Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

SEMINAR ON PROBABILITY

Vol. 15

本 尾 実

マルコフ過程の Additive Functional

1963

確率論セミナー

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

目　次

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

前　書　き

E.B.Dynkin はマルコフ過程のすべての additive functional を見出しその構造を書きあらわすという問題を提出している。

（Volkonsky [46] 序文）

事実各種の additive functional の作る空間の構造をしらべる事はマルコフ過程の構造を研究する上で大変重要と思われる。

此のノートでは，個々の additive functional より各種の additive functional 全体が作る空間に注意してまとめた。

此のノートで取り扱われるのは reference 測度の存在する（1.5節参照）時間的一様な additive functional である。なお dual process の存在を仮定して（例えば Hunt の条件 (F) 等）の詳しい結果，class VI。（2.2節参照）の構造及び5章の応用として，確率微分方程式の拡張をつけ加えるつもりであったが，時間の関係で省略した。

なお渡辺信三氏は，氏の未発表の論文の原稿を自由に利用する事を許して下さったので多くの新しい事実をつけ加えたり，証明を簡素化したりできた。(註) 文献表は長沢正雄が手引きのために作っておられたのを利用させていただいた。上記両氏の他，このノートの主題でセミナリーやフリー，トーキングをして下さった東京の確率論セミナーの方々に感謝する。なお校正も東京の確率論セミナーの方々を煩わした。

（以上）

(註) 本文でも時々渡辺信三氏の名を引用したが，引用してない定理も渡辺氏と無関係ではない。

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

1 章 準 備

1.1. 記 号

此の章では2章以後に用いるマルコフ過程の定義と主な性質を主として *Sem. on Prob. vol. 11* (近藤[21]) から抜き書きしてまとめておく。

Sを局所compactな可算ヶの近傍系を持つ距離空間とし、Sの二点x, yの距離を$|x, y|$であらわす。$S^* = S \cup \{\partial\}$は$S$に一点$\partial$をつけ加えて$S$をcompact化した空間である。($S$がもともとcompactの時は$\partial$は孤立点とする。) $\mathbb{B}(S)$, $\mathbb{B}(S^*)$は夫々S, S^*の位相的Borel fieldとし、$M^+(S)$, $M^+(S^*)$を夫々$\mathbb{B}(S)$, $\mathbb{B}(S^*)$上の(非負)有界測度の全体とする。今$\mu \in M^+(S)$ (又は$\mu \in M^+(S^*)$)に対し ($\mathbb{B}^\mu(S)$ ($\mathbb{B}^\mu(S^*)$) を$\mathbb{B}(S)$ ($\mathbb{B}(S^*)$) のμによる完備化とする時

(1.1) $\mathbb{F}(S) = \bigcap_{\mu \in M^+(S)} \mathbb{B}^\mu(S) \qquad \mathbb{F}(S^*) = \bigcap_{\mu \in M^+(S^*)} \mathbb{B}^\mu(S^*)$

と定義する。$\mu \in M^+(S)$ ($\mu \in M^+(S^*)$) は$\mathbb{F}(S)$ ($\mathbb{F}(S^*)$) え一意的に拡張できるから、$M^+(S)$ ($M^+(S^*)$) は$\mathbb{F}(S)$, ($\mathbb{F}(S^*)$) の非負有界測度の全体と考えてもよい。

次にS上の函数の種々の族を以下の記号であらわす。

$F(S)$: $\mathbb{F}(S)$可測な有界函数の全体

$B(S)$: $\mathbb{B}(S)$可測な有界函数の全体

$C(S)$: S上の有界連続函数の全体

$C_\omega(S)$: S上の(有界)連続函数fで$\lim_{x \to \partial} f(x) = 0$となるものの全体

$C_0(S)$: S上のcompactな支えを持つ連続函数の全体

又S上の函数fに対し

$\|f\| = \sup_{x \in S} |f(x)| \qquad [f] = f$の支え$= \overline{\{x : f(x) > 0\}}$

と書くことにする。

Tを半直線$[0, \infty)$, T^*をTに一点∞をつけてcompact化した区間$[0, \infty]$とし、$\mathbb{I}$, $\mathbb{I}^*$を各々の位相的Borel fieldとする。$\tilde{\mathbb{I}}$, ($\tilde{\mathbb{I}}^*$) を (1.1) と同様の方法で$\mathbb{I}$ ($\mathbb{I}^*$) 上の全ゆる非負有界測度で完

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

備化した Borel field の共通部分とする。

W を T^* から S^* えの写像 $w \equiv w_t$ の集合で次の性質を持つものの全体とする。

(W.1) $t<\infty$ で右連続

(W.2) $t<\infty$ で左からの極限を持つ。

(W.3) $w_\infty = \partial$

(W.4) $\zeta = \inf t : x_t = \partial$ とおくと $w_t = \partial$ $t \geq \zeta$.

(有限時間の間に無限に振動するような w は考えない。)

$w_t = x_t(w)$ (又は単に x_t) とも書き $\lim_{s \uparrow t} x_s = x_{t-}$ ($t<\infty$) とあらわす。

W から W えの写像 w_t^+ を $(w_t^+)_s = w_{t+s}$ と定義する。

$\mathfrak{B}_t$ を t 迄で定る cylinder set ([21] P.6) で生成される W の Borel field とし $\mathfrak{B}_\infty = \mathfrak{B}$ と書く。 $B(W)$ で W 上の有界 $\mathfrak{B}$-可測函数の全体をあらわす。

注意 1.1.1 $(t, w) \to w_t$ は $(T^* \times W, I^* \times \mathfrak{B})$ から $(S^*, \mathbb{B}(S^*))$ えの写像として可測である。([20] P.3)

注意 1.1.2 $(t \cdot w) \to w_t^+$ は $(T^* \times W, I \times \mathfrak{B})$ から $(W, \mathfrak{B})$ えの写像として可測である。

注意 1.1.3. $\zeta = \zeta(w)$ は $\mathfrak{B}$ 可測で特に $\{\zeta < t\} \in \mathfrak{B}_t$ 。

2. マルコフ過程

$P_x(B)$ $x \in S^*$ $B \in \mathfrak{B}$ を先ず

(P.1) $P_x(\cdot)$ は $\mathfrak{B}$ 上の確率測度

(P.2) $P_\cdot(B)$ $(B \in \mathfrak{B})$ は (x の函数として) $\mathbb{B}(S^*)$ 可測.

(P.3) $P_x(x_0(w) = x) = 1$

とし、$\Phi \in B(W)$ に対し

$$E_x(\Phi) = \int_W \Phi(w)\, dP_x(w)$$

又任意の $\mu \in M^+(S)$ に対し

$$P_\mu = \int_S P_x(B)\, d\mu \qquad (B \in \mathfrak{B})$$

$$E_\mu(\Phi) = \int_S E_x(\Phi)\, d\mu = \int_W \Phi(w)\, dP_\mu \qquad (\Phi \in B(W))$$

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

と定義する。

$P_x(B)$ は更に次の条件を持つ。

(P.4)　任意の $\Phi \in \mathbb{B}(W)$ に対し、

$$E_x(\Phi(w_t^+) \mid \mathfrak{B}_t) = E_{x_t}(\Phi) \quad a.s.\ P_x \quad \forall x \in S。$$

$\mathfrak{B}_t^{\mu}$ を $\mathfrak{B}_t$ の P_μ $(\mu \in M^+(S))$ による完備化とし

$\mathcal{F}_t' = \bigcap_{\mu \in M^+(S)} \mathfrak{B}_t^{\mu}$ と定義する。

$\mathcal{F}_\infty' = \mathcal{F}$ とおく。P_x は $\mathcal{F}$ 上の測度と考えてよい。

注意 1.2.1　$\Phi, \Psi \in \mathcal{F}$ 可測　$\Phi = \Psi$ a.s P_x $\forall x \in S$ なら　$\Phi = \Psi$ a.s. P_μ $\forall \mu \in M^+(S)$.

注意 1.2.2　$(t, w) \to w_t^+$ は $(T^* \times W, \tilde{I}^* \times \mathcal{F})$ から $(W, \mathcal{F})$ えの写像として可測である。

$F(W)$ を有界 $\mathcal{F}$ 可測函数の全体とするとき

注意 1.2.3.　$\Phi \in F(W)$ に対して

$$E_\mu(\Phi(w_t^+) \mid \mathcal{F}_t') = E_{x_t}(\Phi) \quad a.s.\ P_\mu \quad \forall \mu \in M^+(S).$$

([21] 1章　定理 1.1)。

定義　W上の函数 $\sigma = \sigma(w)$ が

(1)　$0 \leq \sigma \leq \infty$　　(2)　$\{\sigma < t\} \in \mathcal{F}_t'$

である時 σ をマルコフ時間という。($\sigma \in$ M.T. と書くことにする。)

注意 1.2.4.　(1)　$t \in T^* \Rightarrow t \in$ M.T.

(2)　$\sigma_1, \sigma_2 \in$ M.T. $\Rightarrow \sigma_1 \vee \sigma_2,\ \sigma_1 \wedge \sigma_2 \in$ M.T.

(3)　$\sigma_n \in$ M.T. $\sigma_n \uparrow \sigma$ 又は $\sigma_n \downarrow \sigma \Rightarrow \sigma \in$ M.T.

([21] 1章　定理 3.1)

$\mathcal{F}_\sigma = \{A : A \in \mathcal{F}\quad A \cap \{\sigma < t\} \in \mathcal{F}_t'\}$ と定義する。

注意 1.2.5.　$\mathcal{F}_\sigma$ は *Borel field* で

(1)　$\sigma \leq \tau \Rightarrow \mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{F}_\tau$

(2)　σ : $\mathcal{F}_\sigma$ 可測

(3)　$w \to w_{\sigma(w)}^+$ は $(W \times \mathcal{F})$ から $(W \times \mathfrak{B})$ えの写像に

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

して可測（[21] 定理 3.2）。

最初の測度 $P_x(B)$ に次の仮定をつけ加える。

（P.5） 任意の $\Phi \in B(W)$ 及び $\sigma \in$ M.T. に対して，

$$E_\mu(\Phi(w_\sigma^+) \mid \mathcal{F}_\sigma) = E_{x_\sigma}(\Phi(w)), \quad \forall \mu \in M^+(S)$$

此の事から

注意 1.2.6. (1) $w \to w_\sigma^+$ は $(W\ \mathcal{F}_{\sigma+s})$ から $(W, \mathcal{F}_s)$ えの写像として可測.

(2) 特に $x_\sigma(w)$ は $\mathcal{F}_\sigma$ 可測

(3) （P.5）は Φ が有界 $\mathcal{F}$-可測の時も成立する。

注意 1.2.7. (1) $\mathcal{F}'_t = \mathcal{F}_t$

(2) $\mathcal{F}_\sigma = \bigcap_m \mathcal{F}_{\sigma+\frac{1}{n}}$

(3) $\sigma, \tau \in$ M.T. $\Rightarrow \{\sigma < \tau\}, \{\sigma \leqq \tau\} \in \mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{F}_\tau$

(4) $\sigma, \tau \in$ M.T. $\Rightarrow \sigma + \tau(w_\sigma^+) \in$ M.T. （[21] P.17～18）

以後 $\mathcal{F}'_t = \mathcal{F}_t$ と書くことにする。

注意 1.2.8 $A \in \mathcal{F}_0$ なら $P_x(A) = 0$ 又は 1. （[21] P.18）

注意 1.2.9. $\Phi(t, w)$ を有界な $\mathcal{I}^* \times \mathcal{F}$ 可測函数とし，$\sigma \in$ M.T. に対し $0 \leq \tau(w)$ を $\mathcal{F}_\sigma$ 可測とすれば

$$E_\mu(\Phi(\tau, w_\sigma^+) \mid \mathcal{F}_\sigma) = E_{x_\sigma}(\Phi(t, w))\Big|_{t=\tau} \quad a.s.\ P_\mu$$

が全ての $\mu \in M^+(S)$ に対して成立する。

（証明） $\Phi = \Phi_1(t)\Phi_2(w)$，$\Phi_1$ $\mathcal{I}^*$ 可測，Φ_2 $\mathcal{F}$ 可測

の場合に証明すれば充分である。

先ず $\Phi_1(\tau)$ が $\mathcal{F}_\sigma$ 可測な事は，任意の $\mu \in M^+(S)$ に対し $\overline{\Phi}_1, \underline{\Phi}_1$ $\mathcal{I}^*$ 可測で $\overline{\Phi}_1 \geqq \Phi \geqq \underline{\Phi}$ $\overline{\Phi}_1(t) = \underline{\Phi}_1(t)$ a.s. $P_\mu(\tau \in dt)$ となるものをとれば $\overline{\Phi}_1(\tau) = \underline{\Phi}_1(\tau)$ a.s. P_μ となる事より明かである。

従って $\forall \mu \in M^+(S)$ に対し

$$E_\mu(\Phi(\tau, w_\sigma^+) \mid \mathcal{F}_\sigma) = \Phi_1(\tau) E_\mu(\Phi_2(w_\sigma^+) \mid \mathcal{F}_\sigma) = \Phi_1(\tau) E_{x_\sigma}(\Phi_2(w))$$
$$= E_\mu(\Phi_1(t)\Phi_2(w))\Big|_{t=\tau} = E_\mu(\Phi(t, w))\Big|_{t=\tau} \quad a.s.\ P_\mu$$

が成立する。（証明終）

最後に

（P.6） $\sigma_n \in$ M.T. $\sigma_n \uparrow \sigma$ なら

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

$$P_\mu(\lim_{n\to\infty} x_{\sigma_n} = x_\sigma \ \sigma<\infty) = P_\mu(\sigma<\infty) \quad \forall \mu \in M^+(S).$$

を仮定する。

注意 1.2.10. $\sigma_n \in$ M.T. $\sigma_n \uparrow \sigma \Rightarrow \mathfrak{F}_{\sigma_n} \uparrow \mathfrak{F}_\sigma$

(証明) $\cup \mathfrak{F}_{\sigma_n} \subset \mathfrak{F}_\sigma$ は明かである。

$$\sigma = \lim \sigma_n \qquad x_\sigma = \lim x_{\sigma_n} \ (\sigma<\infty) \quad \text{又は} \quad x_\sigma = \partial \ (\sigma=\infty)$$

より σ. x_σ は $\cup\mathfrak{F}_{\sigma_n}$ 可測. 任意の $0 \le t_1 < t_2 < \cdots < t_n \le \infty$, $f, f_2 \cdots f_n \in \mathbb{B}(S)$ 及び $\mu \in M^+(S)$ に対して, ($t_0 = 0$ $t_{n+1} = \infty$ とおく)

$$E_\mu(f_1(x_{t_1})\cdots f_n(x_{t_n}) \mid \mathfrak{F}_\sigma)$$
$$= \sum_{k=0}^{n+1} \chi(t_k \le \sigma < t_{k+1}) f(x_{t_1})\cdots f(x_{t_k}) E_{x_\sigma}(f_{k+1}(x_{s_{k+1}})\cdots f_n(x_{s_n}))\Big|_{s_i=\sigma-t_i}$$

右辺は $\cup\mathfrak{F}_{\sigma_n}$ 可測, 此の事から一般の $\Phi \in \mathbb{B}(W)$ (従ってまた $\Phi \in F(W)$) と $\forall\mu \in M^+(S)$ に対して $E_\mu(\Phi \mid \mathfrak{F}_\sigma)$) が $\cup\mathfrak{F}_{\sigma_n}$ 可測がわかる。此れと $\cup\mathfrak{F}_{\sigma_n} \subset \mathfrak{F}_\sigma$ から $\cup\mathfrak{F}_{\sigma_n} = \mathfrak{F}_\sigma$ を得る。(証明終)

定義 (P.1)～(P.6)をみたす $P_x(B)$ と S^*. W. $\mathfrak{L}_t$ の組 $M = \{W, S^* \ \mathfrak{L}_t \ P_x\}$ をマルコフ過程という。

此のノートで取り扱うマルコフ過程は此の定義の条件と §1.5 の仮定 L をみたすものだけに限る事にする。

$$H_t^\alpha f(x) = E_x(f(x_t)e^{-\alpha t}) \qquad \alpha \ge 0$$
$$U^\alpha f(x) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} H_t f(x)dt = E_x\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t} f(x_t)dt\right) \quad 0<\alpha$$

又 $\sigma \in$ M.T. に対し

$$H_\sigma^\alpha f(x) = E_x(f(x_\sigma)e^{-\alpha\sigma}) \qquad \alpha \ge 0$$

と定義する。此れらは $\mathbb{B}(S)$ を $\mathbb{B}(S)$ え, 又 $\mathbb{F}(S)$ を $\mathbb{F}(S)$ えうつす(有界な)積分作用素である。H_t^0 を単に H_t と書く。後に $U = U^0$ も(それが定義できる範囲で)取り扱うことがある。

1.3. hitting time

E を S の部分集合とする時

(3.1.) $\sigma_E = \inf t : x_t \in E$ (此の様な t の存在する時)
$\qquad = \infty$ (t の存在しない時)

と定義する。

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

定義　$\sigma_E \in$ M.T. の時 σ_E を hitting time という。

（此の時 $\sigma = \sigma_E \in$ H.T. と書く。）

注意 1.3.1. (1)　E 解析集合 $\Rightarrow \sigma_E \in$ H.T.

(2)　特に $E \in \mathbb{B}(S) \Rightarrow \sigma_E \in$ H.T.（[21] / 章定理 4.3）

定義　$E \subset S$ の時全ての $\mu \in M^+(S)$ に対して Borel（又は解析）集合 E_1, E_2 が存在して $E_1 \subset E \subset E_2$

且つ P_μ（全ての t に対して $X_t \in E_1$ と $X_t \in E_2$ が同値）$= 1$

が成立する時 E を nearly Borel (nearly analytic) set という。

注意 1.3.2. nearly Borel set の全体は Borel 集合体を作る。これを $\widehat{\mathbb{B}}(S)$ であらわす。$\mathbb{F}(S) \supset \widehat{\mathbb{B}}(S) \supset \mathbb{B}(S)$.

注意 1.3.3. E を nearly analytic とする。

(1)　任意の $\mu \in M^+(S)$ に対して，E に含まれる compact 集合の増加列 K_n が存在して $\sigma_{K_n} \downarrow \sigma_E$.

(2)　$\mu(E) = 0$ となる任意の $\mu \in M^+(S)$ に対して E を含む開集合の減少列 G_n が存在して $\sigma_{G_n} \uparrow \sigma_E$.　（[21] / 章定理 4.4, 4.5）

定義　E nearly analytic の時 $P_x(\sigma_E) = 1$ となる点 x を E の正則点という。E の正則点の全体を E^{reg} であらわす。

注意 1.3.4. E nearly analytic とすると $E^{reg} \in \mathbb{F}(S)$ であって全ての $\mu \in M^+(S)$ に対し

$$P_\mu(X_{\sigma_E} \in E \cup E^{reg},\ \sigma_E < \infty) = P_\mu(\sigma_E < \infty).$$

$\sigma_E \in$ H.T. に対し $H^\alpha_{\sigma_E} = H^\alpha_E$ と略記する。

定義　$\sigma \in$ M.T. の時

$$\hat{\sigma}_0 = 0,\ \hat{\sigma}_1 = \sigma, \cdots \hat{\sigma}_n = \hat{\sigma}_{n-1} + \hat{\sigma}(w^+_{\hat{\sigma}_{n-1}}), \cdots\cdots$$

とおくと $\{\hat{\sigma}_n\}$ はマルコフ時間の増加列であるが，此の $\{\hat{\sigma}_n\}$ を σ-chain ということにする。

定義　$\sigma \in$ M.T. とし，任意の $t < \sigma(w)$ に対して

$$t + \sigma(w^+_t) = \sigma(w)$$

が成立するとき，σ を quasi-hitting time ということにする。

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

（$\sigma \in$ S.H.T. と書く）

注意 1.3.5. $\sigma \in$ H.t. $\Rightarrow$ $\sigma \in$ S.H.t.

注意 1.3.6. $\sigma \in$ S.H.T. $\{\hat{\sigma}_n\}$ を σ-chain とすると

$\hat{\sigma}_k \leq t < \hat{\sigma}_{k+1}$ となる任意の t に対し

$$\hat{\sigma}_n(w_t^+) + t = \hat{\sigma}_{k+n}(w)$$

（証明） $\sigma(w_{\hat{\sigma}}^+) = \hat{\sigma}_{k+1} - \hat{\sigma}_k > t - \hat{\sigma}_k$. 従って

$$\hat{\sigma}_1(w_t^+) = \sigma(w_t^+) = \sigma((w_{\hat{\sigma}_k}^+)_{t-\hat{\sigma}_k}^+) = \sigma(w_{\hat{\sigma}_k}^+) - (t - \hat{\sigma}_k) = \hat{\sigma}_{k+1} - t$$

$$\hat{\sigma}_2(w_t^+) = \hat{\sigma}_1(w_t^+) + \sigma((w_t^+)_{\hat{\sigma}_1(w_t^+)}^+)$$

$$= \hat{\sigma}_{k+1} - t + \sigma((w_t^+)_{\hat{\sigma}_{k+1}-t}^+) = \hat{\sigma}_{k+1} - t + \sigma(w_{\hat{\sigma}_{k+1}}^+) = \hat{\sigma}_{k+2} - t$$

以下同様の計算をくり返せばよい。

1.4 excessive function.

定義 $\mathbb{F}(S)$ 可測な函数 u が条件

(1) $0 \leq u \leq \infty$ (2) $H_t^\alpha u \leq u$ (3) $H_t^\alpha u \uparrow u$ (註) $(t \to 0)$

をみたす時 u を α-excessive (function) という。

注意 1.4.1. (1) $f \geqq 0$ を $\mathbb{F}(S)$ 可測とすると $U^\alpha f$ は α-excessive である。 (2) $u - \alpha$ excessive $\Rightarrow H_\sigma^\alpha u$ α excessive.

注意 1.4.2. u : α excessive $\rightleftarrows$ u : β-excessive $\forall \beta > \alpha$.

注意 1.4.3. u : α excessive $\rightleftarrows$ (1) $u \geqq 0$ $\mathbb{F}(S)$ 可測

(2) $\beta U^{\alpha+\beta} u \leq u$ $(\beta > 0)$

(3) $\beta U^{\alpha+\beta} u \uparrow u$ $(\beta \to \infty)$

注意 1.4.4. (1) u, v α excessive $\Rightarrow$ $u \wedge v$ α excessive

(2) u_n α-excessive $u_n \uparrow u \Rightarrow u$: α excessive.

注意 1.4.5. u : α-excessive とすると

非負 $\mathbb{F}(S)$ 可測な函数の列 $\{f_n\}$ が存在して $U^\alpha f_n \uparrow u$

注意 1.4.6. u : α-excessive とすると任意の $\mu \in M^+(S)$ に対し

(1) u は $\widetilde{\mathbb{B}}(S)$ 可測 (nearly Borel measurable)

(2) P_μ (全ての t に対し $u(x_t(w))$ が右連続) $= 1$

(3) $E_\mu(u(x_0(w))) < \infty$ ならば

（脚注） $u_n \uparrow u$ は各点毎の単調な収束を示す。

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

P_μ(全てのtに対し $u(x_t(w))$ が左からの極限を持つ)$=1$

(以上[21] 3章§2, [22] 3章§3参照)

注意 1.4.7. u : α-excessive

(1) σ, τ M.T. $\sigma \leq \tau$ ならば全ての $\mu \in M^+(S)$ に対して

$$E_\mu(e^{-\alpha\tau}u(x_\tau) \mid \mathcal{F}_\sigma) \leqq e^{-\alpha\sigma}u(x_\sigma) \quad a.s.\ P_\mu$$

従って特に $H^\alpha_\tau u \leqq H^\alpha_\sigma u$

(2) $\sigma_n \in$ M.T. $\sigma_n \uparrow \sigma$ ならば全ての $\mu \in M^+(S)$ に対して

$$u(x_\sigma) \leqq \varliminf_n u(x_{\sigma_n}) \quad a.s.\ P_\mu$$

(証明) (1) (1.4.5) によって $u = U^\alpha f = E_x(\int_0^\infty e^{-\alpha t} f(x_t)\,dt)$ $f \geqq 0$ の場合に証明すればよい。

$$e^{-\alpha\sigma}u(x_\sigma) = e^{-\alpha\sigma}E_{x_\sigma}(\int_0^\infty e^{-\alpha t}f(x_t)\,dt) = e^{-\alpha\sigma}E_\mu(\int_0^\infty e^{-\alpha t}f(x_t(w_\sigma^+))\,dt \mid \mathcal{F}_\sigma)$$
$$= E_\mu(\int_\sigma^\infty e^{-\alpha t}f(x_t)\,dt \mid \mathcal{F}_\sigma) \quad a.s.\ P_\mu$$

が任意の $\sigma \in$ M.T. に対して成立している。

従って
$$E_\mu(e^{-\alpha\tau}u(x_\tau) \mid \mathcal{F}_\sigma) = E_\mu(\int_\tau^\infty e^{-\alpha t}f(x_t)\,dt \mid \mathcal{F}_\sigma)$$
$$\leqq E_\mu(\int_\sigma^\infty e^{-\alpha t}f(x_t)\,dt \mid \mathcal{F}_\sigma) = e^{-\alpha\sigma}u(x_\sigma).$$

(2) 先ず (1) より $E_\mu(e^{-\alpha\sigma}u(x_\sigma) \mid \mathcal{F}_{\sigma_n}) \leqq e^{-\alpha\sigma}u(x_{\sigma_n})$

(1.2.9) より $\mathcal{F}_{\sigma_n} \uparrow \mathcal{F}_\sigma$, 従って

$$e^{-\alpha\sigma}u(x_\sigma) = E_\mu(e^{-\alpha\sigma}u(x_\sigma) \mid \mathcal{F}_\sigma) = \lim_n E_\mu(e^{-\alpha\sigma}u(x_\sigma) \mid \mathcal{F}_{\sigma_n}) \leqq \varliminf_n e^{-\alpha\sigma_n}u(x_{\sigma_n})$$

即ち $\sigma < \infty$ の時は $u(x_\sigma) \leq \varliminf_n u(x_{\sigma_n})$ a.s. を得る。

$\sigma = \infty$ なら $u(x_\infty) = u(\partial) = 0$ より明か。

注意 1.4.8. $\sigma_n \in$ M.T. $\sigma_n \downarrow \sigma$ u : α-excessive $\Rightarrow H^\alpha_{\sigma_n}u \uparrow H^\alpha_\sigma u$.

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

5 標準測度

此のノート全体を通じてマルコフ過程$\mathbb{M}$に対して次の仮定をする。

定義 $\eta \in \mathbb{M}^+(S)$ のとき、$P_\eta(\sigma_E < \infty) = 0$ となる *nearly analytic set* E に対し常に $P_x(\sigma_E < \infty) = 0 \ \forall x \in S$ である時 η を標準測度ということにする。

仮定 L. 標準測度 η が存在する。

注意 1.5.1. η が標準測度、η が $\hat{\eta}$ に絶対連続なら $\hat{\eta}$ も標準測度である。

定理 1.5.2. 次の條件は同値

(1) η が標準測度

(2) 全ての $\alpha \geqq 0$ に対し u を任意の α-*excessive function* とすると $u=0$ a.s. η から $u(x) \equiv 0 \ (\forall x \in S)$ が出る。

(3) 或る $\alpha > 0$ に対して (2) が成立する。

(証明) (2) から (3) は明か。

(3) → (1) E を *nearly analytic* として $P_\eta(\sigma_E < \infty) = 0$ なら $H_E^\alpha 1(x) = E_x(e^{-\alpha\sigma_E}) = 0$ a.s. η、$H_E^\alpha 1(x)$ は *excessive* であるから $H_E^\alpha 1(x) \equiv 0$ 即ち $P_x(\sigma_E < \infty) = 0 \ \forall x \in S$ を得る。

(1) → (2) η を標準測度 u を α-*excessive* $u=0$ a.s. η とする。$E = \{x : u(x) > 0\}$ は *nearly Borel set* である。$\eta \in \mathbb{M}^+(S)$ に対し (1.3.3) より *compact* 集合列 $K_n \subset E$ が存在して

$\sigma_n = \sigma_{K_n} \downarrow \sigma_E$ a.s. P_η. $0 = E_\eta(u(x_0)) \geqq E_\eta(e^{-\alpha\sigma_n} u(x_{\sigma_n}))$.

$x_{\sigma_n} \in K_n \subset E$ であるから $P_\eta(\sigma_n < \infty) = 0 \ \forall n$. 従って

$P_\eta(\sigma_E < \infty) = \lim_n P_\eta(\sigma_n < \infty) = 0$. η は標準測度であるから $P_x(\sigma_E < \infty) = 0 \ \forall x \in S$ を得る。

特に全ての x と $t > 0$ に対し $P_x(x_t \in E) = 0$ であるから $H_t^\alpha u(x) = 0$. 即ち $u(x) = \lim_{t \downarrow 0} H_t^\alpha u(x) = 0$.

$U^\alpha(x, E) = U^\alpha \chi_E(x) \quad (E \in \mathbb{F}(S))$

$U^\alpha(\mu, E) = \int U^\alpha \chi_E(x)\, d\mu \quad (\mu \in M^+(S))$ とおく。

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

lemma 1.5.3. $\alpha>0$ に対し，η を標準測度とすると

(1) 測度 $U^{\alpha}(x,\cdot)$ は $U^{\alpha}(\eta,\cdot)$ に絶対連続である。

(2) $f\to U^{\alpha}f$ は $\mathbb{F}(S)$ を $\mathbb{B}(S)$ にうつす。

(証明) (1) $U^{\alpha}(\cdot,E)$ は E を定めると α-excessive 従って $U^{\alpha}(\eta,E)=0$ より $U^{\alpha}(x,E)=0$ a.s.η 従って $U^{\alpha}(x,E)\equiv 0$ $(\forall x\in S)$ を得る (1.5.2) 即ち $U^{\alpha}(x,\cdot)$ は $U^{\alpha}(\eta,\cdot)$ に絶対連続。

(2) $f\in\mathbb{F}(S)$ に対して，$f_1,f_2\in B(S)$ $f_1\leqq f\leqq f_2$ 且つ $f_1(y)=f_2(y)$ a.s. $U^{\alpha}(\eta,dy)$ となる。f_1,f_2 をえらべば，(1) より $f_1(y)=f_2(y)$ a.s. $U^{\alpha}(x,dy)$ でもある。従って

$$U^{\alpha}f(x)=U^{\alpha}f_1(x)=U^{\alpha}f_2(x)\quad \forall x\in S.$$

$U^{\alpha}B(S)\subset B(S)$ に注意すると (2) を得る。

lemma 1.5.4. $f\in\mathbb{F}(S)$ $H_tf(x)\to f(x)$ $(t\to 0)$ であれば $f\in\mathbb{B}(S)$.

(証明) $\alpha U^{\alpha}f(x)=\int_0^{\infty}e^{-t}H_{\frac{t}{\alpha}}f(x)dt$, $|H_{\frac{t}{\alpha}}f(x)|\leqq\|f\|$ より $\alpha U^{\alpha}f(x)\to f(x)$ $(\alpha\to\infty)$。一方 (1.5.3.) より $U^{\alpha}f\in B(S)$ である。

注意 1.5.5. (仮定Lがあると) α-excessive function u は $\mathbb{B}(S)$ 可測になる。

lemma 1.5.6. $\sigma\in\mathfrak{F}$.H.T. $P_x(\sigma>0)=1$ $\forall x\in S$ とする。

(1) f を $T^*=[0.\infty]$ の Borel 有界可測函数とすれば
$u(x)=E_x(f(\sigma))$ は $\mathbb{B}(S)$ 可測である。

(2) 特に D を $T^*=[0.\infty]$ の Borel 集合とすると
$u(x)=P_x(\sigma\in D)$ は $\mathbb{B}(S)$ 可測。

(3) $G=\{x:P_x(\sigma<t)\geqq p\}$ $H=\{x:P_x(\sigma\leqq t)\leqq p\}$ とすると
$G^{reg}\subset G$ $H^{reg}\subset H$

(証明) (1) f が T^* の有界連続函数である時證明すれば充分である。
$H_s u(x)=E_x(E_{x_s}(f(\sigma)))=E_x(f(\sigma(w_s^+)))$. 他方 $s<\sigma(w)$ なら $\sigma(w_s^+)=\sigma-s$ より，$\sigma>0$ となる w に対して $\lim_{s\downarrow 0}\sigma(w_s^+)=\sigma$ を得

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

る。$P_x(\sigma>0)=1$ であるから $\lim_{s\downarrow 0}\sigma(w_s^+)=\sigma$ a.s.P_x $\forall x\in S$. f の有界連続性より $\lim_{s\downarrow 0}H_s u(x)=u(x)$ を得る。(1. 5. 4)を適用し、$u\in B(S)$ がわかる。

(2) (i) $x\in G^{reg}$ とする。 $\sigma_G=0$ より G に含まれる compact 集合の増加列 $\{K_n\}$ で $\sigma_n=\sigma_{K_n}\downarrow 0$ a.s.P_x となるものが存在する。任意の $\varepsilon>0$ に対し、

$$P_x(\sigma<t+\varepsilon)\geqq P_x(\sigma(w^+_{\sigma_n})<t\ \sigma_n<\sigma\ \sigma_n<\varepsilon)=P_x(P_{x_{\sigma_n}}(\sigma<t) : \sigma_n<\sigma\ \sigma_n<\varepsilon)$$

K_n compact より $x_{\sigma_n}\in K_n\subset G$

∴ $P_x(\sigma<t+\varepsilon)\geqq p\,P_x(\sigma_n<\sigma\cap\varepsilon)\uparrow p$ $(n\to\infty)$ ε は任意であるから $P_x(\sigma<t)\geqq p$ を得る。即ち $x\in G$ である。

(3) (ii) $x\in H^{reg}$ とする。K_nをHに含まれるcompact集合の増加列を、$\sigma_n=\sigma_{K_n}\downarrow\sigma_H=0$ a.s.P_x となるようにとる。$x_{\sigma_n}\in H$ より

$$P_x(\sigma\leq t,\ \sigma_n<\sigma)\leq P_x(\sigma(w^+_{\sigma_n})\leqq t)=E_x(P_{x_{\sigma_n}}(\sigma\leqq t))\leqq p$$

此処で $n\to\infty$ として $P_x(\sigma\leqq t)\leqq p$, 即ち $x\in H$ が云えた。

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

２章 Additive functional の基本的性質

2.1 定義

$T^* \times W$ 上の函数 $a(t\cdot w)$ で次の性質を持つものを考える。

(A.1.) $-\infty < a \leqq +\infty$

(A.2) $a(t+) = \lim_{s \downarrow t} a(s)$ 　$a(s-) = \lim_{s \uparrow t} a(s)$ が存在する。

(A.3) $a(\zeta -) = a(t)$ 　　$t \geqq \zeta$

(A.4) $a(t, w)$ は $\mathfrak{F}_t$ 可測

(A.5) $P_\mu(\forall t \in T = [0,\infty)$ に対し $(a(t.w) < \infty) = 1$

がすべての $\mu \in M^+(S)$ に対して成立する。

(A.6) $a(t+s.w) = a(t) + a(s \cdot w_t^+)$

(A.1)～(A.6) をみたす $a = a(t\cdot w)$ を general additive functional と呼ぶことにし，その全体を $\mathfrak{G}$ であらわす。a が更に

(A.7) $0 \leqq a(t) \leqq \infty$

をみたす時単に additive functional といいその全体を $\mathfrak{G}^+$ であらわす。全ての w に対し，$a(t.w)$ が t の函数として連続又は右(左)連続の時，a を連続又は右(左)連続という。特に右連続の場合，即ち

(A.8) $a(t+) = a(t)$

とする時 (A.1)～(A.8) をみたす $a(t.w)$ の全体を $\mathfrak{A}$ であらわし，主として $\mathfrak{A}$ の性質をしらべる。

(A.6) の代りに

(A.6)$^\alpha$ $a(t+s.w) = a(t.w) + e^{-\alpha s} a(s.w_t^+)$

をみたすものを α 次 additive functional, α 次 general additive functional 等という。

(A.6) を弱くして

(A.6)$'$ $a(t+s.w) = a(t.w) + a(s, w_t^+)$ a.s. P_μ が全ての $\mu \in M^+(S)$ に対して成立という条件に変える時 almost additive functional, almost general additive functional 等と呼ぶ。

([9]. [26] 参照)

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

注意 2.1.1. 或る $t \geqq 0$ に対し $a(t)<\infty$ なら $a(0)=0$。

定義 $a.b \in \mathfrak{G}$ に対して，

$P_x(a(t.w)=b(t.w)$ が全ての $t \in T^*$ に対して成立$)=1$

が任意 $x \in S$ に関して云える時 a と b は同値といい，$a \sim b$ であらわす。

注意 2.1.2. (1) $a \sim b$ なら全ての $\mu \in M^+(S)$ に対し

$$P_\mu(a(t.w)=b(t.w)\ \forall t \in T^*)=1$$

(2) $a.b \in \mathfrak{G}$ 且つ共に右(左)連続とし，全ての $x \in S$ と $t \in T$ に対して $P_x(a(t)=b(t))=1$ が云えれば $a \sim b$ である。

(証明) (1)は 2.1.1. より明か。

(2) T' を T で dense な可算集合とすれば

$P_x(a(t)=b(t)\ \forall t \in T')=1$ が云えるから，a b の右(左)連続性より明か。

注意 2.1.3. (1) $a.b \in \mathfrak{G}(\mathfrak{G}^+, \mathfrak{A}) \Rightarrow a+b \in \mathfrak{G}(\mathfrak{G}^+, \mathfrak{A})$

(2) $a \in \mathfrak{G}(\mathfrak{G}^+, \mathfrak{A})$ $k \geqq 0 \Rightarrow ka \in \mathfrak{G}(\mathfrak{G}^+, \mathfrak{A})$

(3) $a \sim a'$, $b \sim b' \Rightarrow a+b \sim a'+b'$

(4) $a \sim a'$ $k \geqq 0 \Rightarrow ka \sim ka'$

注意 2.1.4 $a \in \mathfrak{G}^+$ ならば $a=a(t.w)$ は t の函数として単調増加である。

(証明) $t<s$ の時 $a(s.w)-a(t.w)=a(s-t.w_t^+) \geqq 0$ より明か。

($a(t,w)=\infty$ の時も $a(s.w) \geqq a(t.w)=\infty$)

例 1.1 $f \in C(S)$ $f \geqq 0$ の時

$a(t.w)=\int_0^t f(x_t)\,dt$ とおけば $a \in \mathfrak{A}$ (a は連続である)

例 1.2. 特に $a(t.w)=t \wedge \zeta = \int_0^t 1(x_t)\,dt \in \mathfrak{A}$

例 1.3. $u(x)$ を有限で $\lim_{t\to\infty} u(x_t)$ の存在する α-excessive function とする時 $a(t.w)=u(x_t)-u(x_0)$ $t<\zeta$

$$= u(x_{\zeta-})-u(x_0) \qquad t \geqq \zeta$$

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

とおくと $a\in\mathfrak{O}_f$ (a は右連続である)

例 1.4 $\sigma\in$ F.H.T $\{\hat{\sigma}_n\}$ を σ-chain とする。

今 $\lim_{n\to\infty}\hat{\sigma}_n=\infty$ とすれば

$$a_1(t,w)=\sum_{0<\hat{\sigma}_n\leq t}1=\sum_n\chi(0<\hat{\sigma}_n\leqq t)$$

$$a_2(t,w)=\sum_{0\leq\hat{\sigma}_n<t}1=\sum_n\chi(0\leq\hat{\sigma}_n<t)$$

とおくとき $a_1\in\mathfrak{A}$ $a_2\in\mathfrak{O}_f^+$ (a_2 は左連続) となる. 加法性は (1.3.6) により保証される。

今 $a\in\mathfrak{A}$ に対して,

$$(1.5)\quad a_\alpha(t,w)=\int_0^t e^{-\alpha s}da(s,w)\qquad 0\leq t\leqq\infty$$

と定義すると,(註) 右辺は連続函数の右連続単調函数による (Riemann)-Stiltjes積分として,定義され a_α は右連続な α 次 additive functional になる。実際 $a(t,w)<\infty$ なら (1.5) の右辺の積分は有限で $a_\alpha(t,+s,w)=\int_0^t e^{-\alpha u}da-\int_t^{t+s}e^{-\alpha u}da$

$$\int_t^{t+s}e^{-\alpha u}da(u,w)=e^{-\alpha t}\int_0^s e^{-\alpha u}da(u\,w_t^+)$$

となり $(A.6)^\alpha$ がたしかめられる。可測性その他の條件は自明である。$a\sim a'$ なら $a_\alpha\sim a'_\alpha$ も明かであろう。

逆に右連続 α 次 additive functional a_α に対して,

$$(1.6)\quad a(t,w)=\int_0^t e^{+\alpha s}da_\alpha(s,w)\qquad 0\leq t\leqq\infty$$

とおけば $a\in\mathfrak{A}$ となり同値を無視すれば (1.5) と (1.6) の対応は互に逆の対応になっている。以上をまとめて,

注意 2.1.5. $\mathfrak{A}$ と右連続な α 次 additive functional の全体は (1.5) であたえられる写像 $a\to a_2$ によって (同値を無視すれば) 互に 1:1 に対応している。(1.6) は (1.5) の逆写像をあたえる。

注意 2.1.6.
(1) $a,\ b\in\mathfrak{A}\Rightarrow(a+b)_\alpha\sim a_\alpha+b_\alpha$
(2) $a\in\mathfrak{A}\quad k\geqq 0\Rightarrow(ka)_\alpha\sim ka_\alpha$
(3) $a\in\mathfrak{A}\qquad\Rightarrow(a_\alpha)_\beta\sim a_{\alpha+\beta}$

註) 今後特にことわらない限り S から t 迄の積分は区間 (S, t] の積分とする。又 (1.5) に於て, $a(t,w)=\infty$ となる有限なもの存在する w に対しては常に $a_\alpha(t,w)=\infty$ $t\in T^*$ とおくことにする。

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

以上の結果から，今後右連続な次 additive functional を独立なものとは見ないで，$\mathfrak{A}$ の表現と考えて取り扱うことにする。

強マルコフ性を適用するため次の lemma を用意する。

lemma 2.1.7. $a \in \mathfrak{A}$ $\sigma \in$ M.T. とする。

$a(\sigma+, w)$, $a(\sigma-, w)$ は $\mathcal{F}_\sigma$ - 可測である。

(証明) $\frac{k}{2^n} \leq \sigma < \frac{k+1}{2^n}$ $k = 0, 1, 2, \cdots$ の時 $\sigma_n = \frac{k+1}{2^n}$ $\tilde{\sigma}_n = \frac{k-1}{2^n}$ とおく。任意の実数 α に対し

$$\{a(\sigma_n) < \alpha\} \cap \{\sigma + \tfrac{1}{2^n} < t\} = \bigcup_{k: \frac{k+1}{2^n} \leq t} \{a(\tfrac{k+1}{2^n}) < \alpha\} \cap \{\tfrac{k}{2^n} \leq \sigma < \tfrac{k+1}{2^n}\} \cap \{\sigma < t - \tfrac{1}{2^n}\} \in \mathcal{F}_t$$

$$\{a(\tilde{\sigma}_n) < \alpha\} \cap \{\sigma < t\} = \bigcup_{k: \frac{k}{2^n} \leq t} \{a(\tfrac{k-1}{2^n}) < \alpha\} \cap \{\tfrac{k}{2^n} \leq \sigma < \tfrac{k+1}{2^n} \wedge t\} \in \mathcal{F}_t$$

従って $a(\sigma_n)$ は $\mathcal{F}_{\sigma+\frac{1}{2^n}}$ 可測 $a(\tilde{\sigma}_n)$ は $\mathcal{F}_\sigma$ 可測 $a(\sigma_n) \downarrow a(\sigma+)$ $a(\tilde{\sigma}_n) \uparrow a(\sigma-)$ 及び $\mathcal{F}_{\sigma+\frac{1}{2^n}} \downarrow \mathcal{F}_\sigma$ (1.2.6) に注意すれば明か。

2.2. Additive functional の分解

$a \in \mathfrak{A}$ に対し

$J = J(w) = \{s : s$ は $x.(w)$ の不連続点$\}$

$Q = Q_a(w) = \{s : s$ は $a(\cdot, w)$ の不連続点$\}$

とおくと，S, Q は T^* の可算部分集合である。

lemma 2.2.1. $0 \leq f(t, w)$ を任意の $\sigma \in$ M.T. に対して $f(\sigma, w)$ が $\mathcal{F}_\sigma$ 可測になるような函数とする。今 $a \in \mathfrak{A}$ に対して

$$b(t, w) = \sum_{\substack{s \leq t \\ s \in Q \cap J}} f(s, w)(a(s) - a(s-))$$

$$c(t, w) = \sum_{\substack{s \leq t \\ s \in Q \cap J^c}} f(s, w)(a(s) - a(s-))$$

とおくと，$b(t)$ $c(t)$ は $\mathcal{F}_t$ 可測である。

(証明) 全ての $t < \infty$ に対し $a(t, w) < \infty$ となる w に限って考える。((A.5) 参照)

$$\sigma = \inf\{t ; a(t) - a(t-) \geq \varepsilon \text{ 且つ } |x_t, x_{t-}| \geq \varepsilon\}$$

とおけば $\sigma \in$ M.T[注] である。又右辺の括弧内の条件をみたすt

(脚註) $\{\sigma \leq t\} = \bigcap_n \bigcup_{\substack{r, s \leq t \\ |r-s| < \frac{1}{n}}} \{a(r) - a(s) \geq \varepsilon, |x_r - x_s| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{F}_t$

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

は有限区間内に集積点を持たぬ事に注意すると, $\{\hat{\sigma}_n\}$ を σ-chain としたとき

$$b^{\varepsilon}(t,w)=\sum_{0<\hat{\sigma}_n\leq t} f(\hat{\sigma}_n,w)(a(\hat{\sigma}_n)-a(\hat{\sigma}_n-))$$

とおくと $b^{\varepsilon}(t,w)\uparrow b(t,w)$ $(\varepsilon\to 0)$ である。

$$b^{\varepsilon}(t,w)=\sum_{n} f(\hat{\sigma}_n,w)(a(\hat{\sigma}_n)-a(\hat{\sigma}_n-))\chi(0<\hat{\sigma}_n\leq t)$$

と書くと, 右辺の各項は $\mathcal{F}_t$ 可測, 従って $b(t\cdot w)$ も $\mathcal{F}_t$ 可測になる。$c(t\cdot w)$ についても同様である。 (証明終)

$a\in\mathfrak{A}$ に対して

(2.1) $\quad q(t,w)=\sum_{\substack{0<s\leq t\\ s\in J\cap\Theta}}(a(s)-a(s-))$

(2.2) $\quad p(t,w)=\sum_{\substack{0<s\leq t\\ s\in J\cap\Theta}}(a(s)-a(s-))$

(2.3) $\quad C(t,w)=a(t,w)-q(t,w)-p(t,w)$

と定義する。C は連続で p,q は右連続 p は $x_t(w)$ の不連続点だけで, q は $x_t(w)$ の連続点だけで飛躍のみによって増加する。

p,q,c は a から一意的に定る。(此れは単調右連続函数の分解にすぎない)。 $p(t)$ $q(t)$ は lemma 2.2.1 より $\mathcal{F}_t$ 可測である。

$s>0$ に対し, $a(t+s)-a(t+s-)=a(s,w_t^+)-a(s-,w_t^+)$

$|x_{t+s},x_{t+s-}|=|x_s(w_t^+),x_{s-}(w_t^+)|$ に注意すると

$t+s\in J(w)\cap\Theta(w)$ と $s\in J(w_t^+)\cap\Theta(w_t^+)$ は同値になる。従って

$$\begin{aligned} q(t+s,w) &= \sum_{\substack{u\leq t\\ u\in J\cap\Theta}} a(u)-a(u-)+\sum_{\substack{t<u\leq t+s\\ u\in J\cap\Theta}} a(u)-a(u-) \\ &= q(t,w)+\sum_{\substack{0<u\leq s\\ u\in J\cap\Theta(w_t^+)}} a(u,w_t^+)-a(u-,w_t^+) \\ &= q(t,w)+q(s,w_t^+) \end{aligned}$$

を得る。

(他の性質は自明なので) $q\in\mathfrak{A}$ がわかる。同様にして $p\in\mathfrak{A}$ もわかる。此の事から又 $C\geqq 0$ に注意すれば $C\in\mathfrak{A}$ もわかる。以上をまとめると

定理 2.2.2 $\quad a\in\mathfrak{A}$ は

(1) $\quad a=C+P+q$ と書ける。$C,P,q\in\mathfrak{A}$ であって C は連続 P,q は飛躍だけで増加し、P の不連続点は $x_t(w)$ の不連続点に限り q の不連続点は $x_t(w)$ の連続点に限る。

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

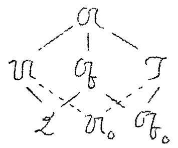
(2) 上の分解は一意的である。即ち

$a = c + p + q \qquad a' = c' + p' + q'$

$a \sim a'$ なら $c \sim c'$ $p \sim p'$ 且つ $q \sim q'$ である。

定義 $a \in \mathfrak{A}$ に対し $a = c + p + q$ を定理2.2.2の分解すると $\mathfrak{U} = \{a : q = 0\}$ $\mathfrak{Q} = \{a : p = 0\}$ $\mathfrak{J} = \{a : q = 0\}$

$\mathfrak{L} = \mathfrak{U} \cap \mathfrak{Q}$ $\mathfrak{U}_0 = \mathfrak{U} \cap \mathfrak{J}$ $\mathfrak{Q}_0 = \mathfrak{Q}_0 \cap \mathfrak{J}$ とおく。



$\mathfrak{U}$ は Meyer [26] で class d'unicité と呼ばれているものである。

定理2.2.2を云いかえると次のようになる。

注意2.2.3. $a \in \mathfrak{A}$ は

$a = c + p + q \qquad c \in \mathfrak{L} \quad p \in \mathfrak{U}_0 \quad q \in \mathfrak{Q}_0$

と一意的に分解される。

注意2.2.4. $a, b \in \mathfrak{U}$ ($\mathfrak{Q}$, 又は $\mathfrak{J}$) $k \geq 0$ とすると

$a + b,\ ka \in \mathfrak{U}$ ($\mathfrak{Q}$ 又は $\mathfrak{J}$)

定義 $a \in \mathfrak{Q}$ が任意のマルコフ時間の増加列 $\{\sigma_n\}$ $\sigma_n \uparrow \sigma$ に対して $\lim a(\sigma_n) = a(\sigma)$ a.s. P_μ $\forall \mu \in M^+(S)$ が成立する時 a を擬左連続という。

定理2.2.5. $a \in \mathfrak{Q}$ なら a は擬左連続である。

証明) $\mu \in M^+(S)$ を任意にとる。$\sigma \geq \zeta$ の時は (A.4) から明かである。

$\sigma < \zeta$ の時 仮定 P.6 より $\lim x_{\sigma_n} = x_\sigma \ (= x_{\sigma+})$ a.s. P_μ が成立する。σ が $x_t(w)$ の連続点なら $a \in \mathfrak{Q}$ は σ で連続であるから $\lim a(\sigma_n) = a$ は明か。σ が $x_t(w)$ の不連続点であれば P_μ 測度0を除いて $x_{\sigma-} \neq x_\sigma$ $\lim x_{\sigma_n} = x_\sigma$ 即ち $\sigma_n = \sigma$ が充分大きい n に対して成り立つ。従ってやはり $\lim a(\sigma_n) = a(\sigma)$.

(証明終)

実は此の定理の逆の成立する事が §3.3 で示される。

a_α の定義 (1.5) に注意すると a と a_α の不連続点は一致し $e^{-\alpha s}(a(s) - a(s-)) = a_\alpha(s) - a_\alpha(s-)$ である。従って

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

注意2.2.6. $a\in\mathfrak{A}$に対し $a=c+p+q$ を定理2.2.2の分解とすれば $a_\alpha=c_\alpha+p_\alpha+q_\alpha$ は a_α の連続な部分 $x_t(w)$ の連続点だけで飛躍する部分、$x_t(w)$ の不連続点だけで飛躍する部分えの一意的な分解をあたえる。

注意2.2.7. a が擬左連続であることと a_α が擬左連続である事は同値である。

2.3. $f-\varepsilon$ chain

定義 $f\in F(S)$ に対しマルコフ時間の列 $C=\{\sigma_n\}$ が

(1) $\sigma_0=0$ $\sigma_n<\infty$ なら $\sigma_n<\sigma_{n+1}$ (2) $\lim\sigma_n=\infty$

(3) $\sigma_n\leqq t<\sigma_{n+1}$ で $|f(x_t)-f(x_{\sigma_n})|<\varepsilon$

をみたす時 $\{\sigma_n\}$ を f-ε chain と呼ぶ。

lemma 2.3.1. $f\in C_\infty(S)$ に対して f-ε chain が存在する。

(証明) $\sigma=\inf t\,|\,f(x_t)-f(x_0)|\geqq\varepsilon$ とおくと $\sigma\in$M.T. $\{\hat\sigma_n\}$ を σ-chain とする。$f\in C_\infty(S)$ は S^* の函数としても連続であるから $x_t(w)$ に関する仮定(W.1)(W.2)より、$\{\hat\sigma_n\}$ が (1) (2)をみたすことがわかる。(3)は作り方から明か。(証明終)

上の方法は注意(1.4.6.)より α-excessive function にも適用できる。

注意3.3.2. u α-excessive なら u-ε chain は存在する。

$f\in C_\infty(S)$ に対し $\int_0^t f(x_s)da(s)$ は w を定めると Lebesgue-stieltjes 積分として値が定る。$a\in\mathfrak{A}$ に対して $\{\sigma_n\}$ を f-ε chain とすると

$$|\int_{\sigma_n}^{\sigma_{n+1}}f(x_s)\,da(s)-f(x_{\sigma_n})((a(\sigma_{n+1})-a(\sigma_n))|$$

$$\leqq|\int_{(\sigma_n,\sigma_{n+1})}(f(x_s)-f(x_{\sigma_n}))\,da(s)|+|(f(x_{\sigma_{n+1}})-f(x_{\sigma_n}))(a(\sigma_{n+1})-a(\sigma_{n+1}-))|$$

であるが f-ε chain の性質から第一項は $\varepsilon(a(\sigma_{n+1}-)-a(\sigma_n))$ より小さい。今若し $a\in\mathfrak{N}$ の時には σ_{n+1} が a の不連続点なら、そこでは $x_s(w)$ 従って $f(x_s)$ は連続であり

$|f(x_{\sigma_{n+1}})-f(x_{\sigma_n})|\leq\sup_{\sigma_n\leq s<\sigma_{n+1}}|f(x_s)-f(x_{\sigma_n})|\leq\varepsilon$ となる。σ_{n+1} が a

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

の連続点では第二項は0になる。此の事より

$$\left| \int_{\sigma_n}^{\sigma_{n+1}} f(x_s)\,ds - f(x_{\sigma_n})(a(\sigma_{n+1})-a(\sigma_n)) \right| \leq \varepsilon (a(\sigma_{n+1})-a(\sigma_n))$$

がわかる。nについて加えると次の注意を得る。

注意 2.3.3. $a \in \mathfrak{U}$ $f \in C_\infty(S)$ に対し $\{\sigma_n\}$ $f-\varepsilon$ *chain* とすると

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} f(x_{\sigma_n}) \chi(\sigma_n < t)(a(\sigma_{n+1}\wedge t) - a(\sigma_n)) - \int_0^t f(x_s)\,ds \right| \leq \varepsilon\, a(t).$$

上式は a の代りに a_α でおきかえても成立する。

$f \in F(S)$ に対し $\{\sigma_n\}$ を $f-\varepsilon$ *chain* とする。今 $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \cdots\cdots$ (有限ヶ又は可算ヶ) を全ての w に対し有限時間内に収積点を持たないマルコフ時間の列とする時, $\{\sigma_n\}$ $\{\tau_m\}$ を小さい順に並べて各 w 毎に数列 $\{\rho_n(w)\}$ を作る。詳しく云うと,

$\rho_0 = 0$ ρ_e 迄定義できたとして

$$\rho_{e+1} = \sup_{n \cdot m} \{\sigma_n \wedge \tau_m : \sigma_{n-1} \leq \rho_e \quad \tau_{m-1} \leq \rho_e\}$$

但し τ_m が N ヶ ($N<\infty$) の時は $\tau_{N+1} = \infty$ と定義しておく。

注意 2.3.4. $\{\rho_e\}$ は $f-\varepsilon$ *chain* である。

(証明) 定義の (1).(2).(3) の性質は明かである。$\rho_e \in$ M.T. であることは、$\{\rho_{e+1} < t\} = \bigcup_{n \cdot m} \{\sigma_n \wedge \tau_m < t.\ \sigma_{n-1} \leq \rho_e.\ \tau_{m-1} \leq \rho_e,\ \rho_e < t\}$ より帰納法を用いればよい。

$\{\rho_e\} = \{\sigma_n\} \vee \{\tau_m\}$ と書く。$C = \{\sigma_n\}$ $C' = \{\tau_m\}$ が共に $f-\varepsilon$ *chain* の時は $\{\rho_e\} = C \vee C'$ と書く。

2.4. $f \cdot a$ の定義

$0 \leq f \in F(S)$ の時 (1.2.1) より任意の $\mu \in M^+(S)$ に対し, P_μ 測度 0 を除いて w を定めると $f(x_t(w))$ は t の函数として $\widetilde{\mathrm{I}}$ 可測である。従って $a \in \mathfrak{U}$ に対し

$$\int_0^t f(x_s(w))\,da(s\,w) \quad \forall t \in T^*$$

は P_μ 測度 0 を除いて確定する。此の積分が (全ての t に対して) 確定する w について

$$(4.1) \quad \int_0^{t+s} f(x_u(w))\,da(u,w) = \int_0^t f(x_u(w))\,da(u,w) + \int_0^s f(x_{t+u}(w))\,da(t+u,w)$$
$$= \int_0^t f(x_u(w))\,da(u,w) + \int_0^s f(x_u(w_t^+))\,da(u,w_t^+)$$

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

の成立する事は $f(x_{t+u}(w))=f(x_u(w_t^+))$ $a(t+u,w)-a(t+v,w)$ $=a(u,w_t^+)-a(v,w_t^+)$ に注意すると明か。

以下 $\int_0^t f(x_s)\,da(s)$ が $\mathfrak{F}_t$ 可測であることを示す。

(i) $a\in\mathcal{J}$ の時は (1.2.5) より $f(x_\sigma)$ は $\mathfrak{F}_\sigma$ 可測なので $\int_0^t f(x_s)\,da(s)=\sum_{\substack{s\in Q\\ s\leq t}} f(x_s)(a(s)-a(s-))$ は lemma 2.2.1 によって $\mathfrak{F}_t$ 可測になる。

(ii) $a\in\mathcal{L}$ の時、$f\in C(S)$ なら $\int_0^t f(x_s)\,da(s)$ は右連続函数 $f(x_s)$ の連続測度 $da(s)$ による Riemmann-Stiltjes 積分として $\mathfrak{F}_t$ 可測が得られる。此れより直ちに $f\in B(S)$ の場合まで拡張できる。

(iii) $a\in\mathcal{L}$ $f\in F(S)$ の時は、$\sigma_n=\inf t: a(t)\geqq n$ とおくと $\sigma_n\in$ M.T. で $a(\sigma_n)=a(\sigma_n-)=n$ である。今任意の $\mu\in M^+(S)$ に対して $\mu_n(dx)=E_\mu\left(\int_0^{\sigma_n}\chi(x_s\in dx)\,da(s)\right)$ とおくと $\mu_n(S)\leqq n$ で $\mu_n\in M^+(S)$ となる。$f\in F(S)$ であるから、$f_1, f_2\in B(S)$ $f_1\leq f\leq f_2$ $f_1=f_2$ a.s. μ_n $(n=1,2,\cdots\cdots)$ となる f_1, f_2 を取れる。此の時

$$E_\mu\left(\int_0^{\sigma_n\wedge t} f_2\,da-\int_0^{\sigma_n\wedge t} f_1\,da\right)\leqq\int_S(f_2-f_1)\,d\mu_n=0 \quad 即ち$$

$$\int_0^{\sigma_n\wedge t} f_2\,da=\int_0^{\sigma_n\wedge t} f_1\,da \quad a.s.\ P_\mu\ (n=1,2,\cdots\cdots),$$

(A.5) から $\lim_{n\to\infty}\sigma_n=\infty$ a.s. P_μ. 従って

$$\int_0^t f_2\,da=\int_0^t f\,da=\int_0^t f_1\,da \quad a.s.\ P_\mu \quad を得る。$$

(iV) 一般の $a\in\mathfrak{A}$ に対しては $a=a_1+a_2$ $a_1\in\mathcal{L}$ $a_2\in\mathcal{J}$ と分解すればよい。

(定義) $f\geqq 0$ を $\mathbb{F}(S)$ 可測とする時

全ての $t\in[0,\infty)$ に対し $a(t,w)<\infty$、$\int_0^t f(x_s)\,da(s)$ が有限確定の時 $\qquad f\cdot a(t)=\int_0^t f(x_s)\,da(s) \qquad 0\leq t\leq\infty$

それ以外の時 $\quad f\cdot a(t)\equiv\infty$.

と定義する。

定理 2.4.1. $0\leq f\in F(S)$ の時 $fa\in\mathfrak{A}$ であって任意の $\mu\in M^+(S)$ に対し $\quad fa(t)=\int_0^t f(x_s)\,da(s)$ a.s. P_μ

(証明) $f\cdot a$ に対し (A.4)(A.6) は既に証明した。

$0\leq\int_0^t f(x_s)\,da(s)\leq a(t)\,\|f\|$ に注意すれば (A.5) がわかる。

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

他の性質は自明。

注意 2.4.2. (1) $0 \leq f \in F(S)$ $a.b \in \mathfrak{A}$ $a \sim b$ なら $fa \sim fb$

(2) $f \equiv k$ (定数) ≥ 0 $a \in \mathfrak{A}$ なら $k.a \sim ka$

(3) $0 \leq f.g \in F(S)$ $a \cdot b \in \mathfrak{A}$ に対し

$(f+g)a \sim fa + ga$ $f(a+b) \sim fa + fb$

(4) $0 \leq f \in F(S)$ $(fa)_\alpha(t) = \int_0^t e^{-\alpha s} f(x_s)\,da = \int_0^t f(x_s)\,da_\alpha$ a.s. P_μ

が全ての $\mu \in M^+(S)$ に対して成立する。

注意 2.4.3. 非負 $\mathbb{F}(S)$ 可測 f が(有界でなくても)任意の $\mu \in M^+(S)$ に対し $\int_0^t f(x_s)\,da < \infty$ $\forall t \in [0.\infty)$ a.s. P_μ をみたすなら, $f \cdot a$ に対し定理 2.4.1. 及び注意 2.4.2 が成立する。

(定義) 一般に非負でない $f \in F(S)$ $a \in \mathfrak{A}$ に対し $f = f_1 - f_2$ $f_1 \geq 0$, $f_2 \geq 0$ なら $fa = f_1 a - f_2 a$ と定義する。

$fa(t) = \int_0^t f(x_s)\,da(s)$ a.s. P_μ $\forall \mu \in M^+(S)$ である

から此の定義は f_1, f_2 に関しない(P_μ 測度 0 を除いて)

2.5. 作用素 $U_a^\alpha f$

定義 $\mathfrak{A}^\alpha = \{a : a \in \mathfrak{A} \quad E_x(a_\alpha(\infty)) < \infty \quad \forall x \in S\}$

$\bar{\mathfrak{A}}^\alpha = \{a : a \in \mathfrak{A} \quad E_x(a_\alpha(\infty))$ が x の函数として有界$\}$

$\mathcal{L}^\alpha = \mathcal{L} \frown \mathfrak{A}^\alpha$ $\mathfrak{N}_0^\alpha = \mathfrak{N}_0 \frown \mathfrak{A}^\alpha$ 及 $\mathcal{Q}_0^\alpha = \mathcal{Q}_0 \frown \mathfrak{A}^\alpha$

$\bar{\mathcal{L}}^\alpha = \mathcal{L} \frown \bar{\mathfrak{A}}^\alpha$ $\bar{\mathfrak{N}}_0^\alpha = \mathfrak{N}_0 \frown \bar{\mathfrak{A}}^\alpha$ $\bar{\mathcal{Q}}_0^\alpha = \mathcal{Q}_0 \frown \bar{\mathfrak{A}}^\alpha$

とおく。

注意 2.5.1. (1) $\bar{\mathfrak{A}}^\alpha \subset \mathfrak{A}^\alpha$

(2) $\alpha \leq \beta$ なら $\mathfrak{A}^\beta \subset \mathfrak{A}^\alpha$、$\bar{\mathfrak{A}}^\beta \subset \bar{\mathfrak{A}}^\alpha$

(3) $a \in \mathfrak{A}$ $a = c + p + q$ $c \in \mathcal{L}$ $p \in \mathfrak{N}_0$ $q \in \mathcal{Q}_0$ の時

$a \in \mathfrak{A}^\alpha$ $(\bar{\mathfrak{A}}^\alpha)$ なら $c \in \mathcal{L}^\alpha (\bar{\mathcal{L}}^\alpha)$ $p \in \mathfrak{N}_0^\alpha$ $(\bar{\mathfrak{N}}_0^\alpha)$ $q \in \mathcal{Q}_0^\alpha$ $(\bar{\mathcal{Q}}_0^\alpha)$

Lemma 2.5.2. η を $\mathcal{F}$ 可測で次の条件をみたすとする。

(1) $|\eta| \leq K < \infty$ (2) $\forall x \in S$ に対し P_x 測度 0 を除き $\eta(w_t^+)$ $E_{x_t(w)}(\eta)$ は t の函数として右連続. 此の時 $a \in \mathfrak{A}^\alpha$ $\sigma \in M.T.$ に対し

$$E_x\left(\int_0^\sigma \eta(w_t^+)\,da_\alpha\right) = E_x\left(\int_0^\sigma E_{x_t}(\eta)\,da_\alpha\right).$$

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

(証明) (i) $a\in\mathfrak{I}$ の時(注)

$\tau=\inf t : a(t)-a(t-)\geqq\varepsilon$ とおき $\hat{\sigma}_n$ を τ-chain とする。

$A^\varepsilon=\sum_{n\geqq 1}\eta(w^+_{\hat{\tau}_n})(a_\alpha(\hat{\tau}_n)-a_\alpha(\hat{\tau}_n-))\chi(\hat{\tau}_n\leq\sigma)$

$B^\varepsilon=\sum_{n\geqq 1}E_{x_{\hat{\tau}_n}}(\eta)(a_\alpha(\hat{\tau}_n)-a_\alpha(\hat{\tau}_n-))\chi(\hat{\tau}_n\leq\sigma)$ とおくと,

$|\eta|\leq K$ 従って $|E_{x_{\hat{\tau}_n}}(\eta)|\leq K$ であるから

$\lim A^\varepsilon=\int_0^\sigma\eta(w_t^+)\,da_\alpha$ $\lim_{\varepsilon\downarrow 0}B^\varepsilon=\int_0^\sigma E_{x_t}(\eta)\,da_\alpha$,

$$E_x(A^\varepsilon)=\sum_{n=1}E_x(E_x(\eta(w^+_{\tau_n})(a_\alpha(\hat{\tau}_n)-a_\alpha(\hat{\tau}_n-))\chi(\hat{\tau}_n\leq\sigma)\mid\mathcal{F}_{\tau_n}))$$
$$=\sum_{n=1}^\infty E_x(E_{x_{\tau_n}}(\eta)(a_\alpha(\hat{\tau}_n)-a_\alpha(\hat{\tau}_n-))\chi(\tau_n\leq\sigma))$$
$$=E_x(B^\varepsilon)$$

$|A^\varepsilon|,\ |B^\varepsilon|\leq K a_\alpha(\sigma)$ に注意すると

$$E_x(\int_0^\sigma\eta(w_t^+)\,da_\alpha)=E_x(\int_0^\sigma E_{x_t}(\eta)\,da_\alpha)$$ を得る。

(ii) $a\in\mathfrak{L}$ の時, 条件 (1), (2) より $\int_0^\sigma\eta(w_t^+)\,da_\alpha$ $\int_0^\sigma E_{x_t}(\eta)\,da_\alpha$ は (P_x 測度 0 を除き) Rieman Stiltjes 積分になっている。

$A^n=\sum_{k=1}^\infty\eta(w^+_{\frac{k}{n}})(a_\alpha(\frac{k}{n})-a_\alpha(\frac{k-1}{n}))\chi(\frac{k-1}{n}\leq\sigma)$

$B^n=\sum_{k=1}^\infty E_{x_{\frac{k}{n}}}(\eta)(a_\alpha(\frac{k}{n})-a_\alpha(\frac{k-1}{n}))\chi(\frac{k-1}{n}\leq\sigma)$

とおくと, $\lim_{n\to\infty}A^n=\int_0^\sigma\eta(w_t^+)\,da_\alpha$

同様 $\lim B^n=\int_0^\sigma E_{x_t}(\eta)\,da_\alpha$

$$E_x(A^n)=\sum_{k=1}^\infty E_x(E_x(\eta(w^+_{\frac{k}{n}})(a(\tfrac{k}{n})-a(\tfrac{k-1}{n}))\chi(\tfrac{k}{n}\leq\sigma)\mid\mathcal{F}_{\frac{k}{n}}))$$
$$=\sum_{k=1}^\infty E_x(E_{x_{\frac{k}{n}}}(\eta))(a(\tfrac{k}{n})-a(\tfrac{k-1}{n}))\chi(\tfrac{k}{n}\leq\sigma))$$
$$=E_x(B^n)$$

$|A^n|,\ |B^n|\leq K(a_\alpha(\infty))$ に注意して lemma の結果を得る。

(iii) 一般の $a\in\mathfrak{A}$ に対しては $a=a_1+a_2$ $a_1\in\mathfrak{L}$ $a_2\in\mathfrak{I}$ とわければよい。

定義 $f\in F(S)$ $a\in\mathfrak{A}^\alpha$ に対して

$$U_a^\alpha f(x)=E_x((f\cdot a)_\alpha(\infty))=E_x(\int_0^\infty f(x_s)\,da_\alpha)$$

と定義する. $U_a^\alpha f$ は有限な $\mathbb{F}(S)$ 可測函数である.

注意 2.5.5. $f\in F(S)$ $a\in\mathfrak{A}^\alpha$ $\sigma\in$M.T. に対し

$H_\sigma^\alpha U_a^\alpha f(x)=E_x(\int_\sigma^\infty f(x_t)\,da_\alpha(t))$, 特に左辺の値は有限で確定する。

脚註 此の場合 η の条件 (2) は不要である。

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

(証明) $\int_\sigma^\infty f(x_t)\,da_\alpha = \int_\sigma^\infty e^{-\alpha t} f(x_t)\,da = e^{-\alpha\sigma}\int_0^\infty e^{-\alpha t} f(x_t(w_\sigma^+))\,da(w_\sigma^+)$

$$= e^{-\alpha\sigma}\int_0^\infty f(x_t(w_\sigma^+))\,da(w_\sigma^+)^{(註)}$$

$\therefore\ E_x(\int_\sigma^\infty f\,da_\alpha) = E_x(e^{-\alpha\sigma} E_{x_\sigma}(\int_0^\infty f\,da_\alpha)) = H_\sigma^\alpha U_a^\alpha f(x)$

lemma 2.4.4. $a, b \in \mathfrak{A}_\alpha$ $f\in F(S)$ とする。今全ての $x\in S$ に対し $U_a^\alpha f(x) = U_b^\alpha f(x)$ なら任意の $\beta\geqq\alpha$ $\sigma\in M.T.$ に関し、

$$E_x(\int_0^\sigma f(x_t)\,da_\beta) = E_x(\int_0^\sigma f(x_t)\,db_\beta)\quad \forall x\in S.$$

(証明) 先ず $E_x(\int_0^\sigma f(x_t)\,da_\alpha) = E_x(\int_0^\infty f(x_t)\,da_\alpha) - E_x(\int_\sigma^\infty f(x_t)\,da_\alpha$

$$= U_a^\alpha f(x) - H_\sigma^\alpha U_a^\alpha f(x)$$

より $\forall x\in S$ に対し $E_x(\int_0^\sigma f(x_t)\,da_\alpha) = E_x(\int_0^\sigma f(x_t)\,db_\alpha)$ を得る。

$\beta\geqq\alpha$ に対し $A^n = \sum_{k=1}^\infty e^{-(\beta-\alpha)\frac{k}{n}}\chi(\frac{k-1}{n}\leq\sigma)\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x_t)\,db_\alpha$

$$B^n = \sum_{k=1}^\infty e^{-(\beta-\alpha)\frac{k}{n}}\chi(\frac{k-1}{n}\leq\sigma)\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x_t)\,db_\alpha$$

とおくと $|f(x_t)|\leq\|f\|$ に注意し $\lim_{n\to\infty} A^n = \int_0^\sigma e^{-(\beta-\alpha)t} f(x_t)\,da_\alpha = \int_0^\sigma f\,da_\beta$

$\lim_{n\to\infty} B^n = \int_0^\sigma f\,db_\beta$, $|A^n|\leq\|f\|\,a_\alpha(\infty)$ $|B^n|\leq\|f\|\,b_\alpha(\infty)$

一方 $E_x(A^n) = \sum_{k=1}^\infty e^{-(\beta-\alpha)\frac{k}{n}} E_x\{\chi(\frac{k-1}{n}\leq\sigma)\,E_{x_{\frac{k-1}{n}}}(\int_0^{\frac{1}{n}} f(x_t)\,da_\alpha)\}$

$$= \sum_{k=1}^\infty e^{-(\beta-\alpha)\frac{k}{n}} E_x\{\chi(\frac{k-1}{n}\leq\sigma)\,E_{x_{\frac{k-1}{n}}}(\int_0^{\frac{1}{n}} f(x_t)\,db_\alpha)\}$$

$$= E_x(B_n)$$

従って $E_x(\int_0^\sigma f(x_t)\,da_\beta) = E_x(\int_0^\sigma f(x_t)\,db_\beta)$ を得る。 **(証明終)**

lemma 2.5.5. $a, b\in\mathfrak{A}_\alpha$ で任意の $f\in C_0(S)$ $x\in S$ $t\in[0,\infty]$ に対して $E_x(a_\alpha(t) f(x_t)) = E_x(b_\alpha(t) f(x_t))$ が成立すれば $a\sim b$.

(証明) 仮定から任意の $f\in F(S)$ に対して、$E_x(a_\alpha(t) f(x_t)) = E_x(b_\alpha(t) f(x_t))$ が成立することがわかる。今 $0\leq s\leq t$ $f_1, f_2\in B(S)$ に対して

$E_x(a_\alpha(t) f_1(x_s) f_2(x_t)) = E_x(a_\alpha(s) f_1(x_s) f_2(x_t)) + e^{-\alpha t} E_x(a_\alpha(t-s, w_s^+) f_1(x_s) f_2(x_t))$

$$= E_x(a_\alpha(s) f_1(x_s) E_{x_s}(f(x_{t-s}))) + e^{-\alpha t} E_x(f_1(x_s) E_{x_t}(a_\alpha(t-s) f_2(x_{t-s})))$$

$$= E_x(b_\alpha(s) f_1(x_s) E_{x_s}(f_2(x_{t-s}))) + e^{-\alpha t} E_x(f_1(x_s) E_{x_t}(b_\alpha(t-s) f_2(x_{t-s})))$$

$$= E_x(b_\alpha(t) f_1(x_s) f_2(x_t))$$

註) 厳密には此の等式は $\forall\mu\in M^+(S)$ に対して P_μ 測度 0 を除いて成立する。($a(t,w)<\infty$ でない時や $f(x_t)$ が $da(w)$ 可積分でない時は除かねばならない。) 以後同じような議論をする時は一々ことわらない。

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

一般に $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq s_n = t$ $f_1, f_2 \cdots f_n \in B(S)$ に対して上の方法をくり返して

$$E_x(a_\alpha(t) f_1(x_{s_1}) \cdots f_n(x_{s_n})) = E_x(b_\alpha(t) f_1(x_{s_1}) \cdots f_n(x_{s_n}))$$

を証明する事ができる。a_α, b_α は $\mathcal{F}_t$ 可測であるから,

$$a_\alpha(t \cdot w) = b_\alpha(t \cdot w) \quad a.s.\ P_x \quad \forall x \in S. \ \forall t \in [0, \infty]$$

(2.1.1) より $a_\alpha \sim b_\alpha$ 即ち $a \sim b$ を得る。((2.14) 参照)。

注意 2.5.6. $a \cdot b \in \mathcal{G}$ $a \cdot b$ 右(左)連続とし, $x \in S$ $t \in [0, \infty]$ に対し $E_x(|a(t)|) < \infty$, $E_x(|b(t)| < \infty)$ であれば lemma 2.5.6. は成立する。

定理 2.5.7. $a . b \in \mathfrak{A}^\alpha$ $U_a^\alpha f \equiv U_b^\alpha f$ が任意の $f \in C_0(S)$ に対して成立すれば $a \sim b$.

(証明) $U_a^\alpha f(x) = E_x(\int_0^\infty f(x_t) da_\alpha)$ に注意し定理の条件は任意の $f \in F(S)$ に対して成立する。従って lemma (2.5.4) より ($b = \infty$ として) 任意の $\beta \geqq 0$ $f \in F(S)$ に対して $U_a^{\alpha+\beta} f = U_b^{\alpha+\beta} f$ が成立している。

今 $\beta > 0$ $f \in C_0(S)$ に対して

$$\int_0^\infty E_x(f(x_t) a_\alpha(t)) e^{-\beta t} dt = E_x(\int_0^\infty dt\, f(x_t)\, e^{-\beta t} \int_0^t da_\alpha(s))$$
$$= E_x(\int_0^\infty e^{-\beta s} da_\alpha(s) \int_0^\infty e^{-\beta t} f(x_t(w_s^+)) dt) = E_x(\int_0^\infty da_{\alpha+\beta}(s) \int_0^\infty e^{-\beta t} f(x_t(w_s^+)) dt)$$

であるが, $\eta = \int_0^\infty e^{-\beta t} f(x_t)\, dt$ $g(x) = E_x(\eta)$ とおくと $|\eta| \leq \frac{1}{\beta} \|f\|$ 且つ $\eta(w_t^+) = e^{+\beta t} \int_t^\infty e^{-\beta t} f(x_s)\, ds$ は (t の函数として) 連続, 又 $g(x)$ は β-excessive であるから $g(x_t)$ は右連続であるから lemma 2.5.2 が適用できる。即ち,

$$\int_0^\infty E_x(f(x_t) a_\alpha(t)) e^{-\beta t} dt = E_x(\int_0^\infty g(x_t) d a_{\alpha+\beta}(t)) = U_a^{\alpha+\beta} g(x)$$

同様 $\int_0^\infty E_x(f(x_t) b_\alpha(t)) e^{-\beta t} dt = U_b^{\alpha+\beta} g(x)$

従って $\int_0^\infty E_x(f(x_t) b_\alpha(t)) e^{-\beta t} dt = \int_0^\infty E_x(f(x_t) b_\alpha(t)) e^{-\alpha t} dt$.

$f \in C_0(S)$ より $f(x_t)$ は右連続 $a_\alpha(t)$ $b_\alpha(t)$ も右連続で $|f(x_t) b_\alpha(t)| \leqq \|f\| a_\alpha(\infty)$ $|f(x_t) b_\alpha(t)| \leq \|f\| b_\alpha(\infty)$ に注意すると $E_x(f(x_t) a_\alpha(t))$, $E_x(f(x_t) b_\alpha(t))$ は右連続となり Laplace 変換の一意性から $E_x(f(x_t) a_\alpha(t)) = E_x(f(x_t) b_\alpha(t))$ を得る。従って

lemma 2.5.5. より $a \sim b$.

2.6 $U_a^\alpha f$ の性質

定理 2.6.1. $a \in \mathfrak{A}_\alpha$ に対し次の条件は同値である。

(1) $a \in \mathfrak{U}$

(2) 任意の開集合 G, 及び G^c で 0 になる函数 $f \in F(S)$ に対し

$$H_G^\alpha U_a^\alpha f = U_a^\alpha f$$

(3) 任意の開集合 G と任意の $f \in C_0(S)$ $[f] \subset G$ に対し

$$H_G^\alpha U_a^\alpha f = U_a^\alpha f$$

(4) 任意の開集合 G に対し $H_G^\alpha U_a^\alpha \chi_G = U_a^\alpha \chi_G$.

(証明) (i) 先ず $\sigma = \sigma_G$ に対し $f(x) = 0$ $x \in G^c$ ならば $f(x_s) = 0$ $0 \leq s < \sigma$ であるから

$$(6.1) \qquad U_a^\alpha f(x) = E_x\left(\int_0^\infty f\, da_\alpha\right) = H_G^\alpha U_a^\alpha f = E_x\left(\int_\sigma^\infty f\, da_\alpha\right) \quad と$$

$$(6.2) \qquad E_x\left(f(x_\sigma)(a_\alpha(\sigma) - a_\alpha(\sigma-))\right) = 0$$

とは同値である。

(ii) (1) ⟹ (2) $a \in \mathfrak{U}^\alpha$ とする. $\sigma = \sigma_G$ に対し、σ が $x_t(w)$ の連続点なら $x_\sigma = x_{\sigma-} \in G^c$ より $f(x_\sigma) = 0$, 又 σ が $x_t(w)$ の不連続点なら $a \in \mathfrak{U}$ から $a(\sigma) - a(\sigma-) = 0$ よって (6.2) が示される。

(iii) (2) ⟹ (3) は明かである。

(3) ⟹ (4) 今開集合 G に対し compact 集合の列 $\{K_n\}$ で $K_n \subset G$ $K_n \uparrow G$ となるものを取る。今 $f_n \in C_0(S)$ $f_n \geqq 0$ を K 上で 1, G^c で 0 になるようにえらぶ。(i) に注意すると (3) から $\sigma = \sigma_G$ に対し

$$0 \leqq E_x(\chi_{K_n}(x_\sigma)(a_\alpha(\sigma) - a_\alpha(\sigma-))) \leqq E_x(f(x_\sigma)(a_\alpha(\sigma) - a_\alpha(\sigma-))) = 0$$

従って $E_x(\chi_{K_n}(x_\sigma)(a_\alpha(\sigma) - a_\alpha(\sigma-))) = 0$

$n \to \infty$ とし $E_x(\chi_G(x_\sigma)(a_\alpha(\sigma) - a_\alpha(\sigma-))) = 0$ を得る。

(IV) 条件 (4) の下で G, H を開集合 $G \cap H = \phi$ なら

$$E_x\left(\int_0^\infty \chi_G(x_s)\chi_H(x_{s-})\, da_\alpha\right) = 0^{(註)} を示す。$$

compact 集合 $K \subset H$ を取り $\sigma = \sigma_K + \sigma_G(w_{\sigma_K}^+)$ $\{\hat{\sigma}_n\}$ を

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

σ − chain とし, $\hat{\tau}_n = \hat{\sigma}_{n-1} + \sigma_K(w^+_{\hat{\sigma}_{n-1}})$ とおく。

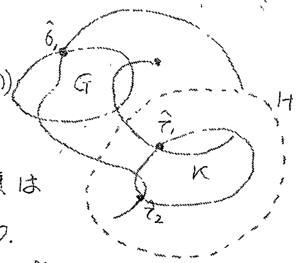
此の時 $\hat{\sigma}_n = \hat{\tau}_n + \sigma_G(w^+_{\hat{\tau}_n})$ で、$\bar{G} \cap K = \phi$ より (W.2) から

$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \infty$ がわかる。 $0 \leq s < \sigma$ では $\chi_G(x_s)\chi_K(x_{s-}) = 0$,

より $\quad 0 \leqq E_x(\int_0^\infty \chi_G(x_s)\chi_K(x_{s-})da_\alpha)$

$= E_x(\sum_{n=1}^\infty \chi_G(x_{\sigma_n})\chi_K(x_{\sigma_n -})(a_\alpha(\sigma_n) - a_\alpha(\sigma_n -)))$

$\leqq E_x(\sum_{n=1}^\infty E_{x_{\tau_n}}(\chi_G(x_{\sigma_G})(a_\alpha(\sigma_G) - a_\alpha(\sigma_G -))))$



所が(i)に注意すると條件(4)より最後の項は

0 になる。故に $E_x(\int_0^\infty \chi_G(x_s)\chi_K(x_{s-})da_\alpha) = 0$.

H を compact 集合で内から近似すると $E_x(\int_0^\infty \chi_G(x_s)\chi_H(x_{s-})da_\alpha) = 0$

を得る。

(V) (4) ⇒ (1) $x_1, \cdots, x_n \cdots \in S$. $\quad S = \bigcup_{n=1}^\infty G_n \quad G_n = \{x : |x, x_n| < \frac{\varepsilon}{2}\}$ とと

り, $\quad H_n = \{x : |x, x_n| > \frac{\varepsilon}{2}\}$ とおく。若し $|x \cdot y| > \varepsilon$ なら或る G_n

に対し $x \in G_n$ であるが $|x_n, y| \geqq |x, y| - |x, x_n| > \frac{\varepsilon}{2}$ より

$y \in H_n$ 従って $\{(x, y) ; |x, y| > \varepsilon\} \subset \bigcup G_n \times H_n$. $G_n \cap H_n = \phi$

であるから

(4)により $\quad E_x(\int_0^\infty \chi_{G_n}(x_s)\chi_{H_n}(x_{s-})da_\alpha) = 0$ 従って

$E_x(\int_0^\infty \chi(|x_s, x_{s-}| > \varepsilon)da_\alpha) = 0$

$\varepsilon \downarrow 0$ とし $E_x(\int_0^\infty \chi(|x_s, x_{s-}| > 0)da_\alpha) = E_x(\sum_{s \in J}(a(s) - a(s-))) = 0$

を得る。但し J は $x_t(w)$ の不連続点の集合である。此の事から a_α 従って a は (全ての $x \in S$ に対して P_x 測度 0 の修正をして) $\mathcal{U}$ に属する。(証明終)

$\mathcal{L}$ に対しては次の定理がある。

定理 2.1.6. $a \in \mathcal{L}^\alpha$ なら任意の解析集合 E と E^c で 0 になる $f \in F(S)$ に対して $\qquad H^\alpha_E U^\alpha_a f = U^\alpha_a f$

(証明) 前定理の証明(i)と同様にして $H^\alpha_E U^\alpha_a f = U^{\alpha,p}_a f$ は $E_x(f(x_{\sigma_E})(a_\alpha(\sigma_E) - a_\alpha(\sigma_E -))) = 0$ と同値であるが $a \in \mathcal{L}$ なら,

---

(脚註) $\int_0^\infty \chi_G(x_s)\chi_H(x_{s-})da_\alpha = \sum_{s \in Q}\chi_G(x_s)\chi_H(x_{s-})(a(s) - a(s-))$ の可測性は lemma 2.2.1. よりわかっている。

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

常に $a_\alpha(\sigma_E)-a_\alpha(\sigma_E-)=0$ であるから定理が成立する。(証明終)

此の定理の逆も成立する。(§3.3参照)

$a\in\mathfrak{A}^\alpha$ に対し $U_a^\alpha f(x)=E_x(\int_0^\infty f(x_t)\,da_\alpha)$ は $f\in F(S)$ に対し積分作用素であるが(註) その支えについて次の定理が成立する。

定理 2.6.3. (1) $a\in\mathfrak{A}^\alpha$, E を極集合とすれば $U_a^\alpha\chi_E=0$.

(2) $a\in\mathfrak{L}^\alpha$, E を半極集合とすれば $U_a^\alpha\chi_E=0$.(註)

(証明) (1) E は解析集合としてよい。E が極集合なら $P_x(\sigma_E=\infty)=1$ $\forall x\in S$ であるから $\chi_E(x_s)=0$ $0\leq s<\infty$ a.s. P_x ($\forall x\in S$.)

従って $U_a^\alpha\chi_E(x)=E_x(\int_0^\infty\chi_E(x_s)\,da_\alpha)=0$

(2) E が半極集合なら [21] 3章定理4.4により全ての $x\in S$ に対し P_x測度0の w を除いて $x_t(w)\in E$ となる t は高々可算ヶしかない。故に a_α の連続性から $\int_0^\infty\chi_E(x_s)\,da_\alpha=0$ a.s. P_x を得る。

2.7. potential U_a^α

定義 $a\in\mathfrak{A}^\alpha$ に対し $U_a^\alpha(x)=U_a^\alpha 1(x)=E_x(a_\alpha(\infty))$ を a の α 次 potential という。

例 6.1 $0\leq f\in F(S)$ の時 $U_{f\cdot a}^\alpha=U_a^\alpha f$ である。

例 6.2 $a=t\wedge\zeta=\int_0^t\chi_S(x_s)\,dt$ ならば

$U_{f\cdot a}^\alpha(x)=U^\alpha f(x)$ で (§1.2参照), 所謂函数 f の potential になる。

定理 2.7.1. $U_a^\alpha(x)$ は α-excessive function である。

(証明) lemma 2.5.3. により

$H_t^\alpha U_a^\alpha(x)=E_x(\int_t^\infty da_\alpha(x))=E_x(a(\infty)-a(t))\leqq U_a^\alpha(x)$, $a(0+)=a(0)=0$ から $a(\infty)-a(t)\uparrow a(\infty)$ $(t\to 0)$. 従って $H_t^\alpha U_a^\alpha\uparrow U_a^\alpha$ $(t\to 0)$.

lemma 2.7.2. $a, b\in\mathfrak{A}_\alpha$ $U_a^\alpha\equiv U_b^\alpha$ とすると

(1) 任意の $\sigma\in$ M.T. $\beta\geqq\alpha$ $x\in S$ に対し $E_x(a_\beta(\sigma))=E_x(b_\beta(\sigma))$

(註) $U_a^\alpha(x,dy)\in M^+(S)$ が存在し $U_a^\alpha f(x)=\int U_a^\alpha(x,dy)f(y)$ と書ける。

(註) 極集合, 半極集合については [21] 4章§4参照.

(2) 任意の $\sigma \in$ g.H.T. β($\beta<\alpha$でもよい) $\mu \in M^+(S)$に対し

$E_\mu(a_\beta(\sigma)) = E_\mu(b_\beta(\sigma))$ 　但し等式は一方が∞なら他方も∞になることを意味する。

(証明) (1)は lemma 2.5.4 で $f=1$ とおけばよい。

(2)は $\beta<\alpha$ の時証明すれば充分である。

$0=t_0<t_1<\cdots\ t_m=\Delta$ とおくと、$t_n<\sigma$ なら $t_n+\Delta\wedge\sigma(w_{t_n}^+)=t_{n+1}\wedge\sigma$ であるから

$$E_\mu(a_\beta(\sigma)) = E_\mu(\sum_n \chi(t_n<\sigma)(a_\beta(t_{n+1}\wedge\sigma)-a(t_i)))$$
$$= E_\mu(\sum_n \chi(t_n<\sigma)e^{-\beta t_n}a_\beta(\Delta\wedge\sigma(w_{t_n}^+),w_{t_n}^+))$$
$$\geqq E_\mu(\sum_n \chi(t_n<\sigma)e^{-\beta t_n}E_{x_{t_n}}(a_\alpha(\Delta\wedge\sigma)))$$
$$\geqq E_\mu(\sum_n \chi(t_n<\sigma)e^{-\beta t_n-(\beta-\alpha)\Delta}a_\beta(\Delta\wedge\sigma(w_{t_n}^+,w_{t_n}^+))$$
$$= e^{-(\beta-\alpha)\Delta}E_\mu(a_\beta(\sigma))$$

即ち $E_\mu(a_\beta(\sigma))\geqq E_\mu(\sum_n\chi(t_n<\sigma)e^{-\beta t_n}E_{x_{t_n}}(a_\alpha(\Delta\wedge\sigma)))\geqq e^{-(\beta-\alpha)\Delta}E_\mu(a_\beta(\sigma))$

同様の関係は a_β の代りに b_β としても成立する。所が α に対しては(1)が成立しているから

$$E_\mu(\sum_n\chi(t_n<\sigma)e^{-\beta t_n}E_{x_{t_n}}(a_\alpha(\Delta\wedge\sigma)))$$
$$= E_\mu(\sum_n\chi(t_n<\sigma)e^{-\beta t_n}E_{x_{t_n}}(b_\alpha(\Delta\wedge\sigma)))$$

であるから $e^{(\beta-\alpha)\Delta}E_\mu(a_\beta(\sigma))\geqq E_\mu(b_\beta(\sigma))\geqq e^{-(\beta-\alpha)\Delta}E_\mu(a_\beta(\sigma))$.

$\Delta\to 0$ として(2)が証明される.　　(証明終)

定理 2.7.3. $a, b\in\mathfrak{N}^\alpha$ $U_a^\alpha\equiv U_b^\alpha$ なら $a\sim b$.

($a\in\mathfrak{N}^\alpha$ は α 次 potential で決定される.)

(証明) $f\in C_\infty(S)$ に対し $\{\hat{\sigma}_n\}$ を f-ε chain で同時に或る $\sigma\in$ M.T の σ-chain であるようにとる。(lemma 2.3.1. 証明参照).

$a, b\in\mathfrak{N}^\alpha$ であるから (2.3.3) より

$$|U_a^\alpha f(x)-E_x(\sum_{n=0}^\infty f(x_{\sigma_n})(a_\alpha(\sigma_{n+1})-a_\alpha(\sigma_n)))|\leqq\varepsilon E_x(a_\alpha(\infty))$$
$$|U_b^\alpha f(x)-E_x(\sum_{n=0}^\infty f(x_{\sigma_n})(a_\alpha(\sigma_{n+1})-a_\alpha(\sigma_n)))|\leqq\varepsilon E_x(b_\alpha(\infty))$$

今 $\sigma_{n+1}=\sigma_n+\sigma(w_{\sigma_n}^+)$ より lemma 2.7.2. を用い

$$E_x(\sum_{n=0}^\infty f(x_{\sigma_n})(a_\alpha(\sigma_{n+1})-a_\alpha(\sigma_n)))=E_x(\sum_n f(x_{\sigma_n})E_{x_{\sigma_n}}(a_\alpha(\sigma)))$$
$$=E_x(\sum_n f(x_{\sigma_n})E_{x_{\sigma_n}}(b_\alpha(\sigma)))=E_x(\sum_{n=0}^\infty f(x_{\sigma_n})(b_\alpha(\sigma_{n+1})-b_\alpha(\sigma_n)))$$

$\varepsilon\downarrow 0$ として $U_a^\alpha f\equiv U_b^\alpha f$. 定理 2.5.7 より $a\sim b$. (証明終)

一般の $a, b\in\mathfrak{N}^\alpha$ に対しては定理は成立しない。(3章, 5章参照)

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

2.8. 強 順 序

定義　$a, b \in \mathfrak{A}$ の時任意の $x \in S$ に対して，

$$a(t, w) \leq b(t, w) \quad \forall t \in T^* \quad a.s.\ P_x$$

が成立する時　$a \ll b$　とあらわす。

(2.1.2) の証明と同様にして，

注意 2.8.1. (1) $a \ll b$ なら $a(t,w) \leq b(t,w)$ $\forall t \in T^*$ $a.s.\ P_\mu$ $\forall \mu \in M^+(S)$

(2)　$a(t,w) \leq b(t,w)$ $a.s.\ P_x$　が全ての　$x \in S$, $t \in T$　に対して成立するとすれば　$a \ll b$.

(3)　$a \sim a'$　$b \sim b'$　$a \ll b$　なら　$a' \ll b'$

(4)　$a \ll b$　$b \ll c$　なら　$a \ll c$

(5)　$a \ll b$　$b \ll a$　なら　$a \sim b$

但し a, b, a', b' は全て $\mathfrak{A}$ に属するとする。

注意 2.8.2.

(1)　$a, b \in \mathfrak{A}$　$a \ll b$　なら　$c \in \mathfrak{A}$ が存在して　$a + c \sim b$

(2)　一般に　$a + c \sim b$　なら　$a \ll b$.

(3)　$a \ll b$　$b \in \mathfrak{U}$ ($\mathfrak{A}_f$ 又は $\mathfrak{J}$) なら　$a \in \mathfrak{U}$ ($\mathfrak{A}_f$ 又は $\mathfrak{J}$)

(証明)

(1)　任意の $s < t$　と　$x \in S$ に対し

$$P_x(a(t) - a(s) \leq b(t) - b(s)) = E_x(P_{x_s}(a(t-s) \leq b(t-s))) = 1$$

と　$a(t)$　$b(t)$　の右連続性より全ての　$x \in S$ に対し

$$P_x(a(t) - a(s) \leq b(t) - b(s) \quad \forall s < \forall t \quad a(t) < \infty \quad b(t) < \infty \quad \forall t < \infty) = 1$$

従って　$W' = \{w ; a(t) - a(s) \leq b(t) - b(s) \quad \forall s \leq \forall t \quad a(t) < \infty \quad b(t) < \infty \quad \forall t < \infty\}$

とおくと　$P_x(W') = 1$　$\forall x \in S$.　しかも　$w \in W'$ なら　$w_t^+ \in W'$ であるから　$w \in W'$ の時

$$c(t, w) = b(t, w) - a(t, w) \qquad t < \infty$$

$$c(\infty, w) = \lim_{t \to \infty} c(t, w) \qquad \text{とおき}$$

$w \notin W'$ の時は　$c(t, w) \equiv \infty$　とおけば　$c \in \mathfrak{A}$ で (1) の条件をみたす。

(2) は明かである。

(3) は　$P_x(a(t) - a(s) \leq b(t) - b(s) \quad \forall s < \forall t \quad a(t) < \infty \quad b(t) < \infty \quad \forall t < \infty) = 1$

より $P_x(x(t)-x(t-)\leq b(t)-b(t-)\ \ x(t)<\infty,\ b(t)<\infty\ \ \forall t<\infty)=1\ \ \forall x\in S.$
が出ることからわかる。 (証明終)

$a,\ a^n\ n=1,2,\cdots\in\mathfrak{A}\quad a^1\ll a^2\ll\cdots\ll a^n\ll\cdots$ 且つ全ての $x\in S$ に対し $\lim a^n(t,w)=a(t\ w)\ \forall t\in T^*\ a.s.\ P_x$ が成立する時 $a_n\Uparrow a$ と書く。

a_α に対しても $a_\alpha\ll b_\alpha\quad a^n_\alpha\Uparrow a_\alpha$ を a と同様に定義すれば,

注意 2.8.3.

(1) $a,b\in\mathfrak{A}\quad 0\leq f\in F(S)$ とする時

$a\ll b$ と $a_\alpha\ll b_\alpha$ は同値である。又此の時 $f\cdot a\ll f\cdot b$ が成立する。

(2) $a,a^n\in\mathfrak{A}\quad 0\leq f\in F(S)$ とする時

$a^n\Uparrow a$ と $a^n_\alpha\Uparrow a_\alpha$ は同値である。此の時 $f\cdot a^n\Uparrow f\cdot a$ (従って $(f\cdot a^n)_\alpha\Uparrow(f a)_\alpha$) が成立する。

(3) $a\ b\in\mathfrak{A}\quad a^n\in\mathfrak{A}$ に対し $a^n\ll b\quad a^n\Uparrow a$ なら $a\ll b.$

定理 2.8.4. $a.\ a^n\ n=1,2,\cdots\in\mathfrak{A}\quad a_n\Uparrow a$ とする時任意の $x\in S$ に対し P_x 測度 0 を除き (w を定めると) 収束 $\lim\limits_n a^n(t,w)=a(t,w)$ は $t\in T$ で広義一様収束である。特に $a(\infty.w)<\infty$ な w に対しては上の収束は $t\in T^*$ で一様収束になる。

(証明) 注意 2.8.2.(1)の証明と同様にして

$P_x(a(t)-a_n(t)\geqq a(s)-a_n(s)\ \ \forall s<\forall t\ \ a(t)<\infty\ \ a_n(t)<\infty\ \ \forall t<\infty)=1\ \ \forall n$

従って特に $t<\infty$ に対し $P_x(a(t)-a_n(t)\geqq a(s)-a_n(s)\ \ \forall s\leq t\ \ a(s)<\infty$
$a_n(s)<\infty\ \ \forall s<\infty\ \forall n\quad a_n(t)\uparrow a(t)\ (n\to\infty))=1$

又 $P_x(a(\infty)-a_n(\infty)\geqq a(s)-a_n(s)\ \ \forall s<\infty\ \ \forall n\ a_n(\infty)\uparrow a(\infty)\ (n\to\infty)\ a(\infty)<\infty)$
$=P_x(a(\infty)<\infty)$ が成立することより定理を得る。(証明終)

注意 2.8.5. $a^n_\alpha(t.w)$ の収束に関しても定理 2.8.4 はそのまま云える。

定理 2.8.6. $a^n\in\mathfrak{U}.(\mathfrak{J}.$ 又は $\mathfrak{O}_f)\quad a_n\Uparrow a\in\mathfrak{A}$ ならば $a\in\mathfrak{U}$ ($\mathfrak{J}$ 又は $\mathfrak{O}_f$)

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

(証明) $\mathfrak{M}$ と $\mathcal{Q}$ に対しては，$a^n(t,w)$ の収束の広義一様性から a^n の連続点は a の連続点になることから明か。

了に対しては，da の分布は，da_n $n=1,2,\cdots$ の分布する点を合せた可算ヶの点集合の上にあることからわかる。

lemma 2.8.7. $0 \leq f(x)$ を有限な $\mathbb{F}(S)$ 可測函数とし

$a^n \in \mathfrak{A}_\alpha$ $a^1 \ll a^2 \ll \cdots \ll a^n \ll \cdots$, $U^\alpha_{a^n} = E_x(a^n_\alpha) \leq f(x)$ $\forall x \in S$ とすると，$a \in \mathfrak{A}_\alpha$ が存在して $a^n \Uparrow a$.

(証明) 注意 (2.8.2) の証明と同様に

$W' = \{a^n(t) - a^n(s) \geq a^m(t) - a^m(s)$ $\forall s < \forall t,$ $\forall m < \forall n,$ $a^n(t) < \infty$ $\forall t < \infty$ $\forall n\}$

とおくと $P_x(W') = 1$ $w \in W'$ なら $w_t^+ \in W'$ に注意して

$w \in W'$ の時 $\quad \widehat{a}_\alpha(t\cdot w) = \lim a^n_\alpha(t\cdot w)$

$w \notin W'$ の時 $\quad \widehat{a}_\alpha(t\cdot w) \equiv \infty$

とおけば $\widehat{a}_\alpha$ は単調増加 $E_x(\widehat{a}_\alpha(\infty\cdot w)) = \lim E_x(a^n_\alpha(\infty, w)) \leq b(x)$

特に $\widehat{a}_\alpha(\infty\cdot w) < \infty$ a.s. P_x $\forall x \in S$ を得る。

従って $W'' = W' \cap \{\widehat{a}_\alpha(\infty\cdot w) < \infty\}$ として，

$$a_\alpha(t\cdot w) = \widehat{a}_\alpha(t\cdot w) = \lim a^n_\alpha(t\cdot w) \qquad w \in W''$$

$$a_\alpha(t\cdot w) = \infty \qquad w \notin W''$$

とおくと，$w \in W''$ で $a^n(t\cdot w)$ の収束は一様であるから a_α は α 次の additive functional で右連続．

$$a(t\, w) = \int_0^t e^{\alpha t} da_\alpha(t\cdot w) \qquad w \in W''$$

$$= \infty \qquad w \notin W''$$

として $a \in \mathfrak{A}$ を得る。又 $E_x(a_\alpha(\infty)) = E_x(\widehat{a}_\alpha(\infty)) \leq b(x)$ となる。

定理 2.8.8. $0 \leq f(x)$ を有限な $\mathbb{F}(S)$ 可測函数とし，$\mathfrak{G}$ を次の条件をみたす $\mathfrak{A}_\alpha$ の部分集合とする。

1) $a_n \in \mathfrak{G}$ $a_n \Uparrow a$ $(a \in \mathfrak{A}_\alpha)$ なら $a \in \mathfrak{G}$

2) 全ての $a \in \mathfrak{G}$ $x \in S$ に対し $U^\alpha_a(x) \leq f(x)$.

此の時 $\mathfrak{G}$ は極大元 a_0 を含む。（即ち $a_0 \in \mathfrak{G}$ で

$a \in \mathfrak{G}$ $a_0 \ll a$ なら $a \sim a_0$）

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

(証明) η を $\int f(x)\,d\eta<\infty$ となる reference 測度とする。(註1)

今 $\mathfrak{G}'$ を $\mathfrak{G}$ の任意の線型順序部分集合とし

$K=\sup_{a\in\mathfrak{G}'} E_\eta(a_\alpha(\infty))\leqq\int f(x)\,d\eta<\infty$ とおく。

$a\ll b$ なら $E_\eta(a_\alpha(\infty))\leq E_\eta(b_\alpha(\infty))$ であるから、$\mathfrak{G}$ から

$a'\ll a^2\ll\cdots\ll a^n\ll\cdots$ をえらんで $K=\lim_{n\to\infty}E_\eta(a^n_\alpha(\infty))$ とする事ができる。所が $E_x(a^n_\alpha(\infty))\leq f(x)$ より前の lemma から $\widetilde{a}\in\mathfrak{A}_\alpha$ が存在し $a^n\Uparrow\widetilde{a}$. $\widetilde{a}$ は仮定(1)より $\mathfrak{G}$ に属する。

今任意の $a\in\mathfrak{G}'$ を取る時或る n に対し $a\ll a_n$ ならば $a\leq\widetilde{a}$,
又若し全ての n に対し $a\gg a^n$ なら $a\gg\widetilde{a}$ となるが,

$E_\eta(\widetilde{a}_\alpha(\infty)\leqq E_\eta(a_\alpha(\infty))\leq K$ より $E_\eta(\widetilde{a}_\alpha(\infty))=E_\eta(a_\alpha(\infty))$。

(2.8.2) より $\widetilde{a}+c\sim a$ となる $c\in\mathfrak{A}$ を取ると $E_\eta(c_\alpha(\infty))=0$.
即ち $U^\alpha_c(x)=0$ a.s. U^α_c は excessive だから定理 1.5.2 より

$U^\alpha_c(x)=E_x(c_\alpha(\infty))=0\quad\forall x\in S$ を得る。即ち $c\sim0$ 従って $a\sim\widetilde{a}$.
何れの場合も $a\in\mathfrak{G}'$ なら $a\ll\widetilde{a}$ が云えた。一方 $a\in\mathfrak{G}$ $a\gg b$ $\forall b\in\mathfrak{G}'$ なら $a^n\Uparrow\widetilde{a}\ll a$ であるから $\widetilde{a}=\sup\mathfrak{G}'$ の存在が云えたことになる。従って Zorn の補題を適用し定理を得る。

(証明終)

最後に $a\in\mathfrak{A}$ を $\overline{\mathfrak{A}}_\alpha$ の汎函数で順序 $\ll$ の意味で近似する問題を考えるが、その前に lemma 1.5.6. と類似の lemma を証明する。

lemma 2.8.8. $a\in\mathfrak{A}$ に対して

(1) f を $T^*=[0,\infty]$ 上の有界 Borel 可測函数とすると

$u(x)=E_x(f(a(t)))$ は $\mathbb{B}(S)$ 可測である。

(2) 特に T^* 上の Borel 集合 D に対し

$u(x)=P_x(a(t)\in D)$ は $\mathbb{B}(S)$ 可測になる。

(3) $H=\{x: P_x(a(t)>k)\leqq p\}$ とおくと

$H^{reg}\subset H$.(註2)

(註1) 任意の reference 測度 $\eta\in M^+(S)$ に対し $\eta'(dx)=\frac{\eta(dx)}{1+f(x)}$ とおけば $\int f d\eta'<\infty$ $\eta'\sim\eta$ となる。従って η' は reference 測度である。

(註2) $G=\{x: P_x(a(t+p)\geqq k)\geqq p\}$ とおくと $G^{reg}\subset G$ となる。

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

(証明) (1) f を T上の有界連続函数として証明すれば充分である。

$a(t,w_s^+) = a(t+s) - a(s) \to 0$ $(s\downarrow 0)$ より

$H_s u(x) = E_x(E_{x_s}(f(a(t)))) = E_x(f(a(t,w_s^+))) \to E_x(f(a(t)))$ $s\downarrow 0$.

従って (1.5.4) から $u(x)\in B(S)$ を得る。

(3) $x\in H^{reg}$ とすると、Hに含まれる compact 集合の増加列 K_n が存在して $\sigma_n = \sigma_{K_n} \downarrow 0$ a.s. P_x. 任意の $\varepsilon>0$ に対し $x_{\sigma_n}\in H$ より

$P_x(a(t)>k+\varepsilon,\ a(\sigma_n)<\varepsilon) \leqq P_x(a(t,w_{\sigma_n}^+)+a(\sigma_n)>k+\varepsilon,\ a(\sigma_n)<\varepsilon)$

$\leqq P_x(a(t,w_{\sigma_n}^+)>k) \leqq E_x(P_{x_{\sigma_n}}(a(t)>k)) \leqq p$

$P_x(a(\sigma_n)<\varepsilon)\uparrow 1$ $(n\to\infty)$ より

$P_x(a(t)>k+\varepsilon)\le p$. ε は任意であるから

$P_x(a(t)>k)\le p$ を得る。

定理 2.8.9. 任意の $a\in\mathfrak{A}$ に対して、次の性質を持つ $\{\tilde a^k\}_{k=1,2,\cdots}$ が存在する。

(1) $\tilde a^k \Uparrow a$ (2) 任意の $\alpha>0$ に対し $\tilde a^k\in\tilde{\mathfrak{A}}^\alpha$.

(証明) (i) 今任意に k $\delta>0$ を取り

$H=\{x;\ P_x(a(\delta)>k)\leqq \frac{1}{2}\}$ とおく。前の lemma により $H\in \mathcal{B}(S)$ で $H^{reg}\subset H$ である。

$\tilde a(t) = \int_0^t \chi_H(x_t)\,\chi(a(t)-a(t-)<k)\,da$ とおくと $\tilde a\in\mathfrak{A}$(註)

$\tilde a \ll a$ であるが、任意の $\alpha>0$ に対して $\tilde a\in\tilde{\mathfrak A}^\alpha$ であることを示す。先ず

(8.1) $P_x(\tilde a(\delta)\geqq 2k)\le\frac{1}{2}$ $\forall x\in S$ が成立する。

$\tilde a(t)=0$ $0\le t<\sigma_H$, $\tilde a(t)-\tilde a(t-)\le\chi(a(t)-a(t-)<k)(a(t)-a(t-))<k$

に注意し $\sigma_H>\delta$ の時は $\tilde a(\delta)=0$, $\sigma_H\leqq\delta$ の時は

$\tilde a(\delta)=\tilde a(\sigma_H)-\tilde a(\sigma_H-)+\int_{\sigma_H}^{\delta-\sigma_H} d\tilde a < k+\tilde a(\delta,w_{\sigma_H}^+)$. 即ち何れの時も

$\tilde a(\delta)<k+\tilde a(\delta,w_{\sigma_H}^-)\le k+a(\delta(w_{\sigma_H}^+))$ である。

(註) (A.6)(加法性) は $s>0$ に対し $\chi_H(x_{t+s})=\chi_H(x_s(w_{\sigma_H}^+))$

$a(t+s)-a(t+s-)=a(s,w_t^+)-a(s-,w_t^+)$ より明か。可測性 (A.4) は

$\tilde a(t)=a(t)-\sum_{\substack{s\in Q\\ s\le t}}\chi(a(s)-a(s-)\geqq k)(a(s)-a(s-))$ より lemma 2.2.1 からわかる。

他の性質は自明である。

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

従って $P_x(\tilde{a}(\delta) \geqq 2k) \leqq P_x(a(\delta, w^+_{\sigma_H}) > k) = E_x(P_{x_{\sigma_H}}(a(\delta) > k))$

$H^{reg} \subset H$ より $\sigma_H < \infty$ なら $x_{\sigma_H} \in H$ a.s. P_x ((1.3.4) による.)

即ち $P_x(\tilde{a}(\delta) \geqq 2k) \leqq \frac{1}{2}$ を得る。

(ii) 今 $\sigma = \inf t : \tilde{a}(t) \geqq 2n$ とおくと、σ M.T.

$\{\hat{\sigma}_n\}$ を σ-chain とする。(A.2) より $\lim \hat{\sigma}_n = \infty$ となる。

しかも $\tilde{a}(\hat{\sigma}_1) = \tilde{a}(\hat{\sigma}_1) - \tilde{a}(\hat{\sigma}_1 -) + \tilde{a}(\hat{\sigma}_1 -)$ $0 \leq t < \hat{\sigma}_1 = \sigma$ で

$\tilde{a}(t) \leq 2k$ より $\tilde{a}(\sigma) < 3k$ を得る.

一般に $\tilde{a}(\hat{\sigma}_{n+1}) = \tilde{a}(\hat{\sigma}_n) + \tilde{a}(\sigma(w^+_{\hat{\sigma}_n}), w^+_{\hat{\sigma}_n})$ より $\tilde{a}(\sigma_n) < 3nk$ $n = 1, 2, \cdots$

を得る。此れより $P_x(\tilde{a}(\delta) \leq 3kn) \leq P_x(\sigma_n < \delta)$.

他方 $P_x(\sigma_{n+1} < \delta) \leqq P_x(\sigma(w^+_{\sigma_n}) < \delta, \sigma_n < \delta) = E_x(P_{x_{\sigma_n}}(\sigma < \delta), \sigma_n < \delta)$

(i) より $P_x(\sigma < \delta) \leqq P_x(\tilde{a}(\delta) \geqq 2k) \leq \frac{1}{2}$

従って $P_x(\sigma_{n+1} < \delta) \leq \frac{1}{2} P_x(\sigma_n < \delta) \leq \frac{1}{2^2} P_x(\sigma_{n-1} < \delta) \cdots\cdots$

故に $P_x(\tilde{a}(\delta) \geqq 3kn) \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ を得る。此の事から

$$E_x(\tilde{a}(\delta)) \leqq \sum_n \frac{3k(n+1)}{2^{n-1}} = C$$

$$E_x(\tilde{a}_\alpha(\infty)) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha\delta} E_x(\tilde{a}_\alpha(\delta, w^+_{n\delta})) \leqq \sum_n e^{-n\alpha\delta} E_x(E_{x_{n\delta}}(\tilde{a}(\delta)))$$

$$\leqq \sum_n e^{-n\alpha\delta} C \quad (\text{有界})$$

即ち $\tilde{a} \in \mathfrak{A}_\alpha$ がわかる。

(iii) $P_x(a(\delta) < \infty) = 1$ より $\lim_{k \to \infty} P_x(a(\delta) > k) = 0$

従って $H_k = \{x : P_x(a(\delta) > k) \leq \frac{1}{2}\} \uparrow S$ $(k \to \infty)$. 又

$\chi((a(t) - a(t-)) < k) \uparrow 1$ $(k \uparrow \infty)$ は明かだから.

$$\tilde{a}^k(t) = \int_0^t \chi_{H_k}(x_s)\, \chi(a(s) - a(s-) < k)\, da(s) \Uparrow a(s)$$

を得る。$\tilde{a}^k \in \overline{\mathfrak{A}}^\alpha$ は (i) (ii) で証明した。

注意 2.8.10. $a \in \mathfrak{U}$ ($\mathfrak{F}$ 又は $\mathfrak{J}$) なら定理の $\{\tilde{a}^k\}$ は

$\tilde{a}^k \in \overline{\mathfrak{U}}^\alpha$ ($\overline{\mathfrak{F}}^\alpha$ 又は $\overline{\mathfrak{J}}^\alpha$) になっている。

(証明) $\tilde{a}^k \ll a$ より (2.8.2.(3)) から明か.

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

3章 excessive function の表現

3.1 class D の excessive function

$\{G_n\}$ を (1) 開集合の増大列で (2) $\bar{G}_n$ は compact (3) $\bar{G}_n \subset G_{n+1}$ (4) $G_n \uparrow S\ (n\to\infty)$ とする時

$$(3.1)\qquad \pi_n = n \wedge \sigma_{G_n^c} \wedge \zeta$$

とおく。

$\{\pi_n\}$ はマルコフ時間の増大列であるが

注意 3.1.1. (1) $P_x(\lim_{v\to\infty}\pi_n = \zeta) = 1 \quad \forall x \in S$

(2) $\{G_n'\}$ を (1), (2), (3), (4) をみたす集合列 π_n' を此れから (3.1) で定義されマルコフ時間の列とすると, 任意の n_0 に対し n_1 が定まって $P_x(\pi_{n_1}' < \pi_{n_0}) = 0 \quad \forall x \in S$.

(3) $\{\sigma_n\}$ をマルコフ時間の増大列で $\lim \sigma_n \geqq \zeta$ とすると任意の n_0 に対し

$$\lim_n P_x\{\sigma_n < \pi_{n_0}\} = P_x\{\sigma_n < \pi_{n_0}\ \forall n\} = 0$$

(証明) (1) $\lim \pi_n = \zeta' < \zeta$ とすれば $\zeta' = \lim \sigma_{G_n^c}$ 所が (P.6) より

$$x_{\zeta'} = \lim x_{\sigma_{G_n^c}} = \partial \quad a.s.\ P_x$$

即ち $P_x(\zeta' < \zeta) = P_x(\zeta' < \zeta\ \ x_{\zeta'} = \partial) = 0$.

(2) $\bar{G}_{n_0}$ compact だから n_1 が存在して $G_{n_1}' \supset G_{n_0}$ となることから明か。($\pi_{n_1}' \geqq \pi_{n_0}\ \forall w$ となる。)

(3) $w \in \{\sigma_n < \pi_{n_0}\ \forall n\}$ の時 $\lim \sigma_n \geqq \zeta$ より $\pi_{n_0} < \zeta$ ではあり得ない。$\zeta = \pi_{n_0} \leq n_0 < \infty$ の時は $\sigma_n < \pi_{n_0} \leq \sigma_{G_{n_0}^c}$

$\lim x_{\sigma_n} \in \bar{G}_{n_0}$, 一方 (P.6) より $\lim x_{\sigma_n} = \partial$ a.s. P_x を得る。

定義 α-excessive function u が, $\lim H_{\pi_n}^{\alpha} u = 0$ である時 u を (α 次の) potential という。(註)

注意 3.1.2. (1) 此の定義は $\{G_n\}$ のえらび方に無関係である。

(2) u, v α-excessive $u \geqq v$ 且つ u が patential なら v も patential。

(註) 此の定義は Meyer [26] と少し異る。 しかし class D の中では一致する。

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

(証明) (1)は(3.1.1), (2)から(1.4.7)を用いるとわかる。

定義 uをα-excessiveとする。今$\{\sigma_n\}$を任意のマルコフ時間の列とする時全ての$x\in S$に対し$e^{-\alpha\sigma_n}u(x_{\sigma_n})$が($n$について)$P_x$一様可積分の時, uをD^αに属するという。($D^0=D$と書く)。

注意 3.1.3 (1) $u\in D^\alpha$ならuは有限

(2) uが有界なα-excessiveなら$u\in D^\alpha$

(3) u, v α-excessive $u\geqq v$ $u\in D^\alpha$なら$v\in D^\alpha$.

(証明) (1) $u(x_0)$の可積分からわかる。

定理 3.1.4. uをα-excessiveとする。次の条件は同値である。

(1) $u\in D^\alpha$

(2) $\int u\,d\mu<\infty$な$\mu\in M^+(S)$と任意のマルコフ時間の列$\{\sigma_n\}$に対し$e^{-\alpha\sigma_n}u(x_{\sigma_n})$は$P_\mu$一様可積分.

(3) $\rho_N=\inf t: u(x_t)>N$とおくと$\lim H^\alpha_{\rho_n}u=0$. ($\alpha=0$の時は$\rho_N=\sigma_{G_N}$ $G_N=\{x: u(x)>N\}$である.)

(証明) $\int u\,d\mu<\infty$となる$\mu\in M^+(S)$に対し, $-e^{-\alpha t}u(x_t)$, P_μがsemi-martingaleであることから[53] (P.353 定理3.2)を用いて(註)

$P_\mu(\sup_t e^{-\alpha t}u(x_t)\geqq N)\leq\frac{1}{N}E_\mu(u(x_0))=\frac{1}{N}\int u\,d\mu$. 従って$w$を定めると$P_\mu$測度0を除いて$\rho_N=\infty$ $N\geqq N_0(w)$が一般に云える。特に$\lim_{N\to\infty}u(x_{\rho_N})=0$ a.s. P_μ.

(1) ⟹ (3) $u\in D$なら$e^{-\alpha\rho_N}u(x_{\rho_N})$は$P_x$一様可積分.

従って $\lim_n H^\alpha_{\rho_N}u(x)=E_x(\lim_N e^{-\alpha\rho_N}u(x_{\rho_N}))=0$.

(3) ⟹ (2) $\int u\,d\mu<\infty$なμに対し, $g_N(x)=E_x(e^{-\alpha\rho_N}u(x_{\rho_N}))\leq u(x)$

$\lim_N g_N(x)=0$より$E_\mu(e^{-\alpha\rho_N}u(x_{\rho_N}))\to 0$ $(N\to\infty)$がわかる. 今$\{\sigma_n\}$を任意のマルコフ時間の列とする $\tilde\sigma_n=\rho_N\vee\sigma_n$とおくと$\sigma_n<\tilde\sigma_n$なら$e^{-\alpha\sigma_n}u(x_{\sigma_n})<N$より

(註) [53] P.353 定理3.2の第二式を適用すると,

$NP_\mu\{\sup_{0\leq t\leq T}e^{-\alpha t}u(x_t)\geqq N\}\leqq\sup_{0\leq t\leq T}E_\mu(e^{-\alpha t}u(x_t))-\int\{\sup e^{-\alpha t}u(x_t)<N\}$
$e^{-\alpha T}u(x_T)\,dP_\mu$. $\leqq E_\mu(u(x_0))$.

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

$$E_\mu\{ e^{-\alpha\sigma_n}u(x_{\sigma_n}) : e^{-\alpha\sigma_n}u(x_{\sigma_n}) > N\}$$
$$= E_\mu\{ e^{-\alpha\tilde{\sigma}_n}u(x_{\tilde{\sigma}_n}) : e^{-\alpha\sigma_n}u(x_{\sigma_n}) > N\} \leqq E_\mu\{ e^{-\alpha\rho_N}u(x_{\rho_N})\} \to 0. \ (N\to\infty).$$

(2) ⇒ (1) は明かである。

例 1.1. 円周内の吸収壁二次元 Brown 運動で

i) Green 函数は potential であるが D でない。

ii) 有界調和函数は（恒等的に 0 でなければ）D に属するが potential でない。

iii) minimal な調和函数は D でも potential でもない。

例 1.2. 全平面 Brown 運動で 1 は 0-potential でないが α次 excessive function としては potential.

定義 class D^α に属し且つ potential である α-excessive function を D^α_p であらわす。

定理 3.1.5. α-excessive function u に対し次の条件は同値である。

1) $u \in D^\alpha_p$

2) $u \in D$ 且つ $\lim_n e^{-\alpha\pi_n}u(x_{\pi_n}) = 0$ a.s. P_x $\forall x\in S$

3) 任意の $x\in S$ と $\sigma_n \in$ M.T $\sigma_n\uparrow \lim \sigma_n \geqq \zeta$ に対し $\lim H^\alpha_{\sigma_n}u(x) = 0$

但し π_n は此の節の始めに定義したマルコフ時間の列である。

(証明) (1) ⇒ (3)

定った n_0 に対し $\tilde{\sigma}_n = \pi_{n_0} \cup \sigma_n$ とおく。

$$H^\alpha_{\sigma_n}u(x) = E_x(e^{-\alpha\sigma_n}u(x_{\sigma_n}) ; \sigma_n \geqq \pi_{n_0}) + E_x(e^{-\alpha\sigma_n}u(x_{\sigma_n}) ; \sigma_n < \pi_{n_0}).$$

(1.3.1) (3) より $P_x(\sigma_n < \pi_{n_0}) \downarrow 0$ $e^{-\alpha\sigma_n}u(x_{\sigma_n})$ の P_x 一様可積分性から

$E_x(e^{-\alpha\sigma_n}u(x_{\sigma_n}) ; \sigma_n < \pi_{n_0}) \to 0 \quad (n\to\infty)$ を得る。一方

$$E_x(e^{-\alpha\sigma_n}u(x_{\sigma_n}) ; \sigma_n \geqq \pi_{n_0}) = E_x(e^{-\alpha\tilde{\sigma}_n}u(x_{\tilde{\sigma}_n}) ; \sigma_{n_0} \geqq \pi_{n_0}) \leqq H^\alpha_{\pi_n}u(x)$$

従って $\overline{\lim}_{n\to\infty} H^\alpha_{\sigma_n}u(x) \leqq H^\alpha_{\pi_{n_0}}u(x)$ 次に $n_0\to\infty$ とすれば (3) を得る。

(3) ⇒ (2) 定理 3.1.4. の ρ_N に対し $H^\alpha_{\rho_N}u(x) \to 0 \ (N\to\infty)$ がわかるから $u\in D$. $\lim e^{-\alpha\pi_n}u(x_{\pi_n})$ が存在することに注意し Fatou の定理から $E_x(\lim e^{-\alpha\pi_n}u(x_{\pi_n})) \leqq \lim H^\alpha_{\pi_n}u(x) = 0$

(2) ⇒ (1) $u\in D$ より $e^{-\alpha\pi_n}u(x_{\pi_n})$ は P_x 一様可積分。

従って $H^\alpha_{\pi_n}u(x) = E_x(\lim e^{-\alpha\pi_n}u(x_{\pi_n})) = 0$ 即ち u が potential もわか

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

る。

定義 α excessive function u が任意の $x\in S$ とマルコフ時間の増大列 $\{\sigma_n\}$ $\sigma_n\uparrow\sigma$ に対して $\lim e^{-\alpha\sigma_n}u(x_{\sigma_n})=e^{-\alpha\sigma}u(x_\sigma)$ a.s. P_x である時 u を正則であるという。(註)

注意 3.1.6. (1.4.7) より一般には $e^{-\alpha\sigma_n}u(x_{\sigma_n})\geqq e^{-\alpha\sigma}u(x_\sigma)$ a.s. P_x $\forall x\in S$ が成立している。

定義 正則且つ D^α に属する α-excessive function の全体を D^α_R であらわす。

定理 3.1.7. 次の条件は同値である。

(1) $u\in D_R$ (2) 任意の $x\in S$ とマルコフ時間の増大列 $\{\sigma_n\}$ $\sigma_n\uparrow\sigma$ に対し $H^\alpha_{\sigma_n}u\downarrow H^\alpha_\sigma u$.

(証明) (1) => (2) は $e^{-\alpha\sigma_n}u(x_{\sigma_n})$ の一様可積分性と正則性から明か。

(2) => (1) は特に $\sigma_N=\rho_N$ (ρ_N は定理3.1.4) とおけば $\lim\rho_N=\infty$ より $H^\alpha_{\rho_N}u=H^\alpha_\infty u\equiv 0$. 即ち $u\in D^\alpha$.

又 $\lim e^{-\alpha\sigma_n}u(x_{\sigma_n})\geqq e^{-\alpha\sigma}u(x_\sigma)$ に注意して

$$E_x(\lim e^{-\alpha\sigma_n}u(x_{\sigma_n})-e^{-\alpha\sigma}u(x_\sigma))\leq\lim H^\alpha_{\sigma_n}u(x)-H^\alpha_\sigma u(x)=0$$

より u の正則性がわかる。(証明終)

注意 3.1.8. $D^\alpha_R\subset D^\alpha_P$

(証明) $u\in D^\alpha_R$ なら定理 3.1.7 (2) で $\sigma_n=\pi_n$ とおいて

$\lim H^\alpha_{\pi_n}u(x)=H^\alpha_\zeta u(x)=0$ よって u は potential である。

定理 3.1.9. (1) $a\in\mathfrak{A}^\alpha$ なら $U^\alpha_a\in D^\alpha_P$

(2) $a\in\mathfrak{B}^\alpha$ なら $U^\alpha_a\in D^\alpha_R$

(証明) (1) σ_n をマルコフ時間の増加列で $\lim\sigma_n\geqq\zeta$ とすると

$a_\alpha(\sigma_n)\uparrow a(\zeta-)=a(\infty)$ であるから

$$H^\alpha_{\sigma_n}U^\alpha_a(x)=E_x(e^{-\alpha\sigma_n}a_\alpha(\infty,w^+_{\sigma_n}))=E_x(a_\alpha(\infty))-E_x(a_\alpha(\sigma_n))\downarrow 0\quad(n\to\infty)$$

従って定理3.1.5により $u\in D^\alpha_P$ がわかる。

(2) $\{\sigma_n\}$ をマルコフ時間の増加列 $\sigma_n\uparrow\sigma$ とする。

(註) $\sigma<\infty$ ところでは正則の条件は単に $\lim u(x_{\sigma_n})=u(x_\sigma)$ としても同じである。

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

定理2.2.5より a は擬左連続だから $a_\alpha(\sigma_n)\uparrow a(\sigma)$ a.s. P_x $(x\in S)$.
(1)と同様にして $H^\alpha_{\sigma_n}U^\alpha_a(x)=E_x(a_\alpha(\infty))-E_x(a_\alpha(\sigma_n))\downarrow E_x(a_\alpha(\infty))-E_x(a(\sigma))$
$=H^\alpha_\sigma U^\alpha_a(x)$

定理3.1.7から $u\in D^\alpha_R$. （証明終）

此の定理の逆即ち D^α_p の元は常に $a\in \mathfrak{A}_\alpha$（実は $\mathfrak{N}_\alpha$）の元の α 次 potential であることを示すのが此の章の主な目標である。最後に次の定義をあげておく。

定義 α-excessive function u が有界で 収束 $\lim_{t\downarrow 0}H^\alpha_t u(x)=u(x)$ (註) が x について一様である時 u を uniformly excessive という。

uniformly excessive 且つ potential である α-excessive function の全体を $\overline{D}_p$ であらわす。

3.2. excessive function の強順序

定義 α-excessive function $u.v$ に対して
$u-v$ も α excessive の時 $u\gg v$ と書く.

注意3.2.1. $u\gg v$ なら $u\geqq v$ 且つ $u\gg u-v$

注意3.2.2. $u.v$ α excessive $u\gg v$ とする.

(1) u : potential（又は class D）なら v potential（又は class D）

(2) u が正則ならば v も正則。

(証明) (1)は（3.1.2）（3.1.3）より明か。

(2) $u=v+v'$ v' α excessive と書けるが $\{\sigma_n\}$ を任意のマルコフ時间の増大列 $\sigma_n\uparrow\sigma$ とすると u が正則なら
$e^{-\alpha\sigma}u(x_\sigma)=\lim e^{-\alpha\sigma_n}u(x_{\sigma_n})=\lim e^{-\alpha\sigma_n}v(x_{\sigma_n})+\lim e^{-\alpha\sigma_n}v'(x_{\sigma_n})$,
一方（1.4.7）から $\lim e^{-\alpha\sigma_n}v(x_{\sigma_n})\geqq e^{-\alpha\sigma}v(x_\sigma)$ $\lim e^{-\alpha\sigma_n}v'(x_{\sigma_n})\geqq e^{-\alpha\sigma}v'(x_\sigma)$ であるから各々に対して等号が成立しなければならない。（証明終）

(註) $u(x)-H^\alpha_t u(x)=u(x)-H_t u(x)+(1-e^{-\alpha t})H_t u(x)$ より定義の条件は $\lim H_t u=u$ が一様収束といっても同じである。

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

定義 α-excessive function の列 $\{u_n\}$ が $u_1 \ll u_2 \ll \cdots \ll u_n \ll \cdots$ の時 $\{u_n\}$ を強増加列ということにする。

此の場合 $\{u_n\}$ は普通の増加列で $\lim u_n = u$ が存在するが，この時 $u_n \Uparrow u$ と書く。

lemma 3.2.3. v を有限な α-excessive function $\{u_n\}$ を α-excessive function の普通の意味の増加列で $u_n \ll v$ とする。今 $u_n \uparrow u$ なら $u \ll v$ である。

(証明) $w_n = v - u_n$ とおくとこれは α-excessive である. $w_n \downarrow w = v - u$ であるが, $H_t^\alpha w_n \le w_n$, $w_n \le v$ v は H_t^α 可積分より $H_t^\alpha w \le w$ を得る. $\lim_{t\downarrow 0} H_t^\alpha w = \lim H_t^\alpha v - \lim H_t^\alpha u = w$ 従って w は α-excessive 即ち $v \gg u$. (証明終).

注意 3.2.4. (1) $a, b \in \mathfrak{A}^\alpha$ $a \ll b$ なら $U_a^\alpha \ll U_b^\alpha$

(2) $a, a^n \in \mathfrak{A}^\alpha$ $a^n \Uparrow a$ なら $U_{a^n}^\alpha \Uparrow U_a^\alpha$

(証明) (1) (2.8.2.) より $c \in \mathfrak{A}_\alpha$ が存在し $b \sim c + a$ 故に $U_b^\alpha = U_c^\alpha + U_a^\alpha$ となる。

(2) $a^n(\infty) \uparrow a(\infty)$ a.s. P_x $\forall x \in S$ より明か。

定理 3.2.5. $a^n \in \mathfrak{A}^\alpha$ $a^n \Uparrow$, u を有限 α-excessive とし $U_{a^n}^\alpha \Uparrow u$ とする。この時 $a \in \mathfrak{A}^\alpha$ が存在して $a_n \Uparrow a$ 且つ $u = U_a^\alpha$.

(証明) $U_{a_n}^\alpha(x) \le u(x) < \infty$ であるから lemma 2.8.7 より $a \in \mathfrak{A}_\alpha$ が存在して $a_n \Uparrow a$ $u = \lim U_{a_n}^\alpha = U_a^\alpha$. (証明終)

lemma 3.2.6. u を有限な α-excessive function とする。

$\mathfrak{h}_\mathcal{L} = \{a : a \in \mathcal{L}^\alpha \ U_a^\alpha \ll u\}$ とおくと $\mathfrak{h}_\mathcal{L}$ は極大元を持つ。その代りに $\mathfrak{N}_0, \mathfrak{F}_0, \mathfrak{N}, \mathfrak{F}, \mathfrak{J}\mathfrak{A}$ でおきかえても lemma は全く同様に成立する。

(証明) 例えば $\mathfrak{h}_\mathcal{L}$ が lemma 2.8.8. の条件をみたすことを示せばよい。 $a \in \mathfrak{h}_\mathcal{L}$ なら $U_a^\alpha(x) \le u(x) < \infty$ 又 $a^n \in \mathfrak{h}_\mathcal{L}$ $a^n \Uparrow$ なら $v(x) = \lim U_{a^n}^\alpha(x)$ とおくと，前定理から $a \in \mathfrak{A}^\alpha$ $a^n \Uparrow a$ で $U_a^\alpha(x) = v(x)$ となる a が存

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

在する。$a^n \Uparrow a$ $a \in \mathcal{L}$ より $a \in \mathcal{L} \cap \mathfrak{A}^\alpha = \mathcal{L}^\alpha$. 又 lemma 3.2.3. より $\mathbb{U}_a^\alpha(x) = v(x) \ll u(x)$ 即ち $a \in \mathfrak{h}_{\mathcal{L}}$. （証明終）

3.3. Class D_R と $\mathcal{L}$

次の定理は Sem. on Prob. vol. 6 [18]（P.7 定理2.1）に証明されている。

定理 3.3.1. $u \in \overline{D}_p^\alpha$（uniformly α-excessive 且つ potential）なら $a \in \mathcal{L}^\alpha$ が存在して $u = \mathbb{U}_a^\alpha$.

注意 3.3.2. $\overline{D}_p \subset D_R$ である。

（証明）上の定理と定理 3.1.9. を組み合せるとよい。(註)

u を有限な α-excessive とし $f \in C_\infty(S)$ に対し $C = \{\sigma_n\}$ を f-ε chain を考え

(3.1) $$W_x(C.f) = E_x\left(\sum_{n=0}^{\infty} f(x_{\sigma_n}) E_x(e^{-\alpha\sigma_n} u(x_{\sigma_n}) - e^{-\alpha\sigma_{n+1}} u(x_{\sigma_{n+1}}) \mid \mathcal{F}_{\sigma_n})\right)$$

とおく。

lemma 3.3.3. $u \in D_p^\alpha$ に対し全ての $x \in S$ と $B \in \mathbb{F}(S)$ に対し

$$W(x, B) \equiv W_u(x, B)$$ が定り

1) $W(\cdot, B)$ は $\mathbb{F}(S)$ 可測. $W(x, \cdot) \in M^+(S)$

2) $f \in F(S)$ に対し $W(x.f) = \int f(y) W(x.dy)$ とおくと、
$f \in C_\infty(S)$ なら任意の f-ε chain $C = \{\sigma_n\}$ に対し
$$|W_x(C.f) - W(x.f)| \leq \varepsilon u(x)$$

3) $W(x.1) \equiv u(x)$

4) $f \geqq 0$ $f \in F(S)$ の時 $W(x.f)$ は α-excessive で
$f, g \in F(S)$ $f \leqq g$ なら $W(x.f) \ll W(x.g)$

5) G を開集合とすると $H_G^\alpha W(x.\chi_G) = W(x.\chi_G)$

6) $a \in \mathfrak{A}^\alpha$ に対し $u = \mathbb{U}_a^\alpha$ の時は $f \in F(S)$ に対し $\mathbb{U}_a^\alpha f = W_u(x.f)$.

（証明）(i) $f \in C_\infty(S)$ $C = \{\sigma_n\}$ を f-ε chain とする。

lemma 1.4.7 より $E_x(e^{-\alpha\sigma_n} u(x_{\sigma_n}) - e^{-\alpha\sigma_{n+1}} u(x_{\sigma_{n+1}}) \mid \mathcal{F}_{\sigma_n}) \geqq 0$

(註) この事実は直接にも簡単に証明できる。

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

であるから, $f \geqq 0$ なら $W_x(C, f) \geqq 0$.

又 $W_x(C, f) \leqq \|f\| (\sum_n (H^\alpha_{\sigma_n} u(x) - H^\alpha_{\sigma_{n+1}} u(x)) \leqq \|f\| u(x)$

(ii) $C = \{\sigma_n\}$ を $f-\varepsilon$ chain $C' = \{\sigma_n'\}$ を $f - \varepsilon'$ chain とする時

$C \vee C' = \{\tilde{\sigma}_n\}$ は $f - \varepsilon \cap \varepsilon'$ chain であるが (lemma 2.3.4 参照)

今 w を定めて

$\sigma_k = \tilde{\sigma}_{n_k} < \tilde{\sigma}_{n_k+1} < \cdots < \tilde{\sigma}_{n_{k+1}} = \sigma_{k+1}$ とすると $\sigma_k \leq t < \sigma_{k+1}$ で

$|f(x_t) - f(x_{\sigma_k})| \leq \varepsilon$ より

$$\Big|\sum_{l=n_k}^{n_{k+1}-1} f(x_{\tilde{\sigma}_l}) E_x(u(x_{\tilde{\sigma}_l}) e^{-\alpha \tilde{\sigma}_l} - u(x_{\tilde{\sigma}_{l+1}}) e^{-\alpha \tilde{\sigma}_{l+1}} | \mathcal{F}_{\tilde{\sigma}_l})$$

$$- f(x_{\sigma_k}) \sum_{l=n_k}^{n_{k+1}} E_x(u(x_{\tilde{\sigma}_l}) e^{-\alpha \tilde{\sigma}_l} - u(x_{\tilde{\sigma}_{l+1}}) e^{-\alpha \tilde{\sigma}_{l+1}} | \mathcal{F}_{\tilde{\sigma}_l})$$

$$\leqq \varepsilon \sum E_x(u(x_{\tilde{\sigma}_l}) e^{-\alpha \tilde{\sigma}_l} - u(x_{\tilde{\sigma}_{l+1}}) e^{-\alpha \tilde{\sigma}_{l+1}} | \mathcal{F}_{\tilde{\sigma}_l})$$

他方 $E_x\{f(x_{\sigma_k}) \sum_{l=n_k}^{n_{k+1}} u(x_{\tilde{\sigma}_l}) e^{-\alpha \tilde{\sigma}_l} - u(x_{\tilde{\sigma}_{l+1}}) e^{-\alpha \tilde{\sigma}_{l+1}}) | \mathcal{F}_{\tilde{\sigma}_l}) | \mathcal{F}_{\sigma_k}\}$

$$= f(x_{\sigma_k}) E_x(\sum_{\sigma_k \leq \tilde{\sigma}_l < \sigma_{k+1}} u(x_{\tilde{\sigma}_l}) e^{-\alpha \tilde{\sigma}_l} - u(x_{\tilde{\sigma}_{l+1}}) e^{-\alpha \tilde{\sigma}_{l+1}} | \mathcal{F}_{\sigma_k})$$

$$= f(x_{\sigma_k}) E_x(u(x_{\sigma_k}) e^{-\alpha \sigma_k} - u(x_{\sigma_{k+1}}) e^{-\alpha \sigma_{k+1}} | \mathcal{F}_{\sigma_k})$$

であることより

$|W_x(C, f) - W_x(C \vee C', f)| \leq \varepsilon u(x)$ を得る. 同様に

$|W_x(C', f) - W_x(C \vee C', f)| \leq \varepsilon' u(x)$. 即ち

$|W_x(C, f) - W_x(C', f)| \leqq (\varepsilon + \varepsilon') u(x)$.

(iii) $f \in C_\infty$ に対し (ii) から $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} W_x(C, f) = W(x, f)$ の存在がわかるが任意の $f - \varepsilon$ chain C に対し

$|W_x(C, f) - W(x, f)| \leqq \lim_{\varepsilon' \downarrow 0} |W_x(C, f) - W_x(C^{\varepsilon'}, f)| \leqq \varepsilon u(x)$

である. 又 (i) より

$0 \leq f \in C_\infty(S)$ なら $W(x, f) \geqq 0$, 一般の $f \in C_\infty(S)$ に対し

$|W(x, f)| \leqq \|f\| u(x)$ がわかる。

更に任意の $f, g \in C_\infty(S)$ に対し C を $f - \varepsilon$ chain C' を $g - \varepsilon$ chain とすれば, $C \vee C'$ は $f - \varepsilon$ chain であると同時に $g - \varepsilon$ chain 且つ $(f+g) - 2\varepsilon$ chain で $W_x(C \vee C', f+g) = W_x(C \vee C', f) + W_x(C \vee C', g)$ であることより $W(x, f+g) = W(x, f) + W(x, g)$ を得る。同様任意の実数 k に対し C が $kf - |k|\varepsilon$ chain であることに注意すると

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

$W(x, kf) = kW(x, f)$.

以上まとめて、$f, g \in C_\infty(S)$ に対し

$f \geqq 0$ なら $W(x, f) \geqq 0$

$|W(x, f)| \leq \|f\| u(x)$

$W(x, f+g) = W(x, f) + W(x, g)$, $W(x, kf) = kW(x, f)$

このことから lemma (1) の条件をみたす

$W(x, \cdot) \in M^+(S)$ が定って $f \in C_\infty(S)$ に対し

$W(x, f) = \int W(x, dy) f(y)$ と表現される。

一般の $f \in F(S)$ に対しても

$W(x, f) = \int W(x, dy) f(y)$ と定義することにする。

(iv) $\{G_m\}\{\pi_m\}$ を §3.1 の始めに定義した開集合及びマルコフ時間の増大列とする。今 $0 \leqq f_n \in C_\infty(S)$ $f_n \uparrow 1$ とすると、(m を定めて) f_n は compact 集合 $\overline{G}_m$ 上で一様収束している。即ち $\varepsilon > 0$ に対し n を充分大きくとれ $0 \leq t < \pi_m$ で $1 - f_n(x_t) \leq \varepsilon$ とできる C を任意の $f_n - \varepsilon$ chain $C' = C \cup \pi_m = \{\hat{\sigma}_n\}$ とおく。

$$(u(x) - W_x(C', f_n)) \leqq E_x\Big(\sum_{\hat{\sigma}_n < \pi_m} \varepsilon E_x(u(x_{\hat{\sigma}_n}) e^{-\alpha\hat{\sigma}_n} - u(x_{\hat{\sigma}_{n+1}}) e^{-\alpha\hat{\sigma}_{n+1}} \mid \mathcal{F}_{\hat{\sigma}_n})\Big) + H^\alpha_{\pi_m} u(x)$$

$$\leq \varepsilon u(x) + H^\alpha_{\pi_m} u(x)$$

従って $u(x) - W(x, f_n) \leqq 2\varepsilon u(x) + H^\alpha_{\pi_m} u(x)$

を得る。$W(x, f_n) \uparrow W(x, 1) \leq u(x)$ であるから、上式で $n \to \infty$ とすると

$$u(x) - W(x, 1) \leq 2\varepsilon u(x) - H^\alpha_{\pi_m} u(x)$$

ε m は任意で(u は potential だから)$\lim_{m \to \infty} H^\alpha_{\pi_m} u = 0$

従って $u(x) = W(x, 1)$ を得る。

(v) $f \in C_\infty(S)$ に対し $\sigma \in$ M.T. を σ-chain $\{\hat{\sigma}_n\}$ が $f - \varepsilon$ chain になるようにとる。(lemma 2.3.1. 証明参照) 今 $t > 0$ に対し $\rho_n = \sigma_n$ ($\sigma_n < t$ の時) $\rho_n = t + \sigma_{n-k}(w_t^+)$ ($\sigma_n \geqq t$ $\sigma_k \geq t > \sigma_{k-1}$ の時) とおくと $C' = \{\rho_n\}$ は $f - \varepsilon$ chain である(注)

(註) $\{\rho_n < s\} = \{\sigma_n < t \wedge s\} \cup \bigcup_{k \leq n} \{\sigma_{k-1} < t \leq \sigma_k\}\{t + \sigma_{n-k}(w_t^+) < s\} \in \mathcal{F}_t$

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

$$E_x(e^{-\alpha\hat{\sigma}_n}u(x_{\hat{\sigma}_n})-e^{-\alpha\hat{\sigma}_{n+1}}u(x_{\hat{\sigma}_{n+1}})\mid\mathcal{F}_{\hat{\sigma}_n})$$
$$= e^{-\alpha\hat{\sigma}_n}(u(x_{\hat{\sigma}_n})-H_\sigma^\alpha u(x_{\hat{\sigma}_n}))$$ に注意し

$$H_t^\alpha W_t(C,f)=E_x(e^{-\alpha t}\sum_n f(x_{\hat{\sigma}_n(w_t^+)}(w_t^+))e^{-\alpha\hat{\sigma}_n(w_t^+)}(u(x_{\hat{\sigma}_n(w_t^+)}(w_t^+))-H_\sigma^\alpha u(x_{\hat{\sigma}_n(w_t^+)}(w_t^+)))$$
$$=E_x(\sum_{\rho_n\geq t} f(x_{\rho_n})e^{-\alpha\rho_n}(u(x_{\rho_n})-H_\sigma^\alpha u(x_{\rho_n})))$$
$$\leqq W_x(C,f)$$

$\varepsilon\downarrow 0$ として $H_t W(x,f)\leq W(x,f)$ を得る。
$0\leqq f\in C(S)$ に対しても $0\leqq f_n\in C_\infty(S)$ $f_n\uparrow f$ として
$$H_t^\alpha W(x,f)\leq W(x,f)$$ を得る。

一方 $W(x,f)+W(x,\|f\|-f)=\|f\|W(x,1)=\|f\|u(x)$

$$\lim_{t\downarrow 0} H_t W(x,f)\leqq W(x,f) \quad \lim_{t\downarrow 0} H_t W(x,\|f\|-f)\leq W(x,\|f\|-f)$$
$$\lim_{t\downarrow 0}(H_t^\alpha W(x,f)+H_t^\alpha W(x,\|f\|-f))=\lim_{t\downarrow 0}\|f\|H_t^\alpha u(x)=\|f\|u(x)$$
$$=W(x,f)+W(x,\|f\|-f)$$

より $\lim H_t W(x,f)=W(x,f)$ を得る。
即ち $0\leq f\in C(S)$ に対し $W(x,f)$ は α-excessive で $W(\cdot,f)\ll\|f\|u$

(vi) G が開集合の時は，$f_n\in C(S)$ $f_n\uparrow\chi_G$ とすると $W(x,f_n)\uparrow W(x,\chi_G)$ となり $W(x,\chi_G)$ は excessive である．次に任意の $E\in\mathbb{F}(S)$ に対しては，x を定めると測度の一般性質より $G\supset E$ が存在して，$W(x,\chi_G)<W(x,\chi_E)+\varepsilon$ とできる．

従って，$H_t^\alpha W(x,\chi_E)\leq H_t^\alpha W(x,\chi_G)\leq W(x,\chi_G)\leq W(x,\chi_E)+\varepsilon$，$\varepsilon$ は任意であるから $H_t^\alpha W(x,\chi_E)\leqq W(x,\chi_E)$ を得る。
同様 $H_t^\alpha W(x,\chi_{E^c})\leq W(x,\chi_{E^c})$ を $W(x,\chi_E)+W(x,\chi_E^c)=W(x,1)=u(x)$ は excessive であるから (v) と同様 $W(x,E)$ も excessive になる。
特に $W(x,E)\ll u(x)$ である．これから $f\in\mathbb{F}(S)$ に対し $W(x,f)$ も excessive になる。

(vii) (5) の証明 G を開集合とし $f\in C_0(S)$ $[f]\subset G$ とする．$\sigma\in$ M.T. を σ-chain $\{\hat{\sigma}_n\}$ が f-ε chain になるようにとり，$\tau=\sigma_G$ に対して

$\rho_n=\hat{\sigma}_n$ $\qquad\qquad$ $\hat{\sigma}_n<\tau$ の時
$\rho_n=\tau+\hat{\sigma}_{n-k}(w_\tau^+)$ $\qquad$ $\hat{\sigma}_n\geq\tau$ $\hat{\sigma}_k\geq\tau>\sigma_{k-1}$ の時

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

とおくと $C' = \{\rho_n\}$ はやはり $f-\varepsilon$ *chain* で (V) と同様にして

$$H_\tau^\alpha W_x(C, f) = E_x\{\sum_{\rho_n \geq \tau} f(x_{\rho_n}) E_x(e^{-\alpha\rho_n} u(x_{\rho_n}) - e^{-\alpha\rho_{n+1}} u(x_{\rho_{n+1}}) \mid \mathcal{F}_{\rho_n})\}$$

を得る。一方 $0 \leq t < \tau$ で $x_t \notin G$ 従って $f(x_t) = 0$.

従って $H_G^\alpha W_x(C, f) = H_\tau^\alpha W_x(C', f)$.

$\varepsilon \downarrow 0$ とし $H_G^\alpha W(x, f) = W(x, f)$ を得る。

次に $0 \leq f_n \in C_0(S)$ $f_n \uparrow \chi_G$ となる $\{f_n\}$ をえらべば

$W(x, f_n) \uparrow W(x, \chi_G)$ より

$$H_G^\alpha(W(x, \chi_G)) = W(x, \chi_G)$$ を得る。

(viii) 最後に (5) は任意の $\sigma \in$ M.T. に対し、$a \in \mathfrak{A}^\alpha$ の時

$$e^{-\alpha\sigma} U_a^\alpha(x_\sigma) = e^{-\alpha\sigma} E_{x_\sigma}(a_\alpha(\infty)) = E_x(e^{-\alpha\sigma} a_\alpha(\infty, w_\sigma^+) \mid \mathcal{F}_\sigma)$$

$$= E_x(a_\alpha(\infty) - a_\alpha(\sigma) \mid \mathcal{F}_\sigma)$$

が成立している。

今 $f \in C^\infty(S)$ $a \in \mathfrak{A}^\alpha$ に関し $C = \{\sigma_n\}$ を $f-\varepsilon$ *chain* とすると

$u = U_a^\alpha$ に対して $W_x(C, f)$ を作ると

$$W_x(C, f) = E_x\{\sum f(x_{\sigma_n}) E_x(e^{-\alpha\sigma_n} U_a^\alpha(x_{\sigma_n}) - e^{-\alpha\sigma_{n+1}} U_a^\alpha(x_{\sigma_{n+1}}) \mid \mathcal{F}_{\sigma_n})\}$$

$$= E_x(\sum f(x_{\sigma_n})(a_\alpha(\sigma_{n+1}) - a_\alpha(\sigma_n)))$$

であるが、特に $a \in \mathfrak{U}^\alpha$ に対しては (ス 3.3) より

$$\left| \sum f(x_{\sigma_n})(a_\alpha(\sigma_{n+1}) - a_\alpha(\sigma_n)) - \int_0^\infty f(x_t)\, da_\alpha \right| \leq \varepsilon\, a_\alpha(\infty)$$

が成立しているので $\varepsilon \downarrow 0$ として

$$W(x, f) = E_x\left(\int_0^\infty f(x_t)\, da_\alpha\right) = U_a^\alpha f(x)$$

を得る。これは直ちに $f \in F(S)$ 迄拡張できる。　(証明終)

注意 3.3.4. 実は u が有限な *potential* であれば、*lemma* 3.3.3 の (1)〜(4) は云えている。(*lemma* 3.3.3 の証明参照)

lemma 3.3.5. $u \in D_R^\alpha$ とし、$W_u(x, f)$ を *lemma* 3.3.3 と同様に定義する。この時任意の *compact* 集合 K に対し

$$H_K W_u(x, \chi_K) = W_u(x, \chi_K).$$

(証明) (i) $x \notin K$ の時は K を含む開集合の列 $\{G_n\}$ を $G_n \downarrow$ $\sigma_n = \sigma_{G_n} \uparrow \sigma_K$ a.s. P_x となるようにえらべる。

又 $W(x, \chi_{G_n}) = W(x, \chi_{G_n - K}) + W(x, \chi_K)$ と *lemma* 3.3.3 (4) から

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

$$0 \leq W(x, \chi_K) - H^{\alpha}_{G_n} W(x, \chi_K) \leq W(x, \chi_{G_n}) - H_{G_n} W(x, \chi_{G_n}) = 0$$

即ち　$W(x, \chi_K) = H^{\alpha}_{G_n} W(x, \chi_K)$

一方　$W(\cdot, \chi_K) \ll u(x)$　より　$W(\cdot, \chi_K) \in D_R$　((3.2.2) による.)

従って　$W(x, \chi_K) = \lim H^{\alpha}_{G_n} W(x, \chi_K) = H^{\alpha}_K W(x, \chi_K)$.

(ii)　$x \in K$ の時，$x \in K^{reg}$ の時は明かである。

$x \notin K^{reg}$ $P_x(\sigma_K > 0) = 1$　の時は　$0 < t < \sigma_K$ なら　$x_t \notin K$　及び

$\sigma_K(w_t^+) + t = \sigma_K$　に注意し

$$H_K W(x, \chi_K) \geq E_x(W(x_{\sigma_K}, \chi_K)\ ;\ t < \sigma_K)$$

$$= E_x(W(x_{\sigma_K(w_t^+)}(w_t^+), \chi_K)\ ;\ t < \sigma_K)$$

$$= E_x(H_K W(x_t, \chi_K)\ ;\ t < \sigma_K)$$

$$= E_x(W(x_t, \chi_K)\ ;\ t < \sigma_K)$$

$$\geq H_t W(x, \chi_K) - E_x(u(x_t)\ ;\ t \geq \sigma_K).$$

$u \in D^{\alpha}_R$　より　$u(x_t)$ は t について P_x 一様可積分であるから

$$\lim_{t \downarrow 0} E_x(u(x_t)\ ;\ t \geq \sigma_K) = 0.$$ 従って

$$H_K(W(x, \sigma_K) \geq \lim_{t \downarrow 0} H_t W(x, \chi_K) = W(x, \chi_K)$$

を得る．逆向きの不等号は自明である。

lemma 3.3.6.　$u \in D^{\alpha}_{\rho}$ で任意の *compact* 集合 K に対し

$H_K W(x, \chi_K) = W(x, \chi_K)$　の成立する時　$\overline{D}^{\alpha}_{\rho}$（*α-uniformly excessive potential*）の強増加列 u_n が存在して，$u_n \Uparrow u$.

証明）(i)　$\eta \in M^+(S)$ を $\int u d\eta < \infty$ となる *reference* 測度とする．

Egoroff の定理から *compact* 集合 K_n の増加列で次の条件をみたすものが存在する．

(1)　u は K_n 上で有界（$\sup_{x \in K_n} u(x) = M_n < \infty$）

(2)　$H_t u \uparrow u\ (t \downarrow 0)$　は K_n 上で一様収束

(3)　$\int W(x, K_n^c)\, d\eta(x) \downarrow 0\ \ (n \to \infty)$

$u_n(x) = W(x, \chi_{K_n})$　とおくと　K_n は増加列であるから

$\chi_{K_n} \leq \chi_{K_m}\ (n < m)$　従って　$u_n \ll u_m\ (n < m)$.

即ち u_n は強増加列である．$u_n \Uparrow v$ とおく．$u_n \ll u$ であるから $u_n \ll v$（*lemma* 3.2.3）．$w = u - v$　とおくと

$$\int w\,d\eta \leqq \int (u - W(\cdot, \chi_{K_n}))\,d\eta = \int W(x, K_n^c)\,d\eta \downarrow 0$$

即ち $w = 0$ a.s. η。 wはα-excessive であるから定理1.5.2により $w \equiv 0$ を得る。即ち $u_\eta \Uparrow u$ である。

(ii) u_n が uniformly excessive であることを示す。

$\sigma_{K_n} < \infty$ の時 $x_{\sigma_{K_n}} \in K_n$ 及び $W(x, \chi_{K_n}) = H^\alpha_{K_n}(W(x, \chi_{K_n}))$ より

$$u_n(x) = H^\alpha_{K_n} u_n(x) \leq H^\alpha_{K_n} u(x) \leqq \sup_{y \in K_n} u(y) \leq M_n$$

から u_nの有界性がわかる。

又 $H^\alpha_t u_n(x)$ も α-excessive であるから

$$0 \leq u_n(x) - H^\alpha_t u_n(x) \leq u_n(x) - H^\alpha_{K_n} H^\alpha_t u_n(x) = H^\alpha_{K_n}(u_n(x) - H^\alpha_t u_n(x))$$

従って $u_n \ll u$ より

$$0 \leq u_n(x) - H^\alpha_t u_n(x) \leq H^\alpha_{K_n}(u(x) - H^\alpha_t u(x)) \leq \sup_{y \in K_n} u(y) - H^\alpha_t u(y).$$

$H^\alpha_t u(x) \uparrow u(x)$ の収束が K_n 上で一様なことより $H^\alpha_t u_n(x) \uparrow u(x)$ の収束が $x \in S$ に対し一様なことがわかる。 （証明終）

lemma 3.3.5 と lemma 3.3.6 を組み合せて

lemma 3.3.7. $u \in D^\alpha_R$ なら $\overline{D}^\alpha_P$ に属する α-excessive function の増強加列 $\{u_n\}$ が存在して，$u_n \Uparrow u$.

次の定理はこの節の目標であった。

定理 3.3.8. $u \in D^\alpha_R$ なら $a \in \mathfrak{L}_\alpha$ が存在して，$u = \overline{U}^\alpha_a$ となる。aは$\mathfrak{U}^\alpha$（従って$\mathfrak{L}^\alpha$）の中で一意的に定る。

（証明） 定理3.3.7.より $u_n \in \overline{D}^\alpha_P$ が存在して $u_n \Uparrow u$ であるが、定理3.1.より $u_n = \overline{U}^\alpha_{a^n}$ $a^n \in \mathfrak{L}^\alpha$ となっている。従って定理3.2.5.を用い $a \in \mathfrak{U}^\alpha$ が存在し $a^n \Uparrow a$ $u = \overline{U}^\alpha_a$. $a \in \mathfrak{L}^\alpha$ は定理2.8.6 よりわかる。一意性は定理2.7.3.からわかる。 （証明終）

定理 3.3.9. $u_n \in D^\alpha_R$ $u_n \Uparrow u < \infty$ ならば，$u \in D^\alpha_R$。

（証明） $a^n \in \mathfrak{L}^\alpha$ が存在し $u_n = \overline{U}^\alpha_{a^n}$ と書ける。

以下定理3.2.5. 定理2.8.6を用い前定理と同様の方法で証明される。（証明終）

定理3.3.9と lemma 3.3.7.を組み合せると，

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

定理 3.3.10. $u\in D_R^\alpha$ のための必要充分條件は D_p^α に属する α-excessive function $\{u_n\}$ の強増加列が存在し $u_n \Uparrow u$ となることである。

此処で2章で予告した定理 2.6.2. の逆が、少し強い形で云える。

定理 3.3.11. $a\in \mathfrak{A}^\alpha$ の時 $a\in\mathcal{L}$ であるための必要充分条件は、任意の compact 集合 K に対して

$$H_K^\alpha U_a^\alpha \chi_K = U_a^\alpha \chi_K$$ となることである。

(証明) (i) 充分であることは定理 2.6.2. の特別な場合だから明か。

(ii) 必要性の証明. 先ず任意の開集合 G に対し、compact 集合 $K\subset G$ なら $\sigma_K \geqq \sigma_G$ より $U_a^\alpha\chi_K \geqq H_G^\alpha U_a^\alpha \chi_K \geqq H_K^\alpha U_a^\alpha\chi_K$ であるから

$$H_G^\alpha U_a^\alpha \chi_K = U_a^\alpha\chi_K$$ を得る。

G を compact 集合の増大列で中から近似し

$$H_G^\alpha U_a^\alpha\chi_G = U_a^\alpha\chi_G$$ を得る。

従って定理 2.6.1 より $a\in\mathfrak{U}^\alpha$ を得る。

$u = U_a^\alpha$ とおくと lemma 3.3.3(5) より $W_u(x,\chi_K) = U_a^\alpha\chi_K$
従って u は lemma 3.3.6. の条件をみたし $u\in D_R$. 定理 3.3.8. より $a'\in\mathcal{L}^\alpha$ が存在し $u=U_{a'}^\alpha$ である。

$a\in\mathfrak{U}^\alpha$ より定理 2.7.3. より一意性が云えるから $a=a'\in\mathcal{L}$

（証明終）

3.4. class D_p と $\mathfrak{U}$

今 $u\in D_p^\alpha$ に対して

(4.1) $\tau = \inf\{t : |u(x_t)-u(x_{t-})|\geqq\varepsilon\}$

$H_n = \{x : P_x(\tau<\frac{1}{n})\geqq 1-\frac{1}{n}\}$

とおく。u の右連続性より $P_x(\tau>0)=1$ 且つ $\tau\in$ g.H.T. であるから $H_n\subset\mathbb{B}(S)$ 且つ $H_n^{reg}\subset H_n$ (lemma 1.5.6).

又 $n<m$ に対し $P_x(\tau<\frac{1}{n})\geqq P_x(\tau<\frac{1}{m})$ であるから $\{H_n\}$ は減少列である。

(4.2) $\sigma_n = \sigma_{H_n}$ $\quad \sigma_n\uparrow\sigma$

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

とおく。

lemmer 3.4.1. (4.2) の σ に対し、任意の $x \in S$ について

(1) $P_x(u(x_{\sigma-}) - u(x_\sigma) \geqq \varepsilon,\ \sigma < \infty) = P_x(\sigma < \infty)$

(2) $P_x(\sigma_n < \sigma < \infty \quad n = 1, 2, \cdots) = P_x(\sigma < \infty)$

(3) $P_x(\sigma$ が $x_t(w)$ の連続点且つ $\sigma < \infty) = P_x(\sigma < \infty)$

証明) (i) 先ず $K > 0$ を定め

$$B_n = \{w;\ \sigma_n \leq K,\ \ \sigma_n < \sigma_n + \tau(w_{\sigma_n}^+) < \sigma + \tfrac{1}{n}\}$$

$$= \{w;\ \sigma_n \leq K,\ \ \sigma_n < t < \sigma + \tfrac{1}{n}\ \ |u(x_t) - u(x_{t-})| \geqq \varepsilon \text{ となる } t \text{ が存在}\}$$

とおくと $\{B_n\}$ は減少列である。($B_n \in \mathfrak{F}$) 又点集合 $\{t; |u(x_t) - u(x_{t-})| \geqq \varepsilon\}$ は有限区間に集積点を持たない。(注意 1.4.6) から

$$\bigcap_n B_n = \lim_n B_n = \{w;\ \sigma \leq K,\ |u(x_\sigma) - u(x_{\sigma-})| \geq \varepsilon\}$$

他方 $P_x(B_n) \geqq P_x(\sigma_n \leq K,\ \tau(w_{\sigma_n}^+) < \tfrac{1}{n})$

$$= E_x(P_{x_{\sigma_n}}(\tau < \tfrac{1}{n});\ \sigma_n \leq K)$$

$x_{\sigma_n} \in H_n^{reg} \cup H_n \subset H_n$ a.s. P_x (注意 1.3.4) より

$$P_x(B_n) \geqq (1 - \tfrac{1}{n})\ P_x(\sigma_n \leq K)$$

$n \to \infty$ として

$$P_x(\sigma \leq K,\ |u(x_\sigma) - u(x_{\sigma-})| \geqq \varepsilon) \geqq P_x(\sigma \leq K)$$

$K \to \infty$ として

$$P_x(\sigma < \infty,\ |u(x_\sigma) - u(x_{\sigma-})| \geq \varepsilon) \geqq P_x(\sigma < \infty)$$

を得る。

(ii) $A_n = \{w : \sigma_n = \sigma < \infty\} \in \mathfrak{F}_{\sigma_n}$

とおくと $\{A_n\}$ は増加列で

$$\bigcup A_n = \lim A_n = \{w;\ \sigma_n = \sigma \text{ となる } n \text{ が存在し } \sigma < \infty\}$$

$$P_x(\tau(w_\sigma^+) < \tfrac{1}{n},\ \sigma < \infty) \geqq P_x(\sigma_n = \sigma,\ \tau(w_{\sigma_n}^+) < \tfrac{1}{n},\ \sigma < \infty)$$

$$= E_x(P_{x_{\sigma_n}}(\tau < \tfrac{1}{n});\ \sigma_n = \sigma < \infty)$$

$$\geqq (1 - \tfrac{1}{n})\ P_x(A_n)$$

他方 $P_x(\tau > 0) = 1 \quad \forall x \in S$ であるから

$$P_x(\tau(w_\sigma^+) < \tfrac{1}{n},\ \sigma < \infty) = E_x(P_{x_\sigma}(\tau < \tfrac{1}{n});\ \sigma < \infty) \downarrow 0 \quad (n \to \infty)$$

従って $P_x(A) = \lim P_x(A_n) = 0$ を得る。

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

即ち (2) が証明された。

(iii) $\sigma<\infty$ の時 $\sigma_n<\sigma$ a.s. P_x より、$\sigma<\infty$ の時

$$\lim u(x_{\sigma_n})=u(x_{\sigma-}) \text{ a.s. } P_x$$ を得るが

lemma 1.4.7 より一般に $\lim u(x_{\sigma_n})\geqq u(x_\sigma)$ a.s. P_x がわかっている。即ち $P_x(u(x_{\sigma}-)\geqq u(x_\sigma)\ \ \sigma<\infty)=P_x(\sigma<\infty)$.

これと (ii) の結果 $P_x(|u(x_\sigma-)-u(x_\sigma)|\geqq\varepsilon, \sigma<\infty)=P_x(\sigma<\infty)$

と合せて (1) を得る。

(iv) (3) の証明. 又 (iii) と同様に $\sigma<\infty$ の時 $\lim x_{\sigma_n}=x_{\sigma-}$ a.s. P_x であるが一般に $\lim x_{\sigma_n}=x_\sigma$ a.s. P_x が成立している((P.6))から σ は ($\sigma<\infty$ の時) P_x 測度 0 を除いて $x_t(w)$ の連続点である。

(証明終)

lemma 3.4.2. $u\in D_p^\alpha$ と (4.2) の σ に対し $\{\hat{\sigma}_n\}$ を σ chain とする時

$$P(t)=\sum_{0<\hat{\sigma}_n\leq t}(u(x_{\hat{\sigma}_n}-)-u(x_{\hat{\sigma}_n}))\Phi(\hat{\sigma}_n,w) \qquad \lim\hat{\sigma}_n=\infty \text{ の時}$$
$$=\infty \qquad \lim\hat{\sigma}_n<\infty \text{ の時}$$

とおく。但し $\Phi(t,w)=\chi\{w:|x_t-x_{t-}|=0,\ u(x_t-)-u(x_t)\geqq\varepsilon\}$

この時 P は $\mathfrak{V}_0^\alpha$ に属する additive functional で $U_p^\alpha\ll u$.

(証明) (i) lemma 3.4.1 の σ に対する性質 (1), (2) はそのまま $\hat{\sigma}_n$ へ持ちこされるから、任意の $x\in S$ に対し

$$P_x(u(x_{\hat{\sigma}_n}-)-u(x_{\hat{\sigma}_n})\geqq\varepsilon,\ |x_{\hat{\sigma}_n-}-x_{\hat{\sigma}_n}|=0\ \ \hat{\sigma}_n<\infty)=P_x(\hat{\sigma}_n<\infty)$$

$n=1,2,\cdots$ 。従って

$$P_x(\Phi(\hat{\sigma}_n)=1\ \ \hat{\sigma}_n<\infty)=P_x(\hat{\sigma}_n<\infty)^{(\text{註})} \quad n=1,2,\cdots\ 。$$

又 P_x 測度 0 を除いて $t<\infty$ で $u(x_t)$ が右からも左からも極限を持つことより $W'=\{w:\lim\hat{\sigma}_n=\infty\}$ とおけば $P_x(W')=1$ である。

(註) $\sigma\in$ M.T. に対し (任意の $n_0>0$ について)

$$\{\Phi(\sigma)=1\}=\bigcap_m\bigcup_{n\geqq n_0}\bigcap_{r\text{有理数}}\{|x_r,x_{r+\frac{1}{m}}|<\tfrac{1}{n},\ u(x_r)-u(x_{r+\frac{1}{n}})>\varepsilon-\tfrac{1}{n}\}\{r<\sigma<r+\tfrac{1}{n}\}$$

従って $\{\Phi(\sigma)=1\}\in\bigcap_{n_0}\mathcal{F}_{\sigma+\frac{1}{n_0}}=\mathcal{F}_\sigma$

即ち $\Phi(\sigma)$ は $\mathcal{F}_\sigma$ 可測である。

$\Phi(\hat{\sigma}_n) \in \mathcal{F}_{\sigma_n}$ に注意すると，$P(t)$ の $\mathcal{F}_t$ 可測性がわかる。

次に $\sigma_n = \sigma_{H_n} \in$ H.T. より $\sigma \in$ g.H.T. となり $\sigma_k \leqq t < \sigma_{k+1}$ なら $\hat{\sigma}_{k+\ell} = t + \hat{\sigma}_\ell(w_t^+)$ $\ell = 1, 2, \cdots$ （注意 1.3.6）。この事と $\Phi(t+s, w) = \Phi(s \cdot w_t^+)$ 及び $w \in W'$ なら $w_t^+ \in W'$ に注意すると P の加法性（A.6）を証明する事ができる。これより $P \in \mathfrak{A}$ は明か。一方 Φ の作り方から $P \in \mathfrak{N}$ がわかる。

(ii) $U_P^\alpha \ll u$ の証明

$P_x(\Phi(\hat{\sigma}_n) = (\hat{\sigma}_n < \infty)) = P_x(\hat{\sigma}_n < \infty)$ より

$$\Delta_t = u(x) - H_t^\alpha u(x) - E_x(P_\alpha(t)) = E_x\Big(u(x) - H_t^\alpha u(x) - \sum_{0<\hat{\sigma}_k \leq t}\big(u(x_{\hat{\sigma}_k-}) - u(x_{\hat{\sigma}_k})\big) e^{-\alpha\hat{\sigma}_k}\Big)$$

とおく。$t - \frac{1}{n}, t \in$ M.T. と思って lemma 1.4.7 から

$u(x_{t-}) \geqq u(x_t)$ を得るから，

$k = k(w) = \mathrm{Max}\{\ell, \sigma_\ell \leq t\}$ とおくと

$$\Delta_t = E_x\big(u(x) - u(x_{\hat{\sigma}_1-})e^{-\alpha\hat{\sigma}_1} + u(x_{\hat{\sigma}_1})e^{-\alpha\hat{\sigma}_1} - u(x_{\hat{\sigma}_2-})e^{-\alpha\hat{\sigma}_2} + \cdots + u(x_{\hat{\sigma}_{k(w)}})e^{-\alpha\hat{\sigma}_k} u(x_t)e^{-\alpha t}$$

$$\geqq E_x\Big\{\sum_{k=0}^{\infty} \chi(\sigma_k < t) e^{-\alpha\hat{\sigma}_k} E_{x_{\hat{\sigma}_k}}\big(u(x_0) - u(x_{\sigma\wedge s-})\big)\Big|_{s=t-\hat{\sigma}_k}\Big\} \geqq 0$$

特に $t \to \infty$ として

$u(x) \geqq E_x(P_\alpha(\infty))$ を得 $P \in \mathfrak{N}^\alpha$.

又 $0 \leq \Delta_t = u(x) - H_t^\alpha u(x) - U_P^\alpha(x) - H_\alpha^t U_P^\alpha(x)$ より

$U_P^\alpha \ll u$ を得る。

注意 3.4.3 $P \sim 0 \rightleftarrows \sigma = \infty$ a.s. P_x. $\forall x \in S$.

（証明） $P_x(P > 0) = P_x(P > 0, \sigma < \infty) = P_x(P > 0, \sigma < \infty, \Phi(\sigma) = 1)$

$= P_x(\sigma < \infty, \Phi(\sigma) = 1) = P_x(\sigma < \infty)$

lemma 3.4.4. $u \in D_P^\alpha$ 且つ $u \notin D_R$ の時は，$P \in \mathfrak{N}_0^\alpha$ $P \not\sim 0$ が存在し $U_P^\alpha \ll u$.（$U_P^\alpha \neq 0$ である）

（証明） (i) u が正則でない事から $x \in S$ $\{\rho_n\}$ $\rho_n \in$ M.T. $\rho_n \uparrow \rho$ が存在して，$P_x(\lim e^{-\alpha\rho_n} u(x_{\rho_n}) > e^{-\alpha\rho} u(x_\rho)) > 0$.

一般に $H_t^\alpha u(x) \geqq E_x(e^{-\alpha\rho_n} u(x_{\rho_n}) ; \rho_n > t)$

$n \to \infty$ として，$\geqq E_x(\lim e^{-\alpha\rho_n} u(x_{\rho_n}) ; \rho > t)$

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

$u \in D_\rho$ より $\lim_{t\to\infty} H_t^\alpha u(x) = 0$ （定理 3.1.5）より

$P_x(\lim e^{-\alpha\rho_n} u(x_{\rho_n}) > 0 \ ; \ \rho = \infty) = 0$ を得る。

従って $P_x(\lim u(x_{\rho_n}) > u(x_\rho) \ \ \rho < \infty) > 0$ である。

従って適当な $\varepsilon > 0$ に対し

$P_x(\lim u(x_{\rho_n}) - u(x_\rho) > 2\varepsilon \ \ \rho < \infty) > 0$ としてよい。

(ii) $\bar{A} = \{w : \lim u(x_{\rho_n}) - u(x_\rho) > 2\varepsilon \ \ \rho < \infty\}$

$F_n(w) = u(x_{\rho_n}) - E_x(u(x_\rho) \mid \mathcal{F}_{\rho_n})$ とおく. $\bigcup \mathcal{F}_{\rho_n} = \mathcal{F}_\rho$ より

$\lim_{n\to\infty} F_n(w) = \lim u(x_{\rho_n}) - E_x(u(x_\rho) \mid \mathcal{F}_\rho) = \lim u(x_{\rho_n}) - u(x_\rho)$

従って $\bar{A} = \{w : \lim F_n(w) > 2\varepsilon \ \ \rho < \infty\}$

$\bar{A} \subset \bigcup_{L} \bigcup_{k} \{w : F_n(w) > \varepsilon \ \ \rho_n \leq L \ \ n = k, k+1, \cdots\}$

従って適当な k_0 と L が存在し

$A = \{w : F_n(w) > \varepsilon \ \ \rho_n \leq L \ \ n = k_0, k_0+1, \cdots\}$

とおく時 $P_x(A) > \frac{1}{2} P(\bar{A}) > 0$ となる。

$A_\ell = \{w : F_n(w) > \varepsilon \ \ \rho_n \leq L \ \ k_0 \leq n \leq \ell\}$ とすると A_ℓ は

$\mathcal{F}_{\rho_\ell}$ 可測で $A_\ell \downarrow A$.

(iii) (4.1) に従い $\frac{1}{n} > 0$ に対し

$\tau = \inf t : |u(x_{t-}) - u(x_t)| \geq \varepsilon$

$H_n = \{x : P_x(\tau < \frac{1}{n}) \geq 1 - \frac{1}{n}\}$ とおくと

$\lim_{\ell\to\infty} P_x(A, x_{\rho_\ell} \notin H_n) = 0$ を示す.

(1) $E_x(P_{x_{\rho_\ell}}(\tau < \frac{1}{n}) : A_\ell) \leq (1-\delta) P_x(x_{\rho_\ell} \notin H_n A_\ell) + P_x(x_{\rho_\ell} \in H_n, A_\ell)$

$= P_x(A_\ell) - \delta P_x(x_{\rho_\ell} \notin H_n, A_\ell) \leq P_x(A_\ell) - P_x(x_{\rho_\ell} \notin H_n, A)$

であるが, 他方

$E_x(P_{x_{\rho_\ell}}(\tau < \frac{1}{n}) : A_\ell) \geq P_x(\tau(w_{\rho_\ell}^+) < \frac{1}{n}, A_\ell)$

$\geq P_x(\tau(w_{\rho_\ell}^+) < \frac{1}{n} \cdot A)$

$w \in A$ なら $\lim u(x_{\rho_\ell}) - u(x_\rho) = \lim F_\ell(w) \geq \varepsilon$ であるから

$\rho_\ell < \rho \ \ \ell = 1, 2, \cdots$ 且つ $u(x_{\rho-}) - u(x_\rho) \geq \varepsilon$ 従って $\tau(w_{\rho_\ell}^+) \leq \rho - \rho_\ell$.

故 (2) $E_x(P_{x_{\rho_\ell}}(\tau < \frac{1}{n}) : A_\ell) \geq P_x(\rho - \rho_\ell < \frac{1}{n}, A)$

$\geq P_x(A) - P_x(\rho - \rho_\ell \geq \frac{1}{n}, \ \rho \leq L)$

(1), (2) より $P_x(x_{\rho_\ell} \notin H_n, A) \leq n(P_x(A_\ell) - P_x(A) + P_x(\rho - \rho_\ell \geq \frac{1}{n} \ \rho \leq L))$

$A_\ell \downarrow A \ \ \rho_\ell \uparrow \rho$ より $\lim_{\ell\to\infty} P_x(x_{\rho_\ell} \notin H_n, A) = 0$ を得る。

(iv) n に対し $\ell(n)$ を充分大きくと

$P_x(x_{\rho_{\ell(n)}} \notin H_n, A) < \frac{1}{2^n}$ とできるから

$P_x(\{x_{\rho_{\ell(n)}} \notin H_n$ が無限ケの n に対しておこる$\} \cap A\} = 0$

従って $P_x(\{x_{\rho_{\ell(n)}} \in H_n$, が無限ケの n に対しておこる$\} \cap A\} = P_x(A)$

$\sigma_n = \sigma_{H_n} \uparrow \sigma$, $A \subset \{\rho \leq L\}$ に注意すると

$P_x(\sigma \leq L) \geq P_x(\sigma_n \leq \rho_{\ell(n)}$ が無限ケの n に対して成立し $\rho \leq L)$

$\geq P_x(A) > 0$

(v) この σ から lemma 3.4.2 に従って $p \in \mathfrak{N}_0^\alpha$ を作ると，注意 3.4.3 より $p \neq 0$ $U_p^\alpha \ll u$ である．

定理 3.4.5 $u \in D_p^\alpha$ に対し $a \in \mathfrak{N}^\alpha$ が存在して $u = U_a^\alpha$. a は ($\mathfrak{N}^\alpha$ の中で) 一意的に定る．

(証明) $\mathfrak{F}_{\mathfrak{N}_0} = \{p : p \in \mathfrak{N}_0 \ U_p^\alpha \ll u\}$ とおくと lemma 3.2.6 より $\mathfrak{F}_{\mathfrak{N}_0}$ は極大元 P_0 を持つ．$u - U_\alpha^p = v$ とおくと $v \in D_p$. 若し $v \notin D_R$ なら前の lemma から $P_1 \in \mathfrak{N}_0^\alpha$ $P_1 \neq 0$ $U_{P_1}^\alpha \ll v$ が存在する。

$U_{P_0+P_1}^\alpha = U_{P_0}^\alpha + U_{P_1}^\alpha \ll U_{P_0}^\alpha + v = u$. $P_0 + P_1 \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{N}_0}$ $P_0 \neq P_0 + P_1$ であるから P_0 の極大元である事と矛盾するする。故に $v \in D_R$. 従って，定理 3.3.8 より $a \in \mathcal{L}^\alpha$ が存在し，$v = U_a^\alpha$.

従って $u = U_{P_0+a}^\alpha$ $p_0 + a \in \mathfrak{N}^\alpha$. 一意性は定理 2.7.3. でやってある。

(証明終)

定理 3.4.6 u を有限な α-excessive function とする。

$u \in D_p^\alpha$ のための必要充分条件は有界な α-potential の強増加列 $\{u_n\}$ が存在して，$u_n \Uparrow u$.

(証明) (i) 必要の証明．$u \in D_p^\alpha$ なら $a \in \mathfrak{A}^\alpha$ が存在し $u = U_a^\alpha$. 定理 2.8.8 から $a^n \in \bar{\mathfrak{A}}^\alpha$ が存在し $a^n \Uparrow a$.

従って $u_n \in U_{a_n}^\alpha \Uparrow U_a^\alpha$ で，u_n は有界な potential である。

(ii) 充分の証明．u_n は有界だから $u_n \in D^\alpha$ 従って $a^n \in \mathfrak{A}^\alpha$ が存在し $u_n = U_{a_n}^\alpha \Uparrow u$ 定理 3.2.5 から $a \in \mathfrak{A}^\alpha$ が存在し $u = U_a^\alpha$ 従って $u \in D_p^\alpha$ である。

(証明終)

後半の証明では $u_n \in D_p^\alpha$ であればよいから，

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

定理 3.4.7. $u_n \in D_p^\alpha$ $u_n \uparrow u < \infty$ (有限)なら $u \in D_p^\alpha$

注意 3.4.8. $a, b \in \mathfrak{N}^\alpha$ の時 $a \ll b$ と $U_a^\alpha \ll U_b^\alpha$ は同値である。

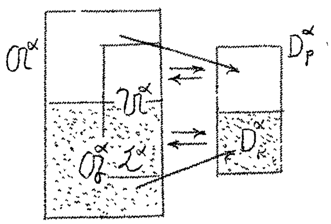
証明 $a \ll b$ なら $U_a^\alpha \ll U_b^\alpha$ は (3.2.4) で一般に云える. 逆に $U_a^\alpha \ll U_b^\alpha$ なら $U_b^\alpha - U_a^\alpha \in D_p^\alpha$ であるから $c \in \mathfrak{N}^\alpha$ が存在して

$$U_b^\alpha - U_a^\alpha = U_c^\alpha \quad \text{即ち} \quad U_b^\alpha = U_{a+c}^\alpha$$

$\mathfrak{N}^\alpha$ に対する potential の一意性 (定理 2.7.3.) から $b \sim a + c$
即ち $a \ll b$ が云える. (証明終)

定理 2.7.3, 定理 3.1.9, 定理 3.3.8, 定理 3.4.5 と上の注意をまとめると α-excessive function と $\mathfrak{A}^\alpha$ の対応について次のことがわかったことになる。

注意 3.4.9. 写像 $a \in \mathfrak{A}^\alpha \to U_a^\alpha$ (α-excessive) は $\mathfrak{A}^\alpha$ から D_p^α の上への線型写像で強順序について homomorphism をあたえる. D_R^α の逆像は $\mathfrak{A}_f^\alpha$ である.(註) この写像を $\mathfrak{N}^\alpha$ の上へ制限すると対応は 1:1 で強順序について isomorphism をあたえている。



3.5. 擬左連続性その他

此の節では §3.3, §3.4 から導かれる二,三の結果をあげる。先ず定理 2.2.5 の逆として、

定理 3.5.1. $a \in \mathfrak{A}$ が擬左連続であるための必要充分条件は、$a \in \mathfrak{A}_f$ となることである。

(証明) 充分なことは定理 2.2.5 で示した。逆を証明するため, 先ず $a \in \mathfrak{A}^\alpha$ とする。$\sigma_n \in$ M.T. $\sigma_n \uparrow \sigma$ を任意に取ると擬左連続性から全ての $x \in S$ に対し $a(\sigma_n) \uparrow a(\sigma)$ a.s. P_x. 従って

(註) $U_a^\alpha \in D_R$ とする. $a = p + q$ $p \in \mathfrak{N}_0$ $q \in \mathfrak{A}_f$ とすれば, $U_p^\alpha \ll U_a^\alpha$ 従って $U_p^\alpha \in D_R$ potential の一意性から $p \sim 0$. 即ち $a \in \mathfrak{A}_f$ である。

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

$$H^{\alpha}_{\sigma_n} U^{\alpha}_{a} = E_x(a_{\alpha}(\infty) - a_{\alpha}(\sigma_n)) \downarrow E_x(a_{\alpha}(\infty) - a(\sigma)) = H^{\alpha}_{\sigma} U^{\alpha}_{a}.$$

即ち $U^{\alpha}_{a} \in D_R$. 従って $a \in \mathfrak{O}_f$ である。(注意 3.4.9)。

一般の $a \in \mathfrak{O}$ に対しては定理 2.8.8 により $\alpha > 0$ に対し $a^n \in \overline{\mathfrak{O}}^{\alpha}$ $a^n \Uparrow a$ となる強増加列 a^n がえらべる。任意の $x \in S$ に対し

$a(t) - a(s) \geqq a^n(t) - a^n(s)$ $\forall t \geq s$ a.s. P_x. に注意すると a^n は擬左連続になり、従って $a^n \in \mathfrak{O}_f$. 故に $a^n \Uparrow a \in \mathfrak{O}_f$ である。(定理 2.8.6)。 (証明終)

此の定理は更に次の様に一般化される。

定理 3.5.2. $a \in \mathfrak{O}$ を右連続とすると、a が擬左連続であるための必要充分条件は、a の不連続点が $x_t(w)$ の不連続点に限ることである。(全ての $x \in S$ に対し P_x 測度 0 を除き)

(証明)

$$\sigma = \inf t : |a(t) - a(t-)| \geqq \varepsilon$$

とおくと $\sigma \in \mathcal{G}$. H.T. で $\{\hat{\sigma}_n\}$ を σ-chain とすれば $a(t+), a(t-)$ の存在することから、$0 = \hat{\sigma}_0 < \hat{\sigma}_1 < \cdots\cdots$ $\lim \hat{\sigma}_n = \infty$. 又 $a(t)$ の絶対値が ε をこえる飛躍は $t = \hat{\sigma}_n$ $(n = 1, 2, \cdots\cdots)$ の時、且つその時に限る。 $p(t) = \sum_{0 < \hat{\sigma}_n \leq t} 1$ とおくと、例 1.4 から $p \in \mathfrak{O}$ であり、p の不連続点は $t = \hat{\sigma}_n$ 又その時に限る。

従って $p(t)$ が擬左連続であることは、任意のマルコフ時間の列 σ_n, $\sigma_n \uparrow \sigma$ に対し $|\lim a(\sigma_n) - a(\sigma)| < \varepsilon$ (a.s. P_x $\forall x \in S$) と同値であり、前者は前定理から $p \in \mathfrak{O}_f$ 即ち $\hat{\sigma}_n$ が (P_x 測度 0 を除いて ($\forall x \in S$)) $x_t(w)$ の不連続点であることと同値: ε は任意であるから、定理を得る。 (証明終)

u が α excessive である時 $a(t) = u(x_t) - u(x_0)$ とし (この場合 $a(\infty-)$ は必ずしも存在しない。

定理 3.5.3. α が正則であるための必要充分条件は $t < \infty$ に対し $u(x_t)$ の不連続点は $x_t(w)$ の不連続点に限り、且つ $\lim_{t \to \infty} e^{-\alpha t} u(x_t) = 0$

最後に擬左連続とは関係ないが、次の定理をあげておく。

定理 3.5.4. (1) $u_n, u \in D^{\alpha}_{p}$ 全ての $x \in S$ に対し $u_n(x) \uparrow u(x)$ とすると

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

$f \in C_\infty(S)$ に対し $\lim W_{u_n}(x, f) = W_u(x, f)$。

(2) $a_n, a \in \mathfrak{N}^\alpha$ $U^\alpha_{a_n}(x) \uparrow U^\alpha_a(x)$ とすれば、$f \in C_\infty(S)$ に対し

$$\lim_{n\to\infty} U^\alpha_{a_n} f(x) = U^\alpha_a f(x)$$

(証明) (1) $\sigma \in$ M.T. を σ-chain $\{\hat{\sigma}_n\}$ が $f-\varepsilon$ chain になるようにとる。

$$W^n_x(C, f)^N = E_x\left(\sum_k^N f(x_{\hat{\sigma}_k})(u_n(x_{\hat{\sigma}_k}) - H^\alpha_\sigma u_n(x_{\hat{\sigma}_k}))e^{-\alpha\hat{\sigma}_k}\right)$$

$$W_x(C, f)^N = E_x\left(\sum_k^N f(x_{\hat{\sigma}_k})(u(x_{\hat{\sigma}_k}) - H^\alpha_\sigma u(x_{\hat{\sigma}_k}))e^{-\alpha\hat{\sigma}_k}\right)$$

とおくと lemma 3.3.3 によって

$$|W^n_x(C, f)^\infty - W_{u_n}(x, f)| \leq \varepsilon u_n(x) \leq \varepsilon u(x),$$

$$|W_x(C, f)^\infty - W_u(x, f)| \leq \varepsilon u(x)$$

又 $$|W^n_x(C, f)^N - W^n_x(C, f)^\infty| \leq \|f\| H^\alpha_{\hat{\sigma}_N} u_n(x) \leq \|f\| H^\alpha_{\hat{\sigma}_N} u_n(x)$$

$$|W_x(C, f)^N - W_x(C, f)^\infty| \leqq \|f\| H^\alpha_{\hat{\sigma}_m} u(x).$$

一方有限和 $W^n_x(C, f)^N$, $W_x(C, f)^N$ に関しては

$$e^{-\alpha\hat{\sigma}_k} f(x_{\hat{\sigma}_k})(u_n(x_{\hat{\sigma}_k}) - H^\alpha_\sigma u_n(x_{\hat{\sigma}_k})) \to e^{-\alpha\hat{\sigma}_k} f(x_{\hat{\sigma}_k})(u(x_{\hat{\sigma}_k}) - H^\alpha_\sigma u(x_{\hat{\sigma}_k})) \ (n\to\infty)$$

が全ての w について云え、而も左辺の絶対値は $\|f\| u(x_{\hat{\sigma}_k})$ でおさえられている。

故に $\lim_{n\to\infty} W^n_x(C, f)^N = W_x(C, f)^N$, 従って

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |W_{u_n}(x, f) - W_u(x, f)| \leq 2\varepsilon u(x) + 2 H^\alpha_{\hat{\sigma}_N} u(x)$$

所が $u \in D^\alpha_p$ $\hat{\sigma}_N \to \infty \ (N\to\infty)$ より $\lim_N H^\alpha_{\hat{\sigma}_N} u(x) = 0$ (定理 3.1.5).

即ち $\lim W_{u_n}(x, f) = W_u(x, f)$

(2) は $u_n = U^\alpha_{a_n}$ $u = U^\alpha_a$ とおくと lemma 3.3.3. から $a_n, a \in \mathfrak{N}^\alpha$ で $W_{u_n}(x, f) = U^\alpha_{a_n} f(x)$ $W_u(x, f) = U^\alpha_a f(x)$ が成立しているから (1) に帰着できる。

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

4章　絶対連続性と$\mathfrak{G}_0$

4.1. canonical測度

定義　$a.b \subset \mathfrak{A}$に関し，任意の$f \geqq 0$ $f \in F(S)$に対し$f \cdot a \sim 0$なら必ず$f \cdot b \sim 0$となる時bはaに絶対連続ということにし，$a \succ b$と書く。$a \succ b$且つ$a \prec b$の時は$a \leftrightarrow b$と書く。

定義　$a \in \mathfrak{A}$ $\mu \in M^+(S)$に関し，任意の$f \geqq 0$ $f \in F(S)$に対し$f \cdot a \sim 0$（又は$f = 0$ a.s.μ）なら必ず$f = 0$ a.s.μ（又は$f \cdot a \sim 0$）となる時μはaに（又はaはμに）絶対連続ということにし，$a \succ \mu$（又は$a \prec \mu$）と書く。$a \succ \mu$且つ$a \prec \mu$の時$a \leftrightarrow \mu$と書き，この時μをaのcanonical測度と呼ぶことにする。

$f \cdot a \sim 0$と$f \cdot a_\alpha \sim 0$は同値であるから，上の定義でaに関する条件をa_αでおきかえても同じことである。

注意 4.1.1.　$a \in \mathfrak{A}$ $\mu, \nu \in M^+(S)$の時

(1)　$a \gg b$　なら　$a \succ b$

(2)　$f \geqq 0$　$f \in F(S)$の時　$f \cdot a \prec a$

(3)　$a \leftrightarrow \mu$　の時　$\nu \succ a$ ($\nu \prec a$) のための必要充分条件はμがνに（νがμに）絶対連続なことである。

定理 4.1.2.　(1)　$a \in \mathfrak{A}$に対しcanonical測度λは存在する。

(2)　λ, λ'をaのcanonical測度とすれば，λとλ'は互に絶対連続である。（canonical測度は相互に絶対連続な測度を同一視すれば一意的に定まる。）

証明)

(i)　先ず適当なαに対し$a \in \mathfrak{A}^\alpha$の場合を考える。$\xi$を$U_a^\alpha$が可積分なreference測度とし　$\lambda(E) = \int U_a^\alpha \chi_E(x) d\xi$ ($E \in \mathbb{F}(S)$)　とおくと$\lambda \in M^+(S)$は明かである。今$0 \leq f \in F(S)$に対し

$\int f(x) d\lambda = \int U_a^\alpha f(x) d\xi$　であるから$f \cdot a \sim 0$なら$U_{f \cdot a}^\alpha = U_a^\alpha f \equiv 0$従って$f = 0$ a.s.λ.　逆に$\int f(x) d\lambda = 0$なら$U_{f \cdot a}^\alpha = 0$ a.s.ξ　所が

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

$U_{f\cdot a}^{\alpha}$ は excessive であるから $U_{f\cdot a}^{\alpha}(x) = E_x(f\cdot a_{\alpha}(\infty)) \equiv 0$. これより $f\cdot a \sim 0$ を得る。即ち λ は canonical 測度である。

(ii) 次に一般の $a \in \mathfrak{A}$ に対しては，定理 2.8.9 より $a^n \in \bar{\mathfrak{A}}^{\alpha}$ $a^n \Uparrow a$ をえらび λ^n を a^n の canonical 測度とする。$0 \leq f \in F(S)$ に対し $f\cdot a^n \Uparrow f\cdot a$ に注意すれば $\lambda = \sum \frac{1}{2^n \lambda^n(S)} \lambda^n \in M^+(S)$ が a の canonical 測度であることがわかる。

(iii) (2) は注意 4.1.2 (3) から明かである。（証明終）

注意 4.1.3. $a \in \mathfrak{A}^{\alpha}$ に対し $U_a^{\alpha}(x, E) = U_a^{\alpha}\chi_E(x)$

$U_a^{\alpha}(\eta, E) = \int U_a^{\alpha}\chi_E(x)d\eta$ $(E \in \mathbb{F}(S))$ とおくと

(1) $U_a^{\alpha}(\eta, \cdot)$ は a の canonical 測度である。

(2) λ が a の canonical 測度であるための必要充分条件は任意の $f \in F(S)$ $0 \leq f$ に対し，$U_a^{\alpha}f(x) = 0$ $\forall x \in S$ と $\int f(x)d\lambda = 0$ （或は $f = 0$ a.s. λ）が同値なことである。

(3) 特に λ が a の canonical 測度なら $U_a^{\alpha}(x, \cdot)$ は λ に絶対連続である。

(証明) 定理 4.1.2 の証明 (1) より注意の (1), (2) が直ちに出る。(3) は $U_a^{\alpha}(x, \cdot)$ が $U_a^{\alpha}(\eta, \cdot)$ に絶対連続なことと，定理 4.1.2 (2) によりわかる。（証明終）

定理 4.1.4. $a \in \mathfrak{A}$ とし λ を a の canonical 測度とする。$0 \leq f \cdot g$ $f \cdot g$ は $\mathbb{F}(S)$ 可測で $f\cdot a$, $g\cdot a \in \mathfrak{A}$ の時 次の条件は同値である。

(1) $f = g$ a.s. λ (2) $f\cdot a \sim g\cdot a$

(証明) $H_1 = \{x : f > g\}$ $H_2 = \{x : f = g\}$ $H_3 = \{x : f < g\}$ とおく。

$\chi_{H_1}(f-g) \geq 0$ であるから $\chi_{H_1}(f-g)\cdot a \sim 0$ と $\chi_{H_1}(f-g) = 0$ a.s. λ は同値，同様に $-\chi_{H_3}(f-g)\cdot a \sim 0$ と $-\chi_{H_3}(f-g) = 0$ a.s. λ も同値である。一方 $\chi_{H_2}(f-g) \equiv 0$. 所で $f = g$ a.s. λ と $\chi_{H_i}f = \chi_{H_i}g$ a.s. λ $i = 1, 2, 3$ 及び $f\cdot a \sim g\cdot a$ と $\chi_{H_i}f\cdot a \sim \chi_{H_i}g\cdot a$ $i = 1, 2, 3$ は各々同値であるから定理が証明される。（証明終）

lemma 4.1.5. $a \in \mathfrak{A}^{\alpha}$ $0 \leq f, g \in F(S)$ η を $U_a^{\alpha}(x)$ を可積分にする reference 測度とする。次の条件は同値である。

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

(1) $f\cdot a \sim g\cdot a$ (2) $U_a^\alpha f \equiv U_a^\alpha g$ (3) $U_{f\cdot a}^\alpha(\eta,\cdot) = U_{g\cdot a}^\alpha(\eta,\cdot)$(註)

(証明) (i) (3) ⇒ (2) H_1, H_2, H_3 を前定理の様にとる。

$U_{f\cdot a}^\alpha(x, H_1) - U_{g\cdot a}^\alpha(x\cdot H_1) = U_{\chi_{H_1}(f-g)\cdot a}^\alpha(x)$ は *excessive* 且つ λ 測度 0 を除いて 0。従って $U_{f\cdot a}^\alpha(x, H_1) \equiv U_{g\cdot a}^\alpha(x, H_1)$.

同様 $U_{f\cdot a}^\alpha(x, H_3) \equiv U_{g\cdot a}^\alpha(x, H_3)$ を得る。$U_{f\cdot a}^\alpha(x, H_2) = U_{g\cdot a}^\alpha(x, H_2)$ は明かであるから $U_{f\cdot a}^\alpha(x) = U_{g\cdot a}^\alpha(x, S) = U_{g\cdot a}^\alpha(x, S) = U_{g\cdot a}^\alpha(x)$ を得る。 ||

(ii) (2) ⇒ (1) は定理 2.7.3 より明か. (1) ⇒ (3) も自明である。(証明終)

定理 4.1.6. $a \in \mathfrak{A}^\alpha$ λ を a の *canonical* 測度とすると $S \times S$ 上の函数 $g^\alpha(x, y)$ が存在して次の性質を持つ。(1) $g^\alpha(x, y)$ は y の函数として $\mathbb{F}(S)$ 可測 (2) $f \in F(S)$ に対し

$$U_a^\alpha f(x) = \int g^\alpha(x, y) f(y)\, d\lambda(y) \qquad \forall x \in S.$$

(1), (2) の性質をもつ $g^\alpha(x\ y)$ は (y の函数として) λ 測度 0 を除いて定まる。

(証明) 注意 4.1.3. (3) より $U_a^\alpha(x, \cdot)$ は λ に絶対連続, その密度函数を $g^\alpha(x, \cdot)$ ととればよい。

一意性は (2) の性質から明かである。 (証明終)

$a \in \mathfrak{A}^\alpha$ に対し λ を a の *canonical* 測度とする時 $\{g^\alpha(x\cdot y), \lambda\}$ を組にして a の *canonical system* と呼ぶ。$g^\alpha(x, y)$ は y の函数として $L^1(d\lambda)$ に属している。今 L を $g^\alpha(x, \cdot)$ $x \in S$ で生成される $L^1(d\lambda)$ の線型部分空間とすると, *lemma* 4.1.5 (2) から $f \in F(S)$ に対し

$\int g^\alpha(x, y) f(y) \lambda(dy) = 0$ ($\forall x \in S$) ならば

$\int f(x_t)\, da = 0$ a.s. P_x $\forall x \in S$. 従って定理 4.1.4 により $f = 0$ a.s. λ を得る。$L^1(d\lambda)^* \cong L^\infty(d\lambda)$ に注意して次の *lemma* を得る。

lemma 4.1.7. L は $L^1(d\lambda)$ の中で稠密である。次の注意は今後使わないので結果だけあげておく。

注意 4.1.8. (1) $a \in \mathfrak{A}^\alpha \cap \mathfrak{A}^\beta$ $\{g^\alpha, \lambda\}$ $\{g^\beta, \lambda\}$ を a の *canonical system* とすれば 若し $g^\alpha(x, y)$ が $\mathbb{F}(S\times S)$ 可測函数にとれれば g^β も同じようにとれ $g^\alpha - g^\beta + (\alpha - \beta) U^\beta g^\alpha = 0$ a.s. λ が成立する。

(註) 実は (3) と (1) の同値は $a \in \mathfrak{A}^\alpha$ を云える。

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

(2) $a\in\mathfrak{A}^\alpha$ $\{g^\alpha,\lambda\}\{g'^\alpha,\lambda'\}$ を a の canonical system とすると $\lambda'(dy)=k(y)\lambda(dy)$ の時（λ と λ' は互に絶対連続）

$$g'^\alpha(x,y)=\frac{1}{k(y)}g^\alpha(x,y)\quad a.s.\ \lambda(X)。$$

今 $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ を $\mathfrak{A}$ の部分集合とする。若し $0\le f\in F(S)$ で $f\cdot a\sim 0$ $\forall a\in\mathfrak{A}_1$ となる f に対し必ず $f\cdot a\sim 0$ $\forall a\in\mathfrak{A}_2$ が成立する時 $\mathfrak{A}_1\succ\mathfrak{A}_2$ であらわす。$\mathfrak{A}_1>\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_1<\mathfrak{A}_2$ の時 $\mathfrak{A}_1\leftrightarrow\mathfrak{A}_2$ と書く。

定理 4.1.9. $a^1, a^2\cdots a^n\cdots\in\mathfrak{A}$ 及び $\alpha>0$ に対し $\{a^1\cdots a^n\cdots\}\leftrightarrow a$ となる $a\in\overline{\mathfrak{A}}^\alpha$ が存在する。(註)

(証明) (i) 先ず $a'\in\mathfrak{A}$ に対し $a'\leftrightarrow\overline{a}'\in\overline{\mathfrak{A}}$ が存在することを示す。定理 2.8.9 により $b^n\in\mathfrak{A}^\alpha$ $b^n\Uparrow a'$ をえらべる。$U^\alpha_{b^n}(x)\le K_n<\infty$ とする時 $\overline{a}'=\sum\frac{1}{2^nK^n}b^n$ とおく。

$E_x(\overline{a}'_\alpha(\infty))=\sum\frac{1}{2^nK_n}U^\alpha_{b^n}(x)\le 1$ より $\overline{a}'\in\overline{\mathfrak{A}}^\alpha$ しかも $\{a'\}\leftrightarrow\{b^1\cdots b^n\cdots\}\leftrightarrow\{\overline{a}'\}$ である。

(ii) 各 $a^n\in\mathfrak{A}$ に対し (i) の方法で $a^n\leftrightarrow\overline{a}^n\in\overline{\mathfrak{A}}^\alpha$ になるよう $\overline{a}^n$ をえらぶ。$U^\alpha_{\overline{a}^n}(x)\le L_n$ とし $a=\sum\frac{1}{2^nL_n}\overline{a}^n$ とおけば (i) と同様 $a\in\overline{\mathfrak{A}}^\alpha$ 且つ $\{a^1\,a^2\cdots a^n\cdots\}\leftrightarrow\{\overline{a}^1,\overline{a}^2\cdots\}\leftrightarrow a$.

4.2 $\mathfrak{L}$ の場合の絶対連続性

$a\in\mathfrak{L}$ に対し逆函数 $\tau(s)$ を

(2.1) $\tau(s)=\tau(s,w)\equiv\sup\{u: a(u,w)\le s\}$ と定義する。

lemma 4.2.1. (1) $\tau(s)$ は右連続増加函数で

$$\lim_{s\to\infty}\tau(s)=\infty\qquad \tau(a(t))\ge t\qquad a(\tau(s))=s\quad s<a(\infty)\text{ の時}$$
$$=a(\infty)\quad s\ge a(\infty)\text{ の時}$$

(2) $\tau(t,w)+\tau(s,w^+_{\tau(t)})=\tau(t+s,w)$

(3) $\tau(s)\in M.T.$

(証明) (1) は単調連続函数の逆函数の性質に他ならない。(2) $s\ge a(\infty)$ の時は $\tau(t)=\tau(t+s)=\infty$ より明かである。$t<a(\infty)$ のとき

(註) 証明中 $\mathfrak{A}$ を $\mathfrak{L}$（$\mathfrak{N}$, $\mathfrak{G}$ -- 等）でおきかえれば $a^1\cdots a^n\cdots$ が $\mathfrak{L}$（$\mathfrak{N}$, $\mathfrak{G}$ 等）に属する時 a も $\mathfrak{L}$（$\mathfrak{N}$, $\mathfrak{G}$ -- 等）の中にとれることがわかる。

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

$a(\tau(t))=t$ であるから

$$\tau(t+s)=\sup u : a(u,w)\leqq s+a(\tau(t),w)$$
$$=\sup u : a(u-\tau(t),\ w^+_{\tau(t)})\leq s$$
$$=\sup v : a(v,\ w^+_{\tau(t)})\leq s\quad +\tau(t,w)$$
$$=\tau(s,\ w^+_{\tau(t)})+\tau(s)$$

(3) $\{\tau(s)<t\}=\{a(t)>s\}\in \mathbb{F}_t$ （証明終）

lemma 4.2.2. $a\in\mathcal{L}^\alpha$ $u\in D_p^\alpha$ に対し
$f_\varepsilon(x)=\frac{1}{\varepsilon}(u(x)-H^\alpha_{\tau(\varepsilon)}u(x))$ 、 $u_\varepsilon(x)=U^\alpha_a f_\varepsilon(x)$ とおくとき
$u_\varepsilon(x)\uparrow H^\alpha_{\tau(0)}u(x)$ $(\varepsilon\downarrow 0)$

(証明) $\tau(s)\to\infty$ $(s\to\infty)$ より、定理3.1 与(3)より $H^\alpha_{\tau(s)}u(x)\downarrow 0\ (s\to\infty)$
である。他方

$$u_\varepsilon(x)=E_x\left(\int_0^\infty f_\varepsilon(x_t)\,da_\alpha\right)=E_x\left(\int_0^\infty e^{-\alpha\tau(s)}f_\varepsilon(x_{\tau(s)})\,ds\right)$$
$$=\int_0^\infty H^\alpha_{\tau(s)}f_\varepsilon(x)ds=\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\infty(H^\alpha_{\tau(s)}u(x)-H^\alpha_{\tau(s)}H^\alpha_{\tau(\varepsilon)}u(x))ds \quad \text{であるが}$$

$$H^\alpha_{\tau(s)}H^\alpha_{\tau(\varepsilon)}u(x)=E_x(e^{-\alpha(\tau(s)+\tau(\varepsilon,w_s^+))}u(x_{\tau(s)+\tau(\varepsilon,w_s^+)}))=H^\alpha_{\tau(s+\varepsilon)}u(x)$$

が lemma 4.2.1 (2) からわかるから

$$u_\varepsilon(x)=\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\infty(H^\alpha_{\tau(s)}u(x)-H^\alpha_{\tau(s+\varepsilon)}u(x))ds=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon H^\alpha_{\tau(s)}u(x)ds-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^{t+\varepsilon}H^\alpha_{\tau(s)}u(x)ds\right)$$
$$=\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon H^\alpha_{\tau(s)}u(x)ds.$$

$s\downarrow 0$ の時 $H^\alpha_{\tau(s)}u(x)\uparrow H^\alpha_{\tau(0)}u(x)$ (1.4.8) より $u_\varepsilon(x)\uparrow H^\alpha_{\tau(0)}u(x)$ を得る。 （証明終）.

lemma 4.2.3. $a, b\in\mathcal{L}^\alpha$ $\{g^\alpha, \lambda\}$ を a の canonical system とする。今 $U^\alpha_a \gg U^\alpha_b$ であれば

(1) $f\in\mathbb{F}(S)$ $0\leq f\leq 1$ が存在して $b\sim f\cdot a$

(2) $U^\alpha_b(x)=U^\alpha_a f(x)=\int g^\alpha(x,y)f(y)\,d\lambda(y)$ である。

(3) (1), (2) の f は λ-測度 0 を除いて一意的に定る。

(証明) $u(x)=U^\alpha_b(x)$ $f_\varepsilon(x)=\frac{1}{\varepsilon}(u(x)-H^\alpha_{\tau(\varepsilon)}u(x))$
$u_\varepsilon(x)=U^\alpha_{f_\varepsilon\cdot a}(x)$ とおくと、lemma 4.2.2 より $\varepsilon\downarrow 0$ の時
$u_\varepsilon(x)\uparrow H^\alpha_{\tau(0)}u_\varepsilon(x)$.
$U^\alpha_a\gg U^\alpha_b$ より $U^\alpha_a-U^\alpha_b$ は α-excessive であるから.

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

$$0 \leq u(x) - H^{\alpha}_{\tau(\varepsilon)} u(x) \leqq U^{\alpha}_{a}(x) - H^{\alpha}_{\tau(\varepsilon)} U^{\alpha}_{\varepsilon}(x) = E_x(\tau(\varepsilon))) \leqq \varepsilon$$

従って　(3)　$u(x) - H^{\alpha}_{\tau(0)} u(x) = 0$

(4)　$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}(u(x) - H^{\alpha}_{\tau(\varepsilon)} u(x) \leq 1$

がわかる。(3)から　$u_\varepsilon(x) \uparrow u(x)$　$\varepsilon \downarrow 0$.

今　$L = \{ \sum_{i=1}^{n} a_i g^{\alpha}(x_i, \cdot)\ n<\infty\ x_i \in S\ a_i$ 実数$\}$　とおくと、Lは $L'(d\lambda)$ の線型部分空間で $\overline{L} = L'(d\lambda)$ (lemma 4.1.7).

今 $h \in L'(d\lambda)$ に対し、$F_\varepsilon(h) = \int h(y) f_\varepsilon(y) \lambda(dy)$　と定義する。

(4)より $|F_\varepsilon(h)| \leqq \|h\|_L$, 即ち F_εは一称有界である。特に

$h = \sum_{i=1}^{n} a_i g^{\alpha}(x_i, \cdot) \in L$ に対しては

$F_\varepsilon(h) = \sum a_i \int g^{\alpha}(x_i, y) f_\varepsilon(y) \lambda(dy) = \sum a_i u_\varepsilon(x_i)$　であるから

$F_\varepsilon(h) \to \sum a_i u(x_i)$　$(\varepsilon \downarrow 0)$. F_εの一称有界性と $\overline{L} = L'(d\lambda)$ より任意の $h \in L'(d\lambda)$ に対して

$F(h) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} F_\varepsilon(h)$　は存在して $L'(d\lambda)$ の（有界な）線型作用素をあたえる。従って $f \in L^{\infty}(d\lambda)$ が存在し、$F(h) = \int h(y) f(y) \lambda(dy)$ と書ける。

$h \geqq 0$ なら $F_\varepsilon(h) \geqq 0$　より Fも同称の性質を持ち $0 \leq f \leq 1$ $f \in B(S) \subset F(S)$ ととることができる。

特に $h = g(x, \cdot)$ に対しては

$u(x) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} F_\varepsilon(h) = \int g^{\alpha}(x, y) f(y) \lambda(dy)$

即ち　$U_b \equiv U^{\alpha}_{a} f \equiv U^{\alpha}_{f \cdot a}$ である。lemma 4.1.5 より $b \sim f \cdot a$ がわかる。(3)は lemma 4.1.4 より明かである。　（証明終）

此の lemmaの結果は次の称に一般化できる。

定理 4.2.4.　$a . b \in \mathcal{L}$ λを aの canonical 測度とする。

(1)　$a \succ b$ なら有限非負 $\mathbb{F}(S)$可測函数 f が存在して $b \sim f \cdot a$　となる。fは λ測度 0 を除いて一意的に定る。

(2)　特に有限非負 $\mathbb{F}(S)$ 可測な g に対して　$b \ll g$ が成立する時は　$b \sim f \cdot a$　$0 \leq f \leq g$　ととれる。（勿論 $g . a \in \mathfrak{A}$ と仮定する。）

(証明)　(i)　(1)の証明、定理 2.8.9. 及び注意 2.8.2 より $\alpha > 0$ に対し $a^n, b^n \in \mathcal{I}^{\alpha}$ が存在し $\sum_{n=1}^{\infty} a^n \Uparrow a$ $\sum_{n=1}^{\infty} b^n \Uparrow b$　とできる。$c^n = a^n + b^n$

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

とおけば $c^n \in \mathfrak{X}^\alpha$ であるから $\overline{U}^\alpha_{c^n} \leq K_n$ 従って $c = \sum \frac{1}{2^n K_n} c^n$ とおくと $c \in \mathfrak{X}^\alpha$ であり $2^n K_n c \gg c^n \gg a^n, b^n$ より，lemma 2.8.3 から $a^n \sim g_n \cdot c$ $b^n \sim h_n \cdot c$ となる $g_n \cdot h_n \in F(S)$ $(0 \leq g_n, h_n)$ が存在する。$\sum g_n = g$ $\sum h_n = h$ とおけば $a^n \ll g \cdot c \ll a$ $b^n \ll b \cdot c \ll b$ より $a \sim g \cdot c$ $b \sim h \cdot c$ がわかる。

$E = \{x ; g(x) = 0\}$ とおけば $\chi_E \cdot a \sim \chi_E g \cdot c \sim 0$ より $\chi_E \cdot b \sim \chi_E h \cdot c \sim 0$ を得る，$f(x) = \frac{h(x)}{g(x)}$ $x \notin E$，$f(x) = 0$ $x \in E$ と定義すると

$f \cdot g \cdot c \sim \chi_{E^c} f g \cdot c \sim \chi_{E^c} h \cdot c + \chi_E h \cdot c \sim h \cdot c$ 　従って

$f \cdot a \sim f \cdot g \cdot c \sim h \cdot c \sim b$ を得る。(注1) 一意性は定理 4.1.4 より明か。

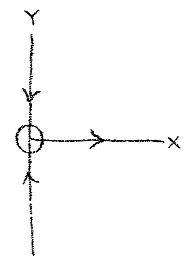
(ii) (2) の証明．$c \in \mathfrak{A}$ を $c + b \sim g \cdot a$ ととる．(注意 2.8.2)

注意 4.1.1 より $b \cdot c < g \cdot a < a$ であるから (1) より $f \geq 0$, $h \geq 0$ が存在して $b \sim f \cdot a$ $c \sim h \cdot a$ 従って $(f+h) \cdot a \sim b + c \sim g \cdot a$ $f + h = g$ a.s. λ． $f \wedge g = f$ a.s. λ． $f' = f \wedge g$ とおきかえても $b \sim f \cdot a \sim f' \cdot a$ である。 (証明終)

この定理は $\mathfrak{A}_0$ に対しては成立しない。(§4.3 参照)

例えば [21] P.93 の定義 2.1 の条件をみたす dual process が存在するような場合には $\mathfrak{N}$ に対しても容易に成立する。([21] [25] [11] 参照)． しかし reference 測度の存在だけを仮定するのでは $\mathfrak{N}_0$ に対して成立しない場合がおこる。

例 2.1 　S を二次元平面内の Y 軸と X 軸の正の部分からなる集合とし，Y 軸を原点に向って一様な速度で進み原点に達すると X 軸を $+\infty$ の方へ一様な速度で進む一様運動を考える。(註2)



(註1) 一般に $f \cdot a \in \mathfrak{A}$ の時 $E = \{x : f(x) = \infty\}$ とおけば，$\chi_E f \cdot a(t) = \infty$ 又は 0． 従って $\chi_E f \cdot a \sim 0$． 始めから $f < \infty$ としてよい。

(註2) この process に遷移確率系を定義し P.1 ~ P.6 及び L をみたす事を示すのは省略する。

$a(t,w)=1$ 　　$x_s=(0.0)$ となる $0<s\leq t$ が存在し x_0 が Y軸の正の部分にある時

$\qquad = 0$ 　　その他の場合

$b(t,w)=1$ 　　$x_s=(0.0)$ となる $0<s\leq t$ が存在し x_0 が Y軸の負の部分にある時

$\qquad = 0$ 　　その他の場合

と定義すると $a.b\in\mathfrak{N}_0$ で $f\cdot a\sim 0 \Longleftrightarrow f((0.0))=0 \Longleftrightarrow f\cdot b\sim 0$ であるから $a\Longleftrightarrow b$, しかし $a=g\cdot b$ とは書けない。

可附番ケの $u_1 u_2\cdots\in D_R^\alpha$ に対して Rie_β の定理に類似な次の結果が成立する。

定理 4.2.5 　$\alpha>0$ 　$u_1 u_2\cdots u_n\cdots\in D_R^\alpha$ とすると

(1) 　$S\times S$ 上の函数 $g^\alpha(x\cdot y)$ と $\lambda_1\cdots\lambda_n\cdots\in M^+(S)$ が存在し

$$u_n(x)=\int g^\alpha(x\cdot y)\lambda_n(dy) \qquad n=1,2,\cdots\cdots$$

(2) 　$u_n=\overline{U}_{a_n}^\alpha$ 　$a_n\in\mathfrak{L}^\alpha$ とすれば 　$f\in F(S)$ に対し

$$\overline{U}_{a_n}^\alpha f=\int g^\alpha(x.y)f(y)\lambda_n(dy) \qquad n=1,2,\cdots\cdots$$

(証明) $u_n=\overline{U}_{a_n}^\alpha$ 　$a^n\in\mathfrak{L}^\alpha$ の存在は定理 3.3.8 からわかっている。定理 4.1.9 より $a\in\overline{\mathfrak{N}}^\alpha$ $a\leftrightarrow\{a_1\cdots a_n\cdots\}$ がとなる a が存在するが $\{g^\alpha\lambda\}$ を a の canonical system とすると $a_n<a$ より $a_n\sim f_n\cdot a$ であるから $\lambda_n(dy)=f_n(y)\lambda(dy)$ とおいて (1) を得る。

(2) は $\overline{U}_{a_n}^\alpha f=\overline{U}_a^\alpha ff_n$ より明か。 　　　(証明終)

lemma 4.2.6. $\alpha>0$ $a.b\in\mathfrak{L}$ とする.

(1) $f\cdot a\in\overline{\mathfrak{L}}^\alpha$ となる $0\leq f\in F(S)$ に対し必ず $f\cdot a\gg f\cdot b$ ならば $a\gg b$.

(2) $f\cdot a\in\overline{\mathfrak{L}}^\alpha$ となる $0\leq f\in F(S)$ に対し必ず $f\cdot a\sim f\cdot b$ ならば $a\sim b$.

(証明) (1) の証明 　先ず $f\cdot a\sim 0$ なら ($f\cdot a\in\overline{\mathfrak{L}}^\alpha$ であるから)

$f\cdot b\ll f\cdot a\sim 0$ 　従って $a>b$ であるから $b\sim g\cdot a$ 　(定理 4.2.4)

今 $a^n\in\overline{\mathfrak{L}}^\alpha$ $\sum_{n=1}^N a^n\Uparrow a$ となる a^n をとる。(定理 3.8.9) 　$a^n\ll a$ であるから $a^n\sim f_n\cdot a$. 　$a^n\in\overline{\mathfrak{L}}^\alpha$ であるから $f_n\cdot a\gg f_n\cdot b\sim f_n\cdot g\cdot a$ となる。

$\sum_{n=1}^N f_n a\sim\sum_{n=1}^N a^n\Uparrow a$ 　$a\gg\sum_{n=1}^N f_n b\sim\sum_{n=1}^N f_n\cdot g\cdot a=\sum_{n=1}^N g a^n\Uparrow ga\sim b$ より $a\gg b$ を得る。(2) に対しては $\ll$ の代りに $\sim$ でおきかえれば全く同

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

様に証明できる。　　　（証明終）

lemma 4.2.7　$a.b\in\mathcal{L}^\alpha$ η を $\overline{U}_a^\alpha$, $\overline{U}_b^\alpha$ を可積分にする reference 測度とすれば $\int \overline{U}_a^\alpha f(x)d\eta=\int \overline{U}_b^\alpha f(x)d\eta$ が全ての $0\leqq f\in F(S)$ に対して成立すれば $a\sim b$ である。

（証明）　$c=a+b$ とおく。$a\ll c$ $b\ll c$ であるから $0\leq g.h\leq 1$ $g.h\in F(S)$ が存在し $a\sim g\cdot c$ $b\sim h\cdot c$ （定理 4.2.4）　従って $\int \overline{U}_{g.c}^\alpha f(x)d\eta=\int \overline{U}_{h.c}^\alpha f(x)d\eta$ が全ての $0\leq f\in F(S)$ に対して成立する。或いは全ての $E\in\mathbb{F}(S)$ に対し

$\overline{U}_{g.c}^\alpha(\eta.E)=\int \overline{U}_{g.c}^\alpha \chi_E d\eta=\int \overline{U}_{h.c}^\alpha \chi_E d\eta=\overline{U}_{hc}^\alpha(\eta.E)$ 従って lemma 4.1.5 (3) が使えて $gc\sim hc$ 即ち $a\sim b$.　　（証明終）

4.3. $\mathfrak{O}_0$ と $\mathcal{L}$ の対応

$\mathbb{B}(S\times S)$ を $S\times S$ 上の位相的 Borel 集合体とし，$\bar{\mu}$ を $\mathbb{B}(S\times S)$ 上の有界測度 $\mathbb{B}^{\bar{\mu}}(S\times S)$ を $\mathbb{B}(S\times S)$ の $\bar{\mu}$ による完備化とした時

(3.1)　$\mathbb{F}(S\times S)=\bigcap_{\bar{\mu}}\mathbb{B}^{\bar{\mu}}(S\times S)$

と定義し，$S\times S$ 上の $\mathbb{F}(S\times S)$ 可測函数の全体を $F(S\times S)$ であらわす。

注意 4.3.1.　$f\in\mathbb{F}(S)$ なら $f_-(x.y)\equiv f(x)$　$f_+(x.y)\equiv f(y)$ とおくと f_-, $f_+\in F(S\times S)$。

今 $g\in\mathfrak{O}_0$　$0\leqq\varphi\equiv\varphi(x.y)\in F(S\times S)$ に対し

(3.2)　$\varphi\cdot g(t)=\int_0^t\varphi(x_{s-},x_s)\,dg(s)$

と定義する。$\varphi\cdot g\in\mathfrak{O}_0$ である。(註)

$f\in F(S)$ に対し $f_-\cdot g$ は

(3.3)　$f_-\cdot g(t)=\int_0^t f(x_{s-})\,dg(s)$

となる。$f_+\cdot g$ は単に $f\cdot g$ と書く。（今迄の記号と一致する。）

注意 4.3.2.　$g.\gamma\in\mathfrak{O}_0^\alpha$ とし全ての $0\leqq\varphi\in F(S\times S)$ に対し，$\overline{U}_{\varphi.g}^\alpha=\overline{U}_{\varphi.\gamma}^\alpha$

(註)　可測性は lemma 2.2.1 からわかる。

加法性その他の性質は自明である。

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

が成立すれば，$g \sim \gamma$.

(証明) 任意の $f \in F(S)$ に対し $f = f_1 - f_2$ $0 \leq f_i \in F(S)$ とすると，特に $U^{\alpha}_{f_i \cdot g} = U^{\alpha}_{f_i \cdot \gamma}$ $(i=1,2)$ が成立し，$U^{\alpha}_{g} f \equiv U^{\alpha}_{\gamma} f$ 従って定理 2.5.7 より $g \sim \gamma$. (証明終)

lemma 4.3.3. $g \in \mathfrak{O}^{\alpha}_{b_0}$ に対し

(1) $a \in \mathcal{L}^{\alpha}$ が同値を除いて唯一つ存在して $U^{\alpha}_{g} = U^{\alpha}_{a}$

(2) この a に対し 任意の $\beta \geq \alpha$ と $\sigma \in$ M.T. に関し（又は任意の β と $\sigma \in g$・H.T. に関し）

$$E_x(g_\beta(\sigma)) = E_x(a_\beta(\sigma))$$ が成立する。

(証明) $u = U^{\alpha}_{g} \in D^{\alpha}_{R}$ (定理 3.1.9). 従って $u = U^{\alpha}_{a}$ となる $a \in \mathcal{L}^{\alpha}$ が存在する (定理 3.3.8)。一意性は定理 2.7.3 である。

(2) は lemma 2.7.2 からわかる。 (証明終)

lemma 4.3.4. $g \in \mathfrak{O}^{\alpha}_{b_0}$ $a \in \mathcal{L}^{\alpha}$ 且つ $U^{\alpha}_{g} \equiv U^{\alpha}_{a}$ ならば任意の $f \in F(S)$ に対して $E_x(\int_0^\infty f(x_{s-})\,dg_\alpha) = E_x(\int_0^\infty f(x_s)\,da_\alpha)$ である。特に $f \geqq 0$ ならば $U^{\alpha}_{f \cdot g} = U^{\alpha}_{f \cdot a}$

(証明) $f \in C_\infty(S)$ の場合証明すれば充分である。

$\sigma \in$ M.T. で σ-chain $\{\hat{\sigma}_n\}$ が f-ε chain になるように σ をえらぶ。(lemma 2.3.1.)。

$$E_x(\int_0^\infty f(x_{s-})\,dg_\alpha) = E_x(\sum_{n=0}^{\infty} \int_{\hat{\sigma}_n}^{\hat{\sigma}_{n+1}} f(x_{s-})\,dg_\alpha) = I_1 + I_2$$

$$E_x(\int_0^\infty f(x_s)\,da_\alpha) = E_x(\sum_{n=0}^{\infty} \int_{\hat{\sigma}_n}^{\hat{\sigma}_{n+1}} f(x_s)\,da_\alpha) = J_1 + J_2$$

但し $$I_1 = E_x(\sum_{n=0}^{\infty} \int_{\hat{\sigma}_n}^{\hat{\sigma}_{n+1}} f(x_{\hat{\sigma}_n})\,dg_\alpha) = E_x(\sum_{n=0}^{\infty} f(x_{\hat{\sigma}_n})\,E_{x_{\hat{\sigma}_n}}(g_\alpha(\sigma))\,e^{-\alpha\hat{\sigma}_n})$$

$$I_2 = E_x(\sum_{n=0}^{\infty} \int_{\hat{\sigma}_n}^{\hat{\sigma}_{n+1}} (f(x_{s-}) - f(x_{\hat{\sigma}_n}))\,dg_\alpha)$$

$$J_1 = E_x(\sum_{n=0}^{\infty} f(x_{\hat{\sigma}_n})\,E_{x_{\hat{\sigma}_n}}(a_\alpha(\sigma))\,e^{-\alpha\hat{\sigma}_n})$$

$$J_2 = E_x(\sum_{n=0}^{\infty} \int_{\hat{\sigma}_n}^{\hat{\sigma}_{n+1}} (f(x_s) - f(x_{\hat{\sigma}_n})\,d\alpha)$$

所が lemma 4.3.3 (2) によって $I_1 = J_1$. 又 a_α が連続であるから $\int_{\hat{\sigma}_n}^{\hat{\sigma}_{n+1}} (f(x_s) - f(x_{\hat{\sigma}_n}))\,da_\alpha = \int_{(\hat{\sigma}_n, \hat{\sigma}_{n+1})} (f(x_s) - f(\hat{\sigma}_n))\,da_\alpha$

及び $\sup_{s \in (\hat{\sigma}_n, \hat{\sigma}_{n+1}]} |f(x_{s-}) - f(x_{\hat{\sigma}_n})| \leqq \sup_{s \in (\hat{\sigma}_n, \hat{\sigma}_{n+1})} |f(x_s) - f(x_{\hat{\sigma}_n})| \leq \varepsilon$ に注意し．

$$|I_2| \leq \varepsilon E_x(g_\alpha(\infty)) \qquad |I_2| \leq \varepsilon E_x(a_\alpha(\infty))$$

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

εは任意であるから lemma を得る。（証明終）

定義 $\varphi \in \mathcal{O}_0$に対して $a \in \mathcal{L}$ が存在して，任意の $0 \leq f \in F(S)$ とαに対し

(3.4) $U^{\alpha}_{f \cdot \varphi} \equiv U^{\alpha}_{f \cdot a}$ （一方が∞なら他方も∞とする）が成立する時 aをφの飛躍の平均ということにし，$a = \tilde{\varphi}$であらわす。

$\mathcal{O}_0$の中飛躍の平均の存在する additive functional の全体を$\mathcal{O}^*_0$とする。

定理 4.3.5 $\varphi \in \mathcal{O}^*_0$に対し$\tilde{\varphi}$は（同値を除いて）一意的に定まる。

（証明） a, bをφの飛躍の平均値とすれば$\alpha > 0$ と $0 \leq f \in F(S)$に対し $U^{\alpha}_{f \cdot a} = U^{\alpha}_{f \cdot b}$ が成立する。

特に $f \cdot a \in \mathcal{L}^{\alpha}$ なら，両辺共有界になり $f \cdot a \sim f \cdot b$ lemma 4.2.6 より $a \sim b$ を得る。（証明終）

注意 4.3.6 任意のαに対し $\mathcal{O}^{\alpha}_0 \subset \mathcal{O}^*_0$.

（証明） $\varphi \in \mathcal{O}^{\alpha}_0$ に対し，lemma 4.3.3 により $a \in \mathcal{L}^{\alpha}$ が存在して $U^{\alpha}_a \equiv U^{\alpha}_{\varphi}$，従って lemma 4.3.4 から $0 \leq f \in F(S)$に対し $U^{\alpha}_{f \cdot a} = U^{\alpha}_{f \cdot \varphi}$ を得る。此処で lemma 4.3.3 (2) を使うと（$\infty \in S.H.T.$であるから）任意のβに対し $U^{\beta}_{f \cdot a} = U^{\beta}_{f \cdot \varphi}$ を得る。(註1) （証明終）

注意 4.3.7 (1) $\varphi \in \mathcal{O}^*_0$ $\gamma \ll \varphi$ なら $\gamma \in \mathcal{O}^*_0$ で $\tilde{\gamma} \ll \tilde{\varphi}$

(2) $C \geqq 0$ $\varphi \in \mathcal{O}^*_0$ なら $C\varphi \in \mathcal{O}^*_0$ で $\widetilde{C\varphi} \sim C\tilde{\varphi}$

(3) $\varphi\ \gamma \in \mathcal{O}^*_0$ なら $\varphi + \gamma \in \mathcal{O}^*_0$ で $\widetilde{\varphi + \gamma} \sim \tilde{\varphi} + \tilde{\gamma}$

(4) $0 \leq f \in F(S)$ $\varphi \in \mathcal{O}^*_0$ なら $f \cdot \varphi \in \mathcal{O}^*_0$ $\widetilde{f \cdot \varphi} \sim f \cdot \tilde{\varphi}$

(5) $\varphi^n, \varphi \in \mathcal{O}^*_0$ $\varphi^n \Uparrow \varphi$ なら $\tilde{\varphi}^n \Uparrow \tilde{\varphi}$

（証明） (1) $\alpha > 0$ に対し $\gamma^n \in \mathcal{O}^{\alpha}_0$ $\gamma^n \uparrow \gamma$ となるようにえらぶ。（定理 2.8.9）．注意 4.3.6 により $\tilde{\gamma}_n$は存在するが $n < m$ 及び $0 \leq f \in F(S)$に対し $U^{\alpha}_{f \cdot \tilde{\gamma}_n} = U^{\alpha}_{f \cdot \gamma_n} \ll U^{\alpha}_{f \cdot \gamma_m} = U^{\alpha}_{f \cdot \tilde{\gamma}_m}$ $U^{\alpha}_{f \cdot \tilde{\gamma}_n} = U^{\alpha}_{f \cdot \gamma_n} \ll U^{\alpha}_{f \cdot \varphi} = U^{\alpha}_{f \cdot \tilde{\varphi}}$ 従って lemma 4.2.6 より $\tilde{\gamma}_n \ll \tilde{\varphi}$ $\tilde{\gamma}_n \Uparrow$ 従って $a(t) = \lim \tilde{\gamma}^n(t)$ とおけば $a(t) \leq \tilde{\varphi}(t)$(註2)より $a \in \mathcal{L}$ で $\tilde{\gamma}^n \Uparrow a \ll \tilde{\varphi}$

（註）1. $\varphi \in \mathcal{O}^{\alpha}_0$ に対しては lemma 4.3.3 の a が $\tilde{\varphi}$ になっているのである。

2. $a(t) \leq \varphi(t)$ より $\gamma'(t) < \infty$ $\forall t \in (0, \infty)$ a.s. P_x $\forall x \in S$ が保証される。

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

又任意のβに対し$U^{\beta}_{f\cdot\widetilde{\gamma}_n}=U^{\beta}_{f-\gamma_n}$が成立しているから$n\to\infty$として$U^{\beta}_{f\cdot a}=U^{\beta}_{f-\gamma}$を得る。即ち$\gamma'\sim\gamma$。

(2) (3), (4) $\varphi\in\mathcal{O}^*_0$の時 任意の$\alpha$と$0\leq g\in F(S)$に対し$U^{\alpha}_{g\cdot f\cdot\widetilde{\varphi}}=U^{\alpha}_{g\cdot f\cdot\varphi}$より$f\cdot\varphi\in\mathcal{O}^*_0$且つ$\widetilde{f\cdot\varphi}\sim f\cdot\widetilde{\varphi}$を得る。即ち(4)が証明された。

$f=c$ 定数とすれば(2)を得る。

(3)は$U^{\alpha}_{g\cdot(\widetilde{\varphi}+\widetilde{\gamma})}=U^{\alpha}_{g\cdot\widetilde{\varphi}}+U^{\alpha}_{g\cdot\widetilde{\gamma}}=U^{\alpha}_{g\cdot\varphi}+U^{\alpha}_{g\cdot\gamma}=U^{\alpha}_{g\cdot(\varphi+\gamma)}$より明か。

(5) (1)より$\widetilde{\varphi}^n\ll\widetilde{\varphi}$であるから$\widetilde{\varphi}^n\Uparrow a\ll\widetilde{\varphi}$となる。一方任意の$\alpha$と$0\leq f\in F(S)$に対し$U^{\alpha}_{f\cdot\widetilde{\varphi}^n}=U^{\alpha}_{f\cdot\varphi^n}$より$n\to\infty$として$U^{\alpha}_{f\cdot a}=U^{\alpha}_{f\cdot\varphi}=U^{\alpha}_{f\cdot\widetilde{\varphi}}$ 一意性より$a\sim\widetilde{\varphi}$を得る。(証明終)

lemma 4.3.8 $\varphi\in\mathcal{O}^*_0$の時、任意の$\alpha$と$0\leq f\in F(S)$及び$\sigma\in\mathcal{G}.H.T.$に対し$E_x(f\cdot\varphi_\alpha(\sigma))=E_x(f\cdot\widetilde{\varphi}_\alpha(\sigma))$ $\forall x\in S$.

(証明) $\beta>0$に対し$\varphi^n\Uparrow\varphi$ $\varphi^n\in\widetilde{\mathcal{O}}^\beta$ととる(定理2.8.9)。lemma 4.3.3より任意のα. f, σに対し$E_x(f\cdot\varphi^n_\alpha(\sigma))=E_x(f\cdot\widetilde{\varphi}^n_\alpha(\sigma))$ 注意4.3.7(5)より$\widetilde{\varphi}^n\Uparrow\widetilde{\varphi}$であるから$n\to\infty$として

$E_x(f\cdot\varphi_\alpha(\sigma))=E_x(f\cdot\widetilde{\varphi}_\alpha(\sigma))$ を得る。 (証明終)

一般に$\mathcal{O}^*_0\subsetneqq\mathcal{O}_0$であるが$\varphi\in\mathcal{O}^*_0$の充分条件として次の結果をあげておく。

定理 4.3.9. (1) $\varphi\in\mathcal{O}^\alpha_0$なら$\varphi\in\mathcal{O}^*_0$

(2) $\varphi\in\mathcal{O}_0$ $\varphi(t)-\varphi(t-)\leq K$ (有界) なら$\varphi\in\mathcal{O}^*_0$.

(証明) (1) は注意4.3.6のくり返しである。

(2)の証明 $\varphi^n\in\bigcap_{\alpha>0}\widetilde{\mathcal{O}}^\alpha$ $\varphi^n\Uparrow\varphi$ ととる(定理2.8.9)

$a(t)=\lim_{n\to\infty}\widetilde{\varphi}^n(t)$とおく。$\sigma_N=\inf t:\varphi(t)\geq N$とすると(A.5)より全ての$x\in S$に対し$\lim_{N\to\infty}\sigma_N=\infty$ a.s. P_x. $\varphi(\sigma_N-)\leq N$であるから

$\varphi(\sigma_N)=\varphi(\sigma_N-)+\varphi(\sigma_N)-\varphi(\sigma_N-)\leq K+N$

lemma 4.3.3.(2) より$\sigma_N\in M.T.$だから

$E_x(\widetilde{\varphi}^n_\alpha(\sigma_N))=E_x(\varphi^n_\alpha(\sigma_N))\leq E_x(\varphi(\sigma_N))\leq K+N$

$\alpha>0$は任意であるから

$E_x(\widetilde{\varphi}^n(\sigma_N))\leq K+N$ $n\to\infty$として$E_x(a(\sigma_N))\leq K+N$

従って $P_x(a(t)<\infty\ \forall t\leq\sigma_N)=1$ $N=1,2,\cdots\cdots$

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

故に $P_x(a(t)<\infty\ \forall t<\lim_{N} \sigma_N)=1$ を得る。これと $\lim \sigma_N=\infty$ a.s. P_x とを合せると、全ての $x\in S$ に対して

$$P_x(a(t)<\infty\ \forall t<\infty)=1$$ がわかる。

即ち $a=a(t\cdot w)$ は (A.5) をみたす。$a(t\cdot w)<\infty$ $\tilde{g}^n(t\cdot w)\uparrow a(t\cdot w)$ となる w に対しては後者の収束は広義一様になり（定理 2.8.3 の証明参照） $a\in\mathfrak{A}$ 従って $a\in\mathfrak{L}$ が直ちにわかる。
任意の β と $0\le f\in F(S)$ に対し $U^{\beta}_{f\cdot\tilde{g}_n}=U^{\beta}_{f\cdot g^n}$ が成立している。から、(lemma 4.3.3(2)) $n\to\infty$ として $U^{\beta}_{f\cdot a}=U^{\beta}_{f\cdot g}$ である。

即ち $a=\tilde{g}$ となる。（証明終）

4.4. $\mathfrak{G}_0$ の表現

定義 $g\in\mathfrak{G}_0$ の時 $\mathbb{F}(S\times S)$ 上の測度 $\bar{\lambda}$ が $0\le\varphi\in F(S\times S)$ に対して

(1) $\varphi\cdot g\sim 0$ なら $\varphi=0$ a.s. $\bar{\lambda}$

(2) $\varphi=0$ a.s. $\bar{\lambda}$ なら $\varphi\cdot g\sim 0$

をみたす時 $\bar{\lambda}$ を g の二変数canonical測度という。

普通のcanonical測度の場合と同様に次の結果が成立する。

定理 4.4.1. (1) $g\in\mathfrak{G}_0$ に対し g の二変数canonical測度は存在する。

(2) $\bar{\lambda},\bar{\lambda}'$ を g の二変数canonical測度とすれば $\bar{\lambda}$ と $\bar{\lambda}'$ は互に絶対連続である。

(証明) (i) $g\in\mathfrak{G}_0^{\alpha}$ の場合は η を U^{α}_{g} を可積分にするreference測度とすれば $E\in\mathbb{F}(S\times S)$ に対し $\bar{\lambda}(E)=\int U^{\alpha}_{\chi_E\cdot g}(x)\,d\eta$ とおけば $0\le\varphi\in F(S\times S)$ に対し $\int U^{\alpha}_{\varphi\cdot g}\,d\eta=\int\varphi(x,y)\,d\bar{\lambda}$ となる。$\varphi\cdot g\sim 0$ なら明かに $\varphi=0$ a.s. $\bar{\lambda}$. 逆に $\varphi=0$ a.s. $\bar{\lambda}$ なら $U^{\alpha}_{\varphi\cdot g}(x)=0$ a.s. η. 定理 1.5.2 より $U^{\alpha}_{\varphi g}\equiv 0$. $\varphi\geqq 0$ より $\varphi\cdot g\sim 0$ を得る。

(ii) 一般の $g\in\mathfrak{G}_0$ に対しては $\alpha>0$ に対し $g^n\Uparrow g$ $g^n\in\mathfrak{G}_{0}^{\alpha}$ をえらび（定理 2.8.9） g^n の二変数canonical測度 $\bar{\lambda}_n$ に対し
$\bar{\lambda}=\sum\frac{1}{2^n\bar{\lambda}_n(S)}\bar{\lambda}^n$ とおけば $\bar{\lambda}$ は g のcanonical測度になる。（定理

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

4.1.2 の証明参照)

(iii) (2) は定義から明かである。

注意 4.4.2. $g\in\mathcal{G}_0^\alpha$ に対して, ξ を U_g^α を可積分にする reference 測度とすれば, $\bar\lambda(E)=\int \bar U^\alpha_{\chi_E\cdot g}(x)\,d\xi$ $E\in\mathbb{F}(S\times S)$ とおけば $\bar\lambda$ は g の二変数 canonical 測度である. 定理 4.1.4 と全く同様に次の結果が成立する。

定理 4.4.3. $g\in\mathcal{G}_0$ に対し $\bar\lambda$ を g の二変数 canonical 測度とするとし非負 $\mathbb{F}(S\times S)$ 可測な函数 φ, ψ が $\varphi\cdot g$ $\psi g\in\mathcal{G}_0$ の時, 次の条件は同値である。 (1) $\varphi\cdot g\sim\psi\cdot g$ (2) $\varphi=\psi$ a.s.$\bar\lambda$.

(証明) $\bar H_1=\{(x,y);\varphi>\psi\}$ $\bar H_2=\{(x,y);\varphi=\psi\}$ $\bar H_3=\{(x,y);\varphi<\psi\}$ とおく。 $\chi_{\bar H_1}(\varphi-\psi)>0$ であるから $\chi_{\bar H_1}(\varphi-\psi)\cdot g\sim 0$ と $\chi_{\bar H_1}(\varphi-\psi)=0$ a.s.$\bar\lambda$ は同値. 同様 $-\chi_{\bar H_3}(\varphi-\psi)g\sim 0$ と $\chi_{\bar H_3}(\varphi-\psi)=0$ a.s.$\bar\lambda$ は同値である。

従って, $\varphi\sim\psi \rightleftarrows \chi_{\bar H_i}\varphi\sim\chi_{\bar H_i}\psi \rightleftarrows \varphi=\psi$ a.s.$\bar\lambda$ (H_i上で)

$\rightleftarrows \varphi=\psi$ a.s.$\bar\lambda$

を得る。

注意 4.4.4. $g\in\mathcal{G}_0$ $\bar\lambda$ を g の二変数 canonical 測度とする。

$\lambda_1(\cdot)=\bar\lambda(\cdot\times S)$ $\lambda_2(\cdot)=\bar\lambda(S\times\cdot)$ とおくと $\lambda_1,\lambda_2\in M^+(S)$ であるが

(1) λ_2 は g の(普通の意味の) canonical 測度である。

(2) $g\in\mathcal{G}_0^*$ の時 λ_1 は $\hat g$ の canonical 測度になる。

(3) $\bar D=\{(x,y);x=y\}$ とおくと $\bar\lambda(\bar D)=0$.

(証明) (1) $0\le f\in F(S)$ に対し $f\cdot g\sim 0 \rightleftarrows f(y)=0$ a.s.$\bar\lambda \rightleftarrows f(y)=0$ a.s.λ_2 より明かである。

(2) $0\le f\in F(S)$ をとると (1) と同様 $\underline{f}\cdot g\sim 0$ が $f(x)=0$ a.s.λ_1 が云える。他方 $\alpha>0$ に対し $g^n\in\bar{\mathcal{G}}_0^\alpha$ $g^n\Uparrow g$ をとると (定理 2.8.9) 注意 4.3.6 より $\hat g^n\Uparrow\hat g$. 従って $\underline{f}\cdot g^n\sim 0$ $(n=1,2,\cdots)$ と $\underline{f}\cdot g\sim 0$ 及び $f\cdot\hat g^n\sim 0$ $(n=1,2,\cdots)$ と $f\cdot\hat g\sim 0$ は夫々同値である。しかるに $U^\alpha_{\underline{f}\cdot g^n}=U^\alpha_{f\cdot\hat g^n}$ $f\geqq 0$ より $\underline{f}\cdot g^n\sim 0$ $(n=1,2,\cdots)$ と $f\cdot\hat g^n\sim 0$ $(n=1,2,\cdots)$ は同値. これらを組み合せて, $f\cdot\hat g\sim 0$ と $f=0$ a.s.λ_1 が同値なことがわかる。

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

(3) は $x_t = x_{t-}$ なら $g(t) - g(t-) = 0$ より $\chi_{\bar{D}} \cdot g \sim 0$. 従って $\chi_{\bar{D}} = 0$ a.s. $\bar{\lambda}$ 即ち $\bar{\lambda}(\bar{D}) = 0$. （証明終）

lemma 4.2.3. と類似の次の結果が成立する。

lemma 4.4.5. $g \cdot \gamma \in \mathfrak{G}_0$ $\gamma \ll g$ とすれば, $0 \leq \varphi \leq 1$ $\varphi \in F(S \times S)$ が存在して, $\gamma = \varphi \cdot g$ となる。

(証明) (i) 先ず $0 \leq 4 \in F(S \times S)$ に対して, $4 \cdot \gamma \ll \|4\| \gamma \ll \|4\| g$ $4 \cdot g \ll \|4\| \cdot g$ であるから $4 \cdot g$, $4 \cdot \gamma$ は $\mathfrak{G}_0^\alpha$ に従って $\mathfrak{G}_0^*$ に属する。

(ii) η を U_g^α を可積分にする reference 測度とし,
$\bar{\lambda}_\gamma(\bar{E}) = \int U^\alpha_{\chi_{\bar{E}} \cdot \gamma}(x) d\eta$ $\bar{\lambda}_g(\bar{E}) = \int U^\alpha_{\chi_{\bar{E}} g}(x) d\eta$ $(\bar{E} \in \mathbb{F}(S \times S))$ とおくと $\gamma \ll g$ より $\bar{\lambda}_\gamma(\cdot) \leqq \bar{\lambda}_g(\cdot)$ 従って $0 \leqq \varphi \leq 1$ $\varphi \in F(S \times S)$ が存在し $\bar{\lambda}_\gamma(dx\,dy) = \varphi(x, y) \bar{\lambda}_g(dx, dy)$ 従って任意の $0 \leq 4 \in F(S \times S)$ に対して $\int U^\alpha_{4 \cdot \gamma}(x) d\eta = \int 4 d\bar{\lambda}_\gamma = \int 4\varphi d\bar{\lambda}_g = \int U^\alpha_{4\varphi \cdot g}(x) d\eta$.

$0 \leq f \leq F(S)$ を任意にとり, 4 の代りに $f4 = f(x) 4(x, y)$ を考えると $\int U^\alpha_{f \cdot 4\gamma}(x) d\eta = \int U^\alpha_{f \cdot 4\varphi g}(x) d\eta$ $\widetilde{f4\gamma} = f \cdot \widetilde{4\gamma}$ $\widetilde{f4\varphi g} = f \widetilde{4\varphi g}$ に注意し, $\int U^\alpha_{\widetilde{4\gamma}} f(x) d\eta = \int U^\alpha_{\widetilde{4\varphi g}} f(x) d\eta$ を得る。

f は任意であるから $\widetilde{4\gamma} \sim \widetilde{4\varphi g}$ を得る。

(iii) 従って $U^\alpha_{\widetilde{4\gamma}}(x) \equiv U^\alpha_{\widetilde{4\varphi g}}(x)$ であるが, この事から
$U^\alpha_{4\gamma}(x) \equiv U^\alpha_{\widetilde{4\gamma}}(x) \equiv U^\alpha_{\widetilde{4\varphi g}}(x) \equiv U^\alpha_{4\varphi g}(x)$ を得る。
$0 \leq 4 \leq F(S \times S)$ は任意であったから注意 4.3.2 より
$\gamma \sim \varphi g$ がわかる。（証明終）

定理 4.4.6. $\gamma, g \in \mathfrak{G}_0$ $\bar{\lambda}$ を g の二変数 canonical 測度とする。

(1) $0 \leq 4 \in F(S \times S)$ に対し $4 \cdot g \sim 0$ なら必ず $4 \cdot \gamma \sim 0$ の時 $\mathbb{F}(S \times S)$ 可測な有限非負函数 $\varphi = \varphi(x, y)$ が存在し, $\gamma \sim \varphi \cdot g$ となる.
φ は $\bar{\lambda}$ 測度 0 を除いて定る。

(2) 特に有限非負 $\mathbb{F}(S)$ 可測な函数 φ_1 に対し, $\varphi_1 \cdot g \in \mathfrak{G}_0$ $\gamma \ll \varphi_1 \cdot g$ なら $\gamma = \varphi \cdot g$ $0 \leq \varphi \leq \varphi_1$ ととれる。

(証明) 定理 4.2.4. の証明と全く同じである。

(i) 定理 2.8.9 より $g^n, \gamma^n \in \bar{\mathfrak{G}}_0^\alpha$ $\sum_{n=1}^N g^n \Uparrow g$ $\sum_{n=1}^N \gamma^n \Uparrow \gamma$ ととる。
$S^n = g^n + \gamma^n$ とおくと $S^n \in \bar{\mathfrak{G}}_0^\alpha$ $U^\alpha_{S^n}(x) \leq K_n$ とする.

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

$S = \sum \frac{1}{2^n K_n} S^n$ とおくと

$S \in \overline{\mathcal{Q}}_0^{\alpha}$, $2^n K_n S \geq g^n, \gamma^n$ である。従って前の lemma から $0 \leq \varphi_g^n$, $\varphi_r \in F(S \times S)$ が存在し、$g^n \sim \varphi_g^n \cdot S$ $\gamma^n \sim \varphi_s^n \cdot S$, $\varphi_g = \sum \varphi_g^n$ $\varphi_r = \sum \varphi_r^n$ とおくと $g \sim \varphi_g \cdot S$ $\gamma \sim \varphi_r \cdot S$ がわかる。

$E = \{(x, y) ; \varphi_g(x, y) = 0\} \in F(S \times S)$ とおけば $\chi_E \cdot g \sim \chi_E \varphi_g S \sim 0$ より $\chi_E \cdot \gamma \sim \chi_E \varphi_r S \sim 0$ $\varphi(x, y) = \frac{\varphi_r(x, y)}{\varphi_g(x, y)}$ $(x, y) \in E^c$

$\varphi(x, y) = 0$ $(x, y) \in E$ と定義すると

$\chi_{E^c} \varphi g \sim \chi_{E^c} \varphi \varphi_g S \sim \chi_{E^c} \varphi_r S \sim \chi_{E^c} \gamma$

従って $\varphi g \sim \gamma$ を得る。(φ は有限としてよい)(註)

一意性は定理4.4.3から明か。

(ii) (2)の証明 $0 \leq \psi \in F(S \times S)$ に対し $\psi \cdot g \sim 0$ なら $\psi \cdot \varphi g \sim 0$ 従って $\psi \cdot \gamma \sim 0$. 従って(i)より $\gamma \sim \varphi g$ となる。$S \in \mathcal{Q}_0$ を $S + \gamma \sim \varphi_1 g$ ととると(注意2,8,2)同様に $S \sim \varphi' g$ となる。$(\varphi + \varphi') g \sim \varphi_1 g$ $\varphi + \varphi' = \varphi_1$ a.s. $\overline{\lambda}$ $\widetilde{\varphi} = \varphi \wedge \varphi_1$ とおけば $\widetilde{\varphi} = \varphi$ a.s. $\overline{\lambda}$ 従って $\gamma \sim \varphi g \sim \widetilde{\varphi} \cdot g$. $(0 \leq \widetilde{\varphi} \leq \varphi_1)$ (証明終)

(4.1) $J = J(w) = \{ t ; (t < \zeta)\ x_t(w)$ の不連続点$\}$

$J_\varepsilon = J_\varepsilon(w) = \{ t ; (t < \zeta)\ |x_{t-}, x_t| \geq \varepsilon \}$ $\varepsilon > 0$

$J_k = J_k(w) = \{ t ; (t < \zeta)\ \frac{1}{k+1} \leq |x_{t-}, x_t| < \frac{1}{k} \}$ $k = 0, 1, 2, \cdots$

とおく。明かに $J = \sum_{k=0}^{\infty} J_k$ である。

(4.2) $n_\varepsilon(t, w) = \sum_{\substack{s \leq t \\ s \in J_\varepsilon}} 1$

(4.3) $n_k(t, w) = \sum_{\substack{s \leq t \\ s \in J_k}} 1$

とおくと 1.1節(W.1)(W.2)により $n_\varepsilon(t, w), n_k(t, w) < \infty$ $(t < \infty)$ である。今 $\sigma = \inf t ; |x_{t-}, x_t| \geq \varepsilon$ $t < \zeta$

$= \infty$ (上のtの存在しない時)

とし $\{\hat{\sigma}_n\}$ を σ-chain とすれば $n_\varepsilon(t)$ は

$n_\varepsilon(t) = \sum_{\sigma_n \leq t} 1$

とも書けるから2,2節例1.4と同様 $n_\varepsilon \in \mathcal{O}$ 従って又 $n_\varepsilon \in \mathcal{Q}_0$ がわ

(註) 定理4,2,4の注参照。

わかる. 同様 $n_k \in \mathcal{Q}_0$ である。

n_kの二次数 canonical 測度を $\overline{\lambda}_k$ とし

(4.3) $\overline{\lambda}_J = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k(\overline{\lambda}_k(S\times S)+1)} \overline{\lambda}_k$ とおく. 次の注意は $\overline{\lambda}_k$ の定義から自明である。

注意 4.4.7 $0 \leq \varphi \in F(S\times S)$ に対して (1), (2), (3) は同値である。

(1) $\varphi = 0$ a.s. $\overline{\lambda}_J$ (2) $\varphi \cdot n_k \sim 0$ $k=0,1,2,\cdots$ (3) $\varphi \cdot n_\varepsilon \sim 0$ $\forall \varepsilon > 0$.

上の性質を持つ $\overline{\lambda}_J$ は(互に絶対連続なものを同じと見なせば)一意的に定る。

(証明) (2) と (3) の同値は $n_k \ll n_\varepsilon$ ($\varepsilon \leq \frac{1}{k+1}$ の時) 及び $n_\varepsilon \ll \sum_{k\leq k_0} n_k$ ($k_0 \geq \frac{1}{\varepsilon}-1$ の時) に注意すれば明かである。 (証明終)

$\overline{\lambda}_J$は x_t の飛躍の範囲を定めていると考える事ができる。

今 φ を非負 $\mathbb{F}(S\times S)$ 可測な函数とする時

(4.4) $n(\varphi)(t) = \sum_{\substack{s\leq t\\ s\in J}} \varphi(x_{s-}, x_s)$ とおく。

$$n(\varphi)(t) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \varphi . n_k(t) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \varphi\cdot n_\varepsilon(t)$$

であるから, 若し $P_x(n(\varphi)(t)<\infty \ \forall t<\infty)=1$ が全ての $x\in S$ に対して成立すれば $\sum_{k=1}^{N}\varphi\cdot n_k(t) \Uparrow n(\varphi)$ となり $n(\varphi)\in\mathcal{Q}_0$ である。この事と逆に次の定理が成立する。

定理 4.4.8. $g\in\mathcal{Q}_0$ に対し非負 $\mathbb{F}(S\times S)$ 可測な函数 φ が存在し,

$g \sim n(\varphi) = \sum_{\substack{s\leq t\\ s\in J}} \varphi(x_{s-}, x_s)$

と表現される。 φ は $\overline{\lambda}_J$測度 0 を除いて一意的に定る。(註)

(証明) (i) $g_k(t) = \sum_{\substack{s\leq t\\ s\in J_k}} (g(s)-g(s-))$

$$= \int_0^t \chi\left(\frac{1}{k+1} \leq g(s)-g(s-) < \frac{1}{k}\right) dg(s)$$

とおくと $g_k(t)\in\mathcal{Q}_0$ である. 若し $0\leq \psi \in F(S\times S)$ に対し,

$\psi . n_k = \sum_{\substack{s\leq t\\ s\in J_k}} \psi(x_{s-}, x_s) \sim 0$ なら, 全ての $x\in S$ に対し $\psi(x_{s-}, x_s) = 0$ $\forall s\in J_k$ a.s. P_x. となるから

$\psi\cdot g_k = \sum_{\substack{s\leq t\\ s\in J_k}} \psi(x_{s-}, x_s)(g(s)-g(s-)) \sim 0$ である。

(註) この時当然 $P_x(n(\varphi)(t)<\infty \ \forall t<\infty) = P_x(g(t)<\infty \ \forall t<\infty) = 1$ となる。

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

従って定理 4.4.6 (i) より非負 $\mathbb{F}(S\times S)$ 可測函数 φ_k が存在し，
$g_k \sim \varphi_k \cdot n_k$ となる。

即ち $$g_k(t,w) = \sum_{\substack{s\leq t\\ s\in J_k}} \varphi_k'(x_{s-},x_s). \quad a.s.\ P_x \ \forall x\in S$$

今 $\bar{A}_k = \{(x,y) : \frac{1}{k+1} \leq |x,y| < \frac{1}{k}\}$ とおくと $(x_{s-},x_s) \in \bar{A}_k$ と $s\in J_k$ とは同値であるから $\varphi_k = \varphi_k' \chi_{\bar{A}_k}$ としても

$$g_k(t,w) = \sum_{\substack{s\leq t\\ s\in J_k}} \varphi_k(x_{s-},x_s) \quad a.s.\ P_x \ \forall x\in S.$$

しかも $(x_{s-},x_s) \notin \bar{A}_k$ 即ち $s\notin J_k$ なら $\varphi_k(x_{s-},x_s) = 0$． 故に

$$g_k(t,w) = \sum_{\substack{s\leq t\\ s\in J}} \varphi_k(x_{s-},x_s) \quad a.s.\ P_x \ \forall x\in S \quad a\,k = 0,1,2,\cdots$$

と書ける。一方 $\sum_{k=0}^{N} g_k \uparrow g$ であるから

$$g(t,w) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k(t,w) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\substack{s\leq t\\ s\in J}} \varphi_k(x_{s-},x_s) = \sum_{\substack{s\leq t\\ s\in J}}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k(x_{s-},x_s)\right) \quad a.s.\ P_x \ \forall x\in S.$$

を得る。$\varphi = \sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k$ とおくと定理の結果が得られる。

(ii) 一意性．若し $g \sim n(\varphi) \sim n(\varphi')$ であれば

$$\sum_{\substack{s\leq t\\ s\in J}} \varphi(x_{s-},x_s) = \sum_{\substack{s\leq t\\ s\in J}} \varphi'(x_{s-},x_s) \quad \forall t \quad a.s.\ P_x \ \forall x\in S.$$

従って，$\varphi(x_{s-},x_s) = \varphi'(x_{s-},x_s) \quad \forall s\in J \quad a.s.\ P_x \ \forall x\in S.$

でなければならない。この事から

$$\sum_{\substack{s\leq t\\ s\in J_k}} \varphi(x_{s-},x_s) = \sum_{\substack{s\leq t\\ s\in J_k}} \varphi'(x_{s-},x_s)\ \forall t \quad a.s.\ P_x \ \forall x\in S \quad k = 0,1,2,\cdots$$

を得る．即ち $\varphi\cdot n_k \sim \varphi'\cdot n_k \quad k=0,1,2,\cdots$

定理 4.4.3 を用いると $\varphi = \varphi' \ a.s.\ \bar{\lambda}_k \quad k=0,1,2,\cdots$ を得る。

$\bar{\lambda}_J$ の作り方 (4.4) より $\varphi = \varphi' \ a.s.\ \bar{\lambda}_J$ を得る． （証明終）

定理 4.4.8 の証明の (ii) の部分は，そのまま逆にたどって行く事ができるから，次の注意を得る．

注意 4.4.9. φ, φ' を非負 $\mathbb{F}(S\times S)$ 可測函数とする。

(1) $\varphi = \varphi' \ a.s.\ \bar{\lambda}_J$ ならば

$$\sum_{\substack{s\leq t\\ s\in J}} \varphi(x_{s-},x_s) = \sum_{\substack{s\leq t\\ s\in J}} \varphi(x_{s-},x_s) \quad \forall t \qquad a.s.\ P_x \ \forall x\in S \ である。$$

(2) 特に $n(\varphi)(t) = \sum_{\substack{s\leq t\\ s\in J}} \varphi(x_{s-},x_s) < \infty \quad \forall t<\infty \quad a.s.\ P_x \ \forall x\in S$ なら $n(\varphi) \in \mathfrak{G}_0$ で $\varphi = \varphi' \ a.s.\ \bar{\lambda}_J$ である φ' に対し $n(\varphi) \sim n(\varphi')$ となる。

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

4.5 Lévy 測度

前節と同様 $n_k(t,w)=\sum_{\substack{s\le t\\ s\in J_k}}1$ $n_\varepsilon(t,w)=\sum_{\substack{s\le t\\ s\in J_k}}1$ とおくと $n_k(t)-n_k(t-)\leqq 1$ であるから，定理 4.3.9. によって $n_k\in \mathfrak{N}_0^*$ である。n_kの飛躍の平均を $\widetilde{n}_k$ とおく。

前節通り λ_kを n_k の二変数 canonical 測度とし，

(4.1) $\overline{\lambda}_k(\cdot)=\lambda_k(\cdot\times S)$

とおく．λ_kは注意 4.4.4 から $\widetilde{n}_k$ の canonical 測度になる。

(4.2) $\lambda_J(\cdot)=\overline{\lambda}_J(\cdot\times S)$

とする。前節(3.4)の $\overline{\lambda}_J$ の定義から

$$\lambda_J(\cdot)=\sum\frac{1}{2^n(\lambda_k(S)+1)}\lambda_k$$

である。lemma 4.1.9 より

$$\widetilde{n}\leftrightarrow\{\widetilde{n}_1,\widetilde{n}_2,\cdots\}$$

となる $\widetilde{n}\in\Sigma^\alpha$ が存在している。

注意 4.5.1. λ_J は $\widetilde{n}$ の canonical 測度である。

今 $0\le f\in F(S)$ に対して，$f\cdot n_k\ll\|f\|n_k$ であるから注意 4.3.7 より $\widetilde{f\cdot n_k}\ll\|f\|\widetilde{n}_k$ となる。

従って定理 4.2.4 (2)が使えて，$0\le T_k'f\le\|f\|$ $T_k'f\in F(S)$ が存在して，

(4.3) $\widetilde{f\cdot n_k}\sim T_k'f\,\widetilde{n}_k$

と書ける。$T_k'f$ は λ_k 測度 0 を除いて一意的に定る。今各 $0\leqq f\in F(S)$ に対し $T_k'f$ を一つ定めることにする。

次に一般の $f\in F(S)$ に対して $f=f^+-f^-$ $f^+=f\vee 0$ $f^-=f\wedge 0$ である時 $T_k'f=T_k'f^+-T_k'f^-$ と定義する。

lemma 4.5.1. $f\in F(S)$ に対し

(1) $f\geqq 0$ なら $T_k'f\geqq 0$

(2) $|T_k'f(x)|\leqq\|f\|$

(3) $f,g\in F(S)$ に対し $T_k'(f+g)=T_k'f+T_k'g$ a.s. λ_k

(4) $f_n,f\in F(S)$ $\|f_n-f\|\to 0$ なら $T_k'f_n\to T_k'f$. a.s. λ_k。

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

(証明) (1) は定義から明か.

(2) $f \geqq 0$ の場合は $T'_k f$ の定義から明か。一般には $f = f^+ - f^-$ $f^+ = f \vee 0$ $f^- = f \wedge 0$ とすると

$$|T'_k f| = |T'_k f^+ - T'_k f^-| \leq |T_k f^+| \vee |T'_k f^-| \leqq \|f^+\| \vee \|f^-\| \leq \|f\|$$

(3) $f, g \geqq 0$ の時は 注意 4.3.7 より

$(\widetilde{f+g})n_k \sim \tilde{f}n_k + \tilde{g}n_k$ であるから

$T'_k(f+g)\hat{n}_k \sim (T'_k f + T'_k g)\hat{n}_k$ 従って定理 4.1.4 から

$T'_k(f+g) = T'_k f + T'_k g$ $a.s.\ \lambda_k$ を得る。

一般の場合は $f^+ + g^+ + (f+g)^- = f^- + g^- + (f+g)^+$ より

$$T'_k f^+ + T'_k g^+ + T'_k(f+g)^- = T'_k(f^+ + g^+ + (f+g)^-) = T'_k(f^- + g^- + (f+g)^+$$
$$= T'_k f^- + T'_k g^- + T'_k(f+g)^+ \quad a.s.\ \lambda_k$$

(4) (1) から $|T'_k f - T'_k g| = |T'_k(f-g)| \leqq \|f-g\|$ $a.s.\ \lambda_k$

がわかるから明かである。 (証明終)

lemma 4.5.2. (1) $C(S)$ は次の条件をみたす可算集合 C' を含む.

(C', 1) $f \in C'$ なら $|f| \in C'$

(C', 2) $f, g \in C'$ a, b 有理数なら

$af + bg \in C'$

(C', 3) C' は C の中で稠密 (一様位相)

(2) C' の元 f に $L(f)$ が対応して

(L, 1) $L(f+g) = L(f) + L(g)$

(L, 2) $f \geqq 0$ なら $L(f) \geqq 0$

(L, 3) $\|f\| \leq 1$ なら $|L(f)| \leq 1$

の時 $\mu \in M^+(S)$ が存在し $L(f) = \int f(y)\mu(dy)$ $f \in C'$

と表現できる。

この *lemma* は [19] にあたえられている ([19] 7章296頁 補題2 及び補題3). この *lemma* を用いて $T'_k f$ を積分で表現する事を考える。以下の証明も [19] と略同じである。

C' は可算集合であるから, *lemma* 4.5.1 より λ_k 測度 0 の部分集合 N が存在し, ($N \in \mathbb{F}(S)$)

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

$x \notin N$ なら lemma 4.5.1 (1), (2), (3) が全ての $f \in \mathcal{C}'$ に対して成立するようにできる。従って lemma 4.5.2 (2) より $x \notin N$ に対し $\hat{\mu}_k(x,\cdot) \in M^+(S)$ が存在して、

$T_k' f(x) = \int f(y)\hat{\mu}_k(x,dy) \quad \forall f \in \mathcal{C}'$ と表現できる。(註1)

$x \in N$ の時は $\hat{\mu}_k(x,\cdot) \equiv 0$ とおく。此処で

(4.4) $\hat{T}_k f(x) = \int \mu(x,dy) f(y) \quad f \in F(S)$

とおく。

μ の作り方から $f \in \mathcal{C}'$ に対して $\hat{T}_k f$ は $\mathbb{F}(S)$ 可測で(註2)

$$T_k' f = \hat{T}_k f \quad a.s.\ \lambda_k .$$

$\mathcal{C}'$ は $\mathcal{C}$ で稠密であるから $f \in \mathcal{C}$ に対し $f_n \in \mathcal{C}'$ $\|f_n - f\| \to 0$ となる $\{f_n\}$ を取ると $\lim_{n\to\infty} \hat{T}_k f_n = T_k f$ であるが他方 lemma 4.5.1 (4) より $\lim_{n\to\infty} T_k' f_n = T_k' f$ a.s. λ_k 従って $f \in \mathcal{C}$ に対しても

$$T_k' f = \hat{T}_k f \quad a.s.\ \lambda_k$$ を得る。

特に $0 \le f \in \mathcal{C}$ とすると定理 4.1.4 から

$$\hat{T}_k f\, \tilde{n}_k \sim T_k' f\, \tilde{n}_k \sim \widetilde{f \cdot n_k} .$$

G を S の任意の開集合とすると、$0 \le f_n \in \mathcal{C}$ $f_n \uparrow \chi_G$ となる $\{f_n\}$ をえらぶと $T_k f_n \uparrow T_k \chi_G$ 従って $\hat{T}_k f_n \cdot \tilde{n}_k \uparrow \hat{T}_k \chi_G \tilde{n}_k$ であるが、他方 $f_n n_k \Uparrow \chi_G n_k$ より lemma 4.3.7 から

$\widetilde{f_n n_k} \Uparrow \widetilde{\chi_G n_k}$. 即ち

(4.5) $\hat{T}_k \chi_G \tilde{n}_k \sim \widetilde{\chi_G n_k}$

を得る。

次に一般に $0 \le \varphi \in F(S \times S)$ に対し

(4.6) $\hat{T}_k \varphi(x) = \int \varphi(x,y)\, \hat{\mu}_k(x,dy)$

と定義する。$\hat{T}_k \varphi$ は $\mathbb{F}(S)$ 可測である。($0 \le \hat{T}_k \varphi \le \|\varphi\|$)

今 $E \in \mathbb{F}(S \times S)$ で $\widetilde{\chi_E \cdot n_k} \sim \hat{T}_k \chi_E \cdot \tilde{n}_k$ の成立する E の全体を $\mathbb{F}'$ であらわす。

(註1) $|T_k' f| \le \|f\|$ 且つ $\mathcal{C}'$ は $\mathcal{C}$ で稠密であるから $\mu_k(x,S) \le 1$ である。

(註2) $\mathcal{C}'$ が $\mathcal{C}$ で稠密なことから $f \in F(S)$ に対しても $\hat{T}_k f$ は $\mathbb{F}(S)$ 可測になる。

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

(i) G, H を S の開集合とし $\varphi(x,y)=\chi_{G\times H}=\chi_G(x)\chi_H(y)$ とおくと

$\hat{T}_k\varphi=\chi_G\cdot\hat{T}_k\chi_H$ であるが

$$\varphi\widetilde{n_k}\sim\widetilde{\chi_G\cdot\chi_H\cdot n_k}\sim\chi_G\widetilde{\chi_H n_k}\sim\chi_G\hat{T}_k\chi_H\cdot\widetilde{n_k}\sim\hat{T}_k\varphi\cdot\widetilde{n_k}$$

((4.5) 及び lemma 4.3.7 (3) による。)

従って $G\times H\in\mathbb{F}'$

(ii) $E_1, E_2\in\mathbb{F}'$ $E_1\supset E_2$ とすると

$$\widetilde{\chi_{E_2}\cdot n_k}+\widetilde{\chi_{E_1-E_2}\cdot n_k}\sim\widetilde{\chi_{E_1}\cdot n_k}\sim\hat{T}_k\chi_{E_1}\cdot\widetilde{n_k}$$
$$\sim\hat{T}_k\chi_{E_1-E_2}\widetilde{n_k}+\hat{T}_k\chi_{E_2}\cdot\widetilde{n_k}$$

従って $\widetilde{\chi_{E_1-E_2}\cdot n_k}\sim\hat{T}_k\chi_{E_1-E_2}\cdot\widetilde{n_k}$ (註)

即ち $E_1-E_2\in\mathbb{F}'$

(iii) E_n $n=1,2,\cdots\in\mathbb{F}'$ $E_i\cap E_j=\phi\ (i\neq j)$ $\sum E_n=E$ とすれば

$\sum_{i=1}^{n}\chi_{E_i}\cdot n_k\Uparrow\chi_E\cdot n_k$ 従って $\sum_{i=1}^{n}\widetilde{\chi_{E_i}\cdot n_k}\Uparrow\widetilde{\chi_E\cdot n_k}$ 及び

$\sum_{i=1}^{n}\hat{T}_k\chi_{E_i}\cdot\widetilde{n_k}\Uparrow\hat{T}_k\chi_E\cdot\widetilde{n_k}$ より $E\in\mathbb{F}'$ を得る。

(i) (ii) (iii) から $\mathbb{F}'\supset\mathbb{B}(S\times S)$ がわかる。

これから一般の $\varphi\in B(S\times S)$ に対し容易に、

$\hat{T}_k\varphi\widetilde{n_k}\sim\widetilde{\varphi n_k}$ がわかる。 (lemma 3.7.3 (2) 参照)

$\varphi\in F(S\times S)$ に対しては、$\varphi_1,\varphi_2\in B(S\times S)$ $\varphi_1\leq\varphi\leq\varphi_2$

$\varphi_1=\varphi_2$ a.s. $\bar{\lambda}_k$ (n_k の二変数 canonical 測度) を取ると

$\varphi_1 n_k\sim\varphi\cdot n_k\sim\varphi_2\cdot n_k$ (定理 4.4.3) 従って $\widetilde{\varphi_1 n_k}\sim\widetilde{\varphi_2 n_k}$ より

$\hat{T}_k\varphi_1\cdot\widetilde{n_k}\sim\hat{T}_k\varphi_2\cdot\widetilde{n_k}$ となるから $\hat{T}_k\varphi_1=\hat{T}_k\varphi_2$ a.s. λ_k

$\hat{T}_k\varphi_1\leq\hat{T}_k\varphi\leq\hat{T}_k\varphi_2$ より $\hat{T}_k\varphi=\hat{T}_k\varphi_i$ a.s. λ_k を得る。

即ち $\hat{T}_k\varphi\cdot\widetilde{n_k}\sim\hat{T}_k\varphi_i\widetilde{n_k}\sim\widetilde{\varphi_i n_k}\sim\widetilde{\varphi\cdot n_k}$

くり返えすと任意の $\varphi\in F(S\times S)$ に対し

$\hat{T}_k\varphi\cdot\widetilde{n_k}\sim\widetilde{\varphi\cdot n_k}$.

$E_k=\{(x,y);\frac{1}{k}>|x\cdot y|\geqq\frac{1}{k+1}\}\in\mathbb{F}(S\times S)$

$E_k(x)=\{y;\frac{1}{k}>|x\cdot y|\geqq\frac{1}{k+1}\}\in\mathbb{F}(S)$ とおき

$\mu_k(x\cdot dy)=\hat{\mu}_k(x,E_k(x)\cap dy)$

(註) 一般に $a+b\sim a+c$ なら $a(t)+b(t)=a(t)+c(t)$ a.s. P_x $\forall x\in S$

$b(t)=c(t)$ $\forall t<\infty$ a.s. P_x $\forall x\in S$ よって $b\sim c$ である。

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

$T_k\varphi(x) = \int \mu_k(x, dy)\, \varphi(x, y)$ と定義する。

$(x_{s-}, x_s) \notin \mathbb{E}_k$ なら $n_k(S, S-) = 0$ に注意すると

$\chi_{\mathbb{E}_k} \cdot n_k \sim n_k$ であるが，他方

$$\hat{T}_k \chi_{\mathbb{E}_k} \cdot \varphi = \int_{\frac{1}{k} > |x,y| \geq \frac{1}{k+1}} \varphi(x, y)\, \hat{\mu}_k(x, dy) = \int \varphi(x, y)\, \mu_k(x, dy) = T_k \varphi$$

従って $T_k\varphi \cdot \tilde{n}_k \sim \hat{T}_k \chi_{\mathbb{E}_k} \cdot \varphi \cdot \tilde{n}_k \sim \widetilde{\chi_{\mathbb{E}_k} \cdot \varphi \cdot n_k} \sim \widetilde{\varphi \cdot n_k}$

を得る．

以上をまとめると

lemma 4.5.3 全ての $x \in S$ に対し $E_k(x) = \{y : \frac{1}{k} > |x, y| \geq \frac{1}{k+1}\}$ 上に質量を持つ測度 $\mu_k(x, \cdot) \in M^+(S)$ が存在し，

$\varphi \in F(S \times S)$ に対し $T_k\varphi = \int \varphi(x, y)\, \mu_k(x, dy)$

とおくと $0 \leq T_k\varphi \leq \|\varphi\|$ $T_k\varphi \in F(S)$ で

$T_k\varphi \cdot \tilde{n}_k \sim \widetilde{\varphi \cdot n_k}$ が成立する。

今 $\tilde{n}$ を この節始めに定義した

$$\tilde{n} \Leftrightarrow \{\tilde{n}_1, \cdots \quad \tilde{n}_k \cdots \}$$

である $\mathfrak{X}^\alpha$ の *additive functional* とする。

$\tilde{n}_k \succ \tilde{n}$ であるから定理 4.2.4 によって $\mathbb{F}(S)$ 可測な非負有限な函数 f_k が存在し，

$$\tilde{n}_k \sim f_k \tilde{n}$$

f_k は λ_T 測度 0 を除いて一意的に定まる。今 $x \in S$ に対し

$$\mu(x, \cdot) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)\, \mu_k(x, \cdot)$$

と定義する。$\mu_k(x, \cdot)$ は $E_k(x) = \{y : \frac{1}{k} > |x, y| \geq \frac{1}{k+1}\}$ にだけ質量を持った測度である事に注意すると

$$\mu(x, \{x\}) = 0$$

又 $H_\varepsilon \in \mathbb{F}(S)$ と x の距離が ε $(\varepsilon > 0)$ より大きい時は

$$\mu(x, H) = \sum_{k=0}^{k_0} f_k(x)\, \mu_k(x, H_\varepsilon) < \infty \quad (k_0 = \mathrm{Min}\, k : \tfrac{1}{k+1} \leq \varepsilon)$$

特に 一般の $E \in \mathbb{F}(S)$ に対し

$\mu(x, E \cap E_k(x)) = \mu_k(x, E)\, f_k(x)$ である。

今 $0 \leq \varphi \in F(S \times S)$ に対し

$$T^\varepsilon \varphi(x) = \int_{|y-x| \geq \varepsilon} \varphi(x, y)\, \mu(x, dy)$$

$$\mathbb{E}^\varepsilon = \{(x, y) ; |x, y| \geq \varepsilon\}$$

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

$\chi_\varepsilon = \chi_{E_\varepsilon}$ とおくと、$T^\varepsilon\varphi = T^\varepsilon(\varphi\chi_\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(\varphi\chi_\varepsilon) f_k$

$$\varphi\, n_\varepsilon = \varphi\chi_\varepsilon\, n_\varepsilon = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi\chi_\varepsilon\, n_k$$

である。（右辺は実際は $\frac{1}{k} > \varepsilon$ となる k 以外 0になっている）

従って $\widetilde{\varphi n_\varepsilon} = \sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{\varphi\chi_\varepsilon n_k} \sim \sum_{k=0}^{\infty} T_k\,\varphi\chi_\varepsilon\,\widetilde{n}_k$

$$\sim \sum_{k=0}^{\infty} (T_k\varphi\chi_\varepsilon) f_k\cdot\widetilde{n}$$

$$\sim T^\varepsilon\varphi\cdot\widetilde{n}$$

がわかる。以上をまとめると

定理 4.5.4. 全ての $x\in S$ に対し σ-finite な $S-\{x\}$ 上の測度 $\mu(x,\cdot)$ が存在し、次の性質を持つ。

(1) $E^\varepsilon(x) = \{y : |y.x| \geqq \varepsilon\}$ $(\varepsilon>0)$ とおくと

$$\mu(x, E^\varepsilon_{(x)}) < \infty$$

(2) $E\in F(S)$ に対し $\mu(\cdot, E)$ は $\mathbb{F}(S)$ 可測.（有限とは限らない）

(3) $0\leq\varphi\in F(S\times S)$ に対し $T^\varepsilon\varphi(x) = \int_{|y-x|\geqq\varepsilon}\varphi(x,y)\,\mu(x,dy)$ とおくと（$T^\varepsilon f$ は (2) より $F(S)$ 可測である.） $\widetilde{\varphi\cdot n_\varepsilon} \sim T^\varepsilon\varphi\cdot\widetilde{n}$

但し $\widetilde{n}\in\mathcal{L}_\alpha$ $\widetilde{n} \rightleftarrows \{\widetilde{n}_1, \cdots \widetilde{n}_k \cdots\} \rightleftarrows \{\widetilde{n}_\varepsilon : \forall\varepsilon>0\}$

$\widetilde{n}$, $\widetilde{n}'$ を $\{\widetilde{n}_1, \widetilde{n}_2\cdots\widetilde{n}_k\cdots\}$ と互に絶対連続な $\mathcal{L}$ の additive functional とする。$\widetilde{n}$, $\widetilde{n}'$ から定理 5.5.4 の条件をみたす測度 μ, μ' を作ると次の意味の一意性が成立する。

注意 4.5.5 λ_J 測度 0 の集合 $N\in F(S)$ が存在し、$x\notin N$ では $\mu'(x,E) = f(x)\mu(x,E)$ が全ての $E\in\mathbb{F}(S)$ に対して成立する。但し f は $\widetilde{n} \sim f\cdot\widetilde{n}'$ で定る。

(証明) $\widetilde{n} \leftrightarrow \widetilde{n}'$ であるから非負有限な $\mathbb{F}(S)$ 可測函数 f が存在して $\widetilde{n}\sim f\widetilde{n}'$. （$f>0$ a.s. λ_J） 従って定理 4.5.4 の (3) の性質から

$$T'^\varepsilon\varphi\,\widetilde{n}' \sim \widetilde{\varphi n_\varepsilon} \sim T^\varepsilon\varphi\,\widetilde{n} \sim f\,T^\varepsilon\varphi\cdot\widetilde{n}'$$

従って $T'^\varepsilon\varphi = f\cdot T^\varepsilon\varphi$ a.s. λ_J （λ_J は $\widetilde{n}$, $\widetilde{n}'$ の canonical 測度である） 特に ε を有理数、$\varphi(x.y)\equiv g(y)$ $g\in C'$ とすると C' は可附番集合だから、或る λ_J 測度 0 の例外集合 N の外では

$$T'^r g = f(x)\,T^r g \qquad \forall_r\ (\text{有理数}) \quad \forall g\in C'$$

C' は $C(S)$ で稠密であるから、T'^r, T^r は g によって定るから

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

$E^{r}(x)=\{y:|y.x|\geqq r\}$ とおくと

$x\notin N$ では $\mu'(x, E^{r}(x)\cap\cdot)=f(x)\mu(x, E^{r}(x)\cap\cdot)$ $\forall r$

が云える。$E^{r}(x)\uparrow S-\{x\}$ $(r\downarrow 0)$ であることに注意すると

$\mu'(x,\cdot)=f(x)\mu(x,\cdot)$ がわかる。 (証明終)

定義 $\{\widetilde{\pi}, \mu(x,\cdot)\}$ を組にして Lévy system ということにする。

$\mathfrak{g}\in\mathfrak{Q}_0$ の時，定理 4.4.8 により非負 $\mathbb{F}(S\times S)$ 可測函数 φ が存在して，$\mathfrak{g}(t)=\sum_{\substack{s\leqq t\\ |x_{s-},x_s|>0}}\varphi(x_{s-},x_s)$ と書けるが，φ と Lévy system から $\mathfrak{g}\in\mathfrak{Q}_0^*$ のための条件が得られる。

定理 4.5.6. $\mathfrak{g}\in\mathfrak{Q}_0$ $\mathfrak{g}(t)=\sum_{\substack{s\leqq t\\ |x_{s-},x_s|>0}}\varphi(x_{s-},x_s)$ とする。

$\{\widetilde{\pi}, \mu(x,\cdot)\}$ を Lévy system とする時，$\mathfrak{g}\in\mathfrak{Q}_0^*$ のための必要充分条件は $T\varphi\cdot\widetilde{\pi}\in\mathfrak{O}$ となることである。(註)

但し $T\varphi(x)=\int\varphi(x,y)\mu(x,dy)$

この時 $\widetilde{\mathfrak{g}}\sim T\varphi\cdot\widetilde{\pi}$ となる。

(証明) $\varphi_\ell=\varphi\wedge\ell$ とおく。

$\mathfrak{g}^\ell(t)=\sum_{\substack{s\leqq t\\ |x_{s-},x_s|\geqq\frac{1}{\ell}}}\varphi_\ell(x_{s-},x_s)=\varphi_\ell\cdot n_{\frac{1}{\ell}}$ とおくと $\mathfrak{g}^\ell\uparrow\mathfrak{g}$ $(\ell\to\infty)$

又定理 4.5.4 から $\widetilde{\mathfrak{g}}^\ell\sim T^{\frac{1}{\ell}}\varphi_\ell\cdot\widetilde{\pi}$ である。

他方 $T^{\frac{1}{\ell}}\varphi_\ell(x)=\int_{|y,x|\geqq\frac{1}{\ell}}\varphi_\ell(x,y)\mu(x,dy)\uparrow T\varphi(x)$.

従って若し $\mathfrak{g}\in\mathfrak{Q}_0^*$ なら $\widetilde{\mathfrak{g}}^\ell\uparrow\widetilde{\mathfrak{g}}$ であるから $\widetilde{\mathfrak{g}}^\ell\sim T^{\frac{1}{\ell}}\varphi_\ell\cdot\widetilde{\pi}\uparrow T\varphi\widetilde{\pi}\sim\widetilde{\mathfrak{g}}$。

逆に $T\varphi\widetilde{\pi}\in\mathfrak{O}$ なら $\widetilde{\mathfrak{g}}^\ell\sim T^{\frac{1}{\ell}}\varphi_\ell\widetilde{\pi}\ll T\varphi\cdot\widetilde{\pi}$

従って $c(t)=\lim\widetilde{\mathfrak{g}}^\ell(t)$ とおけば $c\in\mathcal{L}$.

$U^\alpha_{f\cdot\mathfrak{g}^\ell}=U^\alpha_{f\widetilde{\mathfrak{g}}^\ell}$ より $U^\alpha_{f\cdot\mathfrak{g}}=U^\alpha_{f\cdot c}$ が全ての α と $0\leqq f\in F(S)$ に対して成立する。定義より c は $\widetilde{\mathfrak{g}}$ である。

次の定理は $\mu(x,\cdot)$ の意味を示している。

定理 4.5.7. $\sigma=\inf\{t:|x_{s-},x_s|\geqq\varepsilon\}$ とおくと

全ての $\mu\in M^+(S)$ と $x\in S$ に対し

$$E_x(f(x_\sigma)\,|\,x_{\sigma-}=x)=\frac{T^\varepsilon f(x)}{T^\varepsilon 1(x)}\quad a.s.\ P_\mu\ (x_{\sigma-}\in dx)$$

但し分母が 0 の時は右辺は 0 とする。

(註) $T\varphi\cdot\widetilde{\pi}\in\mathfrak{O}$ とは $P_x(T\varphi\cdot n(t)<\infty\ \forall t<\infty)=1$ に他ならない。

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

$$T^{\varepsilon} f(x) = \int_{|y,x| \geqq \varepsilon} f(y) \mu(x, dy) \qquad T^{\varepsilon} 1 = \mu(x, \{y ; |y, x| \geqq \varepsilon\})$$

(証明) 先ず定義から $T^{\varepsilon} 1(x) = 0$ なら $T^{\varepsilon} f(x) = 0$ に注意し

$$k(x) = \frac{T^{\varepsilon} f(x)}{T^{\varepsilon} 1(x)} \qquad T^{\varepsilon} 1(x) \neq 0$$
$$= 0 \qquad T^{\varepsilon} 1(x) = 0 \quad \text{とおく.}$$

$\|k\| \leq \|f\|$ で $k(x) T^{\varepsilon} 1(x) = T^{\varepsilon} f(x)$ は常に成立している。

$f \geqq 0$ としてよい。$B \in \mathbb{F}(S)$ を任意にとり $g = \chi_B$ とおく。先ず $n_{\varepsilon}(t) = 0 \quad 0 \leq t < \sigma \quad n_{\varepsilon}(\sigma) = 1$ であるから

$$E_{\mu}(f(x_{\sigma}) ; x_{\sigma-} \in B) = E_{\mu}(f(x_{\sigma}) g(x_{\sigma-})) = E_{\mu}\left(\int_0^{\sigma} g(x_{s-}) f(x_s) dn_{\varepsilon}\right)$$
$$= E_{\mu}(g_- f \cdot n_{\varepsilon}(\sigma))$$

一方 $\sigma \in$ g.H.T. であるから lemma 4.3.8 が使えて

$$E_{\mu}(g_- f \cdot n_{\varepsilon}(\sigma)) = E_{\mu}(g \cdot \widetilde{f n_{\varepsilon}}(\sigma)) = E_{\mu}(g T^{\varepsilon} f \cdot \tilde{n}(\sigma)) \quad (\text{定理}4.5.4)$$
$$= E_{\mu}(g k T^{\varepsilon} 1 \, \tilde{n}(\sigma))$$

上と同様の計算を $T^{\varepsilon} f$ の代りに $T^{\varepsilon} 1$ に適用し

$$E_{\mu}(g k T^{\varepsilon}_1 \tilde{n}(\sigma)) = E_{\mu}(\widetilde{(gk) n_{\varepsilon}(\sigma)}) = E_{\mu}((gk)_- n_{\varepsilon}(\sigma))$$
$$= E_{\mu}(g(x_{\sigma-}) k(x_{\sigma-})) = E_{\mu}(k(x_{\sigma-}) ; x_{\sigma-} \in B)$$

即ち $E_{\mu}(f(x_{\sigma}) \mid x_{\sigma-} = x) = k(x)$ を得る。 (証明終)

この定理の証明と全く同様に，α 次で考えると

$$E_{\mu}(f(x_{\sigma}) e^{-\alpha\sigma} ; x_{\sigma-} \in B) = E_{\mu}(f(x_{\sigma}) g(x_{\sigma-}) e^{-\alpha\sigma})$$
$$= E_{\mu}(g_- \cdot f n_{\varepsilon\alpha}(\sigma)) = E_{\mu}(g T^{\varepsilon} f \, \tilde{n}_{\alpha}(\sigma))$$
$$= E_{\mu}(g k T^{\varepsilon} 1 \, \tilde{n}_{\alpha}(\sigma)) = E_{\mu}((gk)_- n_{\varepsilon,\alpha}(\sigma))$$
$$= E_{\mu}(k(x_{\sigma-}) e^{-\alpha\sigma} ; x_{\sigma-} \in B)$$
$$= E_{\mu}(k(x_{\sigma-}) E_{\mu}(e^{-\alpha\sigma} \mid x_{\sigma-}) ; x_{\sigma-} \in B)$$

$e^{-\alpha t}$ $0 \leq \alpha < \infty$ で生成される線型空間は $T = [0, \infty]$ の連続函数の中で稠密であるから，次の注意を得る。

注意 4.5.8. x_{σ} と σ は $x_{\sigma-}$ の条件の下で互に独立である。

渡辺信三氏によって得られた次の定理は典型的な $\mathcal{G}_0$ の構造を示している。

定理 4.5.9. $g \in \mathcal{G}_0$ で $g(t) - g(t-) = 0$ 又は 1

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

且つ $E_x(\mathfrak{z}(t))=t$ $(\widetilde{\mathfrak{z}}\equiv t)$ とする。(註)

この時 $\mathfrak{z}$ は Poisson 過程である。

(証明) $\sigma = \inf t ; \mathfrak{z}(t)-\mathfrak{z}(t-)=1$ とおく. $\sigma \in \mathfrak{Z}$.H.T.

$\mathfrak{z}(t)=0$ $0\le t<\sigma$ $\mathfrak{z}(\sigma)=1$ より前定理と同様任意の $\alpha>0$ に対し

$$E_x(e^{-\alpha\sigma}) = E_x(\mathfrak{z}_\alpha(\sigma)) = E_x(\widetilde{\mathfrak{z}}_\alpha(\sigma)) = E_x(\int_0^\sigma e^{-\alpha t}dt) = \frac{1}{\alpha}(1-E_x(e^{-\alpha\sigma}))$$

従って $\varphi(\alpha)=E_x(e^{-\alpha\sigma})=\dfrac{1}{1+\alpha}$

これより σ は平均値 1 の指数分布に従う。(x に無関係) $\{\hat{\sigma}_n\}$ を σ-chain とすると

$$E_x(e^{-\alpha\hat{\sigma}_n}) = E_x(e^{-\alpha\hat{\sigma}_{n-1}}E_{x_{\hat\sigma_{n-1}}}(e^{-\alpha\sigma})) = \varphi(\alpha)E_x(e^{-\alpha\hat{\sigma}_{n-1}})$$
$$= \cdot = \varphi(\alpha)^n = \frac{1}{(1+\alpha)^n}$$

$$P_x(\hat{\sigma}_n\in ds) = \frac{s^{n-1}}{(n-1)!}e^{-s}ds.$$

$$P_x(\mathfrak{z}(t)=n) = P_x(\hat{\sigma}_n\le t<\hat{\sigma}_{n+1}) = E_x(P_{x_{\hat\sigma_n}}(t<\sigma+s) ; \hat{\sigma}_n\le t)$$
$$=\int_0^t e^{-(t-s)}\cdot\frac{s^{n-1}}{(n-1)!}e^{-s}ds = \frac{s^n}{n!}e^{-s}$$

等と計算できる。これは x に無関係であるから,

$$P_x(\mathfrak{z}(t+s)-\mathfrak{z}(t)\,|\,\mathfrak{z}(u) ; u\le t) = \frac{s^n}{n!}e^{-s}.$$ (証明終)

(註) 二番目の条件は $\widetilde{\mathfrak{z}}(t)$ が $P_x(\lim_{t\to\infty}\widetilde{\mathfrak{z}}(t)=\infty)=1$ をみたしておれば時間変換により、いつでもみたすようにできる。

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

5章　L^2の general additive functional

5.1　収束に関する補助定理

general additive functional $\mathcal{G}$ を一般的に考えることは困難なので，此の章では平均値0且つ分散の存在する場合を主として取扱う。これは応用上も興味深い class と思われる。なお，Brown運動の場合の連続な general additive functional については田中［41］Skorohod［37］Wentzel［51］［52］等で一般に研究されている。

この節では、後に（主として存在証明に）度々用いる補助定理を証明する．

$y^n = y^n(t,w)$　$n=1,2,\cdots$ を $T^* \times W$ 上の函数とし，以下の条件を仮定する．

1°　y^n は2.1節［A.1］［A.2］［A.3］［A.4］［A.5］及び［A.8］の条件をみたす．

2°　［A.6］の代りに
［A.6］*（t,w）を定めると，$n_0 = n_0(t,w)$ が存在し．全ての $s \geq 0$ 及び $n \geq n_0$ に対して
$$y^n(t+s, w) = y^n(t) + y^n(s, w_t^+)$$

3°　全ての $x \in S$ と $t \in [0,\infty]$ に対して
$E_x(y^n(t)^2)$ が存在し $E_x(y^n(t)^2) \leq K(x) < \infty$　（n について有界）

4°　$y^n(t)$ は $\mathcal{F}_t$ martingale，即ち全ての $x \in S$ に対し
$E_x(y^n(t+s) \mid \mathcal{F}_t) = y^n(t)$ a.s. P_x（$\forall t \in [0,\infty]$ $\forall x \in S$）.

以上の y^n に対して次の lemma が成立する。

lemma 5.1.1.　$\lim_{n-m} E_x((y^n(\infty) - y^m(\infty))^2) = 0$ が全ての $x \in S$ に対して成立すれば，右連続な $y \in \mathcal{G}$ が存在し，次の条件をみたす。

1)　全ての $t \in [0,\infty]$ と $x \in S$ に対し
$E_x(y(t)^2) < \infty$，$E_x(y(t)) = 0$

2)　全ての $x \in S$ に対し部分列 $n_j^{(x)}$ が存在し
$\lim_{j \to \infty} y^{n_j^{(x)}}(t)$ 存在 $= y(t)$　且つ収束は P_x 測度0を除いて一様。

3) 全ての $x\in S$ と $t\in[0,\infty]$ に対し

$$\text{l.i.m.}\ y^n(t) = y(t) \quad L^2(dP_x)。$$

(証明) (i) 先ず

$$E_x(y^n(\infty)^2) = E_x(y^n(t)^2) + E_x((y^n(\infty) - y^n(t))^2) + 2E_x(y^n(t)E_x(y^n(\infty) - y^n(t) \mid \mathcal{F}_t))$$

$$\geqq E_x(y^n(t)^2)$$ に注意する。同様にして

$$\lim_{n,m\to\infty} E_x((y^n(t) - y^m(t))^2) \leq \lim_{n,m} E_x((y^n(\infty) - y^m(\infty))^2) = 0$$ である。

$y^n(t) - y^m(t)$ は右連続な martingale になり、Doob [53] (P. 314 theorem 3.2) により、$P_x(\sup_{s\in[0,\infty]} |y^n(s) - y^m(s)| > \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} E_x((y^n(\infty) - y^m(\infty))^2)$

従って $\lim_{n,m\to\infty} P_x(\sup_{s\in[0,\infty]} |y^n(s) - y^m(s)| > \varepsilon) = 0$

部分列 $n_1^{(x)} < n_2^{(x)} < \cdots$ を適当にえらぶと

$$P_x(\sup |y^{n_j^{(x)}}(s) - y^{n_{j+1}^{(x)}}(s)| < 2^{-j}) < 2^{-j}$$

とできる。(註) 従って Borel-Cantelli の定理から $y^{(x)}(t,w)$ が存在して、

$P_x(\lim_{j\to\infty} y^{n_j^{(x)}}(t) = y^{(x)}(t)$ $t\in[0,\infty]$ で一様収束$) = 1$ となる。

収束の一様性から

$P_x(y^{(x)}(t)$ (A.2), (A.3) をみたし右連続$) = 1$ がわかる。

なお $P_x(|y^{(x)}(t)| < \infty) = 1$ は明か。

又 $E_x((y^n(t) - y^m(t))^2) = 0$ より

$$\text{l.i.m.}\ y^n(t) = y^{(x)}(t) \quad L^2(dP_x)$$ がわかる。

(ii) 次に $y^{(x)}(t)$ が x に無関係な versin を持つことを示す。η を reference 測度とし $\alpha > 0$ を定めて

$$\xi(dx) = \int \eta(dy) U^\alpha(y, dx) = \int \eta(dy) \int_0^\infty e^{-\alpha t} H_t^\alpha \chi_{dx}\, dt$$

とおく。

$P_\xi(\sup_s |y^n(s) - y^m(s)| > \varepsilon) = \int P_x(\sup_s |y^n(s) - y^m(s)| > \varepsilon)\, d\xi(x)$ であるが、

$\lim_{n,m\to\infty} P_x(\sup_s |y^n(s) - y^m(s)| > \varepsilon) = 0$ ((i) による)

であるから、$\lim_{n,m\to\infty} P_\xi(\sup_s |y^n(s) - y^m(s)| > \varepsilon) = 0$

従って (i) と同様に部分列 $n_1 < n_2 < \cdots$ が存在して、

$P_\xi(\lim_{i\to\infty} y^{n_i}(t)$ が $t\in[0,\infty)$ で広義一様収束$) = 1$ とできる。

(註) $n_j^{(x)}$ を $n_j^{(x)} > n_{j-1}^{(x)}$ 且つ $P_x(\sup_s |y^{n_j^{(x)}}(s) - y^m(s)| > 2^{-j}) < 2^{-j}$ $m > n_j$ となるよう n_j をえらべばよい。

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

(iii) 今数列 $\{\gamma_k\}$ $\gamma_k > 0$ $\gamma_k \downarrow 0$ を取り

$W_1 = \{w : \lim_{i\to\infty} y^{n_i}(t)$ が $t\in[0\ \infty]$ で 一様収束$\}$

$$W_1(k) = \{w : w^+_{\gamma_k} \in W_1\}$$

$w\in W_1(k)$ に対し $y^{(k)}(t) = \lim_{i\to\infty} y^{n_i}(t, w^+_{\gamma_k})$ とし

$W_2 = \{w : w\in \bigcap_k W_1(k)\quad \lim_{k\to\infty} y^{(k)}(t)$ 存在 $t\in[0,\infty]\}$

$y^{(k)}(t)$ は右連続である。

$E_\eta(\int_0^\infty e^{-\alpha t} P_{x_t}(W_1^c)dt) = P_\xi(W_1^c) = 0$ ((ii)による)

であるが，$u(x) = E_x(\int_0^\infty e^{-\alpha t}P_{x_t}(W_1^c)dt)$ は α-excessive $u(x)=0$ a.s. η より $u(x)\equiv 0$ ($\forall x\in S$) を得る。

即ち $E_x(\int_0^\infty e^{-\alpha t}P_{x_t}(W_1^c)dt)\equiv 0.$

この事から任意の $x\in S$ に対し，(x を定めると) 殆んど全ての t に対し $E_x(P_{x_t}(W_1^c)) = P_x(w_t^+\in W_1^c) = 0$ 或いは，$P_x(w_t^+\in W_1)=1.$

従って γ_k に対し $0<t_k<\gamma_k$ となる t_k が存在して

$P_x(w^+_{t_k}\in W_1) = P_x(\lim_{i\to\infty} y^{n_i}(t,w^+_{t_k})$ 存在し $t\in[0,\infty]$ で 一様収束$) = 1$

然るに [A.6]* より $\gamma_k - t_k$ と w (従って $w^+_{t_k}$) を定めると充分大きい n_i に対して

$$y^{n_i}(t, w^+_{\gamma_k}) = y^{n_i}(t+\gamma_k - t_k, w^+_{t_k}) - y^{n_i}(\gamma_k - t_k, w^+_{t_k})$$

であるから，$w^+_{t_k}\in W_1$ なら $w^+_{\gamma_k}\in W_1$ 即ち $\{w^+_{t_k}\in W_1\}\subset W_1(k)$

この事から $P_x(W_1(k)) = 1.$ 従って $P_x(\bigcap_k W_1(k)) = 1.\ \forall x\in S.$

$y^{(k)}(t)$ $t\in[0,\infty]$ は殆ど全ての w に対し定義される。他方(i)より l.i.m. $y^n(t) = y^{(x)}(t)$ $L^2(dP_x)$ であるが，γ_k と w を定めると充分大きな n_i に対し

$y^{n_i}(t, w^+_{\gamma_k}) = y^{n_i}(t+\gamma_k, w) - y^{n_i}(\gamma_k, w)$ であるから

$$y^{(k)}(t) = y^{(x)}(t+\gamma_k) - y^{(x)}(\gamma_k) \quad \text{a.s. } P_x \quad \forall t.$$

両辺共 t についてL測度 0 を除いて右連続より

$$y^{(k)}(t) = y^{(x)}(t+\gamma_k) - y^{(x)}(\gamma_k) \quad \forall t \quad \text{a.s. } P_x$$

再び $y^{(x)}(t)$ の右連続性を用い，($y^{(x)}(0) = \lim y^{n_i(x)}(0) = 0$ より)

$$\lim_{k\to\infty} y^k(t) \text{ 存在 } = y^{(x)}(t) \quad \forall t \quad \text{a.s. } P_x$$

特に $P_x(W_2) = 1$ $\forall x\in S$ がわかる。

(iv) $w\in W_2$ に対し $\lim_{k\to\infty} y^{(k)}(t) = \bar y(t)$ とし $\tilde W = \{w : w\in W_2\quad \bar y(t,w)$

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

が右連続で(A.2),(A.3) をみたし $(\ |y(t,w)|<\infty\}$ とおく。

$\bar{y}(t)=y^{(x)}(t)\ \forall t$ a.s. P_x しかも $P_x(y^{(x)}(t)$ が右連続で [A.2], [A.3] をみたし $|y^{(x)}(t)|<\infty)=1$ であるから ((i) による),

$P_x(\widehat{W})=1.\ \forall x\in S.$

$w\in\widehat{W}$ の時 $y(t,w)=\bar{y}(t,w)$

$w\notin\widehat{W}$ の時 $y(t,w)=\infty$ とおく。

$y(t,w)$ が [A,1] [A,2] [A,3] [A,5] をみたし右連続な事は明か。

又、$\widehat{W}\in\mathcal{F}$ $P_x(\widehat{W})=1$ に注意すると,

$y^{(k)}(t)\in\mathcal{F}_{t+r_k}$ 従って $y(t)\in\bigcap_k\mathcal{F}_{t+r_k}=\mathcal{F}_t$ (注意 1.2.7)

即ち $y(t)$ は [A.4] をみたす。

(v) 次に $y(t)$ が加法性 [A.6] をみたす事を示す。$t+r_k$ と w を定めると, $[A.6]^*$ から

$$y_0^{n_i}(t+s,w_{r_k}^+)=y^{n_i}(t,w_{r_k}^+)+y^{n_i}(s,(w_t^+)_{r_k}^+)$$

$w\in\widehat{W}$ だと $w_t^+\in W_1(k)$ で

$$y^{(k)}(t+s,w)=y^{(k)}(t,w)+y^{(k)}(s,w_t^+).$$

従って $w_t^+\in W_2$ もわかり

$$y(t+s,w)=(y(t,w)+\bar{y}(s,w_t^+)$$

従って $w_t^+\in\widehat{W}$ がわかって

$$y(t+s,w)=y(t,w)+y(s,w_t^+)$$

$w\notin\widehat{W}$ の時は $y(t,w)=y(t+s,w)\equiv\infty$ より明か。

(vi) 最後に $y(t)=\bar{y}(t)=y^{(x)}(t)$ a.s. P_x より

$$\text{l.i.m. } y^n(t)=y(t)\quad L^2(dP_x)$$

又この事から $E_x(y(t))=\lim_n E_x(y^n(t))=0$ を得る。 (証明終)

注意 5.1.2. $y^n(t)$ が $[A.6]^*$ の代りに

$[A.6]^{\alpha *}(t,w)$ を定めると $n_0=n_0(t,w)$ が定まって $n\geq n_0(t,w)$ 及び $s\geq 0$ に対し

$$y^n(t+s,w)=y^n(t,w)+y^n(s,w_t^+)e^{-\alpha t}$$

という条件をみたす時は,(他の仮定はそのままとすれば) y は右連続 α 次 general additive functional となる。

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

lemma 5.1.3. $y^n \in \mathcal{G}$ 且右連続とし，全ての $x \in S$ に対し

$E_x(y^n(t)^2) \leq K(x) < \infty \quad \forall t \in [0, \infty]$, $E_x(y^n(\infty)) = 0$

$\lim_{n,m} E_x((y^n(\infty) - y^m(\infty))^2) = 0$ なら，右連続な $y \in \mathcal{G}$ が存在して全ての $x \in S$ と $t \in [0, \infty]$ に対し

$$l.i.m.\ y^n(t) = y(t) \quad a.s.\ P_x.$$

(証明) $E_x(y^n(t)) = E_x(y^n(\infty)) - E_x(y^n(\infty, w_t^+))$

$$= E_x(y^n(\infty)) - E_x(E_{x_t}(y^n(\infty))) = 0$$

従って又 $E_x(y(t+s) | \mathcal{F}_t) = E_x(y(t)|\mathcal{F}_t) + E_x(E_{x_t} y(s)) = y(t)$

となるので lemma 5.1.1 の条件がみたされる。　（証明終）

5.2 L^2 の general additive functional.

$a^1, a^2 \in \mathfrak{A}$ に対し，$W' = \{a^2(t, w) < \infty \ \forall t \in [0, \infty]\}$ とし

$$(2.1) \quad a(t, w) = a^1(t, w) - a^2(t, w) \quad (t < \infty) \quad w \in W'$$
$$= \infty \qquad\qquad (t < \infty) \quad w \in W'$$

とおく。$a(\infty, w)$ は $\lim_{t\to\infty} a(t, w)$ の存在する時だけ

$$a(\infty, w) = \lim_{t\to\infty} a(t, w) \quad \text{とおき，}$$

その他の時は定義しない。

$a(t, w)$ は $t < \infty$ で 2.1 節の general additive functional になる。詳しく云うと

[A.1]′ $\quad -\infty < a(t) \leq \infty \qquad t < \infty$

[A.2]′ $\quad a(t+) \ a(t-)$ 存在 $\quad t < \infty$

[A.3]′ $\quad a(\zeta -) = a(t) \qquad \zeta \leq t < \infty$

[A.4]′ $\quad a(t, w) \quad \mathcal{F}_t$可測．$(t < \infty)$

[A.5] $\quad P_x(a(t) < \infty \quad t < \infty) = 1$

[A.6]′ $\quad a(t+s, w) = a(t, w) + a(s, w_t^+) \quad \forall s, t < \infty$

[A.8] $\quad a(t+) = a(t) \qquad t < \infty$

を満足する。

$\mathfrak{A}' = \{a;\ a = a^1 - a^2 \quad a^i \in \mathfrak{A}\}$

$\mathfrak{A}'^{\alpha} = \{a;\ a = a^1 - a^2 \quad a^i \in \mathfrak{A}^{\alpha}\}$ 等であらわす。

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

$\mathcal{G}'$ $\mathcal{G}^{\alpha'}$ $\mathcal{L}$ $\mathcal{L}^{\alpha'}$ $\mathcal{G}_0'$ $\mathcal{G}_0^{\alpha'}$ 等も同様に定義する。

$a\in\mathfrak{A}^{\alpha'}$ なら $P_x(a(\infty)=\lim\limits_{t\to\infty}a(t)$ 存在(有限)$)=1$ である。

$a, b\in\mathfrak{A}'$ に対して

$$a(t,w)=b(t,w) \quad \forall t<\infty \quad a.s.\ P_x \quad \forall x\in S$$

の時 $a\sim b$ であらわし, a, b は同値という。

$\mathfrak{A}=\{a : a-0 \quad a\in\mathfrak{A}\}$ と見なして $\mathfrak{A}\subset\mathfrak{A}'$ 等と考える。

$a, b\in\mathfrak{A}'$ $f\in F(S)$ に対して

(2,2) $\quad a+b \quad a-b \quad f\cdot a$

等の意味は明かであろう。(註1) $\mathfrak{A}'$ は $F(S)$ を作用素にもつ加群になっている。(同値なものを等しいと見て) α 実数 $a\in\mathfrak{A}'$ に対し a_α も (2,1) 節と同様に定義される。

$g\in\mathcal{G}_0'$ $\varphi\in F(S\times S)$ $f\in F(S)$ に対し

(2,3) $\quad \varphi\cdot g \quad f_-\cdot g \quad f_+\cdot g=f\cdot g$

も 4,3 節と同様に定義する。

$g\in\mathcal{G}_0'$ $g=g^1-g^2$ $g^i\in\mathcal{G}_0$ に対し

(2,4) $\quad \tilde{g}=\tilde{g}^1-\tilde{g}^2$

とおく。$\tilde{g}^i$ は g^i の飛躍の平均である。(4,3 節参照)

この定義は g^i の取り方に関係しない。(註2)

$$\widetilde{f\cdot g}\sim f\cdot\tilde{g} \qquad 及び$$

$g\in\mathcal{G}^{\alpha'}$ なら $E_x(g_\alpha)=E_x(\tilde{g}_\alpha)$ が成立する。

$\tilde{g}$ は次の注意により一意的に定まる。

注意 5,2,1. $\quad a, b\in\mathcal{L}^{\alpha'}$ $(\mathfrak{N}^{\alpha'})$ $\quad E_x(a_\alpha(\infty))=E_x(b_\alpha(\infty))$ $\quad \forall x\in S$ なら $a\sim b$.

(証明) 定理 2,7,3. より明かである。 (証明終).

ここで L^2 の *general additive functional* を定義する。

$[0,\infty]\times W$ の函数 $y(t,w)$ が $[A,1]'\sim[A,6]'$ $[A,8]$ と更に次の条

(註1) $\infty-\infty$, $-\infty$ 等の出て来る w に対して修正が必要である。

(註2) $g=g^1-g^2=\gamma^1-\gamma^2$ なら $g^1+\gamma^2\sim g^2+\gamma^1$

$\widetilde{g^1+\gamma^2}\sim\widetilde{g^2+\gamma^1}$ $\qquad \tilde{g}^1+\tilde{\gamma}^2\sim\tilde{g}^2+\tilde{\gamma}^1$

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

件をみたす時 L^2 の general additive functional という。

[M.1]′ $E_x(y(t)^2) < \infty \quad \forall t<\infty \quad \forall x\in S$

[M.2]′ $E_x(y(t)) = 0 \quad \forall t<\infty \quad \forall x\in S.$

この様な y の全体を m であらわす。

$y.z\in m$ に対し同値 $y\sim z$ の定義はこれ迄と同様である。

[A.6]′ の代りに

$[A.6]^{\alpha\prime}$ $y(t+s,w) = y(t,w) + e^{-\alpha t}y(s,w_t^+) \quad \forall s.t<\infty$

をみたす時，α次 L^2-general additive functional という。

lemma 2.5.2. y を α次の L^2-general additive functional とすると全ての $x\in S$ に対し，

(1) P_x測度に関し $y(t)$ は $\mathcal{F}_t$-martingale

(2) $E_x(y(t+s)^2) = E_x(y(t)^2) + E_x(E_{x_t}(y(s)^2)e^{-2\alpha t})$ 〃

(証明) (1) $E_x(y(t+s)\mid\mathcal{F}_t) = E_x(y(t)\mid\mathcal{F}_t) + E_x(e^{-\alpha t}y(s,w_t^+)\mid\mathcal{F}_t)$

$= y(t)+e^{-\alpha t}E_x(E_{x_t}(y(s))) = y(t) \quad a.s.\ P_x.$

(2) $e^{-\alpha t}y(s,w_t^+) = y(t+s)-y(t)$ は二乗可積分.

$E_x(y(t+s)^2) = E_x(y(t)^2) + 2E_x(y(t)\,E_{x_t}(y(s))e^{-\alpha t}) + E_x(E_{x_t}(y(s))^2e^{-2\alpha t})$

$= E_x(y(t)^2) + E_x(E_{x_t}(y(s))^2e^{-2\alpha t})$ （証明終）

$y(t)$ が右連続に注意すると

$y(t)^2$ は semi-martingal だから

$P_x(\sup_{s\in[0,t]} y(s)^2 \geq K) \leq \frac{1}{K}E_x(y(t)^2)$

従って $P_x(\sup_{s\in[0,N]}|y(s)|<\infty) = 1 \quad N\to\infty$ として次の注意を得る。

注意 5.2.3. $P_x(\sup_{s\in[0,t]}|y(s)|<\infty \quad \forall t<\infty) = 1, \quad \forall x\in S.$

この事から $y\in m$ に対し $W'=\{\sup_{s\in[0,t]}|y(s)|<\infty \quad \forall t<\infty\}$ とし

$$(2.5)\quad \begin{aligned} y_\alpha(t) &= e^{-\alpha t}y(t)+\int_0^t e^{-\alpha s}y(s)\,ds && w\in W' \\ &\equiv \infty && w\notin W' \end{aligned}$$

とおく.(註)

定理 5.2.4. (1) y_α は α次の L^2-general additive functional である。

(註) $w\in W'$ では $\int_0^t e^{-\alpha t}y(s)ds$ は有界右連続函数の積分として確定する。

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

(2) $t_k = \frac{t}{n}\cdot k \quad k = 0, 1, 2, \cdots n$ とすると

$$\text{l.i.m.} \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\alpha t_k}(y(t_{k+1}) - y(t_k)) = y_\alpha(t) \quad a.s.\ P_x \quad \forall x \in S.$$

(3) $$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{-2\alpha t_k} E_x((y(t_{k+1}) - y(t_k))^2\right) = E_x(y_\alpha(t)^2)$$

(証明) (1) $y_\alpha(t)$ が [A.1]$'$ ～ [A.5]$'$ [A.8]$'$ をみたすことは $y(t)$ の性質及び注意 2.5.3. から明か。[A.6]* は ($w \in W'$ の時)

$$\begin{aligned} y_\alpha(t+s) &= e^{-\alpha(t+s)} y(t+s) + \alpha\int_0^{t+s} e^{-\alpha u} y(u)\,du \\ &= e^{-\alpha(t+s)}(y(t) + y(s, w_t^+)) + \alpha\int_0^t e^{-\alpha u} y(u)du + \alpha\int_0^s e^{-\alpha(t+u)}(y(t) + y(u, w_t^+))du \\ &= e^{-\alpha(t+s)} y(t) + \alpha y(t)\int_0^t e^{-\alpha(t+u)}du + \alpha\int_0^t e^{-\alpha u} y(u, w_t^+)du + e^{-\alpha t} y_\alpha(s, w_t^+) \\ &= y_\alpha(t) + e^{-\alpha t} y_\alpha(s, w_t^+) \end{aligned}$$ よりわかる。

($w \notin W'$ の時は $y_\alpha(t) = y_\alpha(t+s) \equiv \infty$ である。)

$s < t$ に対し

$$E_x(y(s)\, y(t)) = E_x(y(s)^2) + E_x(y(s) E_{x_s}(y(t-s))) = E_x(y(s)^2) \le E_x(y(t)^2)$$

より $$E_x(y_\alpha(t)^2) = e^{-2\alpha t} E_x(y(t)^2) + 2\alpha e^{-\alpha t}\int_0^t e^{-\alpha s} E_x(y(s)^2)\,ds + \alpha^2\int_0^t\int_0^t e^{-\alpha s - \alpha u} E_x(y(s)\,y(u))\,ds\,du \le E_x(y(t)^2)\,C$$

(C は定数)

即ち $E_x(y_\alpha(t)^2) < \infty$ 即ち [M.1]$'$ がみたされた。

又 $E_x(y_\alpha(t)) = e^{-\alpha t} E_x(y(t)) + \alpha\int_0^\infty e^{-\alpha s} E_x(y(s))\,ds = 0$

(2) $i < j$ なら

$$E_x((y_\alpha(t_{i+1}) - y_\alpha(t_i) - e^{-\alpha t_i}(y(t_{i+1}) - y(t_i))((y_\alpha(t_{j+1}) - y_\alpha(t_j) - e^{-\alpha t_j}(y(t_{j+1}) - y(t_j)))$$

$= 0$ であるから、

$$\begin{aligned} &E_x\{(y_\alpha(t) - \sum_k e^{-\alpha t_k}(y(t_{k+1}) - y(t_k)))^2\} \\ &= E_x\{(\sum_k y_\alpha(t_{k+1}) - y_\alpha(t_k) - e^{-\alpha t_k}(y(t_{k+1}) - y(t_k)))^2\} \\ &= E_x\{E_{x_{t_k}}(y_\alpha(\tfrac{t}{n}) - y(\tfrac{t}{n}))^2 e^{-2\alpha t_k}\} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} E_x\{E_{x_{t_k}}\{(e^{-\alpha\frac{t}{n}} - 1)y(\tfrac{t}{n}) + \alpha\int_0^{\frac{t}{n}} e^{-\alpha s} y(s)\,ds\}^2 e^{-2\alpha t_k}\} \\ &\le \sum_{k=0}^{n-1} E_x\{4(e^{-\alpha\frac{t}{n}} - 1)^2 E_{x_{t_k}}(y(\tfrac{t}{n})^2)\} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} 4(e^{-\alpha\frac{t}{n}} - 1)^2 E_x((y(t_{k+1}) - y(t_k))^2) \\ &= 4(e^{-\alpha\frac{t}{n}} - 1)^2 E_x(y(t)^2) \downarrow 0 \quad (n \to \infty). \end{aligned}$$

(3) (2) と同様の計算で

$$E_x((\sum_k e^{-\alpha t_k}(y(t_{k+1}) - y(t_k)))^2) = \sum_k E_x(y(t_{k+1}) - y(t_k))^2)\, e^{-2\alpha t_k}$$

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

を得るから (2) と合わせ (3) が出る。　　（証明終）

逆に α 次の L^2-general additive functional y_α に対し

$$(2.6)\quad y(t) = e^{\alpha t} y_\alpha(x) - \alpha\int_0^t e^{\alpha s} y_\alpha(s)\,ds \quad (y_\alpha \text{ が有限区間で有界の時})$$
$$= \infty \quad (\text{その他の時})$$

とおくと、$y(t)$ は L^2-general additive である。

又 (2.5) と (2.6) の対応が互に逆対応である事は (2.5) の y_α を (2.6) に代入することにより容易に分る。即ち

注意 5.2.5. $\mathfrak{M}$ と α 次 L^2-additive functional は (2.5), (2.6) の対応により 1 i 1 に対応している

$\mathfrak{A}$ の場合と同称この場合も y_α を y の表現と考えて取り扱う事にする。

定義 $E_x(y_\alpha(t)^2) \leq K(x) < \infty$ (t に関し有界) となる y の全体を $\mathfrak{M}^\alpha$ であらわす。$E_x(y_\alpha(t)^2) \leq K < \infty$ (t, x に関し有界) となる y の全体 $\overline{\mathfrak{M}}^\alpha$ であらわす。

注意 5.2.6. (1) $\alpha < \beta$ なら $E_x(y_\beta^2(t)) \leq E_x(y_\alpha(t)^2)$

(2) $\alpha < \beta$ なら $\mathfrak{M}^\alpha \subset \mathfrak{M}^\beta$ $(\overline{\mathfrak{M}}^\alpha \subset \overline{\mathfrak{M}}^\beta)$

(証明) 定理 5.2.4 (3) 式から明かである。　（証明終）

$y \in \mathfrak{M}^\alpha$ なら $y_\alpha(t)$ が右連続な martingale になることから [53] P. 325 theorem 4.1 によって、

$\lim_{t\to\infty} y_\alpha(t) = y_\alpha(\infty)$ が全ての $x \in S$ に対し P_x 測度 0 を除いて成立する。又 $y_\alpha(t)$ の P_x 一称可積分性から $y(t)$ $0 \leq t \leq \infty$ は martingal になる。即ち

$$W' = \{\lim_{t\to\infty} y_\alpha(t) = y_\alpha(\infty) \text{ 存在して有限}\} \text{ とし,}$$
$$\overline{y}_\alpha(t) = y_\alpha(t) \quad 0 \leq t \leq \infty \quad w \in W' \text{ の時}$$
$$\equiv \infty \quad w \notin W' \text{ の時}$$

とおけば

注意 5.2.6. $\overline{y}_\alpha \sim y_\alpha$ で $\overline{y}_\alpha$ は [A.1] ~ [A.5] $[A.6]^\alpha$

[A.8] 及び [M.1] $E_x(\overline{y}_\alpha(t)^2) < \infty$ $\forall t \in [0,\infty]$ $\forall x \in S$

[M.2] $E_x(y_\alpha(t)) = 0$ $\forall t \in [0,\infty]$ $\forall x \in S$

をみたす。特に $y \in \mathfrak{M}^\circ$ なら y は $\mathfrak{G}$ に属する general additive functional と同値である。

lemma 5.2.7 (1) $y \in m$ の時 $\lim_{t \downarrow 0} E_x(y_\alpha(t)^2) = 0 \quad \forall \alpha \quad \forall x \in S$.

(2) $y \in m^\alpha$ の時 y_α は擬左連続(註)(従って y_α の不連続点は X_t の不連続点に限る。)

(証明) (1) $s < t$ の時

$$E_x(y_\alpha(t)\, y(s)) = E_x(y_\alpha(s)^2) \qquad \text{従って}$$

$$E_x((y_\alpha(t)-y_\alpha(s))^2) = E_x(y_\alpha(t)^2) - 2E_x(y_\alpha(t)\,y_\alpha(s)) + E_x(y_\alpha(s)^2) = E_x(y_\alpha(t)^2) - E_x(y_\alpha(s)^2)$$

$y(t)$ の右連続性から $t_0 > 0$ に対し

$$E_x(y_\alpha(t_0)^2) = E_x(\lim_{t \downarrow 0}(y_\alpha(t_0) - y_\alpha(t))^2) \le \varliminf_{t \downarrow 0} E_x((y_\alpha(t_0) - y_\alpha(t))^2)$$
$$= E_x(y_\alpha(t_0)^2) - \overline{\lim_{t \downarrow 0}}\, E_x(y_\alpha(t)^2) \qquad \text{これから}$$

$\lim_{t \downarrow 0} E_x(y_\alpha(t)^2) = 0$ を得る。

一般に $\sigma \in$ M.T. に対して

$$E_x(y_\alpha(\infty) \mid \mathcal{F}_\sigma) = E_x(y_\alpha(\sigma) \mid \mathcal{F}_\sigma) + E_x(E_{x_\sigma}(y(\infty))) = y(\sigma) \quad a.s.\ P_x$$

今 $\sigma_n \in$ M.T. $\sigma_n \uparrow \sigma$ とすれば 注意 1.2.10 より

$$\lim_n y(\sigma_n) = \lim_n E_x(y_\alpha(\infty) \mid \mathcal{F}_{\sigma_n}) = E_x(y_\alpha(\infty) \mid \bigcup \mathcal{F}_{\sigma_n}) = E_x(y_\alpha(\infty) \mid \mathcal{F}_\sigma) = y_\alpha(\sigma)$$

([53] 331頁 定理 4.3 参照) (証明終)

定理 5.2.8. $y \in m^\alpha$ $u(x) = E_x(y_\alpha(\infty)^2)$ とおくと u は 2α-excessive で $u \in D_R^{2\alpha}$.

(証明) (i) $H_t^{2\alpha} u(x) = E_x(e^{-2\alpha t} y_\alpha(\infty, w_t^+)^2) = E_x((y(\infty) - y(t))^2)$
$$= E_x(y(\infty)^2) - E_x(y(t)^2) \le u(x)$$

特に $\lim_{t \downarrow 0} H_t^{2\alpha} u(x) = u(x) - \lim_{t \downarrow 0} E_x(y(t)^2) = u(x)$ (注意 5.2.7 (1)) より u が α-excessive がわかる。

(ii) 一般に $\sigma \in$ M.T. に対して

$$H_\sigma^{2\alpha} u(x) = E_x(e^{-2\alpha\sigma}(y_\alpha(\infty, w_\sigma^+)^2) = E_x(y_\alpha(\infty) - y_\alpha(\sigma))^2)$$
$$= E_x(y_\alpha(\infty)^2) - E_x(y_\alpha(\sigma)^2) = u(x) - E_x(y_\alpha(\sigma)^2)$$

$\sigma_n \in$ M.T. $\sigma_n \uparrow \sigma$ とすると

$H_\sigma^{2\alpha} u(x) \le H_{\sigma_n}^{2\alpha} u(x)$ より $E_x(y_\alpha(\sigma_n)^2) \le E_x(y_\alpha(\sigma)^2)$

(註) 一般の $y \in m$ と任意の β に対しても $\sigma_n \in$ M.T. $\sigma_n \uparrow \sigma$ に対し $P_x(\lim y(\sigma_n) = y(\sigma)\ \sigma < \infty) = 1$ は云える。

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

他方 $E_x(y_\alpha(\sigma)^2) = E_x(\lim y_\alpha(\sigma_n)^2)$ （注 5.2.7 (2)）

$\leq \underline{\lim}\, E_x(y_\alpha(\sigma_n)^2)$

$\therefore\ \lim E_x(y_\alpha(\sigma_n)^2) = E_x(y_\alpha(\sigma)^2)$

これより $\lim H^{2\alpha}_{\sigma_n} u(x) = H^{2\alpha}_{\sigma} u(x)$ を得る。（定理 3.1.7）

（証明終）

注意 5.2.9 $y \in \mathcal{M}^\alpha$ (1) $\sigma, \tau \in$ M.T. $\sigma \leq \tau$ なら $E_x(y_\alpha(\sigma)^2) \leq E_x(y_\alpha(\tau)^2)$

(2) $\sigma_n \in$ M.T. $\sigma_n \uparrow \sigma$ なら $\lim_{n\to\infty} E_x(y_\alpha(\sigma_n)^2) = E_x(y_\alpha(\sigma)^2)$

（証明） 定理 5.2.8 の証明 (iii) に含まれている。（証明終）

注意 2.5.10. (1) $y, z \in \mathcal{M}^\alpha$ の時 $E_x(y_\alpha(\infty) z_\alpha(\infty)) = 0$ が全ての $x \in S$ に対して成り立てば，任意の $\sigma \in$ M.T. に対し

$E_x(y_\alpha(\sigma) z_\alpha(\sigma)) = 0 \quad \forall x \in S.$

(2) $y \in \mathcal{M}^\alpha$ $E_x(y_\alpha(\infty)^2) = 0$ なら $y \sim 0$.

（証明） (1) $E_x(y_\alpha(\infty) z_\alpha(\infty)) = E_x((e^{-\alpha\sigma} y_\alpha(\infty, w_\sigma^+) + y_\alpha(\sigma))(e^{-\alpha\sigma} z_\alpha(\infty, w_\sigma^+) + z_\alpha(\sigma)))$

$= E_x(e^{-2\alpha\sigma} E_{x_\sigma}(y_\alpha(\infty) z_\alpha(\infty))) + E_x(y_\alpha(\sigma) z_\alpha(\sigma))$

よりわかる。

(2) (i) から全ての t に対し $E_x(y_\alpha(t)^2) = 0 \quad \forall x \in S$

従って $P_x(y_\alpha(t) = 0 \ \ t$ 有理数$) = 0 \quad \forall x \in S$.

$y_\alpha(t)$ 右連続より $y_\alpha \sim 0$ 従って ((2.6) 式から) $y \sim 0$.

（証明終）

定理 2.5.8 によって $y \in \mathcal{M}^\alpha$ に対し $u(x) = E_x(y_\alpha(\infty)^2)$ は $D_k^{2\alpha}$ に属するから，定理 3.3.7 より $a \in \mathcal{L}^{2\alpha}$ が存在して

$E_x(y_\alpha(t)^2) \equiv E_x(a_{2\alpha}(\infty))$ と書ける。

又 $y, z \in \mathcal{M}^\alpha$ に対し

$E_x(y_\alpha(\infty) z_\alpha(\infty)) = \frac{1}{4} E_x((y_\alpha(\infty) + z_\alpha(\infty))^2) - \frac{1}{4} E_x((y_\alpha(\infty) - z_\alpha(\infty))^2)$

$E_x(y_\alpha(\infty) + z_\alpha(\infty))^2 = E_x(b'_{2\alpha}(\infty))$

$E_x(y_\alpha(\infty) - z_\alpha(\infty))^2 = E_x(b^2_{2\alpha}(\infty))$ $\qquad b^i \in \mathcal{L}^{2\alpha} \quad i = 1, 2.$

とできるから結局

$b \ \ (= \frac{1}{4} b' - \frac{1}{4} b^2) \in \mathcal{L}^{2\alpha}$ が存在して（註）

（註） この場合 $\lim_{t\to\infty} b^i_{2\alpha}(t) < \infty$ a.s. P_x $\forall x$ であるから $b_{2\alpha}(\infty)$ は定義できる。

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

$$E_x(y_\alpha(\infty)\, z_\alpha(\infty)) = E_x(b_{2\alpha}(\infty)) \quad \forall x\in S$$ となる。

注意5.2.1より a は y から b は y,z から（α を定めると）同値を除いて一意的に定まる。

定義 a を y の分散 b を y,z の共分散と呼び $a=\langle y,y\rangle=\langle y\rangle$ $b=\langle y,z\rangle$ であらわすことにする。

実は $\langle y\rangle$, $\langle y,z\rangle$ 等は α にも無関係なことが次の定理からわかる。

定理5.2.11. $y,z\in\mathfrak{M}^\alpha$ とする。

(1) 任意の β と $t\in[0,\infty)$ に対して,

$$E_x(y_\beta^2(t)) = E_x(\langle y\rangle_{2\beta}(t)),\quad E_x(y_\beta(t)\, z_\beta(t)) = E_x(\langle y,z\rangle_{2\beta}(t)) \quad \forall x\in S.$$

(2) $y,z\in\mathfrak{M}^\beta$ でもあれば任意の $\sigma\in M.T.$ に対し

$$E_x(y_\beta^2(\sigma)) = E_x(\langle y\rangle_{2\beta}(\sigma)) \quad E_x(y_\beta(\sigma)\, z_\beta(\sigma)) = E_x(\langle y,z\rangle_{2\beta}(\sigma))$$

(証明) $\langle y\rangle$. $\langle y,z\rangle$ は α によって定義されているとする。

(i) 先ず任意の $\sigma\in M.T.$ に対し

$$E_x(y_\alpha(\sigma)^2) = E_x(y_\alpha(\infty)^2) - E_x(e^{-2\alpha\sigma}E_{x_\sigma}\cdot y_\alpha(\infty)^2))$$

（定理5.2.8の証明(ii)参照）

$$E_x(y_\alpha(\sigma)^2) = E_x(\langle y\rangle_{2\alpha}(\infty)) - E_x(e^{-2\alpha\sigma}E_{x_\sigma}(\langle y\rangle_{2\alpha}(\infty)))$$
$$= E_x(\langle y\rangle_{2\alpha}(\infty) - e^{-2\alpha\sigma}\langle y\rangle_{2\alpha}(\infty, w_\sigma^+))$$
$$\doteq E_x(\langle y\rangle_{2\alpha}(\sigma))$$

(ii) 定理5.2.4(3)により

$$E_x\, y_\alpha(t)^2) \le E_x(y(t)^2) \le e^{2\alpha t}E_x(y_\alpha(t)^2)$$

(i)より $E_x(\langle y\rangle_{2\alpha}(t)) \le E_x(y(t)^2) \le e^{2\alpha t}E_x(\langle y\rangle_{2\alpha}(t))$

今 $t_k=\frac{t}{n}k$ $\quad k=0,1,2,\cdots\cdots n$ とし

$I_n=\sum_{k=0}^{n-1}E_x(E_{x_t}(\langle y\rangle_{2\alpha}(\frac{t}{n})))$ とおくと

$$I_n=\sum_{k=0}^{n-1}E_x(e^{2\alpha t}(\langle y\rangle_{2\alpha}(t_{k+1})-\langle y\rangle_{2\alpha}(t_k)))$$

$$I_n\downarrow E_x(\int_0^t e^{2\alpha s}\, d\langle y\rangle_{2\alpha}(s)) = E_x(\langle y\rangle(t))^{(註)}$$

他方 $I_n\le\sum_{k=0}^{n-1}E_x(E_{x_{t_k}}(y(\frac{t}{n})^2)) = E_x(\sum_{k=0}^{n-1}(y(t_{k+1})-y(t_k))^2)\le e^{\frac{2\alpha}{n}}I_n$

(註) $\sum_k e^{2\alpha t_k}(\langle y\rangle_{2\alpha}(t_{k+1})-\langle y\rangle_{2\alpha}(t_k))\le e^{2\alpha t}\langle y\rangle_{2\alpha}(t)$ 及び $\int_0^t e^{2\alpha t}d\langle y\rangle_{2\alpha}(t)$ は Riemann-Siltjes 積分可能なことからわかる。

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

即ち $I_n \leq E_x(y(t)^2) \leq e^{\frac{2\alpha}{n}} I_n$

$n \to \infty$ として $E_x(y(t)^2) = E_x(\langle y \rangle(t))$ を得る。

この証明を逆にすると任意の β に対し

$$E_x(\ y_\beta(t)^2) = E_x(\langle y \rangle_{2\beta}(t))$$

即ち(1)の前半が証明できた。

(iii) $y \in \mathcal{M}^\beta$ なら上式で $t \to \infty$ として、注意 2.5.9(2) より

$$E_x(y_\beta(\infty)^2) = \lim_{t \to \infty} E_x(y_\beta(t)^2) = E_x(\langle y \rangle_{2\beta}(\infty))$$ を得る。

これから(ii)の操作を行えば(2)の前半が得られる。

(iv) (1) (2) の後半を得るには

$$E_x(y_\alpha(\infty) z_\alpha(\infty)) = \frac{1}{4} E_x((y_\alpha(\infty) + z_\alpha(\infty))^2) - \frac{1}{4} E_x((y_\alpha(\infty) - z_\alpha(\infty))^2)$$

と分け各々について前半を適用すればよい。　　　　(証明終)

注意 5.2.12. (1) $y, y', z \in \mathcal{M}^\alpha$ k 実数とする時

$\langle y, z \rangle = \langle z, y \rangle$　$\langle y + y', z \rangle = \langle y, z \rangle + \langle y', z \rangle$　$\langle ky, z \rangle = k \langle y, z \rangle$

(2) $y \in \mathcal{M}^\alpha$　$\langle y, y \rangle \sim 0$ と $y \sim 0$ は同値。

(証明) (1)は明か

(2) $y \sim 0$ なら $\langle y, y \rangle \sim 0$ も明か。

$\langle y, y \rangle \sim 0$ から $y \sim 0$ は注意 2.5.10(2) による。

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

5.3. $\mathcal{M}^\alpha$ の分解

今後(少し不自然であるが)便宜上αを定め$\mathcal{M}^\alpha$に限ってその構造をしらべる。更に今後次の仮定をおく。

A. 任意の $\varepsilon>0$ と $\alpha>0$ に対して

$$n_\varepsilon = \sum_{|x_{s-}, x_s| \geq \varepsilon} 1 < \mathcal{O}_{b_0}^\alpha$$

即ち $E_x(\sum_{|x_{s-}, x_s| \geq \varepsilon} e^{-\alpha s}) \leq K(x) < \infty$.

定義 $y \in \mathcal{M}^\alpha$ の時 $U_{\langle y \rangle}^{2\alpha}(x) = E_x(y_\alpha(\infty)^2) < \infty$ であるが、今 $y^n \in \mathcal{M}^\alpha$ に対し $\lim_{n,m} E_x((y_\alpha^n(\infty) - y_\alpha^m(\infty))^2) = 0$ が全ての $x \in S$ に関して成立している時、$\{y^n\}$ をα基本列という。

又 $y, y^n \in \mathcal{M}^\alpha$ $\lim E_x((y_\alpha^m(\infty) - y_\alpha(\infty))^2) = 0$ の時 y^n は y にα収束するということにし、α-$l.i.m.\, y^n = y$ と書く。(註)

注意 5.3.1. $z, y^n, y \in \mathcal{M}^\alpha$ (1) α-$l.i.m.\, y^n = y$ なら $\forall t \in [0,\infty]$ に対し $\lim_{n\to\infty} E_x((y^n(t) - y^n(t))^2) = 0$ $\forall x \in S$.

(2) α-$l.i.m.\, y^n = y$, $\langle y^n, z \rangle \sim 0$ なら $\langle y, z \rangle \sim 0$.

定理 5.3.2. $y^n \in \mathcal{M}^\alpha$ $\{y^n\}$ をα基本列とすると、$y \in \mathcal{M}^\alpha$ が存在して α-$l.i.m.\, y^n = y$ となる。

(証明) 注意 5.1.2. 及び lemma 5.1.3. より明か。 (証明終)

次に $\mathcal{M}^\alpha$ を連続な部分と不連続な部分に分ける事を考える。

$$J_\varepsilon = \{ s : |x_{s-}, x_s| \geq \varepsilon \}$$ とする。

lemma. 5.3.3. $\alpha > 0$ とし $g \in \mathcal{O}_{b_0}'$ をその飛躍が有界で J_ε にしか不連続点を持たないとする。(仮定Aより $g \in \mathcal{O}_{b_0}'$ であるが)

$a = \hat{g}$ とおく。

1 $y = g - a \in \mathcal{M}^\alpha$

2. $E_x(g_\alpha(\infty)^2) = E_x(\sum_{\substack{s \in J_\varepsilon \\ s \leq t}} (g(s) - g(s-))^2 e^{-2\alpha s})$

3. $z \in \mathcal{M}^\alpha$ z_αの不連続点がgの不連続点と共通でない時は $\langle z, y \rangle = 0$

(註) $\beta > \alpha$ なら $E_x((y_\beta^n(\infty) - y_\beta^m(\infty))^2) \leq E_x((y_\alpha^n(\infty) - y_\alpha^m(\infty))^2)$

より α-$l.i.m.\, y^n = y$ より β-$l.i.m.\, y^n = y$ を得る。

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

(証明) $a \in \mathfrak{A}_0^{\alpha'}$ より $a = a^1 - a^2$ $a^i \in \mathfrak{A}_0^{\alpha}$ とできる。

$\bar{a} = a_1 + a_2$ とおく。

$\sigma = \inf\{ t : |g(t) - g(t-)| \geqq \varepsilon$ 又は $\bar{a}(t) \geq \varepsilon$ 又は $|z(t)| \geq \varepsilon \}$

$= \infty$ 上の t の存在しないとき。

とし、$|g(t) - g(t)| \leq K < \infty$ とする。

(i) $\hat{\sigma}_n$ を σ-chain とすると $\hat{\sigma}_n \uparrow \infty \ (n \to \infty)$ である $a(\sigma) \leqq \varepsilon$

$g(\sigma) \leq K$ より $a(\hat{\sigma}_m) \leq n\varepsilon$ $g(\hat{\sigma}_m) \leq mK$

で共に有界であることに注意し、

$n_t = \inf t : \hat{\sigma}_n > t$ $m_t = m \wedge n_t$ とすれば

(a) $|y_\alpha(\sigma_{n_t}) - y_\alpha(t)| \leq K + \varepsilon$

又 $E_x(y_\alpha(\hat{\sigma}_{m_t})^2) = E_x\{(\sum_{k=0}^{m-1} \chi(\hat{\sigma}_k < t)(y_\alpha(\hat{\sigma}_{k+1}) - y_\alpha(\hat{\sigma}_k)))^2\}$

$= \sum_{k=0}^{m-1} E_x(E_{x_{\hat{\sigma}_k}}(y_\alpha(\sigma)^2)\chi(\hat{\sigma}_k < t)e^{-2\alpha\hat{\sigma}_k})$

$E_x(y_\alpha(\sigma)^2) = E_x(g_\alpha(\sigma)^2) + 2E_x(g_\alpha(\sigma)a_\alpha(\sigma)) + E_x(a_\alpha(\sigma)^2)$

$= KE_x(g_\alpha(\sigma)) + E_x(2\varepsilon g_\alpha(\sigma) + \varepsilon a_\alpha(\sigma))$

$E_x(y_\alpha(\hat{\sigma}_{m_t})^2) \leqq \sum_{k=0}^{m-1} E_x(E_{x_{\hat{\sigma}_k}}(y_\alpha(\sigma)^2)e^{-\alpha\hat{\sigma}_k})$

$\leq KE_x(g_\alpha(\infty)) + \varepsilon E_x(2g_\alpha(\infty) + a_\alpha(\infty)) = M < \infty$

$\hat{\sigma}_{m_t} \uparrow \hat{\sigma}_{n_t}$ $m \uparrow \infty$ より $\lim_{m\to\infty} y_\alpha(\hat{\sigma}_{m_t}) = y_\alpha(\hat{\sigma}_{n_t})$

(b) $E_x(y_\alpha(\hat{\sigma}_{n_t})^2) \leq \varliminf_{m\to\infty} E_x(y_\alpha(\hat{\sigma}_{m_t})^2) \leq M.$

(a), (b) より $y \in \mathfrak{M}^\alpha$ を得る。

(ii) (i) と同様の計算で

$E_x(y_\alpha(\infty)^2) = \sum_{k=0}^{\infty} E_x(E_{x_{\hat{\sigma}_k}}(y_\alpha(\sigma)^2)e^{-2\alpha\hat{\sigma}_k})$

$|E_x(y_\alpha(\sigma)^2) - E_x(g_\alpha(\sigma)^2)| = \varepsilon E_x(2g_\alpha(\sigma) + a_\alpha(\sigma))$

$t \notin J_\varepsilon$ $t < \sigma$ から $E_x(g_\alpha(\sigma)^2) = E_x(\sum_{\substack{s \leq \sigma \\ s \in J_\varepsilon}}(g_\alpha(s) - g_\alpha(s-))^2)$

従って $|E_x(y_\alpha(\infty)^2) - E_x(\sum_{s \in J_\varepsilon}(g_\alpha(s) - g_\alpha(s-))^2)| \leq \varepsilon E_x(2g_\alpha(\infty) + a_\alpha(\infty))$

ε は任意であるから (2) を得る。

(iii) $E_x(Z_\alpha(\sigma)) = 0$ より (i) と同様.

$E_x(y_\alpha(\infty)Z_\alpha(\infty)) = \sum_{k=0}^{\infty} E_x(E_{x_{\hat{\sigma}_n}}(y_\alpha(\sigma)Z_\alpha(\sigma))e^{-2\alpha\hat{\sigma}_n})$

$|E_x(y_\alpha(\sigma)Z_\alpha(\sigma))| \leq |E_x(g_\alpha(\sigma)Z_\alpha(\sigma))| + |E_x(a_\alpha(\sigma)Z_\alpha(\sigma))|$

$g(\sigma) \neq g(\sigma-)$ なら $|Z_\alpha(\sigma)| = |Z_\alpha(\sigma-)| \leqq \varepsilon$

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

$g(\sigma)=g(\sigma-)$ なら $g_\alpha(\sigma)=0$ であるから

$|E_x(g_\alpha(\sigma)Z_\alpha(\sigma))| \le \varepsilon E_x(g_\alpha(\sigma))$

$|E_x(a_\alpha(\sigma)Z_\alpha(\sigma))| \le \sqrt{E_x(a_\alpha(\sigma)^2)E_x(Z_\alpha(\sigma)^2)} \le \sqrt{\varepsilon}\sqrt{E_x(a_\alpha(\sigma))E_x(Z_\alpha(\sigma)^2)} \le 2\sqrt{\varepsilon}\,(E_x(a_\alpha(\sigma))+E_x(Z_\alpha(\sigma)^2))$

従って $\sum_{k=0}^{\infty} E_x(|E_{\hat\sigma_k}(g_\alpha(\sigma)Z_\alpha(\sigma))|e^{-2\alpha\hat\sigma_k} \leqq \varepsilon E_x(g_\alpha(\infty))$

$\sum_{k=0}^{\infty} E_x(|E_{x\hat\sigma_k}(a_\alpha(\sigma)Z_\alpha(\sigma))|) \le 2\sqrt{\varepsilon}\,(E_x(a_\alpha(\infty))+E_x(Z_\alpha(\infty)^2))$

即ち $|E_x(g_\alpha(\infty)Z_\alpha(\infty))| \le \varepsilon E_x(g_\alpha(\infty)) + 2\sqrt{\varepsilon}\,E_x(a_\alpha(\infty)) + 2\sqrt{\varepsilon}\,E_x(Z_\alpha(\infty)^2)$

ε は任意であるから(3)を得る。　　（証明終）

$\mathcal{M}^\alpha_c = \{ y \in \mathcal{M}^\alpha \quad y(t)$ は連続$\}$ とおく。

lemma 5.3.4. $y \in \mathcal{M}^\alpha_c \quad z \in \mathcal{O}_f' \cap \mathcal{M}^\alpha$ なら $\langle y, z\rangle \sim 0$.

（証明） $g^k_{(t)} = \sum_{s\in J_t^{\frac{1}{k}}} \chi(|z(s)-z(s-)| \le k)(z(s)-z(s-))$, $z^k = g^k - \hat{g}^k$ とおく。

$\lim_{k\to\infty} z^k = z \quad a.s.\ P_x \quad \forall x \in S.$

一方 z^k は lemma 5.3.3 の条件をみたす(註)から $z-z^k$ と z^k は不連続点を共有しない 即ち $\langle z-z^k, z\rangle \sim 0$

従って $\langle z-z^k\rangle \sim \langle z\rangle - \langle z^k\rangle$

従って $\lim_{k\to\infty} E_x((z^k(\infty)-z(\infty))^2) = E_x(z(\infty)^2) - \lim_{k\to\infty} E_x(z^k(\infty)^2)$

$\leqq E_x(z(\infty)^2) - E_x(\lim z^k(\infty)^2) = 0$

即ち $\alpha\text{-}l.i.m.\ z^k = z.$

一方 z^k と y に lemma 5.3.3 を適用して $\langle y, z^k\rangle = 0$

注意 5.3.1 より $\langle y, z\rangle \sim 0$ を得る。　　（証明終）

$\mathcal{M}^\alpha_g = \{ y : y \in \mathcal{M}^\alpha$ で $y^n \in \mathcal{O}_f' \cap \mathcal{M}^\alpha$ が存在し $y = \alpha\text{-}l.i.m.\ y^n \}$
とおく。

定理 5.3.5. $y \in \mathcal{M}^\alpha_c$, $z \in \mathcal{M}^\alpha_g$ なら $\langle y, z\rangle \sim 0$.

（証明） lemma 5.3.4 と注意 5.3.1 より明か。（証明終）

定理 5.3.6. $y \in \mathcal{M}^\alpha$ は $y = y^c + y^g \quad y^c \in \mathcal{M}^\alpha_c \quad y^g \in \mathcal{M}^\alpha_g$ と一意的に分解できる。

（証明） (i) 分解の一意性は, $y = y^c + y^g = z^c + z^g$
$y^c, z^c \in \mathcal{M}^\alpha_c \quad y^g, z^g \in \mathcal{M}^\alpha_g$ であれば

（註） $\alpha < \beta$ なら $\mathcal{M}^\alpha \subset \mathcal{M}^\beta \quad \mathcal{M}^\alpha_c \subset \mathcal{M}^\beta_c$ であるから $\alpha > 0$ と仮定してよい。$\langle y, z\rangle \sim 0$ は α に無関係である。

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

$\langle y^c - z^c \rangle = \langle y^c - z^c, z^g - y^g \rangle = 0$ より注意 5.2.12 からわかる。

(ii) $g^k(t) = \sum_{\substack{s\in J_\ell \\ s\le t}} \chi(|y(s)-y(s-)| = k)(y(s)-y(s-))$, $y^k = g^k - \tilde{g}^k$ とおく。y^k と $y - y^k$ は $\beta > 0$ $\beta \geq \alpha$ に対し lemma 5.3.3 の条件をみたすから $\langle y^k, y - y^k \rangle = 0$ $\langle y^k \rangle \sim \langle y \rangle - \langle y - y_k \rangle \ll \langle y \rangle$ より $y^k \in \mathcal{M}^\alpha$ がわかる。同様 $k < \ell$ に対し y^k と $y^\ell - y^k$ に lemma 5.3.3 を適用し $\langle y^k \rangle \sim \langle y^\ell \rangle - \langle y^\ell - y^k \rangle \ll y^\ell$ 従って

$$E_x(y^k(\infty)^2) \uparrow \leqq E_x(y(\infty)^2)$$

$$\lim_{k\to\infty} E_x((y^k(\infty) - y^\ell(\infty))^2) = \lim_{k,\ell\to\infty} |E_x(y^\ell(\infty)^2) - E_x(y^k(\infty)^2)| = 0$$

y^k は α 基本列である。従って定理 5.3.2 から $y^g \in \mathcal{M}^\alpha$ が存在して $\alpha\text{-}\mathrm{l.i.m.}\, y^k = y^g$ 故に $y^g \in \mathcal{M}^\alpha_g$. $y^c = y - y^g$ とおく lemma 5.1.1 及び注意 5.1.2 から各 $x \in S$ に対し部分列 $k_i^{(x)}$ をえらび P_x 測度 0 を除いて収束 $y_\alpha^{k_i^{(x)}} \to y_\alpha^g$ を一様収束できる。この時 $y_\alpha - y_\alpha^{k_i^{(x)}}$ の不連続点 S の集合を $Q^i(w)$ とすれば $Q^i(w) \downarrow \phi$ (註) であるから, $P_x(y_\alpha^c(t)$ 連続 $0 \leq t \leq \infty) = 1$ 即ち $P_x(y^c(t)$ 連続 $t \in [0, \infty)) = 1$ $\forall x \in S$ (適当に version を取れば) $y^c \in \mathcal{M}^\alpha_c$. (証明終)

定理の証明で, $E_x(y^k(\infty)^2) \uparrow E_x(y^g(\infty)^2)$ 一方 lemma 5.3.3 から $E_x(y^k(\infty)^2) = E_x(\sum(y_\alpha^k(s) - y_\alpha^k(s-))^2) \uparrow E_x(\sum(y_\alpha(s) - y_\alpha(s-))^2)$ であるから次の注意を得る。

注意 5.3.7 $E_x\, y^g \in \mathcal{M}^\alpha_g$ の時 $(y_\alpha^g(\infty)^2) = E_x(\sum_s (y_\alpha^g(s) - y^g(s-))^2)$

注意 5.3.8 $\mathcal{M}^\alpha_c$, $\mathcal{M}^\alpha_g$ は α-収束の意味で閉じた線型空間である。

(証明) $\mathcal{M}^\alpha_c = \{y \in \mathcal{M}^\alpha ;\ \langle y, z \rangle \sim 0 \quad \forall z \in \mathcal{M}^\alpha_g\}$

$\mathcal{M}^\alpha_g = \{y \in \mathcal{M}^\alpha ;\ \langle y, z \rangle \sim 0 \quad \forall z \in \mathcal{M}^\alpha_c\}$

と注意 5.2.12 (2) に注意すると明か。 (証明終)

又 $\langle y, z \rangle \sim 0$ は α に無関係であったから

注意 5.3.9 $\beta > \alpha$ なら $\mathcal{M}^\alpha \cap \mathcal{M}^\beta_c = \mathcal{M}^\alpha_c$ $\mathcal{M}^\alpha \cap \mathcal{M}^\beta_g = \mathcal{M}^\alpha_g$

最後に lemma 5.3.3 を少し拡張して,

(註) y_α の不連続点は x_t の不連続点に限る。(定理 3.5.2 及び lemma 5.2.7)

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

注意5.3.10. $\mathfrak{g} \in \mathcal{Q}^{\alpha}_{0}$ 且つ $\mathfrak{g}$ の飛躍が J_{ε} にだけあるとする。

$y = \mathfrak{g} - \tilde{\mathfrak{g}}$ とおくと $y \in \mathfrak{M}^{\alpha}_{\mathfrak{g}}$ で

$$E_x(y_\alpha(\infty)^2) = E_x((\mathfrak{g}(s) - \mathfrak{g}(s-))^2)\, e^{-2\alpha s})$$

即ち $\langle y \rangle \sim \tilde{V}$ 但し $V = \sum_{s \le t} (\mathfrak{g}(s) - \mathfrak{g}(s-))^2$

(証明) lemma 5.3.3 で $|\mathfrak{g}(t) - \mathfrak{g}(t-)|$ が有界なことは，$\mathfrak{g} \in \mathcal{Q}^{\alpha}_{0}$ を証明する部分にだけ使ったことに注意すればよい。同様このlemmaは仮定Aなしで成立している。

5.4. $\mathfrak{M}^{\alpha}_{\mathfrak{g}}$ の表現

この節では渡辺信三氏の飛躍のある場合の確率積分の理論を4.4節の拡張の形で取扱う。先ず注意5.3.7を拡張し

lemma.5.4.1. $y, z \in \mathfrak{M}^{\alpha}_{\mathfrak{g}}$ とすれば

$$E_x(y_\alpha(\infty) z_\alpha(\infty)) = E_x\Big(\sum_{|x_{s-}, x_s| > 0} (y(s) - y(s-))(z(s) - z(s-))\, e^{-2\alpha s}\Big)$$

(証明) $E_x(y_\alpha(\infty) z_\alpha(\infty)) = \frac{1}{4} E_x((y_\alpha + z_\alpha)(\infty)^2) - \frac{1}{4} E_x((y_\alpha - z_\alpha)(\infty)^2)$

として、右辺に注意5.3.7を適用すればよい。（証明終）

$$\mathfrak{g}(t) = \sum_{s \le t} (y(s) - y(s-))(z(s) - z(s-))$$

とおけば

$$\sum |y(s) - y(s-)|\,|z(s) - z(s-)|\, e^{-2\alpha s} \le \sqrt{\sum |y(s) - y(s-)|^3 e^{-2\alpha s} \sum |z(s) - z(s-)|^2 e^{-2\alpha s}}$$

一方（5.3.7）により

$$E_x\Big(\sqrt{\sum |y(s) - y(s-)|^2 e^{-2\alpha s} \sum |z(s) - z(s-)|^2 e^{-2\alpha s}}\Big) \le \sqrt{E_x(y_\alpha(\infty)^2)\, E_x(z_\alpha(\infty)^2)} < \infty$$

$\mathfrak{g} \in \mathcal{Q}'_0$ であって，lemma 5.4.1は

$$(4.1) \quad \langle y, z \rangle \sim \tilde{\mathfrak{g}}$$

といいかえられる。

4.4節と同様 $n^k(t) = \sum_{\frac{1}{k+1} \le |x_{s-}, x_s| < \frac{1}{k}} 1$, $k = 0, 1, 2, \cdots$

とおく。仮定Aの下では $\alpha > 0$ に対し，$n_k \in \mathcal{Q}^{\alpha}_{0}$ である。$\bar{\lambda}_k$ は n_k の二次数canonical測度，$\bar{\lambda}_J = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_k}{(1 + \lambda_k(S))2^k}$ とおく。

定理5.4.2. (1) φ を $\mathbb{F}(S \times S)$ 可測とし（$\varphi(x, x) = 0 \;\; \forall x \in S$ とする）

或る α に対し

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

(4.2) $E_x(\sum \varphi(x_{s-}, x_s)^2 e^{-2\alpha s}) < \infty \quad \forall x \in S$

とする。この時 $y \in \mathfrak{M}_g^\alpha$ が存在し 任意の $z \in \mathfrak{M}^\alpha$ に対し

(4.3) $E_x(y_\alpha(\infty) z_\alpha(\infty)) = E_x(\sum \varphi(x_{s-}, x_s)(z(s)-z(s-))e^{-2\alpha s})$ となる。

$\alpha > 0$ の時 (4.3) をみたす $y \in \mathfrak{M}_g^\alpha$ は一意的に定まる。

(2) 逆に $y \in \mathfrak{M}_g^\alpha$ に対し (4.1) をみたす φ が存在し，任意の $z \in \mathfrak{M}_g^\alpha$ に対し (4.3) が成立するとこのような φ は λ_k 測度 0 を除いて一意的に定まる。

(証明) (i) $V(t) = \sum_{s \leq t} \varphi(x_{s-}, x_s)^2$ とおく。

(4.2) より $V \in \mathfrak{A}_{rn}^{2\alpha}$ である。

$$g^k = \sum_{|x_{s-}, x_s| \geq \frac{1}{k}} \chi(|\varphi(x_{s-}, x_s)| < k)\varphi(x_{s-}, x_s)$$

$y^k = g^k - \tilde{g}^k$ とおく。

$\beta > 0 \vee \alpha$ と取れば，lemma 5.3.3 より，$y^k \in \mathfrak{M}_g^\beta$ で

(a) $E_x(y_\beta^k(\infty)^2) = E_x(\sum_{|x_{s-}, x_s| \geq \frac{1}{k}} \chi(\varphi(x_{s-}, x_s) < k)\varphi(x_{s-}, x_s)^2 e^{-2\beta s})$

又 $\ell > k$ に対し $y^\ell - y^k$, y^k は不連続点を共有しないから，

$\langle y^\ell - y^k, y^k \rangle \sim 0$, 即ち

(b) $\langle y^\ell - y^k \rangle \sim \langle y^\ell \rangle - \langle y^k \rangle$. 特に $\langle y^k \rangle \Uparrow$

$$V^k(t) = \sum_{\substack{s \leq t \\ |x_{s-}, x_s| \geq \frac{1}{k}}} \chi(|\varphi(x_{s-}, x_s)| < k)\varphi(x_{s-}, x_s)^2$$

とおけば (a) より

(a′) $\langle y^k \rangle \sim \tilde{V}^k$

$E_x(\langle y^k \rangle_{2\alpha}(\infty)) \leq E_x(V_{2\alpha}) < \infty$ 故に $y^k \in \mathfrak{M}_g^\alpha$.

これから $\langle y^k \rangle \sim \tilde{V}^k \Uparrow \tilde{V}$

特に (b) より $E_x((y^\ell - y^k)_\alpha(\infty))^2 \to 0$ ($\ell, k \to \infty$) で

y^k は α 基本列になり，定理 5.3.2. から $y \in \mathfrak{M}_g^\alpha$ が存在して

$\alpha\text{-l.i.m.}\, y^k = y$.

今 $z \in \mathfrak{M}_g^\alpha$ を任意にとると，lemma 5.4.1 から

$$E_x(y_\alpha^k(\infty) z_\alpha(\infty)) = E_x(\sum (y^k(s) - y^k(s-))(z(s)-z(s-))e^{-2\alpha s})$$

$$= E_x\{\sum_{|x_{s-}, x_s| \geq \frac{1}{k}} \chi(|\varphi| < k)\varphi(x_{s-}, x_s)(z(s)-z(s-))e^{-2\alpha s}\}$$

$$E_x\{\sum \varphi(x_{s-}, x_s)(z(s)-z(s-))e^{-2\alpha s} - \sum_{|x_{s-}, x_s| \geq \frac{1}{k}} \chi(|\varphi| < k)\varphi(x_{s-}, x_s)(z(s)-z(s-))e^{-2\alpha s}\}^2$$

$\leq E_x(V_{2\alpha} - V_{2\alpha}^k) E_x(\sum (z(s)-z(s-))^2 e^{-2\alpha s}) \downarrow 0$ ($k \to \infty$) に注意し

$$E_x(y_\alpha(\infty) z_\alpha(\infty)) = \lim_{k \to \infty} E_x(y_\alpha^k(\infty) z_\alpha(\infty)) = E_x(\sum \varphi(x_{s-}, x_s)(z(s)-z(s-))e^{-2\alpha s})$$

を得る。

(ii) y の一意性は，(ぺ3) をみたす．$y, \bar{y} \in \mathcal{M}_g^\alpha$ があれば

$\langle y-\bar{y}, z \rangle \sim 0 \quad \forall z \in \mathcal{M}_g^\alpha$. 特に $\langle y-\bar{y}, y-\bar{y} \rangle \sim 0 \quad y \sim \bar{y}$ を得る（注意 5.3.12）

(iii) 逆に $y \in \mathcal{M}_g^\alpha$ があたえられたとする。

(c) $E_x(\sum(y(s)-y(s-))^2 e^{-2\alpha s}) = E_x(y_\alpha(\infty)^2) < \infty$ である。

従って $\beta > 0 \cup \alpha$ に対し $E_x(\sum|y(s)-y(s-)|(n^k(s)-n^k(s-))e^{-2\beta s})^2$

$\leq E_x(\sum(y(s)-y(s-))^2) E_x(n_\beta^k(\infty)) < \infty$

但し $n^k = \sum_{\frac{1}{k+1} \leq |x_{s-}, x_s| < \frac{1}{k}} 1$ である。

$g^k(t) = \sum_{s \leq t}(y(s)-y(s-))(n^k(s)-n^k(s-))$ とおく．

$g^k \in \mathcal{G}_0^{\prime 2\beta} \subset \mathcal{G}_0^\prime$ 今 $\varphi \in F(S \times S)$ に対し

$\varphi\, n_k = \sum \varphi(x_{s-}, x_s)(n^k(s)-n^k(s-)) \sim 0$ ならば

$\varphi\, g_k \sim 0$ (註) 従って定理 4.4.6. から，$\mathbb{F}(S \times S)$ 可測な函数 φ_k が存在して，$g^k \sim \varphi_k \cdot n_k$ と書ける。

$(x_{s-}, x_s) \notin E_k = \{(x, y);\ \frac{1}{k+1} \leq |x, y| < \frac{1}{k}\}$ なら $n^k(s)-n^k(s-) = 0$ だから

$(x, y) \notin E_k$ で $\varphi_k \equiv 0$ ととってもよい。

E_k 上で $\varphi \equiv \varphi_k$ とおく．（$\varphi = \sum \varphi_k$ でもある）

(c) $\quad g^k \sim \varphi \cdot n_k = \sum_{\frac{1}{k+1} \leq |x_{s-}, x_s| < \frac{1}{k}} \varphi(x_{s-}, x_s)$

$y^k = g^k - \tilde{g}^k$ とおく。

$g^k \in \mathcal{G}_0^{\prime 2\beta}$ より $y^k \in \mathcal{M}_g^{2\beta}$ 注意 5.3.10 から $\langle y^k \rangle \sim \widetilde{\sum_{\frac{1}{k} > |x_{s-}, x_s| \geq \frac{1}{k+1}} (y(s)-y(s-))^2}$

他方 $E_x(\sum(y(s)-y(s-))^2 e^{-2\alpha s}) < \infty$ より $y^k \in \mathcal{M}_g^\alpha$.

$E_x((y_\alpha - \sum_{k=0}^N y_\alpha^k)(\infty)^2) = E_x(\sum_{|x_{s-}, x| < \frac{1}{N+1}} |y(s)-y(s-)|^2 e^{-2\alpha s}) \downarrow 0 \quad (N \to \infty)$

即ち $\alpha\text{-}\underset{N \to \infty}{l.i.m.} \sum_{k=0}^N y^k = y$

(d) $E_x(z_\alpha(\infty) y_\alpha^k(\infty)) = E_x(\sum_{\frac{1}{k} > |x_{s-}, x_s| \geq \frac{1}{k+1}} \varphi(x_{s-}, x_s)(z(s)-z(s-))e^{-2\alpha s})$

$E_x(\sum_{\frac{1}{k+1} \leq s < \frac{1}{k}} |\varphi(x_{s-}, x_s)||z(s)-z(s-)| e^{-2\alpha s})^2 \leq E_x(\varphi^2 n_{2\alpha}^k(\infty)) E_x(z_\alpha(\infty)^2) < \infty$

に注意し，(d) を k について加えて

$E_x(z_\alpha(\infty) z_\alpha(\infty)) = E_x(\varphi(x_{s-}, x_s)(z(s)-z(s-)) e^{-2\alpha s}$

を得る。

(註) これは $\sum_{s \leq t} |y(s)-y(s-)|(n^k(s)-n^k(s-)) \varphi(x_{s-}, x_s) \sim 0$ と同値。

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

特に $z = y^k$ とおくと

$E_x(y_\alpha(\infty) y^k_\alpha(\infty)) = E_x(\varphi^2 \cdot \eta^k_{2\alpha})$ k について加え

$E_x(y_\alpha(\infty)^2) = E_x(\sum \varphi(x_{s-}, x_s)^2 e^{-2\alpha s}$ を得る。(α-$l.i.m.\ \sum^N y^k = y$ による)

iv) $\alpha > 0$ $y \in \mathcal{M}^\alpha$ に対し、$\varphi, \bar{\varphi}$ が (4.3) をみたしたとする。

$\bar{\eta}^k = \eta^k - \tilde{\eta}^k \in \mathcal{M}^\alpha$ (lemma 5.3.3)

$E_x(y_\alpha(\infty)\ \tilde{\eta}^k_\alpha(\infty)) = E_x(\varphi \cdot \eta^k_{2\alpha}) = E_x(\bar{\varphi} \cdot \eta^k_{2\alpha})$

$|\varphi|\eta^k_{2\alpha},\ |\bar{\varphi}|\eta^k_{2\alpha} \in \mathcal{O}_f^{\prime\alpha}$ より $\varphi = \bar{\varphi}$ a.s. $\bar{\lambda}_k$ (定理 4.4.3)

k は任意であるから $\varphi = \bar{\varphi}$ a.s. $\bar{\lambda}_J$.

注意 5.4.3 定理 5.4.2 の $y \in \mathcal{M}^\alpha$ と φ に対し

$y^k - g^k - \tilde{g}^k$ $g^k = \varphi \cdot \eta^k$ とおくと $y^k \in \mathcal{M}^\alpha$ で、α-$l.i.m.\ y^k = y$.

$\{\bar{\eta}, \mu(x, \cdot)\}$ を Lévy system とする $\bar{\eta} \in \mathcal{Z}^\alpha$ としてよい。(4.5 節参照) $\mathbb{F}(S \times S)$ 可測な非負函数 φ に対し

$T^\varepsilon \varphi(x) = \int_{|x,y| \geq \varepsilon} \varphi(x, y) \mu(x, dy)$ と定義すると、定理 4.5.4 より

$\widetilde{\varphi \cdot \eta_\varepsilon} \sim T^\varepsilon \varphi \cdot \tilde{\eta}$ である。(但し $\eta_\varepsilon = \sum_{|x_{s-}, x_s| \geq \varepsilon} 1$),

$\sum_{s \leq t} \varphi(x_{s-}, x_s)^2 = g(t)$ とおくと

$\varphi^2 \eta_\varepsilon \Uparrow g$ $\tilde{g} \sim T\varphi \cdot \tilde{\eta}$ 但し $T\varphi^2 = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} T^\varepsilon \varphi^2$.

$E_x(\tilde{g}_{2\alpha}) = E_x(T\varphi \cdot \tilde{\eta}_{2\alpha})$ ($\infty = \infty$ も含めて) (lemma 4.3.8)

従って 条件 (4.2) 即ち $g \in \mathcal{O}_{f_0}^{2\alpha}$ の必要充分条件は

$E_x(T\varphi^2 \cdot \tilde{\eta}_{2\alpha}) < \infty$ 又 $\tilde{\eta}$ の canonical system を $\{\lambda, g_\alpha(x, y)\}$ とおくと上の条件は又

$E_x(T\varphi^2 \cdot \tilde{\eta}_{2\alpha}) = \int g_\alpha(x, y) T\varphi^2(y) d\lambda < \infty$ となる。

定理 5.4.4 次の条件は同値である。

(1) φ が (4.2) をみたす。

(2) $E_x(T\varphi^2 \cdot \tilde{\eta}_{2\alpha}) < \infty$ $\forall x \in S$

(3) $\int g^{2\alpha}(x, y) \int \mu(y, dz) \varphi(y, z)^2 < \infty$ $\forall x \in S$.

5.5. 確率積分

$\mathcal{M}^\alpha_c$ の構造をしらべる前に，確率積分について準備する。

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

今 $a\in\mathcal{L}'$ の時 $a=a'-a^2$ $a^i\in\mathcal{L}$ と書けるが $c=a'+a^2$ とおけば, $a^i\ll c$ であるから,
定理 4.2.4 より $a^i\sim f^i\cdot c$ 従って $a\sim f\cdot c$ $f=f'-f^2$ と書ける ($f, f', f^2\in F(S)$).

一般に $a\sim f.c$ $f\in F(S)$ $c\in\mathcal{L}$ と書けた時

(5.1) $|a|=|f|\cdot c\in\mathcal{L}$

とおき, $|a|$を a の 絶対値という事にする.

この時 (5.2) $a=\chi(f>0)\cdot|a|-\chi(f<0)|a|$ と書ける。

注意 5.5.1. (1) $|a|$ は一意的に定る.

(2) $a\in\mathcal{L}'^{\alpha}$ の必要充分条件は $|a|\in\mathcal{L}^{\alpha}$

(証明) (1) $a\sim f\cdot c\sim f'\cdot c'$ $f, f'\in F(S)$ $c, c'\in\mathcal{L}$ と書けたとする.

$c+c'\sim b$ とおくと $c\sim g b$ $c'\sim g' b$ $g, g'\geqq 0$ と書ける: 故に $f g b\sim f' g' b$. λ_b を b の canonical 測度とすると, 定理 4.1.4 から $fg=f'g'$ a.s. λ_b 従って $|f|g=|f'|\cdot c$.

(2) は (5.2) と $\mathcal{L}'^{\alpha}$ の定義から明か. (証明終)

(5.2) 式から f が必ずしも有界でなくても, $|f|\cdot|a|\in\mathcal{L}^{\alpha}$ なら $f.a$ はは確定して $\mathcal{L}^{\alpha}$ に属する.

注意 5.5.2 今 $a\in\mathcal{L}'^{\alpha}$ に対し, f_n, g を $\mathbb{F}(S)$ 可測 $E_x(|g|\cdot|a|(\infty))<\infty$ $\forall x\in S$ $|f_n|\leq g$ で $\lim_{n\to\infty} f_n=f$ a.s. λ_a とすると

$\lim_{n\to\infty} E_x((f_n-f)\cdot a_\alpha)=0$ 但し λ_a は $|a|$ の canonical 測度である。

(証明) $|E_x((f_n-f)\cdot a_\alpha)|\leqq E_x(|f_n-f|\cdot|a_\alpha|)$

$\lim (f_n-f)\cdot a\sim 0$ より $|f_n-f|\cdot|a|\leq g\cdot|a|$ に注意して

$\lim_{n\to\infty} E_x(|f_n-f|\cdot|a|_\alpha)=E_x(\lim\int|f_n-f|d|a_\alpha|)=E_x(\int\lim|f_n-f|d|a_\alpha|)=0.$

(証明終)

今 $y\in\mathcal{M}_c^{\alpha}$ に対して,

$\ell_2^{\alpha}(y)=\{f; f;\mathbb{F}(S)$可測且つ $f^2<y>\in\mathfrak{A}^{2\alpha}\}$ と定義する.

$\ell_2^{\alpha}(y)\supset F(S)$ である.

lemma 5.5.3

$y, z\in\mathcal{M}_c^{\alpha}$ $f\in\ell_2^{\alpha}(y)$ $g\in\ell_2^{\alpha}(z)$ なら

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

$|f\ g|\cdot|<y,z>| \in \mathcal{O}^{2\alpha}$ で

$E_x(|f\cdot g||<y,z>_{2\alpha}|)^2 \leq E_x(f^2<y>_{2\alpha})E_x(g^2<z>_{2\alpha}) \quad \forall x\in S.$

(証明) $|<y,z>|+<y>+<z> = C \in \mathcal{L}^{2\alpha}$ とおく。

$<y> \sim k_1\cdot c \quad <z> \sim k_3\cdot c \quad <y,z> \sim k_2\cdot c \quad k_i \in F(S)$

であるから、任意の有理数 $\gamma\cdot\delta$ に対し

$0 \ll <\gamma y+\delta z> \sim (\gamma^2 k_1 + 2\gamma\delta k_2 + \delta^2 k_3)\cdot C$

λ_c を c の *canonical* 測度とすれば

$(\gamma^2 k_1 + 2\gamma\delta k_2 + \delta^2 k_3) \geqq 0 \quad a.s.\ \lambda_c$

これより $\begin{pmatrix} k_1 & |k_2| \\ |k_2| & k_3 \end{pmatrix}(x)$ は λ_c 測度 0 を除いて半正値.

従って、今度は任意の実数 γ,δ に対し

$\gamma^2 f^2 k_1 + 2\gamma\delta|f\ g||k_2| + \delta^2 g^2 k_3 \geqq 0 \quad a.s.\ \lambda_c$

$|k_2|\cdot C = |<y,z>|$ に注意すると

$\gamma^2 f^2<y> + 2\gamma\delta|f\cdot g||<y,z>| + \delta^2|g|^2<z> \gg 0$ を得る。

特に $\gamma^2 E_x(f^2<y>_{2\alpha}) + 2\gamma\cdot\delta E_x(|f\cdot g||<y,z>_{2\alpha}|) + \delta^2 E_x(|g|^2<z>_{2\alpha}) \geqq 0$

γ,δ は任意であるから *lemma* を得る。　　（証明終）

特に $f\in l_2^\alpha(y)$ なら $f\cdot<y\cdot z> \in \mathcal{O}'^{2\alpha}$ であるから

定義　$y\in \mathcal{M}_c^\alpha$　$f\in l_2^\alpha(y)$ に対して

$y_1\in \mathcal{M}_c^\alpha$ が任意の $z\in\mathcal{M}_c^\alpha$ に対して

(5,3)　$<y_1, z> \sim f\cdot<y,z>$

をみたす時、y_1 を f の y による確率積分という。$y_1 = f\cdot y$ と書く。

定理 5.5.4.　$f\cdot y$ は一意的に定る。

(証明)　$y_1, y_2\in\mathcal{M}_c^\alpha$ が (5,3) の性質を持てば、$<y_1-y_2, z> \sim 0$ が全ての $z\in\mathcal{M}_c^\alpha$ に対して成立する。特に $z = y_1-y_2$ とおけば

$<y_1-y_2> \sim 0 \quad \therefore y_1 \sim y_2.$　　（証明終）.

lemma 5.5.5.　$y\in\mathcal{M}^\alpha$ の時 (1) k が実数なら $ky = k\cdot y$,

(2)　$f, g\in l_2^\alpha(y)$ なら $(f+g)\cdot y$ は存在して

$(f+g)\cdot y = f\cdot y + g\cdot y.$

(3)　$f_n, f\in l_2^\alpha(y)$　$\lim_{n\to\infty} E_x((f_n-f)^2\cdot<y>) = 0 \quad \forall x\in S$ の時

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

$f\cdot y$ は存在し, $f\cdot y = \alpha\text{-}l.i.m.\, f_n\cdot y$.

(4) 特に $f_n, g \in l_2^\alpha(y)$ $|f_n| \leqq g$ $\lim f_n = f$ a.s. $\lambda_{\langle y\rangle}$ の時は(3)が成立する。但し $\lambda_{\langle y\rangle}$ は $\langle y\rangle$ の canonical 測度である。

(証明) (1) (2) は明か。(3)は $\lim\limits_{n,m\to\infty} E_x((f_n-f_m)^2\langle y\rangle) = 0$ であるが

$\langle (f_n-f_m)\cdot y\rangle = (f_n-f_m)\langle y, (f_n-f_m)\cdot y\rangle = (f_n-f_m)^2\cdot\langle y\rangle$

より $\lim\limits_{n,m\to\infty} E_x((f_n y - f_m(y))_\alpha(\infty)^2) = 0$. 従って定理 5.3.2 より

$\bar{y} \in \mathcal{M}^\alpha$ が存在して, $\alpha\text{-}l.i.m.\, f_n y = \bar{y}$.

任意の $z \in \mathcal{M}^\alpha$ に対して

$$E_x(\bar{y}_\alpha(\infty) z_\alpha(\infty)) = \lim_{n\to\infty} E_x(f_n y_\alpha(\infty) z_\alpha(\infty)) = \lim_{n\to\infty} E_x(f_n\langle y, z\rangle)$$

$$E_x((f_n-f)\langle y, z\rangle) \leqq E_x((f_n-f)^2\langle y\rangle) E_x(\langle z\rangle)$$ (lemma 5.5.3) より

(2)を得る。(3)は注意 5.5.2 から

$$E_x((f_n-f)^2\langle y\rangle) \leqq E_x(2|g f_n - g f|\cdot\langle y\rangle) \to 0$$ を得る。

これと (2) を合せ (3) がわかる。

次に $f\cdot y$ の存在を証明する。

lemma 5.5.6. $y \in \mathcal{M}_c^\alpha$ K を compact 集合とすると $\chi_K\cdot y$ は存在する。

(証明) (i) $K \subset G$ を開集合とし, $L = G^c$ とおく。$\sigma_0 = \tau_0 = 0$ とし,

$x_0 \in K$ の時 $\sigma_1 = 0$ $\tau_1 = \sigma_L$

$x_0 \notin K$ の時 $\sigma_1 = \sigma_K$ $\tau_1 = \sigma_1 + \sigma_L(w_{\sigma_1}^+)$

以下順に $\sigma_n = \tau_{n-1} + \sigma_K(w_{\tau_{n-1}}^+)$

$\tau_n = \sigma_n + \sigma_L(w_{\sigma_n}^+)$ とおく。

K compact L は閉集合だから。(W.1) (W.2) より

$\lim \sigma_n = \lim \tau_n = \infty$.

今 $\sigma_n \leqq t < \tau_n$ の時

$$\bar{y}_\alpha(t) = \sum_{k=1}^{n-1}(y_\alpha(\tau_k) - y_\alpha(\sigma_k)) + y_\alpha(t) - y_\alpha(\sigma_n)$$

$\tau_n \leqq t < \sigma_{n+1}$ の時

$$\bar{y}_\alpha(t) = \sum_{k=1}^{n}(y_\alpha(\tau_k) - y_\alpha(\sigma_k))$$ とおく。

$$\bar{y}_\alpha(t) = \sum_{n=0}^{\infty}(y_\alpha(\tau_n \wedge t) - y_\alpha(\sigma_n \wedge t))$$ とも書ける。

(a) y の性質と上の定義から, $\bar{y}_\alpha$ は [A.1]〜[A.5] をみたし t について連続である。

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

又任意の $z \in \mathcal{M}^\alpha$ に対して，

$$E_x(\bar{y}_\alpha(\infty) z_\alpha(\infty)) = \sum_{n=0}^\infty \sum_{m=0}^\infty E_x(\quad (y_\alpha(\tau_n) - y_\alpha(\sigma_n))\{(z_\alpha(\sigma_{n+1}) - z_\alpha(\tau_n)) + (z_\alpha(\tau_n) - z_\alpha(\sigma_n))\})$$
$$= \sum_{n=0}^\infty E_x(y_\alpha(\tau_n) - y_\alpha(\sigma_n))(z_\alpha(\tau_n) - z_\alpha(\sigma_n)))$$
$$= \sum_{n=0}^\infty E_x(\langle y, z\rangle_{2\alpha}(\tau_n) - \langle y, z\rangle_{2\alpha}(\sigma_n))$$

$\sigma_n \le t < \tau_n$ では $x_t \in G$ $\quad \tau_n \le t < \sigma_{n+1}$ では $x_t \notin K$ より，

$$|E_x(\sum_{n=0}^\infty (\langle y, z\rangle_{2\alpha}(\tau_n) - \langle y, z\rangle_{2\alpha}(\sigma_n))) - E_x(\chi_K \langle y, z\rangle_{2\alpha}(\infty))|$$
$$= |E_x(\sum_{n=0}^\infty (\chi_G \cdot \langle y, z\rangle_{2\alpha}(\tau_n) - \chi_G \langle y, z\rangle_{2\alpha}(\sigma_n))) - E_x(\sum_{n=0}^\infty (\chi_K \langle y, z\rangle_{2\alpha}(\tau_n) - \chi_K \langle y, z\rangle_{2\alpha}(\sigma_n)))|$$
$$= |E_x(\sum_{n=0}^\infty (\chi_G - \chi_K)(\langle y, z\rangle_{2\alpha}(\tau_n) - \langle y, z\rangle_{2\alpha}(\sigma_n)))| \le E_x((\chi_G - \chi_K)\{\langle y, z\rangle_{2\alpha}|(\infty))$$

即ち

(b) $\quad |E_x(\bar{y}_\alpha(\infty) z_\alpha(\infty)) - E_x(\chi_K \langle y, z\rangle_{2\alpha}(\infty))| \le E_x((\chi_G - \chi_K) \cdot |\langle y, z\rangle|_{2\alpha}(\infty))$

最後に $x_t(w) \in K$ の時は，

$\sigma_n \le t < \tau_n$ （適当な n について）でなければならないが，この時，$\sigma_\phi(w_t^+) = 0 \quad \tau_1(w_t^+) = \sigma_1(w_t^+) = \tau_n - t$ 以下一般に

$t + \sigma_k(w_t^+) = \sigma_{n+k-1}(w) \qquad t + \tau_k(w_t^+) = \tau_{n+k-1}(w)$

今 $\sigma_n \le t < \tau_n$ とすると，$(n \le m)$

$$\bar{y}_\alpha(t+s) = \sum_{k=1}^{n-1} (y_\alpha(\tau_k) - y_\alpha(\sigma)) + y_\alpha(t) - y_\alpha(\sigma_n) + y_\alpha(\tau_n \wedge t + s) - y_\alpha(t)$$
$$+ \sum_{k=n+1}^\infty (y_\alpha(\tau_k \wedge t + s) - y_\alpha(\sigma_k \wedge t + s))$$
$$= \bar{y}_\alpha(t) + y_\alpha(\tau_1(w_t^+) \wedge s + t) - y_\alpha(t) + \sum_{k=2}^\infty y_\alpha(\tau_k(w_t^+) \wedge s + t) - y_\alpha(\sigma_k(w_t^+) \wedge s + t)$$
$$= \bar{y}_\alpha(t) + e^{-\alpha t} \bar{y}_\alpha(s, w_t^+)$$

又若し $x_t(w) \notin G$ の時は，$\tau_n \le t < \sigma_{n+1}$ でなければならず；

$\sigma_1(w_t^+) + t = \sigma_k(w_t^+) + t = \sigma_{n+1}$

以下一般に $\quad \sigma_k(w_t^+) + t = \sigma_{n+k} \qquad \tau_k(w_t^+) + t = \tau_{n+k}$

前の場合と全く同様に

$\bar{y}_\alpha(t+s) = \bar{y}_\alpha(t) + e^{-\alpha t} \bar{y}_\alpha(s, w_t^+)$ を得る。

即ち

(c) $\quad x_t \in K$ 又は $G^c = L$ なら

$\bar{y}_\alpha(t+s) = \bar{y}_\alpha(t) + e^{-\alpha t} \bar{y}_\alpha(s, w_t^+)$.

(ii) $K \subset G \subset G'$ （G, G' は開集合）とし(i)と同様に，G, G' から夫々 $\sigma_n, \tau_n, \sigma'_n, \tau'_n$ を作り，$\bar{y}_\alpha, \bar{y}'_\alpha$ を定義する。

$\sigma'_m \le \sigma_n < \sigma'_{m+1}$ なら $x_\sigma \in K$ より $\sigma_n < \tau'_m$

しかも　$\tau_n = \sigma_n + \sigma_L(w_t^+) \leqq \sigma_n + \sigma_L(w_{\sigma_n}^+) = \tau'_m$　から

$\sigma'_m \leq \sigma_n < \tau_n \leq \tau'_m$　がわかる。従って

$E_x((y_\alpha(\tau_n) - y_\alpha(\sigma_n))(y_\alpha(\tau'_m) - y_\alpha(\sigma'_m)) \ ; \ \sigma_n < \sigma'_m)$

$= E_x((y_\alpha(\tau_n) - y_\alpha(\sigma_n))(y_\alpha(\tau'_m) - y_\alpha(\sigma'_m)) \ ; \ \sigma_n < \tau_n < \sigma'_m) = 0$

又 $E_x((y_\alpha(\tau_n) - y_\alpha(\sigma_n))(y_\alpha(\tau'_m) - y_\alpha(\sigma'_m)) \ ; \ \sigma_n \geq \sigma'_{m+1}) = 0$

及び　$E_x((y_\alpha(\tau_n) - y_\alpha(\sigma_n))(y_\alpha(\tau'_m) - y_\alpha(\sigma'_m)) \ ; \ \sigma'_m \leq \sigma_n < \sigma'_{m+1})$

$= E_x((y_\alpha(\tau_n) - y_\alpha(\sigma_n))(y_\alpha(\tau'_m) - y_\alpha(\sigma'_m)) \ ; \ \sigma'_m \leq \sigma_n < \tau_n \leq \tau'_m)$

$= E_x\{(y_\alpha(\tau_n) - y_\alpha(\sigma_n))\{(y_\alpha(\sigma_n) - y_\alpha(\sigma'_m)) + (y_\alpha(\tau_n) - y_\alpha(\sigma_n))$
$+ (y_\alpha(\tau'_m) - y_\alpha(\tau_m))\} \ ; \ \sigma'_m \leq \sigma_n < \tau_n \leq \tau'_m\}$

$= E_x((y_\alpha(\tau_n) - y_\alpha(\sigma_n))^2 \ ; \ \sigma'_m \leq \sigma_n \leq \tau_n \leq \tau'_m\}$

$= E_x((y_\alpha(\tau_n) - y_\alpha(\sigma_n))^2 \ ; \ \sigma'_m \leq \sigma_n < \sigma'_{m+1}\}$

従って (i) (b)　に注意し

$E_x(\overline{y}_\alpha(\infty)\overline{y}'_\alpha(\infty)) - \sum_{n,m} E_x((y_\alpha(\tau_n) - y_\alpha(\sigma_n))(y_\alpha(\tau'_m) - y_\alpha(\sigma'_m))$

$= \sum_{n,m} E_x((y_\alpha(\tau_n) - y_\alpha(\sigma_n))^2 ; \sigma'_m \leq \sigma_n < \sigma'_{m+1}\} = \sum_n E_x(y_\alpha(\tau_n) - y_\alpha(\sigma_n))^2 = E_x(\overline{y}_\alpha(\infty)^2)$

これより

$E_x((\overline{y}_\alpha(\infty) - \overline{y}'_\alpha(\infty))^2) = E_x(\overline{y}'_\alpha(\infty)^2) - 2E_x(\overline{y}_\alpha(\infty)\overline{y}'_\alpha(\infty)) + E_x(\overline{y}_\alpha(\infty)^2)$

$= E_x(\overline{y}'_\alpha(\infty)^2) - E_x(\overline{y}_\alpha(\infty)^2).$

がわかる。

(iii)　G_n を K を含む開集合の減少列とし，$G_n \downarrow K$ とする．G_n に対して (i) の方法で $\overline{y}_\alpha^n$ を作ると，(i) から $\overline{y}_n^\alpha$ は連続で[A.1]~[A.5] をみたし，$E_x(\overline{y}_\alpha^n(t)^2) < \infty \ \forall t \in [0,\infty]$　$E_x(\overline{y}_\alpha^n(t+s) \mid \mathcal{F}_t) = 0$.

又 t, w を定めると n_0 を充分大きくとり $x_t(w) \in G_{n_0}^c \cup K$ とすれば（$G_n^c \cup K \uparrow S$ から常に可能である）$n \geqq n_0$ に対し $x_t(w) \in G_n^c \cup K$ であるから

$$\overline{y}_\alpha^n(t+s, w) = \overline{y}_\alpha^n(t, w) + e^{-\alpha t}\,\overline{y}_\alpha^m(s, w_t^+)$$

又 (ii) より $m > n$ の時 $E_x(\overline{y}_\alpha^n(\infty)^2) \geqq E_x(\overline{y}_\alpha^m(\infty)^2)$

$$E_x((\overline{y}_\alpha^n(\infty) - \overline{y}_\alpha^m(\infty))^2) = E_x(\overline{y}_\alpha^n(\infty)^2) - E_x(\overline{y}_\alpha^m(\infty)^2)$$

より　$E_x(\overline{y}_\alpha^n(\infty) - y_\alpha^m(\infty))^2 \to 0 \quad (n, m \to \infty)$

従って lemma 5.1.1（及び注意 5.1.2）より，L^2-additive functional $\overline{y}_\alpha$ が存在して，$\lim_{n\to\infty} E_x((\overline{y}_\alpha^n(\infty) - y_\alpha(\infty))^2) = 0 \quad (n \to \infty)$.

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

各 t について，（t について）一様概収束する部分列の存在する事から $\bar{y}_\alpha$ は連続なものと同値にできる。

又 (i) (c) より任意の $z \in \mathcal{M}^\alpha$ に対し

$$\lim_{n\to\infty} | E_x(y_\alpha^n(\infty) z_\alpha(\infty)) - E_x(\chi_K < y, z >) | \leqq \lim_{n\to\infty} E_x((\chi_{G_n} - \chi_K) \cdot |< y, z >|) \downarrow 0.$$

が注意 5, 5, 2 を用いて云えるから

$$E_x(\bar{y}_\alpha(\infty) z_\alpha(\infty)) = \lim_{n\to\infty} E_x(\bar{y}_\alpha^n(\infty) z_\alpha(\infty)) = E_x(\chi_{G_n} - \chi_K) |< y, z >|)$$

注意 5, 2, 5 より $\bar{y} \in \mathcal{M}_c^\alpha$ $(\bar{y})_\alpha = \bar{y}_\alpha$ が存在するが，この $\bar{y}$ が求めるものになる。　　（証明終）

一般の $f \in F(S)$ に対する $f \cdot y$ の存在は lemma 5, 5, 3 (2), (4) を使って $\chi_K \cdot f$ の存在から証明できる。

定理 5, 5, 7. $y \in \mathcal{M}^\alpha$ $f \in \ell_2^\alpha(y)$ に対し確率積分 $f \cdot y$ が存在する。

lemma. 5, 5, 8. $y \in \mathcal{M}^\alpha$ とし $f \in \ell_2^\alpha(y)$ $g \in \ell_2^\alpha(f \cdot y)$ なら $fg \in \ell_2^\alpha(y)$ で $(gf) \cdot y \sim g \cdot (f \cdot y)$。

（証明）$< fy > \sim f^2 < y >$ より

$$E_x(g^2 f^2 < y >) = E_x(g^2 < f \cdot y >) < \infty$$

又任意の $z \in \mathcal{M}^\alpha$ に対し

$< g(f \cdot y), z > \sim g < f \cdot y, z > \sim gf < y, z > \sim < (gf) \cdot y, z >$ となることから $gf \cdot y \sim g(f \cdot y)$ を得る。　　（証明終）

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

5.6. $\mathfrak{M}_c^\alpha$ と射影

$\mathfrak{M}_c^\alpha$ の部分集合Lが

(1) $y, z \in L$ なら $y + z \in L$

(2) $y \in L$ $f \in \ell_2^\alpha(y)$ なら $f \cdot y \in L$

(3) $y^n \in L$ $y = \alpha\cdot\text{l.i.m.}\, y^n$ なら $y^n \in L$

の時Lを $\mathfrak{M}_c^\alpha$ の閉部分空間と呼ぶ。

$\{y^\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を含む最小の閉部分空間(註)を $L(y^\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ であらわす。

注意 5.6.1. $L = L(y_\lambda\ \lambda\in\Lambda)$ の時

(1) $z \in \mathfrak{M}^\alpha$ に対し $\langle z, y^\lambda\rangle \sim 0$ $\forall \lambda\in\Lambda$ なら

全ての $y\in L$ に対して $\langle z, y\rangle \sim 0$.

(2) 特に $z \in L$ で $\langle z, y^\lambda\rangle \sim 0$ $\forall\lambda\in\Lambda$ なら $z \sim 0$.

(証明) (1) $L^* = \{y \in L ; \langle z, y\rangle \sim 0\}$ とおく。

$y, y' \in L^*$ なら $\langle z, y+y'\rangle \sim \langle z, y\rangle + \langle z, y'\rangle \sim 0$

$y \in L^*$ $f \in \ell_2^\alpha(y)$ に対し $\langle z, f\cdot y\rangle \sim f\langle z, y\rangle \sim 0$ 又 $y^n \in L^*$ $\alpha\text{-l.i.m.}\, y^n \in y$ なら

$0 = \lim_n E_x(z_\alpha(\infty)\, y_\alpha^n(\infty)) = E_x(z_\alpha(\infty)\, y_\alpha(\infty))$ $\forall x \in S$ より $\langle z, y\rangle \sim 0$

を得るから、L^* は閉部分空間、仮定より $y^\lambda \in L$ だから $L = L^*$。

(2) (1) から $\langle z, y\rangle \sim 0$ $\forall y \in L$ 特に $y = z$ として $z \sim 0$ を得る。

(証明終)

定義 Lを閉部分空間とする時 $y \in \mathfrak{M}_c^\alpha$ に対し $\bar{y} \in L$ が存在して、

$\langle y - \bar{y}, z\rangle \sim 0$ $\forall z \in L$ が成立する時 $\bar{y}$ を y の L えの射影といい、

$\bar{y} = P_L y$ であらわす。

注意 5.6.2. $P_L y$ は一意的に定る。

(証明) $\bar{y}, \bar{y}'$ を射影とすれば $\bar{y} - \bar{y}' \in L$

$\langle \bar{y} - \bar{y}', z\rangle \sim 0$ $\forall z \in L$ が成立するから $z = \bar{y} - \bar{y}'$ として $\bar{y} \sim \bar{y}'$.

(証明終)

以下射影が全ての閉部分空間Lと $y \in \mathfrak{M}_c^\alpha$ に対し存在する事を示す。

(註) 閉部分空間の系 $\{L_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対し $L = \bigcap_\lambda L_\lambda$ も閉部分空間である。

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

lemma 5. 6. 3. $L=L(y')$ に対して射影が存在する。

(i) $y\in \mathcal{M}_c^\alpha$ に対し，$0\leq f\in F(S)$ $f<y>\sim 0$ なら *lemma* 5.5 により

$E_x(\sqrt{f}|<y;y'>_{2\alpha}|)^2\leq E_x(<y>_{2\alpha})E_x(f<y>_{2\alpha})=0$ より

$f|<y,y'>|\sim\sqrt{f}\cdot\sqrt{f}|<y,y'>|\sim 0.$ 従って定理 4.2.4 と 5.4 節の絶対値についての注意から，$F(S)$ 可測な函数 g が存在して，$<y,y'>\sim g<y'>$

$|<y,y'>|\sim|g|<y'>$. 今 $g_N=|g|\wedge N$ とおくと，

$E_x(g_N^2\cdot<y'>_{2\alpha})^2\leq E_x(g_N|<y,y'>|_{2\alpha})^2\leq E_x(<y>_{2\alpha})E_x(g_N^2<y>_{2\alpha})$

従って $E_x(g_N^2<y'>_{2\alpha})\leqq E_x(<y>_{2\alpha})$. $N\uparrow\infty$ として，

$E_x(|g|^2<y'>_{2\alpha})\leq E_x(<y>_{2\alpha})<\infty$, 即ち $g\in\ell_2^\alpha(y')$.

(ii) $\bar{y}=g\cdot y'$ とおく。

$L^*=\{z\in L(y');<y,z>\sim<\bar{y},z>\}$

とすれば，$<y,y'>\sim g\cdot<y'>\sim<gy',y'>\sim<\bar{y},y'>$ より $y'\in L^*$ である。L^* が閉部分空間であることは容易にたしかめられるから $L^*=L\equiv L(y')$ 即ち $\bar{y}=P_L y$ である。（証明終）

この *lemma* の証明で，$y\in\mathcal{M}_c^\alpha$ に対し g が存在して $P_L y=g\cdot y'$ とかけることがわかった。特に $y\in L$ なら $y=P_L y=g\cdot y'$ であるから

注意 5. 6. 4. $L(y')=\{g\cdot y;g\in\ell_2^\alpha(y)\}$ である。

定理 5. 6. 5. $L=L(y',y^2,\cdots,y^n,\cdots)$ に対して

(1) $z^n\in L$ $(n=1,2,\cdots)$ が存在して次の条件をみたす。

(a) $<z^i,z^j>\sim 0$ (b) $L=L(z',z^2,\cdots,z^n,\cdots)$

(2) (1) の (a), (b) をみたす $\{z^n\}$ に対して，任意の $y\in L$ は，

$y=\alpha\text{-}l.i.m._n\sum_{i=1}^n f_i z^i$

$f_i\in\ell_2^\alpha(z^i)$, $\sum_{i=1}^\infty E_x(f_i^2<z^i>_{2\alpha})=E_x(<y>)<\infty$ $\forall x\in S$.

とあらわせる。f_i は $<z^i>$ の *canonical* 測度 0 を除いて一意的に定る。

(3) 逆に $f_i\in\ell_2^\alpha(z^i)$ $\sum_{i=1}^\infty E_x(f_i^2<z^i>_{2\alpha})<\infty$ $\forall x\in S$ となる f_i に対し $\alpha\text{-}l.i.m.\sum_{i=1}^n f_i z^i$ は存在して L に属する。

(4) $L=L(y',\cdots,y^n)$ なら $\{z^i\}$ も n ヶ又はそれ以下にとれる。

証明） (1) $z'=y'$ $z^2=y^2-P_{L(z')}y^2$ $z^3=y^3-P_{L(z')}y^3-P_{L(z^2)}y^3$

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

$\cdots\quad z^k = y^k - \sum_{i=1}^{k-1} P_{L(z^i)} y^k \cdots\cdots$ と順に定義する。

$L(y^1\cdots y^k) = L(z^1\cdots z^k)$ が帰納的に証明できるから $\{z^n\}$ が (1) (a) (b) の条件をみたす事は明かである。$L_i = L(z^i)$ とおく。

(2) 注意 5.6.1 から $z\in L(z^i)$, $z'\in L(z^j)$ に対し $\langle z, z'\rangle \sim 0$ $(i\neq j)$ であるから，任意の $y\in \mathfrak{M}_c^\alpha$ に関し，$\langle y-\sum_{i=1}^{n} P_{L_i} y, \sum_{i=1}^{n} P_{L_i} y\rangle \sim 0$。
$\langle \sum_{i=1}^{n} P_{L_i} y\rangle \ll y$ である。同様に $\langle \sum_{i=1}^{n} P_{L_i} y\rangle \ll \langle \sum_{i=1}^{m} P_{L_i} y\rangle$ $n<m$ がわかる。従って $\alpha\text{-}l.i.m.\sum_{i=1}^{n} P_{L_i} y = \bar{y}$ が存在して

$$\sum_{i=1}^{n}\langle P_{L_i} y\rangle \uparrow \langle \bar{y}\rangle \ll \langle y\rangle.$$

所が $E_x(\langle \bar{y}, z^i\rangle_{2\alpha}) = \lim_{n\to\infty} E_x(\sum_{i=1}^{n} P_{L_i} y_\alpha(\infty) z^i_\alpha(\infty)) = E_x(\langle P_{L_i} y, z^i\rangle_{2\alpha})$

即ち $\langle \bar{y}, z^i\rangle \sim \langle P_{L_i} y, z^i\rangle \sim \langle y, z^i\rangle$ であるから $\langle y-\bar{y}, z^i\rangle \sim 0$.
注意 5.6.1 より $\langle y-\bar{y}, z\rangle \sim 0$ $\forall z\in L$ がわかり y の射影が存在して $\bar{y} = P_L y$ である。

特に $y\in L$ なら $\bar{y} = P_L y = y$。又注意 5.6.4 から
$P_{L_i} y = f_i z^i$ $f_i\in \ell_2^\alpha(z^i)$ と書ける。従って
$y = \alpha\text{-}l.i.m.\sum f_i z^i$ である。又 $\sum_{i=1}^{n}\langle f_i z_i\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle P_{L_i} y\rangle \uparrow \langle y\rangle$。

最後に $y = \alpha\text{-}l.i.m.\sum f_i z^i = \alpha\text{-}l.i.m.\sum g_i z^i$ なら，
$\langle y, z^k\rangle \sim f_k\langle z^k\rangle \sim g_k\langle z^k\rangle$ 定理 4.1.4 から
$f_k = g_k$ a.s. λ_k (λ_k は $\langle z^k\rangle$ の canonical 測度) を得る。

(3) は $E_x(\langle \sum_{i=1}^{m} f_i z^i - \sum_{i=1}^{n} f_i z^i\rangle_{2\alpha}) = E_x(\langle \sum_{i=n+1}^{m} f_i z^i\rangle) = \sum_{i=n+1}^{m} E_x(f_i^2\langle z^i\rangle)$ $(n<m)$ より $\sum_{i=1}^{n} f_i z^i$ は α-基本列になる事から明か。

(4) は作り方から明かである。 (証明終).

定理の証明中次の事が同時にわかった。

注意 5.6.6. $L = L(y^1, y^2\cdots y^n\cdots)$ の時，任意の $y\in \mathfrak{M}_c^\alpha$ に対して L えの射影は存在する。

定理 5.6.7. 任意の閉部分空間 L に対し，全ての $y\in \mathfrak{M}_c^\alpha$ の射影が存在する。

(証明) (i) $y\in \mathfrak{M}_c^\alpha$ に対し η を $u(x) = E_x(\langle y\rangle_{2\alpha})$ を可積分にする reference 測度とする。

$C = \inf_{z\in L} E_\eta(\langle y-z\rangle_{2\alpha}) \le E_\eta(\langle y\rangle_{2\alpha})$ とおく。この時 $z^1, z^2\cdots z^n\cdots \in L$

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

が存在して, $C=\lim_{n\to\infty} E_\eta(\langle y-z^n\rangle_{2\alpha})$。

$L'=L(z^1\cdots z^n\cdots)\subset L$ とおく. 注意5.6.6.より $\bar{y}=P_{L'}y$ は存在するが, $\langle y-z^n\rangle\sim\langle y-\bar{y}+\bar{y}-z^n\rangle\sim\langle y-\bar{y}\rangle+\langle z-z^n\rangle$

より $C\le E_\eta(\langle y-\bar{y}\rangle)\leqq E_\eta(\langle y-z^n\rangle$ $n=1,2,\cdots$.

従って $C=E_\eta(\langle y-\bar{y}\rangle)$ である。

(ii) 今任意の $z\in L$ に対し $y^*=P_{L(\bar{y},z)}y$ とおく。

(i)と同様

$\langle y-y^*\rangle+\langle\bar{y}-y^*\rangle\sim\langle y-\bar{y}\rangle$ $C\leqq E_\eta(\langle y-y^*\rangle_{2\alpha})\le E_\eta(\langle y-\bar{y}\rangle_{2\alpha})=C$。

即ち $E_\eta(\langle\bar{y}-y^*\rangle_{2\alpha})=0$. $v(x)=E_x(\langle\bar{y}-y^*\rangle_{2\alpha})$ は 2α-excessive で $v(x)=0$ a.s. η から $v(x)\equiv 0$ を得る。(定理1.5.2) 即ち $\bar{y}=y^*$.

従って $\langle y-\bar{y},z\rangle\sim\langle y-y^*,z\rangle\sim 0$ が全ての $z\in L$ に対して成立するから, $\bar{y}=P_L y$ である。 (証明終)

射影の存在がわかったので, その重な性質をあげておく。

注意5.6.8. L を $\mathcal{M}_c^\alpha$ の閉部分空間とする。

(1) $y\in\mathcal{M}_c^\alpha$ に対し $P_L P_L y=P_L y$

(2) $y,z\in\mathcal{M}_c^\alpha$ に対し $\langle P_L y,z\rangle\sim\langle y,P_L z\rangle\sim\langle P_L y,P_L z\rangle$

(3) $y,z\in\mathcal{M}_c^\alpha$ に対し $P_L(y+z)=P_L y+P_L z$

(4) $y\in\mathcal{M}_c^\alpha$ $f\in\ell_2(y)$ なら $f\in\ell_2^\alpha(P_L y)$ で

$$P_L(f\cdot y)=f\cdot(P_L y)$$

(5) $y^n\in\mathcal{M}^\alpha c$ α-l.i.m. y^n が存在すれば α-l.i.m. $P_L y^n$ も存在し

$$P_L(\alpha\text{-l.i.m.}\, y^n)=\alpha\text{-l.i.m.}\, P_L y^n$$

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

Lemma 5.6.9. L を $\mathfrak{M}_c^\alpha$ の閉部分空間とし

$L^\perp = \{y : y \in \mathfrak{M}_c^\alpha \ \langle y, z\rangle \sim 0 \ \forall z \in L\}$ とおくと，

$$(L^\perp)^\perp = L$$

特に $y \in \mathfrak{M}_c^\alpha$ $\langle y, z\rangle \sim 0$ $\forall z \in L$ なら $y \sim 0$ の時は

$$L = \mathfrak{M}_c^\alpha$$ となる。

（証明） $(L^\perp)^\perp \supset L$ は明かである。

逆に $y \in (L^\perp)^\perp$ とする。$y - P_L y \in L^\perp$ より

$\langle y - P_L y\rangle \sim \langle y, y - P_L y\rangle - \langle P_L y, y - P_L y\rangle \sim 0$， 即ち $y \sim P_L y$.（証明終）

定理5.6.5の $\{z^i\}$ は Hilbert 空間の直交基底のようなものであるが，$\{f\}$ が整域でないため例えば次の様な事がおこる。

例6.1. $y \in \mathfrak{M}_c^\alpha$ とし $\langle y\rangle$ の canonical 測度を λ とする。今 $B, C \in \mathcal{B}(S)$ $B \cap C = \phi$ $\lambda(B) > 0$ $\lambda(C) > 0$ が存在すれば

$$L(y) = L(\chi_B y, \chi_C y) \quad \text{且つ} \quad \langle \chi_B y, \chi_C y\rangle \sim 0$$

このような困難をさけるため渡辺信三氏の次の定理がある。

定理5.6.10. $L = L(y^1, y^2, \cdots, y^n, \cdots)$ に対し

(1) $\{z^n\}_{n=1,2,\cdots} \subset L$ を定理5.6.5.の条件 (a) (b) の他に

(c) $\langle z^1\rangle \succ \langle z^2\rangle \succ \cdots \succ \langle z^n\rangle \succ \cdots$ をみたすようにとれる。

(2) $\{\bar{z}^n\}_{n=1,2,\cdots} \subset L$ を同じ条件をみたす別の列とすれば，

$\langle z^n\rangle \leftrightarrow \langle \bar{z}^n\rangle$ $n = 1, 2, \cdots$ 〃

証明は省略する。

5.7. $\mathfrak{M}_c^\alpha$ の生成元

この節では，$\zeta < \infty$ なら $X_{\zeta-} = \partial$ と仮定する。この仮定は簡単に取り除ける(註)ので以下一々ことわらない。この時 (3.1) の $\pi_n = \mathrm{Min}(n, \sigma_{G_n^c}, \zeta)$（但し $G_n \uparrow S$. $\bar{G}_n$ compact $\subset G_{n+1}$）に対し $\pi_n \uparrow \zeta$ $\pi_n < \zeta$ が常に成立するから，今 $u \in D_p^\alpha$ の時全ての $x \in S$ に

(註) 例えば S^* に孤立点 $\bar{\partial}$ をつけ加え $\bar{S}^* = S \cup \{\bar{\partial}\}$ $\bar{S}^* = S \cup \bar{\partial} \cup \partial$ とし，$X_{\zeta-} \in S$ $\zeta < \infty$ となる w に対し $X_t(\bar{w}) = X_t(w)$ $t < \zeta$ $X_t(\bar{w}) = \bar{\partial}$ $\zeta \le t < \infty$ $X_\infty(w) = \partial$ その他の場合は $X_t(\bar{w}) \equiv X_t(w)$ $t \in [0, \infty]$ と修正すればよい。

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

対し，P_x 測度 0 を除いて $\lim_{t\uparrow\zeta} e^{-\alpha u} u(x_t(\omega))$ は存在して C に等しい。従って全ての t に対し $|u(x_t)|<\infty$ 且つ $\lim_{t\uparrow\zeta} e^{-\alpha u} u(x_t)=0$ の時 $[u](t)=e^{-\alpha t}u(x_t)-u(x_0)$，その他の時は $[u](t)\equiv\infty$ とおくと $[u]$ は $[A.1]\sim[A.5]$ 及び $[A.6]^\alpha$ $[A.8]$ をみたしている。しかるに定理 3.4.5. より $a[u]\in\mathfrak{N}^\alpha$ が存在し $E_x(a[u]_\alpha(\infty))=u(x)$

従って (2.1) $-E_x(a[u]_\alpha(\infty))=E_x([u](\infty))$. 一般に $-E_x(a[u]_\alpha(t))=E_x([u](t))$ $u\leq t\leq\infty$ が成立している。今 $\alpha>0$ とし $R(S)=\{f;\ f=U_g^\alpha=E(\int_0^\infty e^{-\alpha s}g(x_s)ds)\ \ g\in F(S)\}$ とおく。($R(S)$ は α に無関係である。) $f\in R_\alpha(S)$ なら f は有界な α-excessive function の差である。

この時は $a[f]_\alpha(t)=\int_0^t e^{-\alpha s}f(x_s)ds$ であるから $|a[f]_\alpha(t)|$ 有界。従って $E_x\{([f](t)+a[f]_\alpha(t))^2\}$ は有界。

従って $[f]+a[f]_\alpha$ は α 次の L^2 general additive functional 従って $g[f]\in\mathfrak{M}_g^\alpha$ $y[f]\in\mathfrak{M}_c^\alpha$ が存在して

(2.2) $[f]+a[f]_\alpha\sim g[f]_\alpha+y[f]_\alpha$

と書ける．(定理 5.3.5)

lemma 5.7.1. $\alpha>0$ の時 $g\in C(S)$ に対して $f_\beta=U_g^\beta$ $\beta\geq\alpha$ とおく。今 $y\in\mathfrak{M}^\alpha$ に対し $\langle y, y[f_\beta]\rangle\sim 0$ $\forall\beta\geq\alpha$ が成立すれば，全ての $x\in S$ と $0\leq t<\infty$ に対し $E_x(g(x_t)\,y_\alpha(t))=0$ が成立する。

(証明) $f_\beta\in R(S)$ で $f_\beta=U^\alpha g_\beta$

$g_\beta=g-(\beta-\alpha)f_\beta$ である(註)から

$e^{-\alpha t}f_\beta(x_t)-f_\beta(x_0)+\int_0^t e^{-\alpha s}g_\beta(x_s)ds\sim g[f_\beta]_\alpha+y[f_\beta]_\alpha$.

他方仮定から $E_x(y_\alpha(t))=0$ $E_x(y_\alpha(t)\,y[f_\beta]_\alpha(t))=0$ であるが，定理 5.3.5 より $E_x(y_\alpha(t)\,g[f_\beta]_\alpha(t))=0$ でもある。従って

$\alpha>\beta$ として

$E_x(\int_0^\infty e^{-\beta t}f_\beta(x_t)\,y_\alpha(t)\,dt)$

$=\int_0^\infty e^{-\beta t+\alpha t}E_x\{(-\int_0^t e^{-\alpha s}g_\beta(x_s)ds+g[f_\beta]_\alpha(t)+y[f_\beta]_\alpha(t))+f_\beta(x_0)\ y_\alpha(t)\}\,dt$

(註) $U_g^\alpha-U_g^\beta+(\alpha-\beta)U^\alpha U^\beta g=0$ による。

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

$$= \int_0^\infty e^{-\beta t+\alpha t} dt \left(-\int_0^t e^{-\alpha s} E_x\{g_\beta(x_s)(y_\alpha(s)+e^{-\alpha s}y(t-s,w_s^+))\} ds\right)$$
$$= -\int_0^\infty e^{-(\beta-\alpha)t} dt \int_0^t e^{-\alpha s} E_x(g_\beta(x_s)\, y_\alpha(s))\, ds$$
$$= -E_x\left(\int_0^\infty e^{-\alpha s}(g_\beta(x_s)\, y_\alpha(s)\, ds \int_s^\infty e^{-(\beta-\alpha)t} dt\right)$$
$$= -E_x\left(\frac{1}{\beta-\alpha}\int_0^\infty e^{-\beta s} g_\beta(x_s)\, y_\alpha(s)\, ds\right)$$
$$= E_x\left(\int_0^\infty e^{-\beta s} f_\beta(x_s)\, y_\alpha(s)\, ds\right) - \frac{1}{\beta-\alpha} E_x\left(\int_0^\infty e^{-\beta s} g(x_s)\, y_\alpha(s)\, ds\right)$$

従って $\int_0^\infty e^{-\beta s} E_x(g(x_s)\, y_\alpha(s))\, ds = 0.$ $\forall \beta > \alpha$

$g \in C(S)$ より $g(x_s)$ は右連続有界 $E_x((y_\alpha(t)-y_\alpha(s))^2) \downarrow 0\ (t \downarrow s)$
より $E_x(g(x_s)\, y_\alpha(s))$ は（Sについて）右連続。
故に $E_x(g(x_s)\, y_\alpha(s)) \equiv 0$ $\forall s$, $\forall x$ を得る。 （証明終）

$\alpha > 0$ として $y \in \mathfrak{M}_c^\alpha$ に対し，全ての $g \in C(S)$ と $\beta \in (\alpha, \infty)$ について $\langle y, y[f_{\beta,g}] \rangle \sim 0$ （但し $f_{\beta,g} = U_g^\beta$ とする）なら，このlemmaから $E_x(y_\alpha(t)\, g(x_t)) = 0$ $\forall x \in S$ $\forall t \in [0, \infty)$ が云えて，注意2.5.6より $y \sim 0$ がわかる。

特に $R(S) \ni f_{\beta,g}$ であるから，$y \in \mathfrak{M}_c^\alpha$ に対し $\langle y, y[f] \rangle \sim 0$ $\forall f \in R(S)$ なら $y \sim 0$. 従って lemma 5.6.9 より

定理 5.7.2. $\alpha > 0$ の時 $\mathfrak{M}_c^\alpha = L(y[f])_{f \in R(S)}$ (註)。

$\alpha > 0$ $f = U_g^\alpha$ $g \in F(S)$ の時

$$E_x(\langle y[f] \rangle_{2\alpha}) \leqq E_x(\langle g[f] + y[f] \rangle_{2\alpha})$$
$$\leqq E_x\left\{\left(-f(x_0) + \int_0^\infty e^{-\alpha s} g(x)\, ds\right)^2\right\} \leq \frac{4}{\alpha} \|g\|^2$$

であるから，$f_n = U_{g_n}^\alpha$ $g_n \in F(S)$ $\|g_n - g\| \to 0$
なら α-l.i.m. $y[f_n] = y[f]$.

又 $\beta, \beta' > \alpha > 0$ $g \in F(S)$ $f_\beta = U_g^\beta$ $f_{\beta'} = U_g^{\beta'}$ とし，
$f_\beta = U^\alpha g_\beta$ $f_{\beta'} = U^\alpha g_{\beta'}$ と $g_\beta, g_{\beta'}$ をとれば

$$\|g_\beta - g_{\beta'}\| = \|(g - (\beta-\alpha) U^\beta g) - (g - (\beta'-\alpha) U^{\beta'} g)\|$$
$$= \|(\beta-\alpha)(U^\beta g - U^{\beta'} g) + (\beta - \beta') U^{\beta'} g\|$$
$$= \|(\beta-\alpha)(\beta-\beta') U^\beta U^{\beta'} g + (\beta-\beta') U^{\beta'} g\|$$
$$\leqq |\beta - \beta'| \left(\frac{(\beta-\alpha)}{\beta\beta'} \|g\| + \frac{1}{\beta'} \|g\|\right) \leqq |\beta - \beta'| \frac{2\|g\|}{\alpha}$$

(註) 右辺は閉部分空間の定義(3)により α に関係する。この定理から，$0 < \alpha < \beta$ なら $\mathfrak{M}_c^\beta = L(\mathfrak{M}_c^\alpha)$ がわかる。$\alpha \leqq 0$ でも $y[f] \in \mathfrak{M}_c^\alpha$ なら定理は成立する。

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

従って $\beta_n \to \beta$ ($\beta_n, \beta > \alpha$) なら $\|g_{\beta_n} - g_\beta\| \to 0$

で α-l.i.m. $y[f_{\beta_n g}] = y[f_{\beta, g}]$ $f_{\beta g} = U^\beta_g$ がわかる。

この事から $\{g_n\} \subset C(S)$ $\{\beta_m\} \subset (\alpha, \infty)$ を夫々稠密にとり

$f_{n,m} = U^{\beta_m} g_n$ とおくと

$$L(y[f_{n,m}])_{n,m} = L(y[f_{\beta,g}])_{\beta>\alpha\ g\in C(S)}$$

lemma 5.7.1.から定理5.7.2の時と同様 $y \in \mathcal{M}^\alpha_c$ が $\langle y, y[f_{\beta,g}]\rangle \sim 0$ $\forall\beta$, $\forall g \in C(S)$ なら $E_x(y(t)\, g(x_t)) = 0$ $\forall t$ $\forall g \in C(S)$ より $y \sim 0$ を得るから，$L(y[f_{\beta,g}]_{\beta>\alpha\ g\in C(S)}) = \mathcal{M}^\alpha_c$ よって次の定理がわかる。

定理5.7.3. $\alpha > 0$ の時，$f_1, f_2, \cdots, f_n, \cdots \in R(S)$ が存在し
$\mathcal{M}^\alpha_c = L(y[f_n])_{n=1,2,\cdots}$。

$L = L(y^\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subset \mathcal{M}^\alpha_c$ の時 y^λ を閉部分空間Lの生成元ということにすると，上の定理は $\mathcal{M}^\alpha_c$ が可算ヶの生成元を持つということである。$\mathcal{M}^\alpha_c = L(y^1, y^2, \cdots y^n, \cdots)$ とすれば 任意の閉部分空間Lに対して，$L \supset L(P_L y^n)_{n=1,2,\cdots} = (L(P_L y^n)^\perp_{n=1,2,\cdots})^\perp$

他方 $z \in L(P_L y^n)^\perp_{n=1,2,\cdots}$ なら 注意5.6.8から

$\langle z, P_L y_n\rangle \sim \langle P_L z, y_n\rangle \sim 0$ $n=1,2,\cdots$ より $P_L z \sim 0$ で $y \in L$ に対し $\langle y, z\rangle \sim \langle y, z - P_L z\rangle \sim 0$ 即ち $L \subset (L(P_L y^n)^\perp_{n=1,2,\cdots})^\perp$。従って $L = L(P_L y^n)_{n=1,2,\cdots}$

よって次の定理を得る。

定理5.7.4. Lを $\mathcal{M}^\alpha_c$ の閉部分空間とすると，Lは可算ヶの生成元を持つ。従って定理5.6.5.又は定理5.6.10の条件をみたす $\{z^n\}$ がとれる。

$\mathcal{M}^\alpha_c$ は必ずしも有限ヶの生成元を持つとは限らない。しかしSをn次元ユークリッド空間のcompactな部分集合とし，座標が $R(S)$ に属し且つ全ての $\alpha > 0$ に対し U^α が $C^2(S)$(註) を $C^2(S)$ にうつすような時は $\mathcal{M}^\alpha_c$ がnヶ以下の生成元を持つことがわかる。

最後に典型的な $\mathcal{M}^\alpha_c$ として、定理4.5.8に相当する次の定理をあげる。

定理5.7.5. $y \in \mathcal{M}^\alpha_c$

(註) $C^2(S)$ は境界もこめて，二回連続微分可能な函数をあらわす。

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

$\langle y \rangle(t) \sim t$ (註)の時　$y(t)$ は Brown 運動である。

(証明)　$E_x(y(t+s)-y(t) \mid y(u);\ u \le t) = E_x(y(s, w_t^+) \mid \mathcal{F}_t) = 0$

$E_x((y(t+s)-y(t))^2 \mid y(u);\ u \le t) = E_x(y(s, w_t^+)^2 \mid \mathcal{F}_t)$

$= E_{x_t}(\langle y \rangle(s)) = s$

しかも $y(t, w)$ は連続であるから定理が得られる。(Doob [53])

(証明終)

(註)　この場も一般に $\langle y \rangle(t) \to \infty$ $(t \to \infty)$ a.s. P_x $\forall x \in S$ なら，時間変換により定理の条件をみたすようにできる。

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

文　献　表

1. Blanc-Lapierre A. ET Fortet R. Theorie des fonctions aleatoires. Masson, . Paris, 1953

2. Blumenthal R.M., Getoor R.K., Mckean H.P., Jr. Markov processes with identical hitting distributions. Ill. J. of Math. 6 (1962) 402-420.

3. Doob J.L. Semimartingales and subharmonic functions. Trans. Amer. Math. Soc. 77, (1954) 86-121.

4. Doob J.L. A probability approach to the heat eqation, Trans. Amer. M.S. 80 (1955) 216-280.

5. Dynkin E.B. Functionals of trajectry of Markov processes. Doklady U.S.S.R 104 (1955) 691-694.

6. Dynkin E.B. Intrinsic topology and excessive function determined by Markov processes. Doklady U.S.S.R 127 (1959) 17-19.

7. Dynkin E.B. Fundamental theory of Markov process. Moskwa, 1959.

8. Dynkin E.B. Markov process and related problems of analysis. Uspehi 15:2 (92), (1960) 3-24.

9. Dynkin E.B. Additive functionals of Wiener process defined by stochasic integral. T. Prob. Appl. 5 (1960) 441-452.

10. Dynkin E.B. Transformations of Markov processes connected with additive functionals, Proc. 4-th. Berkeley Symp. Vol. 2, 117-142, (1961)

11. Dynkin E.B. Brownian motion with killing measure μ and speed measure. Doklady U.S.S.R 144 (1962)

12. Gihman I.I. On the theory of differential equation of random process. Y.M.J. 2.3 (1950) 45-69.

13. Gihman I.I. On the theory of differential II. Y.M.J. 3 (1951) 317-339.

14. Girsanov I.V. On some topologies connected with Markov

processes. Doklady SSSR 129 (1959) 488-491.

15. Hasiminsky R. Z. The probability distribution of functionals of trajectories of a random process of the diffusion type. Dokl. A. N. U.S.S.R 104 (1955) 22-25.

16. Hasiminsky R. Z. Positive solution of equation $Au+vu=0$. Thery Prob. Appl. 4 (1959) 332-341.

17. Hunt G. A. Markoff processes and potentials. Ill. J. Math 1 (1957) 44-93, 316-369; 2 (1958) 151-213.

18. 池田信行, 上野正, 田中洋, 佐藤健一,
多次元拡散過程の境界問題(下) 確率論セミナー Vol. 6, 1961.

19. 伊藤 清,
確率論 岩波書店 1953.

20. 伊藤 清, 渡辺信三, 福島正俊.
拡散過程 確率論セミナー Vol. 3 1960.

21. 近藤亮司,
Markov 過程と Potential 確率論セミナー Vol. 11 1962.

22. 国田 寛, 野本久夫,
Markov 過程に関する Compact 化の方法とその応用
確率論セミナー Vol. 14 1962

23. Maruyama G. On the transition probability functions of the Markov processes Nat. Sci. Rep. Ochanomizu Univ. 5 (1954) 10-20.

24. Maruyama G. Continuous Markov processes and stochastic equations. Rend. Circ. Math. Palermo. 4 (1955) 1-43.

25. Mckean H. P. Jr., Tanaka H. Additive functionals of the Brownian path. Mem. Coll. Univ. Kyoto, Ser. A, 33 (1961) 479-506.

26. Meyer P. A. Fonctionelles multiplicatives et additives de Markov. Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 12 (1962) i 25-230.

27. Meyer P. A. Seminaire de theorie du potential, 5e annee: 1960/61.

28. Meyer P. A. Representations integrales des potentials. C. R. Paris

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

251 (1960) 2279-2280.

29. Meyer P.A. A decomposition theorem for supermartingales. Ill. J. of Math. 6 (1962) 193-205.

30. Motoo M. Diffusion process corresponding to $\Delta-\sum b^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ Ann. Inst. of Stat. Math. 12 (1960) 37-61.

31. Motoo M. Representation of a certain class of excessive functions and a generator of Markov process. Scientific papers of the College of General education Univ. of Tokyo 12 (1962) 143-159.

32. 大津賀 信
函数論特論 共立出版株式会社

33. Sato K., Tanaka H. Local Times on the boundary for multi-dimensional reflecting diffusion Proc. of the Japan Acad. vol 38 (1962)

34. Sato K. Time change and killing for multidimensional diffusion to appear.

35. Skorohod A.V. On the differentiability of measure which correspond to Markov process. theory of prob. Appl. 5 (1960). 45-53.

36. Skorohod A.V. Stochastic equations for diffusion process in a bounded region. Theory of Prob. Appl. 6 (1961) 287-298.

37. Skorohod A.V. Additive functionals of Brownian motion. T. Prob. Appl 6 (1961) 430-439.

38. Shur M.G. Continuous additive functionals of Markov processes and excessive functions. Doklady U.S.S.R 137 (1961) 800-803.

39. Shur M.G. Excessive functions and additive functionals of Markov processes. Doklady U.S.S.R 143 (1962) 293-296.

40. Shur M.G. Harmonic and superharmonic functions asociated with diffusion processes. Izv. Acad. Nauk U.S.S.R (1960)

41. Tanaka H. Note on continuous additive functionals of 1-dimensional Brownian path. To appear.

42. Troter H. A property of Brownian Motion Paths. III. J. Math. 2(1958)

43 Volkonsky V. A. Random time substitution of strong Markov process. T. Prob. Appl. 3 (1958) 332-350.

44. Volkonsky V. A. Continuous and homogenuous Markov process and additive functionals of them. Theory of Prob. Appl. 4 (1959)

45. Volkonsky V. A. Additive functional of Markov process. Dokl. A. N. U.S.SR 127 (1959) 735-738.

46. Volkonsky V.A. Additive functionals of Markov processes. Trudy Moscow 9 (1960) 143-189.

47. Volkonsky V. A. Construction of non-homogenuous Markov process by the help of random time substitution. Theory of prob. Appl. 6 (1961).

48. Watanabe T. On the equivalence of excessive functions and superharmonic functions in the theory of Markov processes I, II. Proc. Japan Acad. 38 (1962) 397-401, 402-407.

49. Watanabe T., Kunita H. Markov processes and Martin boundaries. to appear.

50. Wentzel A.D. Non-negative additive functionals of Markov processes. Doklady U.S.S.R 137 (1961) 17-20.

51. Wentzel A.D. Additive functionals of multidimensional Wiener process. Doklady U.S.S.R 139 (1961) 13-16.

52. Wentzel A.D. Continuous additive functionals of multidimensional Brownian motion. Doklady SSSR 142 (1962) 1223-1226.

53 Doob J. L. Stochastic processes 1952.

54. Nagasawa M., Sato K. Some theorems on time change and killing of Markov process to appear.

55. Ito K. On Stochastic differential equations Mem. of the Amer. Math. Soc. no 4 1951.

Sem. on Probab.
Vol.15 1963年
P1-123

1963年4月発行　　確率論セミナー