) R_\alpha 1 \leqq 1$

(2) $R_\alpha - R_\beta + (\alpha - \beta) R_\alpha R_\beta = 0$

をみたす．D_1 を $\overline{D}_1 \subset D$ なる開集合とし f の台 $Car(f)$ が D_1 内にあるとする．$\| \alpha G_\alpha^{min}(bf) - f \| \to 0$ $(\alpha \to \infty)$ と $\inf_{x \in Car(f)} b(x) > 0$ によって $x \in \overline{D}_1$ で一様に $\alpha R_\alpha f(x) \to f(x)$ である． また，$\forall x \in S - D_1$ に対し

$$|R_\alpha f(x)| \leqq \sup_{y \in \partial D_1} |R_\alpha f(y)|$$

である．なぜなら，右辺を k とおくと

$$|G_\alpha^{min}(bf)(x)| \leqq E_x^{min}\left(e^{-\alpha\sigma_{D_1}} |G_\alpha^{min}(bf)(x_{\sigma_{D_1}})|\right)$$

$$\leqq k E_x^{min}\left(e^{-\alpha\sigma_{D_1}} b(x_{\sigma_{D_1}})\right) \leqq k E_x\left(e^{-\gamma\sigma_{D_1}} b(x_{\sigma_{D_1}})\right) \leqq k\, b(x)$$

であるから，(ここに path の連続性を用いた.) 故に，$x \in S - D_1$ に対して一様に $\alpha R_\alpha f(x) \to 0 = f(x)$ である．従って

(3) $\forall f \in C'(D)$ に対し $\| \alpha R_\alpha f - f \| \to 0$ $(\alpha \to \infty)$

ただし $C'(D) = \{ f : f \in C(S),\ [f]_{\partial D} = 0 \}$. さて $f \in C(S)$ に対し

$$u_\alpha^f(x) = \begin{cases} G_\alpha^{min} f(x) / b(x), & x \in D \\ J_\alpha f(x), & x \in \partial D \end{cases}$$

とおき，μ を S上の有界な符号付測度で $\forall f \in C(S)$ に対し

$\int_S u_\alpha^f(x) \mu(dx) = 0$ としよう．$\forall f \in C'(D)$ に対し $\int_S R_\alpha f(x) \mu(dx) = 0$

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

となるから (1), (3) により $\int_S f(x)\mu(dx)=0$ 故に μ は D 内で0である. (Min. 5)′ を仮定すると μ は ∂D でも 0 となり, 従って (Min. 5) がいえた.

3. $\mathbb{M}^{min}$ を条件 (A), (L), (Min. 1)～(Min. 5) をみたす D上の拡散過程とし, $J_\alpha \chi_{\partial D}=0$ とする. $\forall \varphi \in C(\partial D)$ に対し D上の連続函数 $H\varphi(x)/e(x)$ が $S-Car(\varphi)$ における値を $\overline{Ⓗ}\varphi(\xi)$ とおくと, $\partial D-\{\xi\}$ 上の測度 $\overline{Ⓗ}(\xi, d\eta)$ が定義できて

$$\overline{Ⓗ}\varphi(\xi)=\int_{\partial D-\{\xi\}}\overline{Ⓗ}(\xi,d\eta)\varphi(\eta)$$

となるが, $\overline{Ⓗ}(\xi,\{\xi\})=0$ とおくと, $\overline{Ⓗ}$ は §5 に定義したⒽ に一致する.

<u>証明</u> まず, $\forall f \in C(S)$ に対して

(4) $\lim_{\alpha\to\infty}\|\alpha R_\alpha f-f\|=0$

を注意しておく. それには, $\{R_\alpha f : f\in C(S)\}$ (これは α によらない) が $C(S)$ で稠密であることをいえば, (1), (2) により (4) がいえる. U_α^f を 2. で定義したものとし, $\forall f \in C(S)$ に対し $\exists f_n\in C(S)$, $\|R_\alpha f_n-U_\alpha^f\|\to 0$ $(n\to\infty)$ をいおう. $f\geq 0$ としてよい. $f_n \in C'(D)$ を $f_n(x)\uparrow f(x)/e(x)$, $x\in D$ に選べば, 仮定 $J_\alpha\chi_{\partial D}=0$ と単調収束定理により S で $R_\alpha f_n=U_\alpha^{Af_n}\uparrow U_\alpha^f$ となり, しかも Dini の定理により収束は一様である.

さて 3 を証明するには $\forall\varphi\in C^+(\partial D)$ と $\forall \xi\in\partial D-Car(\varphi)$ に対し

(5) $Ⓗ\varphi(\xi)=\overline{Ⓗ}\varphi(\xi)$

をいえばよい. $f\in C(S)$ を $0\leq f\leq 1$, $Car(f)\subset S-Car(\varphi)$, かつ $f(\xi)=1$ にとる.

$$v(x)=\begin{cases} H\varphi(x)/e(x), & x\in D \\ \overline{Ⓗ}\varphi(x), & x\in\partial D-Car(\varphi)\end{cases}$$

とおくと, fv は S上連続とみなしてよいから, (4) により

$$Ⓗ\varphi(\xi)=\lim_{\alpha\to\infty}\alpha J_\alpha H\varphi(\xi)\geq\lim_{\alpha\to\infty}\alpha J_\alpha(fH\varphi)$$

$$=\lim_{\alpha\to\infty}\alpha R_\alpha(fv)=f(\xi)v(\xi)=\overline{Ⓗ}\varphi(\xi)$$

である. 他方 D上で

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

$$\frac{H\varphi}{e} \geq \frac{H\varphi \cdot H_\alpha\varphi}{e} = \frac{\alpha G_\alpha^{min} H\varphi}{e}$$

であるから，$\bar{\text{Ⓗ}}\varphi(\xi) \geq \alpha J_\alpha H\varphi(\xi)$，従って $\bar{\text{Ⓗ}}\varphi(\xi) \geq \text{Ⓗ}\varphi(\xi)$ であり，併せて，(5) がいえた．

なお、上の証明から分るように，$J_\alpha \mathcal{X}_{\partial D} = 0$ という仮定がなくても $\bar{\text{Ⓗ}} \geq \text{Ⓗ}$ はいえる．

4. 1次元拡散過程． $S=[\xi,\eta]$，$D=(\xi,\eta)$ とする．D上の正則な1次元拡散過程は，端点が正則境界または流出境界（伊藤，確率過程IIの用語で）の場合には条件 (A), (L), (Min.1)〜(Min.5) をみたすことを示そう．S − scale は座標 x であるとし，$0 \in (\xi,\eta)$ とする．m を m − 測度とする ξ,η が正則境界または流出境界だから，$-\infty<\xi<\eta<\infty$ で，$\int_\xi^0 (x-\xi)\,m(dx)<\infty$，$\int_0^\eta (\eta-x)\,m(dx)<\infty$ である．

$$G_0^{min} f(x) = (\eta-x)\int_\xi^x (y-\xi) f(y)\,m(dy) + (x-\xi)\int_x^\eta (\eta-y) f(y)\,m(dy)$$

であり。

$$G_0^{min}\ I(x) \leq \int_\xi^\eta (\eta-y)(y-\xi)\,m(dy) \qquad \text{有界}$$

である．(A), (L), (Min.1)〜(Min.3) は明らかだから，(Min.4), (Min.5) をたしかめよう．(Min.4) における $a=1$，$\gamma=0$ とする．

$$u_0^f(x) \equiv \frac{G_0^{min} f(x)}{e(x)} = \frac{\int_\xi^x \frac{\eta-x}{x-\xi}(y-\xi) f(y)\,m(dy) + \int_x^\eta (\eta-y) f(y)\,m(dy)}{\int_\xi^x \frac{\eta-x}{x-\xi}(y-\xi)\,m(dy) + \int_x^\eta (\eta-y)\,m(dy)}$$

であるが，ξ が正則境界の時は $\int_\xi^0 m(dy) < \infty$ であるから

$$\int_\xi^x \frac{\eta-x}{x-\xi}(y-\xi)\,m(dy) \leq (\eta-\xi)\int_\xi^x m(dy)$$

によって

$$\lim_{x\to\xi} u_0^f(x) = \left(\int_\xi^\eta (\eta-y) f(y)\,m(dy)\right)\left(\int_\xi^\eta (\eta-y)\,m(dy)\right)^{-1}$$

である．また ξ が流出境界の時は $\forall f \in C[\xi,\eta]$ に対し

$$\lim_{x\to\xi} u_0^f(x) = f(\xi)$$

となる．なぜなら，$\varepsilon>0$ に対し $\xi<y<\xi+\delta$ で $|f(y)-f(\xi)|<\varepsilon$

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

とすると，$\xi < x < \xi+\delta$ に対し

$$|u_0^f(x) - f(\xi)| \le \left(\frac{e(x)}{x-\xi}\right)^{-1}\left(\int_\xi^x \frac{\eta-x}{x-\xi}(y-\xi)\varepsilon\, m(dy) + \int_x^{\xi+\delta}(\eta-y)\,\varepsilon\, m(dy)\right.$$

$$\left. + \int_{\xi+\delta}^{\eta}(\eta-y)\,2\|f\|\, m(dy)\right)$$

$$\le \varepsilon + 2\|f\|\left(\int_x^\eta(\eta-y)\,m(dy)\right)^{-1}\int_{\xi+\delta}^\eta(\eta-y)\,m(dy)$$

であるから，$\int_\xi^0 m(dy)=\infty$ となることに注意すればよい．η についても同様であるから，(Min.4) がいえた．(Min.5) を示すには 2 により (Min.5)′ をいえばよい．それには，すべての $f\in C[\xi,\eta]$ に対し $C_1 J_0 f(\xi) + C_2 J_0 f(\eta) = 0$ となる実数 C_1，C_2 は $C_1 = C_2 = 0$ に限ることをいえばよい．ξ,η が共に流出境界の時は $C_1 f(\xi)+C_2 f(\eta) = 0$ となるから $C_1=C_2=0$ は明らか．ξ,η の一方（たとえば ξ）が正則境界で他方(η)が流出境界の時には，$f(\eta)=0$ かつ $f(x)>0$, $x\in[\xi,\eta)$ なる f をとれば $C_1=0$ がわかり，$f_n(\eta)=1$, $f_n(x)\downarrow 0$, $x\in[\xi,\eta)$ なる f_n をとれば $C_2=0$ がわかる．ξ,η が共に正則境界の時には，$\int_\xi^\eta(\eta-y)\,m(dy)=k_1$，$\int_\xi^\eta(y-\xi)\,m(dy)=k_2$ とおくと $\forall f\in C[\xi,\eta]$ に対し

$$\int_\xi^\eta\left(\frac{C_1}{k_1}(\eta-y)+\frac{C_2}{k_2}(y-\xi)\right)f(y)\,m(dy)=0$$

となるから，

$$\frac{C_1}{k_1}(\eta-y)+\frac{C_2}{k_2}(y-\xi)=0 \qquad m\text{-a.e.}$$

であり，従って $C_1 = C_2 = 0$ がいえる．

なお，

$$H(x,\{\xi\})=\frac{\eta-x}{\eta-\xi}\ ,\quad H(x,\{\eta\})=\frac{x-\xi}{\eta-\xi}$$

から，

$$\overline{\mathrm{H}}(\xi,\{\eta\})=\frac{1}{(\eta-\xi)k_1}\ ,\quad \overline{\mathrm{H}}(\eta,\{\xi\})=\frac{1}{(\eta-\xi)k_2}$$

となる．ξ,η が共に正則境界の時は 3 により $\overline{\mathrm{H}}=\mathrm{H}$ であり，共に流出境界の時は $\mathrm{H}\le\overline{\mathrm{H}}=0$ から $\mathrm{H}=0$ である．また，ξ が流出境界

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

の時，かつその時に限って $J_0 \chi_{\partial D} \neq 0$ である（一般に $J_\alpha \chi_{\partial D} = J_0 \chi_{\partial D}$）．

5. 球内の Brown 運動． Sを N 次元の閉単位球，Dをその内部とする．D上の Brown 運動は条件(A)，(L)，(Min.1)～(Min.5)をみたす．(A)，(L)，(Min.1)～(Min.3)は明らかであるから，$N=3$ として(Min.4)，(Min.5)を確かめよう．$x=(x_1, x_2, x_3)$，$y=(y_1, y_2, y_3)$ に対し $(x, y)=\sum_{i=1}^{3} x_i y_i$，$|x|=(\sum_{i=1}^{3} x_i^2)^{1/2}$ とかく．

$$G_0^{min}(x, dy) = \frac{1}{4\pi}\left((|x|^2+|y|^2-2(x,y))^{-\frac{1}{2}} - (1+|x|^2|y|^2-2(x,y))^{-\frac{1}{2}}\right) dy$$

である（$N \geq 4$ では最初の const が変り，べき $-\frac{1}{2}$ が $-\frac{N-2}{2}$ となる．$N=2$ では $\frac{1}{2\pi}\log\frac{1+|x|^2|y|^2-2(x,y)}{|x|^2+|y|^2-2(x,y)}dy$ となる）．(Min.4)における $a=1$，$\gamma=0$ とすると

$$b(x) = \frac{1}{3}(1-|x|^2)$$

となる（$N \neq 3$ では最初の const. が変る．$N=2$ では const. $=\frac{1}{2}$）．故に

$$\frac{1}{b(x)} G_0^{min}(x, dy) = \frac{3}{4\pi} \frac{1-|y|^2}{r_1 r_2 (r_1+r_2)}$$

ただし，$r_1=(|x|^2+|y|^2-2(x,y))^{1/2}$，$r_2=(1+|x|^2|y|^2-2(x,y))^{1/2}$ である．$r_2 \geq (1+|x|^2|y|^2-2|x||y|)^{1/2} = 1-|x||y| \geq 1-|y|$ により

$$\frac{1}{b(x)} G_0^{min}(x, dy) \leq \frac{3}{4\pi}\frac{1+|y|}{|x-y|^2}dy \leq \frac{6}{4\pi}\frac{1}{|x-y|^2}dy$$

であり，最右辺は可積分である（十分小さい半径の球における積分は x に無関係に小さくなるから）．従って $\forall f \in B(S)$ に対し

$$\lim_{x\to\xi}\frac{1}{b(x)} G_0^{min} f(x) = \frac{3}{4\pi}\int_S \frac{1-|y|^2}{(1+|y|^2-2(\xi,y))^{3/2}} f(y)\,dy, \quad \xi \in \partial D$$

となる．故に，J_0 が存在して

$$J_0 f(\xi) = \frac{3}{4\pi}\int_{s=0}^{1}\int_{|\eta|=1}\frac{1-s^2}{(1+s^2-2s(\xi,\eta))^{3/2}} f(s\eta)\, s^2 ds\, d\omega_\eta$$

となる．ただし，$y=s\eta$，$s=|y|$，$|\eta|=1$．$d\omega_\eta$ は球面の面積要素である．（$N=2$ の時は

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

$$J_0 f(\xi) = \frac{1}{\pi}\iint \frac{1-S^2}{1+S^2-2S(\xi,\eta)} f(S,\eta)\, S\, dS\, d\omega_\eta$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{S=0}^{1}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{1-S^2}{1+S^2-2S\cos(\theta-\varphi)} f(S\cos\varphi, S\sin\varphi)\, S\, dS\, d\varphi$$

ただし $\xi=(\cos\theta, \sin\theta)$，$\eta=(\cos\varphi, \sin\varphi)$.）故に（Min.4）がいえた．

次に，

$$H\varphi(x) = \int_{|\eta|=1} \frac{\partial}{\partial n_v}\left(\frac{G_0^{min}(x,dy)}{dy}\right)\Bigg|_{v=\eta} \varphi(\eta)\, d\omega_\eta$$

$x=r\xi$，$r=|x|$，$|\xi|=1$ とすると

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{|\eta|=1} \frac{1-r^2}{(1+r^2-2r(\xi,\eta))^{3/2}} \varphi(\eta)\, d\omega_\eta ,$$

$$H\varphi(x) \to \varphi(\xi) \quad (x\to\xi,\ r\to 1)$$

に注意して $p(S)$ を $0\le S<1-\delta$ で $p(S)=0$，$\int_{1-\delta}^{1} p(S)S^2 dS = \frac{2}{3}$ ととり，$\varphi\in C(\partial D)$ に対して $f(x)=p(r)\varphi(\xi)$，$x=r\xi$ とおくと

$$J_0 f(\xi) = \frac{3}{4\pi}\int_{1-\delta}^{1} S^2 p(S)\, dS \int_{|\eta|=1} \frac{1-S^2}{(1+S^2-2S(\xi,\eta))^{3/2}} \varphi(\eta)\, d\omega_\eta \to \varphi(\xi),\ \delta\downarrow 0$$

である．故に $\{J_0 f : f\in C(\partial D)\}$ は $C(\partial D)$ で稠密で，2 により（Min.5）がいえた．$N=2$ の時も同様である．

なお，$J_0\chi_{\partial D} = J_\alpha \chi_{\partial D} = 0$ に注意し 3 を用いて

$$Ⓗ(\xi, d\eta) = \overline{Ⓗ}(\xi, d\eta) = \frac{3}{4\pi}\frac{1}{(1-(\xi,\eta))^{3/2}}\, d\omega_\eta$$

を得る．（$N=2$ の時は

$$Ⓗ(\xi, d\eta) = \overline{Ⓗ}(\xi, d\eta) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{1-(\xi,\eta)}\, d\omega_\eta = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{1-\cos(\theta-\varphi)}\, d\varphi.)$$

6．古典的拡散過程．　D を orientable な N 次元 C^∞ 級多様体の上の領域，S を D の閉包で compact とし，D の境界は有限個の連結成分から成り，各連結成分は C^3 級の $N-1$ 次元超曲面とする．S で楕円型微分作用素

$$Au(x) = \sum_{i,j=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{a(x)}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(a^{ij}(x)\sqrt{a(x)}\frac{\partial u}{\partial x^j}(x)\right) + \sum_{i=1}^{N} b^i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) + c(x)u(x)$$

が与えられたとし，a^{ij} は C^2 級の 2 階反変テンソルで S の各点で正

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

定符号，b^i は C^2 級の反変ベクトル，C は C^1 級の函数で $C \leq 0$，$a(x) = \det(a^{ij}(x))^{-1}$ とする．A から定まる吸収壁拡散過程は，(A)，(L)，(Min.1)〜(Min.5) をみたすことを示そう．(A)，(L)，(Min.1)〜(Min.3) については省略（たとえば，Seminar on Probability Vol.5 を参照）し，ここでは (Min.4)，(Min.5) を示す．次の結果が知られているので使うことにする．

(6) $f \in C(S)$ ならば $G_\alpha^{min} f \in C^1(S)$，$\alpha \geq 0$．（実は $f \in B(S)$ でもよい）．

また，境界点の局所近傍が S と交わる部分に，局所座標 $(x^1, \cdots, x^N)$ を

$$x^N = 0 \iff x \in \partial D$$
$$x^N > 0 \iff x \in D$$

および

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x) = \frac{\partial u}{\partial x^N}(x), \quad x \in \partial D, \quad \forall u \in C^1(S)$$

をみたすようにとれることが知られている．ただし，$\frac{\partial}{\partial n}$ は a^{ij} から定まる内側向き法線微分である．(Min.4) における $a = 1$，$\gamma = 0$ とすると $b(x) = G_0^{min} 1(x)$ は $C^1(S)$ で，境界では $b = 0$，$\frac{\partial b}{\partial n} > 0$ である（$Ab = -1 \leq 0$ でしかも b は境界では最小値をとっているから）．そして

$$\lim_{x \to \xi} \frac{G_0^{min} f(x)}{b(x)} = \left(\frac{\partial b}{\partial n}(\xi)\right)^{-1} \frac{\partial}{\partial n} G_0^{min} f(\xi), \quad f \in C(S), \ \xi \in \partial D$$

がいえる．なぜなら，x の局所座標を $(x^1, \cdots, x^N)$ とすると，平均値の定理によって $(x^1, \cdots, x^{N-1}, y)$，$0 < y < x^N$ という形の座標をもつ点 P，P' が存在して

$$\frac{G_0^{min} f(x)}{b(x)} = \frac{x^N}{b(x)} \frac{G_0^{min} f(x)}{x^N} = \left(\frac{\partial b}{\partial x^N}(P)\right)^{-1} \frac{\partial}{\partial x^N} G_0^{min} f(P')$$

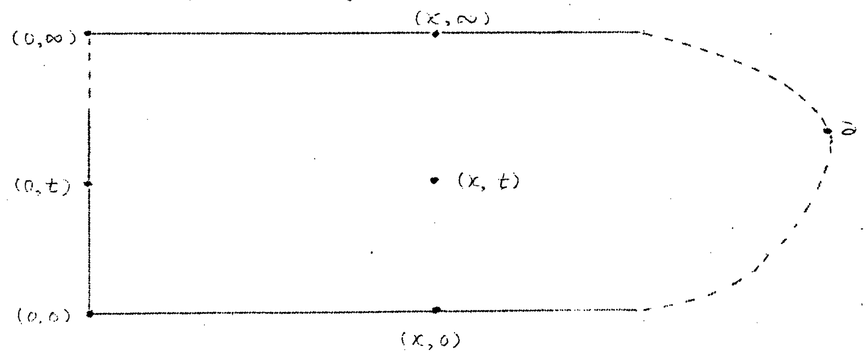
となり，x が ξ に十分近ければ右辺は $\left(\frac{\partial b}{\partial n}(\xi)\right)^{-1} \frac{\partial}{\partial n} G_0^{min} f(\xi)$ に十分近いからである．故に (Min.4) がいえた．

(Min.5)′ をいうには，$\left\{ \frac{\partial}{\partial n} G_0^{min} f : f \in C(S) \right\}$ が $C(\partial D)$ で稠密であることをいえば十分である．任意の $\varphi \in C^3(\partial D)$ に対し

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

$u \in C^3(S)$を境界で $u=0$ かつ $\frac{\partial u}{\partial n}=\varphi$ なるように選ぶ（そのようなuの作り方は省略するが，上の局所座標を用いて局所的には $u(x)=x^N\varphi(x^1,\cdots,x^{N-1})$ とし，これを global につなげるには Seminar on Probability Vol.5 才2章命題1，2を用いればよい）．$Au=f$ とおけば $\frac{\partial}{\partial n}G_0^{min}f=\frac{\partial u}{\partial n}=\varphi$ である．(Min.5)′がいえたから，2により (Min.5) もいえる．

7. 時空 Brown 運動. $D=\{(x,s): 0<x<\infty,\ 0\leq s\leq\infty\}$ とし，図のように compact 化したものをSとする．すなわち基本近傍系を $(0,s)$ に対しては $\{(y,t): 0\leq y<\varepsilon,\ |t-s|<\varepsilon'\}$，$(x,\infty)$ に対しては $\{(y,t): |y-x|<\varepsilon,\ K<t\leq\infty\}$，$\partial$ に対しては $\{\partial\}\cup\{(y,t): K<y<\infty,\ 0\leq t\leq\infty\}$ にとる．



$\mathbb{M}^{min}$を，D上の拡散過程で，$x>0$，$s\geq 0$ では時空 Brown 運動，$x>0$，$t=\infty$ では1次元 Brown 運動とし，∂Dに達したら消滅させる．$\mathbb{M}^{min}$ が (A)，(L)，(Min.1)〜(Min.5) をみたすことを示そう．(A)，(L)，(Min.1)〜(Min.3) は明らかである．$s<\infty$ では

$$G_\alpha^{min}((x,s),d(y,t))=\begin{cases} p_0(t-s,x,y)\,dy\,dt\,e^{-\alpha t}, & t\geq s \\ 0 & t<0 \end{cases}$$

ただし $p_0(t,x,y)\,dy$ は吸収壁の半直線上の Brown 運動の推移確率，すなわち

$$p_0(t,x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\left(e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}}-e^{-\frac{(x+y)^2}{2t}}\right)$$

であり

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

$$G_\alpha^{min}((x,\infty),(dy,\infty)) = \left(\int_0^\infty e^{-\alpha t} p_0(t,x,y)\,dt\right) dy$$

$$= \begin{cases} e^{-\sqrt{2\alpha}x}\left(e^{\sqrt{2\alpha}y} - e^{-\sqrt{2\alpha}y}\right) dy, & y \geq x \\ \left(e^{\sqrt{2\alpha}x} - e^{-\sqrt{2\alpha}x}\right) e^{-\sqrt{2\alpha}y}\, dy, & x \geq y \end{cases}$$

である。更に、

$$H_\alpha((x,s),(0,dt)) = e^{-\alpha t} h(x,t-s)\,dt, \quad h(x,t) = \frac{2x}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{x^2}{2t}}$$

$$H_\alpha((x,\infty),\{(0,\infty)\}) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} h(x,t)\,dt = e^{-\sqrt{2\alpha}x}$$

$$H_\alpha((x,\infty),\partial D - \{(0,\infty)\}) = 0$$

$$G_0^{min} 1(x,s) = \infty$$

$$G_\alpha^{min} 1(x,s) = \frac{1}{\alpha}(1-e^{-\sqrt{2\alpha}x}) \sim \sqrt{\frac{2}{\alpha}}\, x \quad (x \to 0), \quad 0 \leq s \leq \infty$$

である。$\gamma > 0$、$a = 1$ として (Min. 4) を示そう。

$$G_\alpha^{min} f(x,0) = \iint e^{-\alpha t} p_0(t,x,y) f(y,t)\,dt\,dy$$

$$= \iint_{y\leq\delta} + \iint_{y>\delta},$$

$$\iint_{y\leq\delta} e^{-\alpha t} p_0(t,x,y)\,dt\,dy = \frac{1}{\alpha}(1-e^{-\sqrt{2\alpha}x}) - \frac{1}{2\alpha}(e^{\sqrt{2\alpha}x} - e^{-\sqrt{2\alpha}x})e^{\sqrt{2\alpha}\delta}$$

$$\leq o(x) + \varepsilon(\delta) \qquad (\varepsilon(\delta) \text{ は } x \text{ によらない})$$

$y \geq \delta$, $x < \frac{\delta}{2}$ では

$$\frac{p_0(t,x,y)}{x} \leq \frac{16y}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{y^2}{2t}}$$

で右辺は $dy\,dt$ について可積分だから

$$\lim_{x\to 0} \frac{G_\alpha^{min} f(x,0)}{x} = \iint \lim_{x\to 0} e^{-\alpha t} \frac{p_0(t,x,y)}{x} f(y,t)\,dy\,dt$$

$$= \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \iint \frac{y}{t^{3/2}} e^{-\frac{y^2}{2t}} f(y,t)\,dy\,dt$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{G_\alpha^{min} f(x,s)}{x} = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \iint_{t\geq s} \frac{y}{(t-s)^{3/2}} e^{-\frac{y^2}{2(t-s)}} f(y,t)\,dy\,dt$$

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

右辺が S について連続であることがたしかめられるから,

$$\lim_{(x,s')\to(0,s)} \frac{G_\alpha^{min} f(x,s')}{x}$$

が存在して連続で上式で与えられる。故に (Min.4) をみたす。((0,∞) におけるチェックも必要であるが省略。) (Min.5) は J_α が H_α の dual $\hat{H}_\alpha$ で表わされることから, 5 と同様にしてわかる。

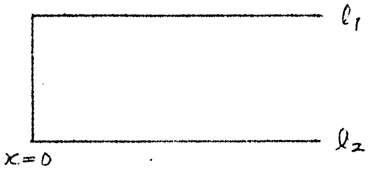
スを使って

$$\textcircled{H}((0,s),(0,dt)) = \overline{\textcircled{H}}((0,s),(0,dt)) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\ \frac{1}{(t-s)^{3/2}}$$

これは指数 1/2 の安定過程の Lévy 測度である。

時空 Brown 運動に関連して, $x=0$ における境界条件を適当に定めると

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta u$$



に対し, l_1 上で $u=f$, l_2 上で $u=g$ (f, g は与えられた函数) という境界値問題がとけるかという問題が考えられる。

8. S を単位閉円板, D をその内部とする。M を D 内で Brown 運動と一致する S 上の回転不変な広義拡散過程で境界に滞留せず, 境界から内部へ跳躍しないとする。このとき M の 0 次 U 過程 M は円周上の回転不変な Markov 過程 (加法過程) となり, その Lévy 測度は $\frac{1}{1-\cos(\theta-\varphi)}$ である。逆に, このような ∂D 上の Markov 過程は Green 作用素が $C(\partial D)\to C(\partial D)$ でしかも推移確率が Lebesgue 測度に関し絶対連続 (特性函数の絶対値が Cauchy 過程のそれでおさえられるから) であるから, 上のような M の 0 次 U 過程となる。従って上のような M が完全に求められたことになる。

9. §1 ～ §6 に述べた本尾の結果により, 境界点が有限個しかないときには, 与えられた M^{min} に対し, 内部に M^{min} と一致する広義の拡散過程が完全に求められる。

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

10. $J_x \chi_{\partial D} \neq 0$ となる簡単な例．$S=[0,1]$，$D=[0,1)$ とし，S上の一様な運動を考える．(A)，(L)，(Min.1)〜(Min.3) は明らか．$G_0^{min} f(x)=\int_x^1 f(y)\,dy$ で $G_0^{min} 1$ は有界．$\gamma=0$，$a=1$ とすると，

$$\lim_{x\to 1}\frac{G_0^{min} f(x)}{b(x)} = f(1)$$

で(Min.4)をみたす．之を使えば(Min.5)も明らか．

11. (Min.4)をみたさぬ簡単な例．$S=[-1,1]$，$D=(-1,0)\cup(0,1)$ とし，-1，0，1 で吸収されるBrown運動を考えると，(A)，(L)，(Min.1)〜(Min.3) は明らか．(Min.4) をみたさない．実際

$$G_0^{min} f(x)=\begin{cases}(1-x)\displaystyle\int_0^x y f(y)\frac{dy}{2}+x\int_x^1(1-y)f(y)\frac{dy}{2}, & x>0\\ -x\displaystyle\int_{-1}^x (y+1)f(y)\frac{dy}{2}+(x+1)\int_x^0 y f(y)\frac{dy}{2}, & x<0\end{cases}$$

であるから，f を $x>0$ では $f>0$，$x<0$ では $f=0$ にとると

$$\lim_{x\to+0}\frac{G_0^{min} f(x)}{G_0^{min} 1(x)} = 2\int_0^1 (1-y)f(y)\,dy>0$$

$$\lim_{x\to-0}\frac{G_0^{min} f(x)}{G_0^{min} 1(x)} = 0$$

である．

なおこの例では，D内で$\mathfrak{M}^{min}$と一致する拡散過程$\mathfrak{M}$で，∂Dに滞留せず，しかもconservativeなもののうち，相異るものが連続濃度存在する．（§9の6参照）

12. 広義の拡散過程でなく，内部から内部へ，あるいは内部から境界への飛躍をもつような場合も，このノートと同様の議論を行うことができる．特に内部から境界への飛躍も許すときには，$\mathfrak{M}$の境界への到達測度が$\mathfrak{M}^{min}$からは定まらないから問題の定式化を変えなければならない．それには$\mathfrak{M}^{min}$を与える代りに境界をtrapするようなS上のMarkov過程$\overline{\mathfrak{M}}$を与えることにし，境界でとめた時$\overline{\mathfrak{M}}$と一致するようなMarkov過程$\mathfrak{M}$を研究することにすればよい．

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

本尾[4]はこのような形で書かれている. この形にすることによって$\overline{M}$が指数$\alpha>1$の安定過程の場合やDが可算空間の場合を含めることができる.

Sem. on Probab.
Vol.22 1965年
P1-161

1965年10月発行　　　　確率論セミナー