Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

SEMINAR ON PROBABILITY

Vol. 20

flow とエントロピー

十時東生

附録：flow の距離空間への同型写像

丸山儀四郎

1964

確率論セミナー

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

ま え が き

古典的な力学系に源を発した flow の理論は，その発展につれ数学の種々の分野と接触をもち，或いは新しい分野を生みだし，現在に至っている。エルゴード理論はその顕著な例であろう。現代の数学においては，flow（或いは力学系）の理論は色々の立場から種々の方法を用いて研究されている。われわれの立場は測度空間の変換群としての flow の研究にある。定常過程は geodesic flow とともに，flow の一般論に数学における具体例を与える。また逆に flow の研究は定常過程の研究に一つの立場と方法を提供する。

本書では定常過程論を一つの背景として頭におきながら，しかし表面にはあまり出さずに，flow の測度論的理論を解説する。本書は1962年以来九州大学の確率論セミナーで報告或いは紹介されたことをもとに，いくらか補充しまとめたものである。

(1) セミナーノートとしてセミナーのメンバーに役立てること，

(2) 測度論的な flow の理論の入門書として，大学院一年程度のセミナーに使えること，

の二つを目標としたが，(2) としては煩雑すぎるうらみがある。「Seminar on Probability」にはすでに池田，飛田，吉沢三氏による「flow の理論(上)」というエレガントな巻（Vol.12）があり，(2) の目標は十分達せられているかと思われる。なお，「確率論の手引」Vol.4 にも flow の理論が述べられているが，その内容はほとんど本書に詳説される。

本書の構成は次の通りである。基本的な定義や事項を第1章にまとめた。第2章では，具体例として また定常過程の典型的な場合として正規定常過程について述べる。それは3章以下で述べられるルベーグ空間の範囲に入らない話でもある。力学系の相空間Ωを測度空間として抽象するとき，抽象ルベーグ空間でほゞ十分と思われる。他方理論の詳細な展開のためには抽象ルベーグ空間という程度の制限が必要である。第3章は抽象ルベーグ空間の測度論，第4章はその上の flow の理論の基本的な事項についての解説である。いずれも大部分は Rohlin [34]，[35] および丸山儀四郎教授の九大大学院における講義にもとづく。第5章でエントロピーについて述べる。第6章では Kolmogorov-flow の三つの

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

きわだった性質について述べる．オ7章では *automorphism* の空間に距離を入れ，カテゴリ理論について解説する．

定常過程の *flow* を考える際に，*path function* の空間は，*Brown* 運動など重要なクラスの一部を除いて，一般には必ずしもルベーグ空間にはならない．このギャップをうめることに関連したことで，丸山先生から原稿をいただき附録として載せることができた．

丸山，小野山両先生はじめ九大のセミナーのみなさんには，多くの教示や注意をいただき，また校正の労を願った。特に押川元重氏には原稿を通読してもらった．厚く感謝の意を表したい。

1964年7月　　　　　著　者

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

目　次

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

才 5 章 エントロピー解析

才 6 章 Kolmogorov-flow

才 7 章 automorphism の空間

附録

flow の距離空間への同型写像

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

flowのエントロピー

§0. 導　　入

古典力学における力学系は微分方程式系

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \cdots, x_n), \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

によって定義される．例えば $H(q_1, \cdots, q_s, p_1, \cdots, p_s)$ をハミルトン函数とし，正準方程式

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

が典型的である。函数 X_i が定義されている空間（R^n のある領域とか，微分可能な多様体など）Ω を相空間という。X_i が（例えば）Lipschitz 条件をみたせば，解は初期条件

$$t = 0, \quad x_i = x_i^{(0)}$$

に関し，一意でありかつ連続に依存することは良く知られている。このとき，解 $x(t, x^{(0)})$ （$x = (x_1, \cdots, x_n)$, $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)})$）によって

$$T_t x^{(0)} = x(t, x^{(0)})$$

を定義すれば，$\{T_t\}$ は1対1連続変換の群をなす．解曲線が t に関し無限に延ばせるように時間の変換を行なったとき，$\{T_t\}$ を flow といい，解曲線 $\{T_t x^{(0)}; -\infty < t < \infty\}$ をその軌道という．

軌道の $t \to \pm\infty$ のときの漸近的な様子を調べることが一つの問題である[1]．

函数 X_i が更に連続微分可能とし，積分

$$\mu(A) = \int\cdots\int_A M(x_1, \cdots, x_n)\, dx_1 \cdots dx_n$$

を考える．もし関係

$$\mu(T_t A) = \mu(A) \qquad \forall t, \quad A \subset \Omega$$

が成りたてば，μ は積分不変量といわれる．積分 μ が不変量であるためには

---

1) [29]に精しく述べられている．

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

(6)

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(MX_i)}{\partial x_i} = 0$$

が成立つことが必要十分である．正の積分不変量をもつ系の最大の意義は，研究に統計的手法を用いる，即ち，ほとんどすべての軌道について論ずることができるところにある．

このような系の抽象化として測度論的な flow の理論が生まれた．測度空間 $(\Omega, \mathbb{B}, \mu)$ 上の1対1，両可測，保測変換の1径数群 $\{T_t\}$ を flow という．flow $\{T_t\}$ に対応して $L^2(\Omega)$ 上に定まるユニタリ作用素の1径数群 $\{U_t\}$

$$U_t f(\omega) = f(T_t \omega), \qquad f \in L^2(\Omega)$$

のスペクトルは，当然 flow のある種の性質を反映するものであり，これを flow のスペクトルという．軌道の漸近的な性質の研究とも関連して，エルゴード性やスペクトルを調べることは重要である。正の積分不変量をもつ古典力学系では，個々の系がエルゴード的であるかどうか，また，そのスペクトルの型はどうかを調べることが大きな問題であるが，ほとんど解けていないようである．[1)]

Rohlin-Fomin[2)] によれば，スペクトル理論の基本的問題は

(1) flow はそのスペクトルによってどの程度特徴づけられるか？

(2) スペクトル不変量としてはどのようなものがあるか？

二つの flow $\{T_t\}$，$\{T_t'\}$ は1対1保測変換 S によって

$$T_t = S\, T_t'\, S^{-1} \qquad \forall t$$

と関係づけられるとき，同じ metrical type をもつという。metrical type による分類が spectral type による分類よりもくわしいのは当然であり，metrical な観点は flow のよりくわしい構造の究明を要求する。上の(1)は次のように云い換えられる．

(1)′ flow の metrical type による分類は，spectral type による分類よりどの程度くわしいか？

また，(2)と類似に

(3) metrical invariant にはどんなものがあるか？ そして metrical type を完全に決定する invariant の系は存在するか？

純点スペクトルに限れば，metrical type は spectral type に従うこ

---

1) Kolmogorov [26] 参照．

2) [38]．

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

とが知られている[1)] 連続スペクトルの場合はどうか？ Kolmogorov は新しい metrical invariant としてエントロピーを用い，この問題に一つの解答を与えた[2)] 定常過程の純非決定性の拡張である Kolmogorov-flow はエントロピーとともに，研究に新しい観点と有力な手段を与えている。

定常過程は，それを path 空間の shift として考えると flow である．それは flow の一般理論に有効な具体例を提供する。他方，flow の研究の手法を確率過程に持ちこんだ研究も多い。これらはむしろ定常過程の flow としての側面の研究と見るが妥当であろう。エルゴード性，混合性，スペクトルなどの研究はこの範疇に入る。定常過程の表現の理論を flow の homomorphism の問題として定式化することはできないだろうか？

flow の研究の metrical な観点（即ち測度論的な立場）では，相空間Ωの本来の位相的幾何学的性格は捨象される。Ωのそのような性質を測度論的な方法に加味する研究は一つの方向であろう．最近 Sinai などはエントロピーや Kolmogorov-flow による方法を geodesic flow の研究に持ちこんで興味ある結果を得ている。

geodesic flow もまた一般の力学系に美しい具体例を与えるものである．k-次元の完備なリーマン多様体 M^k の点 a と，a における単位接ベクトル e の組 (a, e) のなす $(2k-1)$-次元多様体を相空間 Ω とする．各元 (a, e) には，点 a を e の方向に通る測地線が対応する．完備性の要請はすべての測地線が無限に延長可能であることを意味する．(a, e) からこの測地線にそって速度 1 の運動をし，t 時間後に到達する点を $T_t(a, e)$ とすれば，$\{T_t\}$ は Ω 上の flow になる。このとき不変測度 μ は $d\mu = dV d\omega$ で与えられる．こゝに dV は M^k における k-次元体積要素，$d\omega$ は点 $a \in M^k$ における単位接ベクトルのえがく球面上の $(k-1)$ 次元体積要素である．このようにして定まる flow $\{T_t\}$ を geodesic flow という．

負定曲率の閉多様体上の geodesic flow は常にエルゴード的であり，更に強混合である．負定曲率の閉曲面上の geodesic flow は σ-ルベーグスペクトルを持つことが，群の表現論を用いて Gelfand-Fomin によって示されている[3)]

---

1) [15] 参照.

2) §5.4 参照，[27]

3) [9].

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

更に Sinai[1] によればそれは Kolmogorov-flow であり，従ってすべての位数の混合性をもつ。これらのことに関しては本書では述べない。

---

1) [43][44][45]など。

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

第1章　一般的な事項

§1.1 確率空間と flow の定義

一般に確率空間を$(\Omega, \mathbb{B}, P)$であらわす。即ち Ω はある集合，$\mathbb{B}$ は Ω の部分集合のなすある σ-algebra，Pは $\mathbb{B}$ 上の確率測度である．以後つねに $\mathbb{B}$ は完備であると仮定する。$\mathbb{B}$やPを明示する必要のないときは，$(\Omega, \mathbb{B}, P)$ を単にΩと書くこともある。

定義1.1　確率空間$(\Omega, \mathbb{B}, P)$から確率空間$(\Omega', \mathbb{B}', P')$への一価点変換Tが性質

(H.1)　　$T^{-1}\mathbb{B}' \subset \mathbb{B}$　（可測性）

(H.2)　　$P(T^{-1}B') = P'(B')$, $\forall B' \in \mathbb{B}'$　（保測性）

を持つとき，Tを homomorphism（準同型）という。更にTが1対1で，T^{-1}も homomorphism のとき，Tを isomorphism（同型）という。isomorphism で結ばれる二つの空間 Ω, Ω' は互に isomorphic であるといい $\Omega \sim \Omega'$ とかく。

定義1.2　特に $\Omega = \Omega'$ のとき，homomorphism を endomorphism（自己準同型），isomorphism を automorphism（自己同型）と呼ぶ。即ちTが$(\Omega, \mathbb{B}, P)$の automorphism とは

(A.1)　　TはΩ上の1対1変換

(A.2)　　$B \in \mathbb{B} \Rightarrow TB,\ T^{-1}B \in \mathbb{B}$

(A.4)　　$P(TB) = P(T^{-1}B) = P(B)$,　$\forall B \in \mathbb{B}$

をみたすことである。

注意1　測度0の集合を除いて成り立つ命題がしばしばあるが，そのことを明記するためには mod 0 とかきそえる。例えばTがΩからΩ'への isomorphism mod 0 とは，$P(N) = P'(N') = 0$ なる N, N' があって，Tは $\Omega - N$ から $\Omega - N'$ への isomorphism であることをいう。

注意2　Tが Ω の automorphism mod 0 のとき Ω を制限することによって正確な意味の automorphism と考えることができる。実際，Tが $P(\Omega_1) = P(\Omega_2) = 1$ なる Ω の部分集合 Ω_1 から Ω_2 への automorphism

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

としよう。集合 $\Omega_n = \Omega_1 \cap T^{-1}\Omega_1 \cap \cdots \cap T^{-(n-2)}\Omega_1$ $(n \geqq 3)$ 上では $T, T^2, \cdots, T^{n-1}$ が定義されていて，$P(\Omega_n)=1$ である。$\Omega' \equiv \bigcap_{n=1}^{\infty}\Omega_n = \Omega_2 \cap \Omega_1 \cap T^{-1}\Omega_1 \cap \cdots$ は $P(\Omega')=1$ で，$T\Omega' \subset \Omega'$ をみたす。従つて $\Omega_0 \equiv \bigcap_{k=0}^{\infty} T^k\Omega'$ とおくと，T^k, $-\infty < k < \infty$ が Ω_0 上に定まり，$T^{-1}\Omega_0 = T\Omega_0 = \Omega_0$, $P(\Omega_0) = 1$ となり，T は Ω_0 の automorphism となる。

我々の対象は主として automorphism とその一助変数群 flow である。

定義 1.3　$\{T_t, -\infty < t < \infty\}$ が Ω 上の flow であるとは

(F.1)　各 T_t は Ω の automorphism

(F.2)　$T_t T_s = T_{t+s}$

(F.3)　$T_0 = I$ （恒等変換）

なることをいう。更に

(F.4)　写像 $\Omega \times (-\infty, \infty) \ni (\omega, t) \to T_t\omega \in \Omega$ が可測 ($\Omega \times (-\infty, \infty)$ は直積測度空間)

のとき，flow $\{T_t\}$ は可測であるという。

我々は以後つねに可測性を仮定する。

automorphism T に対し，$\{T^n ; -\infty < n < \infty\}$ は整数を助変数として (F.1〜3) をみたし，離散型の flow といわれる．automorphism の研究は離散型の flow の研究である．

定義 1.4　$\{T_t\}$, $\{T'_t\}$ (T, T') がそれぞれ確率空間 Ω, Ω' の flow (automorphism) のとき，もし Ω から Ω' への isomorphism S があって

$$T'_t = S T_t S^{-1} \quad \forall t \qquad (T' = STS^{-1})$$

であれば，$\{T_t\}$ と $\{T'_t\}$ (T と T') は同値（または isomorphic，或いは同じ metrical type をもつ）といい，$\{T_t\} \sim \{T'_t\}$ $(T \sim T')$ であらわす。

§1.2 例

例 1　$\Omega = [0, 1)$ でルベーグ測度を考える。

$$Tx = 2x \quad (\mathrm{mod.}\ 1)$$

は endomorphism であり，測度 0 の変更では automorphism にできない。

例 2　$\Omega = [0, 1)$ で

$$T_\theta x = x + \theta \quad (\mathrm{mod.}\ 1)$$

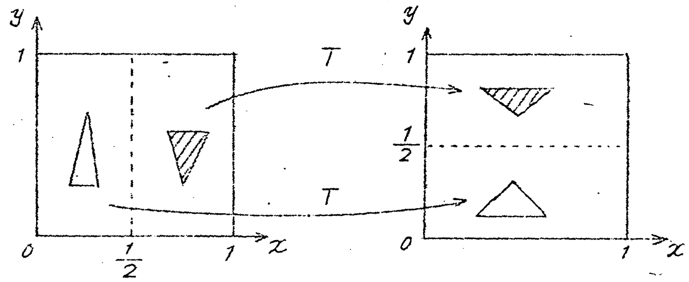
Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

は automorphism である．θ が有理数 $\frac{q}{p}$ であれば $T_\theta^p = I$ 即ち T_θ は周期的である．θ が無理数のときは各 x に対し $\{T^n x\ ;\ -\infty < n < \infty\}$ は Ω を到るところ稠密にうめる．T_θ （θ: 無理数）を Weyl-automorphism という。

例3　$\Omega = [0,1)^2$ でルベーグ測度を考える。

$$T(x,y) = \begin{cases} (2x, \frac{1}{2}y), & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ (2x-1, \frac{1}{2}(y+1)), & \frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases}$$

は automorphism である．これは下図のような変換であることからパイコネなどと呼ばれている。



例4　Bernoulli-automorphism: $(\Omega_0, \mathcal{B}_0, P_0)$ を確率空間とし，その両側無限直積確率空間を $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ とする。即ち Ω は Ω_0 の直積集合

$$\Omega = \prod_{-\infty}^{\infty} \Omega_n, \quad \Omega_n = \Omega_0$$

であり，$\Omega \ni \omega$ の n 座標を ω_n とするとき矩形集合

$$A = \{\omega;\ \omega_{n_1} \in B_1, \cdots \omega_{n_m} \in B_m\}, \quad B_j \in \mathcal{B}_0$$

の全体から生成される完備な σ-algebra を $\mathcal{B}$ とし，P は矩形集合 A に対し

$$P(A) = \prod_{j=1}^{m} P_0(B_j)$$

をみたす $\mathcal{B}$ 上の確率測度（存在は[17] pp. 386-390 また本書§3.6 参照）である。Ω から Ω の上への変換 (shift)

$$(T\omega)_n = \omega_{n+1}$$

は明らかに 1 対 1 であり，矩形集合 A に対し

$$T^{-1}A = \{\omega;\ \omega_{n_1+1} \in B_1, \cdots, \omega_{n_m+1} \in B_m\}$$

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

だから保測

$$P(T^{-1}A) = P(A)$$

である。従ってTは$\mathbb{B}$の任意の元に対しても保測性を持ち，*automorphism* である。このTを*Bernoulli-automorphism* という。特に Ω_0がk個の等確率の点から成るときに <u>*k-shift*</u> ということがある。<u>*2-shift*</u> は例3のパイコネと同値である。その *isomorphism* (*mod 0*)は次のように与えられる：$[0, 1)^2 \ni (x, y)$ が $x = x_1 2^{-1} + x_2 2^{-2} + \cdots$, $y = y_1 2^{-1} + y_2 2^{-2} + \cdots$ と展開されれば，(x, y)に点$(\cdots, y_2, y_1, x_1, x_2, \cdots) \in \Omega$ を対応させる。

<u>例5</u> 定常過程の *flow*：$R_1 = (-\infty, \infty)$ を *state* とする確率過程 $X(t, \omega)$, $-\infty < t < \infty$ を考えよう。$\Omega = R_1^{(-\infty,\infty)}$, $\mathbb{B}$を矩形集合

$$A = \{\omega;\ \omega_{t_1} \in B_1, \cdots, \omega_{t_n} \in B_n\},\quad B_j\text{：一次元}Borel\text{ 集合}$$

(ω_t は $\omega \in \Omega$ のt座標)の全体から生成される完備な σ-*algebra*，Pを$\mathbb{B}$上の確率測度とし，$X(t, \omega) = \omega_t$ とおく。更に Ω 上に *shift* $\{T_t; -\infty < t < \infty\}$：

$$(T_t\omega)_s = \omega_{s+t}$$

を定義する。すべての矩形集合とすべてのtに対し関係

$$P(\{\omega;\ \omega_{t_1+t} \in B_1, \cdots, \omega_{t_n+t} \in B_n\}) = P(\{\omega;\ \omega_{t_1} \in B_1, \cdots, \omega_{t_n} \in B_n\})$$

が成り立つとき確率過程 $X(t,\omega)$は強定常という。これは *shift* $\{T_t\}$ が *flow* であることと同じである。更に $X(t, \omega)$ が (t, ω)-可測（直積測度 $dt \times dP$ について）のとき確率過程は可測であるという。このとき *flow* $\{T_t\}$ は可測である。何故ならば，矩形集合Aに対して

(1.1) $\{(t, \omega);\ T_t\omega \in A\}$

は明らかに可測であり，従ってAが有限個の矩形集合の和のときも(1.1)は可測である。(1.1)が可測であるようなAの全体は σ-*algebra* をなすので結局$\mathbb{B}$と一致する。定常過程 $X(t, \omega)$ の *path* の性質によっては Ω として連続函数の全体 $C(R_1)$や第一種不連続函数の全体 $D(R_1)$ をとることができる([15] p.61 *Kolmogorov-Prohorov*の定理及び[33]参照)。これらはあとで述べるルベーグ空間になる。強定常過程については例えば伊藤清[17]を参照のこと。

<u>例6</u> 加法過程の *flow*：定常増分をもつ加法過程では，$\mathbb{B}$として$\{\Delta X(I) = X(t) - X(s);\ I = (s, t] \subset (-\infty, \infty)\}$ から生成される σ-*algebra* をとって，*shift* が *flow* になる。$X(t, \omega)$ が *Brown*運動のときは，*Brownian white noise* という。これについては[15]にくわしく述べられている。

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

§1.3 Kolmogorov-flow

flow の研究において重要なクラスをなす Kolmogorov-flow を導入しよう。後述のようにその性質は混合性，スペクトル，エントロピーなどくわしく知られている。

定義 1.5 flow $\{T_t\}$ が Kolmogorov-flow であるとは，次の3条件をみたす（完備な）sub-σ-algebra $\mathbb{B}_0 \subset \mathbb{B}$ が存在することをいう：

(K.1) $T_s\mathbb{B}_0 \subset T_t\mathbb{B}_0$, $s \leq t$

(K.2) $\overset{\infty}{\bigvee} T_t\mathbb{B}_0 = \mathbb{B}$

(K.3) $\bigcap_{-\infty} T_t\mathbb{B}_0 = \mathscr{N}$

ここに $\mathscr{N}$ は確率1および0の集合からなる trivial σ-algebra である．

(K.1),(K.2)をみたす $\mathbb{B}_0$ は $\mathbb{B}$ に限るとき，flow は特異であるという．

整数値助変数の場合には Kolmogorov-automorphism という．

注意 (K.2)，(K.3)により(K.1)はもっと強く

(K.1′) $T_s\mathbb{B}_0 \subsetneqq T_t\mathbb{B}_0$, $s < t$

となる．

定常過程では時刻0以後の矩形集合から生成される σ-algebra を $\mathbb{B}_0$ とすれば，条件(K.1)，(K.2)はつねに成り立つ．このとき更に(K.3)が成り立てば定常過程は純非決定的であるといわれる．このように Kolmogorov-flow は純非決定的な定常過程のクラスを若干拡張したものである．

定理 1.1 Bernoulli-automorphism は Kolmogorov-automorphism である．加法過程の flow は Kolmogorov-flow である．

証明 $\mathbb{B}_0$ を上記のようにとり(K.3)を示せばよい。後者を示す。前者は類似に示せるし，また，Kolmogorov の 0-1 法則そのものでもある．

任意の $A \in \bigcap_{-\infty} T_t\mathbb{B}_0$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対し，有限個の時点 $t_1 > t_2 > \cdots > t_n$ で定まる集合 A_ε があって

$$P(A \ominus A_\varepsilon) < \varepsilon.$$

$A \in T_{t_1}\mathbb{B}_0$ でもあるので，時点 $s_1 > s_2 > \cdots > s_m (\geq t_1)$ で定まる集合 A'_ε があって

$$P(A \ominus A'_\varepsilon) < \varepsilon.$$

独立増分性より $P(A_\varepsilon \cap A'_\varepsilon) = P(A_\varepsilon)P(A'_\varepsilon)$ だから

$$P(A_\varepsilon) - P(A_\varepsilon)P(A'_\varepsilon) = P(A_\varepsilon - A'_\varepsilon) \leq P(A_\varepsilon \ominus A'_\varepsilon) < 2\varepsilon.$$

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

また，$|P(A)-P(A_\varepsilon)| \leqq P(A \ominus A_\varepsilon) < \varepsilon$，$|P(A)-P(A'_\varepsilon)| < \varepsilon$ だから

$$0 \leqq P(A)-P(A)^2 < 5\varepsilon .$$

εは任意だから $P(A)=P(A)^2$．　故に $P(A)=0$ または 1．　　（証明終）

§1.4 スペクトル

Ω上の$\mathcal{B}$-可測函数で絶対値の２乗が可積分なものの全体は，内積$(f,g)=E\{f\bar{g}\}$によってヒルベルト空間をなす。それを $L^2=L^2(\Omega)=L^2(\mathcal{B})$ などとかく．
flow $\{T_t\}$ に対し

$$(U_t f)(\omega)=f(T_t\omega), \qquad f\in L^2$$

で L^2 上のユニタリ作用素の１助変数群 $\{U_t ; -\infty<t<\infty\}$

$$U_t U_s = U_{t+s}, \qquad U_0 = I$$

が定まる．$\{T_t\}$ の可測性により $(U_t f, g)$，$(f, g\in L^2)$ は t-可測である．更に L^2 が可分であれば $(U_t f, g)$ は連続，従って $\{U_t\}$ は強連続となる。L^2 の可分性は σ-algebra $\mathcal{B}$ の可分性と同等である．$\mathcal{B}$が可分であるとは可算個の集合 $\{B_n\}\subset\mathcal{B}$ が存在して，

$$\forall A\in\mathcal{B}, \quad \exists A'\in\mathcal{B}(\{B_n\})^{1)} : \ P(A\ominus A')=0$$

をみたすことをいう。

以後 L^2 は可分ヒルベルト空間であることを仮定する。

ここでしばらく flow から離れて，一般の可分ヒルベルト空間H上の強連続なユニタリ作用素の１助変数群 $\{U_t ; -\infty<t<\infty\}$ のスペクトル理論を解説する．

定義 1.6　(i) ２つのヒルベルト空間H，H'が等距離変換で１対１に対応づけられるとき，HとH'とは *isomorphic* であるといい，$H\sim H'$であらわす。

(ii) それぞれ H，H' 上の作用素の族 $\{A_x\}$，$\{A'_x\}$ がユニタリ同値であるとは，HからH'の上への *isomorphism*（即ち１対１等距離変換）Vがあって

$$A'_x = V A_x V^{-1} \qquad \forall x$$

となることである．このとき $\{A_x\}\sim\{A'_x\}$ と書く．

定理 1.2（Stoneの分解）　H上の強連続な $\{U_t\}$ は

$$U_t=\int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i t\lambda}\, dE(\lambda)$$

---

1) $\mathcal{B}(\{B_n\})$ は $\{B_n\}$ を含む最小の σ-algebra．

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

と一意にスペクトル分解される．単一のユニタリ作用素Uに対しては

$$U=\int_0^1 e^{2\pi i\lambda}dE(\lambda) .$$

こゝに$\{E(\lambda)\}$はHの単位の分解である．即ち

(i) 各$E(\lambda)$は射影作用素

(ii) $E(\lambda)E(\mu)=E(\mu)$, $\mu<\lambda$

(iii) $E(\lambda)$はλについて右連続（強収束で）

(iv) $E(-\infty)=0$; $E(\infty)=I$, ($E(0)=0$, $E(1)=I$) .

定義1.7 Hが部分空間H_n ($n=1,2,\cdots$)の直和

$$H=\sum_n H_n$$

であるとは次のことを意味する．

(i) $H_n\perp H_m$, $n\neq m$

(ii) 任意の元$h\in H$ が

$$h=\sum_n h_n , \quad h_n\in H_n , \quad \sum_n\|h_n\|^2=\|h\|^2$$

と分解される．

定理1.3 (Hellinger-Hahnの分解)[1)] (i) 可分ヒルベルト空間Hの単位の分解$\{E(\lambda)\}$に対し，次のような可算個の元$\{h_n\}\subset H$が存在する：

$$d\rho_n(\lambda)=\|dE(\lambda)h_n\|^2$$

$$M(h_n)=\{h;\ h=\int f(\lambda)dE(\lambda)h_n , \quad f\in L^2(d\rho_n)\}$$

とおけば

$$H=\sum_n\oplus M(h_n)$$

(1.2) $\qquad d\rho_1\succ d\rho_2\succ d\rho_3\succ\cdots\cdots$ [2)].

(ii) 上の分解は次の意味で一意である．他の分解$\{h'_n\}$があれば

$$d\rho_n\sim d\rho'_n , \quad \forall n .$$

定義1.8 (i) $M(h_n)$をh_nの張るcyclic subspaceという．

(ii) $\{\rho_n\}$を$\{E(\lambda)\}$のスペクトル系という．

定義1.9 $H^{(\lambda)}=(E(\lambda)-E(\lambda-0))H$とおくとき，$\dim H^{(\lambda)}>0$であれば$\lambda$を固有値，$H^{(\lambda)}$を固有空間，その元を固有元（固有函数）という．

---

1) [20][48]参照．

2) $d\rho_1\succ d\rho_2$は$d\rho_2$が$d\rho_1$に関し絶対連続，$d\rho_1\sim d\rho_2$は互に絶対連続の意味。

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

λが固有値であることは

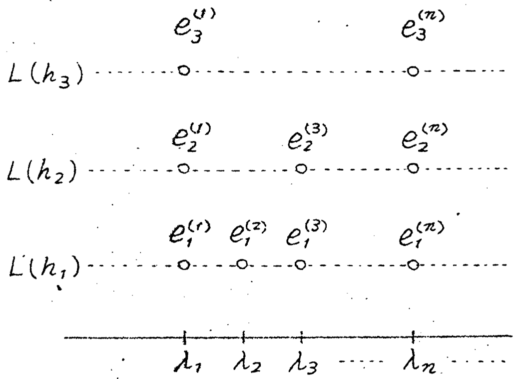
$$U_t f_\lambda = e^{2\pi i t\lambda} f_\lambda \qquad \forall t$$

をみたす $f_\lambda \in H$, $f_\lambda \neq 0$ が存在することと同等である。このとき f_λ はλについての固有元である。

定義 1.10　Hが固有空間の直和であらわされるとき，$\{U_t\}$ は純点スペクトル（または離散スペクトル）をもつといい，固有値が存在しないとき連続スペクトルをもつという。

純点スペクトル，連続スペクトルはそれぞれ $E(\lambda)$（従つて $\rho_1(\lambda)$）が jump だけで増加すること及び jump をもたないことを意味する.

Hellinger-Hahnの分解の様子を知るために，純点スペクトルの場合を考える．固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots$ とし，λ_n に対応する固有空間の base を $e_1^{(n)}$, $e_2^{(n)}$, …… とすれば，標識的に下図のようになる．



$$h_1 = \sum_n e_1^{(n)}$$

定義から明らかなように，cyclic subspace $M(h_n)$ は自然な対応

$$V_n : L^2(d\rho_n) \ni f \longrightarrow V_n f = \int f(\lambda)\, dE(\lambda) h_n \in M(h_n)$$

によって，$L^2(d\rho_n)$ と isomorphic である。$L^2(d\rho_n)$ 上でユニタリ作用素群

$$(\widetilde{U}_t f)(\lambda) = e^{2\pi i t\lambda} f(\lambda), \qquad f \in L^2(d\rho_n)$$

と単位分解

$$(\widetilde{E}(\lambda) f)(\mu) = \begin{cases} f(\mu) & \mu \leqq \lambda \\ 0 & \mu > \lambda \end{cases}$$

を定義すれば，それらはそれぞれ $M(h_n)$ 上に制限した $\{U_t\}$, $\{E(\lambda)\}$ と V_n によってユニタリ同値である．実際

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

$$U_t\int f(\lambda)\,dE(\lambda)\,h_n=\int e^{2\pi it\lambda}f(\lambda)\,dE(\lambda)\,h_n$$

だから $U_tV_n=V_n\widetilde{U}_t$. また

$$E(\mu)\int f(\lambda)\,dE(\lambda)\,h_n=\int^{\mu}f(\lambda)\,dE(\lambda)\,h_n$$

$$=\int(\widetilde{E}(\mu)f)(\lambda)\,dE(\lambda)\,h_n$$

だから $E(\mu)V_n=V_n\widetilde{E}(\mu)$ となる。

$$\sum_n\oplus L^2(d\rho_n)=\{f;\ f(\lambda)=(f_1(\lambda),\ f_2(\lambda),\cdots),\ f_n\in L^2(d\rho_n),\ \sum_n\|f_n\|^2<\infty\}$$

$$\|f\|^2=\sum_n\|f_n\|^2$$

とおく（即ち $L^2(d\rho_n)$ を $(0,\cdots,0,f_n,0\cdots)$ の形でヒルベルト空間 $\sum_n\oplus L^2(d\rho_n)$ の中にうめこむ）。$\sum_n\oplus L^2(d\rho_n)$ 上でユニタリ作用素群

$$(\widetilde{U}_tf)(\lambda)=(\widetilde{U}_tf_1(\lambda),\ \widetilde{U}_tf_2(\lambda),\cdots)$$
$$=(e^{2\pi it\lambda}f_1(\lambda),\ e^{2\pi it\lambda}f_2(\lambda),\cdots)$$
$$=e^{2\pi it\lambda}f(\lambda),$$

単位分解

$$\widetilde{E}(\lambda)f=(\widetilde{E}(\lambda)f_1,\ \widetilde{E}(\lambda)f_2,\cdots)$$

を定義すれば，それらは *isomorphism*

$$V:\sum_n\oplus L^2(d\rho_n)\ni f=(f_1,f_2,\cdots)$$
$$\longrightarrow Vf=\sum_n\int f_n(\lambda)\,dE(\lambda)\,h_n$$

によって，それぞれ $\{U_t\}$，$\{E(\lambda)\}$ とユニタリ同値である．$d\rho(\lambda)=d\rho_1(\lambda)$，$\Lambda_n=car.(d\rho_n)$[1] とおけば次の定理を得る．

<u>定理 7.4</u>　(i) $H\sim\sum_n\oplus L^2(\Lambda_n,d\rho)$[2]，ここに $R^1\supset\Lambda_1\supset\Lambda_2\supset\cdots$[3]

(ii) $H\ni h\longleftrightarrow f=(f_n)\in\sum_n\oplus L^2(\Lambda_n,d\rho)$ であれば

$$U_th\longleftrightarrow(e^{2\pi it\lambda}f_n(\lambda))$$
$$E(\lambda)h\longleftrightarrow\widetilde{E}(\lambda)f$$

(iii) $d\rho$ は互に絶対連続なものを除き一意に定まり，$\{\Lambda_n\}$ は $mod\ 0\ (d\rho)$ で一意に定まる．

---

1) $car.(d\rho_n)\ni\lambda\iff\lambda$ の任意の近傍の $d\rho_n$-測度が正

2) $L^2(\Lambda_n,d\rho)$ は Λ_n 上の２乗可積分 $(d\rho)$ 函数の全体

3) U のときは $[0,1)\supset\Lambda_1$.

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

<u>定義1.11</u>　測度 $d\rho$ を <u>maximal spectral type</u>，$m(\lambda)=\max\{n;\ \lambda\in\Lambda_n\}$ を λ の<u>重複度</u>，組 $(d\rho,\ m(\lambda))$ を $\{U_t\}$ の <u>spectral type</u> という。

$\{U_t\}$，$\{U'_t\}$ をそれぞれヒルベルト空間 H, H' 上のユニタリ作用素群とし，$\{U'_t\}$ に対応する諸量には"$'$"をつけてあらわせば，明らかに，「$\{U_t\}\sim\{U'_t\}$（ユニタリ同値）$\Longleftrightarrow\{E(\lambda)\}\sim\{E'(\lambda)\}$（ユニタリ同値）$\Longleftrightarrow\{\tilde{E}(\lambda)\}\sim\{\tilde{E}'(\lambda)\}$（ユニタリ同値）$\Longleftrightarrow\{d\rho_n\}\sim\{d\rho'_n\}$（互に絶対連続）$\Longleftrightarrow d\rho\sim d\rho'$ かつ $m(\lambda)=m'(\lambda)$ a.e. $(d\rho)$」が成り立つ。即ち $\{U_t\}$，$\{U'_t\}$ がユニタリ同値であることと，それらが同じ spectral type をもつこととは同等である．

<u>定義1.12</u>　$m(\lambda)\equiv\varkappa$ のとき重複度 $\varkappa$ の<u>一様スペクトル</u>，$m(\lambda)\equiv 1$ のとき<u>単純スペクトル</u>，$d\rho(\lambda)\sim d\lambda$ のとき<u>ルベーグ・スペクトル</u>という．$d\rho(\lambda)\sim d\lambda$ かつ $m(\lambda)\equiv\infty$ のとき <u>σ-ルベーグ・スペクトル</u>という。

$\{U_t\}$ が重複度 $\varkappa$ の一様ルベーグ・スペクトルを持つとき，$L^2(R^1,\ d\lambda)$ を Fourier 変換することによって次の定理を得る．

<u>定理1.5</u>　$\{U_t\}$ が重複度 $\varkappa$ の一様ルベーグ・スペクトルを持つためには次のことが成り立つことが必要である：

$$(1.3)\qquad \begin{aligned} &H=\sum_{n=1}^{\varkappa}\oplus H_n,\quad H_n\sim L^2(R^1,\ dx),\quad U_tH_n=H_n\quad \forall t\\ &\{U_t\}\sim\{\hat{U}_t\}:\ (\hat{U}_tf)(x)=f(x-t)\ . \end{aligned}$$

単一のユニタリ作用素の場合は λ の範囲は $[0,\ 1)$ だから，$L^2([0,1),\ d\lambda)$ を Fourier 展開して次の定理を得る。

<u>定理1.5′</u>　ユニタリ作用素 U が重複度 $\varkappa$ の一様ルベーグ・スペクトルを持つためには，H に次の様な完全正規直交系 $\{h_{mn};\ m=1,2,\cdots,\varkappa,\ n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$ が存在することが必要十分である：

$$Uh_{mn}=h_{m\,n-1},\qquad \forall m,n\ .$$

<u>定理1.6</u>　可分ヒルベルト空間 H 上のユニタリ作用素群 $\{U_t\}$ が一様ルベーグ・スペクトルを持つためには，次の3条件をみたす部分空間 H_0 が存在することが必要十分である：

(i) $U_tH_0\supset U_sH_0$，$t>s$，(ii) $\overset{\infty}{\vee}U_tH_0=H$，(iii) $\underset{-\infty}{\wedge}U_tH_0=\{0\}$．

<u>証明</u>（十分性）　$\{U_t\}$ に対応する単位の分解を $\{E(\lambda)\}$ とする．条件より $\dim(U_1H_0\ominus H_0)>0$[1] だから，$U_1H_0\ominus H_0\ni h_1\neq 0$ が存在する．$U_th_1\in U_{t+1}H_0\ominus U_tH_0$ だから $|t|>1$ のとき

---

1) $H_1\ominus H_0=\{h;\ h\in H_1,\ h\perp H_0\}$．

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

$$\int e^{2\pi i t\lambda}\|dE(\lambda)h_1\|^2=\int e^{2\pi i t\lambda}(dE(\lambda)h_1,h_1)=(U_t h_1,h_1)=0 .$$

従って Paley-Wiener の定理[1] により $\|dE(\lambda)h_1\|^2\sim d\lambda$，即ち h_1 の張る cyclic subspace $M(h_1)$ ($\{U_t h_1;-\infty<t<\infty\}$ の張る閉線型部分空間と一致する) において $\{U_t\}$ は単純ルベーグ・スペクトルをもつ．もし，$U_1H_0\ominus H_0\subset M(h_1)$ でなければ，$M(h_1)$ と直交する $h_2\in U_1H_0\ominus H_0$，$h_2\neq 0$ をとると

$$(U_t h_1, U_s h_2)=(U_{t-s}h_1,h_2)=0$$

によって $M(h_1)\perp M(h_2)$ であり，$M(h_2)$ でも単純ルベーグ・スペクトルである。同様に一般に $M(h_1),\cdots,M(h_{n-1})$ と直交する $h_n\in U_1H_0\ominus H_0$，$h_n\neq 0$ をとってくると，$M(h_n)\perp M(h_j)$ $(1\leqq j\leqq n-1)$ であって，$M(h_n)$ 上で単純ルベーグ・スペクトルである。H の可分性により，この操作は高々可算無限回で終る．$1\leqq \kappa\leqq\infty$ があって

$$\sum_{n=1}^{\kappa}\oplus M(h_n)\supset U_1H_0\ominus H_0$$

$U_tH_0=U_{t-1}(U_1H_0\ominus H_0)\oplus U_{t-2}(U_1H_0\ominus H_0)\oplus\cdots$ だから，すべての t に対し $\sum_1^{\kappa}\oplus M(h_n)\supset H_t$． 従って

$$\sum_1^{\kappa}\oplus M(h_n)=H.$$

即ち $\{U_t\}$ は重複度 κ の一様ルベーグ・スペクトルをもつ。

（必要性） H は (1.3) のように分解される．H_n から $L^2(R^1,dx)$ への isomorphism V_n によって，H_n において $U_t=V_n^{-1}\hat{U}_tV_n$ となる．

$$\hat{H}_0=\{f;\ f\in L^2(R^1,dx),\ \ x>0 \text{ のとき } f(x)=0\}$$
$$H_0=\sum\oplus V_n^{-1}\hat{H}_0$$

とおけば H_0 が求めるものである．

$$U_tH_0=\sum\oplus U_tV_n^{-1}\hat{H}_0=\sum\oplus V_n^{-1}\hat{U}_t\hat{H}_0$$
$$\hat{U}_t\hat{H}_0=\{f;\ f\in L^2(R^1,dx),\ x>t \text{ のとき } f(x)=0\}$$

だから (i) をみたす．(ii), (iii) はそれぞれ

$$\bigvee^{\infty}\hat{U}_t\hat{H}_0=L^2(dR^1,dx),\quad \bigwedge_{-\infty}\hat{U}_t\hat{H}_0=\{0\}$$

より得られる． (証明終)

---

2) §2.2 参照。

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

flow $\{T_t\}$ に対応する $\{U_t\}$ を考える。$\{U_t\}$ のスペクトルのことを $\{T_t\}$ のスペクトルという。例えば $\{T_t\}$ と $\{T_t'\}$ が同じ spectral type をもつ（またはスペクトル同値）とは，対応する $\{U_t\}$ と $\{U_t'\}$ が同じ spectral type をもつことである。次の定理は明らかである．

定理 1.7　2つの flow が同じ metrical type をもてば，それらの spectral type は等しい。

逆は一般には成立しない。ただ離散スペクトルをもつエルゴード的な flow に対しては，spectral type が等しい（即ち固有値が一致する）ことから metrical type が等しいことが出る（[15]にくわしく述べられている）．

Weyl-automorphism は離散スペクトルをもつ．実際，$L^2([0,1))$ の完全正規直交系 $\{e_n=e^{2\pi inx};\ -\infty<n<\infty\}$ は

$$U_\theta e_n = e^{2\pi in\theta} e_n$$

となってすべて固有函数である．

定理 1.6によれば Kolmogorov-flow は $H\ominus C$[1] で一様ルベーグ・スペクトルをもつ。更に重複度 $\varkappa=\infty$ 即ち σ-ルベーグ・スペクトルであることがわかるが，そのためには空間 Ω の詳しい考察が必要である（後述）．特に加法過程の flow がすべて σ-ルベーグ・スペクトルをもつことは，重複ウィナー積分を使って K. Itô によって示された（[18], [30]参照）。

§1.5　エルゴード定理とエルゴード性

確率空間 $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ 上の automorphism T や flow $\{T_t\}$ を考える．可測集合 A，可測函数 f がそれぞれ

$$TA=A,\quad f(T\omega)=f(\omega)\qquad \forall\omega\in\Omega$$

をみたすとき，T-不変といい，

$$P(TA\ominus A)=0,\quad f(T\omega)=f(\omega)\qquad a.e.\ \omega\in\Omega$$

のとき T-不変（mod 0）という。flow に対しても同様に

$$T_tA=A,\qquad f(T_t\omega)=f(\omega)\qquad \forall t,\ \forall\omega\in\Omega$$

のときそれぞれ $\{T_t\}$-不変集合，$\{T_t\}$-不変函数という．すべての固定した t に対し

---

1) C は定数から成る一次元空間.

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

$$P(T_t A \ominus A) = 0, \quad f(T_t\omega) = f(\omega) \qquad a.e.\ \omega \in \Omega$$

のとき $\{T_t\}$-不変（$mod\ 0$）という。

次の定理は Birkhoff の個別エルゴード定理の名でよく知られている。

定理 1.8.A. Ω 上の任意の可積分函数 f に対し極限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k\omega) = \bar{f}(\omega) \qquad a.e.$$

が存在し，$\bar{f}$ は T-不変（$mod\ 0$）な可積分函数である．更に T-不変（$mod\ 0$）集合 A に対し

$$(1.4) \qquad \int_A \bar{f}(\omega)\,dP = \int_A f(\omega)\,dP$$

が成り立つ。

可積分函数 f に対し，$E\{|f(T_t\omega)|\} = E\{|f|\} < +\infty$ だから

$$\iint_{\Omega\times[0,T]} |f(T_t\omega)|\,dP\,dt < +\infty \ .$$

従って Fubini の定理によって，ほとんどすべての ω に対し積分

$$\int_0^T f(T_t\omega)\,dt$$

が存在し，ω の可積分函数となる．

定理 1.8.F 任意の可積分函数 f に対し極限

$$(1.5) \qquad \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(T_t\omega)\,dt = \bar{f}(\omega) \qquad a.e.$$

が存在し，$\bar{f}$ は $\{T_t\}$-不変（$mod\ 0$）な可積分函数で，任意の $\{T_t\}$-不変（$mod\ 0$）集合 A に対し等式（1.4）が成り立つ．

証明 定理 A の証明は例えば[25]を参照してほしい。こゝでは定理 A から定理 F を導く．函数

$$F(\omega) = \int_0^1 f(T_t\omega)\,dt, \qquad \hat{F}(\omega) = \int_0^1 |f(T_t\omega)|\,dt$$

はともに可積分であり，次の関係が成り立つ。

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(T_t\omega)\,dt = \frac{1}{T}\sum_{k=0}^{[T]-1} F(T_k\omega) + \frac{1}{T}\int_{[T]}^T f(T_t\omega)\,dt$$

第 1 項は定理 A より可積分函数 $\bar{f}$ に収束する．

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

$$\left|\int_{[T]}^{T} f(T_t\omega)dt\right| \leqq \int_{[T]}^{[T]+1} |f(T_t\omega)|\,dt = \hat{F}(T_{[T]}\omega)$$

だから第2項は定理Aにより0に収束する．(1.5)式が示された．$\bar{f}$の$\{T_t\}$-不変性は明らかであろう．式(1.2)を示す．

$$\int_A \bar{f}(\omega)dP = \int_A F(\omega)dP = \int_A \left[\int_0^1 f(T_t\omega)\,dt\right] dP$$

$$= \int_0^1 \left[\int_A f(T_t\omega)\,dP\right] dt = \int_A f(\omega)\,dP\,.$$ （証明終）

定義1.13　flow $\{T_t\}$ (automorphism T) がエルゴード的であるとは，$\{T_t\}$ (T)-不変 (mod 0) な集合の確率が0または1となることをいう。

定理1.9.A　次の諸命題はたがいに同等である．

1) Tがエルゴード的．

2) $TA=A$, $A\in\mathbb{B} \Longrightarrow P(A)=0$ または1．

3) T-不変な可測函数は定数のみである．

4) T-不変 (mod 0) な可測函数は定数 (mod 0) のみである．

5) 任意の可積分函数fに対し

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(T^k\omega) = E\{f\} \qquad a.e.\ \omega.$$

6) $P(A)P(B)>0 \Longrightarrow {}^{\exists}n:\ \ P(A\cap T^nB)>0$．

証明　1)$\Longleftrightarrow$4)$\Longrightarrow$5)$\Longrightarrow$2)$\Longleftrightarrow$3)，6)$\Longrightarrow$2)は明らか。2)$\Longrightarrow$1)を示す．$P(TA\ominus A)=0$であれば$A^*=\bigcup_{-\infty}^{\infty} T^nA$は$TA^*=A^*$, $P(A^*)=P(A)$となるので$P(A)=0$または1。2)$\Rightarrow$6)を示すために，$P(A)P(B)>0$, $P(A\cap T^nB)=0$, ${}^{\forall}n$, となるA, Bがあると仮定して矛盾を導こう。$B^*=\bigcup_{-\infty}^{\infty} T^nB$は$TB^*=B^*$, $P(B^*)\geqq P(B)>0$であり，更に，$P(A\cap B^*)\leqq \sum_{-\infty}^{\infty} P(A\cap T^nB)=0$だから　$P(B^*)\leqq 1-P(A)<1$となり2)が成立しない。

（証明終）

flowに対しても同様に次の定理が成り立つ。

定理1.9.F　次の諸命題はたがいに同等である。

1) $\{T_t\}$がエルゴード的．

2) $T_tA=A$, ${}^{\forall}t$, $A\in\mathbb{B} \Rightarrow P(A)=0$ または1．

3) $\{T_t\}$-不変な可測函数は定数に限る．

4) $\{T_t\}$-不変 (mod 0) な可測函数は定数 (mod 0) に限る。

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

5) 任意の可積分函数 f に対し

(1.6) $$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(T_t\omega)\,dt = E\{f\} \qquad a.e.$$

<u>証明</u> 3) ⇒ 4) (2) ⇒ 1)) は次の lemma による. 他の関係は明らか.

<u>*Lemma 1.1*</u> 任意の $\{T_t\}$-不変 (mod 0) な可測函数 (集合) に対し, それとほとんどいたるところ一致する $\{T_t\}$-不変な可測函数 (集合) が存在する.

<u>証明</u> f を $\{T_t\}$-不変 (mod 0) な可測函数としよう. $f(T_t\omega)$ は (t,ω)-可測だから, 集合 $A=\{(t,\omega);\ f(T_t\omega)\neq f(\omega)\}$ は (t,ω)-可測である. 任意に t を定めると $A_t=\{\omega;\ f(T_t\omega)\neq f(\omega)\}$ は $P(A_t)=0$. Fubini の定理により $\iint \chi_A(t,\omega)\,dt\,dP=0$. 再び Fubini の定理により, $P(N)=0$ なる集合 $N\subset\Omega$ があって $N^c\ni\omega$ に対し

$$f(T_t\omega)=f(\omega) \qquad a.e.\ t,$$

従って $T_a\omega\in N^c$, $T_b\omega\in N^c$ であれば

$$f(T_tT_a\omega)=f(T_a\omega) \qquad a.e.\ t$$

$$f(T_sT_b\omega)=f(T_b\omega) \qquad a.e.\ s$$

が成り立ち, そのような t, s で $t+a=s+b$ となるものを選べば, $T_tT_a\omega=T_{t+a}\omega=T_{s+b}\omega=T_sT_b\omega$ だから $f(T_a\omega)=f(T_b\omega)$ が得られる. 即ち軌道 $\{T_t\omega;\ -\infty<t<\infty\}$ 上で N^c の範囲では f は定数である.

$$f^*(\omega)=f(\omega) \qquad \omega\in N^c$$

とおき, $\omega\in N$ に対しては, もし $T_t\omega\in N^c$ となる t があれば $f^*(\omega)=f(T_t\omega)$, そのような t が存在しないときは $f^*(\omega)=0$ とおく。明らかに f^* は $\{T_t\}$-不変であり

$$f^*(\omega)=f(\omega) \qquad a.e.$$

である. (証明終)

函数 f が有界のとき, (1.6) の両辺に有界可測函数 g をかけて P で積分すれば, ルベーグの定理によって次の定理が得られる.

<u>定理 1.10</u> flow $\{T_t\}$ がエルゴード的であれば, 任意の有界可測函数 f, g に対し

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T E\{f(T_t\omega)\,g(\omega)\}\,dt = E\{f\}\,E\{g\}$$

が成り立つ. 特に $f=\chi_A$, $g=\chi_B$, $A, B\in\mathbb{B}$ のとき

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T P(A\cap T_t B)\,dt = P(A)P(B)$$

を得る.

<u>注意</u> 以後特に断わらない限り, flow に関する命題や定義は形式的な変更をした形で automorphism に関する同様の命題や定義を含む. 例えば上の定理は積分を和に代えて automorphism に対して成り立つ.

<u>定理 1.11</u> flow $\{T_t\}$ がエルゴード的であるためには, $\lambda=0$ が単純な固有値であることが必要十分である. エルゴード的であれば, 固有函数の絶対値は定数であり, 固有値はいずれも単純でその全体は加法で群をなす.

証明は[15]参照のこと。

§1.2.例2の automorphism $T_\theta x = x+\theta \pmod 1$ は θ が有理数 $\theta=q/p$ のときは $f(x)=px$ が定数でない不変函数となつて, エルゴード的でない。θ が無理数のとき, 即ち Weyl-automorphism はエルゴード的である. これは軌道 $\{T_\theta^n x;\ n=0,\ \pm1,\ \pm2, \cdots\}$ が $\Omega=[0,1)$ を到るところ稠密にうめることを直接使つても示せる (例えば[25] p.268) が, 次のようにも証明できる. 2乗可積分な函数 f を $e^{2\pi inx}$, $n=0$, ±1, ±2, $\cdots$ で展開し

$$f(x)=\sum_n a_n e^{2\pi inx}.$$

これに T_θ をほどこすと

$$f(T_\theta x)=\sum_n a_n e^{2\pi in\theta} e^{2\pi inx}.$$

もし f が T_θ-不変 (mod 0) であれば $a_n=a_n e^{2\pi in\theta}$ となつて $n\neq0$ のとき $a_n=0$, 即ち f は定数となる。

Kolmogorov-flow (automorphism) はすべてエルゴード的であり (後述), 特別な場合として Bernoulli-automorphism (従つてパイコネも), 加法過程の flow はエルゴード的である.

§1.6 混合性

前節にのべたエルゴード性よりも強い性質として混合性がある.

<u>定義 1.14</u> flow $\{T_t\}$ が弱混合であるとは, すべての A, $B\in\mathcal{B}$ に対し

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T |P(A\cap T_t B)-P(A)P(B)|\,dt=0$$

が成り立つことである. 更に強く

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

$$\lim_{t\to\infty} P(A \cap T_t B) = P(A)P(B)$$

が成り立つとき強混合という。

強混合を1位とし，位数の高い混合性が考えられている。

定義 1.15　flow $\{T_t\}$ が r 位の混合であるとは，すべての $r+1$ 個の可測集合 $A_0, A_1, \cdots, A_r$ と次のようなすべての実数の組の列 $\{t_0^n, t_1^n, \cdots, t_r^n\}$ $(n=1,2,\cdots)$

$$(1.7) \qquad t_{j-1}^n < t_j^n, \quad \min_{1\leqq j\leqq r}(t_j^n - t_{j-1}^n) \longrightarrow \infty \quad (n\longrightarrow\infty)$$

に対し

$$\lim_{n\to\infty} P(\bigcap_{j=0}^{r} T_{t_j^n} A_j) = \prod_{j=0}^{r} P(A_j)$$

が成り立つことである。

混合性は $\{T_t\}$ に対応するユニタリ作用素群 $\{U_t\}$ に関する言葉で次のように云い換えられることが容易にわかる。

定理 1.12　(i) $\{T_t\}$ が弱混合であるためには

$$(1.8) \qquad \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T |(U_t f, g)-(f,1)\overline{(g,1)}|\,dt = 0, \qquad {}^\forall f, g \in L^2$$

が成り立つことが必要十分である。

(ii) $\{T_t\}$ が強混合であるためには

$$\lim_{t\to\infty}(U_t f, g) = (f,1)\overline{(g,1)}, \qquad {}^\forall f, g \in L^2$$

が成り立つことが必要十分である。

(iii) $\{T_t\}$ が r 位の混合であるためには，(1.7) をみたすすべての実数の組の列 $\{t_0^n, \cdots, t_r^n\}$ とすべての実数値の有界可測函数 $f_0, f_1, \cdots, f_r$ に対し

$$\lim_{n\to\infty}\left(\prod_{j=0}^{r} U_{t_j^n} f_j, 1\right) = \prod_{j=0}^{r}(f_j, 1)$$

が成り立つことが必要十分である。

注意　(i) (ii) で函数 f, g は実数値有界可測としておいて十分である。

定理 1.13　$r+1$ 位の混合 $\Rightarrow$ r 位の混合．強混合 $\Rightarrow$ 弱混合 $\Rightarrow$ エルゴード的。

弱混合の特徴づけは良く知られている．そのいくつかを与えよう。

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

<u>Lemma 1.2</u> $F(\lambda)$ は有界変分な連続（複素数値）函数とする。このとき

$$f(t)=\int e^{2\pi i\lambda t}\,dF(\lambda)$$

に対して

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T|f(t)|^2\,dt=0$$

が成り立つ。

<u>証明</u>

$$\varphi_T(\lambda,\mu)=\frac{1}{T}\int_0^T e^{2\pi i(\lambda-\mu)t}\,dt=\begin{cases}1, & \lambda=\mu\\ \dfrac{e^{2\pi i(\lambda-\mu)T}-1}{2\pi i(\lambda-\mu)T}, & \lambda\neq\mu\end{cases}$$

$$\chi(\lambda,\mu)=\begin{cases}1, & \lambda=\mu\\ 0, & \lambda\neq\mu\end{cases}$$

とおけば

$$\lim_{T\to\infty}\varphi_T(\lambda,\mu)=\chi(\lambda,\mu),\quad |\varphi_T(\lambda,\mu)|\leqq 1\quad \forall\lambda,\mu$$

だから，すべての μ で

$$\psi_T(\mu)=\int\varphi_T(\lambda,\mu)\,dF(\lambda)\longrightarrow\int\chi(\lambda,\mu)\,dF(\lambda)=0,\quad T\to\infty$$

$$|\psi_T(\mu)|\leqq\int d|F(\lambda)|<+\infty.$$

故に

$$\frac{1}{T}\int_0^T|f(t)|^2dt=\int\psi_T(\mu)\,d\overline{F(\mu)}\longrightarrow 0,\quad T\to\infty.$$ （証明終）

<u>定理 1.14</u> $\{T_t\}$ が弱混合であるためには，固有値 $\lambda=0$ が単純でありかつ唯一の固有値である（即ち $L^2\ominus C$ で連続スペクトルを持つ）ことが必要十分である。

<u>証明</u> 必要性：$\lambda=0$ が単純固有値であることは，定理 1.13, 11 から出る．0 以外に固有値があるとすれば，対応する固有函数 f に対して $(f,1)=0$．(1.8) で $g=f$ とすれば $f=0$ がわかる．

十分性：

$$F(\lambda)=\begin{cases}(E(\lambda)-E^{(0)})\,f,\,g) & \lambda\geqq 0\\ (E(\lambda)f,\,g) & \lambda<0\end{cases}$$

とおく。ここに $E^{(0)}=E(0)-E(0-0)$．$F(\lambda)$ は lemma 1.2 の条件をみたし

$$f(t)=\int e^{2\pi i\lambda t}dF(\lambda)=(U_tf,g)-(f,1)(1,g)$$

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

である．故に lemma 1.2 より関係 (1.8) を得る．（証明終）

定理 1.15　flow $\{T_t\}$ が弱混合 $\Longleftrightarrow$ $^\forall t \neq 0$, automorphism T_t がエルゴード的．

証明　($\Longrightarrow$) $t_0 \neq 0$，$f \neq$ 定数 があって $T_{t_0} f = f$ とすれば

$$U_{t+t_0} f = U_t U_{t_0} f = U_t f \qquad {}^\forall t$$

となって (1.8) が成り立たない．

($\Longleftarrow$) 固有値 $\lambda \neq 0$ が存在するとすれば

$$U_t f_\lambda = e^{2\pi i \lambda t} f_\lambda \ , \qquad {}^\forall t \ , \quad f_\lambda \neq 0 \ .$$

そうすれば $U_{\frac{1}{\lambda}} f_\lambda = e^{2\pi i} f_\lambda = f_\lambda$ となって $T_{\frac{1}{\lambda}}$ はエルゴード的でない．

（証明終）

N を自然数のある集合とし，自然数 p より小さい N の元の個数を $\nu_p(N)$ であらわす。もし

$$\lim_{p\to\infty} \frac{\nu_p(N)}{p} = 0$$

であれば，N は密度 0 の集合といわれる．

Lemma 1.3　$\{a_n\}$ は任意の正数列とする．もし

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} a_k = 0$$

であれば，密度 0 の集合 N があって

$$(1.9) \qquad a_n \longrightarrow 0 \qquad (n\to\infty,\ n \notin N)\ .$$

証明　各自然数 p に対し集合 $N_p = \{n ;\ a_n > \frac{1}{p}\}$ は密度 0 である．従って自然数列

$$\ell_0 = 0 < \ell_1 < \ell_2 < \cdots$$

があって $n \geqq \ell_p$ のとき

$$\frac{\nu_n(N_{p+1})}{n} < \frac{1}{p+1}\ .$$

一般に $K(r, s) = \{n ;\ n \in K,\ r \leqq n < s\}$ と書くことにして

$$N = \bigcup_{p=0}^{\infty} N_{p+1}(\ell_p, \ell_{p+1})$$

とおけば，これが求めるものである．$N_1 \subset N_2 \subset \cdots$ だから $\ell_p \leqq n < \ell_{p+1}$ のとき

$$N(0,n) = N(0,\ell_p) \cup N(\ell_p, n) \subset N_p(0,\ell_p) \cup N_{p+1}(0,n)$$

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

従って

$$\frac{\nu_n(N)}{n} \leqq \frac{\nu_{l_p}(N_p)+\nu_n(N_{p+1})}{n} \leqq \frac{\nu_n(N_p)}{n} + \frac{\nu_n(N_{p+1})}{n} < \frac{1}{p} + \frac{1}{p+1}$$

故に N は密度 0 の集合である．もし $n \geqq l_p$, $n \notin N$ であれば $n \notin N_{p+1}$ だから

$a_n < \dfrac{1}{p+1}$. （証明終）

定理 1.16　automorphism T が弱混合であるためには，密度 0 の集合 N があって

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ n\notin N}} P(T^n A \cap B) = P(A)P(B), \qquad {}^\forall A, B \in \mathbb{B}$$

即ち

$$(1.10) \qquad \lim_{\substack{n\to\infty \\ n\notin N}} (U^n f, g) = (f,1)\overline{(g,1)}, \qquad {}^\forall f, g \in L^2$$

となることが必要十分である．

証明　十分性は明らか．必要性を示す． L^2 の稠密な可算系 $\{f_n\}$ に対し

$$a_n = \sum_{i,j} \frac{|(U^n f_i, f_j) - (f_i, 1)\overline{(f_j, 1)}|}{2^{i+j}\|f_i\| \cdot \|f_j\|}$$

とおけば明らかに lemma 1.3 の条件をみたす。従って (1.9) を成立させる密度 0 の N が存在する．任意の $f, g \in L^2$ に対し $n\to\infty$, $n \notin N$ のとき (1.10) が成り立つのを示すのは容易である．（証明終）

定理 1.17　$\{T_t\}$ が $L^2 \ominus \mathcal{C}$ で σ-ルベーグ・スペクトルを持てば，それは強混合である。

証明　任意の $f, g \in L^2$, $(f, 1) = 0$ に対し

$$(U_t f, g) = \int e^{2\pi i t\lambda} d(E(\lambda)f, g).$$

$(E(\lambda)f, g)$ はこの場合連続であるが，更に

$$\int_B |d(E(\lambda)f, g)|^2 \leqq \int_B \|dE(\lambda)f\|^2 \cdot \|g\|^2$$

で仮定により $\|dE(\lambda)f\|^2$ はルベーグ測度 $d\lambda$ と互に絶対連続であるから，$d(E(\lambda)f, g)$ は $d\lambda$ に関して密度 $\varphi(\lambda)$ をもつ：

$$(U_t f, g) = \int e^{2\pi i t\lambda} \varphi(\lambda)\, d\lambda \ .$$

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

故に Riemann-Lebesgue の定理により

$$(U_t f, g) \longrightarrow 0 = (f, 1)\overline{(g, 1)}.$$

$(f, 1) \neq 0$ の場合は $\tilde{f} = f - (f, 1)$ とおけば, $(\tilde{f}, 1) = 0$ で

$$(U_t f, g) - (f, 1)\overline{(g, 1)} = (U_t \tilde{f}, g) \longrightarrow 0.$$

(証明終)

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

第2章　正規定常過程

§21 重複ウィナー積分[1)]

$\{X(t,\omega);\ -\infty<t<\infty\}$ を可測な実正規定常過程とする。確率ベクトル $(X(t_1+t),\cdots,X(t_n+t))$ の分布は t に関係しない n 次元の正規分布である．平均 $E\{X(t)\}=0$ と2乗平均連続性

$$\lim_{t\to 0} E\{|X(t)-X(0)|^2\}=0$$

を仮定する[2)]. 共分散 $\gamma(t)=E\{X(t+s)X(s)\}$ は

$$\gamma(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{2\pi i\lambda t}dF(\lambda)$$

とスペクトル分解できる（*Khintchine* の定理）。$F(\lambda)$ を $\{X(t)\}$ のスペクトル函数と呼ぶ[3)]. $\{X(t)\}$ が（従って $\gamma(t)$ が）実数値だから測度 $dF(\lambda)$ は原点に関し対称である．逆に

<u>*Lemma 2.1*</u>　$dF(\lambda)$ を与えられた R_1 上の有界測度で原点に関して対称とする。このとき $dF(\lambda)$ をスペクトル測度にもつ2乗平均連続な実正規定常過程が存在する。

証明は[17]参照．

Stone の定理により

$$X(t)=U_t X(0)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{2\pi i\lambda t}dE(\lambda)X(0).$$

$Y(\lambda)=E(\lambda)X(0)$ とおけば

$$X(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{2\pi i\lambda t}dY(\lambda)$$

$$\|Y(\lambda)\|^2=F(\lambda)$$

---

1) この節については[16][17][19][30]など参照。

2) 以上はこの章を通じて仮定する．

3) $dF(\lambda)$ をスペクトル測度という。

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

となる（Kolmogorov の定理）．$\{Y(\lambda)\}$ は $E\{Y(\lambda)\}=0$，$E\{|Y(\lambda)|^2\}<\infty$ をみたし，直交増分性

$$A\cap B=\phi \Rightarrow (Y(A),\ Y(B))=0^{1)} \quad 即ち\ Y(A)\perp Y(B)$$

をもつ．更に $\{Y(\lambda)\}$ は（$F(\lambda)$ の連続点 λ，μ で）

$$Y(\mu)-Y(\lambda)=\underset{C\to\infty}{l.i.m.}\int_{-C}^{C} \ldots e^{-2\pi i\lambda t} \ldots (t)\,dt$$

によって $\{X(t)\}$ より定まり，従って … である．即ち … と複素数 $z_1, \cdots, z_n$ に対し

$$E\{exp(i\mathcal{R}e(\sum_{j=1}^{n}\bar{z}_j Y(\lambda_j)))\}=exp\{- \ldots \|^2\}$$

… から直交増分性より独立増分性が … る。このような $\{Y(\lambda)\}$ を … から

(2.1) $\quad Y(A)=Y(- \ldots),$

が成り立つ。

次の仮定の下で … ィナー積分を … る．

<u>仮定</u> $F(\lambda)$ は …

測度 F の p 個の … 度を F^p と書き，$L^2_{p,q}=L^2(R_p\times R_q,\ F^p\times F^q)=L^2(R_{p+q},\ F^{p+q})$，$(p,q\geqq 0)$ とする．互に交わらない $E_1, \cdots, E_{p+q}\in\mathcal{B}_1$ に対し，$E_1\times\cdots\times E_{p+q}$ の定義函数やそれらの有限個の … すれば，…

とし，

$$\gamma_{p,q}\ni g(\lambda_1,\cdots,\lambda_p,\mu_1,\cdots,\mu_q)=\sum c_{i_1\cdots i_p j_1\cdots j_q}\chi_{E_{i_1}}(\lambda_1)\cdots\chi_{E_{i_p}}(\lambda_p)\chi_{E_{j_1}}(\mu_1)\cdots\chi_{E_{j_q}}(\mu_q)$$

に対し

$$I_{p,q}(g)=\sum c_{i_1\cdots i_p j_1\cdots j_q}Y(E_{i_1})\cdots Y(E_{i_p})\bar{Y}(E_{j_1})\cdots\bar{Y}(E_{j_q})$$

とおく。$g\in L^2_{p,q}$ に対しては $\gamma_{p,q}\ni g_n$ でノルム近似（$\|g-g_n\|\to 0$）して

---

1) 1次元ボレル集合 $A\in\mathcal{B}_1$ に対し $Y(A)=\int_A dY(\lambda)$ と定める．一般に $(Y(A),Y(B))=F(A\cap B)=\int_{A\cap B}dF(\lambda)$ となる。このような $Y(A)$ を彷徨測度と呼ぶ。これは更に次の性質をもつ：互に交わらない $\{A_n\}\subset\mathcal{B}_1$ に対し，$Y(\cup A_n)=\sum Y(A_n)$（L^2 平均収束）．

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

$$I_{p,q}(g) = \underset{n\to\infty}{l.i.m.}\ I_{p,q}(g_n)$$

と定義する．$I_{p,q}(g)$ を (p,q) 次重複ウィナー積分と呼び

$$I_{p,q}(g)=\int\cdots\int g(\lambda_1,\cdots,\lambda_p,\mu_1,\cdots,\mu_q)\,dY(\lambda_1)\cdots dY(\lambda_p)\,d\bar{Y}(\mu_1)\cdots d\bar{Y}(\mu_q)$$

と書く。

函数 g の対称化を

$$\tilde{g}(\lambda_1,\cdots,\lambda_p,\mu_1,\cdots,\mu_q)=\frac{1}{p!q!}\sum_{(i)(j)} g(\lambda_{i_1},\cdots,\lambda_{i_p},\mu_{j_1},\cdots,\mu_{j_q})$$

($(i)=(i_1,\cdots,i_p)$，$(j)=(j_1,\cdots,j_q)$ はそれぞれ $(1,\cdots,p)$，$(1,\cdots,q)$ の置換で，和はすべての置換について加える）と書き，$L^2_{p,q}$ の元で対称（即ち $\tilde{g}=g$）なものの全体を $\tilde{L}^2_{p,q}$ とする．

<u>定理 2.1</u>　(i) $I_{p,q}(g)=I_{p,q}(\tilde{g})$

(ii) $I_{p,q}(c_1g_1+c_2g_2)=c_1I_{p,q}(g_1)+c_2I_{p,q}(g_2)$

(iii) $E(I_{p,q}(g))=(I_{p,q}(g),1)=0$

(iv) $(I_{p,q}(g_1),\ I_{p,q}(g_2))=p!q!(\tilde{g}_1,\tilde{g}_2)$

(v) $\|I_{p,q}(g)\|^2=p!q!\|\tilde{g}\|^2\leqq p!q!\|g\|^2$

(vi) $(p,q)\neq(r,s)\Rightarrow(I_{p,q}(g_1),\ I_{r,s}(g_2))=0$

証明は[16]，[30]参照．

(p,q) 次重複ウィナー積分 $I_{p,q}(g)$ の全体を $H_{p,q}$ と書けば

<u>定理 2.2</u>　$H_{p,q}$ は $\tilde{L}^2_{p,q}$ と *isomorph* である．しかも各 $H_{p,q}$ は $\{U_t\}$-不変であり，$\{U_t\}$ の $H_{p,q}$ への制限は上の *isomorphism* で $\tilde{L}^2_{p,q}$ のユニタリ作用素群

$$V_tg(\lambda_1,\cdots,\lambda_p,\mu_1,\cdots,\mu_q)=e^{2\pi it(\sum_1^p\lambda_i-\sum_1^q\mu_j)}\tilde{g}(\lambda_1,\cdots,\lambda_p,\mu_1,\cdots,\mu_q)$$

に対応する．

<u>証明</u>　前半は前定理 (i)(v) による．後半は

$$U_tX(s)=X(t+s)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{2\pi i\lambda(t+s)}\,dY(\lambda)$$

即ち

$$U_t\,dY(\lambda)=e^{2\pi i\lambda t}\,dY(\lambda)$$

による．　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（証明終）

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

$\{Y(\lambda)\}$ の L^2-汎函数の全体 $L^2(Y)$ は $L^2(\Omega)$ $(=L^2(X))$ と一致するから，

定理 2.3 任意の $f \in L^2(\Omega)$ は

$$f = \sum_{p,q} I_{p,q}(g_{p,q})$$

と展開される．このとき，対称な函数に限れば $\{g_{p,q}\}$ は一意に定まる。

証明は[16]，[30]参照。

以上のべたのは複素正規過程に対応する一般の複素ウィナー過程による重複ウィナー積分についてであった。実正規過程に対応する複素ウィナー過程は性質(2.1)をもつから，事情は少し簡単になる．

$$I_{p,q}(g) = \int\cdots\int g(\lambda_1,\cdots,\lambda_p,\mu_1,\cdots,\mu_q)\,dY(\lambda_1)\cdots dY(\lambda_p)\,d\bar{Y}(\mu_1)\cdots d\bar{Y}(\mu_q)$$

$$= \int\cdots\int g(\lambda_1,\cdots,\lambda_p,-\mu_1,\cdots,-\mu_q)\,dY(\lambda_1)\cdots dY(\lambda_p)\,dY(\mu_1)\cdots dY(\mu_q)$$

だから $H_{p,q} = H_{p+q,0}$ である．$g(\lambda_1,\cdots,\lambda_p,\mu_1,\cdots,\mu_q)$ に対し $g(\lambda_1,\cdots,\lambda_p,-\mu_1,\cdots,-\mu_q)$ を全変数について対称化したものを $\hat{g}$ と書けば

$$I_{p,q}(g) = I_{p+q,0}(\hat{g}) .$$

更に $\bigcap_{p+q=k} \tilde{L}^2_{p,q} = \tilde{L}^2_{k,0}$ に注意すれば，$I_k = I_{k,0}$，$H_k = H_{k,0}$ などと書くことにより次の定理を得る。

定理 2.4 $L^2(\Omega) = \sum_{k\geq 0} \oplus H_k$

ここに H_k は $\{U_t\}$-不変で，$\tilde{L}^2_k$ に isomorph であり，$\{U_t\}$ の $\tilde{L}^2_k$ における像は

$$V_t g(\lambda_1,\cdots,\lambda_k) = e^{2\pi i t \sum_1^k \lambda_i} g(\lambda_1,\cdots,\lambda_k)$$

である．

§2.2 正　則　性[1)]

実正規定常過程 $\{X(t)\}$ に対し

$M_t = \{X(s);\ -\infty < s \leqq t\}$ によって張られる

$L^2(\Omega)$ の閉線型部分空間

とする．明らかに $M_t \subset L^2(B_t)$ である．

---

1) この節については [13] [22] 参照．

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

定義2.1 (i) すべての t, s に対し $M_t=M_s$ のとき $\{X(t)\}$ は M-決定的, $\bigcap_{-\infty} M_t = \mathcal{C}$ のとき M-純非決定的という.

(ii) すべての t, s に対し $L^2(\mathbb{B}_t)=L^2(\mathbb{B}_s)$ ($\mathbb{B}_t=\mathbb{B}_s$ と同等) のとき決定的 (または特異), $\bigcap_{-\infty} L^2(\mathbb{B}_t)=\mathcal{C}$ ($\bigcap_{-\infty} \mathbb{B}_t=\mathcal{Z}$ と同等) のとき純非決定的 (または正則) という。

$\{X(t)\}$ が M-純非決定的であると仮定しよう. そうすればスペクトル測度 $dF(\lambda)$ は $d\lambda$ に関し絶対連続になり, その密度 $F'(\lambda)$ は

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\log F'(\lambda)|}{1+\lambda^2}\, d\lambda < \infty \tag{2.2}$$

をみたす (逆も成り立つ).

定理2.5 (Paley-Wiener[31]). $0 \leqq G(\lambda) \in L^p(R_1)$ $(1 \leqq p < \infty)$ の Fourier 変換 $\widetilde{G}$ が半直線 $(-\infty, 0)$ 上で 0 になるための必要十分条件は

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\log G(\lambda)|}{1+\lambda^2}\, d\lambda < \infty .$$

この定理によれば $|G(\lambda)|^2 = F'(\lambda)$ をみたす $G(\lambda)$ の Fourier 変換

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i \lambda t}\, G(\lambda)\, d\lambda$$

は $t<0$ で 0 になっている。

$$Y^*(\Lambda) = \int_{\Lambda} \frac{1}{G(\lambda)}\, dY(\lambda)$$

はまた直交測度で $\|dY^*(\lambda)\|^2 = d\lambda$ である. 更に $dY^*(\lambda)$ の Fourier 変換を

$$B(A) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_A e^{2\pi i \lambda t}\, dt \right\} dY^*(\lambda)$$

とする. $f \in L^2(d\lambda)$ に対しその Fourier 変換を $\widetilde{f}$ とすれば

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dB(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{f}(\lambda)\, dY^*(\lambda) \qquad (\text{Parseval})$$

が成り立つ. 故に

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i \lambda t}\, dY(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i \lambda t}\, G(\lambda)\, dY^*(\lambda)$$

$$= \int_{-\infty}^{t} F(t-u)\, dB(u)$$

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

が得られる。このとき明らかに $M_t(X) \subset M_t(B)$ であるが G をうまく選んでやると

(2.3) $$M_t(X) = M_t(B), \qquad {}^\forall t$$

とできる.

次のことを注意する. $dF(\lambda)$ は 0 に関し対称 $(Y(A) = \overline{Y(-A)})$ だったから $Y^*(A) = \overline{Y^*(-A)}$ となり, $B(A)$ は実数値をとる。また $\|dB(t)\|^2 = dt$ となり, 前節に注意した独立増分性と合わせると, 結局 $B(t)$ は Brown 運動であることがわかる.

定理2.6 実正規定常過程 $\{X(t)\}$ に対し

(i) M-決定的 $\Longleftrightarrow$ 決定的

(ii) M-純非決定的 $\Longleftrightarrow$ 純非決定的

が成り立つ.

証明 (i) $(\Longrightarrow)$ $t > s$ とする. 任意の有界連続な $f(x_1, \cdots, x_n)$ (n も任意) と任意の組 $t_1 \leqq t_2 \leqq \cdots \leqq t_n \leqq t$ に対し, $f(X(t_1), \cdots, X(t_n)) \in L^2(\mathbb{B}_s)$ がいえればよい.[1] ところが $X(t_j) \in M_t = M_s \subset L^2(\mathbb{B}_s)$, 即ち $X(t_j)$ は $\mathbb{B}_s$-可測である. 故に $f(X(t_1), \cdots, X(t_n))$ は $\mathbb{B}_s$-可測で, $\in L^2(\mathbb{B}_s)$.

(i) $(\Longleftarrow)$ $t > s$ とし $X(t) \in M_s$ を示せば良い。ところが $X_t \in L^2(\mathbb{B}_t) = L^2(\mathbb{B}_s)$ だから

$$M_s \ni \mathrm{Proj}_{M_s} X(t) = E\{X(t) \mid \mathbb{B}_s\} = X(t).$$

(ii) $(\Longleftarrow)$ $L^2(\mathbb{B}_t) \supset M_t$ より明らか.

(ii) $(\Longrightarrow)$ (2.3) が成り立つように $B(t)$ を選べば $L^2(\mathbb{B}_t) = L^2(\mathbb{B}_t(B))$ となり, Brown 運動は純非決定的だから $\bigcap_{-\infty} L^2(\mathbb{B}_t) = C$. (証明終)

以上によりスペクトル測度 $dF(\lambda)$ が絶対連続で密度が (2.2) をみたすときは, 実正規定常過程 $\{X(t)\}$ は非決定的であり, 従ってその flow は Kolmogorov-flow であることがわかった。

§2.3 エルゴード性と混合性

重複ウィナー積分による展開の応用として次のことが示せる。

定理 2.7 可測な実正規定常過程 $\{X(t)\}$ の flow $\{T_t\}$ がエルゴード的であ

---

1) $L^2(\mathbb{B}_t)$ の元はこのような $f(X(t_1), \cdots, X(t_n))$ で近似される.

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

るためには，$\{X(t)\}$ のスペクトル函数 $F(\lambda)$ が連続なことが必要十分である．

証明　必要性：$F(\lambda)$ が $\lambda=\lambda_0$ で不連続としよう．

$$X(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{2\pi i\lambda t}\,dY(\lambda)$$

において $Y(\lambda)$ も $\lambda=\lambda_0$ で jump をもち，

$$z=Y(\lambda_0+0)-Y(\lambda_0-0)\in L^2(\Omega)$$

は $U_t z=e^{2\pi i\lambda_0 t}z$ をみたす。従つて $U_t|z|=|z|$ であり，一方，$E\{|z|^2\}=F(\lambda_0+0)-F(\lambda_0-0)>0$ だから $|z|$ は定数ではなく，$\{T_t\}$ はエルゴード的でないことになる。

十分性：$z\in L^2(\Omega)$ が有界で $\{T_t\}$-不変としよう。定理2.4により，

$$z=c+\sum_{k=1}^{\infty}\int\cdots\int g_k(\lambda_1,\cdots,\lambda_k)\,dY(\lambda_1)\cdots dY(\lambda_k)$$

ここに g_k は対称とする。

$$U_t z=c+\sum_{k=1}^{\infty}\int\cdots\int g_k(\lambda_1,\cdots,\lambda_k)e^{2\pi it\sum_1^k\lambda_j}\,dY(\lambda_1)\cdots dY(\lambda_k).$$

$U_t z=z$ により展開の一意性を使って

$$g_k(\lambda_1,\cdots,\lambda_k)=g_k(\lambda_1,\cdots,\lambda_k)e^{2\pi it\sum_1^k\lambda_j}.$$

故に超平面 $\sum_1^k\lambda_j=0$ の外では $g_k=0$．F が連続だから上の超平面の測度 (dF^k) は 0 である。即ち

$$g_k(\lambda_1,\cdots,\lambda_k)=0 \qquad a.e.$$

故に $z=c$ (a.e.) となってエルゴード性が示された。　　　　（証明終）

実正規定常過程 $\{X(t)\}$ の flow $\{T_t\}$ においては，混合性は位数に関係しない。

定理2.8　可測な実正規定常過程 $\{X(t)\}$ の flow $\{T_t\}$ に対し，次の３命題は互に同等である：

(i) $\{T_t\}$ は強混合（即ち１位の混合）．

(ii) $\{T_t\}$ はすべての位数の混合．

(iii) $\{X(t)\}$ の共分散 $\gamma(t)$ が[1)]

$$\lim_{t\to\infty}\gamma(t)=0.$$

---

1) $\gamma(t)$ は原点に関して対称である．

Sem. on Probab.
Vol.20　1964年
P1-130

<u>証明</u>　(i) $\Longrightarrow$ (iii)：

$$\lim_{t\to\infty}\gamma(t)=\lim_{t\to\infty}E\{X(t)X(0)\}=\lim_{t\to\infty}(U_tX(0),\,X(0))$$

$$=(X(0),\,1)^2=E\{X(0)\}^2=0.$$

(iii) $\Longrightarrow$ (ii)：r位の混合性を示す．$F_j(x_1,\cdots,x_k)$ $(0\leqq j\leqq r)$を有界連続函数とし，まず

(2.4)　　$f_j(\omega)=F_j(X(t_1,\omega),\cdots,X(t_k,\omega))$,　　$0\leqq j\leqq r$

の形の函数に対して定理1.12 (iii)の条件を示す．

(2.4) の $f_0,f_1,\cdots,f_r$ に対し

$$\left(\prod_0^r U_{t_j^n}f_j,\,1\right)=E\left\{\prod_0^r f_j(T_{t_j^n}\omega)\right\}$$

$$=E\left\{\prod_0^r F_j(X(t_1+t_j^n),\cdots,X(t_k+t_j^n))\right\}.$$

$(r+1)k$-次元確率ベクトル$(X(t_1+t_1^n),\cdots,X(t_k+t_1^n),\cdots,X(t_1+t_r^n),\cdots,X(t_k+t_r^n))$ の分布は，平均ベクトル0で次のような分散行列 Γ_n をもつ正規分布である：

$$\Gamma_n=\begin{pmatrix}\Gamma_{00}(n), & \Gamma_{01}(n), & \cdots, & \Gamma_{0r}(n)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \Gamma_{r0}(n), & \Gamma_{r1}(n), & \cdots, & \Gamma_{rr}(n)\end{pmatrix}$$

こゝに $\Gamma_{ij}(n)$ は $k\times k$-行列でその(ℓ,m)-元は

$$E\{X(t_\ell+t_i^n)X(t_m+t_j^n)\}$$
$$=\begin{cases}\gamma(t_\ell-t_m), & i=j\\ \gamma(t_\ell-t_m+t_j^n-t_i^n), & i\neq j.\end{cases}$$

$\Gamma_{jj}(n)$ $(0\leqq j\leqq n)$ は確率ベクトル$(X(t_1),\cdots,X(t_k))$ の分散行列Γに等しく，nにもjにも関係しない．$i\neq j$ に対しては仮定より$n\to\infty$ のとき $\Gamma_{ij}(n)$ の各元は0に収束する．従って

$$\lim_{n\to\infty}\Gamma_n=\begin{pmatrix}\Gamma & & 0\\ & \Gamma & \\ 0 & & \ddots\ \Gamma\end{pmatrix}.$$

これは $(X(t_1+t_1^n),\cdots,X(t_k-t_r^n))$ の分布の特性函数が$(X(t_1),\cdots,X(t_k))$ の特性函数の$(r+1)$乗に収束することを意味する．即ち$(X(t_1+t_1^n),\cdots,X(t_k-t_r^n))$の分布は$(X(t_1),\cdots,X(t_k))$ の分布の $r+1$ 個の直積に収束

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

する．故に

$$\lim_{n\to\infty} E\{\prod_0^r F_j(X(t_1+t_j^n),\cdots, X(t_k+t_j^n))\}$$

$$=\prod_0^r E\{F_j(X(t_1),\cdots, X(t_k))\}$$

$$=\prod_0^r (f_j, 1).$$

次に f_j $(0\leqq j\leqq r)$ を任意のΩ上の有界可測函数とする．任意の $\delta>0$ に対し (2.4)の形の $\hat{f}_j$ $(0\leqq j\leqq r)$ があつて

$$E\{|f_j-\hat{f}_j|\}<\delta, \qquad 0\leqq j\leqq r.$$

$$\left|(\prod_0^r U_{t_j^n} f_j, 1)-\prod_0^r (f_j, 1)\right|$$

(2.5)

$$\leqq \left|(\prod_0^r U_{t_j^n} f_j, 1)-(\prod_0^r U_{t_j^n}\hat{f}_j, 1)\right|+\left|(\prod_0^r U_{t_j^n}\hat{f}_j, 1)-\prod_0^r(\hat{f}_j, 1)\right|$$

$$+\left|\prod_0^r(\hat{f}_j, 1)-\prod_0^r(f_j, 1)\right|.$$

一般に

$$\left|\prod_0^r a_j-\prod_0^r b_j\right|\leqq\sum_{m=0}^r\left|\prod_{j=m}^r a_j\prod_{k=0}^{m-1} b_k-\prod_{j=m+1}^r a_j\prod_{k=0}^m b_k\right|$$

$$\leqq\sum_{m=0}^r\left|\prod_{j=m+1}^r a_j\prod_{k=0}^{m-1} b_k\right|\cdot|a_m-b_m|$$

が成り立つので，$|f_j|$, $|\hat{f}_j|\leqq M$ $(0\leqq j\leqq r)$ とすれば (2.5)の第1項 $\leqq(r+1)M^{r+1}\delta$，第3項 $\leqq(r+1)M^{r+1}\delta$ が得られる。第2項は上述より 0 に収束する。

(ii) ⟹ (i) は明らか。 (証明終)

系 スペクトル函数 $F(\lambda)$ が絶対連続 ($d\lambda$ に関し) であるような実正規定常過程の flow はすべての位数の混合性をもつ。

注意 特に $\{X(t)\}$ が純非決定的であれば，それはすべての位数の混合性をもつ。一方 [24] によれば，任意の $\varepsilon>0$ に対し

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}dF(\lambda)=O(|t|^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}), \qquad |t|\to\infty$$

となる原点に関して対称な特異（連続）な $dF(\lambda)$ が存在する。そのような$F(\lambda)$

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

をスペクトル函数にもつ実正規定常過程(存在は lemma 2.1)は上定理よりすべての位数の混合性をもつ。このように純非決定的とは縁遠い定常過程の flow でもすべての位数の混合性をもちうるのである。

§2.4 スペクトル

正規定常過程の flow のスペクトルの計算においては重複ウィナー積分による展開定理(われわれの場合は定理 2.4)が有効に使われる。

純非決定的な場合は前述のように Brown 運動で表現され，そのスペクトルは Brownian white noise の flow と同じ(即ち σ-ルベーグ・スペクトル)である。Brownian white noise の flow のスペクトルについては[15]を参照してほしい。ここではこのような典型的な場合は精しく立ち入らないことにして，特別な場合のスペクトルについて[10]に従って述べる。

$dF(\lambda)$ は R_1 上の特異(連続)な有限測度で原点に関し対称とする．その carier を X であらわす。X は原点に関して対称である。更に X の正の元の全体は有理係数について一次独立であることを仮定する．このような $dF(\lambda)$ をスペクトル測度にもつ実正規定常過程の flow のスペクトルを調べる。定理 2.4 における $\tilde{L}_k^2$ を考えよう。

$$\hat{X}^k = \{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k ;\ \lambda_j \in X,\quad 1 \leqq j \leqq k\}$$

とおく。$\hat{X}^k$ は dF^{*k} の carier である．対応

$$X^k \ni (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k) \to \lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k \in \hat{X}^k$$

は座標の置換を除いて 1 対 1 onto である。$g \in \tilde{L}_k^2$ に対し R_1 上の函数

$$\hat{g}(\lambda) = \begin{cases} g(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k), & \lambda = \lambda_1+\cdots+\lambda_k \in \hat{X}^k \\ 0, & \lambda \notin \hat{X}^k \end{cases}$$

を対応させる変換を $Rg = \hat{g}$ と書く．$\tilde{L}_k^2$ の元は対称な函数であることと関係

$$(2.6) \qquad \int_X \cdots \int_X |g(\lambda_1, \cdots, \lambda_k)|^2 dF(\lambda_1) \cdots dF(\lambda_k) = \int_{\hat{X}^k} |\hat{g}(\lambda)|^2 dF^{*k}(\lambda)$$

に注意すれば R は $\tilde{L}_k^2$ から $L^2(dF^{*k})$ への isomorphism であることがわかる。(2.6)式は，例えば $k=2$ のときは $\lambda = \lambda_1+\lambda_2$，$\mu = \lambda_2$ と変換して

$$\iint_{XX} |g(\lambda_1, \lambda_2)|^2 dF(\lambda_1) dF(\lambda_2) = \int_{\hat{X}^2} \int_X |\hat{g}(\lambda)|^2 dF(\lambda-\mu) dF(\mu)$$

$$= \int_{\hat{X}^2} |\hat{g}(\lambda)|^2 dF^{*2}(\lambda)$$

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

によって示される。

$\tilde{L}^2_k$ 上の $\{V_t\}$ は $\mathcal{R}$ によって $L^2(dF^{*k})$ 上のユニタリ作用系

$$\hat{V}_t\, g(\lambda) = e^{2\pi i t\lambda}\, g(\lambda)$$

にうつされる。

. $dF(\lambda)$ の連続性により

$$\int_{\chi j} dF^{*k}(\lambda) = 0\ , \qquad 1 \leqq j \leqq k-1$$

が容易に示せる。即ち dF^{*k} は互に特異である。

以上により $L^2(\Omega)\ominus C$ における $\{T_t\}$ の spectral type は，$d\rho(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} dF^{*k}$ を maximal spectral type とし，重複度 $m(\lambda)=1$ (a.e. λ $(d\rho(\lambda))$) であることがわかった。

定理2.9　その flow が単純スペクトルを持つような非正規定常過程が存在する。

上にのべた $dF(\lambda)$ に対し，$dF(\lambda)+dF^{*2}(\lambda)$ を考えると，非一様な spectral type の存在が示せるが，詳細は省略する。

定理2.4の展開とスペクトルの関係をもう少し深く調べる[1]　$\{X(t)\}$ のスペクトル測度 $dF(\lambda)$ は連続性だけを仮定して一般とする[2]　$g_1 \in \tilde{L}^2_1$，$g_1(\lambda)>0$ a.e. (dF) を任意にとると[3]

$$f_1(\omega) = I_1(g_1) = \int g_1(\lambda)\, dY(\lambda) \in H_1$$

$$U_t f_1(\omega) = \int e^{2\pi i\lambda t} g_1(\lambda)\, dY(\lambda)\ .$$

$\{U_t f_1\ ;\ -\infty < t < \infty\}$ の張る ($L^2(\Omega)$ の) 閉線形部分空間を $M(f_1)$ と書くことにすれば

$$M(f_1) = H_1\ .$$

実際，$M(f_1)$ と直交する元 $f \in H_1$ があるとすれば，

$$f = \int g(\lambda)\, dY(\lambda)\ , \qquad g \in \tilde{L}^2_1$$

$$\left|\int_B g_1(\lambda)\overline{g(\lambda)}\, dF(\lambda)\right| \leqq (f_1, f) = 0\ , \qquad \forall B \in \mathbb{B}^1$$

---

1) 以下定理2.10は九大における丸山教授のセミナーによる。

2) 勿論原点についての対称性は仮定する。

3) 例えば $g_1 = 1$. g_2 も同様。

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

となり $g(\lambda)=0$ a.e.(dF) となる.

次に任意に $g_2\in\tilde{L}_2^2$ をとり

$$f_2(\omega)=I_2(g_2)=\iint g_2(\lambda_1,\lambda_2)\,dY(\lambda_1)\,dY(\lambda_2)\in H_2$$

$$Z(g_2,\lambda)=\iint_{\lambda_1+\lambda_2\leqq\lambda} g_2(\lambda_1,\lambda_2)\,dY(\lambda_1)\,dY(\lambda_2)$$

即ち

$$Z(g_2,B)=\iint g_2(\lambda_1,\lambda_2)\,\chi_B(\lambda_1+\lambda_2)\,dY(\lambda_1)\,dY(\lambda_2),\quad B\in\mathbb{B}_1$$

とおけば $Z(g_2,\cdot)$ は彷徨測度である. そして

$$U_t f_2=\iint g_2(\lambda_1,\lambda_2)\,e^{2\pi i(\lambda_1+\lambda_2)t}\,dY(\lambda_1)\,dY(\lambda_2)$$

$$=\int e^{2\pi i\lambda t}\,dZ(g_2,\lambda)\ .$$

$\|dZ(g_2,\lambda)\|^2\prec dF^{*2}$ が示せる. 他方 $|g_2|\geqq c>0$ とすれば

$$\|Z(g_2,B)\|^2=\iint|g_2|^2\chi_B(\lambda_1+\lambda_2)\,dF^2\geqq c^2F^{*2}(B)$$

だから $\|dZ(g_2,\lambda)\|^2\sim dF^{*2}(\lambda)$ となる. $M(f_2)$ と直交する $f_2'\in H_2$ をとり

$$f_2'=I_2(g_2')=\iint g_2'(\lambda_1,\lambda_2)\,dY(\lambda_1)\,dY(\lambda_2);\quad g_2'\in\tilde{L}_2^2$$

とすれば

$$|E(Z(g_2,B)\overline{Z(g_2',B)})|=\left|\iint g_2(\lambda_1,\lambda_2)\overline{g_2'(\lambda_1,\lambda_2)}\,\chi_B(\lambda_1+\lambda_2)\,dF^2\right|$$

$$\leqq(f_2,f_2')=0\ .$$

以下同様に f_2'', f_2''', $\cdots$ をとり

$$H_2=M(f_2)\oplus M(f_2')\oplus M(f_2'')\oplus\cdots$$

とする. $f_3\in H_3$ 以下も同様にして

$$L^2(\Omega)=M(f_1)\oplus\{M(f_2)\oplus M(f_2')\oplus\cdots\}\oplus\{M(f_3)\oplus M(f_3')\oplus\cdots\}\oplus\cdots$$

とできる.

上の議論で $(f_2,f_2')=0$ は

(2.7) $\displaystyle\int g_2(\lambda_1,\lambda_2)\overline{g_2'(\lambda_1,\lambda_2)}\,F^2(d\lambda_1,d\lambda_2\,|\,\lambda_1+\lambda_2=\lambda)=0$[1]; a.e. λ

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

と同等であるが，もし $g_2 \equiv 1$ ととって(2.7)より $g_2' = 0$ (a.e.) が出れば f_2' 以下は出て来なくて，

$$H_2 = M(f_2).$$

定理2.9では $F^2(d\lambda_1, d\lambda_2 \mid \lambda_1+\lambda_2=\lambda) = \delta_{(\lambda_1^\circ, \lambda_2^\circ)}$ となり，上の場合にあたっている。3次以下も同様である。

もし $dF(\lambda)$ が絶対連続であれば，$dF^{*2}(\lambda)$, $dF^{*3}(\lambda), \cdots$ もすべて絶対連続となり，それらの carier は単調増大し全空間 R_1 をおおう。$dF(\lambda)$ を carier 以外では $dF^{*2}(\lambda), \cdots$ で補う（くり上げる）操作を行なえば結局，

<u>定理 2.10</u>　絶対連続なスペクトル測度をもつ実正規定常過程の flow は $L^2(\Omega) \ominus \mathbb{C}$ で σ-ルベーグ・スペクトルをもつ。

<u>定理 2.11</u>　連続なスペクトル函数 $F(\lambda)$ をもつ実正規定常過程の flow のスペクトルの重複度 $m(\lambda)$ は，恒等的に 1 に等しいか，でなければ有界でない。

<u>証明</u>　もし $\rho = \sum_1^\infty F^{*k}$ の正測度の集合で $m(\lambda) > 1$ であるとすれば，$f_1 \in H_{k_1}$, $f_2 \in H_{k_2}$ ($k_1 \neq k_2$ または $k_1 = k_2$) があって，$M(f_1) \perp M(f_2)$. 更に $\{U_t\}$ はそれぞれの上で同じ spectral type ρ_0 をもつ。

$$f_i = I_{k_i}(g_i), \quad g_i \in \tilde{L}^2_{k_i} \qquad (i = 1, 2)$$

とする．$p+q=s$ のとき

$$g_{p,q} = g_1(\lambda_1^{(1)}, \cdots, \lambda_{k_1}^{(1)}) \cdots g_1(\lambda_1^{(p)}, \cdots, \lambda_{k_1}^{(p)}) g_2(\lambda_1^{(p+1)}, \cdots, \lambda_{k_2}^{(p+1)}) \cdots g_2(\lambda_1^{(p+q)}, \cdots, \lambda_{k_2}^{(p+q)})$$

に対し，$f_{p,q} = I_s(\tilde{g}_{p,q})$ とすれば，$M(f_{p,q})$ は (p,q) の組が違えば互に直交し，各々の上では $\{U_t\}$ の spectral type は ρ_0^{*s} である。故にある正測度の集合で $m(\lambda) \geqq s+1$.　（証明終）

---

1) $F^2(d\lambda_1, d\lambda_2 \mid \lambda_1+\lambda_2=\lambda)$ は dF^2 の条件 $(\lambda_1+\lambda_2=\lambda)$ つき測度。

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

第３章　抽象ルベーグ空間

§3.1 定　　義

定義3.1　確率空間 $(\Omega, \mathbb{B}, P)$ において，可算系 $\Gamma = \{G_n\} \subset \mathbb{B}$ があって

(S.1)　$\forall A \in \mathbb{B}$, $\exists B \in \mathcal{B}(\Gamma)$[1]: $B \supset A$, $P(B-A) = 0$

(S.2)　$\forall x, y \in \Omega$, $x \neq y$, $\exists G_n \in \Gamma$: $x \in G_n$, $y \notin G_n$ または $x \notin G_n$, $y \in G_n$,

をみたすとき，$(\Omega, \mathbb{B}, P)$ は真に可分であるといい，Γ をその base という．

構成的立場から考えると，Γ を含む最小の algebra 上の測度 P^* から Caratheodory 外測度 P_e^* を作り，P_e^*-可測な集合に $P = P_e^*$ で測度を定めるが，このとき P_e^*-可測な集合の全体 $\mathcal{L}(\Gamma)$[2] が $\mathbb{B}$ であることを (S.1) は意味する．即ち $\mathbb{B}$ は $\mathcal{B}(\Gamma)$ の完備化である．従って (S.1) は

(S.1′)　$\forall A \in \mathbb{B}$, $\exists A_1, A_2 \in \mathcal{B}(\Gamma)$: $A_1 \subset A \subset A_2$, $P(A_2 - A_1) = 0$

と同等である．

定義3.2　真に可分な Ω の base $\Gamma = \{G_n\}$ が条件：

(C) $F_n = G_n$ または G_n^c とするとき，すべての組 $\{F_n\}$ に対し $\bigcap_n F_n \neq \phi$[3]

をみたすとき Ω は完全であるという．

注意1　base $\Gamma = \{G_n\}$ に対し F_n を上のようにおき

$$E_0 = \Omega, \quad E_n = F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n, \quad n = 1, 2, \cdots$$

とおく。くわしくは

$$E_{11} = G_1, \quad E_{12} = G_1^c,$$
$$E_{21} = G_1 \cap G_2, \; E_{22} = G_1 \cap G_2^c, \; E_{23} = G_1^c \cap G_2, \; E_{24} = G_1^c \cap G_2^c,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

とおくと，各 n に対し $E_{n1}, E_{n2}, \cdots, E_{n2^n}$ は互に交わらず，従って $\{E_{n1}, E_{n2}, \cdots, E_{n2^n}\}$ は Ω の分割になる．$E_{n1}, \cdots, E_{n2^n}$ を代表して E_n と書くわけである．$\Delta = \{E_n\}$ も Ω の base になるが，これは semi-algebra

---

1) $\mathcal{B}(\Gamma)$ は Γ を含む最小の σ-algebra．

2) Γ で定まるルベーグ・クラスという．

3) (S.2) より $\bigcap_n F_n$ は一点集合である。

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

（Ω を含む semi-ring）である．Δ の形のものを一般に乗積 base という．乗積 base Δ 上の有限加法的測度は Δ を含む最小の algebra（Δ の互に素な有限個の元の和の全体）上の有限加法的測度を一意に定める．もし base Γ に対して条件 (C) が成り立てば，[1] これは σ-加法的になり，$\mathcal{L}(\Gamma)=\mathcal{L}(\Delta)$ 上の測度に一意に拡張される．

一般に $(\Omega, \mathbb{B}, P)$ において外測度 $P_e(A)=\inf\{P(B);\ A\subset B\in\mathbb{B}\}=1$ の集合 A に，$\mathbb{B}_A=\{A\cap B;\ B\in\mathbb{B}\}$，$P_A(C)=P_e(C)$，$C\in\mathbb{B}_A$ で測度を定めて得られる確率空間 $(A, \mathbb{B}_A, P_A)$ を $(\Omega, \mathbb{B}, P)$ から自然に導かれる部分空間という．

定義 3.3　真に可分な確率空間 (Ω, Γ, P)[2] の完全拡大 $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\Gamma}, \widetilde{P})$ とは

(i)　$\widetilde{\Omega}$ は $\widetilde{\Gamma}$ に関し真に可分で完全，

(ii)　Ω は $\widetilde{\Omega}$ から自然に導かれる部分空間（従って $\widetilde{P}_e(\Omega)=1$），

(iii)　$\Gamma=\widetilde{\Gamma}\cap\Omega$，

をみたす確率空間をいう．Ω と isomorphic mod 0 な Ω' の完全拡大をも Ω の完全拡大という．

Lemma 3.1　真に可分な確率空間 (Ω, Γ, P) の完全拡大はつねに存在し，isomorphic mod 0 なものを除いて一意である．

証明　$\Gamma=\{G_n\}$ を base とし Ω から $\widetilde{\Omega}=\{0,1\}^{\aleph_0}$ への対応

$$\gamma(\omega)=\{\chi_{G_n}(\omega);\ n=1,2,\cdots\}$$

を考える．γ は Ω から $\widetilde{\Omega}$ の中への 1 対 1 写像である．$\widetilde{G}_n=\{\widetilde{\omega};\ \widetilde{\omega}_n=1\}$ とおくと，$\widetilde{\Gamma}=\{\widetilde{G}_n\}$ は (S.2) と (C) をみたす．矩形集合に対し

$$\widetilde{P}\Big(\big(\bigcap_{i=1}^{r}\widetilde{G}_{n_i}\big)\cap\big(\bigcap_{i=r+1}^{r+s}\widetilde{G}_{n_i}^{c}\big)\Big)=P\Big(\big(\bigcap_{i=1}^{r}G_{n_i}\big)\cap\big(\bigcap_{i=r+1}^{r+s}G_{n_i}^{c}\big)\Big) \tag{3.1}$$

と定義すると $\widetilde{P}$ は矩形集合の全体（従って $\widetilde{\Gamma}$ を含む最小の algebra）の上で有限加法的になる．注意 1 により $\widetilde{P}$ は σ-加法的であつて，拡張され，結局，真に可分で完全な $(\widetilde{\Omega}, \mathcal{L}(\widetilde{\Gamma}), \widetilde{P})$ が得られる．$\Omega'=\gamma(\Omega)\subset\widetilde{\Omega}$，$\Gamma'=\widetilde{\Gamma}\cap\Omega'$ とおけば，$\widetilde{P}_e(\Omega')=1$ であり，部分空間 $(\Omega', \mathcal{L}(\Gamma'), P')$ が自然に導かれる．$(\Omega, \mathcal{L}(\Gamma), P)$ と $(\Omega', \mathcal{L}(\Gamma'), P')$ は γ により，isomorphic である．[3] 即ち

---

1) 明らかに Δ に対しては (C) は成立しない．Γ が (C) をみたすことは，Γ から作った Δ が条件：(C′) $\forall n, \bigcap_{k=1}^{n}E_k\neq\phi\Rightarrow\bigcap_{1}^{\infty}E_k\neq\phi$，をみたすことと同等である．

2) $\mathbb{B}$ は Γ から完全に定まるので $\mathbb{B}$ の代りに Γ を書くことがある．

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

$\widetilde{\Omega}$ は Ω の完全拡大である.

一意性の証明. Ω の任意の完全拡大 $\widetilde{\Omega}$ に対し (3.1) が成り立つ. 確率空間 $(\widetilde{\Omega}, \mathcal{L}(\widetilde{\Gamma}), \widetilde{P})$ は (3.1) の左辺の値から一意に定まるので, Ω の2つの完全拡大 $\widetilde{\Omega}_1, \widetilde{\Omega}_2$ は互に *isomorphic mod 0* となる. (証明終)

一般に Ω はその完全拡大 $\widetilde{\Omega}$ において可測であるかどうかはわからない. しかし次の事は成り立つ。

<u>*Lemma 3.2*</u> Ω がある *base* Γ_1 による完全拡大 $\widetilde{\Omega}_1$ において可測であれば, 他の *base* Γ_2 による完全拡大 $\widetilde{\Omega}_2$ においても可測である.

<u>証明</u> $\Gamma_i=\{G_n^i\}$, $i=1,2$ とすれば, $\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2=\{G_n^1, G_n^2\}$ は Ω の *base* で完全拡大 $\widetilde{\Omega}$ を定める. 各 G_n^2 は Ω の可測集合だから, $\widetilde{\Omega}_1$ の可測集合 $\hat{G}_n^2$ があって[4] $G_n^2=\Omega\cap\hat{G}_n^2$ となる. $\widetilde{\Omega}_1$ の *base* $\hat{\Gamma}=\{\widetilde{G}_n^1, \hat{G}_n^2\}$ による完全拡大 $\hat{\Omega}_1$ と $\widetilde{\Omega}$ は

$$\varphi:\ \widetilde{G}_n^1 \longrightarrow G_n^1,\quad \hat{G}_n^2 \longrightarrow G_n^2$$

によって1対1に対応する. φ が *isomorphism* であり, $\varphi\Omega=\Omega$ であることは容易にわかる。

$$F_n^i=G_n^i \quad または \quad \Omega-G_n^i, \qquad i=1,2, \quad n=1,2,\cdots$$

とし,

$$\widetilde{F}_n^1=\begin{cases}\widetilde{G}_n^1, & F_n^1=G_n^1 \text{ のとき}\\ \widetilde{\Omega}_1-\widetilde{G}_n^1, & F_n^1=\Omega-G_n^1 \text{ のとき},\end{cases}$$

$$\hat{F}_n^2=\begin{cases}\hat{G}_n^2, & F_n^2=G_n^2 \text{ のとき}\\ \widetilde{\Omega}_1-\hat{G}_n^2, & F_n^2=\Omega-G_n^2 \text{ のとき},\end{cases}$$

とおけば,

$$\hat{\Omega}_1=\{(\widetilde{F}_n^1, \hat{F}_m^2)\}\supset\widetilde{\Omega}_1=\{(\widetilde{F}_n^1, \hat{F}_m^2);\ (\widetilde{F}_n^1)=\widetilde{\omega}_1\in\hat{F}_m^2,\ \forall m\}^{5)}$$

だから

$$\begin{aligned}A_1=\varphi(\widetilde{\Omega}_1)&=\{(F_n^1, F_m^2);\ (\widetilde{F}_n^1)=\widetilde{\omega}_1\in\hat{F}_m^2,\ \forall m\}\\ &=\{(F_n^1, F_m^2);\ \forall m \text{ に対し},\ F_m^2=G_m^2 \text{ かつ } \widetilde{\omega}_1\in\hat{F}_m^2,\\ &\qquad \text{または}\quad F_m^2=\Omega-G_m^2 \text{ かつ } \widetilde{\omega}_1\in\hat{F}_m^2\}\end{aligned}$$

---

3) このような時に Ω は $\widetilde{\Omega}$ にうめこまれるという.

4) $\hat{G}_n^2$ は一意には定まらないが一つ固定する.

5) $(\widetilde{F}_n^1;\ n=1,2,\cdots)$ は $\widetilde{\Omega}_1$ の一点 $\widetilde{\omega}_1$ を定める. その意味で $(\widetilde{F}_n^1)=\widetilde{\omega}_1$ とあらわす. $(\widetilde{F}_n^1, \hat{F}_m^2)$ なども同様.

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

となり A_1 は $\widetilde{\Omega}$ で可測である.[1] 従って $\widetilde{\Omega}_1$ は $\hat{\widetilde{\Omega}}_1$ で可測となる。仮定より Ω は $\widetilde{\Omega}_1$ で可測だから，Ω は A_1 従って $\widetilde{\Omega}$ で可測である．1と2を入れかえて同様に A_2 を定めると，A_2 は $\widetilde{\Omega}$ で可測となる．Ω は $\widetilde{\Omega}$ で可測だから A_2 でも可測となり，従って $\widetilde{\Omega}_2$ で可測である． （証明終）

<u>定義3.4</u> 確率空間 $(\Omega, \mathbb{B}, P)$ が<u>抽象ルベーグ空間</u>[2] であるとは，(i) 真に可分，(ii) 完全拡大において Ω が可測（即ち Ω が $mod\ 0$ で完全）であることをいう。

<u>注意2</u> ルベーグ空間の測度 P は，乗積 $base$ 上の有限加法的測度から一意に定まる（注意1参照）。

<u>§3.2 基本的性質</u>

抽象ルベーグ空間 $(\Omega, \mathbb{B}, P)$ の可測部分集合 $A \in \mathbb{B}$，$P(A) > 0$ に対し

$$\mathbb{B}_A = \{B;\ A \supset B \in \mathbb{B}\}, \quad P_A(B) = P(B)/P(A)$$

とおけば，$(A, \mathbb{B}_A, P_A)$ はルベーグ空間である。実際，Ω の $base\ \Gamma$ に対し $A \cap \Gamma$ は A の $base$ になり，完全拡大 $\widetilde{A}(A \cap \Gamma)$ は $\widetilde{\Omega}(\Gamma)$[3] と自然に1対1の対応がつく。その対応で A は不変であり，$\mathcal{B}(\widetilde{\Gamma})$ は $\mathcal{B}(\widetilde{\Gamma \cap A})$ と対応し，$\mathcal{L}(\widetilde{\Gamma})$ は $\mathcal{L}(\widetilde{\Gamma \cap A})$ に $into$ に対応する。従って $A \in \mathcal{L}(\widetilde{\Gamma \cap A})$ である。

逆に，真に可分な Ω の部分集合 A がルベーグ空間であれば，[4] A は Ω で可測である。実際，$\Omega_0 \in \mathbb{B}$ があって，$A \subset \Omega_0$，$P(\Omega_0) = P_e(A)$ だから一般性を失わず $P_e(A) = 1$ としてよい。Ω の完全拡大 $\widetilde{\Omega}$ で $\widetilde{P}_e(A) = 1$ だから，$\widetilde{\Omega}$ は A の完全拡大でもある。従って A は $\widetilde{\Omega}$ で可測，故に $A = A \cap \Omega$ は Ω で可測である．

<u>定理3.1</u> 真に可分な確率空間 A がルベーグ空間であるためには，A を含む任意の真に可分な確率空間 Ω において A が可測であることが必要十分である．

$I = [0,1]$ 上でルベーグ測度 dx と dx-可測な集合全体 $\mathcal{B}_I$ を考える．

---

1) 以上には Ω が $\widetilde{\Omega}_1$ で可測であることを使っていない。

2) 単にルベーグ空間ともいう．$P(\Omega) = 1$ は本質的でない。$P(\Omega) < \infty$ であればよい。

3) $\widetilde{\Omega}(\Gamma)$ は Ω の Γ による完全拡大．

4) Ω から導かれた測度空間として。

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

定理3.2 atom[1] のないルベーグ空間$(\Omega, \mathcal{B}, P)$は$(I, \mathcal{B}_I, dx)$ と isomorphic mod 0 である。

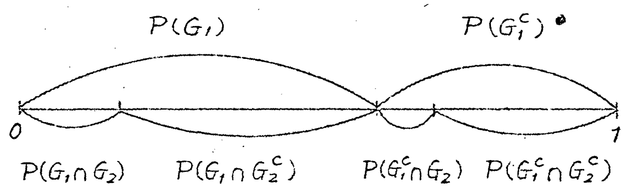
証明 完全拡大 $\tilde{\Omega}$ について証明できれば，Ω は $\tilde{\Omega}$ の確率1の可測集合だから I と isomorphic mod 0 になる。従って最初から Ω は完全と仮定してよい。Δを乗積baseとする。$\Delta \ni E_n$ が $\Delta \ni E_{n-1} \supset E_n$ に対し

$$P(E_{n-1}) > 0 \ , \quad P(E_n) = 0$$

をみたすのは可算個だから，それらの和集合を Ω_1 とすれば $P(\Omega_1) = 0$． $\Omega_0 = \Omega - \Omega_1$ に属する任意の $\omega = \bigcap_n E_n$ は

$$P(E_n) > 0 \ , \quad \forall n$$

をみたす。Iを下図のように区間に分割し，それぞれ E_n に自然に対応づける：



上の分割の分点xは2点にかぞえて $x-$，$x+$と書き

$$\begin{aligned} \varphi :\ & G_1 \to [0, P(G_1)-], \quad G_1^c \to [P(G_1)+,\ 1] \\ & G_1 \cap G_2 \to [0, P(G_1 \cap G_2)-], \quad G_1 \cap G_2^c \to [P(G_1 \cap G_2)+,\ P(G_1)-], \\ & G_1^c \cap G_2 \to [P(G_1)+,\ P(G_1) + P(G_1^c \cap G_2)-], \\ & G_1^c \cap G_2^c \to [P(G_1) + P(G_1^c \cap G_2)+,\ 1] \\ & \cdots\cdots\cdots . \end{aligned}$$

一般に $\varphi(E_n) = [x_n+,\ y_n-]$ と書く。Iに上のように可算個の点をつけ加へ（可算個の点を2点と考えた）た集合を$\tilde{I}$とすれば，$\tilde{I}$はIの完全拡大である．φは Ω_0 を$\tilde{I}$の上に1対1にうつす。実際 $\Omega_0 \ni \omega = \bigcap_n E_n$ に対し，E_n は $P(E_n) > 0$だから或る区間 $J_n = [x_n+,\ y_n-]$ に対応し，$P(E_n) \to 0$ だから一点 $x = \bigcap_n J_n \in \tilde{I}$ がきまる．即ち $\varphi(\omega) = x$． $\varphi(\omega) = \varphi(\omega')$であれば $\varphi(\omega) \in \bigcap_n J_n$ とするとき，すべてのnに対し $\varphi^{-1}(J_n) \ni \omega, \omega'$ だから $\omega = \omega'$． $\tilde{I} \ni x = \bigcap_n J_n$，$J_n = [x_n+,\ y_n-]$に対しすべての$n$で $P(\varphi^{-1}(J_n)) = |y_n - x_n| > 0$ だから $\bigcap_n \varphi^{-1}(J_n) = \omega \in \Omega_0$ が定まり，明らかに $\varphi(\omega) = x$．上の対応では分点$\{x_n, y_n\}$ に2点（x_n+（y_n+） と x_n-（y_n-）に対応する点）が対応する

---

1) $P(\{\omega\}) > 0$ なる点 $\omega \in \Omega$ を atom という。

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

ので，例えば $\Omega_2=\{\varphi^{-1}(x_n-);\ x_n$ は分点全体を動く$\}$ として $\Omega_3=\Omega_0-\Omega_2$ とすれば $P(\Omega_3)=1$ で φ は Ω_3 から I の上への1対1写像になる．φ が $\mathbb{B}\cap\Omega_3$ から $\mathbb{B}_I$ への isomorphism であることは前節注意より明らかである．

（証明終）

一般のルベーグ空間に対しては次のようになっていることが上の定理よりわかる。ルベーグ空間 Ω の atom を $\omega_1, \omega_2, \cdots$ とし，その確率を $P(\omega_n)=p_n$，$q=\sum_n p_n$ とすれば，Ω は区間 $[0, 1-q]$ に確率 $p_1, p_2, \cdots$ をもつ高々可算個の点をつけ加えた空間に isomorphic mod 0 である．

次の2定理は応用上有効である．証明はいずれも [34] を参照してほしい。

<u>定理3.3</u> Ω をルベーグ空間，Ω' を真に可分な確率空間とする．

(i) φ が Ω から Ω' への1対1 homomorphism であれば，φ は isomorphism となり，従って Ω' はルベーグ空間である．

(ii) Ω と Ω' が isomorphic mod 0 であれば Ω' はルベーグ空間である．

<u>定理3.4</u> ルベーグ空間 Ω の可測集合の可算系 Γ が（S.2）をみたせば，Γ は Ω の base である．

<u>注意</u> ルベーグ空間 $(\Omega, \mathbb{B}, P)$ の測度代数 $(\hat{\mathbb{B}}, P)$[1] に $\rho(A, B)=P(A\ominus B)$ によって metrical structure が定義されるが，$(\hat{\mathbb{B}}, \rho)$ は完備，可分な距離空間になる。2つのルベーグ空間 $(\Omega_1, \mathbb{B}_1, P_1)$ と $(\Omega_2, \mathbb{B}_2, P_2)$ が isomorphic mod 0 であれば，それぞれの metrical structure $(\hat{\mathbb{B}}_1, \rho_1)$ と $(\hat{\mathbb{B}}_2, \rho_2)$ は自然な対応で isomorphic（1対1，onto 対応がつき，距離と union 及び intersection operation が保存される）である．逆に $(\hat{\mathbb{B}}_1, \rho_1)$ と $(\hat{\mathbb{B}}_2, \rho_2)$ の間の isomorphism は Ω_1 と Ω_2 の間の isomorphism mod 0 を導く。この意味で，2つのルベーグ空間は，もし isomorphic mod 0 であれば，metrical type が等しいといってもよい．

§3.3 ルベーグ空間の例

<u>例1</u> $\Omega=\{\omega_n;\ n=1, 2, \cdots\}$，$P(\omega_n)>0$，$\sum_n P(\omega_n)=1$

<u>例2</u> $\Omega=R^n$，P: 確率分布，$\mathbb{B}$: Borel 集合全体の完備化．特に（[0,

---

1) $\mathbb{B}$ の mod 0 で等しい集合のクラスの集りを $\hat{\mathbb{B}}$ と書く．測度代数については [15] 参照。

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

1], dx).

例3. Ω: compact な距離空間, $\mathcal{B}$: 閉集合全体より生成される完備な σ-algebra, P: $\mathcal{B}$上の確率測度. ルベーグ空間であることは次のように示される. atom がないと仮定してよい。Ωで稠密な可算個の点$\{\omega_n\}$と$\varepsilon_k \downarrow 0$に対し, 中心$\omega_n$, 半径$\varepsilon_k$の球を$U_n^k$とする。$P(\partial U_n^k)=0$ $\forall k, n$, としておいてよい.

$$\Omega=\bigcup_{j=1}^{n_1} U_j^1=\bigcup_{j=1}^{n_2} U_j^2=\cdots\cdot$$

に対し

$$\Omega=\bigcap_{j=1}^{n_1}(U_j^1\cup U_j^{1c})=\bigcup(V_1^1\cap V_2^1\cap\cdots\cap V_{n_1}^1)$$

とおく, ここに$V_j^1=U_j$またはU_j^cである。$k\geqq 2$に対しても同様にV_j^kを定め, その和でΩをあらわしておく: $\Omega=\bigcup(V_1^k\cap\cdots\cap V_{n_k}^k)$. $F_k=V_1^k\cap\cdots\cap V_{n_k}^k$とおくと, $F_1\cap F_2\cap\cdots\cap F_n$の直径は高々$2\varepsilon_n$だから, もし

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n} F_k\right)>0, \qquad \forall n\geqq 1$$

であれば, 一点$\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k=\{\omega\}$が定まる. このことを使えば定理3.2の証明を若干修正して[1], Ωが$[0,1]$と isomorphic mod 0 であることが示される.

例4 確率空間$(\Omega,\mathcal{B},P)$において, $P(\Omega_1)>0$, $\Omega_1\subset\Omega_2\subset\cdots$, $\Omega=\bigcup_n \Omega_n$とし, Ω_nの上に$\mathcal{B}$, Pを制限したものを$\mathcal{B}_n$, P_nとする. すべてのnに対し$(\Omega_n,\mathcal{B}_n,P_n)$がルベーグ空間（必ずしも$P_n(\Omega_n)=1$でない）であれば, $(\Omega,\mathcal{B},P)$もルベーグ空間である。従って σ-compact な距離空間は$\mathcal{B}$, Pを前例のように取るとルベーグ空間になる.

例5 Ω:完備可分な距離空間, $\mathcal{B}$, Pは例3と同様, 特に$\Omega=R^{\infty}$を含む。

実際, 例3と同様にU_n^k（閉球とする）を定義すれば, 任意の$\delta_0>0$に対し, $n_1, n_2, \cdots$があって

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{n_k} U_n^k\right)\geqq 1-\delta_0 2^{-k}, \qquad k=1,2,\cdots\cdot .$$

$F_k=\bigcup_{n=1}^{n_k} U_n^k$, $\Omega_0=\bigcap_{k\geqq 1} F_k$とおけば, Ω_0は compact で$P(\Omega_0)\geqq 1-\delta_0$. $\delta_k\downarrow 0$に対し同様にΩ_kを定めれば, $P(\Omega-\Omega_k)\to 0$. 各Ω_kは compact だから

---

1) $[0,1]$を第1回はn_1個の区間に, 第2回はその各々をn_2個の区間に分割する.

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

$\Omega' = \bigcup_{k=0}^{\infty} \Omega_k$ は σ-compact，従ってルベーグ空間である。しかも Ω と Ω' は isomorphic mod 0 だから，Ω はルベーグ空間である．

§3.4 可測分割

空間 Ω の分割とは，相交わらない集合の集まりで Ω を被うものをいう．

定義 3.5 (i) 分割 ζ の元の任意の和集合を ζ-集合という．

(ii) 分割 ζ の base とは，可測な ζ-集合の可算系 $\Sigma = \{S_n\}$ であって条件：

(M) $\forall C_1, C_2 \in \zeta,\ C_1 \neq C_2,\ \exists S_n \in \Sigma:\ C_1 \subset S_n,\ C_2 \subset S_n^c$，または
$C_1 \subset S_n^c,\ C_2 \subset S_n$，

をみたすものをいう。

(iii) base をもつ分割は可測といわれる．

注意 可測分割の元は可測である．

任意の集合族 $\Sigma = \{S_\lambda\}$ に対し，$R_\lambda = S_\lambda$ または S_λ^c とおくと $\zeta = \{C;\ C = \bigcap_\lambda R_\lambda\}$ は Ω の分割である．これを $\zeta(\Sigma)$ と書き，Σ の生成する分割と呼ぶ。時に Σ が可測集合の可算系であれば，$\zeta(\Sigma)$ は可測分割，Σ はその base になる．確率変数（homomorphism）も分割を生成する。例えば $X(\omega)$ を Ω 上の実確率変数とすれば，X は Ω の可測分割 $\zeta(X) = \{C_\alpha;\ C_\alpha = X^{-1}(\alpha),\ \alpha \in R^1\}$ を定める．可分な空間の値をとる確率変数によって定まる分割は可測である．確率変数の可算系についても同様である．

ルベーグ空間 Ω の可測分割の集合に order を入れる。可測分割 ζ' が可測分割 ζ の細分（即ち ζ の元はすべて ζ'-集合）であれば

$$\zeta \leq \zeta'$$

と書く。

$$\zeta \leq \zeta' \quad mod\ 0$$

とは，$P(N) = 0$ となる N があって $\zeta \cap N^c \leq \zeta' \cap N^c$ となることである．

任意の可測分割の族 $\{\zeta_\lambda;\ \lambda \in \Lambda\}$ に対し，可測な ζ_λ-集合の全体（$\lambda \in \Lambda$ も動かして）で ρ-稠密な可算系[1] Σ の生成する分割 $\zeta = \zeta(\Sigma)$ は可測であり，次の性質をもつ．

(i) $\zeta \geq \zeta_\lambda \quad mod\ 0 \qquad \forall \lambda \in \Lambda$

---

1) ρ-可分な $\mathcal{B}$ の部分集合だから ρ-可分．

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

(ii) 可測分割 $\zeta' \geq \zeta_\lambda \mod 0 \quad \forall\lambda\in\Lambda \Rightarrow \zeta' \geq \zeta \mod 0$.

この ζ を $\{\zeta_\lambda\}$ の<u>上限</u>と呼び $\zeta = \bigvee_{\lambda\in\Lambda} \zeta_\lambda$ と書く.

(i) の証明: ζ_λ の base を $\Sigma_\lambda = \{S_{\lambda n}\}$ とする。任意の $S_{\lambda n}$ に対し $S'_{\lambda n} \in \mathcal{B}(\Sigma)$ があって $\rho(S_{\lambda n}, S'_{\lambda n}) = 0$. 可測分割 $\zeta'_\lambda = \zeta(\Sigma'_\lambda)$, $\Sigma'_\lambda = \{S'_{\lambda n}\}$ は $\zeta'_\lambda = \zeta_\lambda \mod 0$ [1] となる。ところが $\zeta \geq \zeta'_\lambda$ だから (i) を得る.

(ii) の証明: すべての $S \in \Sigma$ に対し, $\rho(S, S') = 0$ となる ζ'-集合 S' がある. このような S' の全体 Σ' (可算系) に対し $\zeta'' = \zeta(\Sigma')$ は $\zeta'' = \zeta \mod 0$ である。ところが, $\zeta' \geq \zeta''$ だから (ii) を得る.

すべての λ に対し $\zeta' \leq \zeta_\lambda \mod 0$ をみたす可測分割の上限 ζ は次の性質をもつ. これを<u>下限</u>と呼び, $\zeta = \bigwedge_{\lambda\in\Lambda} \zeta_\lambda$ と書く.

(i) $\zeta \leq \zeta_\lambda \mod 0 \quad \forall\lambda\in\Lambda$

(ii) 可測分割 $\zeta' \leq \zeta_\lambda \mod 0 \ \forall\lambda\in\Lambda \Rightarrow \zeta' \leq \zeta \mod 0$.

任意の分割 ζ に対しその<u>可測covering</u> と呼ばれる, 次の性質をもつ可測分割 ζ' が存在する。

(i) $\zeta' \leq \zeta \mod 0$

(ii) ζ'': 可測, $\zeta'' \leq \zeta \mod 0 \Rightarrow \zeta'' \leq \zeta' \mod 0$.

実際, ζ' は $\zeta'' \leq \zeta \mod 0$ をみたす可測分割 ζ'' の上限として定まる。ζ が可測であれば当然 $\zeta' = \zeta$ となる。

Ω の個々の点への分割((S.2)により可測)を ε, 唯一つの元 Ω をもつ trivial な分割を ν であらわす。

可測な ζ-集合の全体 $\mathbb{B}(\zeta)$ は明らかに σ-algebra をなす。その完備化を $\overline{\mathbb{B}}(\zeta)$ であらわせば, 次の定理が成り立つ。

<u>定理 3.5</u> (i) $\overline{\mathbb{B}}(\zeta) \subset \overline{\mathbb{B}}(\zeta') \Longleftrightarrow \zeta \leq \zeta' \mod 0$.

(ii) 完備な σ-algebra $\mathbb{B}_0 \subset \mathbb{B}$ に対し可測分割 ζ があって, $\mathbb{B}_0 = \overline{\mathbb{B}}(\zeta)$.

(iii) ζ' が ζ の可測 covering であれば, $\overline{\mathbb{B}}(\zeta') = \overline{\mathbb{B}}(\zeta)$.

(iv) $\overline{\mathbb{B}}(\nu) = \mathcal{Q}$, $\overline{\mathbb{B}}(\varepsilon) = \mathbb{B}$.

(v) $\overline{\mathbb{B}}(\bigvee_\lambda \zeta_\lambda) = \bigvee_\lambda \overline{\mathbb{B}}(\zeta_\lambda)$, $\overline{\mathbb{B}}(\bigwedge_\lambda \zeta_\lambda) = \bigcap_\lambda \overline{\mathbb{B}}(\zeta_\lambda)$.

<u>証明</u> (ii) 以外は定義より明らか. (ii) を示す。$\mathbb{B}_0$ の ρ-稠密な可算部分集合 Σ の生成する可測分割 $\zeta = \zeta(\Sigma)$ が求めるものである。実際 $\mathbb{B}_0 = \overline{\mathcal{B}(\Sigma)}$ [2] $= \overline{\mathbb{B}}(\zeta)$.

---

1) ζ_λ と ζ'_λ は集合 $\bigcup_n (S_{\lambda n} \ominus S'_{\lambda n})$ 上で異なるが, この集合の確率は 0.

2) $\mathcal{B}(\Sigma)$ の完備化.

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

（証明終）

(i) より，$\mathbb{B}(\xi)=\mathbb{B}(\xi') \Longleftrightarrow \xi=\xi' \mod 0$，が出る。これと (ii) を合わせると，$\mathbb{B}$の完備な sub-σ-algebra と可測分割とが1対1に対応することがわかる．

§3.5 商空間と測度の標準系

分割ξの元を点と考える空間を Ω/ξ と書く。Ωから Ω/ξ への自然な写像を Φ_ξ とする：

$$\Phi_\xi(\omega)=C \quad , \quad \omega\in C\in\xi .$$

Ω/ξ 上で $\mathbb{B}_\xi=\{Z;\ \Phi_\xi^{-1}Z\in\mathbb{B}\}=\Phi_\xi\mathbb{B}(\xi)$，$P_\xi(Z)=P(\Phi_\xi^{-1}Z)$ と定義すれば，$(\Omega/\xi,\ \mathbb{B}_\xi,\ P_\xi)$ は確率空間となり，Φ_ξ は onto homomorphism である．$(\Omega/\xi,\ \mathbb{B}_\xi,\ P_\xi)$ をξによる<u>商空間</u>という。測度代数としては $(\mathbb{B}(\xi), P)$ と $(\mathbb{B}_\xi,\ P_\xi)$ は isomorphic であるから記号を混同して使う。

確率変数Xが定める分割を $\xi(X)$ とすると，商空間 $\Omega/\xi(X)$ は $X(\Omega)$ と isomorphic である。

条件つき確率の精密化として次の概念を導入する。

<u>定義3.6</u>　ルベーグ空間Ωの分割ξの各元CにC上の測度 $P(\cdot|\xi;C)$ が対応して次の条件をみたすとき，$\{P(\cdot|\xi;C);\ C\in\xi\}$ を<u>測度の標準系</u>という：

(C.1)　a.e. C に対し $(C, P(\cdot|\xi;C))$ はルベーグ空間，

(C.2)　$\forall A\in\mathbb{B}$ に対し

a)　$A\cap C$ は a.e. C に対し $P(\cdot|\xi;C)$-可測

b)　$P(A\cap C|\xi;C)$はCの可測 $(\mathbb{B}_\xi)$ 函数

c)　$$P(A)=\int_{\Omega/\xi}P(A\cap C|\xi;C)\,dP_\xi(C) .$$

$P(\cdot|\xi;C)$ はΩ上の測度と考えた方が便利なので $P(C^c|\xi;C)=0$ として拡大しておく。

$$P(\cdot|\mathbb{B}(\xi);\omega)=P(\cdot|\xi;C) \qquad \omega\in C$$

は条件つき確率法則である。

測度の標準系による積分を考えると，条件つき平均値について成り立つことは当然成り立つが，更にくわしく次の定理が得られる。分割ξを1つとめて考えるときは簡単のために $P_C(\cdot)=P(\cdot|\xi;C)$と書くことがある．更に記号

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

$$E\{f|\zeta;C\}=\int_\Omega f(\omega)\,dP(\omega|\zeta;C)^{1)}$$

を使う。

<u>定理3.6</u> (i) f が $\mathcal{B}$-可測であれば，a.e. $C\in\zeta$ に対し P_C-可測である．

(ii) $f\in L^1(dP)\Rightarrow f\in L^1(dP_C)$, a.e. $C\in\zeta$; $E\{f|\zeta;C\}$ は C-可測 $(\mathcal{B}(\zeta))$ で

$$E\{f;Z\}^{2)}=E\{E\{f|\zeta;C\};Z\},\qquad \forall Z\in\mathcal{B}(\zeta).$$

(iii) $f,g\in L^2(dP)\Rightarrow f,g\in L^2(dP_C)$, a.e. $C\in\zeta$,

$$(f,g)=\int_\Omega (f,g)_C\,dP(C)$$

ここに $(f,g)_C=E\{f\bar{g}|\zeta;C\}$.

(iv) $f=g$, a.e.$(P)\Longleftrightarrow$ a.e. $C\in\zeta$ に対し，$f=g$ a.e.(P_C).

(v) $f_n\to f$, a.e.(P) または強収束 ($L^1(dP)$ または $L^2(dP)$)
$\Longrightarrow$ a.e. $C\in\zeta$ に対しそれぞれ

$f_n\to f$, a.e.(P_C) または強収束 ($L^1(dP_C)$ または $L^2(dP_C)$)。

<u>定理3.7</u> 分割 ζ に対し測度の標準系の存在を仮定する．

(i) Γ が Ω の base であれば，$\Gamma\cap C$ は a.e. C に対しルベーグ空間 C の base である。

(ii) 測度の標準系は一意である．即ち $\{P_C\}$, $\{P'_C\}$ を共に ζ に対する測度の標準系とすれば，a.e. C に対し $P_C=P'_C$.

<u>証明</u> (i) (C.1), (C.2.a) と定理3.4による． (ii) Δ を Ω の乗積 base とし，$E\in\Delta$ と任意の $Z\in\mathcal{B}(\zeta)$ に対し

---

1) $$f_C(\omega)=\begin{cases} f(\omega) & \omega\in C\\ 0 & \omega\notin C\end{cases}$$

とおけば

$$\int_\Omega f(\omega)\,dP(\omega|\zeta;C)=\int_C f_C(\omega)\,dP(\omega|\zeta;C).$$

同様に

$$f:\ P_C\text{-可測}\Longleftrightarrow f_C:\ P_C\text{-可測}$$

2) $E\{f;Z\}=\int_Z f(\omega)\,dP(\omega)$

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

$$\int_Z P_C(E)\,dP = \int_\Omega P_C(E\cap Z)\,dP = P(E\cap Z) = \int_Z P'_C(E)\,dP .$$

即ち $P_C(E)=P'_C(E)$ a.e.C. Δは可算系だから，a.e.C に対し

$$P_C(E)=P'_C(E), \qquad {}^\forall E\in\Delta .$$

従って§3.1，注意2により $P_C=P'_C$ a.e.C. （証明終）

<u>定理3.8</u> 分割ζに対し測度の標準系が存在するためには，ζが可測であることが必要十分である.

<u>証明</u> （必要性）．(C.1)，(C.2) a)，b)よりζの可測性が出ることを示す. Ωの乗積base Δ に対し，可算個の函数

$$\varphi_E(\omega)=P(E\cap C\,|\,\zeta\,;\,C), \qquad E\in\Delta,\quad \omega\in C$$

を定義する. φ_E はすべて $\Omega_0=\Omega-N$ (N：ζ-集合，$P(N)=0$)で定義される. $\{\varphi_E;\ E\in\Delta\}$ が生成する分割を ζ' とすれば，ζ'は可測であり，ζ'の各元はζ-集合($i.e.\ \zeta'\leqq\zeta$)である. 逆に，もし $C'\in\zeta'$ にζの2つの元 C_1，C_2 が含まれているとすれば，すべての $E\in\Delta$に対し

$$P(E\cap C_1\,|\,\zeta\,;\,C_1)=P(E\cap C_2\,|\,\zeta\,;\,C_2)$$

である. 前定理 (i) により $\{E\cap C_i;\ E\in\Delta\}$ は C_i の乗積baseだから§3.1，注意2により，(C_1, P_{C_1})と(C_2, P_{C_2})は isomorphic である. $\omega_1\in C_1$，$\omega_2\in C_2$ が対応する点とすれば，$E\in\Delta$ に対し，$\omega_1\in E \Longleftrightarrow \omega_2\in E$. これは分離条件(S.2)に反する. 故に$\Omega_0$で $\zeta=\zeta'$ となり，ζは可測である.

（十分性）. Ωのbaseを $\Gamma=\{G_n\}$ とし，(Ω,Γ)の完全拡大を$(\tilde\Omega,\tilde\Gamma)$とする。$\tilde\Gamma=\{\tilde G_n\}$，$\tilde G_n\cap\Omega=G_n$ である. ζの乗積baseをΣとし，$\tilde\Omega$の可測分割 $\tilde\zeta=\zeta\cup\{\tilde\Omega-\Omega\}$ を定義すると，$\tilde\Sigma=\Sigma\cup\{\tilde\Omega-\Omega\}$ は$\tilde\zeta$の乗積baseである. 任意の $A\in\tilde{\mathbb{B}}$ を固定して，$\tilde P(A\cap Z)$を$Z\in\mathbb{B}(\tilde\zeta)$の測度と考えると$\tilde P$に関し絶対連続だから，$\mathbb{B}(\tilde\zeta)$-可測な Radon-Nikodym の密度 $\varphi(A,C)$ が a.e.$C\in\tilde\zeta$ に対して定まる：

$$\tilde P(A\cap Z)=\int_Z \varphi(A,C)\,d\tilde P(C), \qquad {}^\forall Z\in\mathbb{B}(\tilde\zeta).$$

$\tilde\Gamma$に対し$\tilde\Omega$の有限分割の列，$\xi_1=\{\tilde G_1, \tilde G_1^c\}$．$\xi_2=\{\tilde G_1\cap\tilde G_2,\ \tilde G_1\cap\tilde G_2^c,\ \tilde G_1^c\cap\tilde G_2,\ \tilde G_1^c\cap\tilde G_2^c\}$，…… を定めれば，$\xi_1\leqq\xi_2\leqq\cdots$ であって $\tilde\Delta=\bigvee_n\xi_n$ は$\tilde\Omega$の乗積baseである. $E_n\in\xi_n$ と任意の $Z\in\mathbb{B}(\tilde\zeta)$に対し

$$\int_Z \varphi(E_n,C)\,d\tilde P(C)=\tilde P(E_n\cap Z)$$

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

$$= \widetilde{P}(E_n \cap \widetilde{G}_{n+1} \cap Z) + \widetilde{P}(E_n \cap \widetilde{G}^c_{n+1} \cap Z)$$

$$= \int_Z \{\varphi(E_n \cap \widetilde{G}_{n+1}, C) + \varphi(E_n \cap \widetilde{G}^c_{n+1}, C\} d\widetilde{P}(C).$$

従って $N \in \mathcal{B}(\widetilde{\zeta})$, $\widetilde{P}(N)=0$ が存在し, $\widetilde{\zeta} \cap N^c \ni C$ に対し

$$\varphi(\widetilde{\Omega}, C) = 1,$$

$$\varphi(E_n, C) = \varphi(E_n \cap \widetilde{G}_{n+1}, C) + \varphi(E_n \cap \widetilde{G}^c_{n+1}, C), \qquad \forall E_n \in \xi_n, \ \forall n$$

が成り立つ. これは $\varphi(\cdot, C)$ が semi-algebra $\widetilde{\Delta}$ 上で有限加法性をもつことを示している. $\widetilde{\Gamma}$ は完全だから, $\varphi(\cdot, C)$ は $\widetilde{\Omega}$ 上のルベーグ測度 $P_C(\cdot)$ に拡張される (§3.1, 注意1参照).

$\hat{B}$ を次の3条件をみたす集合 A の全体とする:

a') A は a.e. $C \in \widetilde{\zeta}$ に対し P_C-可測

b') $P_C(A)$ は C の函数として $\mathcal{B}(\widetilde{\zeta})$-可測

c') $\widetilde{P}(A \cap Z) = \int_Z P_C(A)\, d\widetilde{P}(C), \qquad \forall Z \in \mathcal{B}(\widetilde{\zeta}).$

明らかに $\widetilde{\Delta}$ から生成される algebra は $\hat{B}$ に含まれ, $\hat{B}$ は単調族をなす. 従って $\hat{B} \supset \mathcal{B}(\widetilde{\Delta}) = \mathcal{B}(\widetilde{\Gamma})$. 任意の $A \in \widetilde{B}$ に対し, $B_1 \subset A \subset B_2$, $\widetilde{P}(B_2 - B_1) = 0$ となる B_1, $B_2 \in \mathcal{B}(\widetilde{\Gamma})$ がある ((S.1) による).

$$\int_{\widetilde{\Omega}} P_C(B_2 - B_1)\, d\widetilde{P} = \widetilde{P}(B_2 - B_1) = 0$$

だから a.e. $C \in \widetilde{\zeta}$ に対し $P_C(B_2 - B_1) = 0$. 即ち A は a') をみたす. また a.e. $C \in \widetilde{\zeta}$ に対し $P_C(A) = P_C(B_1)$ となって b'), c') もみたす。

最後に $P_C(C) = 1$ を示す. 任意の $S \in \widetilde{\Sigma}$ に対し

$$\widetilde{P}(S \cap Z) = \int_Z \chi_S(C)\, d\widetilde{P}(C), \qquad \forall Z \in \mathcal{B}(\widetilde{\zeta}).$$

$\widetilde{\Sigma}$ は可算系だから a.e. $C \in \widetilde{\zeta}$ に対し

$$P_C(S) = \chi_S(C), \qquad \forall S \in \widetilde{\Sigma}.$$

一方すべての $C \in \widetilde{\zeta}$ は, $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$, $S_n \in \widetilde{\Sigma}$, $S_n \subset S_{n-1}$, とあらわされるから, $\widetilde{P}$-測度0を除いて C は P_C-可測で

$$P_C(C) = \lim_{n \to \infty} P_C(S_n) = 1$$

となる. (証明終)

<u>定理3.9</u> ルベーグ空間 Ω の商空間 $(\Omega/\zeta, B_\zeta, P_\zeta)$ がまたルベーグ空間であるためには, ζ が可測分割であることが必要十分である.

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

証明 必要性は明らか。十分性を示す.

1° 真に可分であること：Σをζのbaseとし

$$\Sigma' = \Phi_\zeta(\Sigma)$$

とおくと，Σ'はΩ/ζのbaseになる．実際(S.2)は明らかにみたす．(S.1)を示す．$\mathcal{L}(\Sigma')$へのP_ζの制限をP'_ζとする．P_ζの代りにP'_ζを使って測度の標準系を作れば，任意の$A \in \mathbb{B}$に対し$P_C(A \cap C)$はCについてP'_ζ-可測である．$A \in \mathbb{B}(\zeta)$であれば　$P_C(A \cap C) = \chi_A(C)$だから，$A$は$P'_\zeta$-可測である。故に$P_\zeta = P'_\zeta$，即ち$\mathcal{L}(\Sigma') = \mathbb{B}_\zeta$．

2° 完全拡大において可測なこと：ζのbase Σに可算個の可測集合をつけ加えて，Ωのbase Γを作る．(Ω, Γ)の完全拡大$(\tilde{\Omega}, \tilde{\Gamma})$のbase $\tilde{\Gamma}$のΣに対応する部分を$\tilde{\Sigma}$とする．$\tilde{\Omega}$の可測分割$\tilde{\zeta} = \zeta(\tilde{\Sigma})$による商空間$\tilde{\Omega}/\tilde{\zeta}$を考える。

$$\tilde{\Sigma}' = \Phi_{\tilde{\zeta}}(\tilde{\Sigma})$$

は$\tilde{\Omega}/\tilde{\zeta}$のbaseであり，明らかに$\tilde{\Omega}/\tilde{\zeta}$は$\tilde{\Sigma}'$に関し完全である．即ち$\tilde{\Omega}/\tilde{\zeta}$はルベーグ空間である．一方$\zeta = \tilde{\zeta} \cap \Omega$であり$C \in \zeta$を$C = \tilde{C} \cap \Omega$なる$\tilde{C} \in \tilde{\zeta}$に対応させると$\Omega/\zeta$は$\tilde{\Omega}/\tilde{\zeta}$にうめこまれる。しかも$\Phi_{\tilde{\zeta}}(\Omega) = \Omega/\zeta$であり，$\Omega$は$\tilde{\Omega}$で可測だから，$\Omega/\zeta$は$\tilde{\Omega}/\tilde{\zeta}$で可測である．　　　　（証明終）

§3.6 積　空　間

$(\Omega_i, \mathbb{B}_i, P_i)$ $(i = 1, 2)$をルベーグ空間とし，$\mathbb{B}_1 \times \mathbb{B}_2 = \{A \times B;\ A \in \mathbb{B}_1,\ B \in \mathbb{B}_2\}$上の実函数$Q$が次の条件をみたすように与えられているとする：

(Q.1)　$Q(A, B) \geqq 0$　　$\forall A \in \mathbb{B}_1$, $\forall B \in \mathbb{B}_2$,

(Q.2)　Qは各変数に関し（他を固定して）可算加法性をもつ，

(Q.3)　$Q(A, \Omega_2) = P_1(A)$,　$Q(\Omega_1, B) = P_2(B)$.

このとき

定理3.10　積集合$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$上の確率測度$P$で

(3.2)　　$P(A \times B) = Q(A, B)$,　　$A \in \mathbb{B}_1$,　$B \in \mathbb{B}_2$

をみたすものが（$\mathcal{B}(\mathbb{B}_1 \times \mathbb{B}_2)$上では一意に）存在し，$(\Omega, P)$はルベーグ空間になる[1]　このとき$\Omega$を$Q$による積空間という．

---

1)　$\mathbb{B} = \overline{\mathcal{B}(\mathbb{B}_1 \times \mathbb{B}_2)}$（完備化）とし$(\Omega, \mathbb{B}, P)$がルベール空間となる（即ち(3.2)をみたす$P$のminimalなものである）．その意味では$P$は一意である．

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

注意 $Q(A, B) = P_1(A) P_2(A)$ のときが直積空間である．

証明 普通の教科書に書いてある直積空間の構成と類似にできるが，念のために証明をつける．

まず Ω_1，Ω_2 はそれぞれ base Γ_1，Γ_2 に関し完全であることを仮定する．Γ_i から作られる乗積 base を Δ_i $(i=1, 2)$ とする。$\Delta_1 \times \Delta_2$ を含む最小の algebra $\mathfrak{A}(\Delta_1 \times \Delta_2) = \{\overset{\text{有限}}{\bigcup_j}(A_j \times B_j)$; $A_j \times B_j$ は互に素，$A_j \in \Delta_1$，$B_j \in \Delta_2\}$ 上で

$$P(\bigcup_j (A_j \times B_j)) = \sum_j Q(A_j, B_j)$$

と定める。Pが一意に定まり，有限加法性を持つことは，(Q､2)と次のことによる：

$$(A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2) = A_3 \times B_3$$

$\Longleftrightarrow A_1 = A_2 = A_3$ かつ $B_1 \cup B_2 = B_3$，または $A_1 \cup A_2 = A_3$ かつ $B_1 = B_2 = B_3$．Pが $\mathfrak{A}(\Delta_1 \times \Delta_2)$ 上で連続性を持つことを示す。$E_n \in \mathfrak{A}(\Delta_1 \times \Delta_2)$，$E^n \supset E^{n+1}$，$P(E^n) > \delta > 0$ とし，$E^n = \overset{\text{有限}}{\bigcup_j} D_j^n$，$D_j^n = A_j^n \times B_j^n$，$A_j^n \in \Delta_1$，$B_j^n \in \Delta_2$ の形であるとする。D_i^1 の中に D_j^n $(n \geqq 2)$ を無限個含むものがある[1]　その一つを $D^1 = A^1 \times B^1$ としよう．D^1 に含まれる D_i^2 の中で D_j^n $(n \geqq 3)$ を無限個含むものがあるのでそれを $D^2 = A^2 \times B^2$ とする。以下同様に

$$D^1 \supset D^2 \supset D^3 \supset \cdots$$

を定める。$A^1 \supset A^2 \supset \cdots$，$B^1 \supset B^2 \supset \cdots$，であり，完全性の仮定より，$\bigcap_{n=1}^\infty A^n \neq \phi$，$\bigcap_{n=1}^\infty B^n \neq \phi$，従って $\bigcap_{n=1}^\infty E^n \neq \phi$ となって連続性が示された．カラテオドリの外測度による普通の方法によってPを確率測度に拡張する．P-可測な集合全体を$\mathbb{B}$とする．明らかに $\mathbb{B} = \overline{\mathcal{B}(\Gamma_1 \times \Gamma_2)}$ であって，$(\Omega, \mathbb{B}, P)$ はルベーグ空間となる[2]

$\mathbb{B} \supset \mathbb{B}_1 \times \mathbb{B}_2$ (従って $\mathbb{B} = \overline{\mathcal{B}(\mathbb{B}_1 \times \mathbb{B}_2)}$) および (3､2) を示す。そのためにまず任意に固定した $B \in \Delta_2$ に対し

$$\hat{\mathbb{B}}_1 = \{A; A \in \mathbb{B}_1, \ A \times B \in \mathbb{B}, \ P(A \times B) = Q(A, B)\}$$

を考える．明らかに $\mathfrak{A}(\Delta_1) \subset \hat{\mathbb{B}}_1$ で $\hat{\mathbb{B}}_1$ は単調族をなす．従って $\hat{\mathbb{B}}_1 \supset \mathcal{B}(\Delta_1) = \mathcal{B}(\Gamma_1)$．　任意の $A \in \mathbb{B}_1$ に対し $A_1 \subset A \subset A_2$，$P_1(A_2 - A_1) = 0$ となる $A_1, A_2 \in \mathcal{B}(\Gamma_1)$ が存在する．

---

1) j も動かして考える．

2) $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ が Ω の base となり，Ω はそれに関し完全．

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

$$P((A_2-A_1)\times B)=Q((A_2-A_1),B)\leqq Q((A_2-A_1),\Omega_2)=P_1(A_2-A_1)=0$$

故に $A\in\hat{\mathcal{B}}_1$, 即ち $\hat{\mathcal{B}}_1=\mathcal{B}_1$. 次に任意の $A\in\mathcal{B}_1$ を固定して

$$\hat{\mathcal{B}}_2=\{B;B\in\mathcal{B}_2,\ A\times B\in\mathcal{B},\ P(A\times B)=Q(A,B)\}$$

を考えると, 上と全く同じ議論によって, $\hat{\mathcal{B}}_2=\mathcal{B}_2$ がわかる.

Ω_1, Ω_2 が mod 0 で完全な場合は, それぞれの完全拡大 $\widetilde{\Omega}_1$, $\widetilde{\Omega}_2$ に対して定理は成り立つ[1]. $\Omega_i\in\widetilde{\mathcal{B}}_i$ $(i=1,2)$ だから $\Omega_1\times\Omega_2\in\widetilde{\mathcal{B}}$ であり

$$\widetilde{P}(\Omega_1\times\Omega_2)=\widetilde{Q}(\Omega_1,\Omega_2)=1$$

だから, 得られた積空間を $\Omega=\Omega_1\times\Omega_2$ に制限すれば求めるものである.

(証明終)

有限個のルベーグ空間の積空間についても同様である. 任意個数のルベーグ空間の積空間は必ずしもルベーグ空間ではないが, 確率空間にはなる.

$\{(\Omega_x,\mathcal{B}_x,P_x);\ x\in X\}$ をルベーグ空間の任意個の族とする. 積集合を $\Omega=\prod_{x\in X}\Omega_x$ とする. $B_x\in\mathcal{B}_x$ $(x\in X)$ の組 $\{B_x;\ x\in X\}$ に対して実函数 $Q(\{B_x\})$ が定められていて, 条件 (Q.1), (Q.2) および

(Q.3′) $\forall x\neq x_0$ のとき $B_x=\Omega_x \Rightarrow Q(\{B_x\})=P_x(B)$

をみたすとする.

定理 3.11 (Kolmogorov の拡張定理). Ω 上に次の条件をみたす確率測度が存在する:

(3.3) $\quad A\ni\prod_x B_x \Rightarrow P(\prod_x B_x)=Q(\{B_x\})$,

ここに $A=\{\prod_x B_x;\ B_x\in\mathcal{B}_x\ (x\in X)$, 有限個を除いて $B_x=\Omega_x\}$.

証明 1° 各 Ω_x が base Γ_x に関し完全であるとき: Γ_x から作られる乗積 base を Δ_x とし,

(3.4) $\quad B_x\in\Delta_x\ (x\in X)$, 有限個を除いて $B_x=\Omega_x$

であるような $\prod B_x$ に対し (3.3) で P を定める. P は (3.4) の形の $\prod B_x$ から生成される algebra $\mathfrak{A}$ 上に自然に拡張でき, 有限加法性を持つことは明らかである. P が $\mathfrak{A}$ 上で連続性を持つことを示す。

$$B^n\in\mathfrak{A};\quad B_n\downarrow,\quad P(B_n)>\delta>0$$

としよう。 $X_n=\{x_1,\cdots,x_{k_n}\}$ とおき, B^n は

$$B^n=\bigcup_j^{\text{有限}}E_j^n,\quad E_i^n\cap E_j^n=\phi\quad(i\neq j),$$

---

1) $\widetilde{Q}(\widetilde{A},\widetilde{B})=Q(\widetilde{A}\cap\Omega_1,\ \widetilde{B}\cap\Omega_2)$, $\widetilde{A}\in\widetilde{\mathcal{B}}_1$, $\widetilde{B}\in\widetilde{\mathcal{B}}_2$ とする.
"~"印をつけるのは完全拡大の空間で考える意味.

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

$$E_j^n = \prod_x D_{jx}^n, \quad D_{jx}^n \in \Delta_x \quad x \in X_n, \quad D_{jx}^n = \Omega_x \quad x \notin X_n$$

の形であるとして良い。前定理の証明と同様にして

$$E^1 \supset E^2 \supset E^3 \supset \cdots, \qquad E^n = \prod_x D_x^n$$

を定めると，$x \in \bigcup_n X_n$ に対しては $\bigcap_n D_x^n$ は一点 ω_x を定め，$x \notin \bigcup_n X_n$ のときは $D_x^n = \Omega_x$ である．後者では任意に $\omega_x \in \Omega_x$ をとると

$$\cap B^n \supset \cap E^n \ni \{\omega_x\}.$$

故に P は Ω 上の確率測度に拡張される．P-可測な集合全体を $\mathbb{B}$ とすれば，前定理の証明と同様にして $\mathbb{A} \subset \mathbb{B}$（従って $\mathcal{B}(\mathbb{A}) \subset \mathbb{B}$）であり（3.3）が成り立つことがわかる．

2° 一般のとき：各 Ω_x の完全拡大 $\tilde{\Omega}_x$ について 1° を用いる。$\tilde{\Omega}$ に確率測度 $\tilde{P}$ が入る．$\mathcal{B}(\tilde{\Omega})$ の元は可算個の x を除いて Ω_x から成ることに注意すれば，Ω の外測度が 1 であることが容易にわかる．$\tilde{P}$ から Ω 上に導かれる P が（3.3）をみたすことは明らか。（証明終）

定理3.12 前定理において X が可算集合であれば，$(\Omega, \mathbb{B}, P)$ はルベーグ空間である．

証明 各 Ω_x の base を Γ_x とすれば，$\Gamma = \{B_x \times \prod_{y \neq x} \Omega_y;\ B_x \in \Gamma_x,\ x \in X\}$ が Ω の base になる。詳細は省略する．

§3.7 積空間と可測分割

$\Omega = \Pi \Omega_n$ をルベーグ空間の可算積空間（従ってルベーグ空間）としよう。自然な対応

$$H_n:\ \Omega \ni \omega = \{\omega_n\} \to \omega_n \in \Omega_n$$

は Ω から Ω_n の上への homomorphism であり，Ω の可測分割 $\zeta(H_n) = \{\omega_n \times \prod_{j \neq n} \Omega_j;\ \omega_n \in \Omega_n\}$ を定める．このとき

$$H_n = T_{H_n} \Phi_{\zeta(H_n)}$$

となる，ここに T_{H_n} は $\Omega/\zeta(H_n)$ から Ω_n への isomorphism である（§3.2，定理3.3、参照）。従って Ω_n を商空間 $\Omega/\zeta(H_n)$ と同一視し，Ω は $\Omega/\zeta(H_n)$ の積と考えることができる．この積は次の関係で定義される：

(3.5) $$\prod_n C_n = \bigcap_n C_n, \quad Q(\{Y_n\}) = P(\cap Z_n),$$

ここに C_n は左辺では $\Omega/\zeta(H_n)$ の点，右辺では Ω の集合と考え，$Y_n = \Phi_{\zeta(H_n)}(Z_n)$.

逆に Ω を任意のルベーグ空間とし，Ω の可測分割の可算系 $\{\zeta_n\}$ を考えよう。

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

もし $\{\zeta_n\}$ が条件 (i) $C_n \in \zeta_n$ を任意にとるとき，すべての交りが $\bigcap_n C_n \neq \phi$, (ii) $\bigvee_n \zeta_n = \varepsilon$, をみたせば（3.5）の関係によって Ω を商空間の積 $\prod_n \Omega/\zeta_n$ とみなすことができる。

定義3.7　(i) 2つの可測分割 ζ_1, ζ_2 が独立であるとは $\mathcal{B}(\zeta_1)$ と $\mathcal{B}(\zeta_2)$ が独立のことである。

(ii) ζ_1, ζ_2 が独立であり，更に $\zeta_1 \vee \zeta_2 = \varepsilon\ (mod\ 0)$ のとき，ζ_1 と ζ_2 は互に独立補分割（*independent complement*）という。

もし，Ω の分割 ζ_1 と ζ_2 が互に独立補分割であれば，Ω は直積空間：

$$\Omega = \Omega/\zeta_1 \times \Omega/\zeta_2\ , \qquad P = P_{\zeta_1} \times P_{\zeta_2}$$

と考えることができる。

定理3.13　ルベーグ空間 Ω の可測分割 ζ が独立補分割を持つためには，すべて $(mod\ 0)$ の $C \in \zeta$ に対し空間 $(C, P(\cdot|\zeta; C))$ が同じ *metrical type* をもつ（即ち互に *isomorphic mod 0*）ことが必要十分である。特に $P(\cdot|\zeta; C)$ $(a.e.\ C)$ が *atom* を持たなければ，ζ は独立補分割をもつ。

証明は省略，[34] を参照されたい。

P_ζ および $P(\cdot|\zeta; C)$ $(a.e.\ C)$ が *atom* を持たなければ Ω は単位正方形 $[0, 1] \times [0, 1]$ に *isomorphic* $(mod\ 0)$ であり，ζ は正方形の一辺と平行な線分への分割と *isomorphic* $(mod\ 0)$ になる。

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

第4章 ルベーグ空間上の flow

§4.1 周期性について

ルベーグ空間$(\Omega, \mathcal{B}, P)$上に automorphism T が与えられたとして，Ωの点を分類しよう．Ω上の正整数値函数

$$p(\omega)=\begin{cases} \min\{k>0;\ T^k\omega=\omega\} \\ \infty, \quad もし\ T^k\omega\neq\omega \quad {}^\forall k>0 \end{cases}$$

を定める．

定義4.1 (i) a) $p(\omega)<\infty$ となる点ωを周期的な点，$p(\omega)$をその周期という。$p(\omega)=1$であればωは不動点である。 b) $p(\omega)=\infty$ のとき点ωは非周期的という．

(ii) a) すべてのω (mod 0) に対し $p(\omega)=p$，即ち $T^p=I$ のときTは周期的であるといい，pをその周期という． b) すべてのω (mod 0) に対し $p(\omega)=\infty$ のとき，Tは反周期的 (anti-periodic) という．

flow $\{T_t\}$ に対しても同様に定義する。この場合 $p(\omega)$ は非負実数値函数であり，$p(\omega)=0$ のωが不動点である．

automorphism T について考える。$\Omega_p=\{\omega;\ p(\omega)=p\}$ とおけば $\Omega=\bigcup_{p=1}^{\infty}\Omega_p$ と分割されるが，このとき

Lemma 4.1 $\Omega_p\ (1\leqq p\leqq\infty)$ は T-不変な可測集合である．

証明 T-不変であることは明らか．Ωの base を $\{G_n\}$ とし $F_n=G_n$ または G_n^c とすれば，$T^p\omega=\omega$ のとき

$$\omega\in F_n \Longrightarrow \omega=T^p\omega\in F_n\cap T^pF_n .$$

従って $\{\omega;\ T^p\omega=\omega\}=\bigcap_n\{(G_n\cap T^pG_n)\cup(G_n^c\cap T^pG_n^c)\}$．
故に $1\leqq p<\infty$ のとき $\Omega_p=\{\omega;\ T^p\omega=\omega,\ T^k\omega\neq\omega\ (1\leqq k\leqq p-1)\}$ は可測，従ってまた Ω_∞ も可測である． (証明終)

flow の場合も $\Omega_p=\{\omega;\ p(\omega)\leqq p\}\ (0\leqq p\leqq\infty)$ が可測であることが，Ambrose-flow による表現を使って示される（後述）．

Tに対して，$A, TA, \cdots, T^{n-1}A$ が互に交わらないような可測集合Aの全体を$K_n(T)$とする。

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

Lemma 4.2 集合 A は $P(A)>0$ で，各点 (mod 0) $\omega\in A$ で $p(\omega)\geqq n$ とする．そうすれば $P(A_0)>0$ なる $A_0\in K_n(T)$，$A_0\subset A$ が存在する．

証明 1° A の base を $\{D_n\}$ とする（例えば Ω の base $\{G_n\}$ に対し $D_n=G_n\cap A$）．$D_n^c=A-D_n$ とすれば，上の lemma の証明により

(4.1) $P(\bigcap_n\{(D_n\cap T^kD_n)\cup(D_n^c\cap T^kD_n^c)\})=0,\quad 1\leqq k\leqq n-1$

が成り立つ．$k=1$ のとき，任意の $\varepsilon>0$ ($\varepsilon<P(A)$) に対し m があって

$$P(\bigcap_{n=1}^m\{(D_n\cap TD_n)\cup(D_n^c\cap TD_n^c)\})\leqq\varepsilon$$

従って

$$P(\bigcup_{n=1}^m(D_n\ominus TD_n))>0.$$

故に n_1 があって

$$P(D_{n_1}\ominus TD_{n_1})>0.$$

$A_1=D_{n_1}-T^{-1}D_{n_1}$ とおけば，$A_1\cap TA_1=\phi$ かつ $P(A_1)>0$．

2° A_1 を A と考えて 1° と同じ議論を $k=2$ に対して行えば，

$$P(D_{n_2}\ominus T^2D_{n_2})>0$$

となる D_{n_2} (A_1 の base の元) が存在する．$D_{n_2}\cap TD_{n_2}=\phi$ である．$A_2=D_{n_2}-T^{-2}D_{n_2}$ とおけば，$P(A_2)>0$ かつ A_2, TA_2, T^2A_2 は互に交わらない．

3° この操作は $k=n-1$ まで続けることができる．$A_0=A_{n-1}$ が求めるものである． （証明終）

$A\in K_n(T)$ に対し，

$$K_n(T)\ni A'\supset A\ (\mathrm{mod}\ 0)\Longrightarrow P(A')=P(A)$$

が成り立てば A は $K_n(T)$ の極大元といわれる。

Lemma 4.3 $K_n(T)$ の極大元は存在する．

証明 $K_n(T)$ に "$\subset$ (mod 0)" で順序を入れると，任意の全順序部分集合 $\mathfrak{F}\subset K_n(T)$ は上界をもつ．実際

$$\alpha=\sup_{A\in\mathfrak{F}}P(A)$$

とおけば，$\{A_n\}\subset\mathfrak{F}$ があって $\lim P(A_n)=\alpha$ となる．$A_0=\bigcup A_n$ が $\mathfrak{F}$ の上界である．故に Zorn の lemma によって $K_n(T)$ に極大元が存在する．

定理 4.1 $p(\omega)\geqq n$ a.e. のとき，$A\in K_n(T)$ が極大であるためには

$$\bigcup_{k=1-n}^{n-1}T^kA=\Omega\qquad(\mathrm{mod}\ 0)$$

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

となることが必要十分である.

証明 $A\in K_n(T)$, $B\in K_n(T)$, $A\cap B=\phi$, に対し, $A\cup B\in K_n(T) \Longleftrightarrow T^iA\cap T^jB=\phi$ $(0\leqq i,j\leqq n-1) \Longleftrightarrow B\cap T^{i-j}A=\phi$ $(1-n\leqq i-j\leqq n-1) \Longleftrightarrow B\cap(\bigcup_{k=1-n}^{n-1}T^kA)=\phi$. これは定理を示している.

系 Aが$K_n(T)$の極大元であれば, $P(A)\geqq\frac{1}{2n-1}$.

Tが周期pの automorphism であれば, 明らかに $\Omega_n=\phi$ $(n>p)$ である. $A\in K_p(T)$ が極大であれば, $\Omega=\bigcup_{1-p}^{p-1}T^kA=\bigcup_{0}^{p-1}T^kA$ だから $1=pP(A)$. 更にこのとき各軌道 $\{T^k\omega;\ 0\leqq k\leqq p-1\}$ (mod 0)は唯一回Aと交わる. 即ちAは各軌道の代表元の集合である. この意味でAをTの基本領域と呼ぶ. Aの base を$\{D_n\}$とするとき, $E_n=\bigcup_{k=0}^{p-1}T^kD_n$, $\Sigma=\{E_n\}$とおけば, 可測分割$\zeta(\Sigma)$はΩの軌道への分割である. 以上により次の定理を得る.

定理4.2 Tを周期pの automorphism とする.

(i) 基本領域Aは isomorphic なものを除き一意に定まり,

$$P(A)=\frac{1}{p},\qquad \Omega/\zeta(\Sigma)\sim A.$$

(ii) T_1, T_2 が共に周期pの automorphism で, それらの基本領域をそれぞれA_1, A_2 とすれば

$$T_1\sim T_2 \Longleftrightarrow A_1\sim A_2 .$$

定理4.3 T_i $(i=1,2)$はΩ_i上の周期的な automorphism とする.

(i) $T_1\sim T_2 \Longleftrightarrow$ 周期が等しくかつ $\Omega_1\sim\Omega_2$

(ii) Ω_1, Ω_2 が atom を持たなければ

$$T_1\sim T_2 \Longleftrightarrow \text{周期が等しい}.$$

注意 一般にΩ上の automorphism Tを考える. Ωに atom があり, もしそれがTに関し不動点でなければそれは周期的点となり, Ωに有限個の等確率の点があることになる. 従って反周期的な automorphism を乗せているΩは atom を持ち得ない. 逆にΩに atom がなければΩ上に反周期的な automorphism が存在する. もしTがエルゴード的であれば, 不動な atom はありえず, Ωは mod 0 で有限個の(等確率な)点だけから成るか, atom を持たないかである.

この節の議論は§7.1にうけつがれる.

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

§4.2 factor-flow と homomorphic image

ルベーグ空間Ωに flow $\{T_t\}$ が与えられているとする．$\{T_t\}$-不変な可測分割 ζ

$$T_t\zeta = \zeta \qquad \forall t$$

による商空間 Ω/ζ に flow

$$(T_t)_\zeta = \Phi_\zeta T_t \Phi_\zeta^{-1}$$

が定義される（flow になることは明らか）．

定義4.2 $\{(T_t)_\zeta\}$ を $\{T_t\}$ のζによる factor-flow という．

定義4.3 $\{T_t^1\}$, $\{T_t^2\}$ はそれぞれ Ω_1, Ω_2 上の flow とする．Ω_1 から Ω_2 への homomorphism H があって

$$HT_t^1 = T_t^2 H, \qquad \forall t$$

であるとき，$\{T_t^2\}$は $\{T_t^1\}$ の homomorphic image という。

$\{T_t^2\}$ が $\{T_t^1\}$ の homomorphic image であって，その homomorphism をHとしよう．Hによって定まる Ω_1 の分割を $\zeta(H)$ とすれば

$$H = T_H\Phi_{\zeta(H)}$$

となる，ここに T_H は $\Omega_1/\zeta(H)$ から Ω_2 への isomorphism である．一方容易に

$$T_t^1\zeta(H) = \zeta(H), \qquad \forall t$$

であることがわかるので，factor-flow $\{(T_t^1)_{\zeta(H)}\}$が定義できる．$\{T_t^1\}$ の homomorphic image $\{T_t^2\}$ は $\{T_t^1\}$の factor-flow $\{(T_t^1)_{\zeta(H)}\}$ と同値である：

$$(T_t^1)_{\zeta(H)} = T_H^{-1}T_t^2T_H, \qquad \forall t .$$

定義4.4 互に homomorphic image である2つの flow は弱同値であるという。

factor-flow $\{(T_t)_\zeta\}$ のスペクトルを考えよう。$L^2(\Omega/\zeta)$ は $L^2(\Omega)$ の部分空間 $L^2(B(\zeta)) = \{f; f\in L^2(\Omega)$, 各 $C(\in\zeta)$ 上で f は定数$\}$ に isomorphic であり，$\{(U_t)_\zeta\}$ は $\{U_t\}$ の $L^2(B(\zeta))$への制限にユニタリ同値である．従って $\{T_t\}$ の spectral type を $(d\rho, m(\lambda))$, $\{(T_t)_\zeta\}$ のそれを $(d\rho', m'(\lambda))$ とすれば，明らかに

$$d\rho' \prec d\rho, \quad m'(\lambda) \leqq m(\lambda) \quad a.e.\,(d\rho)$$

が成り立つ．homomorphic image は或る factor-flow に同値である

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

ことに注意すれば，次の定理を得る．

定理4.4 弱同値であればスペクトル同値である．

§4.3 周期的な flow についての一定理[1]

この節では，ルベーグ空間Ωは atom をもたず，flow $\{T_t\}$ はすべて周期1

$$T_{t+1} = T_t \qquad \forall t$$

とする。

定理4.5 Ω上に universal な周期1の flow が存在し，Ω上のすべての周期1の flow はその factor-flow になる．

証明 $(\Omega, \mathcal{B}, P)$と$([0,1], \mathcal{B}_{[0,1]}, du)$の直積測度空間$(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{B}}, \hat{P})$，

$$\hat{\Omega} = \Omega \times [0,1], \quad \hat{P} = P \times du$$

はまたルベーグ空間だから$(\Omega, \mathcal{B}, P)$と isomorphic である．Ωから$\hat{\Omega}$への isomorphism をSとする．$\hat{\Omega}$上に変換

$$\hat{T}_t(\omega, u) = (\omega, u-t), \qquad (\mathrm{mod}\ 1)$$

を定める．$\{\hat{T}_t\}$は明らかに周期1の flow である．$\{\hat{T}_t\}$からΩ上に導かれる flow

$$T_t = S^{-1}\hat{T}_t S$$

が求めるものである．

実際，$\{T_t'\}$を任意の周期1の flow として，それが$\{\hat{T}_t\}$の homomorphic image であることを示そう．$A \in \mathcal{B}$に対し$\hat{A} = \bigcup_{0 \leq t \leq 1} (T_t' A, t)$と定めると，$\{T_t'\}$の可測性により$\hat{A} \in \hat{\mathcal{B}}$であり，Fubini の定理により

$$\hat{P}(\hat{A}) = \int_0^1 P(T_t' A)\,dt = \int_0^1 P(A)\,dt = P(A).$$

各$\omega \in \Omega$に対し$C(\omega) = \{\hat{\omega}\} = \{(T_t'\omega, t);\ 0 \leq t \leq 1\}$は，明らかに

$$\omega \neq \omega' \Longrightarrow C(\omega) \cap C(\omega') = \phi,$$

$$\begin{aligned}\hat{T}_t C(\omega) &= \{(T_u'\omega, u-t);\ 0 \leq u \leq 1\} \\ &= \{(T_t'\omega, u);\ 0 \leq u \leq 1\} \\ &= C(T_t'\omega)\end{aligned}$$

をみたす。即ち$\zeta = \{C(\omega);\ \omega \in \Omega\}$は$\hat{\Omega}$の$\{\hat{T}_t\}$-不変な分割である．$\Omega$の ba-

---

[1] この節は[40]による．

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

se を $\{G_n\}$ とすれば，ζ は $\{\hat{G}_n\}$ を base として可測である。Ω より $\hat{\Omega}/\zeta$ への 1 対 1 対応 H: $\omega \to C(\omega)$ は上のことより明らかに isomorphism であって

$$T_t' = H^{-1}(\hat{T}_t)_\zeta H .$$

§44 エルゴード成分への分解

ルベーグ空間 Ω 上にエルゴード的でない flow $\{T_t\}$ が与えられているとする。集合 $A\,(\in \mathbb{B})$ が $\{T_t\}$-不変のとき，部分空間 A への $\{T_t\}$ の制限を $\{T_t\}$ の A での成分といい，それがエルゴード的であれば<u>エルゴード成分</u>と呼ぶ。flow のエルゴード成分への分解は基本的である。それを述べる前に分解の一般論を準備する。

$\zeta = \{C\}$[1] を $\{T_t\}$-不変な集合への可測分割：

$$T_t C = C\ , \quad {}^\forall t,\ {}^\forall C \in \zeta$$

とする。このとき $\{T_t\}$ の C への制限 $\{T_t^C\}$ は C 上の 1 対 1 変換の群であるが，更に

<u>定理 4.6</u>　(i)　a.e. $C \in \zeta$ に対し $\{T_t^C\}$ はルベーグ空間 (C, P_C) の flow である。

(ii)　$\{T_t^C\}$ から導かれる $L^2(C)$ 上のユニタリ作用素群を $\{U_t^C\}$ とし，それに対応する単位分解を $\{E_C(\lambda)\}$ とすれば，a.e. $C \in \zeta$ に対し

(4.2)　　$[U_t f]_C = U_t^C f_C$[2] ,　　${}^\forall f \in L^2(\Omega)$

(4.3)　　$[E((\lambda,\mu])f]_C = E_C((\lambda,\mu])f_C$,　　${}^\forall f \in L^2(\Omega)$

が成り立つ，ここに $E((\lambda,\mu]) = E(\mu) - E(\lambda)$.

<u>Lemma 4.4</u>　$\{\varphi_t\}$ は Ω から Ω への変換の集りで，条件 (i) 群：$\varphi_t\varphi_s = \varphi_{t+s}$，(ii) すべての t に対し $\varphi_t \mathbb{B} = \mathbb{B}$，をみたすとする。このときもし a.e. t に対し

(4.4)　　$P(\varphi_t A) = P(A)$,　　${}^\forall A \in \mathbb{B}$

であれば，(4.4) はすべての t に対して成り立つ。

<u>証明</u>　$P(\varphi_t A) = P(\varphi_s \varphi_{t-s} A)$

$$= \int_0^1 P(\varphi_s \varphi_{t-s} A)\, ds$$

---

1)　ζ の元を代表的に C であらわすとき $\zeta = \{C\}$ と書く。

2)　f_C は f の C への制限.

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

$$=\int_0^1 P(\varphi_{t-s}A)\,ds \qquad (\because P(\varphi_s\varphi_{t-s}A)=P(\varphi_{t-s}A),\ a.e.\,s)$$

$$=\int_0^1 P(A)\,ds=P(A).$$

定理4.6の証明　(i) $\Delta=\{E_n\}$ をΩの乗積baseとすれば，$a.e.\,C$ に対し $\Delta_C=\{E_n\cap C\}$ はCの乗積baseである．任意にtを固定して，$E\in\Delta$，$Z\in\mathcal{B}(\zeta)$ に対し

$$\int_Z P_C(E\cap C)\,dP=P(E\cap Z)=P(T_tE\cap T_tZ)$$

$$=P(T_tE\cap Z)=\int_Z P_C(T_tE\cap C)\,dP.$$

Δの元は可算個だから　$a.e.\,C$ に対し

(4.5)　　$P_C(T_tE\cap C)=P_C(E\cap C)$,　　$\forall E\in\Delta$.

$A=\{(C,t);\ \exists E\in\Delta,\ P_C(T_tE\cap C)\neq P_C(E\cap C)\}$ とおけば，t-切断 $A_t=\{C;(C,t)\in A\}=\{C;\ \exists E\in\Delta,\ P_C(T_tE\cap C)\neq P_C(E\cap C)\}$ は P-測度0だから，Fubini の定理によりAは $P\times dt$-測度0である．従って再び Fubini の定理より，$P(N)=0$ となる ζ-集合Nがあって $C\subset N^c$ のとき，a.e. tに対し(4.5)が成り立つ．$C\subset N^c$ を固定する．(4.5)が成り立てば§3.1，注意2により

(4.6)　　$P_C(T_tA\cap C)=P_C(A\cap C)$,　　$\forall A\in\mathcal{B}$

が成り立つ．Lemma 4.4により(4.6)はすべてのtで成り立つ。即ち $\{T_t^C\}$ は $a.e.\,C\in\zeta$ に対しC上のflowである．

(ii) (4.2)は明らか．(4.3)を示そう．$E^*(\lambda)=\frac{1}{2}\{E(\lambda)+E(\lambda-0)\}$ とおけば，$f\in L^2(\Omega)$ に対し

$$E^*((\lambda,\mu])f=\underset{R\to\infty}{l.i.m.}\int_{-R}^{R}\frac{e^{-2\pi i\mu t}-e^{-2\pi i\lambda t}}{-2\pi it}\,U_tf\,dt.$$

従って定理3.6により部分列 $\{R_n\}$ があって，$a.e.\,C$ に対し

$$[E^*((\lambda,\mu])f]_C=\lim_{R_n\to\infty}\int_{-R_n}^{R_n}\frac{e^{-2\pi i\mu t}-e^{-2\pi i\lambda t}}{-2\pi it}\,[U_tf]_C\,dt$$

$$=\lim_{R_n\to\infty}\int_{-R_n}^{R_n}\frac{e^{-2\pi i\mu t}-e^{-2\pi i\lambda t}}{-2\pi it}\,U_t^Cf_C\,dt$$

ここに収束は L^2-強収束及び概収束．右辺は $E_C^*((\lambda,\mu])f_C$ に等しいから，

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

a.e. C に対し

(4.7) $$[E^*((\lambda,\mu])f]_C = E_C^*((\lambda,\mu])f_C$$

が成り立つ. $\mathcal{F}$を$L^2(\Omega)$で稠密な可算系で, $\{f_C; f\in\mathcal{F}\}$が a.e. C に対し $L^2(C)$ で稠密となるものとする（存在は定理3.7による）. a.e. C において, すべての $f\in\mathcal{F}$ とすべての有理数 λ,μ に対し（4.7）が成り立つ. 任意のλ, μを上から有理数 λ_n, μ_n で近づける（$\lambda_n\downarrow\lambda$, $\mu_n\downarrow\mu$）と

$$E^*((\lambda_n,\mu_n])f \longrightarrow E((\lambda,\mu])f \qquad (L^2(\Omega)\text{-強収束})$$
$$E_C^*((\lambda_n,\mu_n])f \longrightarrow E_C((\lambda,\mu])f \qquad (L^2(C)\text{-強収束})$$

だから（4.3）を得る。（証明終）

定理4.7（エルゴード成分への分解）. ルベーグ空間上の可測 flow $\{T_t\}$ に対し, 不変集合から成る可測分割ζが一意（mod 0）に存在して, a.e. $C\in\zeta$ に対し成分 $\{T_t^C\}$ はエルゴード的になる.

証明　存在：mod 0 で不変な可測集合（i.e. $P(T_tA\ominus A)=0$, $^\forall t$, なる A）の全体で, ρ-稠密な可算個の不変集合を $\Sigma=\{S_n\}$ とする. ρ-稠密な可算個の不変（mod 0）な集合の存在は明らかだが, Lemma 1.1 により正確に不変にできる. 可測分割 $\zeta=\zeta(\Sigma)$ が求めるものである。実際, 任意の $f\in L^2(\Omega)$ に対し $E^{(0)}f$ [1] は不変（mod 0）函数であるから, $E^{(0)}f=g$ (mod 0) となる $g\in L^2(\mathcal{B}(\Sigma))$ が存在する。前定理と定理3.6により, a.e. C に対し

$$E_C^{(0)}f_C=(E^{(0)}f)_C=g_C,\qquad \text{a.e.}(P_C).$$

g_C は定数だから $E_C^{(0)}f_C$ は mod 0 で定数である. $\mathcal{F}$を前定理の証明におけるものと同じとすれば, a.e. C に対し任意 $f\in\mathcal{F}$ で

(4.8) $$E_C^{(0)}f_C = \text{定数},\qquad \text{a.e.}(P_C).$$

$\{f_C; f\in\mathcal{F}\}$ は $L^2(C)$ で稠密だから, a.e. C において（4.8）がすべての $f_C\in L^2(C)$ に対して成りたつ。即ち a.e. C で $\{T_t^C\}$ はエルゴード的である。

一意性：次の Lemma 4.5 による.（証明終）

定義4.5　エルゴード成分への分解を与えるΩの可測分割を既約分割という。

Lemma 4.5.　不変な集合への可測分割の中で既約分割は最も細かい（mod 0）.

証明　ζを任意の既約分割, ζ'を任意の不変集合への可測分割として, $\zeta'\leq\zeta$ (mod 0) を示す. まず, Aを不変な可測集合とすれば, すべての $C\in\zeta$ に対し

---

1) $E^{(0)}=E(0)-E(0-0)$.

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

て $A\cap C$ は $\{T_t^C\}$-不変である．従って

$$P_C(A\cap C)=1 \text{ または } 0, \quad a.e.\ C\in\zeta.$$

$Z=\cup\{C;\ P_C(A\cap C)=1\}$ とすれば，$Z\in\mathcal{B}(\zeta)$ であって

$$P(A\cap Z)=\int_Z P_C(A\cap C)\,dP=P(Z)$$

$$P(A\cap Z^c)=\int_{Z^c} P_C(A\cap C)\,dP=0,$$

即ち $P(A\ominus Z)=0$．ζ' の base を $\Sigma'=\{S'_n\}$ とすれば，各 n に対し $P(S'_n\ominus Z_n)=0$ となる $Z_n\in\mathcal{B}(\zeta)$ が存在する．$\hat{\Sigma}=\{Z_n\}$として可測分割 $\hat{\zeta}=\zeta(\hat{\Sigma})$ を考える．明らかに $\hat{\zeta}\leq\zeta$ であり，$\hat{\zeta}$ は ζ'と集合 $\bigcup_n(S'_n\ominus Z_n)$上だけで異なるが，この集合の確率は 0 である。故に $\zeta'\leq\zeta$ (mod 0)．

（証明終）

<u>注意</u> 既約分割 ζ は Ωの各軌道への分割の可測 covering になっている。automorphism の場合に，もし非周期的な点が存在しない (mod 0 で) ならば，ζ は軌道への分割そのものである。

エルゴード成分への分解定理の応用として，flow の metrical type について次のことが知られている。

<u>定理4.8</u> $\{T_t\}$，$\{T'_t\}$ をそれぞれルベーグ空間 Ω，Ω' 上の可測な flow とし，対応する既約分割を ζ，ζ' とする。このとき $\{T_t\}$ と $\{T'_t\}$ とが同じ metrical type をもつためには，Ω/ζ と Ω'/ζ' が isomorphic (mod 0) であり，すべて (mod 0) の対応する $C\in\zeta$，$C'\in\zeta'$ において成分 $\{T_t^C\}$ と $\{T_t'^{C'}\}$が同じ metrical type を持つことが必要十分である。

証明省略．[35] 参照．

§4.5 Ambrose-flow による表現[1)]

まず，Ambrose-flow を定義する．$(\Omega^*, \mathcal{B}^*, P^*)$ を P^* が必ずしも正規化されていない $(1\leqq P^*(\Omega^*)<\infty)$ ルベーグ空間とする．S は Ω^*上の automorphism，f は Ω^*上の実可測函数で

$$\inf f(\omega^*)\geqq\theta>0, \quad \int_{\Omega^*} f(\omega^*)\,dP^*<\infty$$

---

1) これについては [4][5] があり，それを Rohlin [35] は完全な形にした．

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

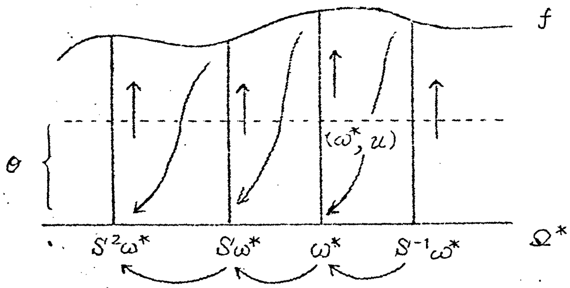
とする。実軸上で普通のルベーグ測度 du を考えた空間を R^1 とし，直積測度空間 $\Omega^* \times R^1$ を集合 $\Omega = \{(\omega^*, u);\ \omega^* \in \Omega^*,\ 0 \leqq u < f(\omega^*)\}$ に制限したものを $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ とする．Ω は明らかにルベーグ空間である。Ω 上に次の変換を定義する：

(4.9)

$$S_t(\omega^*, u) = \begin{cases} (\omega^*, u+t), & -u \leqq t < -u + f(\omega^*) \text{ のとき} \\ (S^n\omega^*, u+t-f(\omega^*)-\cdots-f(S^{n-1}\omega^*)), & \\ \qquad -u+\sum_{k=0}^{n-1} f(S^k\omega^*) \leqq t < -u + \sum_{k=0}^{n} f(S^k\omega^*) \text{ のとき} & \\ (S^{-n}\omega^*, u+t+f(S^{-1}\omega^*)+\cdots+f(S^{-n}\omega^*)) & \\ \qquad -u-\sum_{k=1}^{n} f(S^{-k}\omega^*) \leqq t < -u - \sum_{k=1}^{n-1} f(S^{-k}\omega^*) \text{ のとき} & \end{cases}$$

$$(n = 1, 2, \cdots\ ).$$

形式的に図解すれば次のようになる：



$\{S_t\}$ は Ω 上の可測 flow であることがわかる．$\{S_t\}$ を基礎空間 Ω^* 上の automorphism S と ceiling function f によって構成される Ambrose-flow と呼ぶ．

Lemma 4.6 (Wiener のエルゴード定理)

可測な flow $\{T_t\}$ と可積分函数 f に対し，

$$\lim_{a\to 0} \frac{1}{a}\int_0^a f(T_t\omega)\,dt = f(\omega) \qquad a.e.\ \omega.$$

証明　g が実軸上の可積分函数であれば

$$\lim_{a\to 0} \frac{1}{a}\int_0^a g(t+u)\,dt = g(u) \qquad a.e.\ u\ (du)$$

であることによる．この式は g が連続であれば明らかであり，一般には連続函数で L^1-近似すればよい．([50] 参照)．

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

定理4.9（第1表現定理）．不動点をもたない可測flowは，Ambrose-flowにisomorphic（mod 0）な可算個の成分に分解される．

証明　$\{T_t\}$ をルベーグ空間$(\Omega, \mathbb{B}, P)$上の不動点を持たない任意の可測flowとする。

1°．不動点がないことにより，集合$B\in\mathbb{B}$と実数t_0があって$P(B^c\cap T_{t_0}B)>0$．Lemma 4.6により

$$\varphi_a(\omega)=\frac{1}{a}\int_0^a \chi_B(T_t\omega)\,dt\to\chi_B(\omega),\quad a\to 0,\quad a.e.\,\omega$$

だから，十分小さいaに対し集合$B_1=\{\omega;\ \varphi_a(\omega)<1/4\}$，$B_2=\{\omega;\ \varphi_a(\omega)>3/4\}$は可測で

$$P(B_1\ominus B^c)<\frac{1}{2}P(B^c\cap T_{t_0}B),\quad P(B_2\ominus B)<\frac{1}{2}P(B^c\cap T_{t_0}B)$$

をみたす。以下このようなaを一つ固定する．

$$B_1\cap T_{t_0}B_2\supset(B^c\cap T_{t_0}B)-\{(B_1\ominus B^c)\cup(T_{t_0}B_2\ominus T_{t_0}B)\}$$

だから

$$P(B_1\cap T_{t_0}B_2)>0\ .$$

集合$\{t;\ T_t\omega\in B_1\cap T_{t_0}B_2\}$が両側に[1]非有界であるような軌道の和集合を$\Omega_1$とする．$\omega\in\Omega_1$に対しては$\{t;\ T_t\omega\in B_i\}$ $(i=1,2)$は明らかに両側に非有界である．

$$(4.10)\qquad |\varphi_a(T_t\omega)-\varphi_a(T_s\omega)|\leqq\frac{2}{a}|t-s|,\qquad \forall t,s,\omega$$

に注意すれば，q，rを有理数として

$$\Omega_1=\{\bigcap_q\bigcup_{r>q}T_r(B_1\cap T_{t_0}B_2)\}\cap\{\bigcap_q\bigcup_{r<q}T_r(B_1\cap T_{t_0}B_2)\}$$

だから$\Omega_1\in\mathbb{B}$であり，更に$P(\Omega_1)\geqq P(B_1\cap T_{t_0}B_2)>0$である．勿論$\Omega_1$は$\{T_t\}$-不変である。

2°．$\{T_t\}$のΩ_1における成分とisomorphic（mod 0）なAmbrose-flowを構成する．$A_i=B_i\cap\Omega_1$ $(i=1,2)$とおく．(4.10)により，$\inf\{|t|;\ T_t\omega\in A_2\}$ $(\omega\in A_1)$や$\inf\{|t|;\ T_t\omega\in A_1\}$ $(\omega\in A_2)$は

$$\frac{a}{2}\left(\inf_{\omega\in B_2}\varphi_a(\omega)-\inf_{\omega\in B_1}\varphi_a(\omega)\right)\geqq\frac{a}{2}\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\right)=\frac{a}{4}>0$$

より小さくない．

---

1) t軸の正負いずれの側にも．

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

$$\Omega_1^* = \Omega_1 \cap \left\{\omega;\ \varphi_a(\omega)=\frac{1}{2},\ \varphi_a(T_t\omega) > \frac{1}{2} \quad 0<t\leqq\frac{a}{8}\right\}$$

とおけば，すべての $\omega\in\Omega_1$ に対し $T_t\omega\in\Omega_1^*$ となる t で $|t|$ がどれだけでも大きいものが正負に存在する。実際任意の $N>0$ に対し，Ω_1 の定義から $T_{t_1}\omega\in A_1$，$T_{t_2}\omega\in A_2$ となる $t_2>t_1>N$ がある．$t=\sup\{s;\ t_1<s<t_2,\ \varphi_a(T_s\omega)=\frac{1}{2}\}$ に対し

$$t_2-t \geqq \frac{a}{2}\left|\varphi_a(T_{t_2}\omega)-\varphi_a(T_t\omega)\right| > \frac{a}{8}$$

だから $T_t\omega\in\Omega_1^*$ $(t>N)$ である．負の方も同様である．

$\omega^*\in\Omega_1^*$ に対し

$$f(\omega^*) = \inf\{t>0;\ T_t\omega^*\in\Omega_1^*\}$$

とおけば，以上により Ω_1 は軌道の有限線分 $\{T_t\omega^*;\ 0\leqq t<f(\omega^*)\}(\omega^*\in\Omega_1^*)$ に分割される．この分割を ξ と書く。Ω_1^* 上の1対1変換 S を

$$S\omega^* = T_{f(\omega^*)}\omega^* \qquad \omega^*\in\Omega_1^*$$

で定義し，$\bar\Omega=\{(\omega^*,u);\ \omega^*\in\Omega_1^*,\ \ 0\leqq u<f(\omega^*)\}$ 上に (4.9) によって1対1変換群 $\{S_t\}$ を定める．$\bar\Omega$ と Ω_1 は自然な対応

$$H(\omega^*,u) = T_u\omega^*$$

によって1対1に対応する．この対応で $\bar\Omega$ の縦線 $C_{\omega^*}=\{(\omega^*,u);\ 0\leqq u<f(\omega^*)\}$ $(\omega^*\in\Omega_1^*)$ への分割は Ω_1 の分割 ξ に対応し，また Ω_1 上ですべての t に対し $T_t=HS_tH^{-1}$ が成り立つ．H によって Ω_1 上の P から $\bar\Omega$ に測度を導けば，$\{T_t\}$ の Ω_1 上の成分は flow $\{S_t\}$ に isomorphic である．

$\{S_t\}$ が実際に Ω_1^* を基礎空間とし automorphism S と ceiling function f とから構成される Ambrose-flow であることを以下順次示す。記号の複雑化をさけるために，Ω_1 と $\bar\Omega$ を混同し $\omega=(\omega^*,u)$ $(\omega=T_u\omega^*$ のとき$)$ とか $\bar\Omega$ の縦線への分割を ξ などと書く。

3°. $\bar f(\omega^*,u)=f(\omega^*)$ が可測であること：

$$\{(\omega^*,u);\ u<t\} = \bigcup_{0\leqq u<t}\{\omega;\ T_{-u}\omega\in\Omega_1^*\}$$

$$= \bigcup'_{0\leqq u<t}\left\{\omega;\ \varphi_a(T_{-u}\omega)=\frac{1}{2},\ \varphi_a(T_{s-u}\omega)>\frac{1}{2} \quad 0<s\leqq\frac{a}{8}\right\}$$

$$= \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup'_{0\leqq r<t}\left[\left\{\omega;\left|\varphi_a(T_{-r}\omega)-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{n}\right\}\cap\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap'_{\frac{1}{k}\leqq q\leqq\frac{a}{8}}\left\{\omega;\ \varphi_a(T_{q-r}\omega)\geqq\frac{1}{2}+\frac{1}{m}\right\}\right]^{1)}$$

だから $\{(\omega^*,u);\ u<t\}\in\mathbb{B}$．特に $\Omega_1^*=\{(\omega^*,u);\ u=0\}\in\mathbb{B}$．また $\{(\omega^*,$

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

$u)$; $\tilde{f}(\omega^*, u) > t\} = \bigcup'_{0 \le r \le t} S_{-r}\{(\omega^*, u);\ u \ge t\} \in \mathcal{B}(\zeta)$.

4°. 分割ζは可測で，対応する測度の標準系$\{P_{C_{\omega^*}}\}$は

(4.11) $\quad dP_{C_{\omega^*}}(u) = du/f(\omega^*), \quad C_{\omega^*} = \{(\omega^*, u);\ 0 \le u < f(\omega^*)\} \in \zeta$

となること：$[0, f(\omega^*))$ 上の普通のルベーグ測度を $dm_{\omega^*}(u) = du$ と書く。$m_{\omega^*}(\cdot)/f(\omega^*)$ が測度の標準系の条件 (C.1)，(C.2) a), b) をみたすことを示せばζは可測であることがわかる（定理3.8の証明参照）．(C.1)は明らか．$A \in \mathcal{B}$であれば $\chi_A(T_t\omega)$は a.e.ω に対してtの可測函数である．これは(C.2, a)を意味する．

$$m_{\omega^*}(A \cap C_{\omega^*}) = \int_{-u}^{f(\omega^*)-u} \chi_A(S_t(\omega^*, u))\,dt$$

左辺はC_{ω^*}上で定数であり，右辺は $\omega = (\omega^*, u)$ の可測函数だから (C.2.b)をみたす。

ζは可測なことがわかったから測度の標準系$\{P_{C_{\omega^*}};\ C_{\omega^*} \in \zeta\}$をもつ．それが(4.11)をみたすことを示そう．$Z \in \mathcal{B}(\zeta)$，$r_1 < r_2$，$q_1 < q_2$は有理数で$r_2 - r_1 = q_2 - q_1$とする．更にすべての$C_{\omega^*} \in Z$に対し，$[r_1, r_2)$，$[q_1, q_2) \subset [0, f(\omega^*))$とする．$Z(s, t) = \{(\omega^*, u);\ s \le u < t,\ C_{\omega^*} \in Z\}$と書くとき，$Z(q_1, q_2) = S_{q_1 - r_1} Z(r_1, r_2)$だから

$$\int_Z P_{C_{\omega^*}}(C_{\omega^*}(r_1, r_2))\,dP = P(Z(r_1, r_2)) = P(Z(q_1, q_2))$$

$$= \int_Z P_{C_{\omega^*}}(C_{\omega^*}(q_1, q_2))\,dP.$$

故に a.e.C_{ω^*} に対し $P_{C_{\omega^*}}$ は長さの等しい有理区間で同じ値をとる．即ち(4.11)が成り立つ．

5°. 空間 $\Omega_1^*(\sim \bar{\Omega}/\zeta)$ に新しく測度

$$P^*(B) = \int_{\bar{B}} \frac{1}{f(\omega^*)}\,dP_\zeta(C_{\omega^*}), \quad \bar{B} = \{(\omega^*, u);\ 0 \le u < f(\omega^*),\ \omega^* \in B\} \in \mathcal{B}(\zeta)$$

を定めると，明らかに $f(\omega^*)$ はP^*-可測であり，また(4.11)より $dP = dP^* \times du$，更に

$$\int_{\Omega^*} f(\omega^*)\,dP^* = P(\Omega_1).$$

---

1) $\bigcup'$, $\bigcap'$は有理数についての和と交わり．

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

6°. 最後にSがルベーグ空間$(\Omega^*, \mathcal{B}^*, P^*)$上の automorphism であることを示す。任意の$B\in\mathcal{B}^*$と十分小さい$t>0$，$n>1/t$，$k\geqq 0$に対し

$$B_n^k = B\times\left[\frac{k}{n}\cdot, k/n\right)\cap\{(\omega^*, u);\ k/n \leqq f(\omega^*) < k+1/n\}$$

$$B_n = \bigcup_{k=0}^{\infty} S_t B_n^k$$

とおけば，

$$B\times[0,t) = \bigcup_{k=0}^{\infty} S_{t-k/n} B_n^k$$

$$P(B_n) = \sum_{k=0}^{\infty} P(B_n^k) = P(B\times[0,t)) = P^*(B)\cdot t\ .$$

他方B_nは$SB\times[0,t)$に収束するので，$SB\in\mathcal{B}^*$で$P^*(SB)=P^*(B)$が得られる．S^{-1}についても同様．

7°. Ω_1^cに対し 1° の操作でΩ_2をきめると，Ω_2での$\{T_t\}$の成分が 2°～6° によって Ambrose-flow で表現される[1]．次に$(\Omega_1\cup\Omega_2)^c$で考える…．この操作は高々可算無限回で終る。何故なら各Ω_nは$P(\Omega_n)>0$だから。

（証明終）

<u>系 1</u>　エルゴード的な可測 flow $\{T_t\}$に対し次のことが成り立つ：

(i) 1つの Ambrose-flow で表現される．

(ii) ceiling function f=定数 で表現されるためには，$1/f$を固有値とすることが必要十分である．

<u>証明</u>　(i) 定理の証明 1° におけるΩ_1は，この場合$P(\Omega_1)=1$になることによる．

(ii) 必要性：$\{T_t\}$を表現する Ambrose-flow を$\{S_t\}$とすれば，$g(\omega^*, u) = e^{2\pi iu/f}\in L^2(\Omega)$に対し

$$g(S_t(\omega^*, u)) = e^{2\pi it/f} g(\omega^*, u).$$

十分性：$g\in L^2(\Omega)$，$g\neq 0$があって$g(T_t\omega)=e^{2\pi it/f}g(\omega)$となる．従って$|g|=a$（定数）．$\Omega^*=\Omega\cap\{\omega; g(\omega)=a\}$，$S\omega^*=T_f\omega^*$，$f$で作られる Ambrose-flow を$\{S_t\}$とすれば，自然な対応

$$(\omega^*, u)\longrightarrow \omega = T_u\omega^*$$

によって$\{T_t\}\sim\{S_t\}$である．

（証明終）

---

1) $\{T_t\}$に isomorphic (mod 0) な Ambrose-flow を$\{T_t\}$の表現という．

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

§4.1で述べたことを示す．$p(\omega)$は点ωの周期である．

系2　(i) $\{\omega; p(\omega)=\infty\} \in \mathcal{B}$.

(ii) 周期的な点のみから成るflowは，automorphismを恒等変換（従ってceiling functionはその点の周期$p(\omega)$）とするようなAmbrose-flowで表現できる．

(iii) 周期的な点のみから成るflowに対し，軌道への分割は可測である．更に函数$p(\omega)$は可測であり，そのtype[1]はflowのmetrical typeを定める．

証明　(i) Ambrose-flow $\{S_t'\}$に対し

(ω^*, u)が$\{S_t\}$の非周期的点 $\Longleftrightarrow$ ω^*がSの非周期的点．

従ってLemma 4.1（§4.1）によって$\{\omega; p(\omega)=\infty\} \in \mathcal{B}$

(ii) $\{S_t\}$を与えられたflowを表現するAmbrose-flowとする。明らかにautomorphism Sは周期的な成分だけから成る。Ω_n^*をSの周期nの成分の基本領域とし

$$\Omega' = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n^*, \quad f'(\omega^*) = \sum_{k=0}^{n-1} f(S^k\omega^*) \qquad \omega^* \in \Omega_n^*$$

とおけば，Ω'上の恒等変換とf'によって構成されるAmbrose-flowは$\{S_t\}$とisomorphicである．

(iii) (ii)により明らか。　　　　（証明終）

定理4.10（第2表現定理）．反周期的な可測flowは1つのAmbrose-flowで表現できる．

証明　前定理による可算個のAmbrose-flowでceiling function f_nが$\inf f_n > 0$であればよい．そのためには，反周期的なAmbrose-flow $\{S_t\}$が，任意の$\delta > 0$に対し$f' \geqq \delta$となるceiling function f'をもつAmbrose-flowで表現できることを示せば十分である．$\{S_t\}$が反周期的だからautomorphism Sも反周期的である．$\{S_t\}$のceiling functionが$f(\omega) \geqq \theta$であるとするとき，$n\theta \geqq \delta$となる自然数nを固定する．定理4.1により，$\Omega_0^* \subset \Omega^*$があって

$$\bigcup_{k=1}^{2n-1} S^{-k}\Omega_0^* = \Omega^* \qquad mod\ 0$$

---

1) 函数f，gが同じtypeとはisomorphism (mod 0) φで$f = g\circ\varphi$となることをいう．

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

かつ $\Omega_0^*, S^{-1}\Omega_0^*, \cdots, S^{-n+1}\Omega_0^*$ は互に交わらない．従って

$$\Omega_0^* = \bigcup_{k=n}^{2n-1} (\Omega_0^* \cap S^{-k}\Omega_0^*) \qquad mod\ 0$$

ここに和は互に交わらない集合の和である．$\omega^* \in \Omega_0^* \cap S^{-k}\Omega_0^*$ $(k=n, n+1, \cdots, 2n-1)$ に対し

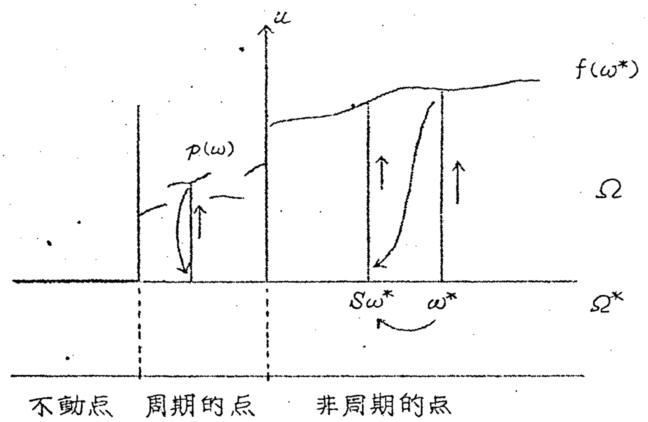
$$S'\omega^* = S^k\omega^*, \qquad f'(\omega^*) = \sum_{j=0}^{k-1} f(S^j\omega^*),$$

とおけば，空間 Ω_0^* に *automorphism* S' と函数 f' が定まる。これらより作られる *Ambrose-flow* は明らかに $\{S_t\}$ と *isomorphic* であり，更に

$$f'(\omega^*) \geqq \sum_{j=0}^{n-1} f(S^j\omega^*) \geqq n\theta \geqq \delta, \qquad {}^\forall\omega^* \in \Omega_0^*.$$

（証明終）

一般の可測 *flow* は下図のような *Ambrose-flow* による表現を持つことがわかった。



§4.6 *skew product* と *derived automorphism*

$(\Omega, \mathcal{B}, P)$ と $(X, \mathcal{B}_X, m)$ はともにルベーグ空間とし，その直積空間を $(\Omega^*, \mathcal{B}^*, P)$

$$\Omega^* = \Omega \times X, \qquad P^* = P \times m$$

としよう．Ω 上に *automorphism* S，X 上に *automorphism* の族 $\{T_\omega; \omega \in \Omega\}$ が与えられているとする．更に $\{T_\omega\}$ は次の条件をみたすと仮定する：

(4.12) $\quad \{(\omega, x); T_\omega x \in B\}, \{(\omega, x); T_\omega^{-1} x \in B\} \in \mathcal{B}^*, \qquad {}^\forall B \in \mathcal{B}_X.$

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

このとき変換

$$T^*(\omega, x) = (S\omega,\ T_\omega x), \qquad (\omega, x) \in \Omega^*$$

は Ω^* 上の automorphism になる．1対1であることは明らかであろう。逆変換は $T^{*-1}(\omega, x) = (S^{-1}\omega,\ T^{-1}_{S^{-1}\omega} x)$ である．可測性は (4.12) により保障される．$f \in L^1(\Omega)$, $g \in L^1(X)$ とすれば，$f(S\omega)\cdot g(T_\omega x)$ は $\mathcal{B}^*$-可測だから Fubini の定理より

$$\iint_{\Omega^*} f(S\omega) g(T_\omega x) dP(\omega) dm(x) = \int_\Omega f(S\omega)\left\{\int_X g(T_\omega x)\, dm(x)\right\} dP(\omega)$$

$$= \int_\Omega f(S\omega)\left\{\int_X g(x)\, dm(x)\right\} = \int_\Omega f(\omega)\, dP(\omega) \int_X g(x)\, dm(x)$$

となって保測性が示された。T^{*-1} についても同様である。この形の T^* を一般に <u>skew product automorphism</u> という．

特に，$X = [0, 1)$，m は普通のルベーグ測度であって，$\varphi(\omega)$ は Ω 上の X-値可測函数とする．このとき $T_\omega x = x + \varphi(\omega)$ (mod 1) は (4.12) をみたす X 上の automorphism の族となり，skew product

$$T^*(\omega, x) = (S\omega,\ x + \varphi(\omega))$$

が定義される。これに関しては [7] にエルゴード性，スペクトル，混合性など精しく研究されている．

$$T_\omega = T, \qquad \forall \omega \in \Omega$$

のときは T^* は直積 $T^* = S \times T$ となる。一方，$S = I$ であれば Ω^* の可測分割 $\zeta^* = \{C_\omega;\ \omega \in \Omega,\ C_\omega = \{(\omega, x);\ x \in X\}\}$ は T^*-不変な元から成り，T_ω は T^* の C_ω における成分とみなせる．

ルベーグ空間 $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ 上の automorphism T から導かれる derived automorphism を定義しよう．そのためにまず次のことを注意する。

<u>Lemma 4.7</u>　$A \in \mathcal{B}$，$P(A) > 0$ であれば　a.e. $\omega \in A$ に対し

$$T^n \omega \in A$$

となる n が正負とも無限に多く存在する．

<u>証明</u>　もし $A \supset A_0$，$P(A_0) > 0$ があって，任意の $\omega \in A_0$ に対しすべての $n > 0$ で $T^n\omega \notin A$ であるとすれば，

$$T^n A_0 \cap A_0 = \phi, \qquad \forall n > 0$$

となる．従って $\{T^n A_0\}$ は互に交わらない可算列となり　$P(A_0) > 0$ に矛盾する。故に　$P(N_0) = 0$　なる N_0 があって

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

$$A-N_0 \ni \omega \Longrightarrow {}^{\exists}n>0,\ T^n\omega \in A .$$

$N_+ = \bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}N_0$ とおけば $P(N_+)=0$ であって

$$A-N_+ \ni \omega \Longrightarrow {}^{\exists}n,\quad T^n\omega \in A-N_+ .$$

故に $A-N_+$ の元 ω に対し，無限に多くの $n>0$ で $T^n\omega\in A$． 負の方も同様である． (証明終)

$P(A)>0$ とし，$\mathbb{B}_A=\{B;\,A\supset B\in\mathbb{B}\}$，$P_A(B)=P(B)/P(A)$ とおいて部分空間 $(A,\mathbb{B}_A,P_A)$ を考える．

$$\tau(\omega)=\min\{n>0;\ T^n\omega\in A\},\qquad \omega\in A$$

は Lemma 4.7 により定義されうる.[1]

$$T'\omega = T^{\tau(\omega)}\omega ,\qquad \omega\in A$$

によって定まる変換は A の automorphism になる．この T' を T が導く A 上の derived automorphism という．

T' が automorphism であることを示す．1 対 1 は明らかである．$A_k=\{\omega;\ \tau(\omega)=k\}$ は互に交わらず，$A=\bigcup_1^{\infty}A_k\cup A_0$，$P(A_0)=0$ となる。従って任意の $B\in\mathbb{B}_A$ に対し $T'B=\bigcup_1^{\infty}T^k(B\cap A_k)\ (mod\ 0)$，$T^k(B\cap A_k)$ は互に交わらない．故に

$$P_A(T'B)=\frac{1}{P(A)}\sum_1^{\infty}P(T^k(B\cap A_k))=\frac{1}{P(A)}\sum_1^{\infty}P(B\cap A_k)=P_A(B)$$

となつて保測性も示された．

<u>定理 4.11</u>　T がエルゴード的であれば，T' もエルゴード的であり

$$\int_A \tau(\omega)\,dP_A(\omega)=\frac{1}{P(A)}$$

が成り立つ．

<u>証明</u>　$B\in\mathbb{B}_A$ が T'-不変であるとしよう．$E=\bigcup_{-\infty}^{\infty}T^nB$ は T-不変だから $P(E)=0$ または 1．

(4.13)　　$P_A(B)\,P(A)\leqq P(E)$.

一方，$\omega\in A\cap E$ とすれば，$\omega'\in B$ と n があって $\omega=T^n\omega'$． 従って $\omega\in B$，即ち $E\cap(A-B)=\phi$ だから

$$(1-P_A(B))\,P(A)\leqq 1-P(E) .$$

(4.13) と合わせて $P_A(B)=0$ または 1 .

---

1) 必要ならば N_+ や N_- を A から除いておく。

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

$B=\bigcup_{0}^{\infty} T^{n}A$ とおけば $TB\subset B$, $P(TB)=P(B)$ だからTのエルゴード性により $B=\Omega$ $(mod\ 0)$．従って $\Omega=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{j=0}^{k-1} T^{j}A_{k}$ $(mod\ 0)$ と互に交わらない和で表わされる．

$$\int_{A}\tau(\omega)\,dP_{A}(\omega)=\sum_{k=1}^{\infty}kP_{A}(A_{k})=\frac{1}{P(A)}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{k-1}P(T^{j}A_{k})=\frac{1}{P(A)}.$$

(証明終)

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

第5章　エントロピー解析

エントロピーはもともと情報理論において Shannon が導入した量であるが, Kolmogorov はこれを flow の理論にもち込み分類の問題に一つの著しい解答を与えた（§5.4参照）。エントロピーは分類の問題だけではなく, 更に flow の構造を研究するのに有効な道具であると思われる。この章の内容は「確率論の手引」Vol.4 と重複する所が多い。証明の詳細は「手引」を引用することがある。

この章を通じて $(\Omega, \mathbb{B}, P)$ はルベーグ空間, 考える分割はすべて可測とし, 一々断わらない。分割の間の関係は $mod\ 0$ で考えるが, これも断わらない。

§5.1 分割のエントロピー

分割 $\zeta=\{C\}$ に関する測度の標準形を $\{P(\cdot|\zeta;C)\}$ とし, 分割 $\xi=\{D\}$ に対し

$$H_0(\xi|\zeta;\omega)=-\log P(D\cap C|\zeta;C), \qquad \omega\in D\cap C$$

とおき, その平均値

$$H(\xi|\zeta)=E\{H_0(\xi|\zeta;\omega)\}$$

を分割 ξ の条件 ζ つきエントロピーという. 特に可算分割 $\alpha=\{A_n\}$ に対しては

$$H(\alpha|\zeta)=-\sum_n E\{P(A_n|\zeta;C)\log P(A_n|\zeta;C)\}^{1)}$$

となる. $\zeta=\nu$ のときは $P(\cdot|\nu)=P(\cdot)$ だから

$$H(\xi)=H(\xi|\nu)$$

と書く.

$$\mathbb{Z}=\{\alpha;\ H(\alpha)<+\infty\}$$

とおく. $\mathbb{Z}$ の元 α は必然的に可算分割である.

Lemma 5.1　(i) $H(\xi|\zeta)\geqq 0$, $H(\xi|\zeta)=0 \Leftrightarrow \xi\leq\zeta$.

(ii) $\xi\leq\zeta \Rightarrow H(\xi\vee\eta|\zeta)=H(\eta|\zeta)$.

---

1) $0\log 0=0$ ときめる.

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

(iii) $\xi \leq \eta \Longrightarrow H(\xi|\zeta) \leqq H(\eta|\zeta)$.

(iv) $H(\xi \vee \eta|\zeta) = H(\xi|\zeta) + H(\eta|\zeta \vee \xi)$.

証明　(i) ～ (iii) は定義より明らか．(iv)は $C \in \zeta$, $D \in \xi$, $E \in \eta$ に対し

$$P(D \cap E \cap C|\zeta; C) = P(D \cap C|\zeta; C)\, P(E \cap D \cap C|\zeta \vee \xi; D \cap C), \quad a.e.$$

による．

Lemma 5.2　(i) $\alpha \in \mathbb{Z}$, $\zeta_n \uparrow (\downarrow)$, $\zeta = \bigvee^{\infty} \zeta_n$ $(\zeta = \bigwedge_{\infty} \zeta_n)$

$\Longrightarrow$　$\lim_{n\to\infty} H(\alpha|\zeta_n) = H(\alpha|\zeta)$.

(ii) $\xi_n \uparrow$, $\xi = \bigvee^{\infty} \xi_n \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} H(\xi_n|\zeta) = (\xi|\zeta)$.

証明　(i) Doob[8] VII 定理4.3 により，$A \in \mathbb{B}$ に対し

$$\lim_{n\to\infty} P(A|\zeta_n; \omega) = \lim_{n\to\infty} P(A|\zeta; \omega) \qquad a.e.$$

α は可算分割だから

$$\lim_{n\to\infty} H_0(\alpha|\zeta_n) = H_0(\alpha|\zeta) \qquad a.e.$$

$0 \leqq H(\alpha|\zeta) = E\{H_0(\alpha|\zeta)\} \leqq H(\alpha) < +\infty$　だから

$$\lim_{n\to\infty} H(\alpha|\zeta_n) = \lim_{n\to\infty} E\{H_0(\alpha|\zeta_n)\} = E\{H_0(\alpha|\zeta)\} = H(\alpha|\zeta).$$

(ii) $\xi \in \mathbb{Z}$ の場合：$\xi = \{D_n\}$ とする．任意の $\delta > 0$ を固定する．

$$H(\xi) - \delta \leqq -\sum_{j=1}^{N} P(D_j) \log P(D_j)$$

をみたす N が存在する．$D_0 = \bigcup_{j \geqq N+1} D_j$ とし，

$$\alpha = \{D_0, D_1, \cdots, D_N\}$$

とおけば，$H(\alpha) \geqq H(\xi) - \delta$ であり，(i) より

$$\lim_{n\to\infty} H(\alpha|\xi_n) = H(\alpha|\xi) = 0 .$$

Lemma 5.1 (iii), (iv) により

$$\lim_{n\to\infty} H(\xi_n) = \lim_{n\to\infty} \{H(\xi_n) + H(\alpha|\xi_n)\}$$
$$= \lim_{n\to\infty} H(\xi_n \vee \alpha) \geqq H(\alpha) \geqq H(\xi) - \delta .$$

逆の不等式は Lemma 5.1 (iii) より明らかだから，

$\xi \in \mathbb{Z}$ のとき，$\lim_{n\to\infty} H(\xi_n) = H(\xi)$

がわかった．$\zeta = \{C\}$ に対し空間 $(C, P(\cdot|\zeta; C))$ で考え，$H_1(\xi|\zeta; C) = E\{H_0(\xi|\zeta; \omega)|\zeta; C\}$ と書くことにすれば，上のことは

$$\lim_{n\to\infty} H_1(\xi_n|\zeta; C) = H_1(\xi|\zeta; C) \qquad a.e.$$

を意味する．これは単調増大極限だから積分して結論を得る．

$H(\xi) = \infty$ のとき：任意に大きい数 L に対し

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

(5.1) $$H(\alpha) \geqq L$$

をみたす有限分割 $\alpha \leqq \xi$ が存在する．何故なら ξ が可算無限分割のときは上記と同様．ξ が可算でないときは，ある正測度の ξ-集合 A は atom を持たない（A/ξ が）．従って任意の n に対し，A の ξ-集合による分割 $\{A_j^{(n)};\ 1 \leqq j \leqq k_n\}$ で，$P(A_j^{(n)}) < \frac{1}{n}$ をみたすものがある．$\alpha_n = \{A_1^{(n)}, \cdots, A_{k_n}^{(n)}, A_0^{(n)} = A^c\}$ は

$$H(\alpha_n) \geqq P(A) \log n$$

をみたし，(5.1) をみたす有限分割 $\alpha \leqq \xi$ の存在がわかった．あとは前の場合と同様．　　　　（証明終）

<u>Lemma 5.3</u>　(i) $\eta \leqq \zeta \Longrightarrow H(\xi|\eta) \geqq H(\xi|\zeta)$.

(ii) $H(\xi \vee \eta|\zeta) \leqq H(\xi|\zeta) + H(\eta|\zeta)$.

(iii) ξ と η が独立 $\Longrightarrow H(\xi \vee \eta) = H(\xi) + H(\eta)$.

<u>証明</u>　(i) $\xi = \{D_n\}$ のとき：$\eta \leqq \zeta$ だから

$$E\{P(D_n|\zeta;C)|\eta;E\} = P(D_n|\eta;E), \qquad a.e.\ E \in \eta.$$

函数 $\varphi(x) = -x \log x$ は凸だから

$$\begin{aligned} H(\xi|\zeta) &= \sum_n E\{\varphi(P(D_n|\zeta;C))\} \\ &= \sum_n E\{E\{\varphi(P(D_n|\zeta;C))|\eta;E\}\} \\ &\leqq \sum_n E\{\varphi(E\{P(D_n|\zeta;C)|\eta;E\})\} \\ &= \sum_n E\{\varphi(P(D_n|\eta;E)\} \\ &= H(\xi|\eta). \end{aligned}$$

一般のとき：ξ は可測だから有限分割の単調増大極限としてあらわされる：$\xi = \overset{\infty}{\vee}\alpha_n$, $\alpha_n \uparrow$, α_n：有限分割．Lemma 5.2 (ii) より

$$H(\xi|\eta) = \lim_{n\to\infty} H(\alpha_n|\eta) \geqq \lim_{n\to\infty} H(\alpha_n|\zeta) = H(\xi|\zeta).$$

(ii)　(i) と Lemma 5.1 (iv) による．

(iii) 明らか。　　　　（証明終）

§5.2 automorphism のエントロピー

Ω 上の automorphism T と分割 α に対し

$$\alpha_T^n = \bigvee_{k=0}^{n-1} T^k\alpha, \quad \alpha_T^- = \bigvee_{k=1}^{\infty} T^{-k}\alpha, \quad \alpha_T = \bigvee_{-\infty}^{\infty} T^k\alpha$$

とおく．

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

$$h(T) = \sup_{\alpha \in \mathbb{Z}} H(\alpha | \alpha_T^-)$$

を *automorphism* T のエントロピーと呼ぶ。

Lemma 5.4 $\quad H(T\xi | T\zeta) = H(\xi | \zeta)$

証明 有限分割 α の元 $A \in \alpha$ と任意の $B \in \mathcal{B}(\zeta)$ に対し

$$\int_B P(A|\zeta; C)\,dP(C) = P(A \cap B) = P(TA \cap TB)$$
$$= \int_{TB} P(TA|T\zeta; TC)\,dP(TC)$$
$$= \int_B P(TA|T\zeta; TC)\,dP(C).$$

故に $a.e.$ $C \in \zeta$ に対し

(5.2) $\qquad P(A|\zeta; C) = P(TA|T\zeta; TC), \qquad {}^\forall A \in \alpha.$

$\omega \in A \cap C$ であれば $T\omega \in TA \cap TC$ だから

$$H_0(\alpha|\zeta;\omega) = -\log P(A|\zeta; C) = -\log P(TA|T\zeta; TC) = H_0(T\alpha|T\zeta; T\omega).$$

故に $H(\alpha|\zeta) = E\{H_0(\alpha|\zeta;\omega)\} = E\{H_0(T\alpha|T\zeta; T\omega)\} = H(T\alpha|T\zeta)$.

ξ を有限分割の単調増大列で近似し *Lemma* 5.2, (ii) を使えば *lemma* の主張を得る。 (証明終)

注意 測度の標準系の一意性を使えば, $a.e.$ $C \in \zeta$ に対し (5.2) がすべての $A \in \mathcal{B}$ について成り立つ。従って上の証明において直ちに $H_0(\xi|\zeta;\omega) = H_0(T\xi|T\zeta; T\omega)$ $(a.e.)$ を得る.

Lemma 5.5 [1)] $\quad \alpha, \beta \in Z$, $T\eta = \eta$ とする.

(i) $H(\alpha|\alpha_T^- \vee \eta) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(\alpha_T^n | \eta)$.

(ii) $\alpha \le \beta \Longrightarrow H(\alpha|\alpha_T^- \vee \eta) \leqq H(\beta|\beta_T^- \vee \eta)$

(iii) $H(\beta|\beta_T^- \vee \eta) \leqq H(\alpha|\alpha_T^- \vee \eta) + H(\beta|\alpha_T \vee \eta) \leqq H(\alpha|\alpha_T^- \vee \eta) + H(\beta|\alpha \vee \eta)$.

証明 (i) $H(\alpha_T^{k+1}|\eta) = H(\alpha_T^k|\eta) + H(T^k\alpha|\alpha_T^k \vee \eta)$

$$= H(\alpha_T^k|\eta) + H(\alpha|\bigvee_{l=1}^{k} T^{-l}\alpha \vee \eta).$$

$$\frac{1}{n} H(\alpha_T^n|\eta) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} H(\alpha|\bigvee_{l=1}^{k} T^{-l}\alpha \vee \eta) + \frac{1}{n} H(\alpha|\eta).$$

Lemma 5.2, (i) より $H(\alpha|\bigvee_{l=1}^{k} T^{-l}\alpha \vee \eta) \to H(\alpha|\alpha_T^- \vee \eta)$ だから $\frac{1}{n} H(\alpha_T^n|\eta) \to H(\alpha|\alpha_T^- \vee \eta)$.

(ii) (i) と *Lemma* 5.1 (iii) による.

---

1) $\eta = \nu$ とおけば η のない関係式を得る.

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

(iii) $$H(\beta_T^n|\eta) \leqq H(\beta_T^n \vee T^{-k}\alpha_T^{2k+n}|\eta)$$
$$= H(T^{-k}\alpha_T^{2k+n}|\eta) + H(\beta_T^n|T^{-k}\alpha_T^{2k+n}\vee\eta)$$
$$\leqq H(\alpha_T^{2k+n}|\eta) + nH(\beta|T^{-k}\alpha\vee\cdots\vee T^k\alpha\vee\eta)$$

だから (i) より
$$H(\beta|\beta_T^-\vee\eta) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H(\beta_T^n|\eta)$$
$$\leqq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H(\alpha_T^{2k+n}|\eta) + H(\beta|T^{-k}\alpha\vee\cdots\vee T^k\alpha\vee\eta)$$
$$= H(\alpha|\alpha_T^-\vee\eta) + H(\beta|T^{-k}\alpha\vee\cdots\vee T^k\alpha\vee\eta)$$

$k\to\infty$ として最初の不等式を得る．第２の不等式は明らか． (証明終)

Lemma 5.6 (i) $\alpha\in\mathbb{Z}$, $\alpha_T=\varepsilon \Longrightarrow h(T)=H(\alpha|\alpha_T^-)$

(ii) $\alpha_n\uparrow$, $\{\alpha_n\}\subset\mathbb{Z}$, $\bigvee_n\alpha_n=\varepsilon \Longrightarrow h(T)=\lim_{n\to\infty}H(\alpha_n|(\alpha_n)_T^-)$, $\forall T$.

証明 (i) 任意の $\beta\in\mathbb{Z}$ に対し前 Lemma (iii) より
$$H(\beta|\beta_T^-)\leqq H(\alpha|\alpha_T^-)+H(\beta|\alpha_T)=H(\alpha|\alpha_T^-).$$

(ii) $$H(\beta|\beta_T^-)\leqq H(\alpha_n|(\alpha_n)_T^-)+H(\beta|\alpha_n),\quad \forall n,\ \forall\beta\in\mathbb{Z}$$

前 Lemma (ii) より $H(\alpha_n|(\alpha_n)_T^-)$は単調増大，Lemma 5.2, (i)から
$\lim H(\beta|\alpha_n)=H(\beta|\varepsilon)=0$. (証明終)

この Lemma の (ii) により

Lemma 5.7 $h(T)$の定義における上限は有限分割の範囲に限ってよい。

定理5.1 (i) T_1 が T_2 の factor-automorphism (または homomorphic image) であれば
$$h(T_1)\leqq h(T_2).$$

(ii) T_1, T_2 が同じ metrical type を持てば[1]
$$h(T_1)=h(T_2).$$

(iii) $$h(T_1\times T_2)=h(T_1)+h(T_2).$$

(iv) $\zeta_n\uparrow$, $\bigvee_n\zeta_n=\varepsilon$, $T\zeta_n=\zeta_n$ $\forall n$
$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty}h(T_{\zeta_n})=h(T).$$

証明 (i) (ii) は明らか．(iii) は Lemma 5.3 (iii), Lemma 5.5 (i), Lemma 5.6 (ii) による。(iv) を示す．有限分割の増大列 $\{\alpha_k\}$ で次の条件をみたすものが選べる：各kに対し $\alpha_k\leqq\zeta_{n_k}$ となる n_k があり，かつ $\bigvee\alpha_k=\varepsilon$.
$$h(T)\geqq h(T_{\zeta_{n_k}})\geqq H(\alpha_k|(\alpha_k)_T^-).$$ (証明終)

---

1) T_1 と T_2 が弱同値であれば十分．

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

Lemma 5.8　$\alpha_n \uparrow$, $\{\alpha_n\} \subset \mathcal{Z}$, $\bigvee_n (\alpha_n)_T = \varepsilon$

$$\Longrightarrow \quad h(T) = \lim_{n\to\infty} H(\alpha_n | (\alpha_n)_T^-).$$

証明　$\zeta_n = (\alpha_n)_T$ は定理 5.1 (iv) の仮定をみたし，Lemma 5.6、(i)により

$$H(\alpha_n | (\alpha_n)_T^-) = h(T_{\zeta_n}).$$
（証明終）

定理 5.2　$\zeta = \{C\}$ が T-不変な集合から成る分割（即ち $TC = C$, ${}^\forall C \in \zeta$）であれば，成分 T_C に対し

$$h(T) = \int_{\Omega/\zeta} h(T_C)\, dP_\zeta(C).$$

証明　$\{\alpha_n\}$をΩの有限分割の増大列で $\bigvee_n \alpha_n = \varepsilon$ とすれば，各 $C \in \zeta$ に対し $\{\alpha_n \cap C\}$ はCにおいて同じ性質を持つ。従って単調増大極限として

$$\lim_{n\to\infty} H(\alpha_n | (\alpha_n)_T^-) = h(T)$$

$$\lim_{n\to\infty} H(\alpha_n \cap C | (\alpha_n \cap C)_{T_C}^-)^{1)} = h(T_C), \quad {}^\forall C \in \zeta.$$

一方定義により

$$H(\alpha_n \cap C | (\alpha_n \cap C)_{T_C}^-) = E\{H_0(\alpha_n \cap C | (\alpha_n \cap C)_{T_C}^-) | \zeta;\, C\}$$
$$= E\{H_0(\alpha_n | (\alpha_n)_T^-) | \zeta;\, C\}$$

だから

$$E\{H(\alpha_n \cap C | (\alpha_n \cap C)_{T_C}^-)\} = H(\alpha_n | (\alpha_n)_T^-).$$
（証明終）

定理 5.3 ([1]).　T' を集合 A 上にTが導く derived automorphism とすると

$$h(T')\ P(A) = h(T)^{2)}.$$

証明は [23] pp. 73〜75 参照。

Ωはルベーグ空間，$X = [0, 1)$ として，直積測度空間 $\Omega^* = \Omega \times X$ 上の skew product（§ 4.6参照）

(5.3)　$T^*(\omega, x) = (S\omega, x + \varphi(\omega))$,　$\omega \in \Omega$, $x \in X$

に対し，

定理 5.4 ([2]).　$h(T^*) = h(S)$.

証明は [23] 参照。

---

1) 空間 (C, P_C) におけるエントロピーである．同じ記号を使っても混乱しないであろう。

2) hやHの定義は測度を正規化して行なう．

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

一般の skew product についてはどうか？

$$T^*(\omega, x) = (S\omega, T_\omega x)$$

とおき，

(5.4) $$h(T^*) = h(S) + \int_\Omega h(T_\omega)\, dP(\omega)$$

が成り立つか？　特別な場合，(1°) $T_\omega = T$ ($^\forall\omega \in \Omega$) であれば定理 5.1 (iii) により (5.4) が成り立つ；(2°) $S = I$ のときは T_ω は T^* の成分だから定理 5.2 は (5.4) を意味する；(3°) (5.3) の場合は T_ω は周期的であるか Weyl-automorphism であって，あとで示すように $h(T_\omega) = 0$ となり，この場合も定理 5.4 より (5.4) が得られる．

しかし (5.4) は一般には成立しない。反例をあげる．$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$，$P(\Omega_i) = \frac{1}{2}$ ($i = 1, 2$)，S は Ω 上の周期 2 (即ち $S^2 = I$) の automorphism で $S\Omega_1 = \Omega_2$，$S\Omega_2 = \Omega_1$ とする．T を X 上のエントロピー正の automorphism とし

$$T_\omega = \begin{cases} T, & \omega \in \Omega_1 \\ T^{-1}, & \omega \in \Omega_2 \end{cases}$$

とおく。skew product $T^*(\omega, x) = (S\omega, T_\omega x)$ は周期 2 をもつ。次節定理 5.5 により，周期的な automorphism はエントロピー 0 (例えば $2h(S) = h(I) = 0$) であり，また $h(T^{-1}) = h(T)$ である。

$$h(S) + \int_\Omega h(T_\omega)\, dP(\omega) = h(T) > 0 = h(T^*)$$

となって (5.4) は成り立たない。[3] によれば

$$h(T^*) = h(S) + \int_\Omega f_S(\omega)\, dP(\omega)$$

となる函数 $f_S(\omega)$ が存在する．どのような場合に

$$\int_\Omega f_S(\omega)\, dP = \int_\Omega h(T_\omega)\, dP$$

となるだろうか？

Weyl-automorphism $T_\theta x = x + \theta$, $x \in [0, 1)$ のエントロピーが 0 であることを示す。任意の有限分割 α をとると $\alpha_{T_\theta}^- = \varepsilon$ となる。

<u>Lemma 5.9</u>　$^\exists\alpha \in \mathcal{Z}$, $\alpha_T^- = \varepsilon \Longrightarrow h(T) = 0$.

<u>証明</u>　$h(T) = H(\alpha \mid \alpha_T^-) = H(\alpha \mid \varepsilon) = 0$.

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

§5.3 flow のエントロピー

単独の automorphism のエントロピーは前節で調べたが，この節では automorphism の群（即ち flow）に対してエントロピーがどう関係するかを調べる．

定理 5.5　　$h(T^n)=|n|\,h(T)$．

証明　$\alpha\in\mathbb{Z}$ に対し $H(\alpha_T^n)=H(\alpha_{T^{-1}}^n)$ だから Lemma 5.5 (i) により $h(T)=h(T^{-1})$．従って $n>0$ のとき示せばよい．任意の $\alpha\in\mathbb{Z}$ に対し

$$H(\alpha\,|\,\alpha_{T^n}^-)=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}H(\alpha\vee T^n\alpha\vee\cdots\vee T^{n(k-1)}\alpha)$$

$$\leqq\lim_{k\to\infty}\frac{n}{nk}H(\alpha_T^{nk})$$

$$=nH(\alpha\,|\,\alpha_T^-)\,.$$

逆に任意の $\delta>0$ に対し

$$H(\alpha\,|\,\alpha_T^-)>h(T)-\delta$$

をみたす $\alpha\in\mathbb{Z}$ がある．$\beta=\alpha_T^n\in\mathbb{Z}$ とおけば

$$H(\beta\,|\,\beta_{T^n}^-)=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}H(\beta_{T^n}^k)=\lim_{k\to\infty}\frac{n}{nk}H(\alpha_T^{nk})=nH(\alpha\,|\,\alpha_T^-)\,.$$

従って，$h(T^n)\geqq nH(\alpha\,|\,\alpha_T^-)>n(h(T)-\delta)$．　　　　（証明終）

系　flow $\{T_t\}$ に対し，r が有理数のとき

$$h(T_{rt})=|r|\,h(T_t)\,,\qquad \forall t\,.$$

$\{S_t\}$ を Ω^* 上の automorphism S と ceiling function f によって，$\Omega=\{(\omega^*,u);\ \omega^*\in\Omega^*,\ 0\leqq u<f(\omega^*)\}$ 上に構成される Ambrose-flow とする．$P(\Omega)=\int_{\Omega^*}f(\omega^*)\,dP^*=1$ と正規化しておく．定理 5.3, 4 を使って次のことが示せる（[23] 参照）．

定理 5.6.（[2]）　$h(S_t)=|t|\,h(S)\,P^*(\Omega^*)\,,\qquad \forall t\,.$

一般の可測 flow $\{T_t\}$ に対し

定理 5.7.（[2]）　$h(T_t)=|t|\,h(T_1)\,,\qquad \forall t\,.$

証明　$\{T_t\}$ の不動点の全体 Ω_∞ は可測（定理 4.9，系 2）な不変集合である．$\{T_t\}$ の Ω_∞^c での成分は Ambrose-flow と同値な可算個の成分に分解される（定理 4.9）．対応する分割を $\{\Omega_j;\ j=1,2,\cdots\}$ とすれば，定理 5.2 によって

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

$$h(T_t) = \sum_{j=1}^{\infty} h((T_t)_{\Omega_j})\, P(\Omega_j), \qquad \forall t.$$

明らかに $h((T_t)_{\Omega_\infty}) = 0$. 定理5.6より

$$h((T_t)_{\Omega_j}) = |t|\, h((T_1)_{\Omega_j}); \qquad 1 \leqq j < \infty.$$

再び定理5.2を使えば

$$h(T_t) = |t| \sum_{j=1}^{\infty} h((T_1)_{\Omega_j})\, P(\Omega_j) = |t|\, h(T_1).$$ (証明終)

定義5.1 $h(T_1)$ を flow $\{T_t\}$ のエントロピーという.

定理5.7を直接示すことはできないか？ flowの可測性の仮定をはずして，§7.2，定義7.2の連続flowに対して成り立つか？ また，ルベーグ空間の仮定をせずにはどうか？ これらに関係して次の問題がある：

$$TS = ST \Longrightarrow h(TS) \leqq h(T) + h(S) \quad ?$$

もしこの問題が肯定的に解ければ，定理5.5，系により

$$h\left(T_{\frac{t+s}{2}}\right) = h\left(T_{\frac{t}{2}} T_{\frac{s}{2}}\right) \leqq \frac{1}{2}\{h(T_t) + h(T_s)\}$$

となり，$h(T_t)$ は t に関し凹であることがわかる。従つて連続となり，同系より定理5.7が出る。

§5.4 metrical invariantとしてのエントロピー

この節の目的は次の定理である.

定理5.8([27]) σ-ルベーグ・スペクトル[1]をもつ automorphism で metrical type の異なるものが無限個[2]存在する.

Bernoulli-automorphism を用いてこれを示す. Tを Bernoulli-automorphism とし，state space Ω_0は有限集合 $\{a_1, a_2, a_m\}$ であり，$P_0(a_j) = p_j$ $(\sum_{j=1}^{m} p_j = 1)$ とする[3]

Lemma 5.10 $h(T) = -\sum_{j=1}^{m} p_j \log p_j$.

---

1) $L^2(\Omega) \ominus C$ で考えて

2) 実は連続濃度 $\aleph$ 個

3) §1.2，例4 参照.

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

証明　$A_j=\{\omega;\omega_0=a_j\}$, $\alpha=\{A_1,A_2,\cdots,A_m\}$ とおけば $\alpha_T=\varepsilon$ だから Lemma 5.6 により

$$h(T)=H(\alpha|\alpha_T^-).$$

他方 $\{A_j\}$ と $\{T^{-k}A_j;\ k>0,\ 1\leqq j\leqq m\}$ は独立だから

$$H(\alpha|\alpha_T^-)=H(\alpha)=-\sum p_j\log p_j.$$ （証明終）

Lemma 5.11　任意の $h(0<h\leqq\infty)$ に対し

(5.5)　　$h(T)=h$

となる Bernoulli-automorphism T が存在する。

証明　$\varphi(x)=-x\log x$ は凸函数だから，$\sum_{j=1}^m p_j=1$ に注意して

$$-\sum_{j=1}^m p_j\log p_j=\frac{m}{m}\sum_{j=1}^m\varphi(p_j)\leqq m\varphi\left(\frac{1}{m}\sum_{j=1}^m p_j\right)=\log m.$$

また $-\sum_{j=1}^m p_j\log p_j$ は $p_1,\cdots,p_m$ について連続だから，各 m について，任意の $0<h\leqq\log m$ に対し (5.5) をみたす Bernoulli-automorphism T が存在する。故に $0<h<\infty$ に対しては示せた。$h=\infty$ に対しては，可算無限集合 $\Omega_0=\{a_j\}$, $P_0(a_j)=p_j$ を state space にし

$$-\sum_{j=1}^\infty p_j\log p_j=\infty$$

となるような Bernoulli-automorphism を考えればよい．実際，任意に大きい K に対し

$$-\sum_{j=1}^J p_j\log p_j>K$$

なる J を定め，$A_j=\{\omega;\omega_0=a_j\}$, $\alpha^J=\{A_1,\cdots,A_J,\bigcup_{j>J}A_j\}$ とすれば

$$h(T)>H(\alpha^J|\alpha^{J\,-}_T)=H(\alpha^J)>K.$$ （証明終）

エントロピーが違えば metrical type が違う（定理5.1）ので定理5.8のためには次のことを示せばよい。

定理5.9　すべての Bernoulli-automorphism は $L^2(\Omega)\ominus C$ で σ-ルベーグ・スペクトルをもつ。

証明　$\chi(x)$ は Ω_0 上の可測函数で

$$\int\chi(x)\,dP_0=0,\quad\int|\chi(x)|^2dP_0=1$$

をみたすものとする。$\{\psi_j\}$ は $L^2(\mathbb{B}_{-1})^{1)}$ の完全正規直交系とする．

$$\varphi_{j0}(\omega)=\chi(\omega_0)\psi_j(\omega),\qquad j=1,2,\cdots$$

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

$$\varphi_{jn}(\omega) = U^{-n}\varphi_{j0}(\omega) = \chi(\omega_{-n})\psi_j(T^{-n}\omega) \qquad n=\pm 1, \pm 2, \cdots$$

とおく．明らかに $\varphi_{jn} \in L^2(\mathbb{B}_{-n})$ であり

$$(\varphi_{jn}, \varphi_{im}) = E\{\chi(\omega_{-n})\psi_j(T^{-n}\omega)\bar{\chi}(\omega_{-m})\bar{\psi}_i(T^{-m}\omega)\}$$

$$= \begin{cases} E\{\chi(\omega_{-n})\}E\{\psi_j(T^{-n}\omega)\bar{\chi}(\omega_{-m})\bar{\psi}_i(T^{-m}\omega)\} = 0, & m>n \\ E\{|\chi(\omega_{-n})|^2\}E\{\psi_j(T^{-n}\omega)\bar{\psi}_i(T^{-n}\omega)\} = \delta_{ji}, & m=n \end{cases}$$

だから $\{\varphi_{jn};\ j=1,2,\cdots,\ n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots\}$ は正規直交系である．

$$U\varphi_{jn} = \varphi_{j\,n-1}, \qquad \forall j, n$$

だから定理 1.5′により，$\{\varphi_{jn}\}$ の張る部分空間で U は σ-ルベーグ・スペクトルをもつ．他方，Bernoulli-automorphism は Kolmogorov-automorphism だから定理 1.6 により $L^2(\Omega)\ominus C$ で一様ルベーグ・スペクトルをもつ．故に定理の主張を得る。（証明終）

flow に対しても定理 5.8 と同様の主張ができる．以下 Ambrose-flow を使ってそのことを示す。基礎になる (Ω^*, S) は有限 state $\Omega_0=\{a_1,\cdots,a_m\}$, $P_0(a_j)=p_j$ をもつ Bernoulli-automorphism とし，ceiling function $f(\omega^*)$ は $A_j^*=\{\omega^*;\ \omega_0^*=a_j\}$ $(1\leqq j\leqq m)$ に対し

$$f(\omega^*) = \sum_{j=1}^{m} f_j \chi_{A_j^*}(\omega^*), \quad f_i \neq f_j \ (i\neq j), \quad \sum_{j=1}^{m} f_j p_j = 1$$

とする．これらにより構成される Ambrose-flow $\{S_t\}$ に対し，定理 5.6 と Lemma 5.10 により

$$h(S_1) = h(S) = -\sum_{j=1}^{m} p_j \log p_j$$

である．

$\{S_t\}$ は Kolmogorov-flow であることを示す．$\mathbb{B}_0^*$ を

(5.6) $\quad B^*=\{\omega^*;(\omega^*_{n_1},\cdots,\omega^*_{n_\ell})\in B_\ell\},\ B_\ell\subset\Omega_0^\ell,\ 0\leqq n_1<\cdots<n_\ell,\ \ell=1,2,\cdots$

の形の矩形（の有限個の和）集合から生成される完備な σ-algebra[2] とすれば，明らかに，$S\mathbb{B}_0^*\supset\mathbb{B}_0^*$, $\bigvee^{\infty} S^n\mathbb{B}_0^*=\mathbb{B}^*$, $\bigcap_{-\infty} S^n\mathbb{B}_0^*=\mathcal{Q}^*$ が成り立つ．$(\Omega^*,\mathbb{B}_0^*,P^*)$ と $(R^1,\mathbb{B}^1,du)$ の直積測度空間（の Ω への制限）の σ-algebra $\mathbb{B}_0$ が (K.1), (K.2) をみたすことは容易にわかる．$\bigcap_{-\infty} S_t\mathbb{B}_0\ni B$ はすべての t に

---

1) $\mathbb{B}_{-1}$ は $\{\omega;\ \omega_n\in B\}$, B は Ω_0 の可測集合，$n<0$，の形の集合から生成される σ-algebra．$\{\psi_j\}$ が無限集合であることは明らかであろう．

2) $\mathbb{B}_0^*$ は時刻 0 以後で定まる σ-algebra．

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

対し $\bigcap_{-\infty} S_t \mathbb{B}_0 \ni S_t B$ だから，(K.3)のためには

(5.7) $\qquad S_t B \in \mathbb{B}_0, \ {}^{\forall}t \Longrightarrow P(B)=0$ または 1

を示せば十分である．

まず，特に $B = B^* \times [s_1, s_2)\ (\in \mathbb{B}_0)$，$B^* = \{\omega^*;\ \omega_0^* = a_{j0},\ \omega_1^* = a_{j1}, \cdots, \omega_n^* = a_{jn}\}$，$s_1 < s_2 < \min f_j$ に対しては $t > t_0 = \sum_{k=0}^{n} f_{jk}$ のとき

$$S_t B = S_{t-t_0}[\{\omega^*;\ \omega_{-n-1}^* = a_{j0}, \cdots, \omega_{-1}^* = a_{jn}\} \times [s_1, s_2)]$$

である．同様に（5.6）の形の B^* と u-軸の区間との直積集合の有限和 B に対し，t が十分大きければ

$$S_t B = \bigcup_k \{B_k^* \times [s_{k_1}, s_{k_2})\}$$

のごとく相交わらない矩形集合の和で表わすとき，各 B_k^* は $\{\omega_{-n}^*;\ n>0\}$ にのみ関係し $\mathbb{B}_0^*$ と独立である．従って $a.e.\ u$ に対し $(S_t B)_u$[1] は $\mathbb{B}_0^*$ と独立となり，もし $S_t B \in \mathbb{B}_0$ であれば $a.e. u$ に対し $(S_t B)_u \in \mathbb{B}_0^*$ だから，$a.e.$ u に対し $P^*((S_t B)_u \cap A_j) = P^*(A_j)$ または 0 となる。$\{u;\ P((S_t B)_u \cap A_j) = P(A_j)\}$ は区間の和であることに注意すれば，$P(B) = P(S_t B) = 0$ または 1 であることが t を動かすことによってわかる．一般の $B \in \mathbb{B}_0$ は上のような B で ρ-近似できるので，（5.7）がいえて結局（K.3）が成り立つことがわかる。

次章定理6.3によれば Kolmogorov-flow は σ-ルベーグ・スペクトルをもつから，automorphism の場合と同じ論法で次のことがわかる．

<u>定理5.10</u> σ-ルベーグ・スペクトルをもつ flow で metrical type の異なるものが無限個（連続濃度）存在する。

---

1) 一般に $A_u = \{\omega^*;\ (\omega^*, u) \in A\}$.（$A$ の u-切断）.

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

第6章 Kolmogorov-flow

空間Ωや分割に関しては前章と同じ約束とする．§3.4の議論により，$\{T_t\}$がΩ上のKolmogorov-flowであれば次の3条件をみたすΩの可測分割ξ_0が存在する：

(K.1) $T_t\xi_0 < T_s\xi_0$, $t < s$

(K.2) $\bigvee_t T_t\xi_0 = \varepsilon$,

(K.3) $\bigwedge_t T_t\xi_0 = \nu$.

逆にこのような条件をみたす分割ξ_0があれば，$\{T_t\}$はKolmogorov-flowである．従ってルベーグ空間上では上記の条件をKolmogorov-flowの定義とみなしてよい．§6.2，3ではそのようにする．

§6.1 混 合 性

定理6.1 Kolmogorov-flowはすべての位数の混合性を持つ．

証明 $H_0 = L^2(\mathbb{B}_0)$, $H_t = U_{-t}H_0$とおけば，$H_t = L^2(T_t\mathbb{B}_0)$だから，(i) H_tは単調増大，(ii) $\overset{\infty}{\vee} H_t = L^2(\mathbb{B})$，(iii) $\bigwedge_{-\infty} H_t = C$となる．$r$を任意の自然数として$r$位の混合性を示す．有界可測実函数$f_0, f_1, f_2, \cdots, f_r$の番号をつけかえることによって

$$t_0^n > t_1^n > \cdots > t_r^n, \quad \min_{0\leqq j\leqq r-1}(t_j^n - t_{j+1}^n) \to \infty \quad (n\to\infty)$$

としてよい．

1° 或るtに対し$f_0, f_1, \cdots, f_r \in H_t$のとき：

a) まず$(f_r, 1) = 0$を仮定する．

$$\left(\prod_{j=0}^{r} U_{t_j^n} f_j, 1\right) = \left(\prod_{j=0}^{r-1} U_{t_j^n - t_r^n} f_j, f_r\right)$$

$g_n = \prod_{j=0}^{r-1} U_{t_j^n - t_r^n} f_j \in H_{t+t_r^n - t_{r-1}^n}$, $t + t_r^n - t_{r-1}^n \to -\infty$；だから$H_{t+t_r^n-t_{r-1}^n}$への射影作用素を$\overset{(n)}{Proj}$とすれば

$$\left(\prod_{j=0}^{r} U_{t_j^n} f_j, 1\right) = (g_n, \overset{(n)}{Proj} f_r) \to 0 .$$

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

b) $(f_r, 1) \neq 0$ のとき．帰納法を使う．$f_1' = f_1 - (f_1, 1)$ とおけば，

$$(U_{t_0^n} f_0 \cdot U_{t_1^n} f_1, 1) = (U_{t_0^n} f_0 \cdot U_{t_1^n} f_1', 1) + (f_0, 1)(f_1, 1)$$

において才1項は a) により0に収束する．r のときは $f_r' = f_r - (f_r, 1)$ とおけば

$$\left(\prod_{j=0}^{r} U_{t_j^n} f_j, 1\right) = \left(\prod_{j=0}^{r-1} U_{t_j^n} f_j \cdot U_{t_r^n} f_r', 1\right) + \left(\prod_{j=0}^{r-1} U_{t_j^n} f_j, 1\right)(f_r, 1).$$

才1項は a) より0に収束し，才2項は帰納法の仮定により $\prod_{j=0}^{r}(f_j, 1)$ に収束する．

2°．一般のとき：任意の $\delta > 0$ に対し，ある t と

$$\| f_j - f_j' \| < \delta, \qquad j = 0, 1, \cdots, r$$

をみたす有界実函数 $f_0', \cdots, f_r' \in H_t$ が存在する．故に定理2.8の証明の後半と同様にして示せる． (証明終)

§6.2 スペクトル[1)]

まず，Ambrose-flow のスペクトルをしらべる。

定理6.2 $\{S_t\}$ を Ambrose-flow とする．基礎空間 Ω^* の可測分割 ζ^* があって

(i) $S\zeta^* > \zeta^*$

(ii) ceiling function f は $\mathcal{B}(\zeta^*)$-可測

であるとする．そうすれば，$\{S_t\}$ に対応するユニタリ作用素群 $\{V_t\}$ は $L^2(\Omega)$ の或る不変部分空間で σ-Lebesgue スペクトル を持つ。

証明 1°．Ω^* 上の函数 $\chi^*(\omega^*)$ で，

$$\chi^* \in L^2(\mathbb{B}(S\zeta^*)) \ominus L^2(\mathbb{B}(\zeta^*)),$$

および或る正測度の集合 $A^* \in \mathcal{B}(\zeta^*)$ に対し

$$E\{|\chi^*|^2 \mid \mathcal{B}(\zeta^*)\} = 1, \qquad \omega^* \in A^*,$$

をみたすものが存在する。実際，任意の $\hat{\chi} \in L^2(\mathcal{B}(S\zeta^*)) \ominus L^2(\mathcal{B}(\zeta^*))$ をとると[2)]，

$$E\{E\{|\hat{\chi}|^2 \mid \mathcal{B}(\zeta^*)\}\} = E\{|\hat{\chi}|^2\} > 0$$

---

1) この節は [46] による．

2) $\hat{\chi}$ はある正測度の集合上で0でないものをとる．

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

だから

$$P(E\{|\hat{\chi}|^2 | \mathbb{B}(\zeta^*)\} > \delta) > 0$$

となる δ がある。$A^* = \{\omega^*;\ E\{|\hat{\chi}|^2|\mathbb{B}(\zeta^*)\} > \delta\} \in \mathbb{B}(\zeta^*)$ とおき

$$\chi^*(\omega^*) = \begin{cases} \hat{\chi}(\omega^*)/\sqrt{E\{|\hat{\chi}|^2|\mathbb{B}(\zeta^*)\}}\ , & \omega^* \in A^* \\ \hat{\chi}(\omega^*)\ , & \omega^* \notin A^* \end{cases}$$

とおけばよい。

2°. $0 < t_0 < \frac{\theta}{2}$[1] に対し

$$\chi(\omega) = \chi(\omega^*, s) = \begin{cases} \chi^*(\omega^*)\ , & s < t_0 \\ 0\ , & s \geqq t_0 \end{cases}$$

とおく。Ω の分割

$$\zeta_0 = \{C_t = C^* \times \{t\};\ C^* \in \zeta^*,\quad 0 \leqq t < f(C^*)^{2)}\}$$

$$\zeta_t = S_t\,\zeta_0$$

を定義すれば任意の $t > 0$ に対し $\zeta_t > \zeta_0$. 明らかに $\chi \in L^2(\mathbb{B}(\zeta_{t_0}))$. 任意の $f(\omega^*, s) \in L^2(\mathbb{B}(\zeta_0))$ は s を固定して ω^* の函数と考えると a.e. s に対し $L^2(\mathbb{B}(\zeta^*))$ の元であるから

$$(f, \chi) = \int_{s<t_0} \int_{\Omega^*} f(\omega^*, s)\, \chi^*(\omega^*)\, dP^* ds = 0\ .$$

故に $\chi \in L^2(\mathbb{B}(\zeta_{t_0})) \ominus L^2(\mathbb{B}(\zeta_0))$ である。

3°. 後述の Lemma 6.1 と χ^*, A^* の選び方により，すべての $C^* \in \zeta^*$, $C^* \subset A^*$ は $P(C^*) = 0$ である. 故に A^{*c} では 0 となる正規直交系 $\{\psi_j;\ 1 \leqq j < \infty\} \subset L^2(\mathbb{B}(\zeta^*))$ が存在する。

4°. $\omega = (\omega^*, s)$ として

$$\tilde{\varphi}_j(\omega) = \psi_j(\omega^*)$$

$$\varphi_j(\omega) = \tilde{\varphi}_j(\omega)\,\chi(\omega)$$

とおけば，明らかに $\tilde{\varphi}_j \in L^2(\mathbb{B}(\zeta_0))$, $\varphi_j \in L^2(\mathbb{B}(\zeta_{t_0}))$ である.

a) $-t_0 \leqq t \leqq 0$ のとき：

$$(\varphi_i, V_t\varphi_j) = \int_\Omega \varphi_i(\omega)\,\overline{\varphi}_j(S_t\omega)\,dP$$

$$= \int_{\{\omega;\,-t\leqq s<t_0\}} \tilde{\varphi}_i(\omega^*, s)\,\chi(\omega^*, s)\,\overline{\tilde{\varphi}}_j(\omega^*, s+t)\,\overline{\chi}(\omega^*, s+t)\,dP$$

---

1) θ は $\inf f(\omega^*) \geqq \theta > 0$ をみたす数。

2) (ii) より ζ^* の元 C^* 上で f は定数.

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

$$+\int_{\{\omega;\, s<-t\}} \tilde{\varphi}_i(\omega)\,\chi(\omega)\,\bar{\tilde{\varphi}}_j(S_t\omega)\,\bar{\chi}(S^{-1}\omega^*,\ s+t+f(S^{-1}\omega^*))\,dP$$

$$=\int_{-t\leqq s<t_0}\int_{A^*}\psi_i(\omega^*)\,\bar{\psi}_j(\omega^*)\,|\chi^*(\omega^*)|^2\,dP^*\,ds$$

$$=(t_0+t)\,E\{\psi_i\bar{\psi}_j\,E\{|\chi^*|^2\,|\,\mathcal{B}(\zeta^*)\};\ A^*\}$$

$$=(t_0+t)\,(\psi_i,\ \psi_j)=0\,.$$

b) $t>t_0$ のとき: $\varphi_j\in L^2(\mathcal{B}(\zeta_{t_0}))$ だから $\varphi_j(S_t\omega)\in L^2(\mathcal{B}(\zeta_{t_0-t}))$ $\subset L^2(\mathcal{B}(\zeta_0))$. 故に

$$(\varphi_i,\ V_t\varphi_j)=(\tilde{\varphi}_i\chi,\ V_t\varphi_j)=(\chi,\ \bar{\tilde{\varphi}}_i V_t\varphi_j)=0\ .$$

c) $t<-t_0$, $0<t\leqq t_0$ のときは

$$(\varphi_i,\ V_t\varphi_j)=(V_{-t}\varphi_i,\ \varphi_j)$$

だから a), b) に帰着される.

以上により, $\{V_t\varphi_j;\ -\infty<t<\infty\}$ が張る閉線型部分空間を $M(\varphi_j)$ とすれば, $i\neq j$ のとき $M(\varphi_i)\perp M(\varphi_j)$ がわかった.

5°. b) は $i=j$ のときも成り立つから

$$(\varphi_j,\ V_t\varphi_j)=0\ ,\qquad |t|>t_0,\ \ \forall j$$

即ち

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{2\pi i\lambda t}\,\|dE(\lambda)\varphi_j\|^2=0\ ,\qquad |t|>t_0\ ,\quad \forall j\ .$$

故に Paley-Wiener の定理 (定理2.5) により, $\|dE(\lambda)\varphi_j\|^2\sim d\lambda$. 即ち各 $M(\varphi_j)$ 上で $\{V_t\}$ は単純ルベーグ・スペクトルを持つ.

以上によって, $\{V_t\}$ は不変部分空間 $\sum_{j=1}^{\infty}\oplus M(\varphi_j)$ において σ-ルベーグ・スペクトルをもつ. (証明終)

<u>*Lemma 6.1*</u> Tを任意の automorphism とし, 可測分割 ζ が $T\zeta\geqq\zeta$ をみたすとする. もし, ζ の元 C が $P(C)>0$ であれば, すべての n に対し $C\in T^n\zeta$ である.

<u>証明</u> すべての $n>0$ に対し $T^{-n}C$ は ζ-集合だから, $T^{-n}C\cap C=\phi$ または $T^{-n}C=C$. $P(T^{-n}C)=P(C)$ だから $T^{-n_0}C=C$ となる $n_0>0$ がある. すべての k に対し, $C=T^{kn_0}C\in T^{kn_0}\zeta$. (証明終)

<u>注意</u> 定理の証明にある χ^* は $L^2(\mathcal{B}(\zeta^*))$ と直交するので $E\{\chi^*|\mathcal{B}(\zeta^*)\}=0$ (a.e.). A^* 上で $E\{|\chi^*|^2\,|\,\mathcal{B}(\zeta^*)\}=1$ だから, $A^*\supset C^*\in\zeta^*$ なる C^* は $S\zeta^*$ で実際に細分される, 即ち $C^*\notin S\zeta^*$. 従って上の Lemma により $P(C^*)=0$ と

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

なる。

<u>定理6.3</u> *Kolmogorov-flow* は $L^2(\Omega)\ominus C$ で σ-ルベーグ・スペクトルを持つ。

<u>証明</u> 1° $\{T_t\}$ を与えられた *Kolmogorov-flow* とする．定理1.6により重複度 $\varkappa=\infty$ を示せばよい．それにはある部分空間で σ-ルベーグ・スペクトルであることを示せばよい．従って定理6.2の条件をみたす *Ambrose-flow* による表現の存在を示せば十分である．

2° $B\in\mathbb{B}(\xi_0)$, $0<P(B)<1$ なるBを固定し，定理4.9の証明をふり返ってみる．この場合 $\{T_t\}$ はエルゴード的だから議論は幾分簡単である．*Wiener* のエルゴード定理（*Lemma* 4.6）により

$$\varphi_a(\omega)=\frac{1}{a}\int_0^a \chi_B(T_t\omega)\,dt\longrightarrow \chi_B(\omega),\quad a.e.\,\omega,\quad a\to 0$$

だから十分小さいaに対し $B_1=\{\omega;\ \varphi_a(\omega)<\frac{1}{4}\}$, $B_2=\{\omega;\ \varphi_a(\omega)>\frac{3}{4}\}$ は $P(B_1)P(B_2)>0$.[1)]

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\chi_{B_i}(T_t\omega)\,dt=P(B_i)>0\ ,\quad a.e.\quad i=1,2$$

だから，$\{T_t\}$-不変な Ω_1 で $P(\Omega_1)=1$ なるものがあって，$\omega\in\Omega_1$ ならば，どれだけでも大きいTに対し $\{T_t\omega;\ t>T\}$ は B_1, B_2 を訪問し，また $\{T_t\omega;\ t<-T\}$ も同様である．以下定理4.9の証明と同様である．即ち

$$\Omega^*=\Omega_1\cap\{\omega;\ \varphi_a(\omega)=\frac{1}{2},\ \varphi_a(T_t\omega)>\frac{1}{2}\quad 0<t\leqq\frac{a}{8}\}\ .$$

$$f(\omega^*)=\inf\{t>0;\ T_t\omega^*\in\Omega^*\},\qquad \omega^*\in\Omega^*$$
$$S\omega^*=T_{f(\omega^*)}\,\omega^*$$
$$\overline{\Omega}=\{(\omega^*,u);\ \omega^*\in\Omega^*,\ \ 0\leqq u<f(\omega^*)\}$$

とおけば，$\overline{\Omega}$上に f, S によって（4.9）で定まる *Ambrose-flow* $\{S_t\}$ は $\{T_t\}$ の表現である．

3° 任意の $t>0$ に対し $\chi_B(T_t\omega)$ は $\mathbb{B}(T_{-t}\xi_0)$-可測だから $\mathbb{B}(\xi_0)$-可測である．従って $\varphi_a(\omega)$ は $\mathbb{B}(\xi_0)$-可測である．$I_s=\{\omega=(\omega^*,u);\ u>s\}$ とおけば，[2)] $I_s\in\mathbb{B}(T_s\xi_0)$ である．実際 $\varphi_a(T_t\omega)$ は t-連続だから

---

1) このようなaを一つ固定する．

2) Ω_1 と $\overline{\Omega}$ を混同する．

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

$$\Omega_1 - I_s = \bigcup_{0 \leqq t \leqq s} \{\omega ; T_{-t}\omega \in \Omega^*\}$$
$$= \bigcup_{0 \leqq t \leqq s} \{\omega ; \varphi_a(T_{-t}\omega) = \frac{1}{2}, \quad \varphi_a(T_{u-t}\omega) > \frac{1}{2} \quad 0 < u \leqq \frac{a}{8}\}$$
$$= \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup'_{0 \leqq r \leqq s} \{\omega ; |\varphi_a(T_{-r}\omega) - \frac{1}{2}| < \frac{1}{n}\} \cap \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap'_{\frac{1}{k} \leqq q \leqq \frac{a}{8}} \{\omega ; \varphi_a(T_{q-r}\omega) \geqq \frac{1}{2} + \frac{1}{m}\},$$

ここに $\bigcup'$, $\bigcap'$ は有理数についてとる．特に $\Omega^* \in \mathcal{B}(\xi_0)$ である．更に

$$\{\omega^* ; f(\omega^*) > s\} = (T_{-s} I_s) \cap \Omega^* \in \mathcal{B}(\xi_0)$$

だから ξ_0 の Ω^* への制限を ζ^* とおけば，$f(\omega^*)$ は $\mathcal{B}(\zeta^*)$-可測である．

4°. ζ^* が定理6.2の条件 (i) をみたすことを示す．$\zeta^* \leqq S\zeta^*$ は明らかだから，$\zeta^* = S\zeta^*$ と仮定して矛盾に導こう。$\zeta = \zeta^* \times \varepsilon(u)$ [1] とおけば，$\zeta = \zeta = \bigvee_{t \geqq 0} S_t \zeta^* \geqq \xi_0$ だから $T_t \xi_0 \leqq S_t \zeta = \zeta$ $(\forall t)$ となって $\zeta = \varepsilon$ である。他方，任意の $\delta > 0$ に対し，$P(I_{t_\delta}) < \delta$ となる t_δ が存在する．$C \subset I_{t_\delta}^c$ なる $C \in \zeta$ は $C \in \bigvee_{t_\delta \geqq t \geqq 0} S_t \zeta^* \leqq T_{t_\delta} \xi_0$ だから，任意の $A \in \mathcal{B}(S_{-t_\delta}\zeta) = \mathcal{B}(\zeta)$ に対し $A' \in \mathcal{B}(\xi_0)$ があって $P(A \ominus A') < \delta$．これは $\mathcal{B}(\xi_0) = \mathcal{B}(\zeta) = \mathcal{B}(\varepsilon)$ を意味し矛盾である．　　　　(証明終)

§6.3 完全正のエントロピー [2]

この節では一般の *automorphism* T のエントロピーについて論じ，その一つの結論として *Kolmogorov-automorphism* のエントロピーに関する性質を出す．

有限分割 α に対し，商空間 Ω/α_T 上に導かれる T の *factor-automorphism* を簡単のために $T(\alpha)$ と書く．[3] 明らかに $h(T(\alpha)) = H(\alpha | \alpha_T^-)$ である．

Lemma 6.2 4命題

(i) $h(T) > 0$

(ii) 有限分割 α があって，$h(T(\alpha)) > 0$

(iii) (K.1)をみたす可測分割 ζ_0 が存在する

(K.1) $\qquad T\zeta_0 > \zeta_0$

---

1) $\varepsilon(u)$ は u 軸の各点への分割．

2) この節については [32], [39] など参照。

3) 本来は T_{α_T} と書くべきもの (§4.2参照)．

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

(iv) T は特異でない.[1]

の間に (iv) $\Longrightarrow$ (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii) の関係がある.

証明 (iv) $\Longrightarrow$ (iii), (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) は明らか。(iii) $\Longrightarrow$ (ii) を示すために, すべての有限分割 α に対し $h(T(\alpha))=0$ であると仮定して矛盾を導く. $V\alpha_k=\zeta_o$ となる有限分割の増大列 $\{\alpha_k\}$ に対し, $\eta_k=(\alpha_k)_T^-$ とおけば, $H(\alpha_k|(\alpha_k)_T^-)=0$ だから $T\eta_k=\eta_k$. 明らかに $\alpha_k\leqq\eta_k\leqq\zeta_o$ だから $\zeta_o=V\eta_k=VT\eta_k=T\zeta_o$ となって矛盾. (証明終)

定理 6.4 4命題

(i) $h(T)=0$

(ii) すべての有限分割 α に対し, $h(T(\alpha))=0$.

(iii) すべての有限分割 α に対し $T(\alpha)$ は特異

(iv) T は特異

の間に (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (iv) の関係が成り立つ.[2]

証明 (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iv) は *Lemma* 6.2 の対偶である. (ii) $\Longrightarrow$ (iii) は (i) $\Longrightarrow$ (iv) の特別な場合. (iii) $\Longrightarrow$ (ii) を示す. *Lemma* 6.2 の (iii) $\Longrightarrow$ (iv) の対偶により $\alpha\vee\alpha_T^-=\alpha_T^-$ だから, $h(T(\alpha))=H(\alpha|\alpha_T^-)=0$. (証明終)

定義 6.1 *automorphism* T の *non-trivial* なすべての *factor-automorphism* が正のエントロピーをもつとき, T は完全正のエントロピーをもつという. *flow* についても同様に定義する.

定義より明らかに,

定理 6.5 完全正のエントロピー (0 エントロピー) をもつ *automorphism* T の *non-trivial* なすべての *factor-automorphism* と *inverse* T^{-1} は完全正のエントロピー (0 エントロピー) をもつ. *flow* についても同様である.

Lemma 6.3 $\alpha\in\mathbb{Z}$, $T\eta=\eta$ であれば

$$H(\alpha_T^n|\alpha_T^-\vee\eta)=nH(\alpha|\alpha_T^-\vee\eta).$$

証明
$$\begin{aligned}H(\alpha_T^n|\alpha_T^-\vee\eta)&=H(\alpha_T^{n-1}|\alpha_T^-\vee\eta)+H(T^{n-1}\alpha|\alpha_T^{n-1}\vee\alpha_T^-\vee\eta)\\&=H(\alpha_T^{n-1}|\alpha_T^-\vee\eta)+H(\alpha|\alpha_T^-\vee\eta).\end{aligned}$$

Lemma 6.4 $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}$, $T\eta=\eta$ に対し

---

1) T が特異であるとは, $T\xi\geqq\xi$, $\overset{\infty}{\vee}T^n\xi=\varepsilon$ をみたす ξ は $\xi=\varepsilon$ に限ることをいう (定義 1.5 参照).

2) 後で (i) $\Longleftrightarrow$ (iv) を示す.

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H(\alpha_T^n\mid\beta_T^{1}\vee\eta)=H(\alpha\mid\alpha_T^-\vee\eta).$$

<u>証明</u>　1°. $\beta\leqq\alpha$ のとき：

$$H(\alpha\mid\alpha_T^-\vee\eta)=\frac{1}{n}H(\alpha_T^n\mid\alpha_T^-\vee\eta)\leqq\frac{1}{n}H(\alpha_T^n\mid\beta_T^-\vee\eta)\leqq\frac{1}{n}H(\alpha_T^n\mid\eta)$$

Lemma 5.5 により

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H(\alpha_T^n\mid\eta)=H(\alpha\mid\alpha_T^-\vee\eta).$$

2°. $\alpha\leqq\beta$ のとき：

$$\frac{1}{n}H(\alpha_T^n\mid\beta_T^-\vee\eta)\leqq\frac{1}{n}H(\alpha_T^n\mid\alpha_T^-\vee\eta)=H(\alpha\mid\alpha_T^-\vee\eta).$$

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H(\alpha_T^n\mid\beta_T^-\vee\eta)\\&=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}H(\alpha_T^n\vee\beta_T^n\mid\beta_T^-\vee\eta)-\frac{1}{n}H(\beta_T^n\mid\alpha_T^n\vee\beta_T^-\vee\eta)\right\}\\&\geqq H(\beta\mid\beta_T^-\vee\eta)-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H(\beta_T^n\mid\alpha_T^n\vee\alpha_T^-\vee\eta)\\&=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}H(\beta_T^n\mid\alpha_T^-\vee\eta)-\frac{1}{n}H(\beta_T^n\mid\alpha_T^n\vee\alpha_T^-\vee\eta)\right\}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H(\alpha_T^n\mid\alpha_T^-\vee\eta)=H(\alpha\mid\alpha_T^-\vee\eta).\end{aligned}$$

3°、一般のとき：

$$\frac{1}{n}H(\alpha_T^n\mid(\alpha\vee\beta)_T^-\vee\eta)\leqq\frac{1}{n}H(\alpha_T^n\mid\beta_T^-\vee\eta)\leqq\frac{1}{n}H(\alpha_T^n\mid\eta).$$

オ1項，オ3項共に $H(\alpha\mid\alpha_T^-\vee\eta)$ に収束する。　　　　（証明終）

<u>Lemma 6.5</u>　$\alpha,\beta\in\mathbb{Z}$ に対し

$$H(\alpha\vee\beta\mid\alpha_T^-\vee\beta_T^-)=H(\alpha\mid\alpha_T^-\vee\beta_T)+H(\beta\mid\beta_T^-)$$

<u>証明</u>

$$\begin{aligned}H(\alpha\mid\alpha_T^-\vee\beta_T)&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}H(\alpha\mid\alpha_T^-\vee\beta_T^-\vee\beta_T^k)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H(\alpha_T^n\mid\alpha_T^-\vee\beta_T^-\vee\beta_T^n)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H(\alpha_T^n\vee\beta_T^n\mid\alpha_T^-\vee\beta_T^-)-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H(\beta_T^n\mid\alpha_T^-\vee\beta_T^-)\\&=H(\alpha\vee\beta\mid\alpha_T^-\vee\beta_T^-)-H(\beta\mid\beta_T^-).\end{aligned}$$

（証明終）

<u>Lemma 6.6</u>　$\alpha\in\mathbb{Z}$ に対し $\alpha_{-\infty}=\bigwedge_{-\infty}\bigvee_{k\leqq n}T^k\alpha$ とおけば，任意の $\beta\in\mathbb{Z}$，β

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

$\leqq \alpha_{-\infty}$ に対し，$h(T(\beta))=0$ である．

証明　$\beta, \beta_T^- \leqq \beta_T \leqq \alpha_T^-$ だから Lemma 6.5 より

$$H(\alpha|\alpha_T^-)=H(\alpha|\alpha_T^-)+H(\beta|\beta_T^-).$$

（証明終）

定理 6.6　次の３命題は同等である．

(i) T が完全正のエントロピーをもつ

(ii) 任意の有限分割 $\alpha \neq \nu$ に対し，$h(T(\alpha))>0$

(iii) 任意の有限分割 $\alpha \neq \nu$ に対し，$T(\alpha)$ は Kolmogorov-automorphism である．

証明　(iii) $\Rightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (i) は明らか。(ii) $\Rightarrow$ (iii) を示す．Lemma 6.6により，任意の有限分割 $\beta \leqq \alpha_{-\infty}$ に対し $h(T(\beta))=0$．　(ii) より $\beta=\nu$，　即ち $\alpha_{-\infty}=\nu$．これは $T(\alpha)$ が Kolmogorov-automorphism であることを示している．

（証明終）

automorphism T に対し，T- 不変な可測分割

$$\pi=\pi(T)=\vee\{\alpha_{-\infty};\ \alpha \text{ は有限分割}\}$$

を定義する．これは次のような著しい性質をもつ．

定理 6.7　factor-automorphism T_π はエントロピー 0 の最大の factor-automorphism である．即ち (i) $h(T_\pi)=0$，(ii) $h(T_\zeta)=0 \Rightarrow \zeta \leqq \pi$．

証明　(i) 次のような有限分割の増大列 $\{\beta^k\}$ がある：$\vee\beta^k=\pi$，各 k に対し有限分割 α^k があって $\beta^k \leqq \alpha^k_{-\infty}$．Lemma 5.6 と 6.6 により

$$h(T_\pi)=\lim_{k\to\infty} H(\beta^k|\beta^{k-}_T)=0.$$

(ii) 任意の有限分割 $\alpha \leqq \zeta$ に対し

$$H(\alpha|\alpha_T^-) \leqq h(T_\zeta)=0$$

だから $\alpha_T=\alpha_T^-=\alpha_{-\infty} \geqq \alpha$ となり，従って $\alpha \leqq \pi$．故に $\zeta \leqq \pi$．

（証明終）

系　T が完全正のエントロピーをもつためには，$\pi(T)=\nu$ となることが必要十分である．

Lemma 6.7　$\alpha, \beta, \gamma \in Z$，$\alpha \leqq \beta$，$T\eta=\eta$　に対し

$$\lim_{n\to\infty} H(\alpha|\beta_T^- \vee T^{-n}\gamma_T^- \vee \eta)=H(\alpha|\beta_T^- \vee \eta).$$

証明　$H(\alpha|\beta_T^- \vee T^{-n}\gamma_T^- \vee \eta)$ は単調増大で

$$\lim_{n\to\infty} H(\alpha|\beta_T^- \vee T^{-n}\gamma_T^- \vee \eta) \leqq H(\alpha|\beta_T^- \vee \eta).$$

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

1°. $\alpha=\beta$ のとき

$$H(\beta|\beta_T^-\vee T^{-k}\gamma_T^-\vee\eta)=H(T^k\beta|\beta_T^k\vee\beta_T^-\vee\gamma_T^-\vee\eta)$$

$$=H(\beta_T^{k+1}|\beta_T^-\vee\gamma_T^-\vee\eta)-H(\beta_T^k|\beta_T^-\vee\gamma_T^-\vee\eta)$$

だから Lemma 6.4 により

$$\lim_{n\to\infty}H(\beta|\beta_T^-\vee T^{-n}\gamma_T^-\vee\eta)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}H(\beta|\beta_T^-\vee T^{-k}\gamma_T^-\vee\eta)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\{H(\beta_T^n|\beta_T^-\vee\gamma_T^-\vee\eta)-H(\beta|\beta_T^-\vee\gamma_T^-\vee\eta)\}$$

$$=H(\beta|\beta_T^-\vee\eta).$$

2°. 一般のとき

$$\lim_{n\to\infty}H(\alpha|\beta_T^-\vee T^{-n}\gamma_T^-\vee\eta)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\{H(\beta|\beta_T^-\vee T^{-n}\gamma_T^-\vee\eta)-H(\beta|\alpha\vee\beta_T^-\vee T^{-n}\gamma_T^-\vee\eta)\}$$

$$\geq H(\beta|\beta_T^-\vee\eta)-H(\beta|\alpha\vee\beta_T^-\vee\eta)=H(\alpha|\beta_T^-\vee\eta).$$ (証明終)

次の条件

$$p_j(\omega)\geqq 0,\quad \sum_{j=1}^{m}p_j(\omega)=1,\quad a.e.$$

をみたす m-次元確率ベクトル $p(\omega)=\{p_1(\omega),\cdots,p_m(\omega)\}$ の空间にノルム

$$\|p-q\|=\sum_{j=1}^{m}E\{|p_j(\omega)-q_j(\omega)|\}$$

を入れる。$p(\omega)$ の函数

$$H(p)=-\sum_{j=1}^{m}E\{p_j(\omega)\log p_j(\omega)\}$$

に対して

<u>Lemma 6.8</u> $H(p)$ は一様連続である。

<u>証明</u> $\varphi(x)=-x\log x$ は $[0,1]$ で有界，一様連続だから，任意の $\delta>0$ に対し $\theta>0$ があって

$$|x-y|<\theta\Longrightarrow|\varphi(x)-\varphi(y)|<\delta,\quad |\varphi(x)|\leqq K$$

となる。

$$E\{|p_j(\omega)-q_j(\omega)|\}\geqq\theta P(|p_j(\omega)-q_j(\omega)|\geqq\theta).$$

$$|E\{\varphi(p_j(\omega))\}-E\{\varphi(q_j(\omega))\}|\leqq E\{|\varphi(p_j(\omega))-\varphi(q_j(\omega))|\}$$

$$=E\{|\varphi(p_j(\omega))-\varphi(q_j(\omega))|;\ |p_j(\omega)-q_j(\omega)|<\theta\}$$

$$+E\{|\varphi(p_j(\omega))-\varphi(q_j(\omega))|;\ |p_j(\omega)-q_j(\omega)|\geqq\theta\}$$

$$<\delta P(|p_j(\omega)-q_j(\omega)|<\theta)+2KP(|p_j(\omega)-q_j(\omega)|\geqq\theta\}$$

$$\leqq\delta+2K\theta^{-1}E\{|p_j(\omega)-q_j(\omega)|\}.$$

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

$$|H(p)-H(q)|<m\delta+2K\theta^{-1}\|p-q\|.$$ （証明終）

<u>Lemma 6.9</u> ξは可測分割であって，$T\xi\geq\xi$，$\overset{\infty}{\vee}T^n\xi=\varepsilon$ とする．そうすれば，$\xi_{-\infty}=\underset{-\infty}{\wedge}T^n\xi\geq\pi(T)$．

<u>証明</u> 任意の有限分割$\alpha\leq\pi(T)$が$\alpha\leq\xi_{-\infty}$となること，即ち$H(\alpha|\xi_{-\infty})=0$を示せばよい．そのためには，任意の有限分割$\beta$に対し

(6.1) $\qquad H(\beta|\xi_{-\infty})=H(\beta|\xi_{-\infty}\vee\alpha_T^-)$

を示せば十分である．何故なら$\beta=\alpha$とおけば$H(\alpha|\xi_{-\infty})=H(\alpha|\xi_{-\infty}\vee\alpha_T^-)\leq H(\alpha|\alpha_T^-)=0$だから．(6.1)を証明しよう．

1° $\beta\leq T^{n_0}\xi$ となるn_0があるとき： 任意のnに対し$\alpha_T^-=T^{-n}\alpha_T^-$，また任意の$\ell>0$に対し$\alpha_T^-=(\alpha_T^\ell)_{T^\ell}^-$だから，Lemma 6.7により

$$\begin{aligned}H(\beta|\xi_{-\infty})&\geq H(\beta|\alpha_T^-\vee\xi_{-\infty})\\&\geq H(\beta|\beta_{T^\ell}^-\vee(\alpha_T^\ell)_{T^\ell}^-\vee\xi_{-\infty})\\&=\lim_{n\to\infty}H(\beta|\beta_{T^\ell}^-\vee T^{-n\ell}(\alpha_T^\ell)_{T^\ell}^-\vee\xi_{-\infty})\\&=H(\beta|\beta_{T^\ell}^-\vee\xi_{-\infty}).\end{aligned}$$

$\beta_{T^\ell}^-=\underset{n<0}{\vee}T^{n\ell}\beta\leq\underset{n<0}{\vee}T^{n\ell+n_0}\xi=T^{n_0-\ell}\xi$ だから

$$H(\beta|\beta_{T^\ell}^-\vee\xi_{-\infty})\geq H(\beta|T^{n_0-\ell}\xi).$$

右辺は$\ell\to\infty$のとき$H(\beta|\xi_{-\infty})$に収束するので(6.1)が得られた．

2° 一般のとき： $\beta=\{B_1,\cdots,B_m\}$と任意の$\delta>0$に対し，分割$\hat\beta=\{\hat B_1,\cdots,\hat B_m\}$があって，ある$n_0$で$\hat\beta\leq T^{n_0}\xi$，$P(B_j\ominus\hat B_j)<\delta$ $(1\leq j\leq m)$．このとき任意のσ-algebra $\mathcal{B}$に対し

$$\begin{aligned}E\{|P(B_j|\mathcal{B})-P(\hat B_j|\mathcal{B})|\}&\leq E\{E\{|\chi_{B_j}-\chi_{\hat B_j}||\mathcal{B}\}\}\\&=P(B_j\ominus\hat B_j)<\delta,\quad 1\leq j\leq m.\end{aligned}$$

故にLemma 6.8により(6.1)を得る． （証明終）

<u>定理6.8</u> Kolmogorov-automorphismは完全正のエントロピーをもつ．

<u>証明</u> Lemma 6.9と前定理系による．

<u>定理6.9</u>([39]) 任意のautomorphism Tに対し，次の4性質をもつ可測分割ξが存在する：

(k.1) $\qquad T\xi\geq\xi$,

(k.2) $\qquad \overset{\infty}{\vee}T^n\xi=\varepsilon$,

(k.3) $\qquad \underset{-\infty}{\wedge}T^n\xi=\pi(T)$,

(k.4) $\qquad H(T\xi|\xi)=h(T)$.

<u>証明</u> 1° $\{\alpha_k\}$を有限分割の増大列で，$\vee\alpha_k=\varepsilon$とする．$n_1<n_2<n_3$

$<\cdots$ を自然数列とする.

$$\eta_p = \bigvee_{k=1}^{p} T^{-n_k}\alpha_k, \quad \eta = \bigvee_{k=1}^{\infty} T^{-n_k}\alpha_k, \quad \xi = \eta_T^-$$

とおけば, $\{n_k\}$ がどんなであっても (k.1), (k.2) はみたされる. $\{n_k\}$ をうまく選んで (k.3), (k.4) が成り立つようにする.

2°. すべての $p<q$ に対し

$$(6.2) \qquad 0 < H(\eta_p|(\eta_{q-1})_T^-) - H(\eta_p|(\eta_q)_T^-) < \frac{1}{p} 2^{p-q}$$

が成り立つように $\{n_k\}$ を選ぶ. まず, そのような $\{n_k\}$ が選べることを帰納法で示す. n_1 は勝手に定める. $n_1, \cdots, n_{q-1}$ が定まったとする.

$$\eta_q = \eta_{q-1} \vee T^{-n_q}\alpha_q$$
$$(\eta_q)_T^- = \bigvee_1^{\infty} T^{-k}(\eta_{q-1} \vee T^{-n_q}\alpha_q) = (\eta_{q-1})_T^- \vee T^{-n_q}(\alpha_q)_T^-$$

だから, 任意の $p<q$ に対し Lemma 6.7 より

$$H(\eta_p|(\eta_q)_T^-) = H(\eta_p|(\eta_{q-1})_T^- \vee T^{-n_q}(\alpha_q)_T^-)$$
$$\longrightarrow H(\eta_p|(\eta_{q-1})_T^-), \quad n_q \to \infty .$$

3°. $p<q$ のとき

$$0 < H(\eta_p|(\eta_p)_T^-) - H(\eta_p|(\eta_q)_T^-)$$
$$= \sum_{k=p+1}^{q} \{H(\eta_p|(\eta_{k-1})_T^-) - H(\eta_p|(\eta_k)_T^-)\}$$
$$< \frac{1}{p} \sum_1^{q-p} 2^{-l} < \frac{1}{p} .$$

$(\eta_q)_T^-$ は単調増大で $\vee(\eta_q)_T^- = \xi$ だから

$$\lim_{q\to\infty} H(\eta_p|(\eta_q)_T^-) = H(\eta_p|\xi) .$$

故に

$$\lim_{p\to\infty} \{H(\eta_p|(\eta_p)_T^-) - H(\eta_p|\xi)\} = 0 .$$

一方,

$$h(T) = \lim_{p\to\infty} H(\alpha_p|(\alpha_p)_T^-) \leqq \lim_{p\to\infty} H(\eta_p|(\eta_p)_T^-) \leqq h(T).$$

$$H(T\xi|\xi) = H(\eta \vee \xi|\xi) = H(\eta \vee \xi) = \lim_{p\to\infty} H(\eta_p|\xi).$$

だから (k.4) が示された。

4°. (k.3) を示すには, Lemma 6.9 により $\wedge T^n\xi \doteq \pi(T)$ を示せばよい。任意の有限分割 $\alpha \leqq \wedge T^n\xi$ に対し, Lemma 6.5 により

$$H(\alpha|\alpha_T^- \vee (\eta_p)_T) + H(\eta_p|(\eta_p)_T^-) = H(\alpha \vee \eta_p|\alpha_T^- \vee (\eta_p)_T^-)$$

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

$$= H(\eta_p | (\eta_p)_T^- \vee \alpha_T) + H(\alpha | \alpha_T^-).$$

$(\eta_p)_T^- \vee \alpha_T \leqq \xi$, $\bigvee_p (\eta_p)_T = \varepsilon$ だから

$$H(\alpha|\alpha_T^-) = H(\alpha|\alpha_T^- \vee (\eta_p)_T) + H(\eta_p|(\eta_p)_T^-) - H(\eta_p|(\eta_p)_T^- \vee \alpha_T)$$
$$\leqq H(\alpha|(\eta_p)_T) + H(\eta_p|(\eta_p)_T^-) - H(\eta_p|\xi) \to 0, \quad p \to \infty.$$

故に $\alpha \leqq \pi(T)$. （証明終）

<u>系 1.</u> Kolmogorov-automorphism（特異な automorphism）であることと完全正のエントロピー（0エントロピー）をもつこととは同等である。

<u>系 2.</u> Kolmogorov-automorphism T の inverse T^{-1} や non-trivial な factor-automorphism（従って homomorphic image）はまた Kolmogorov-automorphism である。特異な automorphism についても同様である。

<u>定理 6.10</u> $h(T) > 0$ であれば U_T [1] は $L^2(\mathcal{B}) \ominus L^2(\mathcal{B}(\pi))$ で σ-ルベーグ・スペクトルをもつ。

<u>証明</u> 定理 6.9 により (k.1)～(k.4) をみたす可測分割 ξ が存在する。$H(T\xi|\xi) = h(T) > 0$ だから $T\xi > \xi$ であることを注意する。定理 1.6 により明らかに U_T は $L^2(\mathcal{B}) \ominus L^2(\mathcal{B}(\pi))$ で一様ルベーグ・スペクトルをもつから，定理 6.3 の証明と同様に $L^2(\mathcal{B}) \ominus L^2(\mathcal{B}(\pi))$ のある部分空間で σ-ルベーグ・スペクトルをもつことを示せばよい。定理 6.2 の証明 1° と同様に，次のような函数 $\chi(\omega)$ と集合 A が存在する：

(i) $\chi \in L^2(\mathcal{B}(T\xi)) \ominus L^2(\mathcal{B}(\xi))$,

(ii) $E\{|\chi|^2 | \mathcal{B}(\xi)\} = 1, \quad \forall\omega \in A \in \mathcal{B}(\xi), \quad P(A) > 0$

(iii) $P(D) = 0, \quad \forall D \in \xi, \ D \subset A$.

(iii) により A^c で 0 であるような $L^2(\mathcal{B}(\xi))$ の正規直交系 $\{\psi_j\}_{j=1}^{\infty}$ が存在する．函数

$$\varphi_j(\omega) = \chi(\omega)\psi_j(\omega), \qquad j = 1, 2, \cdots$$

は明らかに $\mathcal{B}(T\xi)$ - 可測であり，更に

$$(\varphi_i, \varphi_j) = E\{\psi_i \chi \bar{\psi}_j \bar{\chi}\} = E\{\psi_i \bar{\psi}_j |\chi|^2; A\}$$
$$= E\{\psi_i \bar{\psi}_j E\{|\chi|^2 | \mathcal{B}(\xi)\}; A\} = (\psi_i, \psi_j) = \delta_{ij}.$$

任意の $\varphi \in L^2(\mathcal{B}(\xi))$ に対し

$$(\varphi_j, \varphi) = E\{\psi_j \chi \bar{\varphi}\} = E\{\psi_j \bar{\varphi} E\{\chi | \mathcal{B}(\xi)\}\} = 0 \ ^{2)}$$

---

1) U_T は T に対応するユニタリ作用素： $U_T f(\omega) = f(T\omega)$.

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

だから，$\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ は $L^2(\mathcal{B}(T\xi))\ominus L^2(\mathcal{B}(\xi))$ の正規直交系である．$n\neq 0$ のとき $U^{-n}\varphi_j\in L^2(\mathcal{B}(T^{n+1}\xi))\ominus L^2(\mathcal{B}(T^n\xi))\perp L^2(\mathcal{B}(T\xi))\ominus L^2(\mathcal{B}(\xi))$ だから

$$(U^n\varphi_i,\, U^m\varphi_j)=(U^{n-m}\varphi_i,\varphi_j)=0, \qquad i\neq j \text{ または } n\neq m.$$

従って $i\neq j$ のとき $M(\varphi_i)\perp M(\varphi_j)$[3] であり，また

$$\int_0^1 e^{2\pi i n\lambda}\|dE(\lambda)\varphi_j\|^2=\int_0^1 e^{2\pi i n\lambda}(dE(\lambda)\varphi_j,\varphi_j)=(U^n\varphi_j,\varphi_j)=0, \quad n\neq 0,$$

即ち $\|dE(\lambda)\varphi_j\|^2\sim d\lambda$ となり，各 $M(\varphi_j)$ 上で U_T は単純ルベーグ・スペクトルをもつ．故に不変部分空間 $\sum_{j=1}^{\infty}\oplus M(\varphi_j)\subset L^2(\mathcal{B})\ominus L^2(\mathcal{B}(\pi))$ 上で U_T は σ-ルベーグ・スペクトルを持つ． （証明終）

注意　$U^{-n}\varphi_j=\varphi_{jn}$ とおけば定理5.9の証明と同様に定理7.5′を使う別証明が得られる。

系　純点スペクトル，特異スペクトル，有限重複度スペクトルを持つ automorphism のエントロピーは0である．

flow のエントロピーについては次のことが容易にわかる．

定理6.11 ([32])　Kolmogorov-flow は完全正のエントロピーをもつ．エントロピー0の flow は特異である．

証明　1°　$\{T_t\}$ を Kolmogorov-flow とすれば，(K.1), (K.2), (K.3) をみたす可測分割 ξ_0 が存在する。任意の $t>0$ を固定して automorphism T_t を考えると，(K.1) $T_t\xi_0>\xi_0$, (K.2) $\bigvee_n^{\infty} T_t^n\xi_0=\varepsilon$, (K.3) $\bigwedge_{-\infty} T_t^n\xi_0=\nu$ をみたす。即ち T_t は Kolmogorov-automorphism であり，従って完全正のエントロピーをもつ．$\zeta\neq\nu$ を $\{T_t\}$-不変 ($T_t\zeta=\zeta$, $\forall t$) な分割として factor $\{(T_t)_\zeta\}$ を考えると，各 t に対し

$$h((T_t)_\zeta)=\sup_{\substack{\alpha\le\zeta\\ \alpha\in Z}} H(\alpha\mid\alpha^-_{T_t})>0 .$$

即ち $\{(T_t)_\zeta\}$ はエントロピー正であり，従って $\{T_t\}$ は完全正のエントロピーをもつ。

2°　$\{T_t\}$ のエントロピーが0であれば，すべての t に対し automorphism T_t のエントロピーは0であり，従って automorphism T_t は特異である．一方，$\{T_t\}$ が特異でないとすれば (K.1), (K.2) をみたす分割 $\xi_0\neq\varepsilon$ が存在

2). $\mathrm{proj}_{L^2(\mathcal{B}(\xi))} f=E\{f\mid\mathcal{B}(\xi)\}$.

3) $M(\varphi_j)$ は $\{U^n\varphi_j;\ n=0,\pm1,\cdots\}$ の張る線型部分空間

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

する．1°と同様に $t>0$ のとき automorphism T_t と分割 ξ_0 に対し (K.1), (K.2) が成り立って，T_t は特異でないことになり矛盾である．　　（証明終）

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

第7章 automorphism の空間

あるルベーグ空間 $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ を1つきめて，その上の automorphism の全体を $\mathcal{G}$ としよう．$\mathcal{G}$ は明らかに群をなす．$\mathcal{G}$ に位相を導入して位相群とし，或る種の性質をもつ automorphism の集合の $\mathcal{G}$ における位相的性格によって，その性質をもつものの存在や，それらの性質がどの程度一般であるかとか，或いはその位相による近似の問題などを扱う方法がある．この章でこの方向の話題をいくつか紹介する．

§7.1 空間 $\mathcal{G}_d$ と周期的 automorphism

ルベーグ空間 Ω 上の mod 0 で等しい automorphism のクラスの全体を $\mathcal{G}$ とする．S, T が $P\{\omega;\ S\omega \neq T\omega\} = 0$ のときは S と T は $\mathcal{G}$ の同じ元とみるわけである．$\mathcal{G}$ は群：$S, T \in \mathcal{G} \Rightarrow ST^{-1} \in \mathcal{G}$，である．$S, T \in \mathcal{G}$ に対し集合 $\{\omega;\ S\omega \neq T\omega\} = \{\omega;\ ST^{-1}\omega \neq \omega\}$ は automorphism ST^{-1} の不動点の集合の補集合だから§4.1により可測である．

$$d(S, T) = P\{\omega;\ S\omega \neq T\omega\}$$

と定義する．d は明らかに $\mathcal{G}$ に距離を定める．更に d は $\mathcal{G}$ の群演算に関し不変である：

$$(7.1)\qquad \begin{aligned} &d(S, T) = d(S^{-1}, T^{-1}) \\ &d(S, T) = d(RS, RT) = d(SR, TR), \quad R, S, T \in \mathcal{G}. \end{aligned}$$

従って

<u>Lemma 7.1</u> $\mathcal{G}$ は距離 d に関し，位相群をなし，距離空間としては完備である．しかし必ずしも可分ではない．

<u>証明</u> 完備性：$\{T_n\}$ を $\mathcal{G}$ の任意の基本列とする．$d(T_{n'}, T_{n'+1}) < \frac{1}{2^{n+1}}$ となる部分列 $\{T_{n'}\}$ に対し $B_n = \bigcup_{k=n+1}^{\infty} \{\omega;\ T_{k'}\omega \neq T_{k'+1}\omega\}$ とおけば，$B_1 \supset B_2 \supset \cdots$ で $P(B_n) < 2^{-n}$．従って $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ は測度0である．

$$T\omega = T_{n'+1}\omega \qquad \omega \in B_n^c$$

は Ω 上の automorphism を定める．明らかに $d(T, T_{n'}) \to 0$ 従って

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

$d(T, T_n) \to 0$.

可分でない例：半径 $\frac{1}{2\pi}$ の円周を Ω とし，Ω の回転全体を考える。その濃度は $\aleph$ であって，任意の回転 $S \neq T$ に対し $d(S,T)=1$.　　（証明終）

<u>定義7.1</u>　距離 d で定まる $\mathfrak{G}$ の位相を<u>強位相</u>と呼び，この位相をもつ空間 $\mathfrak{G}$ を $\mathfrak{G}_s$ と書く．

<u>定理7.1</u>　T を任意の反周期的な *automorphism* とする．任意の自然数 p に対し，周期 p の *automorphism* S があって

$$d(T, S) \leqq \frac{4}{p} .$$

<u>*Lemma* 7.2</u>　定理の T と p に対し，次の条件をみたす *automorphism* S と可測集合 A が存在する：(i) A 上で S は周期 p をもつ，(ii) $P(A) > \frac{1}{2}$ ，(iii) A^c で S は反周期的，(iv) $d(S,T) \leqq 2/p$.

<u>証明</u>　定理4.1の系により $P(B) \geqq \frac{1}{2p-1}$ となる $B \in K_p(T)$ がある．

$$A = \bigcup_{j=0}^{p-1} T^j B$$

$$S\omega = \begin{cases} T\omega & \omega \in \bigcup_{j=0}^{p-2} T^j B \\ T^{1-p}\omega & \omega \in T^{p-1} B \end{cases}$$

とおけば，(i) (ii) はみたされる．

$$E = A^c \cap T^{-1} A^c , \quad S\omega = T\omega \quad \omega \in E$$

とおく。残りは S の定義域として $F = A^c \cap T^{-1} A = A^c \cap T^{-1} B$，値域として $G = A^c - TE = A^c \cap T^p B$ である．$P(F) = P(G)$ だから $S(F) = G$ のように定めねばならない。

F 上の S の定め方に関係なく (iv) は成り立つ。実際，$\{\omega;\ S\omega \neq T\omega\} \subset T^{p-1}B \cup F$ だから

$$d(S,T) \leqq P(T^{p-1}B) + P(T^{-1}B) \leqq \frac{2}{p} .$$

$M = \{\omega;\ T^n\omega \in E,\ \forall n \geqq 0\}$ とおけば，$TM \subset M$ 従って $TM = M$ (*mod* 0)．$M \subset E$ だから $M \subset TE$ (*mod* 0)．即ち $M^c \supset (TE)^c \supset G$ となって，各点 $\omega \in G$ は或る $n \geqq 1$ で $T^n\omega \in F$ となる．$P(F) = P(G)$ だから，すべて (*mod* 0) の点 $\omega \in F$ は或る $n \geqq 1$ で $T^{-n}\omega \in G$ である．Q を G 上の任意の反周期的 *automorphism* とし，$n(\omega) = \min\{n;\ T^{-n}\omega \in G\}$ として

$$S\omega = QT^{-n(\omega)}\omega , \qquad \omega \in F$$

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

とおけば S は automorphism で (iii) もみたす. （証明終）

<u>定理の証明</u> lemma により，互に交わらない可測集合列 $\{A_n\}$ と Ω 上の automorphism の列 $\{S_n\}$ があって次の条件をみたす: (i) A_n 上で S_n は周期 p を持つ，(ii) $B_n=\bigcup_{j=1}^{n} A_j$ として $P(A_{n+1})>\frac{1}{2}P(B_n^c)$，(iii) $d(S_n, S_{n+1})\leqq \frac{2}{p}P(B_n^c)$. (ii) より $P(B_n)>1-\frac{1}{2^n}$. 故に $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)=1$.

$$S\omega=S_n\omega \quad , \qquad \omega\in A_n$$

とおけば S は明らかに周期 p の automorphism で

$$d(T,S)\leqq d(T,S_1)+d(S_1,S_2)+\cdots \leqq \frac{4}{p} .$$ （証明終）

<u>Lemma 7.3</u> $P(SA\ominus TA)\leqq d(S,T)$.

<u>証明</u> $SA\ominus TA\subset S\{\omega;\ S\omega\neq T\omega\}$.

<u>Lemma 7.4</u> $d(S^k,T^k)\leqq k\,d(S,T)$, $k\geqq 0$.

<u>証明</u> $\omega, S\omega, \cdots, S^{k-1}\omega\in\{\omega;\ S\omega=T\omega\}$ ならば $S^k\omega=T^k\omega$ だから

$$\{\omega;\ S^k\omega\neq T^k\omega\}\subset\bigcup_{j=0}^{k-1} S^j\{\omega;\ S\omega\neq T\omega\} .$$ （証明終）

§4.1 で $K_p(T)$ の極大元 A に対し，T が反周期的であれば $\frac{1}{2p-1}\leqq P(A)\leqq \frac{1}{p}$，$T$ が周期的（周期 p）であれば $P(A)=\frac{1}{p}$ であることを示した．次の定理はこれを精密化するものである．

<u>定理 7.2</u> T が反周期的であれば

$$\sup_{A\in K_p(T)} P(A)=\frac{1}{p} \quad , \qquad \forall p\geqq 1$$

<u>証明</u> n を任意の自然数として，$q=np$ に対し定理 7.1 より周期 q の automorphism S があって $d(T,S)\leqq\frac{4}{q}$ である．S の任意の基本領域を F とし

$$G=\bigcup_{r=0}^{n-1} S^{pr}F \ , \qquad A=G-\bigcup_{k=1}^{p-1}(G\cap T^kG)$$

とおけば，明らかに $A\in K_p(T)$．$G\in K_p(S)$ だから

$$G\cap T^kG=G\cap T^kG\cap S^kG^c\subset T^kG\cap S^kG^c, \quad (k=1,2,\cdots,p-1)$$

従って Lemma 7.3 と 4 より，$k=1,2,\cdots,p-1$ に対し

$$P(G\cap T^kG)\leqq P(T^kG\ominus S^kG)\leqq d(T^k,S^k)\leqq k\,d(T,S) .$$

故に

$$P(A)=P(G)-\sum_{k=1}^{p-1}P(G\cap T^kG)\geqq\frac{1}{p}-\frac{2(p-1)}{n} .$$ （証明終）

周期 p の automorphism T に対しては

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

$$\sup_{A\in K_n(T)} P(A) = \frac{1}{p}\left[\frac{p}{n}\right]^{1)}$$

だから,

系 一般の automorphism T に対し

$$\sup_{A\in K_n(T)} P(A) = \frac{P(\Omega_\infty)}{n} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{P(\Omega_p)}{p}\left[\frac{p}{n}\right]^{2)}.$$

周期 p の automorphism の全体を $\mathcal{P}_p$, 反周期的なものの全体を $\mathcal{R}$ と書く.

定理 7.3 すべての $T\in\mathcal{R}$ に対し $d(T,\mathcal{P}_p)=\frac{1}{p}$.

証明 $S\in\mathcal{P}_p$ であれば $S^p=I$ で, $d(T^p,I)=1$ だから Lemma 7.4 により, $d(T,S)\geqq\frac{1}{p}$. 逆を示す. 任意の $\varepsilon>0$ に対し $P(A)>\frac{1-\varepsilon}{p}$ となる $A\in K_p(T)$ を選び

$$E=\left(\bigcup_{k=0}^{p-1} T^kA\right)^c$$

とおく. Q を E 上の周期 p の任意の automorphism とし

$$S\omega=\begin{cases} T\omega, & \omega\in\bigcup_{k=0}^{p-2}T^kA \\ T^{1-p}\omega & \omega\in T^{p-1}A \\ Q\omega & \omega\in E\end{cases}$$

とおけば, S は周期 p の automorphism であって, $d(T,S)\leqq\frac{1}{p}+\varepsilon$.

(証明終)

系1 任意の $T\in\mathcal{G}$ に対し

$$d(T,\mathcal{R})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{P(\Omega_n)}{n}$$

$$d(T,\mathcal{P}_p)=\frac{P(\Omega_\infty)}{p}+\sum_{n=1}^{p-1}\frac{P(\Omega_n)}{p}\left[\frac{p}{n}\right]+\sum_{n=p+1}^{\infty}\frac{P(\Omega_n)}{n}\left[\frac{n}{p}\right].$$

系2 $\mathcal{R}$, $\mathcal{P}_p\ (p\geqq 1)$, $\mathcal{R}\cup\bigcup_{p=1}^{\infty}\mathcal{P}_p$ は $\mathcal{G}_s$ で閉かつ疎[3] である. 非周期的な成分をもたない (即ち $\Omega_\infty=\phi \mod 0$) ような automorphism の全体の集合は

---

1) [ ] は整数部分.

2) Ω_∞ は非周期的な点の全体, Ω_p は周期 p の点全体.

3) 位相空間の部分集合 X, Y において, $X\cap Y$ の補集合の内部が Y で稠密のとき, X は Y で疎であるという. X が Y で疎 $\Longleftrightarrow$ $^\forall y\in Y$, $^\forall U_y$ (近傍), $^\exists z\in U_y\cap Y$, $^\exists U_z$: $U_z\cap X\cap Y=\phi$.

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

$\mathfrak{G}_s$ で稠密である。

<u>系 3</u>　エルゴード的な automorphism の全体の集合は $\mathfrak{G}_s$ で疎である。

<u>定理 7.4</u>　任意の $T \in \mathfrak{N}$ に対し，T と同値な automorphism 全体の集合 $\{STS^{-1};\ S \in \mathfrak{G}\}$ は $\mathfrak{N}_s$ [1] で稠密である。

<u>証明</u>　$\mathfrak{N} \ni R$ を任意に固定する。定理 7.3 により，任意の自然数 p に対し

$$d(T, Q) < \frac{2}{p}, \quad d(R, Q') < \frac{2}{p}$$

となる $Q, Q' \in \mathcal{P}_p$ が存在する。§4.1 の注意により Ω に atom はない。従って定理 4.3 より $Q' = SQS^{-1}$ となる $S \in \mathfrak{G}$ が存在する。

$$d(STS^{-1}, R) \leqq d(STS^{-1}, SQS^{-1}) + d(SQS^{-1}, R)$$
$$= d(T, Q) + d(R, Q') < \frac{4}{p}.$$

（証明終）

d による強位相は次に定義される距離 d' による位相と同値である。

$$d'(S,T) = \sup_{A \in \mathcal{B}} P(SA \ominus TA), \quad S, T \in \mathfrak{G}.$$

d' が距離になることは，Ω がルベーグ空間であることより明らかである。d' も群演算に関し不変，即ち (7.1) が d' について成り立つ。

<u>Lemma 7.5</u>　$\frac{2}{3} d(S,T) \leqq d'(S,T) \leqq d(S,T)$

<u>証明</u>　$d'(S,T) \leqq d(S,T)$ は Lemma 7.3 による。$A \in K_2(S^{-1}T)$ に対し

$$P(SA \ominus TA) = P(A \ominus S^{-1}TA) = 2P(A)$$

だから，定理 7.2 系により

$$d'(S,T) \geqq 2 \sup_{A \in K_2(S^{-1}T)} P(A)$$

$$= 2\left\{\frac{P(\Omega_\infty)}{2} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{P(\Omega_p)}{p}\left[\frac{p}{2}\right]\right\} \geqq \frac{2}{3} P(\Omega_1^c) = \frac{2}{3} d(S,T).$$

（証明終）

強位相はあまりに強すぎて，十分便利だとはいえない。次節で定義する弱位相が種々の研究に適する。

§7.2 空 間 $\mathfrak{G}_w$

$\mathfrak{G}$ に弱位相を入れる。$T_0 \in \mathfrak{G}$ に対し

---

1) $\mathfrak{N}$ を強位相で考えるとき $\mathfrak{N}_s$ とかく。

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

$$\{T;\ T\in \mathcal{G},\ P(T_0A_j \ominus TA_j) < \delta_j\ ,\ 1\leqq j\leqq n\},\ A_j\in\mathcal{B},\ \delta_j>0$$

の全体を T_0 の近傍の $base$ とする位相を弱位相といい，そのような位相をもつ $\mathcal{G}$ を $\mathcal{G}_w$ であらわす．弱位相は各点収束の位相と同値：

$$T_n \to T(w) \iff \lim_{n\to\infty} P(T_nA\ominus TA)=0\ ,\quad \forall A\in\mathcal{B}$$

であり，更に次のように定められる距離δによる位相とも同値である．$\Delta=\{D_n\}$ をΩの任意の乗積$base$として

$$(7.2)\qquad \delta(S,T)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}P(SD_k\ominus TD_k)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}P(S^{-1}D_k\ominus T^{-1}D_k)$$

と定義する δによる位相が弱位相と同値であること，およびΔのとり方に関係しないことは明らかである。

<u>*Lemma 7.6*</u> 距離空間 $\mathcal{G}_w$ は完備かつ可分である．また，群 $\mathcal{G}_w$ は位相群である．

<u>証明</u> 位相群であることはδが（7.1）をみたすことによる．

完備性：$\{T_n\}\subset\mathcal{G}_w$ が基本列であるとする。

$\therefore\quad P(T_nD_k\ominus T_mD_k)\xrightarrow[n,m\to\infty]{}0\ ,\quad P(T_n^{-1}D_k\ominus T_m^{-1}D_k)\xrightarrow[n,m\to\infty]{}0\ ,\quad \forall k$

だから集合 $B_k,\ B'_k\in\mathcal{B}$ が（$mod\ 0$ で）きまって

$$P(T_nD_k\ominus B_k)\to 0\ ,\qquad P(T_m^{-1}D_k\ominus B'_k)\to 0\ .$$

変換 $TD_k=B_k$，$T'D_k=B'_k$ はそれぞれ $automorphism$ になり，$T'=T^{-1}$，$\delta(T_n,T)\to 0$ となることは明らか。

可分性：Ωの $atom$ を $\omega_1,\omega_2,\cdots$ とし $p=\sum_n P(\omega_n)$ とする．$\Omega-\{\omega_1,\omega_2,\cdots\}$ の $base$ $\Gamma'=\{E_n\}$ を次の条件をみたすように取る：任意の $n_1,n_2,\cdots n_k$ に対し $P(E_{n_1}\cap E_{n_2}\cap\cdots\cap E_{n_k})=p2^{-k}$.[1) $\Gamma=\{G_n\}=\Gamma'\cup\{\omega_1,\omega_2,\cdots\}$ とし，(7.2)の D_k を G_k に代えてδを定める.[2) このようなδに関して可分性をいえば十分である．有限個を除いてΓの元を不変にするような$automorphism$の可算系が求める稠密な集合になる． （証明終）

<u>*Lemma 7.7*</u> $\delta(S,T)\leqq d(S,T)$

---

1) $\Omega=[0,1]$ でルベーグ測度 dx を考えるときは，例えば次のようにとればよい．$E_1=[0,\frac{1}{2})$，$E_2=[0,\frac{1}{2^2})\cup[\frac{1}{2},\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2})$，$E_3=[0,\frac{1}{2^3})\cup[\frac{1}{2^2},\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3})\cup[\frac{1}{2},\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3})\cup[\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2},\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3})$，$\cdots\cdots$.

2) Γは §3.1 の意味での乗積$base$ではないが，Γ上の測度はΓから作られる乗積$base$上の（従って$\mathcal{B}$上の）測度を一意に定める．

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

証明 Lemma 7.3による.

Lemma 7.8 T_n に対応する $L^2(\Omega)$ 上のユニタリ作用素を U_n ($n=0,1,2,\cdots$) とすれば

$$U_n \to U_0 \ (\text{強}) \iff \delta(T_n, T_0) \longrightarrow 0.$$

定理7.5 可測 flow $\{T_t\}$ は実軸から $\mathfrak{G}_w$ の中への連続な準同型対応である.

定義7.2 実軸から $\mathfrak{G}_w$ の中への連続な準同型を連続 flow という. そうすれば可測 flow は連続である. 逆はわかっていない.

定理7.6 $\mathfrak{N}$ は $\mathfrak{G}_w$ で稠密である.

証明 T を任意の automorphism とし, $A_1, A_2, \cdots, A_n$ を互に交わらない可測集合とする. S_j を $B_j = A_j \cap \Omega_\infty(T)^c$ [1] 上の反周期的な automorphism とし

$$S\omega = \begin{cases} TS_j\omega, & \omega \in B_j, \quad 1 \leqq j \leqq n \\ T\omega, & \omega \in \bigcap_{j=1}^{n} B_j^c \end{cases}$$

とおけば $S \in \mathfrak{N}$ でかつ

$$TA_j = SA_j, \quad 1 \leqq j \leqq n.$$

(証明終)

系 任意の n に対し $\bigcup_{p=n+1}^{\infty} \mathfrak{N}_p$ は $\mathfrak{G}_w$ で稠密である.

証明 定理7.1とLemma 7.7による.

定理7.7 任意の $T \in \mathfrak{N}$ に対し, $\{STS^{-1};\ S \in \mathfrak{G}\}$ は $\mathfrak{G}_w$ で稠密である.

証明 定理7.4, 7.6, Lemma 7.7による.

§7.3 カテゴリ理論

次のようにおく:

$\mathfrak{M}$: エルゴード的な automorphism 全体の集合,

$\mathfrak{M}_0$: 弱混合な automorphism 全体の集合,

$\mathfrak{M}_1$: 強混合な automorphism 全体の集合.

明らかに

$$\mathfrak{N} \supset \mathfrak{M} \supset \mathfrak{M}_0 \supset \mathfrak{M}_1 .$$

定理7.4により, これらの集合はすべて $\mathfrak{N}_s$ (従って $\mathfrak{N}_w$) で稠密である. 従ってまた定理7.5より $\mathfrak{G}_w$ で稠密である.

---

1) $\Omega_\infty(T)$ は T の非周期的な点全体の集合.

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

定理7.8　$\mathfrak{M}_0$ は $\mathfrak{N}_s$ および $\mathcal{O}_w$ で稠密な G_δ 集合である。

証明　G_δ 集合であることを示せばよい。$L^2(\Omega)$ の稠密な列 $\{f_n\}$ をとり

$$K(i,j,k,n)=\{T;\ |(U_T^n f_i,\ f_j)-(f_i,1)(1,\ f_j)|<\frac{1}{k}\}$$ [1]

$$K=\bigcap_{i,j,k}\bigcup_n K(i,j,k,n)$$

とおく。Lemma 7.8 により $\mathcal{O}_w$ で，従って $\mathfrak{N}_s$ で各 $K(i,j,k,n)$ は開集合，従って K は G_δ である。

定理7.16 により $\mathfrak{M}_0\subset K$: $\mathfrak{M}_0\supset K$ を示そう．$T\notin\mathfrak{M}_0$ とすれば，U_T は $(g,1)=0\wedge\|g\|=1$ となる固有函数 g をもつ．汎函数列

$$\varphi_n(f)=(U_T^n f,f)-(f,1)(1,f)$$

は同程度連続だから，p があって

$$|\varphi_n(f_p)-\varphi_n(g)|<\frac{1}{2},\qquad \forall n.$$

$|\varphi_n(g)|=1$ だから

$$|\varphi_n(f_p)|>\frac{1}{2},\qquad \forall n.$$

即ち　$T\notin K(p,p,2,n)$　$(\forall n)$ となって　$T\notin K$.　　　　（証明終）

Lemma 7.9　$B\in\mathcal{B}$ と自然数 p に対し

$$\mathfrak{N}_p(B)=\{T;\ T\in\mathfrak{N},\ T^pB=B\}$$

とおけば

$$d(T,\ \mathfrak{N}_p(B))\leqq\frac{1}{p},\qquad \forall T\in\mathfrak{N}.$$

証明　定理7.2により，任意の $\varepsilon>0$ に対し

$$P(A)>\frac{1-\varepsilon}{p}$$

となる $A\in K_p(T)$ が存在する。$\pi=\{0,1,2,\cdots,p-1\}$ の任意の部分集合 $\hat{\pi}$ に対し

$$B_j^{\hat{\pi}}=\begin{cases}B, & k\in\hat{\pi}\\ B^c, & k\notin\hat{\pi}\end{cases}$$

$$A^{\hat{\pi}}=A\cap\bigcap_{j=0}^{p-1}T^{-j}B_j^{\hat{\pi}}$$

とおく．Aは 2^p 個の互に素な $A^{\hat{\pi}}$ の和となる．すべての $\hat{\pi}\subset\pi$ に対し $A^{\hat{\pi}}$ の反周期的automorphism を $S_{\hat{\pi}}$，$F=\bigcap_{k=0}^{p-1}T^kA^c$ のそれを S_F とする．そし

---

1)　Tに対応するユニタリ作用素を U_T と書く．

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

て次のように定める：

$$S\omega=\begin{cases} T\omega, & \omega\in\bigcup_{k=0}^{p-2}T^kA \\ S_{\hat{\pi}}T^{1-p}\omega, & \omega\in T^{p-1}A^{\hat{\pi}} \qquad (\hat{\pi}\subset\pi) \\ S_F\omega, & \omega\in F. \end{cases}$$

明らかに $S\in\mathfrak{N}_p(B)$ であり，S は T と集合 $T^{p-1}A\cup F$ 上でだけ異なる．この集合の測度は $\frac{1}{p}+\varepsilon$ 以下である． （証明終）

定理7.9　$\mathfrak{M}_1$ は $\mathfrak{N}_s$ および $\mathcal{G}_w$ で第1類[1]である．

証明　$\mathfrak{N}_s$ で第1類であること：$B\in\mathcal{B}$ を $P(B)=\frac{1}{2}$ なる任意の集合とし，

$$\mathcal{D}_p=\{T;\ T\in\mathfrak{N},\ |P(T^pB\cap B)-\frac{1}{4}|\leqq\frac{1}{5}\}$$

$$\mathcal{D}_n'=\bigcap_{p=n+1}^{\infty}\mathcal{D}_p, \qquad \mathcal{D}'=\bigcup_{n=0}^{\infty}\mathcal{D}_n'$$

とおく．明らかに $\mathfrak{M}_1\subset\mathcal{D}'$ だから，すべての $\mathcal{D}_n'$ が $\mathfrak{N}_s$ で疎なることを示せばよい．$\mathcal{D}_p$ が閉だから $\mathcal{D}_n'$ も閉であって

$$\mathfrak{N}-\mathcal{D}_n'=\bigcup_{p=n+1}^{\infty}(\mathfrak{N}-\mathcal{D}_p)$$

が $\mathfrak{N}_s$ で稠密であることを示せばよい．$S\in\mathfrak{N}_p(B)$ に対し

$$P(S^pB\cap B)-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

だから $\mathfrak{N}_p(B)\subset\mathfrak{N}-\mathcal{D}_p$．ところが $\bigcup_{p=n+1}^{\infty}\mathfrak{N}_p(B)$ は Lemma 7.9 により $\mathfrak{N}_s$ で稠密であるので，それを含む $\mathfrak{N}-\mathcal{D}_n'$ もそうである。

$\mathcal{G}_w$ で第1類なること：$\mathcal{G}_w$ でも $\mathcal{D}_p$ は閉であり，$\bigcup_{p=n+1}^{\infty}\mathfrak{N}_p(B)$ は稠密であるから上の議論でよい，

$$\mathcal{P}_n'=\bigcup_{p=n+1}^{\infty}\mathcal{P}_p$$

が $\mathcal{G}_w$ で稠密であることに注意すれば，$\mathfrak{N}_p(B)$ の代りに $\mathcal{P}_p$ を使ってもよい。

（証明終）

系　$L^2\ominus c$ で σ-ルベーグ・スペクトルを持つ automorphism 全体の集合は $\mathcal{G}_w$ で第1類である．

証明　定理1.17と第1類集合の部分集合はまた第1類集合であることによる．

---

[1] 可算個の疎な集合の和として表わされる集合を第1類という。

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

（証明終）

定理 7.10 ([36]) エントロピー 0 の automorphism 全体の集合は $\mathfrak{G}_w$, $\mathfrak{G}_s$, $\mathfrak{N}_s$ のいずれでも稠密な G_δ 集合である．

Lemma 7.10 任意の $A_0, A_1, \cdots, A_k \in \mathbb{B}$ に対し $P(A_0 \cap TA_1 \cap \cdots \cap T^k A_k)$ は $\mathfrak{G}_w$ および $\mathfrak{G}_s$ で連続である．

証明 $|P(A_0 \cap TA_1 \cap \cdots \cap T^k A_k) - P(A_0 \cap SA_1 \cap \cdots \cap S^k A_k)|$

$$= |E\{\chi_{A_0}\chi_{TA_1}\cdots\chi_{T^kA_k}\} - E\{\chi_{A_0}\chi_{SA_1}\cdots\chi_{S^kA_k}\}|$$

$$\leqq \sum_{j=1}^{k} |E\{\chi_{A_0}\cdots\chi_{T^jA_j}\chi_{S^{j+1}A_{j+1}}\cdots\chi_{S^kA_k}\} - E\{\chi_{A_0}\cdots\chi_{T^{j-1}A_{j-1}}\chi_{S^jA_j}\cdots\chi_{S^kA_k}\}|$$

$$\leqq \sum_{j=1}^{k} E\{|\chi_{T^jA_j} - \chi_{S^jA_j}|\}$$

$$= \sum_{j=1}^{k} P(T^jA_j \ominus S^jA_j).$$

上の不等式と $\delta(T^j, S^j) \leqq j\delta(T, S)$ による． （証明終）

定理の証明 有限分割 $\alpha = \{A_j;\ 1 \leqq j \leqq k\}$ に対し

$$H(\alpha | T^{-1}\alpha \vee \cdots \vee T^{-n}\alpha)$$

$$= -\sum_{j_0, \cdots, j_n} P(A_{j_0} \cap T^{-1}A_{j_1} \cap \cdots \cap T^{-n}A_{j_n}) \log \frac{P(A_{j_0} \cap T^{-1}A_{j_1} \cap \cdots \cap T^{-n}A_{j_n})}{P(T^{-1}A_{j_1} \cap \cdots \cap T^{-n}A_{j_n})}$$

は $T \in \mathfrak{G}_w$ の連続函数である． $h(T)$ はこのような連続函数の単調減少極限 $H(\alpha | \alpha_T^-)$ の単調増大極限 (Lemma 5.6) である．いま $h_{nm}(T)$ は T の連続函数，各 n に対し $h_{nm}(T) \geqq h_{nm+1}(T)$, $\lim_{m\to\infty} h_{nm}(T) = h_n(T)$, 更に $h_n(T) \leqq h_{n+1}(T)$, $\lim_{n\to\infty} h_n(T) = h(T)$ としよう．

$$\{T;\ h(T) \leqq a\} = \bigcap_n \{T;\ h_n(T) \leqq a\}$$

$$= \bigcap_n \bigcap_k \bigcup_m \{T;\ h_{nm}(T) < a + k^{-1}\}.$$

故に $\{T;\ h(T) = 0\}$ も G_δ 集合である．周期的な automorphism はエントロピー 0 だから，定理 7.6，系により $\mathfrak{G}_w$ に対し定理を得る． $\mathfrak{G}_s$ に対しては定理 7.3，系 2 を使えばよい． $\mathfrak{N}_s$ に対してはエントロピー 0 の反周期的な automorphism の存在に注意すれば，定理 7.4 により定理を得る． （証明終）

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

附　録

flow の距離空間への同型写像

§0　記号と基本概念

今後 $(M, \mathcal{B}_\mu, \mu)$, (M, μ) 或は単に M, M' 等によって $\mathcal{B}_\mu$ を σ-族, μ を測度とするルベーグ空間を表わし，常に $\mu(M) = 1$ とする．M上のある命題 (A) が測度 0 の集合を除いて成立することを (A) $(mod\ 0)$ で示す．ルベーグ空間には可算または有限ケの $\mathcal{B}_\mu$ の元より成る基底（base）が存在するが，これを $\{D_k\}$ で表わす．M からある位相空間 Y への写像 φ に対して，$\{C_y, y \in Y\}$, $C_y = \{x : \varphi x = y\}$ によって定まる M の分割を ζ_φ で表わし，可算ケの可測集合のなす系 Σ の定める分割を ζ_Σ で表わす．ε によって M の個々の点への分割を示す．位相 $\mathcal{O}$ の定める位相的ボレル族を $\mathcal{B}_\sigma$ とかき，$\mathcal{B}_\sigma$ に測度 ν が与えられているとき，ν による完備化を $\overline{\mathcal{B}_\sigma}$ または $\mathcal{B}_\nu$ で表わす。

M 上ほとんど到る処有限値をとる実数値可測函数の全体を $L_0(M)$ で表わしこれに距離

$$(0.1) \qquad \delta(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(x) - g(x)|}{1 + |f(x) - g(x)|}\, d\mu$$

$$f, g \in L_0(M)$$

を入れる．同様にして，$T = (-\infty, \infty)$ 上のルベーグ測度に関しほとんど到る処有限値をとる実数値可測函数の全体を $L_0(T)$，ルベーグ可測集合の全体を $\mathcal{F}_T$ で表わし，$L_0(T)$ に距離

$$(0.2) \qquad d(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(u, f(u) - g(u))\, du$$

$$f, g \in L_0(T),$$

$$\delta(u, x) = \frac{1}{1 + u^2} \frac{|x|}{1 + |x|}$$

を導入する．$(L_0(T), d)$ の元は可測函数の $(mod\ 0)$ 同値な類である．

確率過程 $\xi(t, \omega)$, $\eta(t, \omega)$, $-\infty < t < \infty$, の任意の同一時点 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ に対する有限次元の分布が等しいとき，ξ と η は同一確率法則に従うと

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

いい，このことを

$$\xi(t,\omega)\sim\eta(t,\omega)\quad(in\ law)$$

で表わす。

(M,μ) から位相空間 (Y,σ) への可測な写像 φ が与えられると φ を通して μ により $\mathcal{B}_\sigma$ 上に測度 ν が定まる，これを $\nu=\varphi\mu$ で表わす。

§1. flow の距離空間への同型写像

距離空間 $L_0(T)$ の有限または可算直積空間 $\Omega=L_0(T)^n$，$\Omega=L_0(T)^{\aleph_0}$ を考える。Ω も距離空間となる，これを (Ω,d) で表わす：

$$d(\omega_1,\omega_2)=\sum_k\frac{1}{2^k}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(u,f_k(u)-g_k(u))\,du,$$

$$\omega_1,\omega_2\in\Omega,$$

$$\omega_1=\{f_1(u),\ f_2(u),\cdots\}$$

$$\omega_2=\{g_1(u),\ g_2(u),\cdots\}.$$

Ω 上につぎのような自然な flow S_t が考えられる。

(i) $\omega\to S_\tau\omega=\{f_1(t+\tau),\ f_2(t+\tau),\cdots\}$

$\omega=\{f_1(t),\ f_2(t),\cdots\}$

(ii) $S_s S_t=S_{s+t}$，$-\infty<s,\ t<\infty$.

(iii) S_t は Ω から Ω への 1―1 写像

(iv) $(t,\omega)\in\Omega\times T\longrightarrow S_t\omega\in\Omega$ は連続な写像である。

$\mathcal{F}=\{f_k(x)\}$ を有限または可算ケの $L_0(M)$ の元 $f_k(x)$ より成る函数族とする。(M,μ) 上に可測な flow T_t が与えられたとき

(1.1) $\varphi:\ x\in M\to\omega=\varphi x=\{f_1(T_tx),\ f_2(T_tx),\cdots\}\in\Omega$

によって M から Ω への写像 $\varphi=\varphi(\mathcal{F})$ が定まる。このとき Fubini の定理によって $N\in\mathcal{B}_\mu$，$\mu(N)=0$ が存在し，$f_k(T_tx)$ は $x\in\Omega_0=\Omega-N$ に対して t の函数として $L_0(T)$ の元となり，しかもかかる N は T_t 不変である。

ルベーグ空間 M から位相空間への写像についてつぎの事柄は基本的である。

1°. (Y,σ) を可分なハウスドルフ空間，φ を M から Y への可測な写像とする。φ を通じて Y 上に測度 ν が定まる，$\nu(A)=\mu(\varphi^{-1}A)$，$A\in\mathcal{B}_\sigma$．$\mathcal{B}_\sigma$ の ν による完備化を $\mathcal{B}_\nu$，$Y_0=\varphi(M)$ とおけば $(Y_0,\ \mathcal{B}_\nu\cap Y_0,\ \nu)$ はルベーグ空間である。

証明　(a) $\zeta=\zeta_\varphi$ は可測な分割である、何故ならば，$\sigma'\subset\sigma$ を Y の可算基

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

とし，$\Sigma=\{\varphi^{-1}A : A\in\sigma'\}$ とおけば $\Sigma\subset\mathcal{B}_\mu$ であって，Σが生成する分割はξに一致する．

(b) $(Y, \mathcal{B}_\nu, \nu)$ は Rohlinの意味で可分な測度空間である．何故ならば $\mathcal{B}_{\sigma'}\subset\mathcal{B}_\sigma$，また，$A\in\sigma$に対して $A=\bigcup_{n\geq 1}B_n$，$B_n\in\sigma'$ と表わせ，従って $A\in\mathcal{B}_{\sigma'}$，即ち $\sigma\subset\mathcal{B}_{\sigma'}$，$\mathcal{B}_\sigma\subset\mathcal{B}_{\sigma'}$ 故に $\mathcal{B}_\sigma=\mathcal{B}_{\sigma'}$，$\mathcal{B}_\nu=\overline{\mathcal{B}}_\sigma=\overline{\mathcal{B}}_{\sigma'}$．$(\overline{\mathcal{B}}_{\sigma'}, \nu)$ は定義に従って可分な測度空間であるから，$(Y, \mathcal{B}_\nu, \nu)$も可分である．

(c) 商空間 M/ξ にμから自然にみちびかれる測度を μ^ξ とすれば $(M/\xi, \mu^\xi)$ はルベーグ空間である（Rohlin [35]）．

$$\mathcal{B}_0\equiv\{\varphi^{-1}(A) : \varphi^{-1}(A)\in\mathcal{B}_{\mu\xi},\ A\subset Y_0\},$$

$\nu_0(A)\equiv\mu(\varphi^{-1}A)$ とおけば$\mathcal{B}_0$は ν_0 につき完備で，M/ξ の定義より $(Y_0, \mathcal{B}_0, \nu_0)\sim(M/\xi, \mathcal{B}_{\mu\xi}, \mu^\xi)$（同型）．また，$\overline{\mathcal{B}}_\sigma\cap Y_0\subsetneq\mathcal{B}_0$ であり，νの $\overline{\mathcal{B}}_0\cap Y_0$ への縮少（restriction）は ν_0 に等しい。一方，$\Sigma_0'\equiv\sigma'\cap Y_0\subset\mathcal{B}_0$ は Y_0 の二点を分離するから Y_0 の基底（可分な測度空間の Rohlin の意味の base），そして $\Sigma_0'\subset\overline{\mathcal{B}}_\sigma\cap Y_0$，故に $\mathcal{B}_0=\overline{\mathcal{B}(\Sigma_0')}\subset\overline{\mathcal{B}}_\sigma\cap Y_0$ （$\mathcal{B}(\Sigma_0')=\Sigma_0'$ の定めるボレル族）．以上から $\mathcal{B}_0=\overline{\mathcal{B}}_\sigma\cap Y_0$ 故に $(Y_0, \overline{\mathcal{B}}_\sigma\cap Y_0, \nu_0)$ はルベーグ空間になる．（証明終）

ルベーグ空間 (M, μ)上の自己同型（mod 0）の全体$\mathcal{G}$に完備可分な距離を入れることができ，この位相につき$\mathcal{G}_w$は位相群となる．[1] flow には一応二つの立場が考えられる（Rohlin [35]）．

(I)（連続な flow）$T=(-\infty, \infty)$を位相的加群とみるとき，Tより$\mathcal{G}_w$への準同型写像 (*) $t\longrightarrow T_t\in\mathcal{G}_w$ の像全体 $\{T_t, -\infty<t<\infty\}$ を連続な flow とよぶ．

(II)（可測な flow）上記 T_t が更につぎの条件をみたすときこれを可測な flow とよぶ．

(i) T_t, $\forall t$, はM上の自己同型（mod 0でなく正確な）であり，

(ii) $(t, x)\in M\times T\rightarrow T_t x\in M$ は可測な写像である．

可測な flow は連続である．

T_t, T_t' を M, M' 上の flow とするとき，この二つの立場に応じて，両者の同型にも二つの立場がある．

(I) T_t, T_t' を連続な flow とする．(1) Mより M' への同型（mod 0）対応φ

---

1) §7.2 参照．

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

が存在して，このφを通して (2) $T_t=\varphi^{-1}T_t'\varphi$ (mod 0)，ここに (1) (2) における除外集合はtに依存してよい．このときT_tとT_t'は同型 (mod 0) であるといい，$T_t \sim T_t'$ (mod 0) で表わす。

(Ⅱ) T_t, T_t'を可測な flow とする．T_t, T_t' 不変な集合 $N\subset M$, $N'\subset M'$, $\mu(N)=\mu'(N')=0$ と，$M_0=M-N$ より $M_0'=M'-N'$ への同型写像(正確) φがあって，$T_t x=\varphi^{-1}T_t'\varphi x$, $\forall x\in M$ が成立するとき，T_tとT_t'は同型であるといい，$(T_t, M, \mu)\sim(T_t', M', \mu')$ または $T_t\sim T_t'$ で表わす．

<u>定理</u> $\mathcal{F}=\{f_n(x)\}$ を $L_0(M)$の元の有限または可算系とする．このとき (i) $\mathcal{F}$は$L_0(M)$で稠密 または (ii) $\mathcal{F}$の元の有限個の積の一次結合の全体 $\{g_n(x)\}$ が $L_0(M)$ で稠密 であれば $\varphi=\varphi(\mathcal{F})$ を通して

$$(T_t, M, \mu)\sim(S_t, \Omega, P) \quad ((\text{Ⅱ})\text{の意味})$$

ただし $P=\varphi\mu$．

<u>証明</u> φがMよりΩへの同型写像であることを示す．$\varphi x=\varphi x'$ ならば (i) (ii) の場合それぞれ $f_n(T_t x)=f_n(T_t x')$ $(L_0(T))$, $\forall n$, $g_n(T_t x)=g_n(T_t x')$ $(L_0(T))$, $\forall n$, が成立し，(ii) は (i) に帰着される．よって (i) の場合につき証明する．

$D\in\{D_k\}$ の特性函数 χ_D に対して $\{f_n'\}\subset\{f_n\}$ をえらび $f_n'\to\chi_D(L_0(M), \delta)$ ならしめれば

$$\int_M\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|f_n'(T_t x)-\chi_D(T_t x)|}{1+|f_n'(T_t x)-\chi_D(T_t x)|}\,\frac{1}{1+t^2}\,d\mu\,dt=\pi\delta(f_n', \chi_D)\to 0,\quad n\to\infty.$$

故に $\{f_n''\}\subset\{f_n'\}$ に対して

$$f_n''(T_t x)\to\chi_D(T_t x)(L_0(T)) \quad \forall x\in M-N,\quad \mu(N)=0,$$

かかるNはT_t-不変である．$\varphi x=\varphi x'$, $x, x'\in M-N$ とすれば $f_n''(T_t x)=f_n''(T_t x')$，故に $\chi_D(T_t x)=\chi_D(T_t x')$ $(L_0(T))$，すべてのDについてこのことを考えれば T_t-不変なN', $\mu(N')=0$ が存在して $\varphi x=\varphi x'$, $x, x'\in M-N'=M_0$ ならば $x=x'$．故にφはT_t-不変なM_0よりΩ内への 1-1 写像となる．

1°によりφは両可測である。

$$x\in M_0,\quad \varphi x=\omega=\{f_k(T_s x), -\infty<s<\infty\}$$

に対して

$$\begin{aligned}\varphi(T_t x)&=\{f_k(T_s(T_t x)), -\infty<s<\infty\}\\&=\{f_k(T_{s+t}x), -\infty<s<\infty\}\end{aligned}$$

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

$= S_t \varphi x$.

故に $\varphi M_0 \ni \Omega_0$ は S_t-不変なルベーグ空間であり，$T_t = \varphi^{-1} S_t \varphi$ が成立する．

Ω上の測度 $P = \varphi\mu$ は

$$P(\omega : d(\omega, \omega_0) < a) = \mu(x : d(\varphi x, \omega_0) < a),\ \omega_0 \in \Omega,$$

によって決定される．するとμが T_t-不変な測度であることと，上記 S_t と T_t の関係からPは S_t 不変な測度である．

かくて(II)の同型の意味で，

$$(S_t, \Omega, P) \sim (T_t, M, \mu).$$ （証明終）

2°. 一般に S_t 不変な $(\Omega, \mathcal{B}_d)$上の確率測度Pが与えられると，(S_t, Ω, P) は可測な flow である．

証明　$f(\omega)$ を d-連続な実数値函数とすれば $f(S_t\omega)$ は (t, ω) につき連続であるから $\overline{\mathcal{B}_d \times \mathcal{F}_T}$ 可測である．fが一般に Baire 函数のときこのことが成立する．つぎに，$f(\omega)$ を $\overline{\mathcal{B}_d}$ 可測（$\overline{\mathcal{B}_d}$ はPに関する位相的ボレル族 $\mathcal{B}_d$ の完備化）な函数とすると，Baire 函数 $f_i(\omega)$ $(i=1,2)$ が存在して

$$f_1(\omega) \leq f(\omega) \leq f_2(\omega)$$

$$\int_\Omega (f_2(\omega) - f_1(\omega))\, dP = 0,$$

$$f_1(S_t\omega) \leq f(S_t\omega) \leq f_2(S_t\omega)$$

$$\int_0^{t_0}\int_\Omega (f_2(S_t\omega) - f_1(S_t\omega))\, dP\, dt$$

$$= t_0 \int_\Omega (f_2(\omega) - f_1(\omega))\, dP = 0, \quad (\forall t_0 > 0).$$

故に

$$f(S_t\omega) \in \overline{\mathcal{B}_d \times \mathcal{F}_T}.$$

§2 定常過程の flow による表示

$(A, \mathcal{B}, Q)$を確率空間とし，$\xi(t,\alpha) = \{\xi_n(t,\alpha)\}$ を有限または可算個の可測な実数値定常過程 ξ_n より成る定常過程とする．$\xi_n(t,\alpha)$ はほとんどすべてのαに対して $L_0(T)$ の元である．始めから除外集合をとり去っておき，すべてのαに対し $\xi(t,\alpha)$ はΩの元であるとしてよい。かくて写像

$$\varphi : \alpha \in A \to \varphi\alpha = \omega = \{\xi_1(t,\alpha), \xi_2(t,\alpha), \cdots\} \in \Omega$$

を考えることができる．

1°. $\varphi : (A, \mathcal{B}) \to (\Omega, \mathcal{B}_d)$

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

は可測な写像である.

証明　$\Omega \ni \omega_0 = (\omega_1^0(t),\ \omega_2^0(t), \cdots)$ に対して

$$d(\varphi\alpha, \omega_0) = \sum_k \frac{1}{2^k} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t, \omega_k^0(t) - \xi_k(t,\alpha))\, dt$$

は α につき可測であるから $(\alpha :\ d(\varphi\alpha, \omega_0) < a) \in \mathcal{B}$.

2°. (S_t, Ω, P), $P = \varphi Q$ は可測な $flow$ である.

証明

$$P(\omega; d(\omega, \omega_0) < a) = Q(\alpha; d(\varphi\alpha,\ \omega_0) < a)$$

によって測度 P は定まる. $E = (\omega;\ d(\omega, \omega_0) < a)$ とおけば $d(S_{-t_0}\omega, \omega_0)$ は ω の連続函数であるから $S_{t_0}E = (\omega;\ d(S_{t_0}\omega,\ \omega_0) < a)$ は開集合, 従って $S_{t_0}E \in \mathcal{B}_d$, 一般に $F \in \overline{\mathcal{B}_d}$ に対し $S_{t_0}F \in \overline{\mathcal{B}_d}$. つぎに, ξ の定常性より

$$P(S_{t_0}E) = Q(\alpha;\ d(\xi(t-t_0, \alpha),\ \omega_0) < a)$$
$$= Q(\alpha;\ d(\xi(t,\alpha),\ \omega_0) < a) = P(E).$$

一般に $F \in \overline{\mathcal{B}_d}$ に対して $P(S_{t_0}F) = P(F)$. §1, 2° により (S_t, Ω, P) は可測な $flow$ である.

(S_t, Ω, P) を ξ より定まる $flow$ とよぶ.

3°. $\xi(t,\alpha) = \{\xi_k(t,\alpha)\}$, $\eta(t,\beta) = \{\eta_k(t,\beta)\}$ を二つの可測な定常過程で $\xi \sim \eta$ ($in\ law$) とすれば, 両者から Ω 上にみちびかれる $flow$ は一致する.

証明　定義から直ちに出る.

定理　$\xi(t,\alpha) = \{\xi_k(t,\alpha)\}$ を可測な定常過程とする. ξ から Ω 上に定まる $flow$ を (S_t, Ω, P) とすれば, 定常過程 $x(t,\omega) = \{x_k(t,\omega)\}$ が定まりつぎの性質をもつ.

(i) $x(t,\omega)$ はすべての t, ω に対して定義され

$$x(t,\omega) = x(0, S_t\omega), \quad \forall t, \omega,$$

(ii)
$$x(t,\omega) \sim \xi(t,\alpha) \quad (in\ law)$$

証明　(a) $\omega \in \Omega$ は可測函数の $(mod\ 0)$ 同値類である. 一つのクラスの代表元と, それを通して t における ω の値を一意的に定義する. λ を自然数とし

$$g_\lambda(y) = y \qquad |y| \le \lambda$$
$$= \lambda \qquad |y| > \lambda,$$

$$\omega = (\omega_1(t),\ \omega_2(t), \cdots)$$

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

$$x_k(t,\omega) = \lim_{\lambda\to\infty} \overline{\lim_{n\to\infty}}\ G_\lambda^n(t,\omega_k)$$

$$G_\lambda^n(t,\omega_k) = n\int_t^{t+1/n} g_\lambda(\omega_k(s))\,ds,$$

とおき，ωの代表元を $x(t,\omega) = \{x_k(t,\omega)\}$ ととれば，これはクラスωから一意に定まり，かつまたωの元である．$G_\lambda^n(t,\omega_k) = G_\lambda^n(0,(S_t\omega)_k)$ より，すべての t, ω に対して

$$x(t,\omega) = x(0, S_t\omega).$$

(b) つぎに，上記のことに測度 $P = \varphi Q$ を関連させて考察する．$G_\lambda^n(t,\omega_k)$ は (t,ω) の連続函数であるから $\overline{\mathcal{B}_d \times \mathcal{F}_T}$ 可測，ゆえに $x(t,\omega)$ もまた $\overline{\mathcal{B}_d \times \mathcal{F}_T}$ 可測．

(c) 任意のωに対して

$$(2.1)\qquad \tilde{x}_k(t,\omega) = \lim_{\lambda\to\infty} \lim_{n\to\infty} G_\lambda^n(t,\omega_k)$$

がほとんどすべての t に対し存在するが，(2.1)が存在する (t,ω) 集合は $\overline{\mathcal{B}_d\times\mathcal{F}_t}$ 可測であるから *Fubini* の定理より，(2.1)は固定されたほとんどすべての t に対し，ほとんどすべてのωにつき存在するが，他方，P の定常性より，実は固定されたすべての t に対し，ほとんどすべてのωにつき(2.1)が存在し，

$$x(t,\omega) = \tilde{x}(t,\omega) \qquad a.e.\ (t,\omega)\in\Omega\times T.$$

(d) $\alpha \to \varphi\alpha = \xi(t,\alpha) = \{\xi_k(t,\alpha)\} \in \Omega$ に対し上記のことを考察する．$\forall\alpha, t$ に対し

$$x(t,\varphi\alpha) = \{\lim_{\lambda\to\infty} \overline{\lim_{n\to\infty}}\ G_\lambda^n(t,\xi_k(t,\alpha))\}$$

が定まる。$\xi(t,\alpha)$ は可測定常過程であるからこの場合も(c)の論法が適用でき，任意の t に対し，ほとんどすべてのαにつき $\tilde{x}(t,\varphi\alpha)$ が存在し，また

$$\tilde{x}(t,\varphi\alpha) = x(t,\varphi\alpha) \qquad a.e.\ \alpha,\quad \forall t \text{ 固定}$$

が成立する．一方，$\xi(t,\alpha)$ の t に関する可測性と定常性から

$$\tilde{x}(t,\varphi\alpha) = \xi(t,\alpha) \qquad a.e.\ \alpha,\quad \forall t \text{ 固定}.$$

最後に

$$\tilde{x}(t,\varphi\alpha) \sim x(t,\omega) \qquad (in\ law)$$

を，以上の結果と結合して

$$\xi(t,\alpha) \sim x(t,\omega) \qquad (in\ law).$$

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

§3 連続な flow の可測な flow による表示

一般論として

1° (M,μ) 上に自己同型 (mod 0) T が与えられている. 即ち $N, N', \mu(N) = \mu(N') = 0$ が存在して T は $M-N$ より $M-N'$ への同型写像(正確)である. このとき $M_0 \in \mathcal{B}_\mu$, $M_0 \subset (N \cup N')^c$ が存在して, T は M_0 上の自己同型(正確)になる.

2° (Y,σ) を可分ハウスドルフ空間, (M,μ) (M',μ') をルベーグ空間, π, λ を M より Y への同程度可測 (equi-measurable) な写像とする. 即ち

$$\mu(\pi^{-1}A) = \mu'(\lambda^{-1}A), \quad A \in \mathcal{B}_\nu$$

ここに $\nu = \pi\mu = \lambda\mu'$. 然るときは M/ζ_π より M'/ζ_λ への同型 (mod 0) 写像 U が存在してつぎの性質をもつ. $\forall y \in Y_0 = \pi(M) \cap \lambda(M')$ に対し $M/\zeta_\pi \ni \pi^{-1}(y) = c \longrightarrow Uc = c' = \lambda^{-1}(y) \in M'/\zeta_\lambda$.

3° (Y,σ) を可分なハウスドルフ空間, φ を (M,μ) より Y 内への可測な写像とし, Y 上に同型写像 S が与えられているとする. このとき

(i) $Y_0 \subset \varphi(M)$, $\nu(Y_0) = 1$, を適当にとり, $M_0 = \varphi^{-1}(Y_0)$ とおけば, $V = \varphi^{-1} S \varphi$ は M_0/ζ_φ 上の同型写像(正確)となる.

(ii) f を Y よりある可測空間 Z への可測な写像とするとき

$$c = \{x;\ f(S\varphi x) = z,\ x \in M_0\}$$
$$c' = \{x;\ f(\varphi x) = z,\ x \in M_0\},\quad z \in Z$$

とおけば c, c' は ζ_φ-集合であって, c, c' を M_0/ζ_φ の元とみるとき, $c' = Vc$.

以上の事柄の証明は容易であるから省く.

<u>定理</u> (i) T_t を M 上の連続な flow とすれば T_t と同型 (mod 0) で可測な flow S_t (T_t の可測な表示) が存在する.

(ii) 可測な表示はつぎの意味で一意である. 連続な flow T_t が二つの可測な表示 (S_t, M) (S'_t, M') をもてば $S_t \sim S'_t$ ((II) の意味で).

<u>証明</u> 基底 $\{D_k\}$ に対し

(3.1) $\qquad \xi_0(t,x) = \{\chi_{D_k}(T_t x)\}$

とおけば, T_t の連続性より, $\xi_0(t,x)$ は確率連続な定常過程, 従ってこれの可測変形としての定常過程 $\xi(t,x)$ が存在する: $\xi(t,x) = \xi_0(t,x)$ a.e. x, $\forall t$. $\xi(t,x)$ の (Ω, d) 上の可測な表示を $x(t,\omega)$, $\omega = \varphi x$, とする. $S = S_t$ に対して 1° を適用する. 可測な $Y_0 \subset \varphi(M)$, $P(M_0) = 1$ が存在して,

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

S は Y_0 上の自己同型（正確）になる．$f(\omega)=x(0,\omega)$ とおき，$x(t,\omega)=x(0,S_t\omega)$，$\forall\omega, t$，を用いて

(3.2) $\quad f(S\varphi x)=x(t,\varphi x)=\xi(t,x)=\xi_0(t,x) \quad a.e.\ x,$

(3.3) $\quad f(\varphi x)=x(0,\varphi x)=\xi(0,x)=\xi_0(0,x) \quad a.e.\ x.$

$\pi(x)=\xi_0(t,x)$，$\lambda(x)=\xi_0(0,x)$ とおけば π,λ は同程度可測であり，π,λ が (3.1) の如く $\{D_k\}$ を用いて定義されていることから，

(3.4) $\quad \zeta_\pi=\zeta_\lambda=\varepsilon \pmod 0$

$\quad \zeta_{f\circ\varphi}=f\circ\varphi(x)$ による分割

とおけば

(3.5) $\quad \zeta_{f\circ\varphi}\leq\zeta_\varphi$

だから (3.2), (3.3), (3.4) より

(3.6) $\quad \zeta_\varphi=\varepsilon \pmod 0.$

他方，2°より，$M/\zeta_\pi=M \pmod 0$ より $M/\zeta_\lambda=M \pmod 0$ への同型 $\pmod 0$ U が存在するが，λ,μ の (3.1) による定義より $U=T_t \pmod 0$．さらに 3° を適用すると，$M_0/\zeta_\varphi=M_0 \pmod 0$ 上に自己同型対応 $V=\varphi^{-1}S\varphi=\varphi^{-1}S_t\varphi$ が定まる． 3°，(ii) に関係 $f(S\varphi x)=\pi(x)$ $a.e.\ x$，$f(\varphi x)=\lambda(x)$ $a.e.\ x$ を持ち込めば

$$V=U \pmod 0.$$

故に

$$T_t=\varphi^{-1}S_t\varphi \pmod 0.$$

つぎに一意性の証明．仮定から $S_t\sim S_t'$（(I) の意味）．この同型を与える M より M' への同型対応を ψ とする．$\{D_k\}$ を M の基底とすれば $\{D_k'\}$，$D_k'=\psi D_k$ は M' の基底になる。$\varphi: x\longrightarrow\omega=\{D_k(S_tx)\}$，$\varphi': x'\longrightarrow\omega=\{D_k(S_t'x)\}$ によって定義される M, M' より Ω への写像 φ,φ' は同程度可測である。Ω 上の自然な flow を $\bar{S}_t$ で表わせば，$Y_0=\varphi(M)\varphi(M')$ は $\bar{S}_t$ 不変であり，$P(Y_0)=1$．また，$M_0=\varphi^{-1}Y_0$，$M_0'=\varphi'^{-1}Y_0$ は S_t，S_t' 不変であって

$$(\bar{S}_t)_{Y_0}\sim(S_t)_{M_0}\ ,\ (\bar{S}_t)_{Y_0}\sim(S_t')_{M_0'} \qquad \text{（どれも (II) の意味），}$$

ここに $(\ )_A$ は flow を不変集合 A に reduce することを表わす。故に $S_t\sim S_t'$（(II)）． （証明終）

flow の解析においては多くの場合 T_t の可測性が要求される．そのため flow の諸結果が連続な flow に対して成立するかどうかが問題になる（Rohlin

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

[37]). たとえば (1) T_t のエントロピーを計算するために，Ambrose 表現を用いるとすれば（Abramov の方法），その結果は，そのままでは連続な flow に適用できない．然るに T_t のエントロピーの定義には可測性は要求されない．また，(2) Kolmogorov flow のスペクトルを計算するため Ambrose 表現を用いる（Sinai の方法）とすれば，その結果は連続な flow には使えないことになる．然るに Kolmogorov flow は flow の可測性とは独立な概念である．そこで Rohlin の述べる如く（Rohlin [37]）(1)(2) 等に対して flow の可測性を用いない直接的な証明を考えることが望ましい。Pinsker は (1) に対して可測性を用いない方法を考察した（未発表）．しかしながら上記の定理によれば，連続な flow は可測な flow でおきかえることができ，このようなおきかえによってエントロピーや，Kolmogorov flow の概念には影きょうを与えないので，Rohlin の指摘する問題点は容易に解決されたことになる。

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

文 献

[1] Abramov, L.M. ; *The entropy of the derived automorphism.* Dokl. Akad. Nauk, 128 (1959), 647-650.

[2] ―――――――― ; *On the entropy of a flow.* Dokl. Akad. Nauk, 128 (1959), 873-876.

[3] Adler, R.L. ; *A note on the entropy of skew product transformations.* Proc. Amer. Math. Soc., 14, 4 (1963), 665-669.

[4] Ambrose, W. ; *Representation of ergodic flow.* Ann. Math., 42 (1941), 723-739.

[5] ―――――――― *and* S. Kakutani ; *Structure and continuity of measurable flow.* Duke Math. J., 9 (1942), 25-42.

[6] ――――――――, P.R.Halmos *and* S. Kakutani ; *The decomposition of measures II.* Duke Math. J., 9 (1942), 43-47.

[7] Anzai, H. ; *Ergodic skew product transformations on the torus.* Osaka Math. J., 3 (1951), 83-99.

[8] Doob, J.L. ; *Stochastic processes.* Wiley, New York, 1953.

[9] Gelfand, I.M. *and* S.V.Fomin ; *Geodesic flows on the manifold with a constant negative curvature.* Uspehi Mat. Nauk, 7, 1 (1952), 118-137.

[10] Girsanov, I. V. ; *On the spectrum of dynamical systems which is generated by stationary Gaussian processes.* Dokl. Akad. Nauk, 119, 5 (1958), 851-853.

[11] Halmos, P. R. ; *The decomposition of measures.* Duke Math. J., 8 (1941), 386-392.

[12] ―――――――― ; *Lectures on ergodic theory.* Math. Soc. of Japan, Tokyo, 1956.

[13] 飛田武幸 ; *Gaussian process の表現とその応用.* Seminar on Prob., Vol. 7, 1961.

[14] Hopf, E. ; *Ergodentheorie.* Berlin, 1937.

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

[15] 池田信行，渡田武幸，吉沢尚明；*Flowの理論(上)*. Seminar on Prob., Vol. 12, 1962.

[16] Itô, K.; *Complex multiple Wiener integral*. Japan J. Math., 22 (1952), 63-86.

[17] 伊藤清；確率論. 岩波，1953.

[18] Itô, K.; *Spectral type of the shift transformation of differential processes with stationary increments*. Trans. Amer. Math. Soc., 81 (1956), 253-263.

[19] 伊藤清；確率過程 I. 岩波講座，現代応用数学，A. 13, I.

[20] 伊藤清三；*Hellinger-Halnの定理について*. 数学，5巻2号 (1953), 90-91.

[21] Jacobs, K.; *neuere Methoden und Ergebnisse der Ergodentheorie*, Springer, Berlin, 1960.

[22] 確率論セミナー；確率論の手引. Vol. 2, C1. Prediction, 1962.

[23] ————；確率論の手引. Vol. 4, C2. 情報理論，1963.

[24] 河田竜夫；フーリエ解析と確率論. 中文館，1947.

[25] 河田敬義；確率論，共立出版，1948.

[26] Kolmogorov, A.N.; *General theory of dynamical systems and classical mechanics*. Proc. Inter. Cong. Math. (1954), 315-333.

[27] ————; *A new metrical invariant of transient dynamical systems and automorphisms in Lebesgue spaces*. Dokl. Akad. Nauk, 119, 5 (1958), 861-864.

[28] ————; *On the entropy to the unit time, as a metrical invariant of automorphisms*. Dokl. Akad. Nauk, 124, 4 (1959), 754-755.

[29] Nemytskii, V.V. *and* V.V. Stepanov; *Qualitative theory of differential equations*. Princton Univ. Press, 1960.

[30] 西尾真喜子；*Wiener* 積分と強定常過程の表現. Seminar on Prob., Vol. 10, 1961.

[31] Paley, R.E.A.C. *and* N. Wiener; *Fourier transforms in the complex domain*. Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. Vol. 19, 1934.

[32] Pinsker, M.S.; *Dynamical systems with completely posit-*

ive or zero entropy. Dokl. Akad. Nauk, 133(1960), 1025-1026.

[33] Prohorov, Yu. V.; *Convergence of random processes and limit theorems in probability theory*. Theory prob. and its appli. I, 2 (1956).

[34] Rohlin, V.A.; *On the fundamental ideas of measure theory*. A.M.S. Transl. Ser. 1.

[35] ———— ; *Selected problems of the metrical theory of dynamical system*. Uspehi Mat. Nauk, 4, 2(1949), 57-128.

[36] ———— ; *On the entropy of metrical automorphism*. Dokl. Akad. Nauk, 124, 5(1959), 980-983.

[37] ———— ; *New progress in the theory of transformations with invariant measure*. Uspehi Mat. Nauk, 15, 4(1960), 3-26.

[38] ———— *and* S.V. Fomin; *The spectral theory of dynamical systems*. Trudy III Vsesoyozn. Mat. Sbezda, 3(1958), 284-292.

[39] ———— *and* Ya. G. Sinai; *Construction and properties of invariant measurable partitions*. Dokl. Akad. Nauk, 141, 5(1961), 1034-1041.

[40] Rota, G.-C.; *On the classification of periodic flows*. Proc. Amer. Math. Soc. 13, 4(1962), 659-662.

[41] Sinai, Ya. G.; *On the concept of the entropy of a dynamical system*. Dokl. Akad. Nauk, 124, 4(1959), 768-771.

[42] ———— ; *On flows with finit entropy*. Dokl. Akad. Nauk, 125, 1(1959), 1200-1202.

[43] ———— ; *Geodesic flows on the manifold with a constant negative curvature*. Soviet Math. Dokl., 1(1960), 335-339.

[44] ———— ; *The central limit theorem for geodesic flows on manifolds of constant negative curvature*. Soviet Math. Dokl., 1(1960), 983-987.

[45] ———— ; *Geodesic flows on compact surfaces of nega-*

Sem. on Probab.
Vol.20 1964年
P1-130

tive curvature. Soviet Math. Dokl., 2, 1(1961), 106-109.

[46] Sinai, Ya. G.; *Dynamical systems with countably multiple Lebesgue spectrum, I.* Izv. Akad. Nauk, 25(1961), 899-924.

[47] ——————; *Weak isomorphism of transformations with an invariant measure.* Soviet Math. Dokl., 3, 6(1962), 1725-1729.

[48] Stone, M. H.; *Linear transformations in Hilbert space and their applications to analysis.* Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. Vol. 15, 1932.

[49] Totoki, H; *The mixing property of Gaussian flows.* Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ., 18, 2(1964). to appear.

[50] Wiener, N.; *The ergodic theorem.* Duke Math. J., 5(1939), 1-18.