Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

SEMINAR ON PROBABILITY

vol. 14

国田 寛・野本久夫

Markov 過程に関する Compact 化の方法とその応用

1 9 6 2

確率論セミナー

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

まえがき

Markov 過程の研究において基本的に用いられる性質の一つとして強Markov 性がある。P.Le'vy はこの性質を駆使してBrown 運動の精細な研究を行つた。又，J.L.Doobは Markov 連鎖の特殊な場合についてMarkov 性から意識的に強Markov 性を導きこれを用いた。その後Markov 過程の研究の発展に伴いこのことの重要性が認識され，K.Ito，E.B.Dynkin およびG.A.Hunt等によつて定式化され多くの人達による結果が得られた。

与えられたMarkov過程が強Markov 性をもつための十分条件としては，pathの右連続性と半群又はresolventが連続函数の空間を不変にするという条件がよく知られている。一方強Markov 性がこわれるような例のいくつかについても，state space の点を適当に分離又は同一視することによつてこの性質がなりたつように出来ることも知られている。D.Rayはこれらのことを徹底的に研究し，一般的な条件の下で，適当に点を同一視し，更に適当な位相をstate space に入れてこれをcompact 化し点をつけ加えることによつてpath が右連続且つresolvent が連続函数の空間を不変にするような仕方でMarkov 過程を構成する方法を与えた。

このノートではD.Ray のこのようなidea に従つて彼の仕事を使いやすいように部分的に修正した形で紹介するとともに，compact 化によつてつけ加えられた点が，境界点と考えられるような場合にMartin 境界論と類似にKrein−Millman型の定理のなりたつことを示し，境界を含めたstate space の上でMarkov 過程が構成されていることを用いてexcessive 函数の表現の一意性について簡単な証明の方法を述べる。

又従来離散位相で考えられていたMarkov 連鎖についてもこのような立場からの取扱を試みた。

第一章ではstate space がcompact な場合にresolvent からMarkov 過程を構成する方法を述べる。

第二章では位相が入つていない場合には位相を導入し，すでに入つているときは，これを利用して位相を入れかえ，compact 化することによつて第一章の場合に帰着させる方法を述

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

べる。又G.A.Hunt が完全最大値の原理をみたす作用素からMarkov 過程を構成したやり方をD.Ray の方法によつて行う。

第三章ではcompact 化により新しくつけ加えられた点を境界と考えたときのMartion の表現定理に関連した結果を述べる。

第四章以下では，第一，二章の結果を用いてMarkov 連鎖を一般のMarkov 過程のように考えることが出来ることを述べ，すでによく知られた性質についてそのような立場から取扱うことを試みた。

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

目　次

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

第一章 Markov 過程の構成（I）。Compact 空間の場合

D・Ray の理論〔27〕はごく大ざつぱに言えば次の二つの定理からなりたつている。

定理A Compact な Hausdorff 空間Sの上に与えられた resolveut G_α が $\mathbb{C}(S)=\{$ S上の有界連続函数の全体 $\}$ を $\mathbb{C}(S)$ に移し，$\mathbb{C}(S)$ の部分集合 $\mathbb{C}_1(S)$ が存在して，$\mathbb{C}_1(S)$ が S の任意の二点を分離し，かつ $\alpha G_{\alpha+1} f \leq f$ ($\forall f \in \mathbb{C}_1(S)$) をみたす場合，S上に G_α を resolvent とする様な Markov 過程を構成することが出来る。特に $\mathbb{C}_1(S)$ が可算個の元よりなる場合は，その Markov 過程の path は右連続かつ才一種不連続にとることが出来る。定理B Sが一般に可測空間で，G_α が $\mathbb{B}(S)=\{$ S上の有界可測函数の全体 $\}$ を $\mathbb{B}(S)$ に移すとき，S に $\mathbb{B}_1(S)=\{\mathbb{B}^+(S)$ の G_1 による値域$\}$を一様連続にする最弱の一様位相を導入し，その位相により完備化した compact Hausdoff 空間を $\tilde{S}$ とすれば，G_α は $\mathbb{C}(\tilde{S})$ と $\mathbb{C}(\tilde{S})$ に移す resolvect に拡張出来 $\mathbb{B}_1(S)$ の $\tilde{S}$ 上への連続拡大が $\mathbb{C}_1(\tilde{S})$ の性質をもつ。したがつて定理Aを使つて $\tilde{S}$ 上に強Markov 過程を構成出来る。

特に定理Bは解析的な諸量（resolveut や完全最大値の原理をみたす核等）が与えられた場合，それに従う Markov 過程を作るのに有力な方法と思われる。しかし上記の $\mathbb{B}_1(S)$ は一般には可分（sup のノルムによる位相で）ではないので右連続な path がとれるかどうかわからず，具体的な応用を考える場合は不便なことが多い。たとえば可算空間 S上の Markov chain の場合でもその様な事情が起る。

この章は Ray の定理Aの紹介というべきものであるが，才三章以後の具体的な問題に応用出来る様に修正した形でのべる。基本的な idca，方法は Ray と同じであるが G_α: $\mathbb{C}(S) \to \mathbb{C}(S)$ を仮定しないためにやゝ議論が複雑になる所がある。

§0 準備 Daniell 積分

この§の内容はよく知られた事であるが，後にしばしば使うのでここにのべる。

Sをある空間（集合）とし，S上の有界な実数値函数のある集合 $\mathbb{E}(S)$ が次の条件をみたすとき初等函数族という。

(E，1)，$f, g \in \mathbb{E}(S)$ ならば $af + bg$ (a，b実定数)，$f \wedge g$ ($=\min(f, g)$)，

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

$f \vee g$ (=max (f, g)), $f \wedge 1 \varepsilon \mathbb{E}(S)$

(E, 2) $f_n \uparrow 1$である。$f_n \varepsilon \mathbb{E}(S)$ が存在する。ただし$f_n \uparrow f$ ($f_n \downarrow f$) は $\{f_n\}$が単調増大列 (減小列) でf_n がfに各点収束することを意味する。

S上の有界な函数族$\mathbb{F}$ (S) が次の (F) をみたすとき有界完備族という。

(F) $f_n \in \mathbb{F}(S)$ で $f_n \uparrow (\downarrow) f$ かつfが有界ならば$f \varepsilon \mathbb{F}(S)$。

初等函数族$\mathbb{E}$ (S) を含む最小の有界完備族を$\overline{\mathbb{E}(S)}$で表わす。$\overline{\mathbb{E}(S)}$は再び初等函数族となる。AをSの部分集合とし，ρ_A をAの特性函数即ち $\rho_A(x)=1$, ($x \varepsilon A$), $=0$ ($x \varepsilon A^c$) とする。$\mathbb{F}=\{A ; \rho_A \varepsilon \overline{\mathbb{E}(S)}\}$ とおけば，$\mathbb{F}$はBorel 集合体となることは，$\overline{\mathbb{E}(S)}$ が有界完備な初等函数族であること (E・2) からわかる。

初等函数族に対して次の定理がある。証明は伊藤〔13〕，Loomis 〔23〕を参照。

定理 1.1 (Daniell 積分) Iを$\mathbb{E}(S)$ 上に定義された非負，連続，線型汎函数とする。即ち

(I・1) (非負性) $f \geqq 0 \Longrightarrow I f \geqq 0$

(I・2) (加法性) $I(f+g)=I f+I g$

(I・3) (連続性) $f_n \downarrow 0 \Longrightarrow I f_n \to 0$

このとき (S, $\mathbb{F}$) 上の測度μが一意に定まり，$\forall f \varepsilon \mathbb{E}(S)$ に対して

$$(1 \cdot 1) \qquad I f=\int_S f(x) \mu(x, dy)$$

と書ける。

この定理より，Sが位相空間のとき次の系が得られる。

系 1 (Riesz の定理) Sをcompact な Hausdorff 空間，$\mathbb{C}(S)=\{$S上の連続函数の全体$\}$とする。Iを$\mathbb{C}$(S) 上に定義された非負線型汎函数，即ち (I・1) 及び (I・2) をみたすとすると，(I・3) が必然的にみたされ，したがつて (1・1) が成りたつ。

系 2 Sを局所compact な空間，$\mathbb{C}_0(S)=\{$compact な台をもつS上の連続函数の全体$\}$とする。IをCo(S) 上の非負線型汎函数とすれば，(I・3) が成立し，したがつて (1・1) が成りたつ。

---

1) 普通，初等函数族という場合には (E・2) を仮定しないが，後での都合上これを仮定する。

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

注意　$\mathbb{C}(S)$ 及び $\mathbb{C}_0(S)$ は初等函数族であることは明らかであろう。$\mathbb{C}(S)$ 又は $\mathbb{C}_0(S)$ を含む最小の有界完備族はSの位相的Borel field に関して有界可測な函数の全体と一致する。

$(S, \mathbb{B})$ を可測空間とし，$\mathbb{B}(S)$ をその上の有界可測函数の全体とする。$\mathbb{E}(S)$ を $\mathbb{B}(S)$ に含まれる初等函数族とすれば一般には $\overline{\mathbb{E}(S)} \subset \mathbb{B}(S)$，$\mathbb{F} \subset \mathbb{B}$ である。今後可測空間の場合，初等函数族という場合はそれを含む最小の有界完備族は有界可測函数の全体と一致するもののみ考えることにする。

§1　Resolveut

Sを才二可算公理をみたすcompact な Hausdorff 空間とし，Sの位相的Borel field を $\mathbb{B}_S$ で表わす。S上の有界 $\mathbb{B}_S$- 可測な函数の全体を $\mathbb{B}(S)$，S上の連続函数の全体を $\mathbb{C}(S)$ で表わす。$\mathbb{B}(S)$ 及び $\mathbb{C}(S)$ は $\|f\| = \sup_{x \in S} |f(x)|$ のノルムで Banach 空間である。$\mathbb{B}(S)$ をC(S)に移す線型作用系 G_α $(\partial > 0)$ が次の条件をみたすとき，resolvent という。

$(G_\alpha.1)$　(非負性)　$f \geqq 0 \Longrightarrow G_\alpha f \geqq 0$

$(G_\alpha.2)$　(有界性)　$\|G_\alpha\| \leqq \frac{1}{\alpha}$

$(G_\alpha.3)$　(resolveut equation)　$G_\alpha - G_\beta + (\alpha - \beta) G_\alpha G_\beta = 0$

$G_\alpha \neq \frac{1}{\alpha}$ のときSに一点 ∂ をつけ加えたcompact 空間 $S \cup \{\partial\}$ を考え，$f \in \mathbb{B}(S \cup \{\partial\})$ に対して G^*_α を

$$G^*_\alpha f(x) = G_\alpha f(x) + f(\partial)\{1 - \alpha G_\alpha 1(x)\} \frac{1}{\alpha} \qquad x \in S \text{ のとき}$$

$$= \frac{1}{\alpha} f(\partial) \qquad x = \partial \text{ のとき}$$

と定義すれば G^*_α は resolvent で $(G_\alpha.2)$ は $(G^*_\alpha = G_\alpha$ とおいて$)$

$$(G_\alpha.2') \qquad G_\alpha 1 = \frac{1}{\alpha}$$

におきかえられる。G^*_α が $(G_\alpha.1)$，$(G_\alpha.2')$ をみたすことは明らかだから $(G_\alpha.3)$ をみたすことを示す。$x \in S$ のとき

$$(\alpha - \beta) G^*_\alpha G^*_\beta f(x) = (\alpha - \beta) G^*_\alpha \{G_\beta f + f(\partial)(1 - \beta G_\beta 1)\frac{1}{\beta}\}(x)$$

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

$$= (\alpha-\beta)\left[G_\alpha G_\beta f(x) + G_\alpha\left\{f(\partial)(1-\beta G_\beta 1)\frac{1}{\beta}\right\}(x)\right]$$

$$+\frac{1}{\alpha\beta}f(\partial)(1-\alpha G_\alpha 1(x))$$

$(\alpha-\beta)\ G_\alpha G_\beta f$ 及び $(\alpha-\beta)\,G_\alpha G_\beta 1$ にresolvent equation を使つて整とんすれば上式は

$$G_\beta f(x) - G_\alpha f(x) + \frac{\alpha-\beta}{\beta}f(\partial)G_\alpha 1(x) + f(\partial)(G_\alpha 1(x) - G_\beta 1(x))$$

$$= G_\beta f(x) + \frac{1}{\beta}(1-\beta G_\beta 1(x)) - \left\{G_\alpha f(x) + \frac{1}{\alpha}f(\partial)(1-\alpha G_\alpha 1(x)\right\}$$

$$= G^*_\beta f(x) - G^*_\alpha f(x)$$

$x=\partial$ のときもresolvent equation がみたされることは容易に示される。したがつて G_α は $(G_\alpha.2')$ をみたすと仮定して一般性を失わない。

今後この章ではresolvent G_α は次の仮定をみたすものとする。

条件A $\mathbb{B}_0(S)$ を $\mathbb{B}(S)$ に含まれる初等函数族とすると， $\forall f\in\mathbb{B}_0(S)$ に対し $G_1 f\in\mathbb{C}(S)$

条件B 次の条件をみたす可算個の元をもつ $\mathbb{C}(S)$ の部分族 $\mathbb{C}_1(S)$ が存在する。

(C・1) 任意の $x,y\ (x\neq y)$ S に対して $f(x)\neq f(y)$ をみたす $f\in\mathbb{C}_1(S)$ が存在する。

(C・2) $f\in\mathbb{C}_1(S)\Longrightarrow\alpha G_{\alpha+1}f\leqq f$

注意 (1) 初等函数族 $\mathbb{B}_0(S)$ の取り方はいろいろあり得るわけで，具体的な問題に応じて適当にとればよい。

Ray [27] では条件Aの代りに

条件A′ G_α は $\mathbb{C}(S)$ を $\mathbb{C}(S)$ に移す。

を仮定している。言いかえれば，条件Aの初等函数族 $\mathbb{B}_0(S)$ として $\mathbb{C}(S)$ をとつているわけである。

(2) $\mathbb{C}_1(S)$ の元が可算個であるという条件はこの§の定理1.2以外及び次の§の半群の

1) 一般にS上のある函数族 $\mathbb{A}(S)$ に対し，$\{f\geqq 0\,;\,f\in\mathbb{A}(S)\}$ を $\mathbb{A}^+(S)$ で表わす。

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

構成のときには必要としないが，§3のprocess の構成（path の構成）のときに本質的役割をはたす。

（3） G_α が（G_α.1）－（G_α.3）の他に

（G_α.4） $\forall x, y$ （$x \neq y$）$\in$ S に対し $f(x) \neq f(y)$ となる

$f \in \mathbb{R}(S) = \{ \mathbb{B}^+(S)$ の G_α による値域$\}$ が存在する。をみたすとき，

$\mathbb{C}'_1(S) = \{ \mathbb{B}^t_0(S)$ の C_1 による値域$\}$ とおけば，$\mathbb{C}'_1(S)$ は条件Bの（C・1），（C・2）の性質をもつ。

次の lemma は基本的である。

<u>Lemma 1.1</u> $\forall f \in \mathbb{C}(S)$ に対し $g(x) = \lim_{\alpha \to \infty} \alpha G_\alpha f(x)$ が存在し，しかも各 $x \in S$ に対して

$$(1.3) \qquad g(x) = \int_S \mu(x, dy) f(y)$$

をみたす，全測度1のS上の測度 $\mu(x, \cdot)$ が唯一つ定まる。

証明 数段階に分けて考える。

1° 一点 $x \in S$ を固定すれば，$G_\alpha f(x)$ は $\mathbb{B}(S)$ の部分空間 $\mathbb{C}(S)$ 上の非負線型汎函数とみなせるから Riesz の定理によりS上の測度 $G_\alpha(x, \cdot)$ が一意に定まり

$$(1 \cdot 4) \qquad G_\alpha f(x) = \int_S G_\alpha(x, dy)\ f(y)$$

$\{ \alpha G_\alpha(x, \cdot)\ ;\ 0 < \alpha < \infty \}$ は compact 空間S上の一様有界な測度の系だから $\alpha \to \infty$ としたとき汎弱極限測度 $\mu(x, \cdot)$ をもつ。その全体を M_x で表わす。

2° $f \in \mathbb{C}_1(S)$ とすれば $0 < \alpha < \beta$ のとき resolvent equation より

$$\alpha G_{\alpha+1} f - \beta G_{\beta+1} f = \alpha (G_{\alpha+1} f - G_{\beta+1} f) - (\beta - \alpha) G_{\beta+1} f$$

$$= \alpha (\beta - \alpha) G_{\beta+1} G_{\alpha+1} f - (\beta - \alpha) G_{\beta+1} f$$

$$\leqq (\beta - \alpha) G_{\beta+1} f - (\beta - \alpha) G_{\beta+1} f = 0$$

即ち $\alpha G_{\alpha+1} f$ は α に関して単調増加である。したがつて $g(x) = \lim_{\alpha \to \infty} \alpha G_{\alpha+1} f$ が存在する。故に

$$(1 \cdot 5) \qquad f(x) \geqq \lim_{\alpha \to \infty} \alpha G_\alpha f = \lim_{\alpha \to \infty} \frac{\alpha}{\alpha - 1} (\alpha - 1)\ G_\alpha f = g(x)$$

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

このことと，fが連続なことより，$\forall\mu(x,\cdot)$ M_x に対して（1・3）式が得られる。

3° $h\in \mathbb{B}_0^+(S)$，$f=G_1 h$ とすれば resolvent equation より

$$G_{\alpha+1} h - f + \alpha G_{\alpha+1} f = 0$$

だから $f(x)=\lim_{\alpha\to\infty} \alpha G_\alpha f(x)$ である。したがつて $\forall\mu(x,\cdot)\in M_x$ に対し

$$(1\cdot 6)\qquad f(x) = \int_S \mu(x,dy) f(y)$$

上式はすべての $f=G_1 h$ （$h\in B_0(S)$）について成りたつから定理1・1[1]により

$$G_1(x,\cdot) = \int_S \mu(x,dy) G_1(y,\cdot)$$

したがつて任意の $f\in \mathbb{B}(S)$ について

$$G_1 f(x) = \int_S \mu(x,dy) G_1 f(y)$$

と書ける。故にすべての $\mathbb{R}(S)\ni f$ に対して（1・6）が成立する。

4° $\mathbb{C}'(S)$ を次の条件をみたん函数族とする。

（C'・1） $f\in \mathbb{C}(S)$

（C'・2） $\exists \lim_{\alpha\to\infty} \alpha G_\alpha f(x) \equiv g(x)$

（C'・3） $\forall x$， $\mu(x,\cdot)\in M_x$ に対して

$$(1\cdot 7)\qquad \int_S \mu(x,dy)\,|g(y)-f(y)| = 0$$

$\mathbb{C}'(S)$ は $\mathbb{C}(S)$ の閉部分空間だから，$\mathbb{C}'(S)$ が次の三つの性質

（i） $\mathbb{C}'(S)$ はSの任意の二点を分離する。即ち $\forall x, y\ (x\neq y)$ に対し $f(x)\neq f(y)$ となる $f\in \mathbb{C}'(S)$ が存在する。

（ii） $\mathbb{C}'(S)$ は lattice である。即ち $f\in \mathbb{C}'(S) \Rightarrow |f|\in \mathbb{C}'(S)$

（iii） $1\in \mathbb{C}'(S)$

をもてば Stone-Weierstrass の定理〔17, p244〕により $\mathbb{C}(S) = \mathbb{C}'(S)$ であることがわかる。さて $\mathbb{C}'(S)$ が（i）をみたすことを言うには，$\mathbb{C}_1(S) \subseteqq \mathbb{C}'(S)$

1） $G_1 h(x)$ は（1・4）式により積分の形に書けるから（I・3）をみたすことは明らか。

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

を言えばよい。$\mathbb{C}_1(S)$ が $(C',1)$ 及び $(C',2)$ をみたすことは2° でのべた。
$(C'\cdot 3)$ は，$g(x)=\lim_{\alpha\to\infty}\alpha G_\alpha f$ とおいたとき

$$\int_S g(y)\mu(x,dy)=\lim_{\alpha\to\infty}\alpha\int_S \mu(x,dy)G_\alpha f(y)$$

$$=\lim_{\alpha\to\infty}\alpha G_\alpha f(y)=\int_S \mu(x,dy)f(y)$$

であることと $g\leqq f$ であることよりわかる。次に (ii) の証明　$f\in\mathbb{C}'(S)$ のとき

$$h(x)\leqq \underline{\lim}_{\alpha\to\infty}\alpha G_\alpha|f|(x)$$

とおく。　$h\geqq|g|$ は明らか。一点 x を固定する。$\{\alpha_n\}$ を

$$\overline{\lim}_{\alpha\to\infty}\alpha G_\alpha|f|(x)=\lim_{n\to\infty}\alpha_n G_{\alpha_n}|f|(x)$$

をみたす点列とし，$\{\alpha_n G_{\alpha_n}(x,\cdot);\ n=1,2\cdots\}$ の汎弱極限測度の一つを $\mu(x,\cdot)$ とすれば

$$\int\mu(x,dy)h(y)=\int\mu(x,xy)\underline{\lim}_{\alpha\to\infty}\alpha G_\alpha|f|(y)$$

$$\leqq\underline{\lim}_{\alpha\to\infty}\int\mu(x,dy)\alpha G_\alpha|f|(y)$$

$$=\underline{\lim}_{\alpha\to\infty}\alpha G_\alpha|f|(x)\leqq\overline{\lim}_{\alpha\to\infty}\alpha G_\alpha|f|(x)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\alpha_n G_{\alpha_n}|f|(x)=\int\mu(x,dy)|f(y)|$$

$$=\int\mu(x,\alpha\mu)|g(y)|\leqq\int\mu(x,dy)h(y)$$

したがつて $h(x)=\lim_{\alpha\to\infty}\alpha G_\alpha f(x)=\int\mu(x,dy)f(y)$ が存在して

$\forall\mu(x,\cdot)\in M_x$ に対し

$$\int\mu(x,dy)h(y)=\int\mu(x,dy)|f(y)|=\int\mu(x,dy)|g(y)$$

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

即ち

$$\int \mu(x,dy)\,|h(y)-|f(y)||=0$$

これで（ii）が証明された。（iii）は明らかである。したがつて$\mathbb{C}(S)=\mathbb{C}'(S)$

5° $\mu(x,\cdot)$ の一意性は

$$I(f)(x)=\lim_{\alpha\to\infty}\alpha G_\alpha f(x)=\int \mu(x,dy)f(y)$$

を$\mathbb{C}(S)$ 上の線型汎函数と考えればRiesz の定理よりわかる。

<u>定義</u>　$\mu(x,\cdot)$ が一点$\{x\}$にpoint mass を持たないときxを分岐点という。分岐点の全体を S_b で表わす。$x\in S_b$ に対応する$\mu(x,\cdot)$ を分岐測度という。

$\mathbb{C}_1^*(S)=\{g;\ g=f\wedge c,\ f\in C_1(S),\ c$；有理数$\}$ とおく。分岐点に関して次の判定条件がある。

<u>Lemma 1.2</u>　$x\in S_b$ であるための必要十分条件は

$$g(x)>\lim_{\alpha\to\infty}\alpha G_\alpha g(x)$$

をみたす$g\in\mathbb{C}_1^*(S)$ が存在することである。

証明　十分条件は明らかだから必要条件を証明する。数段階に分けて考える。$\forall x\in S_b$ を固定する。

1° 先ず，yを含む任意のopen set $U(y)$ に対して$\mu(x,U(y))>0$となるy $(\neq x)$ が存在することを示す。今$U(x)$ はxを含むopen set で $\mu(x,U(x))<1$ をみたすものとする。実際その様な$U(x)$は存在する。なぜなら $\forall\ U(x)$で$\mu(x,U(x))=1$ならば$U_n(x)\supset U_{n+1}(y)$ $\bigcap_{n=1}^{\infty}U_n(x)=\{x\}$ となる$U_n(x)$ をとれば

$\lim_{n\to\infty}\mu(x,U_n(x))=\mu(x,\{x\})=1$ となりnが分岐点でなくなるからである。

さて今問題にしているyが存在しないと仮定すると，$\forall y$ $(\neq x)$ に対し$\mu(x,U(y))=0$ となる様な$U(y)$ が存在する$\{U(y):\forall y(\neq x)\}$ は $S-U(x)^c$ をeover するから，$S-U(x)^c$ の compact 性より，有限個の点$y_1,\ \ ,y_n$ が存在して$S-U(x)^c\subset\sum_{n=2}^{n}U(y_n)$ したがつて

$$\mu(x,S)\leqq\sum_{k=1}^{n}\mu(x,U(y_k))+\mu(x,U(x))=\mu(x,U(x))<1$$

となり矛盾である。

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

2° $f\in \mathbb{C}_1(S)$ のとき (1.5) が成りたつから $\mathbb{C}_1^x(S)=\{f'=f(x)\wedge f: f\in \mathbb{C}_1(S)\}$ とおけば $\forall f'\in \mathbb{C}_1^x(S)$ に対して

$$(1.8)\qquad f'(x)=f(x)\geqq \int_S \mu(x,dy)f'(y)$$

もし (1.8) 式で実際に不等号が成立する様な $f'\in \mathbb{C}_1^x(S)$ が存在することが言えれば

$$f(x)>c>\int_S \mu(x,dy)f'(y)$$

をみたす有理数 c をとり $g=f_\wedge c$ とおけば $g\leqq f'$ だから

$$g(x)=c>\int_S \mu(x,dy)f'(y)\geqq \int \mu(x,dy)g(y)$$

となり lemma が証明されたことになる。したがつて (1.8) 式の「$\geqq$」が「$>$」におきかえられる $f'\in \mathbb{C}_1^x(S)$ が存在することを証明すればよい。

3° 1° の y を固定する $\mathbb{C}_1(S)$ は二点を分離するから $f(x)\neq f(y)$ をみたす $f\in \mathbb{C}_1(S)$ が存在する。もし $f(x)<f(y)$ ならば，$f(y)>f'(y)$ だから

$$f(x)\geqq \int_S \mu(x,dz)f(z)>\int_S \mu(x,dz)f'(z)$$

逆に $f(x)>f(y)$ ならば $f(x)>f'(y)$ 及び $f(x)\geqq f'(z)$ (z) に注意すれば

$$f(x)>\int_S \mu(x,dz)f'(z)$$

この lemma より次の定理が得られる。

<u>定理 1.2</u> S_b は可測集合でありかつ，$\mu(x, S_b)=0$ である。

証明 $g\in \mathbb{C}_1^*(S)$ のとき $S_g=\{x, g(x)>\lim_{\alpha\to\infty} \alpha G_\alpha g(x)\}$ とおけば，lemma 1.2 より

$$S_b=\bigcup_{g\in \mathbb{C}_1^*(S)} S_g$$

S_g は可測集合であり，$\mathbb{C}_1^*(S)$ は可算個だから S_b は可測集合，次に (1.7) 式によれば $\mu(x,S_g)=0$ だから $\mu(x,S_b)=0$ である。

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

§2 半群の構成

Resolvent G_α による$\mathbb{B}(S)$ の値域 $\mathbb{R}(S)$ は一般には$\mathbb{B}(S)$ で稠密ではない。従つてG_α に対応する$\mathbb{B}(S) \to \mathbb{B}(S)$ なる半群を，Hille-Yoshida の定理から直ちに得ることは出来ない。こゝでは先ず $\overline{\mathbb{R}(S)}$[1] の上に半群を構成し，それを$\mathbb{B}(S)$ の上に拡張しよう。

Hille-Yoshida の定理を我々の場合に即して書けば次の様である。

<u>定理 1.3</u> G_α を$\mathbb{B}(S)$ を $\mathbb{B}(S)$ に移すresolvent，$\mathbb{R}(S)$ をその値域とすると，次の条件をみたす，$\overline{\mathbb{R}(S)}$ を $\overline{\mathbb{R}(S)}$ に移す線型作用素（半群） H_t ($t \geqq 0$) が一意的に定まる。

(H・1) （非負性） $f \geqq 0 \implies H_t f \geqq 0$

(H・2) （有界性） $\| H_t \| \leqq 1$ （実は$H_t 1 = 1$）

(H・3) （半群の性質） $H_{t+s} = H_t \cdot H_s$

(H・4) （連続性） $\lim_{t \downarrow 0} \| H_t f - H_0 f \| = 0$ ただし$H_0 f = f$

(H・5) $G_\alpha f = \int_0^\infty e^{-\alpha t} H_t f \, dt$

Sの一点xを固定すれば$H_t f(x)$ は $\overline{\mathbb{R}(S)}$ <u>上の線型汎函数となつているから Hahn-Banach</u> の拡張定理 吉田〔35p4〕により$\mathbb{B}(S)$ 上の線型汎函数$\widetilde{H}_t$ が存在して

$$(1.9) \quad \widetilde{H}_t f(x) = H_t f(x) \;, \quad f \in \mathbb{R}(S) \quad かつ \quad \| \widetilde{H}_t \| \leqq 1$$

次に$\widetilde{H}_t$ を $\mathbb{C}(S)$ 上の線型汎函数とみなせば，Riesz の定理よりS上の測度$\widetilde{P}_t(x, \cdot)$ が存在して

$$\widetilde{H}_t f(x) = \int_S \widetilde{P}_t(x, dy) f(y)$$

$\forall f \in \mathbb{C}(S)$ に対して新たに$H_t f(x)$ を

$$(1.10) \quad H_t f(x) \equiv \lim_{\alpha \to \infty} \widetilde{H}_t \alpha G_\alpha f)(x) = \lim_{\alpha \to \infty} H_t(\alpha G_\alpha f)(x)$$

により定義する。再びRiesz の定理によりS上の測度$P_t(x, \cdot)$ が一意に定まり，

$$(1.11) \quad H_t f(x) = \int_S P_t(x, dy) f(y)$$

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

任意の$f \in \mathbb{B}(S)$に対しても（1.1 1）式の右辺で$H_t f(x)$を定義する。$f \in R(S)$のとき，（1.1 1）の右辺で定義された$H_t f$と初めに与えられた$H_t f$とが一致する。実際$f = G_1 h(h \in \mathbb{B}_0(S))$のとき，$f \in \mathbb{C}(S)$だから一致する。$\mathbb{B}_0(S)$が初等函数族だからすべての$f \in \mathbb{R}(S)$で一致する。

<u>Lemme 1.3</u>　H_tは$\mathbb{B}(S) \to \mathbb{B}(S)$の線型作用素であり，(H・1)，(H・2)，(H・3)及び(H・5)をみたす。

証明　数段階に分けて考える。

1°　$\mathbb{B}'(S) = \{ f ; f \in \mathbb{B}(S)$ かつ $H_t f(x)$ は (t, x)-可測 $\}$とおく。

$\mathbb{R}(S) \leqq \mathbb{B}'(S)$は明らか，$f \in \mathbb{C}(S)$のとき（1.1 0）式より$H_t f(x)$は$(t, x)$一可測である。ところが一方$\mathbb{B}'(S)$は有界完備族だから$\mathbb{B}(S) = \mathbb{B}'(S)$である。

2°　(H・5)の証明　$f \in \mathbb{C}(S)$のとき証明すれば十分である。

$$\int_0^\infty e^{-\alpha t} H_t f(x) dt = \int_0^\infty e^{-\alpha t} \lim_{\beta \to \infty} H_t(\beta G_\beta f)(x) dt$$

$$= \lim_{\beta \to \infty} \int_0^\infty e^{-\alpha t} H_t(\beta G_\beta f)(x) dt = \lim_{\beta \to \infty} \beta G_\alpha G_\beta f(x)$$

$$= G_\alpha f(x)$$

3°　(H・3)の証明　$f \in \mathbb{C}(S)$のときに証明する。

$$H_t H_s f(x) = \int_S P_t(x, dy) H_s f(y)$$

$$= \lim_{\alpha \to \infty} \int_S P_t(x, dy) H_t(\alpha G_\alpha f)(y)$$

$$= \lim_{\alpha \to \infty} \alpha H_t H_s G_\alpha f(x) = \lim_{\alpha \to \infty} \alpha H_{t+s} G_\alpha f(x)$$

$$= H_{t+s} f(x)$$

その他(H・1)及び(H・2)は明らかである。

<u>定義</u>　（1.1 0）により定義されたH_tを$\mathbb{B}(S)$上の半群と呼ぶ。

<u>注意</u>　Hahn-Bauach の拡張は一意的でないから$\hat{H}_t$は$\mathbb{B}(S)$上の作用素としては一意的には定まらない。しかし（1.1 0）で定義されたH_tは$\hat{H}_t$の選び方に無関係で一意

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

的に定義される。したがつて(1.11)の右辺で定義された$H_t f$($f\in \mathbb{B}(S)$)も一意的に定まる。Hahn-Banach の拡張定理を使つたのは単に $\lim_{\alpha\to\infty} H_t(\alpha G_\alpha f)$ が存在することを示すためである。

Lemma 1.3 により,$P_t(x,E)$ は次の性質をもつことがただちにわかる。

(P・1) $P_t(x,E)$ は (t,x) を固定すればS上の確率測度

(P・2) $P_t(x,E)$ はEを固定すれば(t,x)ー可測

(P・3) (Kolmogorov-Chapman の等式)

$$P_{t+s}(x,E)=\int_S P_t(x,dy)P_s(y,E)$$

定義 $P_t(x,E)$ を推移確率と呼ぶ。

注意 (1) H_t の定義より $f\in \mathbb{C}(S)$ のとき

$$H_o f(x)=\lim_{\alpha\to\infty}\alpha G_\alpha f(x)=\int\mu(x,dy)f(y)$$

だから$P_o(x,E)=\mu(x,E)$ である。

Lemma 1.4 $\forall t$, $\forall x\in S$ に対し $P_t(x,S_b)=0$ である。

証明 H_t の定義より $f\in\mathbb{C}(S)$ のとき

$$H_t f(x)=\int_S P_t(x,dy)f(y)=\int_S P_t(x,dy)g(y)$$

ただし$g(x)=\lim_{\alpha\to\infty}\alpha G_\alpha f(x)$, $\quad {}^\forall f\in \mathbb{C}_1^*(S)$ のとき $g\leqq f$
だから上式より

$$\int_S P_t(x,dy)\left|f(y)-g(y)\right|=0$$

$S_f=\{x\,;\,f(x)>g(x)\}$ とおけば $P_t(x,S_f)=0$
したがつて$P_t(x,S_b)=0$ である。

Lemma 1.5 $f\in\mathbb{C}_1(S)$ のとき $e^{-t}H_t f\leqq f$ がすべての t でなりたつ。

証明 半群の一般論より $h\in\mathbb{R}(S)$ のとき

$$(1.12)\qquad H_t h=\lim_{\beta\to\infty}e^{-\beta t}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\beta t)^m}{m!}(\beta G_\beta)h \qquad \text{(強収束)}$$

今 $h=\alpha G_\alpha f$, $f\in\mathbb{C}_1(S)$ とおけば

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

$$\frac{1}{\alpha}(-h-\beta G_{\beta+1}h) = G_\alpha f - \beta G_{\beta+1}G_\alpha f = G_\alpha f - \frac{\beta}{\alpha-\beta-1}(G_{\beta+1}f - G_\alpha f)$$

$$= \frac{1}{\beta+1-\alpha}(\beta G_{\beta+1}f - (\alpha-1)G_\alpha f)$$

故に $\beta > \alpha$ ならば $h \geqq \beta G_{\beta+1}h$ これより

$$\beta G_\beta h = \beta \frac{1}{\beta-1} \circ (\beta-1) G_\beta h \leqq \frac{\beta}{\beta-1} h,$$

$$(\beta G_\beta)^m h \leqq \left(\frac{\beta}{\beta-1}\right)^m h$$

だから

$$H_t h \leqq \lim_{\beta\to\infty} e^{-\beta t} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\beta^2 t}{\beta-1}\right)^m \frac{1}{m!} h$$

$$= e^{-\beta t} \cdot e^{\frac{\beta^2 t}{\beta-1}} = e^{\frac{\beta}{\beta-1}t} h \leqq e^t \circ h$$

$\alpha \longrightarrow \infty$ とすると $e^{-t} H_t f \leqq \lim_{\alpha\to\infty} \alpha G_\alpha h \leqq f$

§3 Markov 過程の構成

この§では前節で得られた推移確率を使つて，Markov 過程を構成する。適当な version をとることにより，Hunt 過程と呼ばれるものに近いものが作れるが，いわゆる quasi-左連続性は，分岐点 S_b ではくずれる。

$\Omega = S^{[0,\infty)}$ とし，$w \in \Omega$ の t 座標を $w(t)$ 又は $x_t(w)$ で表わす。Ω の筒集合 $\{w;\ x_{t_1}(w) \in A_1, \cdots, x_{t_n}(w) \in A_n\}$ $(0 \leqq t_1 < t_2 < \cdots < t_n)$ から生成されるBorel field を F とする。各 w，各 t に対し stopped path w_t，shifted path w_t^+ を $x_s(w_t) = x_{s\wedge t}(w)$，$x_s(w_t^+) = x_{s+t}(w)$ で定義する。 φ を $w \to w_t^-$ への写像とし，$\rho_t^{-1}(F)$ を $\mathbb{E}_t$ で表わす。(Ω, F) 上に $(P_x^*; x \in S)$ の系を

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

(1.1 3)
$$P_x^*\ (x_{t_1}(w)\in A_1,\cdots,\ x_{t_n}(w)\in A_n)$$
$$=\int_{A_1} P_{t_1}(x,dy_1)\int_{A_2} P_{t_2-t_1}(y_1,dy_2)\cdots\int_{A_n} P_{t_n-t_{n-1}}(y_{n-1},dy_n)$$

と定義すればKolmogorov の拡張定理により $(P_x^*;x\in S)$ は $(\Omega,\mathbb{F})$ 上の確率測度となる。 $X^*=(\Omega,\mathbb{F},P_x^*;\ x\in S)$ を推移確率 $\{P_t(x,E)\}$ に従うMarkov 過程という。X^* が次の性質をもつことはよく知られている。

$(X^*\cdot 1)$ $P_x^*(B)$ $(B\in\mathbb{F})$ は x -可測である。

$(X^*\cdot 2)$ $P_x^*(\cdot)$ は確率測度である。

$(X^*\cdot 3)$ (Markov 性) 任意の $B\in\mathbb{F}$，任意の $t>0$ に対して，P_x -測度 1 で

$$P_x^*(w_t^+\in B\mid F_t)=P_{x_t}^*(B)$$

これで一応Markov 過程が出来たわけであるが，実は右連続か 左極限をもつpath の version がとれることを示す。方法は semi-martingal を使う点においては伊藤〔14，p 122〕や近藤〔18，p 12〕と同じであるが，X^* が確率連続かどうかわからないので（実は確率連続であることは後でわかる），少し異なつた考察を必要とする。最初に semi-martingale に関するDoob の定理についてのべる。

ある確率空間 $(\Omega,\mathbb{F},P)$ の上に定義された確率過程 $x_t(w)$ $t\in T$（実数のある区間）

1° $E(|x_t|)<\infty$ $\forall t\in T$.

2° $s<t\Longrightarrow E(x_t\mid\mathbb{F}_s)\geqq x_s$ P_x -測度 1 でをみたすとき x_t を semi-martingale という。ただし $\{\mathbb{F}_t,\ t\in T\}$ は $\mathbb{F}$ の sub Borel field で

1 $s<t\Longrightarrow\mathbb{F}_s\leqq\mathbb{F}_t$

2 $x_t(w)$ は $\mathbb{F}_t$ -可測

をみたすものとする。

<u>定理 1.4</u> (Doob 〔7，p.361〕) $\{x_t,t\in T\}$ を可分な semi-martingale とすれば，ほとんどすべての w に対し，$x_t(w)$ は左右からの極限をもつ。

さてMarkov 過程 X^* に話をもどす。一般に才二可算公理をみたす compact 空間 S の値をとる確率過程 x_t が可分であるというのは，$\forall f\in\mathbb{C}(S)$ に対して $f(x_t)$ が可分と

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

なることである。$f(x_t)$ が可分変形をもつことと，Sが才二可算公理をみたすcompact空間であることから，$\widetilde{x}_t$ の可分変形$\widetilde{x}_t$ が存在することが証明される。(伊藤〔14,p121〕)，したがつてX* の path $x_t(w)$ は可分であるとしてよい。

$$Y_t(w) = e^{-t} f(x_t(w)). \qquad (f \in C_1(S))$$

とおけばY$_t(w)$ は可分なsemi-martingale である。実際

$$E^*_x(Y_{t+s}(w) \mid \mathbb{F}_s) = E^*_x(e^{-(t+s)} f(x_{t+s}) \mid \mathbb{F}_s)$$

$$= E^*_{x_s}(e^{-(t+s)} f(x_t)) = e^{-s} e^{-t} H_t f(x_s)$$

Lemma 1.5より $e^{-t} H_t f \leqq f$ だから上式より

$$E^*_x(Y_{t+s}(w) \mid \mathbb{F}_s) \leqq e^{-s} f(x_s) = Y_s(w)$$

したがつて定理1.4により，ほとんどすべてのwに対して$f(x_t)$ は左右からの極限をもつ。$\mathbb{C}_1(S)$ は可算個だから

$$\Omega_1 = \{w;\ \lim_{t' \downarrow t} f(x_{t'}) \text{ が } \forall f \in \mathbb{C}_1(S) \text{ で存在する}\}$$

とおけば$P_x(\Omega_1) = 1$ である。$w \in \Omega_1$ のとき $x_{t'}(w)$ $(t' \downarrow t)$ の極限点の一つをxとすれば $\forall f \in \mathbb{C}_1(S)$ で

$$\lim_{t' \downarrow 0} f(x_{t'}(w))(w) = f(x)$$

ところが$\mathbb{C}_1(S)$ はSの二点と分離するから上のxは唯一つである。即ち，

$$\hat{x}_t(w) \equiv \lim_{t' \downarrow t} x_{t'}(w)$$

が存在する。$\hat{x}_t(w)$ は右連続かつ左極限をもつ。

次にx_t が $\hat{x}_t$ の変形になつていること，即ち $\forall t \geqq 0$ に対し $P^*_x(x_t(w) = \hat{x}_t(w)) = 1$ であることを示す。

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

$f \in \mathbb{C}(S)$ とすれば，Markov 性を用いて

$$H_t(\alpha G_\alpha f)(x) = \alpha E_x^*\left(\int_0^\infty e^{-\alpha s} f(x_{s+t})ds\right)$$
$$= E_x^*\left(\int_0^\infty e^{-s} f(x_{\frac{s}{\alpha}+t})ds\right)$$

$\alpha \to \infty$ とすれば

$$E_x^*(f(x_t)) = \lim_{\alpha\to\infty} H_t(\alpha G_\alpha f)(x) = E_x^*\left(\int_0^\infty e^{-s} f(\hat{x}_t(w))ds\right)$$
$$= E_x^*(f(\hat{x}_t(w)))$$

したがつて $\forall t \geqq 0$ で $P_x(x_t(w) = \hat{x}_t(w)) = 1$ である。

w を Ω の要素の内，右連続かつ左極限をもつものの全体とし，$\tilde{\mathbb{B}} = \{B = F \cap W ; F \in \mathbb{F}\}$，$\tilde{\mathbb{B}}_t = \{B = F \cap W ;\ F \in F_t\}$ とする。$(W, \tilde{\mathbb{B}})$ 上に確率測度の系 $(P_x : x \in S)$ を

$$P_x(B) = P_x^*(\hat{x}(w) \in B)$$

により定義する。μ を S 上の σ − 有限な測度で $P_\mu(\cdot) = \int \mu(dx) P_x(\cdot)$ とする。

(1.14) $\mathbb{B} = \bigcap_{\text{すべての}\mu} \{\tilde{\mathbb{B}}$ の P_μ − 完備化$\}$

とおく。σ を $\mathbb{B}$ − 可測な random 時間，$\varphi_\sigma^{-1}(\tilde{\mathbb{B}}) = \tilde{\mathbb{B}}_\sigma$，

(1.15) $\mathbb{B}_\sigma = \bigcap_{\text{すべての}\mu} \{\tilde{\mathbb{B}}_\sigma$ の P_μ − 完備化$\}$，

更に $\mathbb{B}_{\sigma_t} = \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathbb{B}_{\sigma+\varepsilon}$ とおくと $(P_x : x \in S)$ は $(W, \mathbb{B})$ 上に一意に拡張される。
明らかに $X = (W, \mathbb{B}, P_x : x \in S)$ は $\{P_t(x \cdot E)\}$ に従うMarkov 過程である。
XをDynkin 〔9〕 にしたがつて canonicalな Markov 過程と呼ぶことにする。

<u>定義</u> $\mathbb{B}$ − 可測な random time σ が $\{\sigma < t\} \in \mathbb{B}_t$ をみたすときMarkov time という。

<u>定理15</u> canonical な Markov 過程Xは次の性質をもつ。

(X・1) $\forall B \in \mathbb{B}$ を固定すれば $P_x(B)$ は $\mathbb{B}_s$ − 可測。

(X・2) $\forall x \in S$ を固定すれば $P_x(\cdot)$ は確率測度

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

(X・3)　$P_x(x_0(w)\in E)=\mu(x,E)$　たゞし $\mu(x,\circ)$ は
Lemma 1.1 により定まつた測度

(X・4)　(強 Markov 性)　任意の $B\in\mathbb{B}$，Markov 時間 σ に対し

$$P_x(w_\sigma^+\in B\mid\mathbb{B}_{\sigma+})=P_{x_\sigma}(B)$$

が P_x-測度0を除いて成立する。

(X・5)　(quasi-左連続性)　$\{\sigma_n\}$ を Markov 時間の単調増加列で，$\sigma=\lim_{n\to\infty}\sigma_n$ とする。

$\wedge=\{w\,;\sigma<\infty\}\ni w$ に対して $\lim_{n\to\infty}x_{\sigma_n}\equiv x_{\sigma-}\notin S_b$ が P_x-測度0を除いて成立すれば

$$P_x(\wedge\,;x_{\sigma-}=x_\sigma)=P_x(\wedge)$$

(X・6)　Fを S_b に含まれる任意の閉集合とすれば　$P_x(\ \forall t$ で $x_t\notin F)=1$

証明　(X・1)，(X・2) 及び (X・3) は明らか

(X・4) の証明

G_α が $\mathbb{C}(S)$ を $\mathbb{C}(S)$ に移す場合は強Markov 性があることはよく知られているが，我々の場合そうでないので少しめんどうになる。方法は $G_1 f(f\in\mathbb{B}_0(S))$ が連続であることに注意して，先ず $G_1 f$ に対して強Markov 性に相当することを証明し，そののち $\forall f\in\mathbb{R}(S)$ に対して強Markov 性が成りたつことを証明し，最後に任意の $f\in\mathbb{C}(S)$ に対して強Markov 性が成りたつことを言う。

σ を Markov time とする。

$$\sigma_n(w)=\begin{cases}\dfrac{k}{n}\ ; & w\in E_{n\circ k}=\{w\,;\dfrac{k-1}{n}\leqq\sigma(w)<\dfrac{k}{n}\},\quad k=0,1,2,\cdots\\ \infty\ ; & w\in E_\infty=\{\sigma=\infty\}\end{cases}$$

とおけば σ_n は Markov time で，$\sigma_n\downarrow\sigma$ である。$f\in\mathbb{B}_0(S)$ のとき

$$G_1 f=G_\alpha f+(\alpha-1)\,G_\alpha G_1 f\ \in\mathbb{C}(S)$$

だから

$$(1.16)\quad E_x\Bigl(\int_0^\infty e^{-\alpha t}\{\ f(x_{t+\sigma_n})+(\alpha-1)G_1 f(x_{t+\sigma_n})\}dt\Bigr)$$

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

$$=E_x\left(\int_{\sigma_n}^{\infty} e^{-\alpha(t-\sigma_n)}\{ f(x_t) + (\alpha-1)G_1 f(x_t)\}\, dt\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty} E_x\left(\int_{\frac{k}{n}}^{\infty} e^{-\alpha(t-\frac{k}{n})}\} f(x_t)+(\alpha-1)G_1 f(x_t)\}dt ;\ E_{n,k}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty} E_x\left(E_{x\frac{k}{n}}\int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t}\{ f(x_t)+(\alpha-1)G_1 f(x_t)\}dt ;\ E_{n,k}\right)$$

$$= E_x\left(E_{x\sigma_n}\int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t}\{ f(x_t)+(\alpha-1)\ G_1 f(x_t)\}dt\right)$$

$$= E_x(G_\alpha f(x_{\sigma_n})+(\alpha-1)G_\alpha G_1 f(x_{\sigma_n})) = E_x(G_1 f(x_{\sigma_n}))$$

上式の二番目の項と最後の項において，$n\to\infty$ とすれば，$G_1 f$ $C(S)$ に注意すれば

$$E_x\left(\int_{\sigma}^{\infty} e^{-\alpha(t-\sigma)}\{f(x_t)+(\alpha-1)G_1 f(x_t)\}\alpha t\right)=E_x(G_1 f(x_\sigma))$$

左辺を再び変数変換すれば

$$(1.17)\quad E_x(G_1 f(x_\sigma))=E_x\left(\int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t}\{f(x_{t+\sigma})+(\alpha-1)G_1 f(x_{t+\sigma})\}dt\right.$$

α，x を固定すれば上式の両辺は $f\in \mathbb{B}_0(S)$ の非負，連続線型汎函数とみなせるから（1.17）は実はすべての $f\in \mathbb{B}(S)$ に対して成立する（定理 1.1），（1.17） で f の代りに $G_\alpha f$ を代入すれば

$$E_x(G_1 G_\alpha f(x_\sigma))=E_x\left(\int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t}\{G_\alpha f(x_{t+\sigma})+(\alpha-1)G_1 G_\alpha f(x_{t+\sigma})\}dt\right)$$

即ち

$$E_x(G_\alpha G_1 f(x_\sigma))=E_x\left(\int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t} G_1 f(x_{t+\sigma})dt\right)$$

したがつてすべての $f\in \mathbb{R}(S)$ に対して

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

$$(1.18)\quad E_x(G_\alpha f(x_\sigma)) = E_x\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t} f(x_{t+\sigma})dt\right)$$

$f \in \mathbb{C}(S)$ とする。 (1.18) で f の代りに $\beta G_\beta f$ を代入して $\beta \to \infty$ とすれば，
$g = \lim_{\beta \to \infty} \beta G_\beta f$ とおいて

$$(1.19)\quad E_x(G_\alpha f(x_\sigma)) = E_x\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t} g(x_{t+\sigma})dt\right)$$

$$= E_x\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t} f(x_{t+\sigma})\, \chi_{S-S_b}(x_{t+\sigma})\, dt\right)$$

$$+ E_x\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t} g(x_{t+\sigma})\, \chi_{S_b}(x_{t+\sigma})dt\right)$$

ところがLemme 1.4 により $E_x\left(\int_0 \chi_{S_b}(x_t)dt\right) = \int_0 P_t(x, S_b)dt = 0$ だから

$$\left| E_x\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t} \chi_{S_b}(x_{t+\sigma})dt\right)\right|$$

$$\leqq E_x\left(\int_\sigma^\infty e^{-\alpha(t-\sigma)} \chi_{S_b}(x_t)dt\right) \leqq E_x\left(\int_0^\infty \chi_{S_b}(x_t)dt\right) = 0$$

したがつて (1.18) より

$$E_x(G_\alpha f(x_\sigma)) = E_x\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t} f(x_{t+\sigma})dt\right)$$

Laplace 変換の一意性より

$$(1.20)\quad E_x(E_{x_\sigma}(f(x_t))) = E_x(f(x_{t+\sigma}))$$

がほとんどすべての t で成立する。ところが $f \in \mathbb{C}(S)$ だから，(1.20) の両辺は t に関して右連続だから，実はすべての t で (1.20) が成立する。

(X・5) の証明。 $f \in \mathbb{B}(S)$ ， $B \in \mathbb{B}_{\sigma_{n+}}$， $m > n$ のとき，強Markov 性より

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

$$E_x(G_\alpha f(x_{\sigma_m}) ; B) = E_x(e^{-\alpha\sigma_m}\int_{\sigma_m}^{\infty} e^{-\alpha t} f(x_t)dt)$$

$f \in \mathbb{B}_\sigma(S)$ のとき，$g=f+(\alpha-1)G_1 f$ とおけば $G_\alpha g \in \mathbb{C}(S)$

だから $m\to\infty$ とすると

$$E_x(G_\alpha f(x_{\sigma-} ;B) = E_x\left(e^{-\alpha\sigma}\int_{\sigma}^{\infty} e^{-\alpha t} f(x_t)\,dt ; B\right)$$

$$= E_x(G_\alpha f(x\sigma) ; B)$$

即ち

$$E_x(G_1 f(x_{\sigma-}) ; B) = E_x(G_1 f(x_\sigma) ; B)$$

$\mathbb{B}_0(S)$ が初等函数族であることに注意すれば，上式はすべての $f\in \mathbb{B}(S)$ について成立することがわかる。$x_{\sigma-}\notin S_b$ のとき $\lim_{\alpha\to\infty} \alpha G_\alpha f = f$ $(f\in \mathbb{C}(S))$ だから

(1.2 1) $E_x(f(x_\sigma);B) = E_x(f(x_{\sigma-});B)$, $\forall f\in \mathbb{C}(S)$, $\forall B\in \bigcup_{n=1}^{\infty} B_{n+}$

(1.2 1) 式より，近藤[18，定理 3.4] と同様にして（X・5） が得られる。

（X・6）を証明する前に，整列集合，順序数，超限帰納法等について簡単にのべる。くわしくは，中山〔26〕を参照。Aを全順序集合でその順序を≦で表わすことにする。Aの任意の部分集合が極小元をもつとき，即ち $\exists\xi\in B$ で $\forall\eta\in B$ は $\eta\geqq\xi$ をみたすとき，Aを整列集合という。言いかえれば，任意の$\xi\in A$ に対してその直後の元（< を大小関係とみれば，ξの次に大きな元）が存在することと同値である。しかし一般には $\forall\xi\in A$ に対して，その直前の元が存在するかどうかわからない。二つの整列集合A，Bに対し一対一写像 $\varphi : A\to B$ が $x\geqq y \Longrightarrow \varphi(x)\geqq\varphi(y)$ をみたすときAとBは同型という。整列集合Aの一元aに対し $\{x\in A, x<a\}$ をaによるAの切片という。任意に二つの軽列集合A，B が

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

あればAはBに同型か，AはBのある切片に同型か，又はBがAの切片に同型かそのいずれかである。二つの整列集合が同型という関係は同値関係だから，類別出来る。各類に属する整列集合は同じ順序数をもつという。二つの整列集合A，Bがあり，AがBの切片に同型のとき，$\alpha \geqq \beta$ で表わすと，順序数の集合は整列集合である。ある順序数ξに対し，その直後の順序数を $\xi+1$で表わす。順序数ξに対し直前の順序数が存在するときξを孤立数，存在しないときξを極限数という。順序数ξに対応する整列集合の濃度が有限個のとき，これを才一級の順序数，可算無限のとき才二級の順序数という。順序数に関して次の定理がある。

定理1.6 （超限帰納法） ある順序数αより小なる各順序数ξに対し命題P_ξ が与えられ，$\eta<\xi$なるP_η のすべてが成立すれば，P_ξ も成立するということが言えたとする。そうすれば実はすべてのP_ξ $(\xi<a)$ が成立する。

(X・6) の証明 1° FをS$_b$ に含まれる任意の閉集合とし，$\{G_n\}$を $G_n \supset G_{n+1} \supset \cdots$，$\bigcap G_n = F$ をみたす開集合とする。

$$\sigma_{G_n}(w) = \inf\{t>0;\ x_t \in G_n\}$$

とおけば σ_{G_n} は Markov time である。したがつて $\sigma_1 = \lim_{n\to\infty} \sigma_{G_n}$ も Markov time である。

2° $\forall x \in S$ で$P_x(\sigma_1>0)=1$ である。実際 $x \notin S_b$ のとき，$\rho(x,F)>0$ だから，path の右連続性及び $x_0(w)=x$ であることから

$P_x(\sigma_1>0)=1$ $x \in S_b$ のとき

$$P_x(\sigma_1>0) = \int_{S-S_b} \mu(x,dy)P_y(\sigma_1>0)>0$$

Blumeuthal の0－1法測より $P_x(\sigma_1>0)=1$

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

3° 超限帰納法で Markov time の列σ_ξ を次の様に定義する。

$$\sigma_0(w) = 0$$

ξを才二級の極限数のとき $\sigma_\xi(w) = \sup\limits_{\eta<\xi} \sigma_\eta(w)$

ξが才二級の孤立数のとき，ξの直前の元を・$\xi-1$ とおいて

$$\sigma_{\xi-1}(w) = +\infty \Longrightarrow \sigma_\xi(w) = \infty$$

$$\sigma_{\xi-1}(w) < \infty \Longrightarrow \sigma_\xi(w) = \sigma_{\xi-1}(w) + \sigma_1(w^+_{\sigma_{\xi-1}})$$

実際これらが Markov time であることは，$\forall\eta<\xi$ に対する $\sigma_\eta(w)$ が Markov time であることを仮定すれば，$\sigma_\xi(w)$ が Markov time であることは ただちにわかる。したがつて定理1.6によりすべての才二級順序数ξに対しσ_ξ が Markov time である。

4° $E_x(e^{-\sigma_\xi}) = E_n(e^{-\sigma_{\xi+1}})$ ならば $P_x(\sigma_\xi=\infty)=1$ である。なぜなら2° より $P_x(\sigma_1=0)=0$ だから

$$P_x(\sigma_\xi < \infty,\ \sigma_\xi = \sigma_{\xi+1})$$

$$= E_x(P_{x_{\sigma_\xi}}(\sigma_1=0)\ ;\ \sigma_\xi<\infty) = 0$$ したがつて $P_x(\sigma_\xi=\infty)=1$

5° 任意に一点xを固定する才二級順序数γで$E_x(e^{-\sigma_\gamma})=0$ となるものが存在する。なぜならもし存在しないとすれば，任意の才二級順序数ξに対し $E_x(e^{-\sigma_\xi}) > E_x(e^{-\sigma_{\xi+1}})$ したがつて $E_x(e^{-\sigma_\xi})$ と $E_x(e^{-\sigma_{\xi+1}})$ の間に区間が存在する。ところが才二級順序数の全体は非可算個だからこれは矛盾である。

6° 任意の才二級順序数ξに対し

(1.22) $P_x(0 \leqq \forall t < \sigma_\xi$ で $x_t \notin F) = 1$

もし $\forall\eta<\xi$ に対し (1.22) が成立したとする。

ξが孤立数のとき

(1.23) $P_x(0 < \forall t < \sigma_\xi,\ x_t \notin F)$

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

$$=P_x(0<\forall t<\sigma_{\xi-1},\ x_t\bar{\in}F,\ 0\leqq\forall t<\sigma_1(w^+_{\sigma_{\xi-1}}),\ x_t(w^+_{\sigma_{\xi-1}})\bar{\in}F)$$

$$=E_x(P_{x_{\sigma_{\xi-1}}}(0\leqq\forall t<\sigma_1,\ x_t\bar{\in}F)\ ;\ 0<\forall t<\sigma_{\xi-1},\ x_t\bar{\in}F)$$

ところが σ_1 の定義より

$$P_x(0\leqq\forall t<\sigma_1,\ x_t\bar{\in}F)=1$$

だから（1.23）の最後の項は1に等しい。次にξが極限数の場合，$\{\eta<\xi\}$は可算個だから

$$P_x(0<\forall t<\sigma_\xi,\ x_t\bar{\in}F)=P_x(\bigcap_{\eta<\xi}(0\leqq\forall t<\sigma_\eta,\ x_t\bar{\in}F))$$

$$=\bigcap_{\eta<\xi}P_x(0\leqq\forall t<\sigma_\eta,\ x_t\bar{\in}F)=1$$

7° （1.22）においてξを5° のγでおきかえれば

$$P_x(0\leqq\forall t<\sigma_\gamma=\infty,\ x_t\bar{\in}F)=1 \qquad \text{(終)}$$

注意 (1) （X・6）の証明は，近藤〔18，定理2.2〕の証明と類似の考え方である。Ray〔27〕では，先ず $\sigma_F=\inf\{t\geqq0,\ x_t\in F\}$ $(F\subset S_b$, closed$)$ が Markov time であることを証明し，それから $P_x(\sigma_F=\infty)=1$ であることを証明している。しかし，（X・5）でみた様に S_b では quasi- 左連続性がくずれるので，近藤〔18，定理4.3〕の方法で，σ_F が Markov time であることを証明することは出来ない。Ray の元の証明も簡単ではない。

(2) S_b が F_σ一集合のときは（X・6）はもう少し精密に

(X・6′) $P_x(0\leqq\forall t<\infty,\ x_t\bar{\in}S_b)=1$

となる。Ray はこの（X・6′）を証明している。

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

G_α が $\mathbb{C}(S)$ を $\mathbb{C}(S)$ に移すとき，

$$S_g = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{\alpha>0} \{g(x) \geqq \alpha G_\alpha g(x) + \frac{1}{n}\} \quad (g \in \mathbb{C}_1^*(S))$$

だから S_g は F_σ 一集合，したがつて $S_b = \bigcup_{g \in \mathbb{C}_1^*} S_g$

もF_σ一集合である。故に（X・6′）が成立する。

もつと一般に $G_\alpha f(x)$ $(f \in \mathbb{C}(S))$ が x に関し下半連続の場合例えば初等函数族 $\mathbb{B}_0(S)$ が $\forall f \in \mathbb{C}(S)$ に対し $f_n \uparrow f$ をみたす $f_n \in \mathbb{C}(S)$ を含む場合は，同様の議論で S_b は F_σ 一集合となる。

定理 1.5の系　BをS－S_b に含まれる任意のBorel set とすれば，Bへの hitting time

$$\sigma_B(w) = \inf \{t \geqq 0, \ x_t \in B\}$$

はMarkov time である。特にS_b が F_σ 一集合のときはすべてのBorel set B(⊂S) に対し σ_B は Markov time となる。

証明　S－S_b では quasi－左連続性があるから近藤〔18，p26〕と同様にしてこの系の前半が言える。S_b が F_σ 一集合のときは上の注意により $\sigma_B = \sigma_{B-S_b}$ となるからやはり σ_B(B⊂S)も Markov time となる。

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

第二章 Markov 過程の構成 (II)。Compact 化による方法

この章の§1では，compact でない空間S上に resolveut が与えられた場合，適当な一様位相をSに導入してcompact 化し，才一章の理論にもちこんでMarkov 過程を作る問題を考える。§2では完全最大値の原理をみたす作用系が，compact でない空間S上に与えられたとき，§1と同様の考えでSをcompact 化し，その上にMarkov 過程を作る問題を考える。これはいわゆる Hunt の表現定理（G・A・ Hunt [11]，近藤 [18] ）の拡張である。

§1 Resolveut が与えられた場合

1. 可測空間の場合 Sを可測空間 $\mathbb{B}(S)$ をその上の有界可測函数の全体 $\widetilde{\mathbb{B}(S)}$ は $\mathbb{B}(S)$ に含まれる Banach 空間，$\mathbb{B}_0(S)$ は $\widetilde{\mathbb{B}(S)}$ に含まれる初等函数族で $\overline{\mathbb{B}_0(S)} = \mathbb{B}(S)$ 更に$\mathbb{B}_0(S)$ は次の (E・3) をみたすとする。

(E・3) $\forall f \in \widetilde{\mathbb{B}(S)}^{+}$ に対し $f_n \uparrow f$ なる $f_n \in \mathbb{B}_0(S)$ が存在する。

$\widetilde{\mathbb{B}(S)}$ を $\widetilde{\mathbb{B}(S)}$ に移す線型作用素 G_α が $(G_\alpha.1)$, $(G_\alpha.2)$, $(G_\alpha.3)$ の他に

$(G_\alpha.4)$ $f_n \downarrow 0$ のとき $G_\alpha f_n \downarrow 0$

をみたすときresolveut という，$\widetilde{\mathbb{B}(S)}$ の G_α による値域を $\mathbb{R}(S)$ と書く。才一章の条件A，Bに対応して，次の条件B' を仮定する。

条件B' 次の様な可算個の函数族 $\mathbb{B}_1(S)$ $(\subseteq \widetilde{\mathbb{B}(S)})$ が存在する。

(B・1) $\mathbb{B}_1(S)$ はSの二点を分離する。即ち $\forall x, y\ (x \neq y)$ に対し$f(x) \neq f(y)$ をみたす$f \in \mathbb{B}_1(S)$ が存在する。

(B・2) $\alpha G_{\alpha+1} f \leqq f$

(B・3) 任意の$f \in G_1(\mathbb{B}_0(S))$ は $\mathbb{B}_1(S)$ の有限個の一次結合で一様近似出来る。

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

Sに $\forall f \in \mathbb{B}_1(S)$ を一様連続にする最弱の一様位相を導入する。例えば

$$(2.1)\quad \rho(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{|f_n(x)-f_n(y)|}{1+|f_n(x)-f_n(y)|},\ \{f_n\}=\mathbb{B}_1(S)$$

によりSに距離を導入すればよい。ρは一般に↓距離であるが，(B・1)により $\rho(x,y)=0$ ならば $x=y$ となる。又$\mathbb{B}_1(S)$ の並べ方によつてρは変るが，一様位相は変らない。

ρによるSの完備化を$\tilde{S}$とすれば，$\tilde{S}$は可分なcompact Hausdoff 空間となる。$f\in\mathbb{B}_1(S)$ は，S上で一様連続だから，$\tilde{S}$上に一意的な連続拡大$\tilde{f}$をもつ。$f\in\mathbb{B}_1(S)$ に対応する$\tilde{f}$の全体を$\mathbb{C}_1(S)$ で表わす。(B・3)により $G_1f(f\in\mathbb{B}_0(S))$ も$\tilde{S}$上に一意的な連続拡大 $\widetilde{G_1f}$ をもつ。我々は更に次の条件を仮定する。

$(G_{\alpha}.4')$ (1) $f_n\in\mathbb{B}_0(S)$ が $f_n\downarrow 0$ のとき $\widetilde{G_1f_n}\downarrow 0$

注意 $(G_{\alpha}.4')$ は，完備化した後の仮定だから望ましいものではない。しかしSが(才二可算公理をみたす)局所compact 空間の場合は定理1.1の系2により$(G_{\alpha}.4')$ は必然的にみたされる。このことはこの節の $\boxed{2}$ でくわしくのべる。

(2) $\mathbb{B}_0(S)$ の取り方はいろいろあり得るから，$\mathbb{B}_1(S)$ の取り方も色々ある。$\mathbb{B}_0(S)=\widetilde{\mathbb{B}(S)}=\mathbb{B}(S)$ のときがRay の場合であり，その場合は$(G_{\alpha}.4')$ は必然的にみたされる。なぜなら $\forall f\in\mathbb{C}(\tilde{S})=\{\tilde{S}$上の連続函数の全体$\}$ のSへの制限f_s をとれば $\widetilde{G_1f}(x)\equiv\widetilde{G_1f_s}$ は $x\in\tilde{S}$ を固定すれば $\mathbb{C}(\tilde{S})$ 上の線型汎函数とみなせるからRiesz の定理(定理1.1の系1)に帰着される。この様に$\mathbb{B}_0(S)=\mathbb{B}(S)$ とすれば，$(G_{\alpha}.4')$ を仮定しなくてもよいわけだが，$\mathbb{B}_0(S)$ が集合として大きくなれば，$\mathbb{B}_1(S)$ の元も多くなりしたがつて条件B′がみたしにくくなるわけである。才一章の初めにのべた様に，例えばSが可算集合のときでも $\mathbb{B}_0(S)=\mathbb{B}(S)$ とすれば，条件B′をみたす$\mathbb{B}_1(S)$ は一般には存在しない。なお才四章以後でのべる様にSが可算集合の場合(Markov chain の場合)は $\mathbb{B}_1(S)$ として例えば$\{G_1(x,y)=G_1\chi_y(x)$:

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

$y\in S\}$ をとればよい。ここに $\chi_y(\cdot)$ は一点yの特性函数である。

$(G_\alpha.4')$ より任意の$x\in\tilde{S}$を固定すれば $\widetilde{G_1 f}(x)$ は $\mathbb{B}_0(S)$ の上に定義された非負，連続，有界線型汎函数だからS上の測度 $\tilde{G}_1(x,\circ)$ が一意に定まり $\forall f\in B_0(S)$ に対し

$$(2.2)\qquad \widetilde{G_1 f}(x) = \int_S \tilde{G}_1(x,dy)f(y)$$

$\forall f\in B(S)$ に対し，(2.2) の右辺により$\widetilde{G_1 f}(x)$ を定義する。 $\alpha>0$，$f\in\mathbb{B}(S)$ のとき

$$(2.3)\qquad \widetilde{G_\alpha f}(x) = \tilde{G}_1\{f+(1-\alpha)G_\alpha f\}(x)$$

で $\tilde{G}_\alpha$ を定義する。

$\tilde{S}$ 上の位相的Borel 集合体に関して有界可測函数の全体を$\mathbb{B}(\tilde{S})$ で表わす。$f\in\mathbb{B}(\tilde{S})$ のSへのrestriction f_s は $\mathbb{B}(S)$ に属するから $\tilde{G}_\alpha f\equiv \tilde{G}_\alpha f_s$ により$\mathbb{B}(\tilde{S})$ に対して$\tilde{G}_\alpha$ を定義する。

Lemma 2.1 G_α は $B(\tilde{S})$ を $B(\tilde{S})$ に移すresolveut である。

• 証明 数段階に別けて考える。

1° 先ず$f\in\mathbb{B}(S)$ のとき $\tilde{G}_1 f\in\mathbb{B}(\tilde{S})$ をいう。

$\mathbb{B}'(S)=\{f;\ f\in\mathbb{B}(S)$ かつ $\tilde{G}_1 f\in\mathbb{B}(\tilde{S})\}$ とおく。明らかに$\mathbb{B}_0(S)\subset\mathbb{B}'(S)$ 又$\mathbb{B}'(S)$ は有界完備族である。したがつて$\mathbb{B}'(S)=\mathbb{B}(S)$・ $f\in\mathbb{B}(\tilde{S})$ のとき $f_S\in\mathbb{B}(S)$ だから $\tilde{G}_1 f\in\mathbb{B}(\tilde{S})$ 次に $\tilde{G}_\alpha$ の場合は (2.3) より$\mathbb{B}(\tilde{S})\to\mathbb{B}(\tilde{S})$ である。

2° $\tilde{G}_\alpha$ の非負性 $f\in\mathbb{B}_0^+(S)$ とする。(E・3) より $g_n\uparrow G_\alpha f$ をみたす $g_n\in B_0(S)$ が存在する。 $\alpha>1$ ならば $f+(1-\alpha)g_n\downarrow f+(1-\alpha)G_\alpha f$・ $\tilde{G}_1(f+(1-\alpha)g_n)\in\mathbb{C}(\tilde{S})$ だから $\tilde{G}_\alpha f=\lim_{n\to\infty}\tilde{G}_1(f+(1-\alpha)g_n)$ は上半連続 $x\in S$では$G_\alpha f\geq 0$だから $\tilde{G}_\alpha f(x)\geq 0$ $(\forall x\in\tilde{S})$ $\alpha<1$ のときは (2.3)

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

より $\tilde{G}_\alpha f \geqq \tilde{G}_1 f \ (f \geqq 0)$ だから $\tilde{G}_\alpha f \geqq 0$

3° $\|\tilde{G}_\alpha\| \leqq \dfrac{1}{\alpha}$ (2.3) において $f=1$ とおけば

$$\tilde{G}_\alpha 1(x) = \tilde{G}_1(1+(1-\alpha)G_\alpha 1$$

ところが (E・2) により $\exists f_n \in \mathbb{B}_0(S)$ $f_n \uparrow 1+(1-\alpha)G_\alpha 1 \geq 0$

だから $G_\alpha 1(x)$は$x \in \tilde{S}$で下半連続

4° Resolveut 方程式

$$(\alpha-\beta)\tilde{G}_\alpha \tilde{G}_\beta f = (\alpha-\beta)\tilde{G}_\alpha G_\beta f$$

$$= \tilde{G}_1\{(\alpha-\beta)[G_\beta f + (1-\alpha)G_\alpha G_\beta f]\} = \tilde{G}_1\{(1-\beta)G_\beta f - (1-\alpha)G_\alpha f\}$$

$$= \tilde{G}_1\{f + (1-\beta)G_\beta f\} - \tilde{G}_1\{f + (1-\alpha)G_\alpha f\}$$

$$= \tilde{G}_\beta f - \tilde{G}_\alpha f$$

<u>Lemmer 2.2</u> $\mathbb{C}_1(\tilde{S})$ は才一章の条件Bをみたす。

証明 (C・1) はρ及び$\tilde{S}$の定義より明らかだから (C・2) を証明する。$\tilde{G}_{\alpha+1}$ の定義より

$$\tilde{G}_{\alpha+1} f = \tilde{G}_1\{f - \alpha G_{\alpha+1} f\}$$

$x \in S$では$f(x) - \alpha G_{\alpha+1} f(x) \geqq 0$・ したがつて $g_n \uparrow f - \alpha G_{\alpha+1} f$ となる $g_n \in \mathbb{B}_0(S)$ が存在する((E・3)より) $\tilde{G}_1 g_n \in \mathbb{C}(S)$ だから $\tilde{G}_{\alpha+1} f(x) = \lim_{n\to\infty} \tilde{G}_1 g_n(x)$ はxに関して下半連続 $x \in S$ で $\alpha \tilde{G}_{\alpha+1} f \leqq f$ であることと,$\tilde{G}_{\alpha+1} f$ が下半連続であることからすべての$x \in \tilde{S}$で$\alpha \tilde{G}_{\alpha+1} f(x) \leqq f(x)$

Lemma 2.1及び2.2により,才一章の結果がすべて成りたつ。即ち $\tilde{G}_\alpha$ を resolveut とする様な$\tilde{S}$上のcanonical Markov 過程 $X=(W, B, P_x ; x \in \tilde{S} \cup \partial)$が存

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

在する。ここに∂は $\alpha\widetilde{G}_\alpha 1 \neq 1$ の場合につけ加えられる孤立点（death point である。）

$\widetilde{S}_R = \{x \in \widetilde{S};\ \widetilde{G}_1(x, S) = 1\}$ とおけば $\widetilde{S}_R$ は可測集合であるが $\widetilde{S}_R$ に関して次の定理が成りたつ。

定理 2.1　χ を canonical な Markov 過程とすると

$$(X \cdot 7) \qquad P_x(0 < \forall t < \infty,\ x_t \in \widetilde{S}_R) = 1 \qquad x \in \widetilde{S}_R$$

が成りたつ。即ち $\widetilde{S}_R$ 上に process X を制限出来る。

証明　$\widetilde{G}_1(\eta, S)$ はηに関し下半連続だから

$$F_\varepsilon = \{\eta;\ \widetilde{G}_1(\eta, S) \leqq 1 - \varepsilon\}$$

とおけばF_ε は閉集合かつ $\bigcup_{\varepsilon > 0} F_\varepsilon = \widetilde{S}_R^{\,c}$ したがつて $P_x(\sigma_{F_\varepsilon} = \infty) = 1$を証明すればよい。$\{G_n\}$を$F_\varepsilon$ を含むopen setで $G_n \downarrow F_\varepsilon (n \to \infty)$とする。$\sigma_{G_n}$ は Markov time だから，強Markov 性により$x \in \widetilde{S}_R$ のとき

$$E_x(e^{-\sigma_{G_n}}) = E_x\left(\int_{\sigma_{G_n}}^{\infty} e^{-t} dt\right)$$

$$= E_x\left(\int_{\sigma_{G_n}}^{\infty} e^{-t} \chi_S(x_t) dt\right) = E_x(e^{-\sigma_{G_n}} G_1(x_{\sigma_{G_n}}, S)),$$

$\sigma = \lim_{n \to \infty} \sigma_{G_n}$, $x_{\sigma-} = \lim_{n \to \infty} x_{G_n}$ とおけば，$x_{\sigma-} \in F$ だから

$$E_x(e^{-\sigma}) = E_x(e^{-\sigma} \widetilde{G}_1(x_{\sigma-}, S))$$

$$\leqq (1 - \varepsilon) E_x(e^{-\sigma})$$

したがつて$E_x(e^{-\sigma}) = 0$，一般に$\sigma_{F_\varepsilon} \geqq \sigma$ だから $P_x(\sigma_{F_\varepsilon} = \infty) = 1$である。

注意　上の証明により，path は $\widetilde{S}_R^{\,c}$ の上にないばかりか，有限時間では $\widetilde{S}_R^{\,c}$ に近ずきすらしないことがわかる。

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

2 局所compact な空間の場合　1ではG_α にかなり複雑な条件をつけて，Markov 過程を作つたけれども，空間Sが才二可算公理をみたす局所compact な空間の場合はかなり一般な見やすい仮定の下でMarkov 過程が構成出来ることを示す。

Sを才二可算公理をみたす局所compact な空間，$\mathbb{C}(S)$ をその上の有界連続函数の全体とする。$\mathbb{B}(S)$ をSの位相的Borel 集合体に関し有界可測な函数の全体，$\mathbb{C}_0(S)$ をcompact な台をもつ連続函数の全体とする。S上のresolveut G_α は $(G_\alpha.1)$ ～ $(G_\alpha.3)$ の他に次の条件をみたすとする。

$(G_\alpha.5)$　G_α ; $\mathbb{C}(S) \to \mathbb{C}(S)$

$(G_\alpha.6)$; $\mathbb{R}(S) = \{\mathbb{C}(S)$ の G_α による値域$\}$はSの二点を分離する。

$\mathbb{D}_0(S)$ を $\mathbb{C}_0(S)$ の中でdense な可算個の集合族とする[1)]更に

$$\mathbb{C}_1(S) = \{G_1 \text{ による } \mathbb{D}_0^+(S) \text{ の値域}\}$$

とおく。

Lemma 2.3　$\mathbb{C}(S)$，$\mathbb{C}_0(S)$，$\mathbb{C}_1(S)$ はそれぞれ 1 の$\widetilde{\mathbb{B}(S)}$，$\mathbb{B}_0(S)$，$\mathbb{B}_1(S)$ の性質をもつ。

証明　$\mathbb{C}(S)$ が $\widetilde{\mathbb{B}(S)}$ に対応することは$(G_\alpha.5)$より明らか，$\mathbb{C}_0(S)$ の性質をもつことも明らかである。したがつて$\mathbb{C}_1(S)$ が条件Bをみたすことのみ証明すればよい。(B 1) $\forall f \in \mathbb{C}_1(S)$ で $f(x)=f(y)$ とする。$\mathbb{D}_0(S)$ は $\mathbb{C}_0(S)$ で dense だから $\forall g \in \mathbb{C}_0(S)$ に対し$G_1 g(x) = G_1 g(y)$　次に$g \in \mathbb{C}^+(S)$ のとき，$g_n(\in \mathbb{C}_0(S))$ を$g_n \uparrow g$ をみたす函数とすれば $G_1 g_n(x) = G_1 g_n(y)$ だから $G_1 g(x) = G_1 g(y)$ したがつてすべての $f \in \mathbb{R}(S)$ で $f(x)=f(y)$，$(G_\alpha.6)$ により $x=y$

---

1)　$C_0(S)$ の一様ノルムによるclosure $\overline{\mathbb{C}_0(S)}$ は，Sを一点compact 化した才二可算公理をみたす空間 $S \cup \{\infty\}$ の連続函数で $f(\infty)=0$ をみたす函数族とみなせる。したがつて $\overline{\mathbb{C}_0(S)}$ は separable 即ち dense な可算個の集合族 $D_0(S)$ が存在する。更に $D_0(S)$ としてcompact carıer をもつものにとれる。

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

(B・2) $f=G_1g(g\in D_0^+(S))$ は resolvent 方程式より

$$\alpha G_{\alpha+1}f=\alpha G_{\alpha+1}G_1g = G_1g - G_\alpha g \leqq G_1 g \in f$$

(B・3) は明らか

この lemma により，Sが第二可算公理をみたす局所 compact な空間，G_α が $(G_\alpha.1)$，$(G_\alpha.2)$，$(G_\alpha.3)$，$(G_\alpha.5)$，$(G_\alpha.6)$ をみたす resolvent のとき，[1] の議論にもちこんで，いつでも G_α に従う canonical な Markov 過程が作れる。

§2 完全最大値の原理をみたす作用素が与えられた場合

完全最大値の原理をみたすポテンシャル核が与えられた場合，それに対応するMarkov 過程が存在するかどうかということは，ポテンシャル論を確率論の立場から研究する場合に非常に重要な問題である。この問題に関して，G・A・ Hunt の重要な研究〔11〕がある。その結果を簡単にのべれば次の様である。

(Hunt〔11〕 又は近藤〔18〕) " Sを第二可算公理をみたす局所 compact な空間 $\mathbb{C}_0(S)$ をS上の compact な台をもつ連続函数の作る空間，$C_\infty(S)=\overline{C_0(S)}$ (一様ノルムによる closure) とする。$\mathbb{C}_0(S)$ 上に定義された線型作用素Gが

(i) $G(C_0(S))\subseteq C_\infty(S)$

(ii) $G(C_0(S))$ は $C_\infty(S)$ で dense

(iii) (完全最大値の原理) $f, g\in C_0^+(S)$， $a>0$ とする。

$Gf(x)\leqq Gg(x)+a$ が $f(x)>0$ なる x でなりたてばすべての $x\in S$ で成りたつ。

の三つの条件をみたすとき

$$(2.4)\qquad Gf(x)=E_x\left(\int_0^\infty f(x_t)\,dt\right)$$

をみたす Markov 過程Xが存在する。"

この§では，上にのべたHunt の表現定理の条件，特に (i)，(ii) をゆるめた場合にも

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

Ray の compact 化の方法を使つて（2.4）をみたす様な Markov 過程が作れることを示す。先ず $\boxed{1}$ では，可測空間の上に完全最大値をみたす，有界な作用系が与えられた場合を考え， $\boxed{2}$ では， $\boxed{1}$ の結果を使つて有界でない作用系の場合を考える。最後に $\boxed{3}$ では，もつと具体的に空間が才二可算公理をみたす局所 compact な空間の場合を考える。なお証明の基本的な道筋は Hunt と同じである。

$\boxed{1}$ 可測空間の場合（I） S を可測空間，$\mathbb{B}$（S）をS上の有界可測函数の全体，$\widetilde{\mathbb{B}(S)}$ は$\mathbb{B}$（S）の Banach subspace かつ初等函数族とする。

Gは$\widetilde{\mathbb{B}(S)}$を$\widetilde{\mathbb{B}(S)}$に移す線型作用素で，次の条件をみたすものとする。

(G・1)　(完全最大値の原理)　$f, g \in \widetilde{\mathbb{B}}^{+}(S)$，$a>0$ に対し $Gf(x)+a \geqq Gg(x)$ が $\{g(x)>0\}$ で成立すればすべての $x \in S$ で成立する。

(G・2)　$G(\widetilde{\mathbb{B}(S)})$ はSの二点を分離する。

(G・3)　$f_n \downarrow 0 \Longrightarrow Gf_n \downarrow 0$

(G・4)　Gは有界作用素　即ち　$\|G\| < \infty$

(G・5)　$G(\widetilde{\mathbb{B}}(S))$ は可分である。即ち $G(\widetilde{\mathbb{B}}(S))$ は可算個の一様ノルムで dense な集合をもつ。

$\mathbb{B}_1(S)$ は $G(\widetilde{\mathbb{B}}^{+}(S))$ の可算個の要素からなり，$\forall f \in G(\widetilde{\mathbb{B}}(S))$ は $\mathbb{B}_1(S)$ の有限個の一次結合で一様近似出来るものとする。$\mathbb{B}_1(S)$ を使つて，Sに（2.1）により距離を導入し，ρ によるSの完備化空間を $\widetilde{S}$ とする。 $\forall f \in \mathbb{B}_1(S)$ 及び Gf（$f \in \mathbb{B}(S)$）は$\widetilde{S}$に一意的な連続拡大 $\widetilde{f}$，$\widetilde{Gf}$ をもつ。$f \in \mathbb{B}_1(S)$ に対応する $\widetilde{f}$ の全体を $\mathbb{C}_1(\widetilde{S})$ で表わす。

前節の仮定（G_{α}.4'）と同様に

$(\widetilde{G \cdot 3})$　$f_n \downarrow 0$ のとき $\widetilde{G \cdot f_n} \downarrow 0$

を仮定する。$\widetilde{\mathbb{B}(S)}$ は初等函数族だから $\widetilde{G}(x, \cdot)$ が存在して

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

(2.4) $$\widetilde{G}f(x)=\int_S \widetilde{G}(x,dy)f(y) \quad \forall f\in \mathbb{B}(\widetilde{S})$$

$f\in \mathbb{B}$ (S) のとき (2.4) の右辺により$\widetilde{G}f$を定義する。更に$f\in \mathbb{B}$ $(\widetilde{S})=\{\widetilde{S}$上の位相的Borel field に関し有界可測な函数の全体$\}$に対しては，fのSへの制限f_S としたとき $\widetilde{G}f\equiv\widetilde{G}f_S$ で定義する。

注意 (1) $f, g\in \widetilde{\mathbb{B}}^+(S)$ ，$a>0$ のとき $\widetilde{G}$ は完全最大値の原理をみたす。即ち$\widetilde{G}f(x)+a\geqq\widetilde{G}g(x)$が$\{x; g(x)\neq 0\}$で成りたてばすべての$x\in\widetilde{S}$でなりたつ。このことは$\widetilde{G}g$及び$\widetilde{G}f$が連続であることからわかる。

(2) $\forall f\in\mathbb{B}$ (S) 又は$\mathbb{B}$ $(\widetilde{S})$ のとき$\widetilde{G}f\in\mathbb{B}$ $(\widetilde{S})$ となることはLemma 2.1 の証明 1° と同様にして示される。

<u>Lemma 2.4</u> $f\in\widetilde{\mathbb{B}}(S)$ ，$M=\max_{x\in\widetilde{S}}\widetilde{G}f(x)$ のとき，$f(x_n)\geqq 0$，$\lim_{n\to\infty} Gf(x_n)=M$をみたす点列$\{x_n\}\subset S$が存在する。

証明 $f^+=f\vee 0$， $f^-=(-f)\vee 0$， $[f]=\overline{\{x; f(x)\neq 0\}}$

$$\alpha=\max_{x\in[f^+]}\widetilde{G}f(x) \text{ とおくと}$$

$\widetilde{G}f+\widetilde{G}f^-=\widetilde{G}f^+$ だから $\alpha+\widetilde{G}f^-(x)\geqq\widetilde{G}f^+(x)$ が $x\in[f^+]$ で成立。したがつて完全最大値の原理 (注意) によりすべての$x\in\widetilde{S}$で

$$\alpha\geqq\widetilde{G}f^+(x)-\widetilde{G}f^-(x)=\widetilde{G}f(x)$$

が成立する。したがつて $\alpha=M$ である。

$0<\alpha<\|\widetilde{G}^{-1}\|$なる$\alpha$に対して

(2.5) $$\widetilde{G}_\alpha=\sum_{k=0}^{\infty}(-\alpha)^k\widetilde{G}^{k+1}$$

とおけば$\widetilde{G}_\alpha$ は $\widetilde{\mathbb{B}}(S)\to\mathbb{C}(\widetilde{S})$ の作用素である。実際

$$\|\widetilde{G}_\alpha\|\leqq\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^k\|\widetilde{G}\|^{k+1}\leqq\frac{\|G\|}{1-\alpha\|G\|}<\infty$$

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

だから $\sum_{R=0}^{n}(-\alpha)^R\tilde{G}^{R+1}$ は一様収束する $f\in\tilde{\mathbb{B}}(S)$ のとき $\tilde{G}^k f\in\mathbb{C}(\tilde{S})$ だから $\tilde{G}_\alpha f$ $\mathbb{C}(\tilde{S})$ である。

Lemma 2.5 $\tilde{G}_\alpha$ $(0<\alpha<\|\tilde{G}\|^{-1})$ は resolvent の性質をもつ。

証明 1° $(G_{\alpha}.1)$，非負性 $f\in\tilde{\mathbb{B}}(S)$ かつ $f\geqq 0$ とする。

$$\alpha\tilde{G}\tilde{G}_\alpha f=\alpha\tilde{G}\left[\sum_{k=0}^{\infty}(-\alpha)^k G^{k+1}f\right]$$

$$=-\sum_{k=1}^{\infty}(-\alpha)^k\tilde{G}^{k+1}f=-\sum_{k=0}^{\infty}(-\alpha)^k\tilde{G}^{k+1}f+\tilde{G}f$$

$$=\tilde{G}f-\tilde{G}_\alpha f$$

$g=f-\alpha\tilde{G}_\alpha f$ とおく。$\tilde{G}_\alpha f$ のSへの restriction は $\tilde{\mathbb{B}}(S)$ に属するから $g\in\tilde{\mathbb{B}}(S)$ とみてよい。今

$$\min_{x\in\tilde{S}}\tilde{G}_\alpha f=\min_{x\in S}\tilde{G}g=m<0$$

とすれば Lomma 2.4により $g(x_n)\leqq 0$，$\lim_{n\to\infty}\tilde{G}_1 g(x_n)=m<0$ をみたす点列 $\{x_n\}$ が存在する。

$$f=g+\alpha\tilde{G}_\alpha f=g+\alpha\tilde{G}g$$

だから

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}f(x_n)\leqq\overline{\lim_{n\to\infty}}g(x_n)+\lim_{n\to\infty}\alpha\tilde{G}g(x_n)\leqq\alpha m<0$$

即ち $f(x)<0$ となる $x\in S$ が存在することになり矛盾である。

2° $(G_{\alpha}.2)$ $f\in\tilde{\mathbb{B}}^+(S)$ に対して $\|\tilde{G}_\alpha f\|\leqq\frac{1}{\alpha}\|f\|$ を証明すればよい。

$g=f-\alpha\tilde{G}_\alpha f$ とおき $\{x_n\}$ を

$$\max_{x\in\tilde{S}}\tilde{G}g(x)=\lim_{n\to\infty}\tilde{G}g(x_n),\quad g(x_n)\geqq 0$$

をみたす点列とすれば

$$\alpha \| \widetilde{G}_\alpha f \| \leqq \overline{\lim_{n\to\infty}} f(x_n) - \underline{\lim_{n\to\infty}} g(x_n)$$

$$\leqq \overline{\lim_{n\to\infty}} f(x_n) \leqq \| f \|$$

3°(G_α.3) Resolvent 方程式，$0<\alpha, \beta<\|G\|^{-1}$のとき

$$\widetilde{G}_\alpha \widetilde{G}_\beta = \sum_{k=0}^{\infty} (-\alpha)^k \widetilde{G}^{k+1} \{ \sum_{k'=0}^{\infty} (-\beta)^{k'} \widetilde{G}^{k'+1} \}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-\alpha)^k G \{ \sum_{k'=0}^{\infty} (-\beta)^{k'} \widetilde{G}^{k+k'+1} \}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} [(-\alpha)^k \widetilde{G} \{ \sum_{k'=k}^{\infty} (-\beta)^{k'} \widetilde{G}^{k+1} \} (-\beta)^{-k}]$$

$$= \sum_{k'=0}^{\infty} (-\beta)^{-k} \widetilde{G}^{k+1} \widetilde{G} \{ \sum_{k=0}^{k'} (-\alpha)^k (-\beta)^{-k} \}$$

$$= \sum_{k'=0}^{\infty} (-\beta)^{k'} \widetilde{G}^{k+2} \frac{1-(-\alpha)^{k'+1}(-\beta)^{-k'-1}}{1-\frac{\alpha}{\beta}}$$

$$= \frac{1}{\alpha-\beta} \{ \sum_{k'=0}^{\infty} (-\beta)^{k'+1} \widetilde{G}^{k'+2} - \sum_{k'=0}^{\infty} (-\alpha)^{k'+1} \widetilde{G}^{k+2} \}$$

$$= \frac{1}{\alpha-\beta} [\widetilde{G}_\beta - \widetilde{G}_\alpha]$$

$0<\alpha<2^n \|\widetilde{G}\|^{-1}$ のとき帰納法的に

$$\widetilde{G}_\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} (\gamma=\alpha)^k \widetilde{G}_\gamma^{k+1} \qquad (0<\alpha<2\gamma)$$

と定義すれば

<u>Lomma 2.5'</u> $\widetilde{G}_\alpha (0<\alpha<\infty)$ は 一意的に定まり resolvent である。

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

証明 $0<\alpha, \beta<\|\widetilde{G}\|^{-1}2$ のとき証明する。一般の n の場合も同様である。

1° $(G_\alpha .3)$ Resolvent の方程式 $0<\gamma<\|\widetilde{G}\|^{-1}$ で，$\alpha, \beta \leqq 2\gamma$ なる γ をとれば

$$\widetilde{G}_\alpha \widetilde{G}_\beta = \sum_{k=0}^{\infty} (\gamma-\alpha)^k \widetilde{G}_\gamma^{k+1} \{ \sum_{k'=0}^{\infty} (\gamma-\beta)^{k'} \widetilde{G}_\gamma^{k'+1} \}$$

Lemma 2.5 の証明3° と同様の計算をすれば

$$\widetilde{G}_\alpha \widetilde{G}_\beta = \frac{1}{\alpha-\beta} \{ \widetilde{G}_\alpha - \widetilde{G}_\beta \}$$

したがって $(G_\alpha .3)$ をみたす。又この式より $\widetilde{G}_\alpha$ は γ の取り方によらないことがわかる。実際 α, β に関する Resolvent equation より

$$\widetilde{G}_\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} (\beta-\alpha)^k \widetilde{G}_\beta^{k+1}$$

となるからである。

2° Resolvent equation は α 又は β のどちらが0のとき $(G_0 = G$ とおいて$)$ も成りたつ。実際 $\gamma \widetilde{G}\widetilde{G}_\gamma = \widetilde{G} - \widetilde{G}_\gamma$ $(0<\gamma<\|\widetilde{G}\|^{-1})$ より

$$\widetilde{G} = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k \widetilde{G}_\gamma^{k+1}$$

だから例えば $\beta=0$ とおけば，1° と全く同様にして $\alpha \widetilde{G}_\alpha \widetilde{G} = \widetilde{G} - \widetilde{G}_\alpha$ が得られる。

3° 2° の結果を使えば，Lemma 2.5の証明と全く同様にして $(G_\alpha .1)$ 及び $(G_\alpha .2)$ が出る。

$\|\widetilde{G}\|<\infty$ だから $\alpha G_\alpha 1 \fallingdotseq 1$ である。(i) もし $\forall x \in \widetilde{S}$ に対し $f(x)>0$ なる $f \in \mathbb{C}_1(\widetilde{S})$ が存在するときには，$\widetilde{S}$ に孤立点 ∂ をつけ加える。(ii) もし $\forall f \in \mathbb{C}_1(\widetilde{S})$ に対し $f(x)=0$ となる $x \in \widetilde{S}$ がある場合は，その x と ∂ を同一視する。いずれの場合も $\widetilde{S} \vee \partial(\widetilde{S})$ 上に (1.2) によって resolvent $\widetilde{G}^*$ を作ればそれは $(G_\alpha .2')$ をみ

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

たす　$f\in \mathbb{C}_1(\widetilde{S})$ に対し

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq \partial \\ 0 & x = \partial \end{cases}$$

とおき，その様な f^* の全体を $\mathbb{C}_1(\widetilde{S}\cup\partial)$ とおく（（ii）の場合は $\mathbb{C}_1(\widetilde{S}\cup\partial) \doteqdot \mathbb{C}_1(\widetilde{S})$）

Lemma 2.6　$\mathbb{C}_1(\widetilde{S}\cup\partial)$ は才一章の条件Bをみたす。

証明　先ず $\mathbb{C}_1(\widetilde{S})$ が $\widetilde{S}$ の二点を分離することとは，（G・2）及び $B_1(S)$ の取り方より明らかである。（i）の場合は，$f^*(\partial)=0$　$(\forall f^*\in \mathbb{C}_1(\widetilde{S}\cup\partial))$ であり $\forall x\in\widetilde{S}$ に対しては $f^*(x)>0$ となる $f^*\in \mathbb{C}_1(\widetilde{S}\cup\partial)$ が存在するから $\mathbb{C}_1(\widetilde{S}\cup\partial)$ も $\widetilde{S}\cup\partial$ の二点を分離する。次に（C・2）の証明　$\forall f\in\mathbb{C}_1(\widetilde{S})$ は $f=\widetilde{G}h$　$(h\in \mathbb{B}^+(S))$ と書ける。Resolvent equation より

$$\alpha\widetilde{G}_{\alpha+1}f=\alpha\widetilde{G}_{\alpha+1}\widetilde{G}h=\widetilde{G}h-\widetilde{G}_{\alpha+1}h\leqq\widetilde{G}h=f$$

が $\widetilde{S}$ 上で成立する。$f(\partial)=0$ $(f\in\mathbb{C}_1(\widetilde{S}\cup\partial))$ だからその様な f に対しては $\widetilde{G}_\alpha f(x)=\widetilde{G}^*_\alpha f(x)$　$(x\in\widetilde{S})$　したがって $\widetilde{S}$ 上で　$\alpha\widetilde{G}^*_{\alpha+1}f\leqq f$，　$x=\partial$ では $f(\partial)=0$ より $\alpha\widetilde{G}^*_{\alpha+1}f(\partial)=0=f(\partial)$　したがってすべての $x\in\widetilde{S}\cup\partial$ で

$$\alpha\widetilde{G}^*_{\alpha+1}f(x)\leqq f(x)$$

が成立する。

故に才一章の結果より，$\widetilde{S}\cup\partial$ 上にcanonical な Markov 過程　$X=(W,\mathbb{B}, P_x;\ x\in\widetilde{S}\cup\partial)$ を作ることが出来て

$$Gf(x)=E_x\left(\int_0^\infty f(x_t)dt\right)\qquad x\in S$$

となる。ただしGは初めに与えられた完全最大値をみたす作用素である。

$\boxed{2}$　可測空間の場合（II）　Sを可測空間，$\mathbb{B}(S)$ をその上の有界可測函数の全体，$\widetilde{\mathbb{B}}(S)$ をそのlosed sub space で初等函数族とする。$\mathbb{B}_0(S)$ は $\mathbb{B}(S)$ に含まれる初等函数族で $\forall f\in\widetilde{\mathbb{B}}(S)$，　$\forall g\in\mathbb{B}_0(S)$ のとき　$fg\in\mathbb{B}_0(S)$ をみたすとする。更に $\mathbb{B}_0(S)$ は一様ノルムで可分な空間とする。この小節では $\mathbb{B}_0(S)$ を $\widetilde{\mathbb{B}}(S)$

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

に移す線型作用系Gが次の条件をみたすとき完全最大値の原理をみたす核という。

(G・1′) (完全最大値の原理) $f, g \in \mathbb{B}_0^+(S)$, $a>0$ に対し $Gf(x)+a>Gg(x)$ が $\{x; g(x)>0\}$ で成立すればすべての $x \in S$ で成立する。

(G・2′) $G_1(\mathbb{B}_0(S))$ はSの二点を分離する。

(G・3′) $f_n \downarrow 0 \Longrightarrow Gf_n \downarrow 0$

(G・4′) 次の条件をみたす函数族 $\{a_n(x)\}$ が存在する。

(i) $a_n(x) \in \mathbb{B}_0^+(S)$, かつ $a_n(x) \leqq a_{n+1}(x)$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \|G(a_n - a_{n-1})\| = \alpha < \infty$

(iii) $\lim_{n\to\infty} a_n(x) = a(x) \in \widetilde{\mathbb{B}(S)}$ かつ $\forall x \in S$ のとき

$$a(x)>0, \quad \frac{1}{a(x)} \wedge C \in \widetilde{\mathbb{B}(S)}, \quad \frac{a_n}{a} \in \mathbb{B}_0(S)$$

$f \in \widetilde{\mathbb{B}(S)}$, $m>n$ のとき

$$\|G(a_m f) - G(a_n f)\| \leqq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|G(a_k - a_{k-1})\| \|f\| < \infty$$

だから $\forall f \in \widetilde{\mathbb{B}}(S)$ に対しても

$$\hat{G} f = \lim_{n\to\infty} G a_n f$$

が存在して $\hat{G} f \in \widetilde{\mathbb{B}}(S)$ である。即ち $\hat{G}$ は $\widetilde{\mathbb{B}}(S)$ を $\widetilde{\mathbb{B}}(S)$ に移す線型作用系である。

$\mathbb{B}_0(S)$ が初等函数族であることと (G・3′) より $f \in \mathbb{B}_0(S)$ のとき

(2.5) $$Gf(x) = \int G(x, dy) f(y)$$

と書ける。したがつて

(2.6) $$\hat{G} f(x) = \int G(x, dy) a(y) f(y) = G a f(x) \qquad f \in \widetilde{\mathbb{B}}(S)$$

である。

<u>Lemma 2.7</u> $\hat{G}$ は (G・1) ～ (G・5) をみたす。

証明 (G・1) $f, g \in \widetilde{\mathbb{B}}^+(S)$, $C>0$ のとき

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

$$C+\hat{G}f(x) \geqq \hat{G}_g(x)$$

が $\{\overline{g(x)>0}\}=[g]$ で成立したとする。 $\forall \varepsilon>0$ に対し十分大きなnをとれば

$$C+\varepsilon+G(a_n)(x) \geqq G(a_n g)(x) \text{ か } x \in [g]$$

で成立する。($\because Ga_n f$ は $\hat{G}f$に一様収束) Gに対する完全最大値の原理から上式は $\forall x \in S$で成立する。 $n \to \infty$ とすれば

$$C+\varepsilon+\hat{G}f(x) \geqq Gf(x) \qquad \forall x \in S$$

εは任意だから $C+\hat{G}f \geqq \hat{G}f$ 次に (G・2) の証明 $\forall g \in \widetilde{\mathbb{B}}(S)$ に対して $\hat{G}g(x)=\hat{G}g(y)$ とする。$g \in \mathbb{B}_0(S)$ のとき

$$g_n = g \cdot \left(\frac{1}{a} \wedge n\right) < \mathbb{B}_0(S) \leqq \widetilde{\mathbb{B}(S)}$$

だから $\hat{G}g_n(x) = \hat{G}g_n(y)$ $n \to \infty$ とすれば $Gg(x)=Gg(y)$ したがつて $x=y$である。(G・3) は (2.6) の様に積分の形に書けることから明らか。(G・4) は (G・4′) (ii) の仮定より明らか。(G・5) の証明 $\hat{G}(\mathbb{B}_0(S))$が $\hat{G}(\widetilde{\mathbb{B}}(S))$ で dense であることを最初に示す $\forall f \in \widetilde{\mathbb{B}}(S)$ とする。

$$Ga_n f = Ga\left(\frac{a_n}{a}f\right) = \hat{G}\left(\frac{a_n}{a}f\right)$$

でありしかも $\frac{a_n}{a} \in \mathbb{B}_0(S)$ ($\because$ (G・5′))だから $\frac{a_n}{a}f \in \mathbb{B}_0(S)$, 一方

$$\|\hat{G}f - Ga_n f\| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

したがつて$\hat{G}(\mathbb{B}_0(S))$ は $\hat{G}(\widetilde{\mathbb{B}(S)})$ で dense である。$\mathbb{B}_0(S)$ は可分だから可算個の dense な集合$\mathbb{D}_0(S)$ があり $\forall f \in \mathbb{B}_0(S)$ に対し$\{f_n\} \in \mathbb{D}_0(S)$ で $\|f-f_n\| \to 0$ と出来る。したがつて

$$\|\hat{G}f - \hat{G}f_n\| \leqq \|\hat{G}\| \, \|f-f_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

これで (G・5) が証明出来た。

このLemma により, $\boxed{1}$ と同じ方法で ((G・4)を仮定すれば) $x \in S$では $\hat{G}$ を

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

0次のGreen 核とするcanonical な Markov 過程 $\widehat{X}=(W, B, \widehat{P}_x ; x \in \widetilde{S} \cup \partial)$ を作ることが出来る。$\widehat{X}$を適当なadditive functional で time change することにより，初めに与えられたGを0次のGreen 核とするMarkov 過程が得られるわけであるが，その前にadditive functional の定義と，time change に関するVolkonsky〔30〕の定理をのべる。

Xをcanonical な Markov 過程とする。(t, w) ―可測函数$S(t, w)$が次の条件をみたすとき，連続なadditive functional という。

(S・1)　$S(t, w)$ は $\mathbb{B}_t$ 可測

(S・2)　$S(t+s, w)=S(t, w)+S(s, w_t^+)$

(S・3)　$0 \leqq S(t, w) \leqq \infty \quad (t \geqq 0)$

(S・4)　$S(t, w)$ はtに関し連続

$S(t, w)$のinverse function $\tau_t(w)$を

$$\tau_t(w) = \sup\{s ; S(s, w) \leqq t\}$$

と定義し，

$$y_t \cdot (w) = x(\tau_t(w), w)$$

とおく。$Y=(W, B, P_x^* : x \in S)$ を

$$P_x^*(B) = P_x(y \cdot (w) \in B) \qquad B \in \mathbb{B}$$

と定義する。[1)]

<u>定理2.1</u> (Volkensky 〔30〕) 連続なadditive functional $S(t, w)$ がtに関し狭義の単調増加函数のときYは(X・1)～(X・6)をみたすMarkov 過程である。ただし S_b 及び分岐測度はXのそれと一致する。(証略)

$\widehat{X}$を$\widehat{G}$を0次の Green 核とするMarkov 過程とする。

$$b(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{a(x)} & x \in S \\ 1 & x \notin S \end{cases}$$

1) Yよりcanonical な version をとることが出来る。

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

とおき

$$S(t, w) = \int_0^t b(x_s)ds$$

とおく。

$b(x) \geqq \dfrac{1}{\|a\|} \wedge 1 = \varepsilon > 0$ だから $S(t, w)$ は明らかに狭義に増加する additive functional である。

$x_t(w) = \hat{x}(\tau_t(w), w)$, $\tau_t(w)$ は $S(t, w)$ の inverse function

とおき $X = (W, \mathbb{B}, P_x^* : x \in \widetilde{S \cup \partial})$ を

$$P_x^*(B) = \hat{P}_x(x_\cdot(w) \in B)$$

と定義すれば定理2.1によりXは (X・1) ～ (X・6) をみたすMarkov 過程となる。

しかも $f \in \mathbb{B}_0(S)$ のとき

$$E_x^*\left(\int_0^\infty f(x_t)dt\right) = \hat{E}_x\left(\int_0^\infty f(\hat{x}(\tau_t(w), w)dt\right)$$

$$= \hat{E}_x\left(\int_0^\infty f(x_t)\frac{1}{a(x_t)}dt\right) = \hat{G}\left(f\cdot\frac{1}{a}\right)(x) = Gf(x)$$

$\boxed{3}$ 局所 compact の場合

Sを才二可算公理をみたす局所compact な Hansdorff 空間，$\mathbb{C}(S)$ をその上の有界連続函数の全体，$\mathbb{C}_0(S)$ を compact な台をもつ連続函数の全体とする。

$\mathbb{C}(S)$ 及び $\mathbb{C}_0(S)$ はそれぞれ $\boxed{2}$ の $\widetilde{\mathbb{B}}(S)$，$\mathbb{B}_0(S)$ の性質をもつている。Gは $\mathbb{C}_0(S)$ を $\mathbb{C}(S)$ に移す線型作用素で（$\mathbb{C}(S) = \widetilde{\mathbb{B}}(S)$，$\mathbb{C}_0(S) = \mathbb{B}_0(S)$ とみて）(G・1′)，(G・2′) をみたすとする。$\mathbb{C}_0(S)$ は初等函数族だから (G・3′) は常にみたされているが，この場合 (G・4′) もみたされる。実際 $\{K_n ; n = 1 \cdot 2, \cdots\}$ を単調増加な compact set の列で $\bigcup_{n=1}^\infty K_n = S$・ $0 \leqq \rho_n(x) \leqq 1$ を

$$\rho_n(x) = 1 \qquad x \in K_n$$
$$= 0 \qquad x \in K_{n+1}^c$$

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

をみたす $\mathbb{C}_0(S)$ の函数とする。　$\alpha_n=\sup_{x\ S} G\ \ _n$, $\beta_n=\ \ _n\ \ 1$

$$a_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{\beta_k 2^k}\ ,\quad a(x)=\lim_{n\ \infty} a_n(x)$$

とおけばよい。したがつて 2 によつて次の定理が得られる。

定理 2.2　Sを才二可算公理をみたす局所compact な Hausdorff 空間，Gは $\mathbb{C}_0(S)$ を $\mathbb{C}(S)$ に移し，完全最大値の原理をみたし，かつ $G(\mathbb{C}_0(S))$ はSの二点を分離するとする。そのときSを dense に含む適当なcompact 距離空間 $\widetilde{S}$ 上に次の関係をみたす canonical な Markov 過程 $X=(W, \mathbb{B}, P_x;\ x\in\widetilde{S\cup\partial})$ (∂はdeath foint)を構成することが出来る。

$$Gf(x)=E_x\left(\int_0^\infty f(x_t)dt\right),\qquad f\in\mathbb{C}_0(S)\qquad x\in S$$

補足　§1 $\boxed{1}$ で $\widetilde{\mathbb{B}(S)}$ が初等函数族であることを仮定すれば分岐点の集合 $\widetilde{S}_b$ は F_σ-set である。実際，$f\in\mathbb{C}_1(\widetilde{S})$ のとき $\alpha G_{\alpha+1}f\leqq f$ だから，$g=f\wedge c$ とおけば

$$\alpha G_{\alpha+1}\,g\leqq f\wedge c\cdot\alpha G_{\alpha+1}1\leqq g$$

となる。したがつて $f_n\in\mathbb{B}_0^+(S)$ で $f_n\uparrow g-\alpha G_{\alpha+1}\,g$ となる $\{f_n\}$ が存在する。ところが定義により $\widetilde{G}_{\alpha+1}\,g=\widetilde{G}_1\{g-\alpha G_{\alpha+1}\,g\}$ だから $\widetilde{G}_{\alpha+1}\,g(x)\ (g\in\mathbb{C}_1^*(S))$ は下半連続，故に定理 1.6 の後の注意により $\widetilde{S}_b$ は $F\sigma$-set である。

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

第三章 Martin 表現定理

この章ではMarkov 過程が与えられたとき，前章と類似のcompact 化の方法によつて，(A) excessive measure を extreme excessive nreasne によつて表現する問題，及び(B) excessive function を extreme excessive function によつて表現する問題，を考える。Ray の compact 化によつて得られた点を Martin 境界と呼ぶことには疑問があるが，ここでいうMartin 表現とは，excessive function(measure) を extreme なものによる表現という位の意味である。

上記 (A) の問題は，dual な Martin 境界論に対応するものであるが，Ray の理論から言えばむしろ non-dual と考えた方が自然であるし，(B) よりも広いクラスのMarkov 過程について成りたつので先に考える。(§1及び§2)

§1 Excessive function によるproceso の変換

1 Excessive function と excessive measure

Sを才二可算公理をみたす局所compact な空間 B_S をその上の位相的Borel 集合体，$\mathbb{B}$ (S) をS上の B_S-可測な有界函数の全体，$\mathbb{C}$ (S) をS上の連続函数の全体とする。Sに孤立点∂をつけ加えた空間をS ∂とする。(上にのべた$\mathbb{C}$(S)，$\mathbb{C}_0$(S)，$\mathbb{B}$(S) 等は$f(\partial)=0$とおいてS ∂上の函数と考えることにする。)

Wを右連続かつ左極限をもつpath の空間，即ち$w\in$WはT=$[0, +\infty]$ よりS$\cup\partial$への写像で (W・1) $w_t=x_t(w)$ はtに関して右連続かつ左極限をもち，(W・2) もし $x_{t_0}(w)=\partial$ ならば $t\geqq t_0$ で $x_t(w)=\partial$ (W・3) $x_{+\infty}(w)=\partial$・stopped path, shifted path の定義は才一章§3と同じである。 BはWのcylinder set から生成されるBorel field とする。$(P_x: x\in S\cup\partial)$は (W, B) 上の確

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

率測度で $P_x(\cdot)$ は B_S－可測なものとする。このとき才一章§3の（1.14），（1.15）と同様にして B，B_σ 等が定義される。

$X=(W, \mathbb{B}, P_x : x \in S \cup \partial)$ が才一章定理1.5の（X・1）～（X・5）の性質をもち，かつ分岐点をもたないとき standard な Markov 過程と呼ぶ。

$$(3.1) \qquad H_t f(x) = E_x(f(x_t))$$

$$(3.2) \qquad G_\alpha f(x) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} H_t f(x)\, dt$$

とおけばよく知られているように H_t は（H・1）～（H・3）の他に

$$(\mathrm{H}\cdot 4') \qquad \lim_{t\downarrow 0} H_t f(x) = f(x), \quad f \in \mathbb{C}(S)$$

をみたし，G_α は（G_α.1）～（G_α.3）の他に

$$\lim_{\alpha\to\infty} \alpha G_\alpha f(x) = f(x), \qquad f \in \mathbb{C}(S)$$

をみたす。我々は G_α が更に（G_α.5）及び

$$(G_\alpha.7) \qquad f \in \mathbb{C}_0(S) \implies Gf \in \mathbb{C}(S)$$

をみたすことを仮定する。

注意　standard Markov 過程Xが次の（G_α.5′）及び（G_α.7′）

$$(G_\alpha.5') \qquad G_\alpha : \mathbb{B}(S) \to \mathbb{C}(S)$$

（G_α.7′）（i）　FをSの閉集合，$\sigma_F = \inf\{t \geq 0, x_t \in F\}$，$f$をF上の連続函数のとき $E_x(f(x_{\sigma_F}))$ は $x \in F^c$ で連続。

（ii）　すべての $x \in S$ は transient，即ち

xを含む任意のopen set U，V（$\overline{V} \subset U$）に対して

$$P_x(\sigma_{U^c}(w) + \sigma_V(w^+_{\sigma_{U^c}}) < \infty) < 1$$

をみたすとき（G_α.7）がみたされる。（T. Watanabe [3]）。

定義　（1）　S上の非負可測函数uが $H_t u \leq u$ 及び $\lim_{t\downarrow 0} H_t u = u$ をみたすとき excessive function という。

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

uがS上の非負可測函数fを用いて$u=\mathrm{G}f$と書けるときuをpotential という。

(2)　S上の局所有界な測度ξが $\forall E\in \mathbb{B}_S$ に対し

$$\xi H_t(E)=\int \xi(dx)P_t(x,E)$$

とおくとき

$$(3.3)\qquad \xi H_t(E)\leqq \xi(E)$$

をみたすならばexcessive measure という。S上の局所有界な測度ξが，S上の正測度μを用いて

$$(3.4)\qquad \xi(E)=\mu G(E)=\int_S \mu(dx)G(x,E)$$

と書けるとき potential measure と呼ぶ。

Excessive function 及び excessive measure の性質に関しては，Hunt [11]，近藤 [18] にくわしいので，後に必要な lemma を簡単に証明する。

<u>Lemma 3.1</u>　uをexcessive function とすれば potential $u_n=\mathrm{G}f_n$ の列でuは下から近似出来る。

<u>証明</u>　1°　uが$H_t u\longrightarrow 0$ $(t\to\infty)$ をみたすとき

$$f_n=n\ (u-H_{\frac{1}{n}}u)$$

とおくと

$$\begin{aligned} Gf_n(x)&=\lim_{\alpha\to\infty} n\int_0^{\alpha}\left(H_t u(x)-H_{t+\frac{1}{n}}u(x)\right)dt\\ &=n\int_0^{\frac{1}{n}} H_t u(x)dt-\lim_{\alpha\to\infty} n\int_{\alpha}^{\alpha+\frac{1}{n}} H_t u(x)\cdot dt\\ &=n\int_0^{\frac{1}{n}} H_t u(x)dt \xrightarrow[n\to\infty]{} u(x)\end{aligned}$$

2°　uが一般のexcessive function とする。$\{G_n\}$ を exhaustion,

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

$0 \leqq \varphi_n \leqq 1$ を $\varphi_n(x)=1$ $(x \in \overline{G_n})$; $=0$ $(x \in G^c_{n+1})$ なる連続函数とする。$u_n = G\varphi_n$ とおけば u_n は有界なpotential であり, $\lim_{n\to\infty} G\varphi_n(x) = G(x, S) = \infty$ をみたす。したがつて$v_n = u \wedge u_n$ とおけばv_n は excessive かつ$v_n \uparrow u$である。ところが

$$H_t v_n \leqq H_t u_n = \int_t^\infty H_s \varphi_n ds \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$$

だから 1° によりpotential $v_{n,k}$ $(k=1,2,\cdots)$ があつて $v_{n,k} \uparrow v_n$ $(k\to\infty)$ である。したがつて対角線論法により $w_n = v_{n,k} \uparrow u$ である。

Lemma 3.2 ξを excessive measure とすれば, $\forall f \in C_0^+(S)$ に対し

$$\mu_n Gf = \int \mu_n G(dx) f(x) \quad \uparrow \quad \xi f = \int \xi(dx) f(x)$$

をみたす様なpotential の列 $\mu_n G$ が存在する。

注意 一般に $\forall f \in \mathbb{C}_0(S)$ に対し $(\xi_n . f)$ (ξ, f) のとき $\xi_n \to \xi$ とかく。これを漠収束という。但し $(\xi, f) =$ $\xi(dx)$ $f(x)$。

証明 1o ξが$\xi H_t f \to 0$ $(t\to+\infty)$ $(\forall f \in \mathbb{C}_0(S))$ のとき前定理の証明 1° と同様にしてこの定理が言える。

2° ξが一般の場合: μをS上の有界測度で任意のopen set G に対して$\mu(G) > 0$をみたすとする。

$$\xi_n = n\mu G$$

と定義すれば, 任意の$f \in C_0^+(S)$ $(f \neq 0)$ に対して

$\xi_n f \longrightarrow \infty$, 今 $\xi'_n = \xi_n \wedge \xi$ とおけば ξ'_n はexcessive measure で $\xi'_n \uparrow \xi$ かつ $\xi'_n H_t f \leqq \xi_n H_t f \to 0$ $(t\to\infty)$

1°により各ξ'_nに対してはpotential の列 ξ_{nk} $(k=1,2,\cdots)$ が存在して $\xi_{n,k} \uparrow \xi'_n$ したがつて対角線論法を使つて lemma が証明される。

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

Lemma 3.3　uを非負下半連続函数とすると次の三条件は同値である。

(i)　uは excessive である。

(ii)　$H_t u \leqq u$

(iii)　$\alpha G_\alpha u \leqq u \quad (\forall \alpha > 0)$

証明　(i) ⟹ (ii) ⟹ (iii)　は明らかだから (iii) ⟹ (ii) ⟹ (i)　を示す。

$u_n = u \wedge n$　とおけば明らかに　$\alpha G_\alpha u_n \leqq u_n$.

$$F(\alpha) = \frac{1}{\alpha} u_n - G_\alpha u_n = \int_0^\infty e^{-\alpha t} [u_n - H_t u_n] \, dt$$

とおく。Resolvent equation より，$f \in \mathbb{C}(S)$

$$\frac{d^k}{d\alpha^k} G_\alpha f = k!(-1)^k G_\alpha^{k+1} f$$

だから

$$F^{(k)}(\alpha) = (-1)^k k! \, \alpha^{-(k+1)} u_n - k!(-1)^k G_\alpha^{k+1} u_n$$

したがつて

$$(-1)^k F^{(k)}(\alpha) = \frac{k!}{\alpha^{k+1}} \{u_n - \alpha^{k+1} G_\alpha^{k+1} u_n)\}$$

ところが　$u_n \geqq \alpha G_\alpha u_n \geqq \alpha^2 G_\alpha^2 u_n \geqq \cdots$ だから

$(-1)^k F^{(k)}(\alpha) \geqq 0$　即ち$F(\alpha)$は completely monotonic である。

したがつて　$u_n - H_t u_n$　はほとんどすべてのtで$\geqq 0$である。(Widder [36, p160])

ところがu_n は下半連続だから$H_t u_n$ はtに関して下半連続となる。したがつてすべてのtで

$u_n - H_t u_n \geqq 0$となる。$u_n \uparrow u$　だから　$u \geqq H_t u$　がすべてのtで成立する。これで (iii)

⟹ (ii) が証明された。(ii) ⟹ (i)　$\lim_{t \downarrow 0} H_t u \leqq u$　は明らか，一方uが下半連続だか

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

ら$H_t u$はtに対し下半連続，したがつて $\lim_{t\downarrow 0} H_t u \geq H_0 u = u$

Lemma 3.4　ξがexcessive measure であるための必要十分条件は

$$\alpha \xi G_\alpha(E) \equiv \alpha \int_S \xi(dx) G_\alpha(x, E) \leq \xi(E)$$

である。

証明　必要条件は明らかだから十分条件を示す。$f \in \mathbb{C}_0^+(S)$ とすると仮定により $\alpha \xi G_\alpha f \leq \xi f$. Lemma 3.3の証明と同様にして$\xi H_t f \leq \xi f$ がほとんどすべてのtで成りたつことがわかる。$f \in \mathbb{C}_0(S)$ のとき$\xi H_t f$はtに関し連続であるから実はすべての$t \geq 0$ で $\xi H_t f \leq f$. $\mathbb{C}_0^+(S)$ は初等函数族だから $\xi H_t \leq \xi$ が成立する。

注意　(1)　Lemma 3.3はもう少し一般に成りたつ。即ちuがexcessive であることと，$\alpha G_\alpha u \leq u$ かつ $\lim_{\alpha\to\infty} \alpha G_\alpha u = u$ と同値となる。証明は長くなるのでここでは省略する。

(2)　G_α: $\mathbb{B}(S) \to \mathbb{C}(S)$ のときexcessive function は下半連続である。実際uが有界なexcessive function のときは，$\alpha G_\alpha u \in \mathbb{C}(S)$ かつ$\alpha G_\alpha u \uparrow u$ だからuは下半連続，uが非有界のとき，有界な excessive function で下から近似出来るからやはり下半連続となる。

[2]　Resolvent の excessive function による変換とそれに従うMarkov 過程　この節では，Brown 運動やMarkov chain において優調和変換と呼ばれているものに相当するものと考える。

u_0 は下半連続なexcessive function, $S_{u_0} = \{x ; u_0(x) > 0\}$ とする。S_{u_0} は Sのopen subset だからやはり才二可算公理をみたす局所compact な空間と考えられる。 $\forall x \in S_{u_0}$ に対し

$$(3.5) \quad G_\alpha^{u_0}(x, dy) = \frac{1}{u_0(x)} G_\alpha(x, dy) u_0(y)$$

とおき

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

(3.6) $G_\alpha^{u_0} f(x) = \int_S G_\alpha^{u_0}(x, dy) f(y)$

と定義すれば

<u>Lemma 3.5</u> $G_\alpha^{u_0}$は $(G_\alpha.6)$ を みたす resolventである。

証明 $(G_\alpha.1)$: 非負性は明らか $(G_\alpha.2)$:

$$\alpha G_\alpha^{u_0} 1(x) = \frac{\alpha}{u_0(x)} \int G_\alpha(x, dy) u_0(y) = \frac{\alpha G_\alpha u_0(x)}{u_0(x)} \leqq 1$$

$(G_\alpha.3)$: Resolvent equation

$$(\alpha-\beta) G_\alpha^{u_0} G_\beta^{u_0} f(x) = \frac{\alpha-\beta}{u_0(x)} \int G_\alpha(x, dy) u_0(y) \frac{1}{u_0(y)} G_\beta(y, dz) u_0(z) f(z)$$

$$= \frac{\alpha-\beta}{u_0(x)} G_\alpha G_\beta u_0 f(x) = \frac{1}{u_0(x)} [G_\beta u_0 f(x) - G_\alpha u_0 f(x)]$$

$$= G_\beta^{u_0} f(x) - G_\alpha^{u_0} f(x)$$

$(G_\alpha.6)$: $x, y \in S_{u_0}$ に対して $\forall f \in \mathbb{C}_0(S)$ で $G_\alpha^{u_0} f(x) = G_\alpha^{u_0} f(y)$ とする。

$g_n(x) = 1/u_0(x) \wedge n \ (x \in S_{u_0})$ と定義すれば

$$G_\alpha^{u_0} g_n f(x) = G_\alpha^{u_0} g_n f(y)$$

$n \to \infty$ とすると $\frac{1}{u(x)} G_\alpha f(x) = \frac{1}{u(y)} G_\alpha f(y)$

この両辺にαをかけて $\alpha \to +\infty$ とすれば $\frac{1}{u(x)} f(x) = \frac{1}{u(y)} f(y)$

従って $x = y$

我々は $G_\alpha^{u_0}$ に実に次の仮定をおく。

$(G_\alpha^{u_0}5)$ $G_\alpha^{u_0}$ は $\mathbb{C}(S_{u_0})$ を $\mathbb{C}(S_{a_0})$ に移す。

$(G_\alpha^{u_0}7)$ G^{u_0} は $\mathbb{C}_0(S_{u_0})$ を $\mathbb{C}(S_{u_0})$ に移す。

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

G^{u_0} は一般には$\mathbb{C}(S_{u_0})$ 上の有界な作用素ではないので，オ二章§2 $\boxed{3}$ と同様な方法で有界な作用素に変換する。即ち $a(x)$ を（G^{u_0}に対応する）オ二章§2，$\boxed{3}$ で定義した函数とすれば

$$\hat{G}^{u_0}f = G a f \qquad f \in \mathbb{C}(S_{u_0})$$

で定義された $\hat{G}^{u_0}$ は $\mathbb{C}(S_{u_0})$ を $\mathbb{C}(S_{u_0})$ に移す有界な作用素である。

<u>Lemma 3.6</u>　$\mathbb{C}(S_{u_0})$ を $\mathbb{C}(S_{a_0})$ に移す resolvent $\hat{G}^{u_0}_\alpha$ で $\hat{G}^{u_0}_0 = \hat{G}^{u_0}$ をみたすのが唯一つ存在する。

<u>証明</u>　$\mathbb{B}_1(S) = \{G_1^{u_0}f;\ f \in \mathbb{D}_0^+(S)\}$ とおき，(2.1)により距離を導入し，完備化した空間を$\tilde{S}_{u_0}$ とすれば，$\tilde{S}_{u_0}$ 上に canonical な Markov 過程 $X'_{u_0} = (\mathbb{W}, \mathbb{B}, P^{u_0}_x,\ x \in S_{u_0})$ が構成される。（二章§1，$\boxed{2}$）$a(x)$ を上記の函数とし，

$$S'(t,w) = \int_0^t a(x_s)ds, \quad \tau_t(w) = \sup(t;\ S'(s,w) \leqq t)$$

とおき，X' をτ_t で tine changeしたMarkov 過程を $\hat{X}$ とし $\hat{X}$ に対応する resolvent を S_{u_0} 上に制限したものを $\hat{G}^{u_0}_\alpha$ で表わすと，

$$G_0^{u_0}f(x) = \hat{G}^{u_0}f(x) = \hat{E}_x\left(\int_0^\infty f(x_t)dt\right) \qquad x \in S_{u_0},\ f \in \mathbb{C}_0(S_{u_0}).$$

$\hat{G}^{u_0}_\alpha$ の間の resolvent equation より

$$(3.7)\quad \hat{G}_\alpha = \sum_{k=0}^{\infty}(-\alpha)^k\,[\hat{G}^{u_0}]^{k+1} \qquad \alpha < \|\hat{G}^{u_0}\|$$

と関係式をみたす。$\hat{G}^{u_0}$ は $\mathbb{C}(S_{u_0})$ を $\mathbb{C}(S_{u_0})$ に移すことと，(3.7)の右辺の級数は一様収束であることから $\hat{G}^{u_0}_\alpha$ は $\mathbb{C}(S_u)$ と $\mathbb{C}(S_{u_0})$ に移すresolvent であることがわかる。一般のαの場合も，オ二章§2と同様の議論で，$\hat{G}^{u_0}_\alpha$ は $\mathbb{C}(S_{u_0})$ と $\mathbb{C}(S_{u_0})$ に移すresolvent であることがわかる。一意性は(3.7)より明らか。

$B'_1(S_{u_0}) = \{\hat{G}^{u_0}f;\ f \in D_0^+(S_{u_0})\}$ とおけば$B'_1(S_{u_0})$ が S_{u_0} の二点を分離

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

することは，Lemma 3.5で $G_\alpha^{u_0}$ が二点を分離することを証明したのと同じ方法で示される。$B_1'(S_{u_0})$ を用いて再び (2.1) で S_{u_0} に距離を導入し，完備化した空間を $\widetilde{S_{u_0}}$ とすると (Lemma 3.6の $\widetilde{S_{u_0}}$ と異なる)， $B_1(S_{u_0})$ の有限個の一次結合は $\hat{G}^{u_0}(\mathbb{C}(S_{u_0}))$ で dense だから， $\hat{G}^{u_0}f(f\in\mathbb{C}(S_{u_0}))$ は $\widetilde{S_{u_0}}$ 上への一意的な連続拡大 $\widetilde{\hat{G}^{u_0}f}$ をもち，

$$(3.8)\quad \widetilde{G^{u_0}f}(x)=\int_{\widetilde{S_{u_0}}}\widetilde{\hat{G}^{u_0}}(x,dy)f(y)\equiv\int_{\widetilde{S_{u_0}}}\widetilde{G^{u_0}}(x,dy)a(y)f(y)\equiv\widetilde{G^{u_0}}af(x)$$

である。ただし $\hat{G}^{u_0}(x,dy)=\frac{1}{a(y)}\widetilde{\hat{G}^{u_0}}(x,dy)$ である。

$\mathbb{C}(\widetilde{S_{u_0}})\ni f$ の S_{u_0} への制限 $f_{S_{u_0}}$ は $\mathbb{C}(S_{u_0})$ に属するから $\widetilde{\hat{G}^{u_0}}$ は実は $\mathbb{C}(\widetilde{S_{u_0}})$ を $\mathbb{C}(\widetilde{S_{u_0}})$ に移す作用素になつている。

一般の $\alpha>0$ に対しては

$$\widetilde{\hat{G}_\alpha^{u_0}}f(x)=\widetilde{\hat{G}^{u_0}}\left[f-\alpha\hat{G}_\alpha^{u_0}f\right](x)$$

と定義する。

Lemma 3.7 $\widetilde{\hat{G}_\alpha}$ は $\mathbb{C}(\widetilde{S_{u_0}})$ を $\mathbb{C}(\widetilde{S_{u_0}})$ に移す resolvent である。

証明 $\widetilde{\hat{G}_\alpha}$ が resolvent equation をみたすことはLemma 2.1 の証明4° と同様にして言える。$\widetilde{\hat{G}^{u_0}}$ が有界な作用素であることから $\widetilde{\hat{G}_\alpha}(\mathbb{C}(\widetilde{S_{u_0}}))$ は $\alpha=0$ も含めて α に関係しない。したがつて $\widetilde{\hat{G}_\alpha}$ は $\mathbb{C}(\widetilde{S_{u_0}})$ を $\mathbb{C}(\widetilde{S_{u_0}})$ に移す。$\widetilde{\hat{G}_\alpha}$ の非負性及び $\alpha\widetilde{\hat{G}_\alpha}1(x)\leqq 1$ であることは，$x\in S_{u_0}$ ではその性質をもつていることと $\widetilde{\hat{G}_\alpha}f(f\in C(\widetilde{S_{u_0}}))$ が連続であることからただちにわかる。

したがつて $\widetilde{\hat{G}_\alpha}f$ を resolvent にもつ canonical な Markov 過程 $\hat{X}=(W,\mathbb{B},\hat{P}_x^{u_0}: x\in\widetilde{S_{u_0}}\ \partial)$ が構成出来る。$\frac{1}{\tilde{a}(x)}=\frac{1}{a(x)}\ (x\in S_{u_0})$，$=1(x\notin S_{u_0})$ とおいて

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

(3.9) $\quad S(t,w)=\int_0^t \frac{1}{a^*(x_s)}\,ds, \quad \tau_t(w)=\sup\{s : s(s,w)\leqq t\}$

とおき $\hat{X}$ を $\tau_t(w)$ で time change した Markov 過程を

$X=(W, \mathbb{B}, P_x^{u_0} : x\in \widetilde{S_{u_0}}\cup\partial)$ とすれば

$$G^{u_0}f(x)=E_x\left(\int_0^\infty f(x_t)dt\right) \quad x\in S_{u_0}, \quad f\in \mathbb{C}_0(S_{u_0})$$

となつている。又 $f\in\mathbb{C}_0(S_{u_0})$ のとき $\widetilde{G^{u_0}}f\in\mathbb{C}(\widetilde{S_{u_0}})$ である。実際，

$f\cdot\frac{1}{a}\in\mathbb{C}_0(S_{u_0})$ だから (3.8) において f の代りに $f\cdot\frac{1}{a}$ を代入すれば

$\widetilde{G^{u_0}}f\in\mathbb{C}(S_{u_0})$ であることがわかる。以上まとめれば

<u>定理 3.1</u> $\quad G_\alpha^{u_0}$ が $(G_\alpha.1)\sim(G_\alpha.5)$ 及び $(G_\alpha^{u_0},7)$ をみたす S_{u_0} 上の resolvent のとき，S_{u_0} を dense に含む compact な空間 $\widetilde{S_{u_0}}$ 上に (3.10)，(3.11) をみたす canonical な Markov 過程

$X=(W, \mathbb{B}, P_x^{u_0} : x\in\widetilde{S_{u_0}}\cup\partial)$ が構成出来る。

(3.10) $\quad \widetilde{G^{u_0}}f(x)=G^{u_0}f(x)=E_n^{u_0}\left(\int_0^\infty f(x_t)dt\right), \quad x\in S_{u_0}, \quad f\in\mathbb{C}_0(S_{u_0})$

(3.11) $\quad \widetilde{G^{u_0}}f(x)\in\mathbb{C}(\widetilde{S_{u_0}}), \qquad f\in\mathbb{C}_0(S_{u_0})$

ただし $\widetilde{G^{u_0}}$ は X の 0 次の resolvent である。

注意 一般に $(G_\alpha.7)$ から $(G_\alpha^{u_0}.7)$ が導かれるのかどうか著者にはわからないが，もし u_0 が局所有界かつ連続ならば $(G_\alpha.7)$ から $(G_\alpha^{u_0}.7)$ が導かれる。実際 $f\in\mathbb{C}_0(S_{u_0})$ の台を F，σ_F を F への hitting time と $\sup_{x\in F} G^{u_0}f(x)=m<\infty$ とすれば

$$G^{u_0}f(x)=H_F G^{u_0}f(x)\leqq m H_F(x,F)=m$$

となり $G^{u_0}f(x)$ は S_{u_0} 上で有界，したがつて $G^{u_0}f\in\mathbb{C}(S_{u_0})$ である。

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

§2 dual な Martin 表現定理

前節 $\boxed{2}$ で扱つた u_0 として特に $G\varphi$ ($\varphi \geqq 0$) をとる。 $\forall x \in S$ で $G\varphi > 0$ のとき φ を reference 函数という。 $u_0 = G\varphi$ のとき定理3.1の S_{u_0}, $X_{u_0} = \{W, \mathbb{B}, P_x^{u_0} : x \in \widetilde{S_{u_0}} \cup \partial\}$ をそれぞれ S_φ, $X_\varphi = \{W, \mathbb{B}, P_x^\varphi : x \in \widetilde{S_\varphi} \cup \partial\}$ と書くことにする。 $\forall x \in \widetilde{S_\varphi}$, $E \in \mathbb{B}_{\widetilde{S_\varphi}} = \{\widetilde{S_\varphi}$ 上の位相的Borel 集合体$\}$ に対し

$$K_\varphi(x, E) = \int_E \widetilde{G}\varphi(x, dy) \frac{1}{G\varphi(y)}$$

とおくと $K_\varphi(x, E)$ は G_α に関し excessive measure である。実際, X_φ に関する resolvent equation より, $f \in \mathbb{C}_0^+(S_\varphi)$ のとき

$$\alpha \widetilde{G^\varphi} \widetilde{G_\alpha^\varphi} f(x) \leqq \widetilde{G}^\varphi f(x)$$

だから

$$\alpha \int_S \widetilde{G}^\varphi(x, dy) \frac{1}{G\varphi(y)} G_\alpha \cdot (G\varphi \cdot f)(y) \leqq \widetilde{G}^\varphi f(x)$$

したがつて

$$\alpha \int_S K_\varphi(x, dy) G_\alpha G\varphi \circ f(y) \leqq \int_S K_\varphi(x, dy) G\varphi(y) f(y)$$

$g_n(x) = \dfrac{1}{G\varphi(x)} \wedge n$ とおき上式の f の所に $g_n f$ を代入して $n \to \infty$ とすれば

$$\alpha \int_S K_\varphi(x, dy) G_\alpha f(y) \leqq \int_S K_\varphi(x, dy) f(y)$$

したがつて $K_\varphi(x, \circ)$ は excessive である。

<u>Lemma 3.8</u> ξ を $\int \xi(dx)\varphi(x) < \infty$ をみたすexcessive measure とすると, ξ の S_φ へのrestriction は

$$\xi(\cdot) = \int_{\widetilde{S_\varphi} - (\widetilde{S_\varphi})_b} \nu(dx) K_\varphi(x, \circ)$$

と表現出来る。ただし $(\widetilde{S_\varphi})_b$ は X_φ の branching point (分岐点) の全体である。

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

証明 1° Lemma 3.2により $\forall f \in \mathbb{C}_0(S_\varphi)$ に対し

$$\int \mu_n G(dx) f(x) \longrightarrow \int \xi(dx) f(x)$$

をみたす potential の列 $\mu_n G$ が存在する。$G_\varphi = u_0$ とおいて

$$\xi u_0 f = \lim_{n\to\infty} \mu_n G u_0 f = \lim_{n\to\infty} \int \mu_n(dx) u_0(x) \cdot G^{u_0} f(x)$$

ところが

$$\int_{\widetilde{S}_\varphi} \mu_n(dx) u_0(x) = \int_{\widetilde{S}_\varphi} \mu_n(dx) G\varphi(x) \leqq \int_S \xi(dx)\varphi(x) < \infty$$

即ち $\{\nu_n = \mu_n \circ u_0\}$ は一様有界な測度の列である。ν_n の汎弱収束測度の1つを ν と

すれば

(3.12) $\quad \xi u_0 f = \int \nu(dx) \widetilde{G}\varphi f(x)$

2° $\quad x \in S_b$ ならば

$$\widetilde{G}^\varphi_\alpha f(x) = \int_{\widetilde{S}_\varphi - (\widetilde{S}_\varphi)_b} \mu(x, dy) \widetilde{G}^\varphi f(y)$$

これを (3.12) に代入すれば

$$\int \nu(dx) \widetilde{G}^\varphi f(x) = \int_{\widetilde{S}_\varphi - (\widetilde{S}_\varphi)_b} \left[\int_S \nu(dx) \mu(x, dy) \right] \widetilde{G}^\varphi f(y)$$

$$\nu'(\cdot) = \int_S \nu(dx) \mu(x, \cdot)$$

とおけば ν' は $\widetilde{S}_\varphi - (\widetilde{S}_\varphi)_b$ 上の測度で

$$\xi u_0 f = \int \nu'(dy) G^\varphi f(y) = \int \nu' K_\varphi(dx) u_0(x) f(x)$$

したがつて $\xi = \nu' K_\varphi$ が S_φ で成立する。

Lemma 3.9 $\quad \nu$ が $\widetilde{S}_\varphi - (\widetilde{S}_\varphi)_b$ 上の測度ならば νK_φ から ν は一意的に定まる。

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

証明 $\widehat{X_\varphi}$ は，(3.9) によつて time change される前の canonical な Markov 過程とする。(3.9) の additive functional $S(t,w)$ は狭義単調増加であるから $\widehat{X}_\varphi$ の分岐点と X_φ の分岐点は同じである。(定理 2.2) $\widehat{X}_\varphi$ の resolvent を $\widetilde{\widehat{G}_\alpha^\varphi}$ で表わす。$\nu\xi(\widetilde{S_\varphi})-(\widetilde{S_\varphi})_b$ 上の測度とすれば，$\forall f\in\mathbb{C}(\widetilde{S_\varphi})$ に対し

$$(3.13)\qquad \int\nu(dx)f(x)=\lim_{\alpha\to\infty}\int\nu(dx)\alpha\widetilde{\widehat{G}_\alpha^\varphi}f(x)$$

$$=\lim_{\alpha\to\infty}\alpha\int\nu(dy)\left[\widetilde{\widehat{G}^\varphi}f(x)-\alpha\widetilde{\widehat{G}^\varphi}\widetilde{\widehat{G}_\alpha^\varphi}f(x)\right]$$

ところが $\widetilde{\widehat{G}^\varphi}f(x)=\widetilde{G^\varphi}Gf(x)$ だから (3.13) の最後の項は

$$\lim_{\alpha\to\infty}\alpha\{\nu K_\varphi a u_o f-\alpha\nu K_\varphi a u_o\widetilde{\widehat{G}_\alpha^\varphi}f\}$$

となる。したがつてVは νK_φ から一意に定まる。

定義 excessive measure ξ が extreme であるとは，$\xi=\xi_1+\xi_2$ (ξ_i; excessive) と書けるならば $\xi_i=c\xi$ $(0\leqq c\leqq 1)$ となることである。

Lemma 3.9 の系 $x\in\widetilde{S_\varphi}-(\widetilde{S_\varphi})_b\Longleftrightarrow K_\varphi(x,\circ)$ は extreme.

証明 $x\in\widetilde{S_\varphi}-(\widetilde{S_\varphi})_b$ に対する excessive measue $K_\varphi(x,\circ)$ が

$$K_\varphi(x,\circ)=\xi_1+\xi_2\qquad(\xi_i;\ \text{excessive})$$

と書けたとすれば Lemma 3.6 により

$$\xi_i=\int_{\widetilde{S_\varphi}-(\widetilde{S_\varphi})_b}\nu_i(dx)K_\varphi(x,\circ)$$

したがつて

$$K_\varphi(x,\circ)=\int_{\widetilde{S_\varphi}-(\widetilde{S_\varphi})_b}\nu(dx)K_\varphi(x,\circ)\qquad\nu=\nu_1+\nu_2$$

$x\in(\widetilde{S_\varphi})-(\widetilde{S_\varphi})_b$ のとき Lemma 3.9 により $\nu=\delta(x,\circ)$. したがつて は

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

$K_\varphi(x,\circ)$ の定数倍である。逆に $x\in(\widetilde{S_\varphi})_b$ ならば

$$K_\varphi(x,\cdot)=\int_{(\widetilde{S_\varphi})-(\widetilde{S_\varphi})_b}\mu(x,dy)K_\varphi(y,\circ)$$

だから $K_\varphi(x,\cdot)$ は extreme ではない。

<u>定義</u> $(\widetilde{S_\varphi})_1=(\widetilde{S_\varphi})-(\widetilde{S_\varphi})_b$ を $\widetilde{S_\varphi}$ の本質的部分といい，ξが

$\xi=\int_{(\widetilde{S_\varphi})_1}\nu(dx)K_\varphi(x,\circ)$ と書けるときξは標準表現をもつという。

<u>定理 3.2</u> φをreference 函数，ξを $(\xi,\varphi)=\int\xi(dx)\varphi(y)<\infty$ をみたす（Xに関して）excessive measure とすると，ξは一意的な標準表現をもつ。即ち

$$\xi(E)=\int_{(\widetilde{S_\varphi})_1}\nu(dx)K_\varphi(x,E)$$

と表現されνはξより一意的に定まる。

§3 Dual process.

$X=(W,\mathbb{B},P_x;x\in S)$を前節で定義したstandard Markov 過程，G_α をその resolvent とする。

<u>定義</u> G^*_αがG_αの dual resolvent であるとは G^*_αが$B(S)$の resolvent 即ち$(G_{\alpha}.1)\sim(G_{\alpha}.3)$をみたし，更にSのRadon測度 $\xi(\cdot)$と$G_\alpha(x,y)$ $(\alpha\geqq0)$が存在して

1° $G_\alpha(x,y)\geqq0$ で $B_S\times B_S$-可測，かつ各変数に関し下半連続。

2° yを固定すると，$G_\alpha(x,y)$ はα-co-excessive

xを固定すると，$G_\alpha(x,y)$ は α-co-excessive[1)]

3° $G_\alpha f(x)=\int G_\alpha(x,y)f(y)\xi(dy)$

$fG^*_\alpha(y)=\int\xi(dx)f(x)G_\alpha(x,y)$

をみたすことである。$G_\alpha(x,y)$ を一般の Green 函数という。

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

この節では G_α^* は更に次の条件をみたすものとする。

$(G_\alpha^*.5)$ $G_\alpha^*;\ \mathbb{B}(S) \to \mathbb{C}(S)$

$(G_\alpha^*.6)$ $\mathbb{R}(S) = G_\alpha^*(\mathbb{C}(S))$ はSの二点を分離する。

$(G_\alpha^*.7)$ $f \in \mathbb{C}_o(S) \Longrightarrow f G^* \in \mathbb{C}(S)$.

$X^* = (W, \mathbb{B}, P_x^*;\ x \in \tilde{S} \cup \partial)$ は G_α^* を resolvent とする，定理3.1で得られたMarkov 過程とする。[1] X^*のresolvent を $\tilde{G}_\alpha^*$ とすれば

$$f\tilde{G}_\alpha^*(y) = \int_S f(x)\tilde{G}_\alpha^*(dx, y)$$

であるが，実はすべての$y \in \tilde{S}$に対して，$\tilde{G}_\alpha^*(dx, y)$ はξに関するdensity $\tilde{G}_\alpha^*(x, y)$をもつことが次の lemma からわかる。

Lemma 3.10 次の条件をみたす $\hat{G}(x, y)(x \in S,\ y \in \tilde{S})$ が存在する。

(i) $\hat{G}(x, y)$ は $\mathbb{B}_S \times \mathbb{B}_{\tilde{S}}$ 一可測かつ，yを固定すれば excessive, xを固定するとco-excessive(Process X^*に関して excessive)

(ii) $\forall f \in \mathbb{C}_o(S)$ に対し

$$f\tilde{G}^*(y) = \int \xi(dx) f(x) G(x, y) \qquad \forall y \in \tilde{S}$$

証明 数段階に分けて考える。

1) 定理3.1において u_o-変換であるということは何も使つていない。

前頁の脚註

1) uがα-excessive とは $\beta G_{\alpha+\beta} u \leqq u$ かつ $\lim_{\beta\to\infty} \beta G_{\alpha+\beta} u = u$.

α-co-excessive とは $\beta u G_{\alpha+\beta}^* \leqq u$ かつ $\lim_{\beta\to\infty} \beta u G_{\alpha+\beta}^* = u$ を意味する。

1° fが非負下半連続函数とすれば， $^{\exists}f_n \in \mathbb{C}_0(S)$ で $f_n \uparrow f$. したがつて $f\widetilde{G}^*(y)$ は下半連続である。 $G_\alpha(x, y)(x, y \in S)$ は各変数に関し下半連続だから

$$G_\alpha\widetilde{G}^*(x, y) \equiv \int_S G_\alpha(x, z)\widetilde{G}^*(dz, y)$$

は x 及び y に関して下半連続かつ $\mathbb{B}_s \times \mathbb{B}_{\tilde{s}}$－可測。

$$\widehat{G}(x, y) \equiv \sup_{\alpha:\text{有理数}} \alpha G_\alpha \widetilde{G}^*(x, y)$$

とおけば $\widehat{G}(x, y)$ も各変数に関して下半連続かつ $\mathbb{B}_s \times \mathbb{B}_{\tilde{s}}$－可測

2° $y \in S$ のとき $\alpha G_\alpha \widetilde{G}^*(x, y) \uparrow G(x, y)$ だから $\widehat{G}(x, y) = G(x, y)$ である。したがつて $y \in S$ 上では

$$\int_S \xi(dx) f(x) \widehat{G}(x, y) = f G^*(y) \qquad f \in \mathbb{C}_0(S)$$

となる。上式の左辺は $\widetilde{S}$ 上の下半連続，右辺は連続だから $\widetilde{S}$ 上では

$$(3.14) \qquad \int_S \xi(dx) f(x) \widehat{G}(x, y) \leqq f\widetilde{G}^*(y)$$

上式の f の代りに $G_\alpha(x, y)$ を代入すると

$$(3.15) \qquad \widehat{G}(x, y) \geqq \alpha G_\alpha \widetilde{G}^*(x, y) \geqq \int_S \alpha G_\alpha(x, z) \widehat{G}(z, y) \xi(dz)$$

がすべての有理数 α でなりたつ。ところが（3.15）の右辺は α に関し下半連続だから（∵ $\alpha G_\alpha(x, y)$ は α に関し下半連続）すべての $\alpha > 0$ で成立する。このことと $\widehat{G}(x, y)$ が x に関し下半連続であることから，$\widehat{G}(x, y)$ が x に関して excessive である（$\forall y \in \widetilde{S}$ で）。

3° $f \in \mathbb{C}_0(S)$ のとき $\widetilde{S}$ 上の resolvent equation より

$$\alpha f \widetilde{G}^*_\alpha \widetilde{G}^*(y) + f\widetilde{G}^*_\alpha(y) = f\widetilde{G}^*(y)$$

$\alpha \to \infty$ とすれば $\| f\widetilde{G}^*_\alpha \| \to 0$ だから

$$\lim_{\alpha\to\infty} \alpha f\widetilde{G}^*_\alpha \widetilde{G}^*(y) = f\widetilde{G}^*(y)$$

ところが $f \in \mathbb{C}_0^+(S)$ のとき

$$\alpha f\widetilde{G}^*_\alpha\widetilde{G}^*(y) = \alpha\int_S \xi(dx)f(x)G_\alpha\widetilde{G}^*(x,y)$$

$$\leqq \int_S \xi(dx)f(x)\widehat{G}(x,y)$$

$\alpha \to \infty$ として

$$(3.16)\qquad f\widetilde{G}^*(y) \leqq \int_S \xi(dx)f(x)\widehat{G}(x,y)$$

(3.14) 及び (3.16) よりこのLemma の (ii) が得られる。

4o　最後に$\widehat{G}(x,y)$ はyに関しても (X^*に関し) excessive であることを示す。

$f \in \mathbb{C}_0^+(S)$ のとき resolvent equation より $\alpha GG_\alpha f(x) \leqq Gf(x)$

したがつてξ -測度0のyの集合を除いて

$$\alpha \widehat{G}G^*_\alpha(x,y) \leqq \widehat{G}(x,y)$$

故に

$$\alpha \widehat{G}G_\alpha G^*_\beta(x,y) \leqq \widehat{G}G^*_\beta(x,y)$$

したがつて　$\beta > \alpha$　のとき

$$\alpha\widehat{G}G^*_\alpha(x,y) - \beta\widehat{G}G^*_\beta(x,y)$$

$$= \alpha(\widehat{G}G^*_\alpha(x,y) - \widehat{G}G^*_\beta(x,y)) - (\beta-\alpha)\widehat{G}G^*_\beta(x,y)$$

$$= \alpha(\beta-\alpha)G^*_\alpha G^*_\beta(x,y) - (\beta-\alpha)\widehat{G}G^*_\beta(x,y)$$

$$\leqq (\beta-\alpha)\widehat{G}G^*_\beta(x,y) - (\beta-\alpha)\widehat{G}G^*_\beta(x,y) = 0$$

即ち　$\alpha\widehat{G}G^*_\alpha(x,y) \uparrow \quad (\alpha\to\infty)$　だから

$$\widehat{\widehat{G}}(x,y) = \lim_{\alpha\to\infty} \alpha\widehat{G}G^*_\alpha(x,y)$$

が存在する。

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

$$\beta \hat{\hat{G}} G^*_\beta(x,y) = \lim_{\alpha\to\infty} \beta \hat{G} G^*_\alpha G^*_\beta(x,y)$$

$$\leqq \lim_{\alpha\to\infty} \alpha \hat{G} G^*_\alpha(x,y) = \hat{G}(x,y)$$

一方 $\hat{\hat{G}}(x,y)$ は定義より y に関して下半連続。したがつて $\hat{\hat{G}}(x,y)$ は y に関して excessive 他方 x に関して excessive であることは $\hat{G}(x,y)$ がそうでありしたがつて $\alpha \hat{G} G^*_\alpha(x,y)$ も x に関して excessive であることがわかる。又

$$\int f(x) \hat{\hat{G}}(x,y) \xi(dx) = \lim_{\alpha\to\infty} \int f(x) \hat{G} G^*_\alpha(x,y) \xi(dx)$$

$$= \lim_{\alpha\to\infty} \alpha f G^* G^*_\alpha(y) = f G^*(y)$$

$$= \int f(x) \hat{G}(x,y) \xi(dx)$$

だから $\forall y \in \tilde{S}$ を固定すればほとんどすべての x で $\hat{G}(x,y) = \hat{\hat{G}}(x,y)$.

このことと，両者共 excessive であることからすべての $x \in S$, $y \in \tilde{S}$ で $\hat{G}(x,y) = \hat{\hat{G}}(x,y)$ である。

G^*_α が $\mathbb{C}(S)$ を $\mathbb{C}(S)$ に移すことに注意すれば，才二章の最後の補足と同様の議論により分岐点の全体 $\tilde{S}_b$ は F_σ-集合であることが示される。したがつて任意の Borel set Eへの hiting time $\sigma_E(w) = \inf\{t>0 ; x_t \in E\}$ は Markov time となる。

近藤〔18, p・97〕又は竹内，山田，渡辺（信）〔28, p・21〕と同じ方法で次のLemmaが得られる。

<u>Lemma 3.11</u> EをSの（したがつて $\tilde{S}$ の）Borel set とすれば

$$\int \hat{H}_E(x,dy) \hat{G}(y,z) = \int \hat{G}(x,y) \hat{H}^*(dy,z) \quad (\forall x \in S, \forall z \in \tilde{S})$$

ここに $\hat{H}_E(x,dy) = P_x(x_{\hat{\sigma}_E} \in dy)$, $\hat{H}^*_E(dy,z) = P^*_z(x_{\hat{\sigma}_E} \in dy)$.

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

§4. Martin 表現定理

$u_0\xi$ 下半連続な co-excessive function, $S_{u_0}=\{x; u_0(x)>0\}$ とする。G^*_α の u_0- 変換を

$$fG^*_{u_0,\alpha}(y)=\frac{1}{u_0(y)}\int f(x)u_0(x)G_\alpha(x,y)\xi(dx)$$

と定義すると, $G^*_{u_0,\alpha}$ は S_{u_0} 上の resolvent となることは§1と同様にして示される。我々は $G^*_{u_0,\alpha}$ に関して, (G^*_α.5) 及び (G^*_α.7) を仮定する。

$$(3.14)\qquad K_{u_0,\alpha}(x,y)=\frac{1}{u_0(y)}G_\alpha(x,y)\qquad(\alpha\geqq 0)$$

とおけば $K_{u_0,\alpha}(x,y)$ は xに関して excessive であるが, yに関しては $G^*_{u_0,\alpha}$ - excessive[1] である。実際, $G^*_{u_0,\alpha}$ の resolvent equation より

$$(\alpha+\beta)fG^*_{u_0,\alpha}G^*_{u_0,\alpha+\beta}(y)\leqq fG^*_{u_0,\alpha}(y)\qquad(f\geqq 0)$$

したがつてほとんどすべてのxで

$$(\alpha+\beta)K_{u_0,\alpha}G^*_{u_0,\alpha+\beta}(x,y)\leqq K_{u_0,\alpha}(x,y)$$

Lemma 3.10 の証明4°と同様にして$K_{u_0,\alpha}(x,y)$ は $G^*_{u_0,\alpha}$ -excessive であることが示される。したがつて $G^*_{u_0,\alpha}$ は, $K_{u_0,\alpha}(x,y)$ を一般のGreen 函数とし, $\xi(dx)u_0(x)$ を, G_α と $G^*_{u_0,\alpha}$ との共通の測度 (前節の dual process の定義においてξに相当するもの) とする dual process である。したがつて, 前節の結果により, canonical な Markov 過程 $X^*_{u_0}=(W,B,P^*_{u_0,x}; x\in S_{u_0}\cup\partial)$ が構成出来て, $f\in C_0(S_{u_0})$ のとき

---

1) uが$G^*_{u_0,\alpha}$-excessive とは, $uG_{u_0,\alpha}\leqq u$ かつ $\lim_{\alpha\to\infty}uG^*_{u_0,\alpha}=u$.

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

$$f\widetilde{G}^*_{u_0}(y) = \int \xi(dx)u_0(x)f(x)\widehat{K}_{u_0}(x,y) \in \mathbb{C}(\widetilde{S_{u_0}})$$

である。ここに $\widehat{K}_{u_0}(x,y)(x \in S_{u_0}, y \in \widetilde{S_{u_0}})$ は lemma 3.10によつて得られたもので，xに関して excessive, yに関しては $\widetilde{G}^*_{u_0,\alpha}$-excessive である。

γをS上のσ－有限な測度とする。

$$(3.17) \quad u_0(y) = \int_S \gamma(dx)G(x,y) = \gamma G(y)$$

とおけば u_0 は G^*_α- excessive function である。$u_0(y)>0 \ (\forall y \in S)$ のとき γを reference 測度という。この u_0 に対しても$(G^*_\alpha.5)$ 及び $(G^*_\alpha.7)$ を仮定する。$G^*_{u_0}$, $\widehat{K}_{u_0}$, $X^*_{u_0}$ 等をそれぞれ G^*_γ, $\widehat{K}_\gamma$, X^*_γ 等で表わすことがある。

<u>Lemma 3.12</u> $\quad \gamma\widehat{K}(y) \equiv \int \gamma(dx)\widehat{K}_\gamma(x,y) = 1 \quad (\forall y \in \widehat{S}_\gamma)$.

<u>証明</u> $y \in S_\gamma$ のときは定義より明らか，したがつて $\forall y \in \widetilde{S_\gamma}$ で

$$\alpha\gamma K_\gamma \widetilde{G}^*_{\gamma,\alpha}(y)$$

$$= \alpha\int_S \gamma K(x)\widetilde{G}^*_{\gamma,\alpha}(dx,y) = \alpha 1\widetilde{G}^*_{\gamma,\alpha}(y) \xrightarrow[\alpha\to\infty]{} 1$$

一方 $\gamma K_\gamma(y)$ は $\widetilde{G}^*_{\gamma,\alpha}$ に関し co-excessive だから $\alpha\gamma K_\gamma\widetilde{G}^*_{\gamma,\alpha}(y) \longrightarrow \gamma K_\gamma(y)$. したがつて lemma が証明された。

<u>Lemma 3.13</u> $\quad u$をγ－可積分な excessive function とすれば $x \in S_\gamma$ では

$$(3.18) \quad \widehat{H}_E u(x) = \int_{\overline{E}-(S_\gamma)_b} \widehat{K}_\gamma(x,y)\nu(dy)$$

と表現出来る。

<u>証明</u> Gf_n をuに下から近ずく potential の列とする。

$$Gf_n(x) = \int K_\gamma(x,y)f_n(y)\gamma G(y)\xi(dy)$$

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

だから

$$\hat{H}_E G f_n(x) = \int \hat{H}_E \hat{K}_r(x,y) f_n(y) \gamma G(y) \xi(dy)$$

$$= \int_{\bar{E}} \hat{K}_r(x,z) \int_S \hat{H}_E^*(dz,y) f_n(y) \gamma G(y) \xi(dy)$$

$$\equiv \int_{\bar{E}} \hat{K}_r(x,z) \nu_n(dz)$$

ところが

$$\gamma u \geqq \gamma \hat{H}_E u \geqq \gamma \hat{H}_E G f_n = \int_{\bar{E}} \gamma \hat{K}_r(z) \nu_n(dz) = \nu_n(E)$$

ν_n の汎弱極限の一つを ν とすれば， $\forall g \in \mathbb{C}_0(S_r)$ に対し

$$\int_S g(x) \gamma G(x) \hat{H}_E u(x) \xi(dx) = \lim_{n\to\infty} \int_{\bar{E}} g \tilde{G}_r^*(y) \nu_n(dy)$$

$$= \int_{\bar{E}} g \tilde{G}_r^*(y) \nu(dy) = \int_S \xi(dx) g(x) \gamma G(x) \left[\int_{\bar{E}} \hat{K}_r(x,y) \nu(dy) \right]$$

gは任意だから

$$\hat{H}_E u(x) = \int_E \hat{K}(x,y) \nu(dy).$$ [1]

yが分岐点ならば

$$\hat{K}_\gamma(x,y) = \int_{\tilde{S} - (\tilde{S})_b} \hat{K}(x,z) \mu(y,dz)$$

---

1) 一般に二つの excessive function u_1, u_2 が任意の $g \in \mathbb{C}_0(S_r)$ で $\int \xi(dx) \gamma G(x) g(x) u_1(x) = \int \xi(dx) \gamma G(x) g(x) u_2(x)$ ならば $u_1 = u_2$ となる。

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

と表わせるから Lemma が証明出来た。

定義 excessive function u が extreme であるとは，$u=u_1+u_2$ (u_i; excessive) と書けるならば $u_i=cu$ となることである。

定義 $(\widehat{\widetilde{S}}_r)_1=\widetilde{S}_r-(\widetilde{\widetilde{S}}_r)_b$ を $\widetilde{S}_r$ の本質的部分といい，uが

$$u(x)=\int_{(\widehat{\widetilde{S}}_r)_1}\widehat{K}_\gamma(x,y)\nu(dy) \qquad x\in S_r$$

と書けるとき uは標準表現をもつという。

(3.18) 式のνが一意的に定まること，$y\in(S_\varphi)_1 \Longleftrightarrow K_r(x,y)$ が extreme であることは Lemma 3.7 及びその系とほとんど同様にして証明出来る。以上まとめれば

定理 3.2 γを reference 測度 uをγ-可積分な excessive function とすれば，$\widehat{H}_E u$ は$\overline{E}$上で一意的な標準表現をもつ。即ち

$$H_E u(x)=\int_{\overline{E}\ (\widehat{\widetilde{S}}_r)_1}\widehat{K}_\gamma(x,y)\nu(dy) \qquad \forall x\in S$$

と表現され，ν は $\widehat{H}_E u$ より一意に定まる。

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

第四章 Markov連鎖（I）一般的性質

この章では，状態空間Sが高々可算コの点からなりたつているときに，S上を動くMarkov過程について述べる。このようなprocess は一般にMarkov 連鎖と呼ばれている。普通Sには離散位相を与え，必要に応じてSに新しい点をつけ加え，その上で研究されている。目的によつてつけ加えるべき点の与え方は異なるが，Markov 連鎖の一般的な性質をしらべるにはSの離散位相による一点campact 化空間$S\cup\{\infty\}$が用いられる。しかしこのようなcompact 化は便宜的なものであつて場合によつては不自然でさえある。例えば，Sの点がすべてinstantaneous な場合には，適当な正則性をもつpath の集合を基礎の確率空間にとろうとすれば，各path は稠密な時間で∞の値をとらせなければならない。Feller－Mckean〔10〕の例では，∞は〔0.1〕の中のすべての無理点を一点にまとめたものになつている。

このノートではS上のMarkov 過程を第二章，§1 $\boxed{2}$の方法によつて構成し，これについて考えることにする。

§1 Markov 連鎖の定義とその性質

Sを高々可算コの点からなる集合とし，その点をx，y，z等であらわす。

$t>0$，　x，y　Sで定義された函数$P_t(x,y)$が

(P_1)　　$P_t(x,y)\geq 0$，　$\sum_{y\in S}P_t(x,y)\leq 1$

(P_2)　　（Kolmogorov–Chapmanの等式）

$$P_{t+s}(x,y)=\sum_{z\in S}P_t(x,z)\,P_s(z,y)$$

をみたすとき，S上の推移確率という。

先づ，Sを離散位相で考えて局所compact な空間とみなし，B_Sをその位相的Borel集合体(すべての部分集合の全体)，B(S)をB_S可測な有界函数（すべての有界函数の全体）のつくるBanach 空間とする。

任意のA　B_Sに対して

$$P_t(x,A)=\sum_{y\in A}P_t(x,y)$$

と定義すれば，これはB_S上の測度とみることが出来る。(P_1)で$P_t(x,S)$　1を許すときは，この推移確率はsubstochasticであるといゝ，すべてのxについてP$_t(x,S)=1$

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

のときには（strictly）stochastic であるという。$P_t(x,y)$ がsubstochastic のときには，Sに一点∂をつけ加えて，

$$\tilde{P}_t(x,y) \equiv P_t(x,y), \quad \tilde{P}_t(\partial,y) \equiv \delta(\partial,y)$$

(4.1) $\qquad x,y \in S$

$$\tilde{P}_t(x,\partial) \equiv 1-\sum_{y\in S} P_t(x,y)$$

と定義すれば，$P_t(x,y)$ $(x,y\in S\cup\{\partial\})$上のstochasticな推移確率となつている。

$P_t(x,y)$ が t の函数として可測なとき；これを可測な推移確率又は単に可測であるという。

$P_t(x,y)$ が可測なとき，そのLaplace 変換を

(4.2) $\qquad G_\alpha(x,y) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} P_t(x,y)\,dt \qquad \alpha>0$

とおけば，(P_1)，(P_2) に対応して

(G_1) $\quad G_\alpha(x,y) \geqq 0 \qquad \alpha\sum_{y\in S} G_\alpha(x,y) \leqq 1$

(G_2) (resolvent equation)

$$G_\alpha(x,y) - G_\beta(x,y) + (\alpha-\beta)\sum_{z\ S} G_\alpha(x,z)\,G_\beta(z,y) = 0$$

がなりたつ。前と今じように任意の$A \in \mathbb{B}_s$ に対して

$$G_\alpha(x,A) = \sum_{y\in A} G_\alpha(x,y)$$

とおいて，$G_\alpha(x,\cdot)$を B_s 上の測度と考えることが出来る。これをα次のGreen 測度と呼んでいる。

推移確率に可測性より強い次の条件をおくことがしばしばある。

(P_3)（連続性の条件）$\lim_{t\to 0} P_t(x,y) = \delta(x,y)$

$$\delta(x,y)=0 \quad (x\neq y), \qquad \delta(x,y)=1 \quad (x=y)$$

<u>Lemma 4，1</u> 推移確率$P_t(x,y)$が連続性の条件(P_3)をみたすならば，(4，1)で定義した$\tilde{P}_t(x,y)$も(P_3)もみたす。

証明 $\tilde{P}_t(x,y)$の定義より，$\lim_{t\to 0}\tilde{P}_t(x,\partial)=0$ $(x\in S)$ のみを示せばよい。(P_2)で両辺をyについて加えると，

$$P_{t+s}(x,S) \leq P_t(x,S)$$

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

となるから，$\lim_{t\to 0} P_t(x, S)$ が存在し，$\lim_{t\to 0} P_t(x, S-x)$ も存在する。

故に

$$0 \leq \overline{\lim_{t\to 0}} \widetilde{P}_t(x, \partial) = \lim_{t\to 0} \{1 - P_t(x, x) - P_t(x, S-x)\} \in 0$$

となつて，$\lim_{t\to 0} \widetilde{P}_t(x, \partial) = 0$ なることがわかる。

この補題と（4.1）から，可測又は連続性の条件をみたす推移確率はすべて同じ性質をもつ stochastic なものとしてよい。

$P_t(x, y)$ の連続性については次の定理がよく知られている。

<u>定理4.1</u>（T.L.boob)

(i) $P_t(x, y)$ が可測ならば連続であり，且つ $\delta > 0$ に対して $(\delta, +\infty)$ で一様連続

(ii) $P_t(x, y)$ が (P_3) をみたすならば $t \geq 0$ で一様連続である。但し $P_0(x, y) = \delta(x, y)$ とおく。

次に $f \in \mathbb{B}(S)$ に対して

(4.3) $H_t f(x) = \sum_{y \in S} P_t(x, y) f(y)$

(4.4) $G_\alpha f(x) = \sum_{y \in S} G_\alpha(x, y) f(y)$

とおけば，(P_1)，(P_2) 及び (G_1) (G_2) より $\{H_t : t > 0\}$，$\{G_\alpha : \alpha > 0\}$ はそれぞれ $\mathbb{B}(S) \to \mathbb{B}(S)$ なる半群，resolvent であることがわかる。S上の有界連続函数の全体を $C(S)$ とすれば，$\mathbb{B}(S) = C(S)$ となりこれらの作用素はいずれも $C(S) \to C(S)$ と考えられる。

こゝで第二章§1$\boxed{2}$の結果を用いるために次の仮定をおく。

<u>仮定A</u>　函数族 $\mathbb{B}_1 = \{G_1(\cdot, y) : y \in S\}$ はSの点を分離する。

この仮定がなりたてばresolvent G_α は第二章§1$\boxed{2}$の条件をすべてみたしている。すなわち，

$(G_\alpha 5)$　$G_\alpha : C(S) \to C(S)$

は $C(S) = B(S)$ より，又

$(G_\alpha 5)$　$\mathbb{R}(S) = \{C(S)$ の G_α による領域$\}$ は $G_\alpha(x, y) = G_\alpha \chi_{\{y\}}(x)$ であるから $\mathbb{B}$ を含みSの点を分離する。

$f = G_1(\cdot y)$ が $\alpha G_{\alpha+1} f \leq f$ をみたすことは f が $\mathbb{R}(S)$ に属することから明らかである。

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

$\mathbb{C}_o$（S）を台が compact な $\mathbb{C}$（S）の部分空間とすれば $f \in \mathbb{C}_o$（S）は有限コの点を除いて0である。従つて $\mathbb{D}_o$（S）として｛ $x_{\{y\}}(\cdot)$; $y \in S$ ｝から有限係数をもつて生成される $\mathbb{C}_o$（S）の部分集合をとることが出来る。このとき

$$G_1(S) = \{ G_1 \text{による} \mathbb{D}_o^+(S) \text{の値域} \} \supset \mathbb{B}_1$$

これより第一，第二章の結果によつて次のような canonical なMarkov過程が構成出来る。

（2.1）で定義された距離 ρ

$$\rho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|f_n(x) - f_n(y)|}{1 + |f_n(x) - f_n(y)|} \qquad \{f_n\} = \mathbb{C}_1(S)$$

あるいはそれと equivalent な距離

$$\rho_G(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} |g_n(x) - g_n(y)| \qquad \{g_n\} = \mathbb{B}_1 \quad \{G_1(\cdot\, y) : y \in S\}$$

によるSの完備化を $\widetilde{S}$（campact）とする。

（4.5）　$\widetilde{S}_R = \{ x ; x \in \widetilde{S}, \sum_{y \in S} \widetilde{G}_1(x, y) = 1 \}$

$\widetilde{G_1}(\cdot, y)$ は $G_1(\cdot\, y)$ の $\widetilde{S}$ 上への連続拡大

とおき，$\widetilde{S}_R$ を $\widetilde{S}$ の相対位相で考えたときの位相的Borel 集合体を $\mathbb{B}_{\widetilde{S}_R}$，$\mathbb{B}_{\widetilde{S}_R}$ 可測有界函数の全体及び有界連続函数の全体を $\mathbb{B}(\widetilde{S}_R)$，$\mathbb{C}(\widetilde{S}_R)$ とすると，$\widetilde{S}_R$ 上の推移確率 $\widetilde{p}_t(x, B)$，$\mathbb{B}(\widetilde{S}_R) \to \mathbb{B}(\widetilde{S}_R)$ なる半群 $\widetilde{H}_t$，resalvent $\widetilde{G}_\alpha$ が一意的に定まり(*)，$\widetilde{G}_\alpha$ から canonical なMarkov 過程を構成することが出来る。

<u>定義</u>　canonical なMarkov 過程 $X = (W, \mathbb{B}, P_x, x \in \widetilde{S}_R)$ をS上の canonical なMarkov 連鎖又は単にMarkov 連鎖という。

Markov 連鎖Xは第一，第二章で述べられた性質をすべてもつているが更に次のようなことがわかる。

<u>Prop4.1</u>　$\widetilde{G}_\alpha$ は $\mathbb{B}(\widetilde{S}_R)$ を $\mathbb{C}(\widetilde{S}_R)$ にうつす。

証明　$x_o \in \widetilde{S}_R$ を固定する。$\widetilde{S}_R$ の定義（4.5）より $\forall \epsilon > 0$ に対して十分大きな有限集合 S_ε ($\subset S$) が存在して $\widetilde{G}_1(x_o, S_\varepsilon) > 1 - \epsilon/3\,\|f\|$ ならしめうる。$\widetilde{G}_1(\cdot, y)$ は $\widetilde{S}$ 上の連

(*) 定理 2.1 より $\widetilde{S}$ を利用して構成したProcessは実は $\widetilde{S}_R$ 上にあるからそこに限定して考えてよい。

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

続函数であるから

$$U=\{\, x\in\widetilde{S}\ ;\ \widetilde{G}_1(x,S_\varepsilon)>1-\varepsilon/3\|f\|\,\}$$

は x_0 を含む $\widetilde{S}$ の開集合。有限和 $\sum_{y\in S_\varepsilon}\widetilde{G}_1(x,y)\equiv Af(x)$ も $\widetilde{S}$ で連続だから U_ε に含まれる x_0 の近傍Vがあつて

$$V\ni x\Rightarrow |\,Af(x)-Af(x_0)\,|<\varepsilon/3$$

に出来る。故に $\widetilde{S}_R$ での x_0 の近傍 $V_\varepsilon\cap\widetilde{S}_R$ の任意の x について，

$$|\,\widetilde{G}_1f(x)-\widetilde{G}_1f(x_0)\,|\quad |\,Af(x)-Af(x_0)\,|+\sum_{y\in S-S_\varepsilon}\widetilde{G}_1(x,y)\,|\,f(y)\,|$$
$$+\sum_{y\in S-S_\varepsilon}\widetilde{G}_1(x_0,y)\,|\,f(y)\,|$$
$$<\varepsilon/3+\|f\|\,\varepsilon/3\|f\|+\|f\|\,\varepsilon/3\|f\|=\varepsilon$$

となる。このProp.より第一章定理 1.5 の証明のあとの注意によつて

<u>Prop.4.1の系</u>　canonical なMarkov 連鎖の分岐点の全体 S_b は F_σ—set であり，S_b へのhitting time は

$P_x(\sigma_{S_b}\equiv+\infty)=1$　あるいは　$P_x(\forall t\geq 0\ \ x_t\notin S_b)=1$

がなりたつ。

<u>Lemma 4.2</u>　任意の $f\in C(\widetilde{S}_R)$，$x\in\widetilde{S}_R$ に対して

(i)　$\lim_{t\to 0}\widetilde{H}_t f(x)=\int_{\widetilde{S}_R}\mu(x,dy)\,f(y)$　$\mu(x,\cdot)$ は x における分岐測度

(ii)　$H_t f(x)$ は $t>0$ で右連続である。

これはpath の右連続性と x_0 の初期分布が $\mu(x,\cdot)$ であることから得られる。(cf.定理1.5)
このことから次の定理が得られる。

定理 4.2　(i)　$x,y\in S=\widetilde{P}_t(x,y)=P_t(x,y)$　　　$t>0$

(ii)　$x\ \ \widetilde{S}_R$ に対して $\widetilde{P}_t(x,S)=1$　　　$t>0$

証明　$\widetilde{G}_\alpha$ の定義より，x，y　Sならば，$\widetilde{G}_\alpha(x,y)=G_\alpha(x,y)$
逆Laplace 変換をとつて，

(*)　$\widetilde{P}_t(x,y)=P_t(x,y)$　　　a・a・t

Sは高々可算であるから，これは　y　Sに対して，殆んどすべてのtについて成り立つ。N

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

を除外 t 集合とし，t_0 Nであつたとする。t_n N $t_n \downarrow t_0$ なる列をとつておく。(*) より

$P_{t_n}(x, S)=1$ ∴

$$\widetilde{H}_{t_n} f(x)=\sum_{y}{}_S \widetilde{P}_{t_n}(x, y) f(y)=\sum_{y}{}_S P_{t_n}(x, y) f(y)=H_{t_n} f(x)$$

但し，右辺のH_{t_n}は，(4.3) で定義されたものとする。

定理 4.1 (i) と Lemma 4.2 (ii) より f C $(\widetilde{S})$ に対して $t_n \downarrow t_0$ とすれば，

$$\widetilde{H}_{t_0} f(x)=H_{t_0} f(x)$$

Riesz の定理より $\widetilde{P}_{t_0}(x, y)=P_{t_0}(x, y)$。

次に $\widetilde{G}_\alpha(x, S)=1$ から $\widetilde{P}_t(x, S)=1$ (a.a.t) 除外 t 集合をNとし，t N，

$s>0$ をとると，

$$\widetilde{P}_{t+s}(x, S)=\int \widetilde{P}_t(x, dy) P_s(y, S)$$
$$=\sum_{y}{}_S \widetilde{P}_t(x, y) P_s(y, S)=1 \qquad (t \quad N より)$$

$\therefore N=\phi$

Lemma 4.2 で示された半群の原点における連続性を用いて推移確率 $\widetilde{P}_t(x, y)$ の連続性をしらべることが出来る。

P.Levy [20] に従つて

定義 x $\widetilde{S}_R$は任意の $t>0$，y $\widetilde{S}_R$に対して$\widetilde{P}_t(y, x)=0$ なるとき ficticious であるという。

S_bを第一章でのようにすべての分岐点の全体，F ですべての ficticious な点の全体をあらわすことにする。定理 4.2 より $\widetilde{S}_R - S$ F，Lemma 1.4 より S_b F である。

定理 4.3 $\widetilde{P}_t(x, y)$ を canonical な Markov 連鎖の推移確率とすれば，

(i) x $F = \lim_{t\to 0} \widetilde{P}_t(x, y)=\delta(x, y)$

(ii) x $F - S_b = \lim_{t\to 0} \widetilde{P}_t(x, y)=0 \qquad y \quad \widetilde{S}_R$

(iii) x $S_b = \lim_{t\to 0} \widetilde{P}_t(x, y) = \begin{cases} 0 & y \quad F \\ \mu(x, y) & y \quad F \end{cases}$

但し $\mu(x, \cdot)$ は x における分岐測度とする。

証明 いくつかの場合にわけて行なう。

1° x $S_b = \lim_{t\to 0} \widetilde{P}_t(x, y)=0 \quad (y=x)$

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

$f(x)=0$, $f(y)=1$ なる $f \quad C(\widetilde{S})$ をとればLemma4.2から

$$\overline{\lim_{t\to 0}}\,\widetilde{P}_t(x,y) \leqq \lim_{t\to 0}\widetilde{H}_t f(x) = f(x) = 0$$

2° $x \quad F = \lim_{t\to 0}\widetilde{P}_t(x,x) \equiv \lim_{t\to 0} P_t(x,x) = 1$

xはficticious でないから$\widetilde{P}_t(y,x)>0$ なる $t>0$ と $y \quad \widetilde{S}_R$が存在する。$y \quad S$ ならば定理4.1より$\widetilde{P}_t(y,x)$ は $t>0$ で連続。$y \quad S$の場合にも$\widetilde{P}_t(\ ,\ )$をS $\{y\}$の上に制限して考えればこの上の推移確率であるからやはり定理4.1によつて$\widetilde{P}_t(y,x)$ は $t>0$ で連続である。

$$\widetilde{P}_{t+s}(y,x) = \sum_{z\ S}\widetilde{P}_t(y,z)\,P_s(z,y)$$

$$= \widetilde{P}_t(y,x)\,P_s(x,x) + \sum_{z=x,z\ \ S-F}\widetilde{P}_t(y,z)\,P_s(z,y)$$

$S_b \quad F$と1°から$S\downarrow 0$とすれば

$$\widetilde{P}_t(y,x) = \widetilde{P}_t(y,x)\lim_{s\downarrow 0}P_s(x,x)$$

$$\therefore \lim_{s\to 0}P_s(x,x) = 1$$

3° $x \quad S_b, y \quad F = \lim_{t\to 0}\widetilde{P}_t(x,y) = \mu(x,y)$

$x_0(w)$ の初期分布は$\mu(x,\cdot)$ で$\mu(x,S_b)=0$ (cf. 定理1.2) であつたから

$$\widetilde{P}_t(x,y) = \int_{\widetilde{S}_R - S_b}\mu(x,dz)\,\widetilde{P}_t(z,y)^{(*)}$$

$t\downarrow 0$として1°, 2°で得たことを用いれば

$\widetilde{P}_t(z,y)\to\delta(z,y)$ $(t\downarrow 0)$ であるから$\widetilde{P}_t(x,y)\to\mu(x,y)$ $(t\to 0)$ である。

1°, 2°, 3°をあらわせば定理が証明されたことになる。

注意 1°上の証明2°で述べたようにしてLemma 4.2の (ii) は次のよう強められる。

$f \quad B(\widetilde{S}_R)$ に対して$\widetilde{H}_t f(x)$ は $t>0$ で連続であり且つ任意の閉区間 $I \quad (0,+\infty)$ で一様連続である。2°定理4.2 (i) は先づ (ii) を証明し, $x, y \quad S$に対して (*) のなりたつ t集合をTとすれば, $s, t \quad T$ならば $s+t \quad T$なることからも出る。

$x \quad S$が分岐点であるかどうかは一般にはわからないが (p_3) があればxは分岐点ではない。それには次の補題を示しておけば十分である。

Lemma4.3 推移確率$P_t(x,y)$が条件(P_3)をみたすならば

(*)解析的には才一章の構成より $f \quad C(S)$に対して$H_t f(x) = \int H_t f(z)\mu(x,dz)$から出る。

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

(i) $\lim_{t\to 0} H_t f(x) = f(x) = \lim_{\alpha\to\infty} \alpha G_\alpha f(x)$ $\quad x \; S, \quad f \; B(\tilde{S}_R)$

(ii) 仮定A： $B_1 = \{ G_1(\cdot, y) ; y \; S \}$ はSの点を分離する。がなりたつ。

証明 定理 4.1 (ii) より $P_t(x, y)$ は $0 < t < 1$ で連続。Dini の定理により t 〔0.1〕 について一様に $\sum_{y \; S} P_t(x, y)$ は 1 に収束する。従つて任意の f B(S) に対して $\sum_{y \; S} P_t(x, y) f(y)$ も t 〔0.1〕について一様収束。故に

$$\lim_{t\to 0} H_t f(x) = \sum_{y \; S} \lim_{t\to 0} P_t(x, y) f(y) = f(x)$$

$$\lim_{\alpha\to\infty} \alpha G_\alpha f(x) = \lim_{\alpha\to\infty} \alpha \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} H_t f(x) dt = \lim_{\alpha\to\infty} \int_0^{+\infty} e^{-t} H_{t/\alpha} f(x) dt = f(x)$$

次に B_1 で分離出来ない点 x, x' があつたとする。 $y \; S$ に対して $G_1(x, y) = G_1(x', y)$。resolvent equation より $\alpha > 0 \quad G_\alpha(x, y) = G_\alpha(x', y)$。故に f B(S) に対して $\alpha G_\alpha f(x) = \alpha G_\alpha f(x')$ となりすでに証明したことから $\alpha \to +\infty$ として $f(x) = f(x')$ これは矛盾である。

このLemmaによつて (P_3) をみたす推移確率が与えられたときには，つねに $x \; S$ が分岐点でないようなcanonical なMarkov 連鎖を構成することが出来る。

注意

1° Lemma 4.2 (ii) より x_t は確率連続である。

2° 定理 4.2 (ii) より

$$E_x\left\{\int_0^{+\infty} \chi_{\tilde{S}_R - S}(x_t) dt\right\} = \int_0^{+\infty} P_t(x, S^c) dt = 0$$

すなわち $P_x\{ x_t(w) \; \tilde{S}_R - S$ なる t 集合のLebesque 測度 $0 \} = 1$ である。Sにextra な点∞をつけ加えて

$$\begin{aligned} \tilde{x}_t(w) &= x_t(w) & \quad x_t(w) \; S \\ &= \infty & \quad x_t(w) \; S \end{aligned}$$

と定義すると，$\tilde{x}_t$ はS $\{\infty\}$ 上のMarkov 過程で，一般に取扱われているMarkov 連鎖の一つのversion である。

Xをcanonical なMarkov 連鎖とする。

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

$B \in \mathbb{B}_{\widetilde{S}_R}$ に対して，そのhitting time を

$$\sigma_B(w) = \inf\left\{ t \, ; \, x_t(w) \in B \right\} \qquad \text{ある } x_t(w) \in B \text{ のとき}$$
$$= +\infty \qquad\qquad \text{そうでないとき}$$

と定義すれば，定理1.5の系の注意とProp4.1の系とより，σ_BはMarkov time となる。$B = \{x\}$，$B = \{x\}^c$のときには，σ_Bを特にσ_x，τ_xとかき，τ_xを点xへの滞在時間とよぶ。これは，点xから始めて出る時間といつてもよい。τ_xの分布はよく知られたように，指数分布に従う。すなわち

(4.6) $\quad P_x(\tau_x > t) = e^{-q_x t} \qquad 0 \leq q_x \leqq +\infty$

実際，Markov 性から

$$P_x(\tau_x > t+s) = P_x(\tau_x(w_t^+) > s)$$
$$= E_x\left\{ P_{x_t}(\tau_x > s) \, ; \, \tau_x > t \right\} = E_x\left\{ P_x(\tau_x > s) \, ; \, \tau_x > t \right\}$$
$$= P_x(\tau_x > t)\, P_x(\tau_x > s)$$

従つて $0 \quad P_x(\tau_x > t) \quad 1$ であるから $P_x(\tau_x > t) = e^{-q_x t}$ なる $0 \quad q_x \quad +\infty$ が存在する。

定義 $q_x < +\infty$のとき，xをstable state，$q_x = +\infty$のときはinstantaneous state という。$q_x = 0$の場合にはxをtrap という。

$0 < q_x < +\infty$のときには，xから出発したpath は，指数分布に従つてxから去る。$q_x = +\infty$のときには$P_x(\tau_x \equiv 0) = 1$で，そこから出発した瞬間にxを去る。精確には，どんな$\varepsilon > 0$に対しても$x_t(w) \neq x$なる$t < \varepsilon$が存在する。又$q_x = 0$のときには，$P_x(\tau_x \equiv +\infty) = 1$で，始め$x$にあつたPath は，永久に$x$から去ることが出来ない。substochastic な$P_t(x,y)$をstochastic にするため（4.1）によつてつけ加えた点∂は，trap としてつけ加えたことになる。$x \in \widetilde{S}_R - S$ならば，$x_t(w) = x$なる$t$集合のLebesgue 測度は0であつたから，$x$はinstantaneous である。この場合には，定理4.2(ii)より，$y \in \widetilde{S}_R$，$\forall t > 0$に対して$P_t(y, x) = 0$となつているので点xはficticious である。

$0 < q_x < +\infty$のとき，path の右連続性から時刻τ_xのときにはx_{τ_x}はx以外の点にある。この点は，滞在した時間の長さτ_xとは独立であることがわかる。すなわち <u>Prop.4.2</u>

$\forall P_x$に関して，τ_xとx_{τ_x}とは独立である。

証明 $\quad \tau_x(w) > t$ならば，$\tau_x(w) = t + \tau_x(w_t^+)$であるから，Markov 性より，

$$P_x(\tau_x > t, \, x_{\tau_x} \in B) = P_x(\tau_x > t, \, x_{\tau_x}(w_t^+) \in B)$$

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

$$=E_x\left\{P_{x_t}(x_{\tau_x}\ B)\ ;\ \tau_x>t\right\}$$

$$=P_x(\tau_x>t)\,P_x(x_{\tau_x}\ B)$$

今

(4.7) $\pi(x,B)=P_x(x_{\tau_x}\ B)$

とおけば,

xが instantaneous ならば, $\pi(x,B)=\delta(x,B)$

xが stable (trap でないとする) ならば$\pi(x,x)=0$

である。

以上q_x, $\pi(x,B)$を確率論的に定義したが,これらは次のようにして解析的にも求められる。

定理 4.4 (J.L.Doob, A.N.Kolmogorov) x,y Sに対して

(i) $\lim_{t\to 0}[1-P_t(x,x)]/t=q_x$

(ii) $\lim_{t\to 0}P_t(x,y)/t=q_{xy}<+\infty$ ($x\neq y$) が存在して, x , yが stable (xは trap でないとする) ならば

$$\pi(x,y)=q_{xy}\cdot q_x$$

これらの事実の証明は, J.L.Doob [7, chapter Ⅵ, §2] 又はK.L.chung [3, part Ⅱ・§2, §5] 等にある。

注意

1°, 一般には$\pi(x,S)\leq 1$

2° (i) の証明は$0\leq f(x)<+\infty$, $f(t+s)\leq f(t)+f(s)$ (劣加法函数) に対しては, いつでも $\lim_{t\to 0}f(t)/t$ が存在することが用いられる。$f(t)=1-P_t(x,x)$ とおけば, f (t) はこの性質をもつている

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

$$f(t)+f(S)=f(t+S)+f(t)f(S)+\sum_{y \in S,\, y=x} P_t(x,y)P_t(y,x)$$

§2 推移確率の分解

この§では可測な推移確率を条件Aをみたす推移確率とtを含まない推移確率の積に分解出来ることを示す。これはJ.L.Doobによつて証明され，P.Lévy〔20〕でそのような推移確率に対応するMarkov 連鎖の確率論的構造が述べられている。こゝではcanonical なMarkov 連鎖を構成するときの技巧を用いて述べる。

$P_t(x,y)$ を可測な推移確率とする。（4.1）によつて $P_t(x,y)$ はstochastic として一般性を失なわない。$P_t(x,y)$ のLaplace 変換 $G_\alpha(x,y)$ によりSに次のような同値関係を入れる。

（4.9） $x \sim x' \Leftrightarrow y \in S$ に対して $G_1(x,y)=G_1(x',y)$

"$\sim$" によつてSの元を同値なクラスにわけ，x を含むクラスを x^*，その全体を S^* であらわす。

$x, x' \in x^*$ とすれば，定理4.2（i）の証明と同じようにして，$t>0$，$y \in S$ についてP $P_t(x,y)=P_t(x',y)$ であることがわかる。従つて $\pi_t(x^*,y)=P_t(x,y)$ と定義することが出来る。

更に

（4.10） $\pi_t(x^*,y^*)=\sum_{y \in y^*}\pi_t(x^*,y)$

と定義すれば，

Lemma 4.4 $\pi_t(x^*,y^*)$ は S^* 上の可測な推移確率であつて，§1の条件Aをみたしている。

証明 可測性と（P_1）は定義から直ちにわかる。

（P_2）は

$$\sum_{z^*}\pi_t(x^*,z^*)\pi_s(z^*,y^*)=\sum_{z^*}\Big\{\sum_{z \in z^*}P_t(x,z)\Big\}\Big\{\sum_{y \in y^*}P_s(z,y)\Big\}$$

$$=\sum_{y \in y^*}\sum_{z^*}\sum_{z \in z^*}P_t(x,z)P_s(z,y)=\sum_{y \in y^*}P_{t+s}(x,y)$$

$$=\pi_{t+s}(x^*,y^*)$$

次に $x_1^*=x_2^*$ とする。ある $z \in S$，$t>0$ で $P_t(x_1,z)=P_t(x_2,z)$ なるものが存

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

在する。$\forall s>0$，$y^*\in S^*$に対して$\pi_s(x_1^*,y^*)=\pi_s(x_2^*,y^*)$ならば，

$$P_t(x_1,z)=\sum_y P_s(x_1,y)\,P_{t-s}(y,z)$$

$$=\sum_{y^*}\sum_{y\in y^*}\pi_s(x_1^*,y)\,P_{t-s}(y,z)$$

$$=\sum_{y^*}\pi_s(x_1^*,y^*)\,P_{t-s}(y,z)$$

$$=\sum_{y^*}\pi_s(x_2^*,y^*)\,\pi_{t-s}(y,z)$$

$$=P_t(x_2,z)$$

となりｔ，ｚのとり方に矛盾する。条件Ａはこのことゝ Laplace 変換の一意性からみちびかれる。

この Lemma からS^*上の推移確率π^*に対応して canonical な Markov 連鎖X^*が定まる。X^*に対応する ficticious な点の全体をF^*とする。

定理4.5

(i) yがＳの ficticious なる点であるための必要十分条件はy^*がS^*の ficticious なる点となることである。

(ii) 各$y\in S$に対して$\pi(y^*,y)>0$が存在し，

(4.11) $$P_t(x,y)=\pi_t(x^*,y^*)\,\pi(y^*,y)$$

とかけ，

$$\sum_{y\in y^*}\pi(y^*,y)=1 \qquad y\text{が ficticious でないとき}$$
$$=0 \qquad y\text{が ficticious なとき}$$

となつている。

証明 (i)は(4.10)より明らか。

次に$z^*=y^*$且つ$z^*\in F^*$とすると定理4.3 (i)より

$$\pi_s(z^*,y)\leqq\pi_s(z^*,y^*)\to 0 \quad (S\to 0)$$

であるから

$$P_{t+s}(x,y)=\sum_{z^*}\pi_t(x^*,z^*)\,\pi_s(z^*,y)$$

$$=\pi_t(x^*,y^*)\,\pi_s(y^*,y)+\sum_{\substack{z^*\neq y^*\\ z^*\in S^*-F^*}}\pi_t(x^*,z^*)\,\pi_s(z^*,y)$$

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

において，最初の式はP_tの連続性，及び最後の 数は上のことによつて $S\downarrow 0$のとき，それぞれ$P_t(x,y)$及び0に収束する。従つて

$$\lim_{s\to 0}\pi_s(y^*,y)=\pi(y^*,y)$$

が存在し，(4.11) をみたす。

$$\pi_s(y^*,y^*)=\sum_{y\ y^*}\pi_s(y^*,y)$$

より$y^*\ \ F^*$ならば$S\downarrow 0$として$\sum_{y\ y^*}\pi_s(y^*,y)=1$

$y\ \ F^*$ならば$\pi_s(y^*,y)\ \ 0$だから$\pi(y^*,y)=0$ ($y\ \ y^*$)

定理4.5の系　任意の可測な推移確率に対して

(i) $x^*\ \ F^*\Rightarrow\lim_{t\to\infty}P_t(x,y)=\delta(x^*,y^*)\pi(y^*,y)$

(ii) $x^*\ \ F^*-S_b^*\Rightarrow\lim_{t\to\infty}P_t(x,y)=0\qquad y\ \ S$

(iii) $x^*\ \ S_b\Rightarrow\lim_{t\to\infty}P_t(x,y)=0\qquad y^*\ \ F^*$

$$=\mu(x^*,y^*)\pi(y^*,y)\qquad y\ \ F^*$$

但しF^*, S_b^*はX^*のficticious な点及び分岐点で，$\mu(x^*,\ )$はx^*における分岐測度とする。

定理4.5の系2　可測な推移確率$P_t(x,y)$がSにficticiout な点をもたないならば，

(4.11)′ $P_t(x,y)=\pi_t(x^*,y^*)\pi(y^*,y)$

と分解したとき，$\pi_t(x^*,y^*)$はS^*上の連続性の条件

(P_3) $\lim_{t\to 0}\pi_t(x^*,y^*)=\delta(x^*,y^*)$

をみたす推移確率であり，且つ$\pi(y^*,y)$はy^*上の確率分布である。

注意　$P_t(x,y)$がficticious な点をもたないとき，分解 (4.11) によつて，$\pi_t(x^*,y^*)$からcanonical なMarkov 連鎖X^*が構成出来る。一方各y^*に対して集合y^*の値をとる独立確率変数の系$\{\xi_{y^*}(w);\ t\geq 0\}$で各$\xi_{y^*}(t)$が分布$\pi(y^*,\cdot)$に従う$X^*$とこれらの直積を作つて$(x_t^*(w^\circ),\ \xi_{x_t^*}(t,w^\circ))$(*)なるprocess をsymbolical

(*) w°は直積空間の根元事象

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

に考えれば，これが$P_t(x, y)$に対応するMarkov 連鎖でP.Levy〔20〕で云つている第6型のprocess に相当する。

§3. 滞 在 時 間 (*)

〔I〕

XをMarkov 連鎖とし，各$x \in S$に対して

$$(4.12) \qquad Z_x \equiv Z_x(w) = \{ t ; x_t(w) = x \}$$

$$Z_\infty \equiv Z_\infty(w) = \{ t ; x_t(w) \in \tilde{S}_R - S \}$$

とおく。Z_x, Z_∞はpath が点x又は$\tilde{S}_R - S$の中にある時間の集合であり，wは右連続だから$Z_x(w)$は〔0，$+\infty$）の可測集合である。Xはcanonical であるから定理2.1により

$$\sum_{x \in S} Z_x + Z_\infty = [0, +\infty)$$

となつている。

Prop.4.3 $\overline{Z}_x - Z_x$の点は高々可算集合である。

証明　path wは右連鎖であるから，$\overline{Z}_x - Z_x \ni t_0$ならば，$t_0$は$Z_x$の中の点で右側から近近づけることは出来ない。従つて，t_0は$\overline{Z}_x$の中で，右側に孤立している。各$t \in \overline{Z}_x - Z_x$に対して，$\exists \varepsilon > 0$で〔$t, t+\varepsilon$〕$\cap \overline{Z}_x = \phi$となるようなものがとれる。この閉区間を$I_t$とかけば，$t, s \in \overline{Z}_x - Z_x$　$t \neq s$ならば$I_t \cap I_s = \phi$。これより$\overline{X}_x - Z_x$は高々可算集合であることがわかる。

Pathが高々第一福不連続なことから次のことも殆んど明らかである。

Prop.4.4 $\overline{Z}_x \cap \overline{Z}_y$ $(x \neq y)$は高々可算集合である。

Prop.4.5 $x \in S$がinstantaneous ならば，Z_xはnowhere dense である。

証明　$\overline{Z}_x$が開集合を含まないことを云えばよい。$\overline{Z}_x$がある開区間$I = (a, b)$を含んだとする。xはinstantaneous であるからZ_xはIを含まない。従つて$I \cap Z_y \neq \phi$ $(x \neq y)$なるyが存在する。$I \cap Z_y$に属する点tをとる。path は右連続であるから，yの十分小さな近傍Uで，$U \not\ni x$なるものが存在し　$\varepsilon > 0$　$x_{t+h}(w) \in U$　$0 \leqq h \leqq \varepsilon$となつている。

(*)この§の結果はK.L.Chung〔3，II，5〕と平行する部分も多いが，xがcanonical という性質を利用出来るので，重複をいとわず証明をつけておく。

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

故に

$$0<\int_a^b \chi_U(x_s(w))\,ds=\int_a^b \chi_{U\cap S}(x_s(w))\,ds=\sum_{z\in U\cap S}\int_a^b \chi_{\{z\}}(x_s(w))\,ds$$

従つてある z　x で $\int_a^b \chi_{\{z\}}(x_s(w))\,ds>0$　となる。

すなわち，$|I\cap Z_z|>0$（$|A|$ はAのLebeszue 測度）。$I\subset\overline{Z}_x$ であつたから，$\overline{Z}_x\cap Z_z$ は非可算集合となりProp.4.4に矛盾を生ずる。

Prop.4.5の系　$\forall x\in S$ instantaneous ならば $\widetilde{S}_R-S=\phi$ であり，且つ $P_x(\overline{Z_\infty}=[0,+\infty))=1$ である。

Prop.4.5より Z_x はnowhere dense だから $\sum_{x\in S} Z_x$ は $[0,+\infty)$ の第一類集合となる。従つてBaire-Hausdroff の定理により $Z_\infty=[0,+\infty)-\sum_{x\in S} Z_x$ はいたるところ稠密である。

この系は，すべてのstate がinstantaneous であるときは，(2.1) の距離による完備化で真にあたらしい点がつけ加えられcanonical なprocess を構成するために上記の意味でつけ加えられた点を十分に利用していることを示す。

定理4.6　$\forall t>0$ に対して

$$P_x\left\{\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{2\varepsilon}\int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon}\chi_{\{x\}}(x_s(w))\,ds=1 \,/\, x_t=x\right\}=1$$

及び

$$P_x\left\{\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon}\chi_{\{x\}}(x_s(w))\,ds=1\right\}=1$$

がなりたつ。

証明　$0\leq a<b$ とし

$$\Gamma=\left\{(t,w)\;;\;\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{2\varepsilon}\int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon}\chi_x(x_s(w))\,ds=1,\; x_t(w)=x,\; a\leqq t\leqq b\right\}$$

$$\wedge(t)=\{w\;;\;(t,w)\in\Gamma\},\quad T(w)=\{t\;;\;(t,w)\in\Gamma\}$$

とおけば，Lebesgues 密度定理より

$$|T(w)|=|Z_x(w)\wedge(ab)|$$

故にFubini の定理をつかつて

$$(\text{Lebesges 測度}\,P_x)\,(\Gamma)=\int_a^b P_x(\wedge(t))\,dt=E_x|T(w)|$$

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

$$=E_x|\ Z_x(w)\quad (a\,b)\ |=\int_a^b P_t(x,x)\,dt$$

従つて

$$(*)\qquad P_x(\quad (t))=P_t(x,x)\qquad a.a.t$$

がなりたつ。

次に

$$_t=\left\{w\ ;\ \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{2\varepsilon}\int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon}\chi_{\{x\}}(x_s(w))\,ds=1\right\}$$

とおけば， $t>\delta$ のとき，

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon}\chi_{\{x\}}(x_s(w))\,ds=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{2\varepsilon}\int_{\delta-\varepsilon}^{\delta+\varepsilon}\chi_{\{x\}}(x_s(w_{t-\delta}^{+}))\,ds$$

であるから

$$w\quad \wedge_t\ =\ w_{t-\delta}^{+}\quad \wedge_\delta$$

Markov 性から，

$$P_x\left\{w\ ;\ w\quad \wedge_t,\ x_t(w)=x\ ,\ x_{t-\delta}(w)=x\right\}$$

$$=P_x\left\{w\ ;\ w_{t-\delta}^{+}\quad \wedge\delta\ ,\ x_\delta(w_{t-\delta}^{+})=x\ ,\ x_{t-\delta}(w)=x\right\}$$

$$=E_x\left\{P_{x_{t-\delta}}\left\{w\ ;w\qquad \delta\ ,\ x_\delta(w)=x\right\};\quad x_{t-\delta}(w)=x\right\}$$

$$=P_x\left\{w\ ;\ w\quad \wedge\delta\ ,\ x_\delta(w)=x\right\}P_x(x_{t-\delta}=x)$$

故に $\quad P_x\left\{w\ ;\ w\quad \wedge_t\ ,\ x_t(w)=x\ ,\ x_{t-\delta}(w)=x\right\}/P_x(x_{t-\delta}=x)$

はすべての $t>\delta$ について一定である。x_t は確率連続であるから $\delta\downarrow 0$ として

$$P_x\left\{w\ ;\ w\quad \wedge_t\ ,\ x_t(w)=x\right\}/P_x(x_t=x)$$

はすべての $t>0$ に対して等しい値をもつ。これと (*) より，この値は1であることがわかる。後半も同様にして証明出来る。

定理4.6の系 $\quad x=y$ をSの2点とすると，

$$P_x\left\{\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_{\sigma_y}^{\sigma_y+\varepsilon}\chi_{\{y\}}(x_s)\,ds=1\,/\,\sigma_y\leq t\right\}=1$$

証明 $\qquad _t=\left\{w\ ;\ \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{3}\int_t^{t+\varepsilon}\chi_{\{y\}}(x_s)\,ds=1\right\}$ とおく。

強Markov 性より

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

$$P_x\{w; w\in\Lambda_{\sigma_y}, \sigma_y\le t\} = P_x\{w; w^+_{\sigma_y}\in \Lambda_0, \sigma_y\le t\}$$

$$= E_x\{P_{x_{\sigma_y}}\{w; w\in\Lambda_0\}, \sigma_y\le t\} = P_y(w; w\in\Lambda_0)\ P_x(\sigma_y\le t)$$

定理4.6よりこの右辺の第一因子は1であるから証明が了る。

この定理4.6の応用を次に示す。そのために，先づKac のLemma について設明する。

$M=(W, \mathbb{B}, P_x, x\in E)$ をmetric s ace E上のMarkov 過程とする。基礎の空間Wは簡単のため，高々第一種不連続な函数wの全体としておく。E上のBorel 可測有界函数の全体を $\mathbb{B}(E)$ とする。Mの推移確率を $P_t(x,B)$，$f\in\mathbb{B}(E)$ に対して

$$T_t f(x) = E_x\{f(x_t)\} = \int_E f(y)\, P_t(x, dy)$$

は $\mathbb{B}(E)$ 上の半群，

$$G_\alpha f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\, T_t f(x)\, dt$$

は $B(E)$ 上のresolvent になつているとしよう。

このとき次のLemma が成りたつ。

<u>Lemma</u> (Kac) $f, V\in\mathbb{B}(E)$ のとき，

$$R_\alpha f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} E_x\left(e^{-\int_0^t V(x_s)\,ds} f(x_t)\right) dt \qquad \alpha > \|V_-\|$$

と定義すると，R_α は $\mathbb{B}(E)\to\mathbb{B}(E)$ なる一つのoperator であり

(4.13) $R_\alpha f(x) = G_\alpha f(x) - R_\alpha(VG_\alpha f)(x)$

(4.14) $R_\alpha f(x) = G_\alpha f(x) - G_\alpha(VR_\alpha f)(x)$

がなりたつ。こゝで，$V_-(\cdot) = -V(\cdot)\vee 0$とする。

ここのLemma の証明については，伊藤—福島—渡辺〔16，§9〕を参照

先づ次のLemma がなりたつ。

<u>Lemma 4.5</u> $x, y\in S$，$x\neq y$ならば，

$$P_x(\sigma_y < t) > 0 \;=\; P_t(x, y) > 0$$

である。

証明 $P_t(x, y) \le P_x(\sigma_y < t)$ より⇐は明らか。

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

$P_x(\sigma_y < t) > 0$ とする。定理4.6の系から $\sigma_y(w) < t$ なるwに対しては，

$\int_{\sigma_y}^{t} \chi_{\{y\}}(x_s(w))\,ds > 0$ 及びこの逆がなりたつ。従つて，

$$P_x(\sigma_y < t) = P_x\left(\int_{\sigma_y}^{t} \chi_{\{y\}}(x_s)\,ds > 0\right) > 0$$

故に

$$0 < E_x\left\{\int_0^t \chi_{\{y\}}(x_s)\,ds\right\} = \int_0^t P_s(x, y)\,ds$$

これから $\exists t_0 \leq t$ で $P_{t_0}(x, y) > 0$ なることがわかる。

Kolmogorov—Chapman の式より

$$\forall s > t_0 \quad P_s(x, y) \geq P_{t_0}(x, y)\, P_{s-t_0}(y, y)$$

一方 $\forall s \geq 0$ に対して (P_3) と $P_s(y, y) \geq [P_{s/n}(y, y)]^n > 0$

従つて $P_t(x, y) > 0$ である。

これを用いると次の定理が証明出来る。

定理4.7 $P_t(x, y)$ を可測な推移確率とすれば，

$P_t(x, y) \equiv 0$ $(\forall t > 0)$ 又は $P_t(x, y) > 0$ $(\forall t > 0)$ である。

証明

1° $P_t(x, y)$ が stochastic で連続性の条件 (P_3) をみたしているとき

$$\varphi_t(w) = \int_0^t \chi_{\{y\}}(x_s(w))\,ds$$

とおく。Kac の Lemma で f 1，$V = \beta\chi_{\{y\}}$ $(\beta > 0)$

ととれば，(4.14) より

$$u(x) \equiv R_\alpha f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} E_x(e^{-\beta\varphi_t})\,dt$$

$$= \widetilde{G}_\alpha f(x) - \widetilde{G}_\alpha(Vu)(x)$$

$$= \frac{1}{\alpha} - \sum_z \widetilde{G}_\alpha(x, z)\,\beta\,\chi_{\{y\}}(z)\,u(z)$$

$$= \frac{1}{\alpha} - \beta G_\alpha(x, y)\,u(y) \qquad (x, y \in S)$$

すなわち

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} E_x (e^{-\beta \varphi t})\, dt = \int_0^{+\infty} e^{\cancel{-\alpha t} \cancel{dt - \beta}} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} P_t (x, y)\, dt \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} E_y (e^{-\beta \varphi t}) dt$$

であるから，Laplace 変換の一意性によつて

$$(4.15) \quad E_x (e^{-\beta \varphi t}) = 1 - \beta \int_0^t E_y (e^{-\beta \varphi t-s})\, P_s (x, y)\, ds \ , \ \beta > 0$$

がなりたつ。Lemma 4.5 の証明のときに示したように $\exists t_o$ $P_{t_o} (x, y) > 0$ ならば $P_t (x, y) > 0$ $\forall t$ t_o であり又 $\exists t_o$ $P_{t_o} (x, y) = 0$ ならば $P_t (x, y) \equiv 0$ $\forall t \leqq t_o$ であることも同様な方法でわかる。従つて

$$\tau = \sup \{ t \ ; \ P_t (x, y) = 0$$

とおけば $\tau = 0$ 又は $= +\infty$ となることを云えば 1° の場合の証明が了る。(*) $0 < \tau < +\infty$ として矛盾を導びく。この τ に対して $\exists t_o > 0$ で，$P_{t_o} (x, y) = 0$ $P_{2t_o} (x, y) > 0$ なるものがとれる。

$t = 2t_o$ のときに（4.15）右辺の convolution を計算すると，上の注意より

$$\int_0^{2t_o} E_y (e^{-\beta \varphi 2t_o - s})\, P_s (x, y)\, ds = \int_{t_o}^{2t_o} E_y (e^{-\beta \varphi 2t_o - s})\, P_s (x, y)\, ds$$

Lemma 4.5 より $P_x (\sigma_y \leqq t_o) = 0$ すなわち，P_x 一測度 0 の w-set を除いたところからとつた w に対して $\sigma_y (w) > t_o$。上式右辺の積分変数 s は $t_o \leqq s \leqq 2t_o$ だから $2t_o - s \leqq t_o$。これは $2t_o - s$ 迄には path は y に到達していないことから $\varphi_{2t_o - s} (w) = 0$
従つて

$$\int_0^{2t_o} E_y (e^{-\beta \varphi 2t_o - s})\, P_s (x, y)\, ds = \int_{t_o}^{2t_o} P_s (x, y)\, ds$$

故に

$$E_x (e^{-\beta \varphi 2t_o}) = 1 - \beta \int_{t_o}^{2t_o} P_s (x, y)\, ds$$

$P_{2t_o} (x, y) > 0$ より右辺の積分は > 0。β を十分大きくとれば $E_x (e^{-\beta \varphi 2t_o}) < 0$ ととなり矛盾が生じた。

(*) $P_t (x, x) > 0$ （$\forall t > 0$）はすでに Lemma 4.5 の証明のときに示した。よつて以下 $x \neq y$ としてよい。

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

2° 一般の場合

yがficticiousであれば明らかになりたつ。Sのficticiousな点の全体をFとし，$S'=S-F$上に$P_t(x,y)$を制限したものも又推移確率である。S'上で考えて定理4.6の系2と1°の結果をあわせれば一般の場合にも成りたつことがわかる。

定理4.6と関連して，すべてのstateがstableなときに$P_t(x,y)$の2，3の性質を述べよ。

$$\sigma_y^{(o)}=\sigma_y,\quad \sigma=\tau_y+\sigma_y(w^+_{\tau_y})$$

$$\sigma_y^{(1)}(w)=\sigma_y^{(o)}(w)+\sigma(w^+_{\sigma_y^{(o)}})$$

- - - - - - - - - - - - -

$$\sigma_y^{(n)}(w)=\sigma_y^{(n-1)}(w)+\sigma(w^+_{\sigma_y^{(n-1)}})\qquad n\geq 1$$

$$\alpha\equiv P_x(\sigma_y<+\infty)\qquad \beta\equiv P_y(\sigma<+\infty)$$

$$F(t)\equiv P_x(\sigma_y\leq t/\sigma_y<+\infty)\qquad G(t)\equiv P_y(\sigma_y\leq t/\sigma<+\infty)$$

$$\varphi(t)\equiv P_x(\sigma_y\leq t)=\alpha F(t)\qquad \varphi(t)\equiv P_y(\sigma\leq t)=\beta G(t)$$

$$F_n(t)=P_x(\sigma_y^{(n)}\leq t/\sigma_y^{(n)}<+\infty)\qquad n\geqq 0$$

σはyから去つたのちに，始めてyに帰つてくる時間を，$\sigma_y^{(n)}$はyに到達したのち，丁度n回回目にyに帰える時間である。このとき，P.Lévy〔20，Ⅱ.7〕によれば

<u>Prop.4.6</u>　Sの点はすべてstableでx，$y\in S$，$x\neq y$とする。

(i)　σ_yの分布は絶対連続で，密度は$\equiv 0$又はつねに>0である。

(ii)　$$P_t(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha\beta^n\int_0^t e^{-q_y(t-s)}dF_n(s)$$

$$P_t(x,y)=e^{-q_x t}+\sum_{n=1}^{\infty}\beta^n\int_0^t e^{-q_x(t-s)}d[G(s)^{n*}]$$

とあらわせる。G^{n*}は分布Gのn回のconvolutionとする。

これを証明するために，先のLemmaを用意する。

<u>Lemma 4.6</u>　P_xに関して

(i)　τ_xと$\sigma_y(w^+_{\tau_x})$とは互に独立である。

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

(ii) $\sigma_y^{(1)}-\sigma_y^{(o)}$, $\sigma_y^{(2)}-\sigma_y^{(1)}$, ……, $\sigma_y^{(n)}-\sigma_y^{(n-1)}$, ………

は互に独立で同一分布をする。

(iii) σ_y と (ii) の確率変数を合せた系も独立系である。

証明 (i) 強Markov 性とProp．4.2 より，

$$E_x(e^{-\alpha\tau_x}e^{-\beta\sigma_y(w^+_{\tau x})})=E_x\{e^{-\alpha\tau_x}E_{x_{\tau_x}}(e^{-\beta\sigma_y})\}$$

$$=E_x(e^{-\alpha\tau_x})E_x\{E_{x_{\tau_x}}(e^{-\beta\sigma_y})\}=E_x(e^{-\alpha\tau_x})E_x(e^{-\beta\sigma_y(w^+_{\tau x})})$$

(ii) (iii) も同様に証明出来る。

prop．4.6 の証明

(i) $\sigma_y=\tau_x+\sigma_y(w^+_{\tau x})$ に注意すれば，Lemma 4.6 (i) より σ_y の分布は互に独立な確率変数の分布の convolution となり，

$$P_x(\sigma_y\leq t)=\int_0^t q_x e^{-q_x s}P_x(\sigma_y(w^+_{\tau x})\leq t-s)\,ds$$

定理 4.6 と Lemma 4.5 をあわせれば，$P_x(\sigma_y(w^+_{\tau x})\leq t)\equiv 0$

又は>0 ($\forall t>0$) であるから (i) がなりたつ。

先 (ii) 先づ

$$P_x(\sigma_y^{(n)}<+\infty)=P_x(\sigma_y^{(n-1)}<+\infty,\ \sigma(w^+_{\sigma_y^{(n-1)}})<+\infty)$$

$$=E_x\{P_{x_{\sigma_y^{(n-1)}}}(\sigma<+\infty)\ ;\ \sigma_y^{(n-1)}<+\infty\}$$

$$=P_y(\sigma<+\infty)P_x(\sigma_y^{(n-1)}<+\infty)=\beta\text{-}P_x(\sigma_y^{(n-1)}<+\infty)$$

$$=\cdots\cdots$$

$$=P_x(\sigma_y^{(1)}<+\infty)\beta^{n-1}=P_x(\sigma_y<+\infty,\ \sigma(w^+_{\sigma_y})<+\infty)\ \beta^{n-1}$$

$$=\alpha\beta^n \qquad (n\geqq 0)$$

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

次にLemma 4.6 (ii), (iii) から

$$P_x(\sigma_y^{(n)} \leq t) = P_x\{\sigma_y^{(o)} + (\sigma_y^{(1)} - \sigma_y^{(o)}) + \cdots\cdots + (\sigma_y^{(n)} - \sigma_y^{(n-1)}) \leq t\}, \quad \sigma_y^{(o)} = \sigma_y$$

$$= P_x\{\sigma_y \leq t) * P_x(\sigma_y^{(1)} - \sigma_y^{(o)} \leq t) * \cdots\cdots * P_x(\sigma_y^{(n)} - \sigma_y^{(n-1)} \leq t)$$

$$= \alpha F(t) * [P_x(\sigma(w^+_{\sigma_y}) \leq t] \overset{(n ケ)}{* \cdots\cdots *} P_x[\sigma(w^+_{\sigma_y}) \leq t]$$

$$= \alpha \beta^n F(t) * [G^{n*}](t)$$

一方

$$P_x(\sigma_y^{(n)} \leq t) = F_u(t) P_x(\sigma_y^{(n)} < +\infty) = \alpha \beta^n F_u(t)$$

$\therefore$

$$F_n(t) = F(t) * G^{n*}(t) \qquad n \geq 1$$

$$P_x(\sigma_y^{(n)} \leq t < \sigma_y^{(n+1)}, \ x_t = y) = P_x(\sigma_y^{(n)} \leq t, \ \tau_y(w^+_{\sigma_y^{(n)}}) > t - \sigma_y^{(n)})$$

$$= \int_o^t P_x(\sigma_y^{(n)} \in ds) P_y(\tau_y > t - s) = \int_o^{+\infty} e^{-q_y(t-s)} dF_n(t) P_x(\sigma_y^{(n)} < +\infty)$$

$$= \alpha \beta^n \int_o^t e^{-q_y(t-s)} dF_n(t)$$

$\therefore$

$$P_t(x, y) = \sum_{n=o}^{+\infty} P_x(\sigma_y^{(n)} \leq t < \sigma_y^{(n+1)}, \ x_t = y)$$

$$= \sum_{n=o}^{\infty} \alpha \beta^n \int_o^t e^{-q_y(t-s)} dF_n(t)$$

$P_t(x, x)$ についても全様。

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

〔Ⅱ〕

〔Ⅰ〕では主として滞在時間Z_x の集合としての性質をのべた。ここではZ_x と密接に関連している加法過程について述べる。

時刻tまでのxへの滞在時間の長さを$\varphi_t=\varphi_t^{(x)}$ とするとφ_tはadditive functional となる。φ_t の逆函数$\tau_t=\tau_t^{(x)}$ をつくると後に説明するようにtと共に増加する加法過程であることがわかる。 P. Levy〔20,21,22〕では$\tau_t^{(x)}$の性質や，あるいはそれとを利用してもとのprocess に関する問題をといている例えば定理4．5はそのような仕方で証明されている。(〔22〕)

以下少しadditive functional について準備する。

Sは一般のmetric space とし，S上の Markov 過程を W＝(W,B,P_x, $x\in$S)とする。Mは第一章の意味でcanonicalであるものとする。すなわち

1) W＝$\{$w; w は高々第一種不連続且つ右連続$\}$

2) 強 Markov 過程である

3) quasi-left continuous である

Mのkilling time(*) をσ_∞とする。

定義　函数$\varphi_t(w)$は $0\leq t<\sigma_\infty(w)$ で定義され

(A_1) φ_tは B_t 可測である

(A_2) $\varphi_t(w)+\varphi_s(w_t^+)=\varphi_{t+s}(w)$ が $t+s<\sigma_\infty(w)$ なる任意のs, t に対して成立する。

(A_3) $0\leq\varphi_t(w)\leq+\infty$

をみたすとき additive functional であるという。

(A_4) $\varphi_t(w)$ がtについて連続である

(A_4)をみたすものを連続なadditive functional という。ここでは(A_1)〜(A_4)をみたすものに限つて話をすすめる。

(A_2)，(A_3)からφ_tについて増加函数となるから，$t\geq\sigma_\infty(w)$ に対しては$\varphi_t(w)=\varphi_{\sigma_\infty-}(w)$と定義することが出来る。又($A_2$)で$t=0$ としてみれば，$\varphi_0(w)=0$である。

φ_tの逆函数τ_tを

(*)　〔16〕参照

(4.16) $\tau_t(w) = \sup\{S;\ \varphi_s(w) \leq t\}$ ある s で $\varphi_s(w) \leq t$ のとき，
$\qquad = +\infty$ そうでないとき

と定義する。

τ_t については次の性質がある。

Prop 4.7

(i) $\varphi\tau_t = t$,

(ii) τ_t =右連続で狭義単調増加函数である

(iii) τ_t は Markov time で

(4.17) $\tau_{t+h}(w) - \tau_t(w) = \tau_h(w^+_{\tau_t}) \qquad \forall_t >, o, \quad \forall h >, o$

証明 (i),(ii)は定義と φ_t が連続なことから容易にわかる。

$$\{w;\ \tau_t(w) \leq u\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{\varphi_{u+\frac{1}{n}}(w) > t\} \in B_{u+o}$$

だから τ_t は Markov time である。

$$\Sigma = \{s;\ \varphi_{\tau_t} + s \leq t + h\},\ このとき，$$

$$\tau_{t+h} - \tau_t < u \Longleftrightarrow \sup_{s \in \Sigma} s < u$$

である。

<= の証明 (i) を使つて，

$$\varphi_{\tau_t} + (\tau_{t+h} - \tau_t) = \varphi_{\tau_t+h} = t + h$$

故に $\tau_{t+h} - \tau_t \in \Sigma$ となり， $\tau_{t+h} - \tau_t < u$.

=> の証明

$s \equiv \tau_{t+h} - \tau_t$ が $< u$ ならば， $\varphi_{\tau_t+s} = \varphi_{\tau_t+s} \leq \varphi_u$

よつて $s \in \Sigma$

次に (A_2) から

$$\varphi_{\tau_t+s}(w) = \varphi_{\tau_t} + \varphi_s(w^+_{\tau_t}) = t + \varphi_s(w^+_{\tau_t})$$

これから $\forall u \geq o$ に対して

$$\tau_{t+h} - \tau_t < u \Longleftrightarrow \sup_{\varphi_{\tau_t+s} \leq t+h} s < u \Longleftrightarrow \sup_{\varphi_s(w^+_{\tau_t}) \leq h} s < u$$

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

$$\Longleftrightarrow \tau_h(w^+_{\tau_t}) < u$$

uは任意であつたから（iii）が得られたことになる。

ここで $M \equiv \times = (W, B, P_x, x\ \widetilde{S}_R)$ を canonical な Markov 連鎖とする。$\widetilde{S}_R$の中のBorel集合Aに対して，時間 t までのAへの滞在時間の長さを$\varphi^{(A)}_t$ であらわす。

$$(4.18)\qquad \varphi^{(A)}_t(w) = \int_o^t \chi_A(x_s(w))\, ds$$

$\varphi^{(A)}_t$ は明らかに（A_1）〜（A_4）をみたす連続なadditive functional である。この逆函数 $\tau^{(A)}_t$ を（4.16）によつて定義する。

<u>Prop 4.8</u>　Aが閉集合のとき，$\tau^{(A)}_t(w) < +\infty$ならば，$x_{\tau^{(A)}_t} \in A$ である。

証明　ある $t_o > o$ が存在し，$\sigma(w) \equiv \tau^{(A)}_{t_o} < +\infty$，$x_\sigma \notin A$ とする。前のPrap 4.7 の(i)から $\varphi^{(A)}_\sigma = t_o$ となるから，patlr の右連続性によつて十分小さな $\varepsilon > o$ をとれば，$\sigma \leq u \leq \sigma + \varepsilon$ なる任意の u に対しては

$x_u \notin A$ である。　故に

$$\varphi^{(A)}_u = \int_o^u \chi_A(x_s)\, ds = \int_o^\sigma \chi_A(x_s)\, ds = \varphi^{(A)}_\sigma = t_o$$

となり，$\sigma = \tau^{(A)}_{t_o}$ の定義にもどつてみれば，これは$\sigma > u$であることを示す。$\sigma \leq u \leq \sigma + \varepsilon$ であつたから矛盾を生じ $x_\sigma \in A$ でなければならぬ。

これからA＝{ x }（$x \in S$）なる場合を考えることにし，$\varphi^{(x)}_t$ のかわりに単にφ_t とかく。

<u>Prop 4.9</u>　$P_x(\tau_t < +\infty, o\ \ t \leq +\infty) = 1^{(*)}$ ならば{$\tau_t ; t > o$} は時間的に一様な加法過程であり，{ $\tau_t - t$; $t \geq o$ } は飛躍だけで増加する加法過程である。

証明　（4.17）及びProp 4.7 から

$$E_x(e^{-\alpha(\tau_{t+s} - \tau_t)}\, e^{-\beta(\tau_{u+h} - \tau_u)}) \qquad t < t+s < u < u+h$$

$$= E_x[e^{-\alpha \tau_s(w^+_{\tau_t})}\, e^{-\beta(\tau_v(w^+_{\tau u}))}]$$

$$= E_x[e^{-\alpha \tau_s(w^+_{\tau_t})}\, e^{-\beta(\tau_v(((w^+_{\tau u-t}(w^+_t)))^+_{\tau_t}}]$$

$$= E_x(e^{-\alpha \tau_s})\, E_x(e^{-\beta(\tau_v(w^+_{\tau u-t}))}) = E_x(e^{-\alpha \tau_s})\, E_x(e^{-\beta \tau_v})$$

（*）　§4 参照

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

$\tau_{t2}-\tau_{t1},\cdots;\tau_{tn}-\tau_{t_{n-1}}$ $(t_1<t_2<\cdots<t_n)$ に対しても同様。

τ_t-t が飛躍だけしかもたないことは τ_t の定義より得られる。

τ_t は非減少であるから，加法過程の一般論より

Prap 4.9 の系

$$E_x(e^{-\alpha\tau_t})=e^{-t\left[m(x)\,\alpha+\int_{0+}^{+\infty}(1-e^{-\alpha u})\,n(du)\right]}$$

とかける。ここに

$m(x)>0$（定数），$n(\cdot)$ は $(0,+\infty)$ 上の測度で，$n(1,+\infty)<+\infty$, $\int_0^1 u\,n(du)<+\infty$

をみたす。

がなりたつ。($m(x)\equiv 1$ である)

τ_t の Laplace 変換 $E_x(e^{-\alpha\tau_t})$ は別に次のようにあらわせる。

<u>Prop 4.10</u> $E_x(e^{-\alpha\tau_t})=e^{-t/G_\alpha(x,x)}$

証明 (4.15) を得たと同じようにして kac の lewma を用いれば，

$$u(x)=\int_0^{+\infty}e^{-\alpha t}E_x(e^{-\beta\varphi_t})\,dt=\frac{1}{\alpha}-G_\alpha(x,x)\,u(x)$$

$\therefore$

$$(4.19)\qquad u(x)=\frac{1}{\alpha}\,\frac{1}{1+\beta G_\alpha(x,x)}$$

次に

$$E_x(e^{-\alpha\tau_t})=\int_0^{+\infty}e^{-\alpha s}P_x(\tau_t\in ds)$$

$$=\alpha\int_0^{+\infty}e^{-\alpha s}P_x(\tau_t<s)\,ds=\alpha\int_0^{+\infty}e^{-\alpha s}P_x(\varphi_s>t)\,ds$$

$$=\alpha\int_0^{+\infty}e^{-\alpha s}\left[1-P_x(\varphi_s\leq t)\right]ds=1-\alpha\int_0^{+\infty}e^{-\alpha s}P_x(\varphi_s\leq t)\,ds$$

$\therefore$

$$\int_0^{+\infty}e^{-\beta t}E_x(e^{-\alpha\tau_t})\,dt=\frac{1}{\beta}-\alpha\int_0^{+\infty}e^{-\alpha s}ds\int_0^{+\infty}e^{-\beta t}P_x(\varphi_s\ \ t)\,dt^{*)}$$

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

一方（4.19）より

$$u(x)=\frac{1}{\alpha}\ \frac{1}{1+\beta G_\alpha(x,x)}=\int_o^{+\infty} e^{-\alpha s}\ E_x(e^{-\beta\varphi_s})\,ds$$

$$=\int_o^{+\infty} e^{-\alpha s}\,ds\int_o^{+\infty} e^{-\beta t}\ P_x(\varphi_s\quad dt)=\int_o^{+\infty} e^{-\alpha s}\,ds\cdot\beta\int_o^{+\infty} e^{-\beta t}\,P_x(\varphi_s\leq t)\,dt$$

であるから

$$\overset{*)}{=}\ \frac{1}{\beta}-\alpha\cdot\ \frac{1}{\alpha\left(1+\beta\,G_\alpha(x,x)\right)}=\frac{G_\alpha(x,x)}{1+\beta\,G_\alpha(x,x)}$$

$$=\int_o^{+\infty} e^{-\beta t}\ e^{-t/G_\alpha(x,x)}\,dt$$

よつて Laplace 変換の一意性から

$$E_x(e^{-\alpha\quad t})=e^{-t/G_\alpha(x,x)}$$

Prop 4.9 の系とこれをあわせると，

Prop 4.11 $\quad P_x(\forall\, t>o,\ \eta_t<+\infty)=1\Rightarrow$

(4.20) $$\frac{1}{G_\alpha(x,x)}=m(x)\,\alpha+\int_{o+}^{+\infty}(1-e^{-\alpha u})\ n\,(du)$$

一方 φ_t の Laplace 変換については次のことが成立する。

Prop 4.12 $\quad E_x(e^{-\beta\varphi_t})=\sum_{n=o}^{\infty}(-1)^n\beta^n\left[1*P_t(x,x)^{n*}\right],\ \beta<1/G_\alpha(x,x)$

証明 $\quad u(t)=E_x(e^{-\beta\varphi_t})$ ととく。（4.19）より

$$\int_o^{+\infty} e^{-\alpha t}\,u(t)\,dt=\frac{1}{\alpha}\ \frac{1}{1+\beta G_\alpha(x,x)}$$

$\nu(dt)\equiv\delta_o(dt)+\beta\ \ P_t(x,x)\,dt \qquad \delta_o(\cdot)=$ dirac 測度なる測度を考えれば

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

$$\int_o^{+\infty} e^{-\alpha t}\,\nu(dt) = 1 + \beta\, G_\alpha(x, x)$$

これと上の式より $u * \nu(dt) = dt$，すなわち

$$u(t) + \beta \int_o^t P_{t-s}(x, x)\, u(s)\, ds = 1 \qquad u(o) = 1$$

がなりたつ。

これは $u(t)$ が kernel $-\beta P_{t-s}(,x\,x) = k(t, s)$ の第二種 Volterra 型積分方程式の解になつていることを意味する。逐次近似法により順次

$$u_o \equiv 1, \quad u_n(t) = \int_o^t k(t, s)\, u_{n-1}(s)\, ds \qquad n \geq 1$$

をつくれば，解 $u(t)$ は

$$u(t) = \sum_{n=o}^{\infty} \beta^n u_n(t)$$

で与えられる。この Laplace 変換をとつて

$$\int_o^{+\infty} e^{-\alpha t} u(t)\, dt = \sum_{n=o}^{\infty} \beta^n \int_o^{+\infty} e^{-\alpha t} u_n(t)\, dt$$

$$= \frac{1}{\alpha} \frac{1}{1+\beta G_\alpha(x, x)} = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{1}{\alpha}(-1)^n \beta^n G_\alpha(x, x)$$

$$\beta G_\alpha(x, x) < 1$$

故に $$\int_o^{+\infty} e^{-\alpha t} u_n(t)\, dt = \frac{1}{\alpha}(-1)^n G_\alpha(x, x)^n$$

となり $$u_n(t) = (-1)^n \left[1 * P_t(x, x)^{n*} \right]$$

である。

例 $S = \{ o, 1 \}$

$$P_t(o, o) = \frac{\mu}{\gamma} + \frac{\lambda}{\gamma} e^{-\gamma t} \qquad P_t(o, 1) = 1 - P_t(o, o)$$

$$P_t(1, 1) = \frac{\lambda}{\gamma} + \frac{\mu}{\gamma} e^{-\gamma t} \qquad P_t(1, o) = 1 - P_t(1, 1)$$

$$\gamma = \lambda + \mu, \quad \lambda, \quad \mu > o$$

なる 2-states の Markov 連鎖のとき，$\tilde{S}_R = S$

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

$$G_\alpha(o,o)=\frac{\alpha+\mu}{\alpha(\alpha+\mu)}\to+\infty(\alpha\downarrow o)$$

だから§4で示すようにo (1) は recurrent で $P_o(\eta_t^{(o)}<+\infty,\ t\geq o)=1$

この場合

$m(o)=1$, Lévy 測度 $n(du)=\lambda\mu e^{-\mu u}du$

で $n(du)$ を Lévy 測度とする複合 Poisson process を P_t とすると P_t は η_t-t の一つの version である。

ここで滞在時間Z_xとη_tの値域との関係について次のことを述べておく。先づ$\eta_t<+\infty$なときは，$x_{\eta_t}=x$ であるから $\{\eta_t\ ;\ o\leq t<+\infty\}\subset Z_x\cup\{+\infty\}$ であるが，この両者の差は高々可算てしかない。

<u>Prop 4.13</u> $Z_x\cup\{+\infty\}=\{\eta_t\ ;\ o\leq t<+\infty\}\cup\{t_1,t_2,\cdots\}\cup\{+\infty\}$

ここにt_nは Z_x の右に孤立した点である。

証明 Z_xの右に孤立した点が高々可算でしかないことは Prop4.3 の証明と同様にしてわかる。

$Z_x\ni t_o$ で $Z_x\ni^{\exists}t_n\downarrow t_o$ なるものをとる。これに対して$\eta_{s_o}=t_o$ なる s_o が存在することを云えばよい。

$s_o=\inf\{s\ ;\ \eta_s\geq t_o\}$とおく。先づ$\eta_{s_o}<+\infty$としよう。$\eta_s$ は右連続であつたから $s_o\gneqq t_o$. $\eta_{s_o}>t_o$とする。

s_oの定義から$\forall\varepsilon>o$に対して$\eta_{s_o-\varepsilon}<t_o$。 故に $\varphi_{t_o}<s_o-\varepsilon$ ではない。εは任意であつたから $\varphi_{t_o}\geq s_o=\varphi_{s_o}$ 仮定によつて $t_o<\eta_{s_o}$としてあるから$\varphi_{t_o}=\varphi_{\eta_{s_o}}=s_o$である。すなわち$(t_o,\eta_{s_o})$なる開区間上で φ_tは増加しない。更にはじめの仮定によつて，この区間は Z_xの点を含んでいる。従つて定理4.6より(t_o,η_{s_o})は Z_x の正測度をもつ部分集合を含む。これは φ_t がこの区間で真に増加する部分のあることを意味し上のことに反する。 故に$\eta_{s_o}=t_o$でなければならない。

$\tau_{s_o}=+\infty$ のときも $t_o<+\infty$ ならば同様にして矛盾をみちびくことが出来る。

§4 Recurrence

canonical な Markov 連鎖 $X=(W,B,P_x,x\in\widetilde{S}_R)$ に対しては一般の場合と同じように T.Watanabe [31] にならつて recurrence を次のように定義することが

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

出来る。

定義　点 $x \in \widetilde{S}_R$ はその任意の二つの近傍 U, V $(\overline{V} \subset U)$ に対して
$P_x(\sigma_V(w^+_{\sigma_{U^c}}) < +\infty / \sigma_{U^c} < +\infty) = 1$ のとき recurrent であるという。

点 x が recurrent であることを特徴づける定理は T.Watanbe [31, Theorem4.1] によつて得られており次のように述べられる。

定理 4.8　X を canonical な Markov 連鎖とし，X は次の条件（H）をみたすものとする。

（H）任意の閉集合 F と $f \in C(\widetilde{S}_R)$ に対して

$$E.f(x_{\sigma_F}) = \int_F f(y)\, P.(x_{\sigma_F} \in dy) \in \mathbb{C}(\widetilde{S}_R)$$ である。

このとき，$x \in \widetilde{S}_R$ が recurrent であるための必要十分条件は x の任意の近傍 に対して

$$(4.21) \quad \int_0^{+\infty} P_t(x, U)\, dt = +\infty$$

となることである。

先づ $\widetilde{G}_\alpha ; B(\widetilde{S}_R) \to \mathbb{C}(\widetilde{S})$ であるから

Lemma 4.7　x が trap でないならば x の十分小さな近傍 U をとれば $E(\sigma_{U^c}) < +\infty$ (y について) がなりたつ。

ことに注意し，$\widetilde{S}_R$ が campact 空間 $\widetilde{S}$ で稠密なことを用いれば，定理は [31] と全く同様に証明される。

Markov 連鎖の場合には一点一点が意味をもつので上の recurrence の定義を次のように強くしておくのが都合がよい。

定義　$x \in \widetilde{S}_R$ はその任意の近傍 U に対して $P_x(\sigma_x(w^+_{\sigma_{U^c}}) < +\infty / \sigma_{U^c} < +\infty) = 1$ のとき strongly recurrent(*) であるという。

これに対して定理 4．と類似の次の結果がなりたつ。記号としては §3 同様に

$$\varphi_t = \int_0^t \chi_{\{x\}}(x_s)\, ds, \quad \tau_t = \sup\{s, \varphi_s \leq t\}, \quad Z_x = \{t ;\ x_t = x\}$$

を用いるものとして，

定理 4.9　次の 4 つは互に同値である。

（*）このノートだけの仮の用語である。

(i) $x \in S$ は strongly recurrent である。

(ii) $\int_0^{+\infty} P_t(x, x)\, dt = +\infty$

(iii) $P_x(\varphi_{+\infty} \equiv +\infty) = 1$

(iv) P_x(Z_xが unbounded である) $= 1$

証明

(i) $\Longrightarrow$ (ii)

$$\sigma_0 \equiv 0, \qquad a_1 = \sigma_{U^c}$$

$$\sigma_1(w) = \tau_1 + \sigma_x(w^+_{\sigma_1}) \qquad a_2(w) = \sigma_1(w) + \tau_1(w^+_{\sigma_1})$$

$$\sigma_2(w) = \sigma_1(w) + \sigma_1(w^+_{\sigma_1}) \qquad \cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots \qquad \tau_n(w) = \sigma_{n-1}(w) + \tau_1(w^+_{\sigma_{n-1}})$$

$$\sigma_n(w) = \sigma_{n-1}(w) + \sigma_1(w^+_{\sigma_{n-1}})$$

とおく。但しこれらの定義で右辺のいづれか一つが$+\infty$のときは左辺も$+\infty$と定める。

Lemma 4.7 によつてxの十分小さな近傍Uをとつておけば $P_x(\tau_1 < +\infty) = 1$ となるように出来る。recurrent であるから $P_x(\sigma_1 < +\infty) = 1$, 従つて強 Markov 性によつて

$$P_x(\sigma_n < +\infty) = P_x(\sigma_{n-1} < +\infty,\ \sigma_1(w^+_{\sigma_{n-1}}) < +\infty) = P_x(\sigma_1 < +\infty)\ P_x(\sigma_{n-1} < +\infty)$$

$$= P_x(\sigma_{n-1} < +\infty) = \cdots \quad P_x(\sigma_1 < +\infty) = 1$$

となる。

$$E_x\,\varphi_{+\infty} = E_x\Big(\sum_{n=1}^{\infty} [\varphi_{\tau_n} - \varphi_{\sigma_{n-1}} ; \varphi_{\sigma_{n-1}} < +\infty]\Big)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} E_x\big[\varphi_{\tau_1(w^+_{\sigma_{n-1}})}(w^+_{\sigma_{n-1}}) \ ; \ \sigma_{n-1} < +\infty\big]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} E_x\big\{E_{x_{\sigma_{n-1}}}(\varphi_{\tau_1}) \ ; \ \sigma_{n-1} < +\infty\big\}$$

$$= E_x(\varphi_{\tau_1}) \sum_{n=1}^{\infty} P_x(\sigma_{n-1} < +\infty)$$

Path の右連続性より $P_x(\tau_1 > 0) = 1$ であるから定理4.6によつて $E_x(\varphi_{\tau_1}) > 0$ $P_x(\sigma_n < +\infty) = 1$であつたから $E_x\,\varphi_{+\infty} = +\infty$ となり (ii) が出る。

(ii) $\Longleftrightarrow$ (iii)

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

(iii) ⇒ (ii) は明らか。 (ii) を仮定すると Prop.4.10 より

$$P_x(\eta_t<+\infty)=\lim_{\alpha\downarrow o} E_x(e^{-\alpha\eta_t})=\lim_{\alpha\to\infty} e^{-t/G_\alpha(x,x)}=1$$ η_t は増加函数であるから $P_x(\eta_t<+\infty\ \forall_t\geq o)=1$ 従つて η_t の定義に戻れば $P_x(\varphi_{+\infty}=+\infty)=1$ が得られる。 (iii) ⇒ (iv) 及び (iv) ⇒ (i) も共に明らかである。

Prop4.14 任意の $x\in S$ について $P_x(\varphi_{+\infty}>t)=e^{-t/G_{0+}(x,x)}$ となる。

証明 $\eta_t=+\infty \Longleftrightarrow \varphi_{+\infty}\leq t$ であるから

$$P_x(\varphi_{+\infty}>t)=P(\eta_t<+\infty)=e^{-t/G_{0+}(x,x)}$$

注意 これは $\varphi_{+\infty}$ の分布が指数型の分布をしていることを意味し，x が ficticious ならば $\varphi_{+\infty}\equiv o$，そうでなく且つ strongly recurrent でないときのみに真の指数分布をしている。そして x における holding time η_x の分布と比較して

x trap ⟺ strongly recurrent, x stable (not trap) ⟺ not strongly recurrent, x instantaneous ⟺ x ficticious

なる対応がつけられる。

§5 推移確率による compact 化についての注意

第二章では与えられた resolvent を用いて空間 S を完備化しその上に Markov 過程を構成した。そしてこの章の §1 ではそれに従つて Markov 連鎖を定義したのであるが，この場合 resolvent は Prop4.1 によつて $B(\widetilde{S}_R)$ を $\mathbb{C}(\widetilde{S}_R)$ にうつしている。しかし構成された半群は一般には $B(\widetilde{S}_R)\to B(\widetilde{S}_R)$ であつて，$\widetilde{P}_t(x,y)$ は x について連続かどうかはわからない。この § では Markov 連鎖の場合についてこの性質を持つような完備化を考えてみよう。

$\widetilde{S}$ は大ざつぱに云つて green 測度 $\widetilde{G}_1(x,B)$ が連続になるように位相を入れて出来たものであるが，$P_t(x,B)$ がすべて連続になるように位相を入れてみる。この位相は強すぎて不必要に多くの点がつけ加えられるためにそれによる完備化を行つてもただちに process を構成することは出来ないが，後に述べる特殊な場合には $\widetilde{S}$ と一致して $\widetilde{S}$ の構成法からは知られなかつた推移確率 $\widetilde{P}_t(x,B)$ の連続性を側面からたしかめることが出来る。

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

1° Sを高々可算な集合，$P_t(x, y)$をその上に与えられた可測な推移確率で§1の

条件A　$B_1 = \{ G_1(\cdot, y) ; y \in S \}$はSの点を分離するをみたしているものとする。

定理4.1からこの条件は

条件A′　$F = \{ P_r(\cdot, y) ; r \in R, y \in S \}$はSの点を分離する

といいかえてもよい。但しRは正の有理数の全体とする。Fの各函数を一様連続にする最弱の一様位相をSに入れて完備化する。Fは可算集合であるから

$$(4.21) \quad \rho^*(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|h_n(x) - h_n(y)|}{1 + |h_n(x) - h_n(y)|} \qquad \{h_n\} = F$$

なる距離によるSの完備化をS^*とすれば，S^*は compact な距離空間である。

$P_r(\cdot, y)$ $(r \in R, y \in S)$ のS^*上への連続な拡張を $P_r^*(\cdot, y)$ とする。

$$(4.22) \quad S_R^* = \{ x ; x \in S^*, \sum_{y \in S} P_r^*(x, y) = 1 \text{ が任意の } r \in R \text{ でなりたつ} \}$$

とおけば S_R^*はSを含む。(*)

$$(4.23) \quad H_r^* f(x) = \sum_{y \in S} P_r^*(x, y) f(y) \qquad x \in S_R^*, \quad f \in B(S_R^*), \quad r \in R$$

と定義すれば Prop4.1の証明と全く同じようにして

Lemma 4.8　$H_r^* : B(S_R^*) \to \mathbb{C}(S_R^*)$ である。

が証明出来る。

(4.23)で $f(x) = P_{r'}^*(x, y)$ とおけば

$H_r^* f(x) = \sum_Z P_r^*(x, Z) P_{r'}(Z, y)$ となり，$x \in S$ のときには $P_{r+r'}^*(x, y) = H_r^* f(x)$ であるから，この両辺が S_R^*で連続なことより

$$(4.24) \quad P_{r+r'}^*(x, y) = \sum_Z P_r^*(x, Z) P_{r'}(Z, y) \qquad r, r' \in R$$

がなりたつ。

次に任意の $t > 0$ に対して $t = r + \varepsilon$ $(r \in R)$ とおき

$$(4.25) \quad P_t^*(x, y) \equiv \sum_Z P_r^*(x, Z) P_\varepsilon(Z, y) \qquad x \in S_R^*, \quad y \in S$$

(*) $P_t(x, y)$は stochastic としておく

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

とおくと左辺は r のとり方に無関係であつて $P_t^*(x, y)$ が一意的に定まる。

事実 $t=r+\varepsilon=r'+\varepsilon'$, $r>r''$ のとき $r''=r-r'$ ($\varepsilon'=\varepsilon+r''$) とおいて P_t, P_r^* に関する kolmogorov- chapman の等式 (P_2) および (4,) を用いれば

$$\sum_Z P_{r'}^*(x, Z)\, P_{\varepsilon'}(Z, y) = \sum_Z P_{r'}^*(x, Z) \left[\sum_{Z'} P_{r''}(Z, Z')\, P_\varepsilon(Z', y) \right]$$

$$= \sum_{Z'} \left[\sum_Z P_{r'}^*(x\ Z)\, P_{r''}(Z, Z') \right] P_\varepsilon(Z', y)$$

$$= \sum_{Z'} P_{r'+r''}^*(x, Z')\, P_\varepsilon(Z', y) = \sum_{Z'} P_r^*(x, Z')\, P_\varepsilon(Z', y)$$

(4.25) の両辺を y S について加えると $P_t^*(x, S)=1$ であり, $f(x)=P_\varepsilon(x, y)\ (x\in S)$ $=o\ (x\notin S)$ とおいて (4.23) , (4,25) をみれば $P_t^*(x, y)=H_r^* f(x)$ であるから $P_t^*(x, y)$ は x に関して S_R^* 上で連続なことがわかる。更に

(4.24) $\qquad P_{t+s}^*(x, y)=\sum_Z P_t^*(x, Z)\, P_s(Z, y) \qquad t, s>o, x\in S_R^*, \ y\in S$

が得られる。以上のことから

Prop 4.14 $\quad P_t^*(x, B)=\sum_{y\in B\cap S} P_t^*(x, y)$ とおけば, S_R^* 上の推移確率であつて, 半群 $H_t^* f(x)=\sum_{y\in S} P_t^*(x, y) f(y)$ は $B(S_R^*)$ を $\mathbb{C}(S_R^*)$ にうつすことがわかる。

注意 この半群又は resolvent $G_\alpha^*=\int_o^{+\infty} e^{-\alpha} H_t^*\, dt$ に対しては第一, 二章のように適当な semi-martingale がみつからないので直ちに canonical なMarkov 過程を構成することが出来ない。

2° $\widetilde{S}$, $\widetilde{S}_R$ は§1で用いたものとする。これと1°で定義した S^*; S_R^* との関係について述べる。

先づ S_R^* から $\widetilde{S}_R$ への対応 φ を次の順で定義する。

(a) $x\in S_R^*\cap S$ ならば $\varphi(x)=x$

(b) $x\in S_R^*-S$ とする。S は S_R^* で稠密であるから $x_n\in S$ なる列で $\rho^*(x_n, x)\to o\ (n\to+\infty)$ なるものがとれる。$x_n=\varphi(x_n)$ は $\widetilde{S}$ の中の点列であるから, 適当な部分列 $x_{n'}$ をとれば $\rho(x_{n'}, x_o)\to o\ (n'\to+\infty)$ なる $\widetilde{S}$ の点 x_o が存在する。(ρ, ρ^* は (2・1) ,(4.21) で定義した $\widetilde{S}, S^*$ の metric) 従つて $\widetilde{G}_1(\cdot, y)$, $G_1^*(\cdot, y)$ が $\widetilde{S}, S_R^*$ でそれぞれ連続なことより

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

$\forall y \in S$ に対して，$\widetilde{G}(x_o, y) = \lim_{n' \to \infty} G_1(x_{n'}, y) = G_1^*(x, y)$

更に別の部分列 $x_{n''}$ で $\rho(x_{n''}, x'_o) \to 0$ $(n'' \to +\infty)$ なるものがあれば同じようにして $\widetilde{G}_1(x'_o, y) = G_1^*(x, y) = \widetilde{G}_1(x_o, y)$。従つて $x_o = x'_o$ であるから，$\varphi(x) = x_o$ と定義することが出来て

(4.26) $\quad G_1^*(x, y) = \widetilde{G}_1(\varphi(x), y) \qquad \forall y \in S$

なる関係がなりたつ。この両辺を $y \in S$ について加えると $\widetilde{G}(\varphi(x), S) = G_1^*(x, S) = 1$ だから $\varphi(x) \in \widetilde{S}_R$ である。(4.26) から

(4.27) $\quad P_t^*(x, y) = \widetilde{P}_t(\varphi(x), y) \qquad \forall y \in S$

Prop. 4.15

(i) φ は S_R^* と $\varphi(S_R^*) = \{\varphi(x)\ ;\ x \in S_R^*\}$ の間の位相同型な字像である。

(ii) $S^* = S_R^*$ なるための必要十分条件は任意の $t > 0$ に対して $\sum_y P_t(x, y)$ が $x \in S$ について一様に 1 に収束していることであり，このとき $\widetilde{S}$ と S^* は位相的に同型で $\widetilde{H}_t : B(\widetilde{S}) \to G(S)$ である。

証明 (i) φ の定義より φ が連続なことは明らか。1対1は (4.) より出る。又逆が連続なことは $\rho(x_n, x_o) \to 0$ ならば $y_n = \varphi^{-1}(x_n)$ とおくとき S^* が compact であるから $\rho^*(y_n, y_o) \to 0$ なる部分列があつて (4.) で $t = r \in R$ とすれば y_o が列のとり方によらないことから。(ii) は (i) から容易に得られる。

注意 (iii) の条件があるときは canonical な Markov 連鎖は strong-Feller Process(*) である。たゞしこの場合でも分岐点の集合 S_b は一般には空でない。

(*) cf : Girsanov : Strong-Feller Processes (Theory of Prob & its App. V.1. (1960) ; $H_t : B \to G$ のとき strong-feller process という。

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

第五章 Markov 連鎖 (II) : Stable case

この章では，空間Sのすべての点がstable である様なMarkov 連鎖に関する二，三の話題をのべる。

§1 推移確率の微分可能性とKolmgorov の方程式

記号は前章と同じで，Sを可附番空間，$\{P_t(x,y)\}$ をその上の推移確率，$X=(W,\mathbb{B},P_x;x\in\widetilde{S_R})$ を推移確率から導びかれたcanonical な Markov 連鎖とする。$\tau_1(w)$ を first jumping time 即ち

$$\tau_1(w) = \inf\{t;\ x_t(w) \neq x_0(w)\}$$

とおいたとき $P_x(\tau_1 \geqq t) = e^{-q_x t}$ となり，$q_x<\infty$のときxをstable な点と呼ぶことは前章でのべた。この章ではすべての$x\in S$ が stable 即ち $q_x<\infty$ をみたすMarkov 連鎖を考える。Dynkim の公式より，$x\in S$ならば

$$G_\alpha f(x)=E_x\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t} f(x_t)dt\right)=E_x\left(\int_0^{t_1} e^{-\alpha t} f(x_t)dt\right)+E_x\left(e^{-\alpha\tau_1} G_\alpha f(x_{\tau_1})\right)$$

$$= \frac{1}{\alpha+q_x} f(x) + \int_{\widetilde{S_R}} \pi_\alpha(x,dy)\, \widetilde{G}_\alpha f(y)$$

ただし

$$\pi_\alpha(x,E) = E_x(e^{-\alpha\tau_1};\ x_{\tau_1}\in E) = E_x(e^{-\alpha\tau_1})P_x(x_{\tau_1}\in E)$$

$$= \frac{q_x}{\alpha+q_x} P_x(x_{\tau_1}\in E) \equiv \frac{q_x}{\alpha+q_x}\pi\tau(x,E)$$

である。したがつて

$$(5.1)\quad \alpha G_\alpha f(x)-f(x)=q_x \int_{\widetilde{S_R}} \pi(x,dy)\widetilde{G}_\alpha f(y)-q_x G_\alpha f(x),\quad x\in S$$

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

Lemma 5.1 $H_t f$ が t に関して連続ならば (5.1) は

$$(5.2) \quad H_t f(x) - f(x) = -q_x \int_0^{\infty} \left[H_S f(x) + \int_{\widetilde{S}_R} \pi(x, dy) \widetilde{H}_S f(y) \right] ds$$

と同値である。

証明 (5.1) より

$$\alpha \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} H_t f(x) - f(x) = -\alpha q_x \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} dt \int_0^t \left[H_S f(x) + \int_{\widetilde{S}_R} \pi(x, dy) H_S f(y) \right]$$

$$= -\alpha q_x \int_0^{\infty} \left[H_S f(x) + \int_{\widetilde{S}_R} \pi(x, dy) H_S f(y) \right] ds \int_s^{\infty} e^{-\alpha t} dt$$

$$= -q_x \int_0^{\infty} e^{-\alpha s} H_S f(x) ds + q_x \int_{\widetilde{S}_R} \pi(x, dy) \left[\int_0^{\infty} e^{-\alpha s} H_S f(y) ds \right]$$

Laplace 変換の一意性と $H_S f$ が S に関して連続であることから (5.2) が得られる。逆も明らか。

$f(x)$ として特に一点 y の特性函数をとれば (5.2) は

$$(5.3) \quad P_t(x, y) - \delta_{x,y} = -q_x \int_0^t P_S(x, y) ds + \int_0^t \left[q_x \int_{\widetilde{S}_R} \pi(x, dz) \widetilde{P}_S(z, y) \right] ds$$

$\lim_{t \downarrow 0} P_t(x, y) = \delta_{x,y}$ 及び $\pi(x, x) = 0$ に注意すれば，(5.3) より

$$(5.4) \quad \lim_{t \downarrow 0} \frac{P_t(x, y)}{t} = q_x \pi(x, y) \qquad (x \neq y)$$

$$(5.5) \quad \lim_{t \downarrow 0} \frac{P_t(x, x) - 1}{t} = -q_x$$

が得られる。更に (5.3) は t に関して微分可能で

$$(5.6) \quad P'_t(x, y) = -q_x P_t(x, y) + q_x \int_{\widetilde{S}_R} \pi(x, dz) \widetilde{P}_t(z, y)$$

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

$$= -q_x P_t(x,y) + q_x \sum_{z\in S} \pi(x,z) P_t(z,y)$$

$$+ q_x \int_{\widetilde{S}_R - S} \pi(x,dz) \widetilde{P}_t(z,y)$$

(5.6) 式の才三項を省略した式

$$(5.6') \quad P'_t(x,y) = -q_x P_t(x,y) + q_x \sum_{z\in S} \pi(x,z) P_t(z,y)$$

がいわゆる Kolmogorov の backward equation である。したがつて

Prop・5.1 推移確率 $\{P_t(x,y)\}$ が Kolmogorov の backward equation をみたすための条件は，すべての $x\in S$ が stable かつ $P_x(x_{\tau_1}\in \widehat{S_R}-S) = 0$ $(x\in S)$ である。

このProp からもわかる様に一般には必ずしも推移確率は Kolmogorov の backward equation をみたさない。Backward equation を修正したものが (5.6) である。このことは Compact 化して空間を $\widetilde{S}_R$ に拡げる方が自然であることを示している。

注意 $x\in S$ が stable でなくても (5.4) 及び (5.5) の左辺が存在することがわかつている。(Chung [3])。xがstable でないときは (5.5) の左辺は $-\infty$であり，xがstable であつてもなくても (5.4) の左辺は有限値となる。したがつてxがstable であるための条件は (5.5) の左辺が有限値となることである。

次にKolmogorov の forward equation と Process との対応を考えるためにdual process (excessive measure による process の変換) を考える。

$\xi(x)(x\in S)$ を excessive measure 即ち $\sum_{x\in S}\xi(x)P_t(x,y)\leqq\xi(y)$ をみたし，かつ $\forall x\in S$ で $\xi(x)>0$ とする。

$$(5.8)\quad P_t^*(x,y) = \frac{\xi(y)}{\xi(x)} P_t(y,x)$$

とおけば

$$\sum_{y\in S} P_t^*(x,y) = \sum_{y\in S} \frac{\xi(y)}{\xi(x)} P_t(y,x)$$

$$= \frac{1}{\xi(x)} \sum_{y\in S} P_t(y,x)\xi(y) \leqq \frac{\xi(x)}{\xi(x)} = 1$$

であり

$$\sum_{z\in S} P_t^*(x,z)P_S^*(z,y) = \sum_{z\in S} \frac{\xi(z)}{\xi(x)} P_t(z,x)P_S(y,z) \frac{\xi(y)}{\xi(z)}$$

$$= \frac{\xi(y)}{\xi(x)} \sum_{z\in S} P_S(y,z)P_t(z,x) = \frac{\xi(y)}{\xi(x)} P_{S+t}(y,x) = P_{S+t}^*(x,y)$$

だから $\{P_t^*(x,y)\}$ は推移確率である。又 $\{P_t^*(x,y)\}$ がSの二点を分離することも，$\{P_t(x,y)\}$ が二点を分離することからわかる。$X^* = (W, B, P_x^*;\ x \in \widetilde{S}_R^*)$ を，$\{P_t^*(x,y)\}$ から得られるeanonical な Markov 連鎖とする。

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{P_t^*(x,x)-1}{t} = -q_x$$

だからすべての　$x\in S$　は　X^* に関してもstable であり，$P_x^*(\tau_1 \geqq t) = e^{-q_x t}$ となる。

(5.3) に対応する式は

$$(5.8)\quad P_t^*(x,y) = -q_x P_t^*(x,y) + q_x \sum_{z\in S} \pi^*(x,z)P_t^*(z,y)$$

$$+ q_x \int_{\widetilde{S_R}-S} \pi^*(x,dz)\widetilde{P}_t^*(z,y)$$

ここで $\pi^*(x,dz) = P_x^*(x_{\tau_1} \in dz)$ である。(5.8) で $t\downarrow 0$ とすると

$$(5.9)\quad \lim_{t\downarrow 0} P_t^*(x,y) = q_x \pi^*(x,y)$$

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

この式と（5.4）より

$$(5.10)\qquad \pi^*(x,y)=\frac{q_y}{q_x}\frac{\xi(y)}{\xi(x)}\pi(y,x)$$

（5.7）及び（5.10）を（5.8）に代入してx，yを入れかえると

$$(5.11)\qquad P'_t(x,y)=-P_t(x,y)q_y+\sum_{z\in S}P_t(x,z)\pi(z,y)q_y$$
$$+\frac{\xi(y)}{\xi(x)}q_y\int_{\widetilde{S}_R-S}\pi^*(y,dz)\widetilde{P}^*_t(z,x).$$

上式の右辺の最後の項を除いた式

$$(5.12)\qquad P'_t(x,y)=-P_t(x,y)q_y+\sum_{z\in S}P_t(x,z)\pi(z,y)q_y$$

が Kolmogorov の forward equation である。したがつて

Prop 5.2 $\forall x\in S$ に対して$\xi(x)>0$ となる excessive measure ξ が存在するとき，$\{P_t(x,y)\}$ が Kolmogorov の forward equation をみたすための必要十分条件はξによつて変換された dual process X^* が

$$P^*_x(x_{\tau_1}\in\widetilde{S^*_R}-S)=0$$

をみたすことである。

注意 $\{P_t(x,y)\}$ が transient 即ち $G(x,x)=\int_0^\infty P_t(x,x)dt<\infty$ ($\forall x\in S$)のときProp. 5.2の様な excessive measure ξ が存在する。たとえば，μをS上の $\forall x\in S$で $\mu(\{x\})>0$なる有界な測度，$\mu'(dx)=\mu(dx)\cdot\frac{1}{G(x,x)}$ とおき，

$$\xi(x)=\int\mu'(dy)G(y,x)$$

とおけばよい。

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

§2. Instantaneouo return 連鎖

前節では推移確率が与えられた場合に，それに従うMarkov 連鎖を構成することによつて (5.4)，(5.5) 後び (5.6′) (Kolmogorov の backward equation) を得たけれども逆に (5.4)，(5.5) 及び (5.6′) をみたす推移確率は一般には一意には定まらない。$\{q, \pi\}$ の他に (5.6) の推移確率の解を一意に定める条件を求める問題，及び $\{q, \pi\}$ が与えられたとき (5.4)，(5.5) (5.6) をみたす推移確率を構成する問題は重要な問題であるが又むずかしい問題でもある。特に上述の後半の問題に関しては，Feller の先駆的仕事[1]があるが完全な解決には致つていない様である。そこでは境界 (いわゆる Feller 境界) が本質的な役割をはたしている。Martin 境界もこの問題を考えるときに有効であるが，この§では Compact 化によつて得られた点 $\partial S=\widetilde{S_R}-S$ を境界とみなして，instantaneouo return chain の場合に，それが一意に定まる条件を求める。もつと一般なMarkov 連鎖 (例えばreflecting barrierをもつ Markov 連鎖等) についての研究としては，上記 Feller の論文や福島氏の研究等があるが Ray の compact 化の立場からそれらが整理出来るかどうか筆者らにはわからないのでここではふれない。

<u>定義</u> $\partial S=\widetilde{S_R}-S$ がすべて分岐点のとき，$X=(W, \mathbb{B}, P_x;\ x\in S_R)$ を instantaneocrs return chain と呼ぶ。

$\mathbb{C}(\widetilde{S_R})$ の $\widetilde{G_\alpha}$ による値域を $\mathbb{R}(\widetilde{S_R})$ であらわす。$\widetilde{G_\alpha}$ は $\mathbb{B}(\widetilde{S_R})$ を $\mathbb{C}(\widetilde{S_R})$ に移すから $\mathbb{R}(\widetilde{S_R})\leq\mathbb{C}(\widetilde{S_R})$ である。generator $\mathcal{G}$ を次の様に定義する。

$$\mathcal{G}f=(\alpha-\widetilde{G}_\alpha^{-1})f, \qquad f\in R(\widetilde{S_R}).$$

(5.1) より $x\in S$ では

$$\mathcal{G}f(x)=q_x\int_{\widetilde{S_R}}\pi(x,dy)f(y)-q_xf(x)$$

---

1) On boundaries and lateral conditions for the Kolmogorov differential equations, Ann. Math. 65 (1957).

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

である。Xが instantaneous return 連鎖のとき $\Pi(x,\partial S)=0$ だから

$$\mathfrak{G} f(x)=q_x \sum_{y\in S}\Pi(x,y)u(y)-q_x f(x)\equiv q(\Pi-i)f(x)$$

である。 $q(\Pi-i)$ なる作用素を Dynkin generator と言い，$\mathfrak{G}_D$ で書く。

一般に Markov 過程は generator $\mathfrak{G}$ (及び $\mathbb{R}(\widetilde{S_R})$) によつて一意的に定まるから（伊藤，渡辺，福島〔16〕），この節の始めにのべた（5.4）（5.5）及び（5.6′）をみたす推移確率解を一意的に定める問題は，$\mathfrak{G}$（及び $\mathbb{R}(\widetilde{S_R})$）を定める問題に帰着される。

Instantaneous return 連鎖Xに対して jumping time を超限帰納法で次の様に定義する。

$$\tau_0(w)=0$$

$$\tau_1(w)=\inf\{t;\ x_t(w)\neq x_0(w)\}$$

ξ が才二級の極限数のとき

$$\tau_\xi(w)=\sup_{\eta<\xi}\tau_\eta(w)$$

ξ が才二級の孤立数のとき，ξ の直前の元を $\xi-1$ とおいて

$$\tau_{\xi-1}(w)=\infty \implies \tau_\xi(w)=\infty$$

$$\tau_{\xi-1}(w)<\infty \implies \tau_\xi(w)=\tau_{\xi-1}(w)+\tau_1(w^+_{\tau_{\xi-1}}).$$

これらが Markov time であることは，超限帰納法を使つて定理1.5の（X・6）の証明と同様にして示すことが出来る。η を才二級の極限数とし，τ_{η_n} は τ_η に下から近ずく jumping time の列とする。

$\tau_\eta<\infty$ のとき，$\lim_{n\to\infty} x_{\tau_{\eta n}} = x_{\tau_{\eta-}}$ と書く。

Lemma 5.2 ηが極限数のとき

(5.13) $$E_x(e^{-\alpha\tau_\eta};\ x_{\tau_\eta}=y)=E_x(e^{-\alpha\tau_\eta}\mu(x_{\tau_{\eta-}},y))$$

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

ただし $\mu(x,\cdot)$ は x の分岐測度である。

証明 1° $f\in\mathbb{C}(\widetilde{S})$ とすれば $G_\alpha f$ は $\widetilde{S}_R$ で連続だから Dynkin の公式より

$$G_\alpha f(x) = E_x\left(\int_0^{\tau_{\eta n}} e^{-\alpha t} f(x_t)dt\right)+E_x\left(e^{-\alpha\tau_{\eta n}} G_\alpha f(x_{\tau_{\eta n}})\right)$$

$$= E_x\left(\int_0^{\tau_\eta} e^{-\alpha t} f(x_t)dt\right)+E_x\left(e^{-\alpha\tau_\eta} G_\alpha f(x_{\tau_{\eta-}})\right)$$

$$= E_x\left(\int_0^{\tau_\eta} e^{-\alpha t} f(x_t)dt\right)+E_x\left(e^{-\alpha\tau_\eta} G_\alpha f(x_{\tau_\eta})\right)$$

したがつて

$$E_x\left(e^{-\alpha\tau_\eta} G_\alpha f(x_{\tau_\eta})\right) = E_x\left(e^{-\alpha\tau_\eta} G_\alpha f(x_{\tau_{\eta-}})\right)$$

故に任意の β で

$$(5.14) \qquad \beta E_x\left(\overline{e}^{\alpha\tau_\eta} G_\beta f(x_{\tau_\eta})\right) = \beta E_x\left(e^{-\alpha\tau_\eta} G_\beta f(x_{\tau_{\eta-}})\right)$$

$f\in\mathbb{C}(S)$ のとき

$$\lim_{\beta\to\infty} \beta G_\beta f(x) = \int_{\widetilde{S}_R-(\widetilde{S}_R)_b} \mu(x,dy) f(y) \equiv \sum_{y\in S} \mu(x,y)f(y)$$

だから (5.14) で $\beta\to\infty$ とすると

$$E_x\left(e^{-\alpha\tau_\eta}; f(x_{\tau_\eta})\right) = E_x\left(e^{\alpha\tau_\eta}\int_{\widetilde{S}_R} \mu(x_{\tau_{\eta-}},dy)f(y)\right)$$

故に

$$E_x\left(e^{-\alpha\tau_\eta}; x_{\tau_\eta}=y\right) = E_x\left(e^{-\alpha\tau_\eta}\mu(x_{\tau_{\eta-}},y)\right). \qquad \text{(終)}$$

今後簡単のために $\Pi_\alpha^\eta(x,y)=E_x(e^{-\alpha\tau_\eta}; x_{\tau_\eta}=y)$,

$\Pi_\alpha^\eta u(x) \equiv \sum_{y\in S} \Pi_\alpha^\eta(x,y)u(y)$ と書く。

Lemma 5.3 $u\in\mathbb{C}(S_R)$ が $u(x)=\sum_{y\in S}\mu(x,y)u(y)$ かつ $\Pi_\alpha^1 u=u$ をみ

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

たせば $u=0$

証明 超限帰納法で証明する $\forall \xi<\eta$ で $\Pi_{\alpha}^{\xi} u=u$ とする。i) ηが孤立数のとき：

$\eta=\rho+1$と書けるから

$$\Pi_{\alpha}^{\eta} u=E_{x}(e^{-\alpha(\tau_{\rho}+\tau_{1}(w^{t}\tau_{\rho})} u(x_{\tau_{\rho}}(w_{\tau_{\rho}}^{t})))$$

$$=E_{x}(e^{-\alpha\tau_{\rho}} u(x_{\tau_{\rho}}))=\Pi_{\alpha}^{\rho} u=u$$

ii) ηが極限数のとき： $\tau_{\eta_{n}}$ を $\tau_{\eta_{n}}\uparrow\tau_{\eta}$ なる jumping time の列とする。

各η_{n} に対して $\Pi_{\alpha}^{\eta_{n}} u=u$ だから

$$u(x)=\lim_{n\to\infty} E_{x}(e^{-\alpha\tau_{\eta_{n}}} u(x_{\tau_{\eta_{n}}}))=E_{x}(e^{-\alpha\tau_{n}} u(x_{\tau_{\eta}-1}))$$

$$=E_{x}(e^{-\alpha\tau_{\eta}} \sum_{y\in S} \mu(x_{\tau_{\eta}-}, y)u(y))$$

Lemma 5.2 により上式の最後の項は

$$\sum_{y\in S} E_{x}(e^{-\alpha\tau_{\eta}} ; x_{\tau_{\eta}}=y)u(y)=\Pi_{\alpha}^{\eta} u(x)$$

2° $x\in S$ はstableだから $P_{x}(\tau_{1}=0)=0$.

$x\in\partial S$ では $P_{x}(\tau_{1}=0)=\sum_{y\in S} \mu(x,y)P_{y}(\tau_{1}=0)=0$. したがつてすべて

の $x\in\widetilde{S_{R}}$ で $P_{x}(\tau_{1}=0)=0$. このことから定理1.5（X・6）の証明と全く同様に

して，十分大きな才二級順序数 r で $P_{x}(\tau_{r}=\infty)=1$ となることがわかる。したがつて

$$u(x)\leqq\|u\|E_{x}(e^{-\alpha\tau_{r}})=0$$

uは連続だからすべての $x\in\widetilde{S_{R}}$ で $u=0$

<u>定理 5.1</u>

$\mathbb{R}(\widetilde{S_{R}})=\{u$; (a) $u\in\mathbb{C}(\widetilde{S_{R}})$, (b) $q(\Pi-I)u(x)(x\in S)$ はSで有界

$$(c)\ u(x)=\sum_{y\ S}\mu(x,y)u(y)\quad(x\in\partial S).$$

証明　右辺を $\mathbb{R}(\widetilde{S_R})$ とおく。$\mathbb{R}(\widetilde{S_R})\subseteq\mathbb{R}(\widetilde{S_R})$ は明らか。$u\in\mathbb{R}(\widetilde{S_R})$ とする。$f(x)=(\alpha-\mathcal{G}_D)u(x)\ (x\in S)$, $h=u-\widetilde{G}_\alpha f$ とおけば $(\alpha-\mathcal{G}_D)h(x)=0$ $(x\in S)$. 即ち $x\in S$ では $\Pi^1_\alpha h(x)=h(x)$ である。u, $G_\alpha f$ は (a), (c) の性質をもつから h も (a), (c) の性質をもち Lemma 5.3 によつて $h=0$.

上の定理によつて，instantaneous return 連鎖は $\{q,\Pi\}$ の系と ∂S (＝分岐点) の分岐測度によつて定まることがわかつた。このことを直観的に言えば，粒子 w は $\{q,\Pi\}$ に従つて行動し，境界点 $x\in(\partial S)$ に達すれば，分岐測度 $\mu(x,\circ)$ によつてただちに内部の点にもどり，再び $\{q,\Pi\}$ に従つて同じ行動をくり返すことを意味している。なお今までは，instantaneous return 連鎖が存在したとして議論したが，その存在あるいは構成の問題を，Ray の compact 化の立場から考えるためには才三章にのべた様な Martin 境界に近い compact 化を考える必要があると思われる。

その様な構成の問題に関する研究としては，Martin 境界論を使つた H. Kunita 〔19〕がある。

補足

x が stable な場合に x への滞在時間に関連して 2，3 の補足的注意を述べる。

x は trap でない，すなわち $0<q_x<+\infty$ としておく。次のような Markov time を定義する；

$$\eta_0(w)=\inf\{t;\ x_t(w)\neq x_0(w)\}$$

$$\sigma_1(w)=\eta_0(w)+\sigma_x(W^+_{\eta_0})$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\sigma_n(w)=\sigma_{n-1}(W)+\sigma_1(W^+_{\sigma_{n-1}})\quad(n\geq 2)$$

$$\eta_n(w)=\eta_0(W^+_{\sigma_n})\quad(n\geq 1)$$

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

但し，右辺に$+\infty$なる値をとるものがあれば左辺も$+\infty$と定める。

xは stable であるからτ_0は平均 $1/q_x$ の指数分布に従つている。

$\alpha=P_x(\sigma_1<+\infty)$ とおくと，強 Markov 性から容易に

$P_x(\sigma_n<+\infty)=P_x(\tau_n<+\infty)=\alpha^n$ が得られる。

(1°) $\alpha=1$の場合

$$P_x(\tau_n>t)=P_x(\tau_0(w^+_{\sigma_n})>t)=E_x\{P_{x_{\sigma_n}}(\tau_0>t):\ \sigma_n<+\infty\}=e^{-q_x t}$$

より，τ_nはすべてτ_0と同じ指数分布をもつている。又τ_0，τ_1，τ_2，・・・ は互に独立である。例えばτ_0，τ_1，τ_2，についてこのことを見るには，$\varphi_n=\varphi_{\sigma_{n+1}}-\varphi_{\sigma_n}$ $\left(\varphi_t=\int_0^t \chi_{\{x\}}(x_t)dt\right)$ としておけば，

$$\tau_0=\varphi_{\sigma_1},\quad \tau_1=\varphi_{\sigma_2}-\varphi_{\sigma_1}=\varphi_{\sigma_1(w^+_{\sigma_1})}(w^+_{\sigma_1}),$$

$$\tau_2=\varphi_{\sigma_3}-\varphi_{\sigma_2}=(\varphi_{\sigma_3}-\varphi_{\sigma_1})-(\varphi_{\sigma_2}-\varphi_{\sigma_1})=\varphi_{\sigma_2(w^+_{\sigma_1})}(w^+_{\sigma_1})-\varphi_{\sigma_1(w^+_{\sigma_1})}(w^+_{\sigma_1})$$

であるから

$$E_x(e^{-\alpha_0\tau_0}e^{-\alpha_1\tau_1}e^{-\alpha_2\tau_2})$$

$$=E_x\{e^{-\alpha_0\varphi_{\sigma_1}}e^{-\alpha_1\varphi_{\sigma_1(w^+_{\sigma_1})}(w^+_{\sigma_1})}e^{-\alpha_2(\varphi_{\sigma_2(w^+_{\sigma_1})}(w^+_{\sigma_1})-\varphi_{\sigma_1(w^+_{\sigma_1})}(w^+_{\sigma_1}))}$$

$$=E_x\{e^{-\alpha_0\varphi_{\sigma_1}}E_{x_{\sigma_1}}(e^{-\alpha_1\varphi_{\sigma_1}}e^{-\alpha_2(\varphi_{\sigma_2}-\varphi_{\sigma_1})})\}$$

$$=E_x(e^{-\alpha_0\varphi_{\sigma_1}})\ E_x(e^{-\alpha_1\varphi_{\sigma_1}}e^{-\alpha_2\varphi_{\sigma_1(w^+_{\sigma_1})}(w^+_{\sigma_1})})$$

$$=E_x(e^{-\alpha_0\varphi_{\sigma_1}})\ E_x(e^{-\alpha_1\varphi_{\sigma_1}})\ E_x(e^{-\alpha_2\varphi_{\sigma_1}})$$

τ_0，τ_1，τ_2 は同じ指数法則に従うから，この式は

$$=E_x(e^{-\alpha_0\tau_0})\ E_x(e^{-\alpha_1\tau_1})\ E_x(e^{-\alpha_2\tau_2})$$

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

とかける。これよりη_0, η_1, η_2は独立であることがわかる。

従つてxへの滞在時間の長さがtになるまでにxから飛躍する回数をN_t とおけば,

$$N_t(w)=\inf\{n;\ \eta_0(w)+\eta_1(w)+\cdots+\eta_n(w)>t\}$$

とあらわせるから, N_t は Poisson 過程である。

(2°) $0\leqq\alpha<1$ の場合

このときは $\sum_{n=0}^{\infty}P_x(\eta_n<+\infty)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n=1/1-\alpha<+\infty$ であるから Borel-Cantelli の lemma より殆んどすべてのwに対して有限コを除いて$\eta_n(w)$は$+\infty$となる。

$$N(w)=\mathrm{Max}\{n;\ \eta_n(w)<+\infty\}$$

とおけば, $N(w)+1$ はxから飛躍する回数をあらわし,

$$P_x(N=n)=P_x(\sigma_n<+\infty,\ \sigma_{n+1}=+\infty)=P_x(\sigma_n<+\infty,\ \sigma_1(w^+_{\sigma_n})<+\infty)$$

$$=P_x(\sigma_n<+\infty)\ P_x(\sigma_1=+\infty)=\alpha^n(1-\alpha)\qquad(n=0\ )$$

αの値を求めるため $A_n=\{w;\eta_n(w)<+\infty\}=\{w;\ \sigma_n(w)<+\infty\}$
とおけば

$$\int_0^{+\infty}P_t(x,x)dt=E_x\varphi_{+\infty}=E_x\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\eta_n(w)\chi_{A_n}(w)\Big)=\sum_{n=0}^{\infty}E_x(\eta_0(w^+_{\sigma_n});\sigma_n<+\infty)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}P_x(\sigma_n<+\infty)\ E_x(\eta_0)=\frac{1}{q_x}\ \frac{1}{1-\alpha}$$

すなわち $\alpha=1-\dfrac{1}{q_x}\dfrac{1}{\int_0^{+\infty}P_t(x,x)dt}$ を得る。

以上の結果をまとめると

xが stable(not trap) のとき, recurrent ならばxへの滞在時間の長さがtになるまでにxから飛躍する回数N_t は Poisson 過程であり, transient ならばxからの飛躍回数$N+1$は平均$q_x\int_0^{+\infty}P_t(x,x)dt$ の幾何分布をする。

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

第六章 Markov 連鎖(Ⅲ) Instantaneous case

この章では Instantaneous state をもつ Markov 連鎖の例をあげて第四章の結果を適用してみる。

Example 1°

1° 構 成

推移確率の構成は Chung [3, Example 3] と全じであるから結果だけを述べる。

$S=\{0, 1, 2, \ldots\}$ とするときこの上の $P_t(x,y)$ で次の条件をみたすものが解析的に構成出来る。

(6.1) $q_0=+\infty, \quad q_{0y}=1$

($q_{x0}=q_x>0, \quad q_{xy}=0 \ (x\neq y)$ $\quad x, y\geq 1$

(6.2) $\Sigma 1/q_x<1$

(6.3) $P_t(x,y)=\int P_s(x,0)\, e^{-q_y(t-s)}\, ds+\delta(x,y)\, e^{-q_y t}$

$x\geq 0, \quad y\geq 1$

(6.4) $P_t(x,0)=q_x P_t(0,x)$ $\quad x \quad 1$

(6.5) $P_t(0,0)+\int_0^t P_s(0,0)\, h(t-s)\, ds\equiv 1$

ここに $h(t)=\sum_{x\geq 1} e^{-q_x t}$

そうしてこの $P_x(x,y)$ は stochastic 且つ連続性の条件 (P_3) をみたしている。従つて o だけが instantaneous であり，$x=0$ のとき $\pi(x,y)=\delta(y,0)$ だから stable state から飛躍をすれば必ず o に達する。

(6.3) ～ (6.5) の Laplace 変換をとると

(6.6) $G_\alpha(x,y)=G_\alpha(x,0)\dfrac{1}{\alpha+q_y}+\dfrac{1}{\alpha+q_y}\delta(x,y) \quad x\geq 0, \ y\geq 1$

(6.7) $G_\alpha(x,0)=q_x G_\alpha(0,x) \quad x\geq 1$

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

$$(6.8)\qquad G_\alpha(o,o)=\frac{1}{\alpha}\left[1+\Sigma\frac{1}{\alpha+q_x}\right]^{-1}$$

これより　$x\geq 1$ ならば

$$\sum_{y=n}^{m}G_1(x,y)=\frac{q_x}{1+q_x}G_1(o,o)\sum_{y=n}^{m}\frac{1}{1+q_y}+\sum_{y=n}^{m}\frac{1}{1+q_y}\delta(x,y)$$

$$<\sum_{y=n}^{m}\left[\frac{1}{1+q_y}(1+\delta(x,y))\right]$$

であるから $\sum_{y=o}^{\infty}G_1(x,y)$ は $x\in S$ について一様に収束していることがわかる。従つて第四章で定義した S_R は S と一致する。すなわちこの推移確率に対応する canonical な Markov 連鎖は campact 空間 S 上に構成されている。$\{x, x>1\}$ の部分列 x_n が S の点 x に収束しているとする。

$$\widetilde{G_1}(x_n,o)=q_{x_n}\widetilde{G_1}(o,x_n)=\widetilde{G_1}(o,o)\frac{q_{x_n}}{1+q_{x_n}}+\frac{1}{1+q_{x_n}}\delta(o,x_n)$$

$\to\widetilde{G_1}(o,o)\quad(n\to+\infty)$　および　$y\geq 1$ のときは

$$\widetilde{G_1}(x_n,y)=\widetilde{G_1}(x_n,o)\frac{1}{1+q_y}+\frac{1}{1+q_y}\delta(x_n,y)\to\widetilde{G_1}(o,o)\quad(n\to+\infty)$$

となつて $\widetilde{G_1}(x,y)=\widetilde{G_1}(o,y)$ すなわち $x=o$ である。これは S の limit point が o だけからなつていることを示す。従つて $\widetilde{S}=S$ 且つ $x=o$ は孤立点で S は $\{1,2,\cdots\}$ の一点 o による compact 化に他ならない。S^* を第四章§5で定義した campact space とすると S_R^* は φ によつて $\widetilde{S_R}=S$ と位相同型であつたから S_R^* は campact となり $S_R^*=S^*\cong S$，又そこの（ii）によつて $\widetilde{H_t}$ ；$B(S)\to C(S)$ である。
かくして

"推移確率 $P_t(x,y)$ に対応する canonical な Markov 連鎖は $\{1,2,\cdots\}$ の一点 compact 化空間としての S 上の strong Feller process で，(P_3) より分岐点をもたず半群は強連続 (*) である。" ことがわかつた。

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

2° Recurrence

(6.5) より $\int_0^{+\infty} P_t(o,o)\,dt = +\infty$。 定理 4.9 より

oは strongly recurrent である。よつて $\eta_t = \eta_t^{(o)}$ は加法過程であつて，

Lévy測度は(4.2 0) から定まる。

$$\frac{1}{G_\alpha(o,o)} = \alpha\,[1+\sum_{x\geq 1}\frac{1}{\alpha+q_x}] \equiv m(o)\,\alpha + \int_0^{+\infty}(1-e^{-\alpha u})\,n(du)$$

から $m(o) = 1$ $\quad n(du) = \sum_{x\geq 1} q_x e^{-q_x u}du$

Example 2.

この Example は Blackwell [1] による。なお [3] 参照

1° 構 成

$S_n = \{o, 1\}$とし，S_n の2－states の Markov 連鎖で推移確率が

$$P_t^{(n)}(o,o) = \frac{q_1^{(n)}}{\gamma_n} + \frac{q_o^{(n)}}{\gamma_n}\,e^{-\gamma_n t}$$

$$P_t^{(n)}(1,1) = \frac{q_o^{(n)}}{\gamma_n} + \frac{q_1^{(n)}}{\gamma_n}\,e^{-\gamma_n t} \qquad o < q_o^{(n)},\quad q_1^{(n)} < +\infty .$$

(6.9)

$$P_t^{(n)}(o,1) = 1 - P_t^{(n)}(o,o) \qquad \gamma_n = q_o^{(n)} + q_1^{(n)}$$

$$P_t^{(n)}(1,o) = 1 - P_t^{(n)}(1,1)$$

を考える。

(＊) compact 空間Sがあり H_t ; $\mathbb{C}(S) \to \mathbb{C}(S)$ 且つ $H_t f(x) \to f(x)$ ($t \to o$) が各点 x で成り立てば $H_t f \to f$ (強) $t \to o$ である。(cf伊藤〔14 II〕)

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

$S_c = \prod_{n=1}^{\infty} S_n$を weak product とすると S_c は Compact (Cantor set) である。$S_c \ni x$ は $x = (x(1), x(2), \ldots\ldots)$ $x(n) \in S_n$ とあらわせる。このようなxのうち，$x(n) \equiv o$ $n > M$となるようなMが存在するもの全体をSととる。

$x, y \in S$に対して

(6.10) $$P_t(x, y) = \prod_{n=1}^{\infty} P_t^{(n)}(x(n), y(n))$$

と定義する。Blackwell に従つて次の仮定をおく。

(6.11) $$\Sigma \frac{q_o^{(n)}}{r_n} < +\infty \ (\iff \prod_{n=1}^{\infty} \frac{q_1^{(n)}}{r_n} > o)$$

このとき $P_t(x, y)$はS上の stochastic 且つ連続性の条件をみたす推移確率になることがわかる。証明は Blackwell [1] 又は Chung [3, Example 6] にゆづる。更にもし

(6.12) $$\sum_{n=1}^{\infty} q_o^{(n)} = +\infty$$

であれば，すべての$x \in S$は instantaneous となつていることがわかる。しかしここではこの (6.12) は一般には仮定せず (6.11) および

(6.13) 各$t > o$に対して$\displaystyle\sum_{n=1} e^{-r_n t} < +\infty \iff \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{-r_n t}) > o$

を仮定する。この2つの仮定の下で第四章§5での推移確率を用いた campact 化によつてS^*がS_cと同相になつていることを示そう。

$S_M = \{x ; x(n) = o \quad n > M \quad x \in S\}$とおく。

$$\sum_{y \in S_M} P_t(x, y) = \sum_{y \in S_M} \prod_{n=M+1}^{\infty} P_t^{(n)}(x(n), o) \quad \prod_{n=1}^{M} P_t^{(n)}(x(n), y(n))$$

$$= \prod_{n=M+1}^{\infty} P_t^{(n)}(x(n), o) \prod_{n=1}^{M} [P_t^{(n)}(x(n), o) + P_t^{(n)}(x(n), 1)]$$

$$= \prod_{n=M+1}^{\infty} P_t^{(n)}(x(n), o) \geq \prod_{n=M}^{\infty} \frac{q_1^{(n)}}{r_n} (1 - e^{-r_n t})$$

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

(6.11), (6.13) よりMを十分大きくとればこの最後の無限積は $x \in S$ について一様に1に収束している。従つて Prop4.15 が成立ち, canonical な Markov 連鎖は compact 空間 $\widetilde{S} \cong S^*$ 上の stong-Feller process であることがわかる。

Lemma 6.1 S^* は Canter set S_c に同相である。

証明 $\varphi : S^* \to S_c$ なる字像を次のように定める。$x \in S \subset$ (S^* と考えて) ならば $\varphi(x) = x$。次に任意の $x \in S^*$ に対して $\rho^*(x_n, x) \to 0$ $(n \to \infty)$ なる列で $x_n \in S$ なるものをとる。(ρ^* は (4.21) で定義した S^* の metric。)
$\varphi(x_n)$ が S_c で収束していることを示す。今 x_n の部分列 x_{p_i}, x_{p_j} で次のようなものがあつたとする。あるkが存在して

$$x_{p_i}(\kappa) \equiv 1 \quad (i = 1, 2, \ldots) \text{ 及び } \quad x_{p_j}(\kappa) \equiv 0 \quad (j = 1, 2, \ldots)$$

$y, y' \in S$ で $y(\kappa) = 0$, $y'(\kappa) = 1$, $y(l) = y'(l)$ $(l \neq \kappa)$ なる点をとる。 $P_t(x, y)$ の定義 (6.10) より

$$\frac{P_t(x_p, y)}{P_t(x_p, y')} = \frac{P_t^{(\kappa)}(x_p(\kappa), y(\kappa))}{P_t^{(\kappa)}(x_p(\kappa), y'(\kappa))}$$

であるから x_p を x_{p_i} に沿つて x に収束させた場合も x_{p_j} に沿つて x に収束した場合も上式左辺はつねに一定の極限値 ($x_p = x$ とした式) に収束している。従つて

$$\frac{P_t^{(\kappa)}(1, 0)}{P_t^{(\kappa)}(1, 1)} = \frac{P_t^{(\kappa)}(0, 0)}{P_t^{(\kappa)}(0, 1)}$$

この式を (6.9) によつてかきかえれば $1 - e^{-\gamma_\kappa t} = 0$ となり矛盾を生ずる。これは任意の κ に対して十分大きなN以上の n については $x_n(\kappa) \equiv \alpha(\kappa)$ が一定の値であることを示す。すなわち $\varphi(x_n)$ は積空間 S_c の中で収束している。 $\varphi(x) \equiv (\alpha(1), \alpha(2), \ldots)$ と定義しよう。この定義から φ は S^* から S_c の中への連続字像であることがわかるから1対1であることを云えば証明が了る。

$x = y$, を S^* の点とすると, ρ^* の定義からある $z \in S$ と $\gamma \in R$ が存在し $P_\gamma^*(x, z) < P_\gamma^*(y, z)$ である。

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

両辺を $z\in S$ について加えたものは共に1になるから z S で $P^*_\gamma(x,z)>P^*_\gamma(x,z)$ なるものが別に存在する。$x_n\in S$，$y_n\in S$ で $\rho^*(x_n,x)$，$\rho^*(y_n,y)\to o$ $(n\to+\infty)$ なるものを定めておく。z，$z'\in S$ であつたから S の定義より $M>o$ で $n>M+1$ ならば $z(n)=z'(n)=o$ となるようなものがとれる。

$\varphi(x)=\varphi(y)$ とするとすでに証明したことから十分大きなNをとれば

$$x_p(\kappa)=y_p(\kappa) \qquad (\kappa=1.2.,\cdots\cdots,\ M)$$

$$P^*_\gamma(x_p\ z)<P^*_\gamma(y_p,z),\quad P^*_\gamma(x_p,z)>P^*_\gamma(y_p,z')$$

がすべての $P\geqq N$ でなりたつ。従つて

$$\frac{P_\gamma(x_p,z)}{P_\gamma(x_p,z')}<\frac{P_\gamma(y_p,z)}{P_\gamma(y_p,z')}$$

又は（6.9）より

$$\frac{\prod_{n=1}^{M}P^{(n)}_\gamma(x_p(\kappa),z(\kappa))}{\prod_{n=1}^{M}P^{(n)}_\gamma(x_p(\kappa),z'(\kappa))}<\frac{\prod_{n=1}^{M}P^{(n)}_\gamma(y_p(\kappa),z(\kappa))}{\prod_{n=1}^{M}P^{(n)}_\gamma(y_p(\kappa),z'(\kappa))}\qquad P>N$$

$P\geqq N$ のとき $x_p(\kappa)=y_p(\kappa)$ $(\kappa=1.2.,\cdots\cdots M)$ であつたからこれは不可能。従つて $\varphi(x)\neq\varphi(y)$ である。

以下 $S^*,\widetilde{S}$ をすべて S_c に同一視して取扱う。

<u>Prop 6.1</u> $\widehat{H}_t$ は $\mathbb{B}(S_c)\to\mathbb{C}(S_c)$ 且つ $\mathbb{C}(S_c)$ の上では強連続である。

証明 $f\in\mathbb{C}(S_c)$ で $f(x)=f(x(1)),\cdots\cdots,x(n))$ なるものをとる。

S_M を前と同様にとれば $x\in S$ のとき

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

$$\widetilde{H_t} f(x) = \sum_{y \in S} \widetilde{P_t}(x, y) f(y) = \lim_{M \to \infty} \sum_{y \in S_M} \prod_{n=1}^{\infty} P_t^{(n)}(x(n), y(n))$$

$$\times f(y(1), \cdots\cdots y(n))$$

$$= \lim_{M \to \infty} \prod_{n=M+1}^{\infty} P_t^{(n)}(x(n), o) \sum_{y(1), \cdots\cdots y(P)} \prod_{n=1}^{P} P_t^{(n)}(x(n)) y(n))$$

$$f(y(1), \cdots\cdots y(n))$$

$$\times \sum_{y(P+1), \cdots\cdots y(M)} \prod_{n=P+1}^{M} P_t^{(n)}(x(n), y(n))$$

$$= \lim_{M \to \infty} \prod_{n=M+1}^{\infty} P_t^{(n)}(x(n), o) \sum_{y(1) \cdots\cdots y(P)} \prod_{n=1}^{P} P_t^{(n)}(x(n), y(n))$$

$$\times f(y(1), \cdots\cdots, y(P))$$

$$\therefore \quad \widetilde{H_t} f(x) = \sum_{y(1), \cdots\cdots y(P)} \prod_{n=1}^{P} P_t^{(n)}(x(n), y(n))$$

$$\times f(y(1), \cdots\cdots, y(P)) \quad x \in S$$

両辺は x について連続であつたから

$$(6.14) \quad \widetilde{H_t} f(x) = \sum_{y(1), \cdots\cdots y(P)} \prod_{n=1}^{P} P_t^{(n)}(x(n), y(n))$$

$$\times f(y(1), \cdots\cdots, y(P)) \quad x \in S_C$$

$t \downarrow o$ として $\widetilde{H_t} f(x) \to f(x) \quad (t \downarrow o)$ を得る。

$\mathbb{C}(S_C)$ の中ではこのような函数の全体は相密である（cf. Bourbaki: Topologie generale, Chap X）からこれは任意の $f \in \mathbb{C}(S_C)$ についてなりたつ。従つて $\widetilde{H_t}$ は $\mathbb{C}(S_C)$ の上で強連続である。（Example 1 の脚註参照）

2° 連続性

この Markov 連鎖の基礎の空間として高々第一種不連続，右連続なものがとれることは一般論よりの結果であるが，連続函数の全体 W_C をとることは出来ないことを示す。

Prop 62 基礎の空間として W_C をとることは出来ない。

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

証明 S_C の収束は距離 $d(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2u}|x(n),-y(n)|$

で定義されているとしてよい。Seregin*の結果により $\epsilon>o$, $c>o$ で

$$\int_0^{c-h} P_x(d(x_t, x_t+h)>\epsilon)\,dt=o(h) \quad h\downarrow o \quad x\in S$$

が成立しないものが存在することを云えばよい。少しく計算すれば

$$\lim_{t\downarrow o}\frac{1}{t}P_t(x,y)=\begin{cases} q_o^{(n)} & x(n)=o,\ y(n)=1,\ x(\kappa)=y(\kappa) \quad (\kappa\neq n) \\ q_1^{(n)} & x(n)=1,\ y(n)=o,\ x(\kappa)=y(\kappa) \quad (\kappa\neq n) \\ o & \text{その他} \end{cases}$$

但し $x\neq y$

となつていることがわかる。

$o<\epsilon<\frac{1}{2}$ とし $c>o$ は任意に定める。

$$\frac{1}{h}\int_o^{c-h} P_x(d(x_t, x_t+h)>\epsilon)\,dt$$

$$=\frac{1}{h}\sum_{y\in S} P_h(y\ V_\epsilon(y))\int_o^{c-h} P_t(x,y)\,dt$$

$$\geqq\frac{1}{h}P_h(x, V_\epsilon(x))\int_o^{c-h} P_t(x,x)\,dt$$

ここに $V_\epsilon(y)=\{z ; z\in S_C \quad d(y,z)\geq\epsilon\}$

(*) L.V.Seregin: Continuity canditions for stochastic processes, Theory of Prob its Appl, VI,1, (1961) の Theorem 3.4

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

$x' = (1-x(1), x(2), \ldots\ldots)$ なる点については $d(x, x') = \dfrac{1}{2}$ であるから

$x' \in V_\varepsilon(x)$。故に上の不等式から

$$\lim_{h \to o} \frac{1}{h} \int_o^{c-h} P_x(d(x_t, x_{t+h}) > \varepsilon)\, dt$$

$$\geq \lim_{h \to o} \frac{1}{h} P_h(x, x') \int_o^{c-h} P_t(x, x)\, dt = q_x^{(1)}(1) \int_o^c P_t(x, x)\, dt > o$$

注意 Feller–Mckean〔10〕 では連続函数 w: 〔0, $+\infty$〕→〔0, 1〕の全体を基礎の確率空間にとることが出来る。

3° Recurrence 及び不変測度

Prop 63 各 $x \in S_C$ は recurrent であり, $x \in S$ は stongly recurrent である。

この Prop は後で述べる補足から第四章§4の定理 4.8, 4.9 を用いてなりたつことがわかるが, ここではこの example の特殊性を用いた証明を述べることにする。

証明 $x, y \in S$ ならば, $P_t(x, y)$ の定義と条件(6.11)よりつねに $P_t(x, y) > o$ であることがわかる。従つて 任意の $x \in S_C$ についても

$$P_t^*(x, y) = \sum_{Z \in S} P_\gamma^*(x, z) P_{t-\gamma}(z, y)$$

なる関係より $P_t^*(x, y) > o$ である。$P_t^*(\cdot, y)$ は S_C で連続であるから, このことより $\min\limits_{x \in S_C} P_t^*(x, y) = \alpha > o$。

故に $t > o$ と $y \in S$ を固定したとき

$$\sup_{x \in S_C} P_x^*(\sigma_y > t) = 1 - \inf_{x \in S_C} P_x^*(\sigma_y \leq t) \leq 1 - \inf_{x \in S_C} P_x^*(x_t = y) \leq 1 - \alpha$$

$$P_x^*(\sigma_y > 2t) = P_x(\sigma_y > t, \sigma_y(w_t^+) > t) = E_x\{P_{x_t}^*(\sigma_y > t); \sigma_y > t\} < (1-\alpha)^2$$

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

$$P_x^*(\sigma_y > nt) < (1-\alpha)^n \qquad n = 1, 2, \ldots\ldots$$

を得る。故に $P_x^*(\sigma_y < +\infty) = 1 \quad (x \in S_C)$ 及び

$$E_x^*(\sigma_y) = \int_{(0,\infty)} sP_x^*(\sigma_y \in ds) < \sum_{n=1}^{\infty} \int_{[(n-1)t,\, nt)} nt\ P_x^*(\sigma_y > (n-1)t)$$

$$< \sum_{n=1}^{\infty} nt\,(1-\alpha)^{n-1} < +\infty$$

次にUをS_Cの任意の開集合とすれば，SがS_Cで相密なことから$S_C \ni y$なる$y \in S$が存在する。従つて上のことより$E_x(\sigma_U) < E_x(\sigma_y) < +\infty$である。この2つのことより，recurrence, strongly recurrence の定義に戻つてみれば Prop のなりたつことがわかる。

S_C上の測度$m(\cdot)$を次のように定義する。

$$(6.15)\begin{cases} m^{(n)}(\varepsilon) = \dfrac{q^{(n)}_{1-\varepsilon}}{r_n} & \varepsilon = 0 \text{ 又は } 1 \\ m(x) = \prod_{n=1}^{\infty} m^{(n)}(x(n)) & x \in S_C \\ m(B) = \sum_{x \in B \cap S} m(x) & \end{cases}$$

Prop 6.4 $m(\cdot)$は Markov 連鎖$X = (W, B, P_x, x \quad S_C)$の不変測度であり，任意の不変測度は定数倍を除いて$m(\cdot)$と一致する。

証明 2段階にわける。

(1°) 先づ(6.11)，(6.15)より$m(x)$は$x \in S$のときのみ> 0である。更にS_Mを1°構成のときと同じ集合とすれば，

$$m(S_C) = m(S) = \lim_{M \to +\infty} m(S_M) = \lim_{M \to +\infty} \prod_{n=M+1}^{\infty} m^{(n)}(x(n)) \sum_{x(1),\ldots,x(M)} \prod_{n=1}^{M} m^{(n)}(x(n))$$

$$= \lim_{M \to +\infty} \prod_{n=M+1}^{\infty} \frac{q_1^{(n)}}{r_n} = 1$$

だからmはS_C上の確率分布である。

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

次に

$$Q_t^{(n)}(o,o)=1+\frac{q_o^{(n)}}{q_1^{(n)}}e^{-\gamma_n t},$$

$$Q_t^{(n)}(1,1)=1+\frac{q_1^{(n)}}{q_o^{(n)}}e^{-\gamma_n t}$$

$$Q_t^{(n)}(o,1)=Q_t^{(n)}(1,o)=1-e^{-\gamma_n t}$$

とおけば, $P_t^{(n)}(x(n),y(n))=Q_t^{(n)}(x(n),y(n))\,m^{(n)}(y(n))$ である。

(6.11) によつて $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{q_o^{(n)}}{q_1^{(n)}}<+\infty$ であるから $Q_t(x,y)=\prod_{n=1}^{\infty}Q_t^{(n)}(x(n),y(n))$

は, $x,y\in S$ に対しては収束している。従つて $P_t(x,y)=Q_t(x,y)\,m(y)$, $(x,y\in S)$ 且つ $Q_t(x,y)$ の定義より $Q_t(x,y)=Q_t(y,x)$ である。故に

$$\int_{S_C}m(dx)\,P_t^*(x,B)=\sum_{x\in S}m(x)\,P_t(x,B\cap S)=\sum_{y\in B\cap S}\sum_{x\in S}m(x)\,P_t(x,y)$$

$$=\sum_{y\in B\cap S}\sum_{x\in S}m(x)\,Q_t(x,y)\,m(y)=\sum_{y\in B\cap S}\left[\sum_{x\in S}Q_t(y,x)\,m(x)\right]m(y)$$

$$=m(B\cap S)=m(B)$$

すなわち mは不変測度となつている。

(2°) $f\in\mathbb{C}(S_C)$ を Prop 6.1 の証明のときに用いた Tame function とすると, (6.14) がなりたつから, その式で $t\to\infty$とすれば,

$$\lim_{t\to+\infty}\widetilde{H}_t f(x)=\sum_{y(1),\cdots,y(p)}\prod_{n=1}^{p}m^{(n)}(y(n))\,f(y(1),\cdots y(p))=$$

$$=\int f(y)\,m(dy)$$

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

故に任意の $f \in \mathbb{C}(S_c)$ に対して

$$(6.16) \qquad \lim_{t\to\infty} \widetilde{H}_t f(x) = \int f(y)\, m(dy) \qquad x \in S_c$$

がなりたつ。

今μを任意の不変測度とすると$f \in \mathbb{C}(S_c)$ に対して

$\int \widetilde{H}_t f(x)\, \mu(dx) = \int f(x)\, \mu(dx)$ であるから(6.16)より

$$\int f(x)\, \mu(dx) = \lim_{t\to\infty} \int \widetilde{H}_t f(x)\, \mu(dx) = \iint f(y)\, m(dy)\, \mu(dx)$$
$$= \mu(S_c) \int f(y)\, m(dy)$$

従つて Riesz の定理より $\mu(\cdot) = \mu(S_c)\, m(\cdot)$

補 足

Prop6.3, 6.4に関連して一般に次のことがなりたつことを注意しておく。

Sを compact な距離空間, $X = (W, B, P_x, x \in S)$ を canonical な Markov 過程で $H_t f(x) = E_x f(x_t)$ として得られる半群は$H_t : \mathbb{B}(S) \to \mathbb{C}(S)$ 且つ$\mathbb{C}(S)$ 上では強連続とする。Dを任意の開集合としたとき

$$H_D(x, B) = P_x(x_{\sigma_D} \in B, \sigma_D < +\infty), \qquad B \subset \overline{D}$$

$f \in \mathbb{B}(\overline{D}) = \{\overline{D}$ 上の有界可測函数の全体$\}$ に対して

$$H_D f(x) = \int_{\overline{D}} f(y)\, H_D(x, dy) = E_x\{f(x_{\sigma_D}) ; \sigma_D < +\infty\}$$

とおく。このとき $H_D f(x)$ は $x \in D^c$ で連続である。

この事実は

M.Nagasawa: The adjoint proess of a diffusion with reflecting barrier, Kōdai Math. Seminar Rep.vol 13, No. 4, (1961)

の Appendix に不変測度の存在と一意性に関連して述べられている。そこでの結果を第四章§4の定理4.8 4.9と合せて用いれば Prop6.3., 6.4 は一般論の結果としてなりたつ。

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

文 献 表

〔1〕 D. Blackwell, Another countable Markov processes with only instantaneous states, Ann. Math. Stat. 29, (1958).

〔2〕 M. Brelot, G. Choquet, J. Deny. Seminaire de Theorie du Potentiel. 1960/61.

〔3〕 K.L. Chung, Markov chains nith stationary transition probabilities, Springer, 1960.

〔4〕 K.L. Chung, On last exit time, Ill. J. Math. 4(1960).

〔5〕 R.L. Dobruvin, On example of a countable homogeneous Markov process all states of which are instantaneous Theory of Prob. its Appl. 2 (1957).

〔6〕 J.L. Doob, Markoff chain: Denumerable case. Trans. Amer. Math. Soc. 58 (1945).

〔7〕 ―――――, Stochastic processes, New York (1953).

〔8〕 J.L. Doob, Discrete potential and boundaries, J. Math. Mech. 8 (1959).

〔9〕 E.B. Dynkin, Theory of Markov processes. (Translated from Russian). Pergamon press, 1960.

〔10〕 W. Feller, H.P. Mckean, A diffusion equivalent to a countable Markov chain, Proc. Amer. Math. Soc. 42 (1956).

〔11〕 G.A. Hunt, Markoff processes and potentials. I, II, III, Ill. J. Math. 1 (1957), 2(1958).

〔12〕 ―――――, Markoff chains and Martin boundaries,

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

Ill. J. Math.

〔13〕 伊藤 清， 確率論（岩波現代数学）

〔14〕 ————， 確率過程 I，II．（現代応用数学講座）

〔15〕 K. Ito, Tata の lecture note.

〔16〕 伊藤，渡辺，福島， 拡散過程． Sem. on. Prob. vol. 3 (1960).

〔17〕 J.L. Kelley, General topology, New York, 1955.

〔18〕 近藤亮司， Markov 過程と Potential. Sem. on prob.. vol 11.

〔19〕 H. Kunita, Applications of Martin boundaries to instantaneous return Markov processes over a denumerable space, J. Math. Soc. Tepan. 14(1962).

〔20〕 P.Lévy, Systems markoviens et stationaires, cas denombrable, Ann. Sci. École. Norm. Sup. 68(1951).

〔21〕 P. Lévy, Complément a l' étude des processus de Markoff. Ann. Sci. Ecole. Norm. Sup. (3) 69(1952).

〔22〕 P.Lévy, Processus markoviens et stationaires.. cas dénombrable. Ann. Inst. H. Poincaré 16 (1958).

〔23〕 H. Loomis, An introduction to abstract harmonic analysis. 1953.

〔24〕 R.S. Martin, Minimal positive harmonic functions. Trans. Amer. Math. Soc. 49 (1961).

〔25〕 G. Maruyama-H. Tanaka, Ergodic property of N-dimensional recurrent Markov processes, Mem. Fac. Sci. Kyushu. Univ. Ser. A. 13 (1959).

〔26〕 中山 正， 集合，位相，代数系， 至文堂， 1949.

〔27〕 D. Ray, Resolvent, transition functions, and strongly Markovian processes, Ann. of Math. 70 (1959).

〔28〕 竹内，山田，渡辺 安定過程—— Riesz

ポテンシャル Path の性質 Sem. on Prob. vol. 13

[29] T. Ueno, On recurrent Markov processes, Kodai Math. Sem. Rep. 12 (1960).

[30] V.A.Volkonski, Additive functionals of Markov processes, Trudy Moskov.Mat.Obs.9. (1960).

[31] T. Watanabe, Some general properties of Markov processes. J. Inst. Poly. Osaka City Univ. 10(1959).

[32] 渡辺 毅, 可附番空間の上のMarkov 過程から導びかれる Martin 境界.
Semi. on Prob. vol. 1.

[33] T.Watanabe, On the theory of Martin boundaries induced by countable Markov processes. mem of Col. Univ. Kyoto. 33 (1960).

[34] ——————, On the equivalence of excessive functions and superharmonic functions.,
to appear.

[35] 吉田耕作, 位相解析 (岩波現代数学)

[36] D.V. Widder, The Laplace transform, Princeton 1946.

[37] 「数学」 13巻1号 (1960). 確率過程論特集号.

Sem. on Probab.
Vol.14 1962年
P1-126

1962. 10. 発行　確率論セミナー