Sem. on Probab.
Vol.10 1961年
P1-103

SEMINAR ON PROBABILITY

vol. 10

西 尾 真 喜 子

Wiener 積分と強定常過程の表現

1 9 6 1

確 率 論 セ ミ ナ ー

Sem. on Probab.
Vol.10 1961年
P1-103

前書き

強定常過程の表現の問題は予報理論との関連に於て提起される。与えられた定常過程Xを性質のはっきりした確率過程で表わすことがXの性質をしらべる上に望ましいことであるが，予報理論との関連に於ては，直交彷徨測度$d\xi$による線形移動表現

$$X(t.\omega)=\int^{t}F(t-s)\,d\xi(s.\omega) \qquad (1)$$

が専ら用いられた。こゝで直交彷徨測度$d\xi(t)$は$X(t)$に含まれる情報の中で過去とは無相関な部分と見なされる。

Vol.7に述べられているように，$X(t)$に含まれる，過去とは無関係な部分を取り出す事は，P. Lévyの研究方向で，確率過程Xの満すべき方程式

$$dX(t)=\Phi(X(\tau),\ \tau\leq t,\ \xi_t,\ t,\ dt) \qquad (2)$$

こゝでξ_tは$\{X(\tau),\ \tau\leq t\}$とは独立な確率変数を決定する事が問題となる。

このノートの目的は強定常過程の独立彷徨測度による表現である。一章では独立彷徨測度の性質を述べるが§1～§3は主として二章の準備である。定常な独立彷徨測度の推移変換を特長づける事が表現の問題と関係するが，spectral type（[10]）を§4で与へる。二章では(2)に述べた立場より独立彷徨測度の$f.n$函数として強定常過程を構成したいのであるが，その第一近似的な解答としてN. Wienerの多項式近似定理があげられる。これは，ウィナー彷徨測度の多項式で，強定常過程が法則的に近似できる事を示すものである。

(2)の立場で統一的に取扱われている正規定常過程の表現の拡張として一般の強定常過程の表現の定義が与えられるが，時間経数が離散な finite state markov 系列の場合に問題が解けているに過ぎない。（[16]，[17]）

猶Vol 7で述べられているように，正規定常過程以外にも linear process では表現が研究されて居るが，この方向への拡張は我々の目的でない為，このノートでは触れない事にした。現在の所我々の目的の強定常過程の表現は系統的な扱いは，殆んどなされて居なく又，二，三の断片的な結果が得られているに過ぎないが，最近池田，飛田両氏により特性汎函数による方法が考えられている。これが完成すれば，正規定常過程の場合と同様統一的な理論の得られることと思う。

Sem. on Probab.
Vol.10 1961年
P1-103

このノートを準備中，伊藤先生はじめ，セミナーに出席された方々に種々御助力をいたゞいた。深く感謝の意を表したい。

Sem. on Probab.
Vol.10 1961年
P1-103

目　次

Sem. on Probab.
Vol.10 1961年
P1-103

記 号

このノートを通じて用いられる記号を初めにまとめておく。基礎確率空間は断らなくとも、このノートでは完備測度空間とする。$\Omega(\mathcal{B}, P)$ を基礎確率空間とする。

(i) $(\mathcal{B}\ni)\,E,\ E'$ が $P(E\sim E')=0$[(1)] の時、互に equivalent な集合と云い、$E\approx E'$ と記す。

(ii) $\mathfrak{A}$ を $\mathcal{B}$ の部分ボレル集合体とする。

$$\bar{\mathfrak{A}}=\{E\ ;\ \exists E'\in\mathfrak{A},\ E\approx E'\}$$

即ち $\bar{\mathfrak{A}}$ は $\mathfrak{A}$ の元と equivalent な集合の全体が作るボレル集合体[(2)]

$\mathfrak{Y}=\{Y(\lambda,\omega),\ \lambda\in\Lambda\}$ を Ω 上の実数値又は複素数値確率変数の系とする。

(iii) Λ' を Λ の部分集合とするとき $\{Y(\lambda,\omega),\ \lambda\in\Lambda'\}$ を可測とする最小ボレル集合体を $\mathcal{B}_{\Lambda'}(\mathfrak{Y})$、$\mathcal{B}_{\Lambda}(\mathfrak{Y})$ を $\mathcal{B}(\mathfrak{Y})$ と記す。

(iv) 二次平均有限な $\bar{\mathcal{B}}(\mathfrak{Y})$-可測複素数値確率変数の全体は内積を $(\xi,\eta)=E(\xi\bar{\eta})$ と定める事により、ヒルベルト空間を作る。これを $H(\mathfrak{Y})$ と記す。又 $H(\mathfrak{Y})$ の中で $\bar{\mathcal{B}}_{\Lambda'}(\mathfrak{Y})$-可測なものは部分ヒルベルト空間を作る。これを $H_{\Lambda'}(\mathfrak{Y})$ と記す。$H(\mathfrak{Y})$ の元を $\mathfrak{Y}$ の L_2-汎函数と呼ぶ。

(v) $L_2(\mathfrak{Y})=H(\mathfrak{Y})\ominus\{1\}$ 即ち $L_2(\mathfrak{Y})$ は平均 0、二次平均有限な $\bar{\mathcal{B}}(\mathfrak{Y})$-可測確率変数の作るヒルベルト空間。又、$L_2(\mathfrak{Y})$ の中で $H_{\Lambda'}(\mathfrak{Y})$ に属するものを $L_2(\mathfrak{Y},\Lambda')$ と記す。

このノートで主として用いるものは $\Lambda=(-\infty,\infty)$（特に $\mathfrak{X}=\{x(t,\omega),\ -\infty<t<\infty\}$ が二次平均連続な弱定常過程の場合）である時 $\Lambda'=(-\infty,t]$ に対し $\mathcal{B}_{\Lambda'}(\mathfrak{Y}),\ H_{\Lambda'}(\mathfrak{Y})\ L_2(\mathfrak{Y},\Lambda')$ を各々 $\mathcal{B}_t(\mathfrak{Y}),\ H_t(\mathfrak{Y}),\ L_2(\mathfrak{Y},t)$ を記す。

---

(1) $\sim$ は symmetric difference.

(2) $\bar{\mathfrak{A}}$ がボレル集合体となる事は明。

Sem. on Probab.
Vol.10 1961年
P1-103

Λが$\mathbb{B}_2$[1]の部分系であるとき，$\Lambda'=\Lambda\cap\{E;E\subset(-\infty,t]\times R'\}$に対し，$\mathbb{B}_{\Lambda'}(\mathfrak{Y})$，$H_{\Lambda'}(\mathfrak{Y})$，$L_2(\mathfrak{Y},\Lambda')$を各々$\mathbb{B}_t(\mathfrak{Y})$，$H_t(\mathfrak{Y})$，$L_2(\mathfrak{Y},t)$と記すが，上の場合と混乱はしないであろう。（今の様な例としては$\mathfrak{Y}$が独立依従測度のとき）

Λが$\mathbb{B}_1$の部分系であるとき$\Lambda'=\Lambda\cap\{E:E\subset(-\infty,t]\}$に対し，$\mathbb{B}_{\Lambda'}(\mathfrak{Y})$，$H_{\Lambda'}(\mathfrak{Y})$，$L_2(\mathfrak{Y},\Lambda')$を矢張り$\mathbb{B}_t(\mathfrak{Y})$，$H_t(\mathfrak{Y})$，$L_2(\mathfrak{Y},t)$と記す。（例として$\mathfrak{Y}$がウィナー依従測度の場合がある。この時，$\mathfrak{Y}$を$dB$と記す）

(Vi) R^nで定義された複素数値函数でルベーグ測度に関し$|f|^2$が可積分なるものの全体の作るヒルベルト空間を$L_2(R^n)$と記す。

---

(1) $\mathbb{B}_2$は普通の二次元ボレル集合体

Sem. on Probab.
Vol.10 1961年
P1-103

第一章 独立彷徨測度

§1. 定 義

R^k をk次元ユークリッド空間, $\mathbb{B}_k$ を開集合より作られる普通のボレル集合体とする。$\mathbb{B}_k$ の部分系 $\mathbb{B}^*$ が次の条件を満す時、条件付ボレル集合体と呼ぶ。

(B1) $E_1, E_2 \in \mathbb{B}^* \Rightarrow E_1 \cup E_2 \in \mathbb{B}^*$

(B2) $E_n \in \mathbb{B}^*, \quad n=1,2\cdots\cdots \quad \Rightarrow \bigcap_n E_n \in \mathbb{B}^*$

(B3) $E_1, E_2 \in \mathbb{B}^*, \quad E_1 \supset E_2 \Rightarrow E_1 - E_2 \in \mathbb{B}^*$

(B1)～(B3)の条件より, 次の事が得られる. 先ず(B3)に於て $E_1 = E_2$ とすれば

(B4) $\phi \in \mathbb{B}^*$

$E_1 \sim E_2 = (E_1 \cup E_2) - (E_1 \cap E_2)$ に注意すれば

(B5) $E_1, E_2 \in \mathbb{B}^* \Rightarrow E_1 \sim E_2 \in \mathbb{B}^*$

(B6) $E_n \in \mathbb{B}^* \quad n=1,2\cdots\cdots$, 且すべてのE_n を含む$\mathbb{B}^*$の元が存在すれば $\bigcup E_n \in \mathbb{B}^*$

∵ $E \supset \bigcup_n E_n \quad E \in \mathbb{B}^*$. とする. $C_n \equiv E - E_n$ とおけば (B3)より $C_n \in \mathbb{B}^*$. 故に(B2)より $\bigcap_n C_n \in \mathbb{B}^*$. 所が $\bigcup_n E_n = E - (\bigcap_n C_n)$ より $\bigcup_n E_n \in \mathbb{B}^*$.

(B6)の逆として次の事は明である。

(B6′) $E_n \in \mathbb{B}^*, \quad n=1,2\cdots\cdots, \quad \bigcup_n E_n \in \mathbb{B}^* \Longrightarrow$

$\exists E ; \forall n, \quad E_n \subset E, \quad E \in \mathbb{B}^*$.

(B6), (B6′)より $E_n \in \mathbb{B}^*, \quad n=1,2,\cdots\cdots$ なる集合列に対し, $\bigcup E_n$ が $\mathbb{B}^*$ に属する必要十分条件は $\mathbb{B}^*$ の中に、すべてのE_n を含む集合が存在する事である。

この条件により $\mathbb{B}^*$ は条件付ボレル集合体と呼ばれる。

基礎確率空間$\Omega(\mathbb{B}, P)$上で定義された実数値確率変数の系 $\mathbb{M} = \{M(E,\omega)\ E \in \mathbb{B}^*\}$ ($\mathbb{B}^*$ は条件附ボレル集合体)が次の条件を満す時, 独立彷徨測度(*Independent random measure*)と云う。

(M1) $P(|M(E)|^{(1)} < \infty) = 1 \qquad \forall E \in \mathbb{B}^*$

---

(1) 混乱しない限り確率パラメーターωは省略する.

Sem. on Probab.
Vol.10 1961年
P1-103

(M2) $E_1, \text{-----} E_n$ が互に共通点のない $\mathcal{B}^*$ に属する集合である時 $M(E_1)$, ---- $M(E_n)_n$ は互に独立な確率変数で

$$M\left(\bigcup_{i=1} E_i\right) = \sum_{i=1} M(E_i) \qquad (a.e)$$

(M3) 減少しながら空集合 ϕ に近づく $\mathcal{B}^*$ の元の列 $\{E_n\}$ に対し

$$M(E_n) \longrightarrow 0 \qquad (\textit{in probability})$$

特に $\mathbb{M}$ が正規系をなす時，（実）正規仿偶測度と云う

(M3) の代りに (M3′) を用いても定義は同等である。

(M3′) $E_n,\ n=1,2 \text{------}$ が互に排反する $\mathcal{B}^*$ の元で $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ が $\mathcal{B}^*$ に属する時

$$M\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} M(E_n) \qquad (a.e)$$

⊙ (M3) が成立する時，(M3′) の条件を満す $E_n,\ n=1,2 \text{-----}$ に対し

$$F_k \equiv \bigcup_{n=k}^{\infty} E_n$$

とおけば $\{F_k\}$ は減少しながら ϕ に近ずく $\mathcal{B}^*$ の元となる．故に

$$M(F_k) \longrightarrow 0 \qquad (\textit{in probability})$$

故に (M2), (M3) により

$$M\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = P\text{-}\lim_{N\to\infty} \sum_{N=1}^{N} M(E_n)'$$

所が独立確率変数の和では，確率収束と概収束は同等の為

$$M\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} M(E_n) \qquad (a.e)$$

逆に (M3′) が成立するとする． $E_n\ (\in \mathcal{B}^*)$ が減少しながら ϕ に近ずく時

$$F_k = E_k - E_{k+1}$$

とおけば $\{F_k\}$ は互に排反する $\mathcal{B}^*$ の元で $\bigcup_{k=n}^{\infty} F_k = E_n$． 故に (M3′) より

$$M(E_n) = \sum_{k=n}^{\infty} M(F_k) \qquad (a.e) \quad n=1,2\text{-----}$$

故に $M(E_n) \longrightarrow 0 \qquad (a.e)$

故に $M(E_n) \longrightarrow 0 \qquad (\textit{in probability})$ Q.E.D.

---

(1) $P\text{-}\lim$ は確率収束の極限

Sem. on Probab.
Vol.10 1961年
P1-103

第一章 独立彷徨測度

§1. 定 義

R^k をk次元ユークリッド空間, $\mathbb{B}_k$ を開集合より作られる普通のボレル集合体とする。$\mathbb{B}_k$ の部分系 $\mathbb{B}^*$ が次の条件を満す時、条件付ボレル集合体と呼ぶ。

(B1) $E_1, E_2 \in \mathbb{B}^* \Rightarrow E_1 \cup E_2 \in \mathbb{B}^*$

(B2) $E_n \in \mathbb{B}^*, \quad n=1,2\cdots\cdots \quad \Rightarrow \bigcap_n E_n \in \mathbb{B}^*$

(B3) $E_1, E_2 \in \mathbb{B}^*, \quad E_1 \supset E_2 \Rightarrow E_1 - E_2 \in \mathbb{B}^*$

(B1)〜(B3)の条件より, 次の事が得られる. 先ず(B3) に於て $E_1 = E_2$ とすれば

(B4) $\phi \in \mathbb{B}^*$

$E_1 \sim E_2 = (E_1 \cup E_2) - (E_1 \cap E_2)$ に注意すれば

(B5) $E_1, E_2 \in \mathbb{B}^* \Rightarrow E_1 \sim E_2 \in \mathbb{B}^*$

(B6) $E_n \in \mathbb{B}^*$ $n=1,2\cdots\cdots$, 且すべての E_n を含む $\mathbb{B}^*$ の元が存在すれば $\bigcup E_n \in \mathbb{B}^*$

∵ $E \supset \bigcup_n E_n \quad E \in \mathbb{B}^*,$ とする. $C_n = E - E_n$
とおけば (B3) より $C_n \in \mathbb{B}^*$. 故に(B2) より $\bigcap_n C_n \in \mathbb{B}^*$. 所が
$\bigcup_n E_n = E - (\bigcap_n C_n)$ より $\bigcup_n E_n \in \mathbb{B}^*$.

(B6) の逆として次の事は明である。

(B6') $E_n \in \mathbb{B}^*, \ n=1,2\cdots\cdots, \quad \bigcup_n E_n \in \mathbb{B}^* \Longrightarrow$
$\exists E; \forall n. \quad E_n \subset E, \quad E \in \mathbb{B}^*.$

(B6), (B6')より $E_n \in \mathbb{B}^*$ $n=1,2\cdots\cdots$ なる集合列に対し. $\bigcup E_n$ が $\mathbb{B}^*$ に属する必要十分条件は $\mathbb{B}^*$ の中に、すべての E_n を含む集合が存在する事である。

この条件により $\mathbb{B}^*$ は条件付ボレル集合体と呼ばれる。

基礎確率空間$\Omega(\mathbb{B}, P)$ 上で定義された実数値確率変数の系 $\mathbb{M} = \{M(E,\omega)$ $E \in \mathbb{B}^*\}$ ($\mathbb{B}^*$ は条件附ボレル集合体) が次の条件を満す時, 独立彷徨測度 (*Independent random measure*) と云う。

(M1) $P(|M(E)|^{(1)} < \infty) = 1 \qquad \forall E \in \mathbb{B}^*$

---

(1) 混乱しない限り確率パラメーターωは省略する.

Sem. on Probab.
Vol.10 1961年
P1-103

(M2) $E_1, \dots, E_n$ が互に共通点のない $\mathbb{B}^*$ に属する集合とする時 $M(E_1)$, $\dots, M(E_n)_n$ は互に独立な確率変数で

$$M(\bigcup_{i=1} E_i) = \sum_{i=1} M(E_i) \quad (a.e)$$

(M3) 減少しながら空集合 ϕ に近づく $\mathbb{B}^*$ の元の例 $\{E_n\}$ に対し

$$M(E_n) \longrightarrow 0 \qquad (\text{in probability})$$

特に $\mathbb{M}$ が正規系をなす時,(実)正規仿偶測度と云う

(M3)の代りに(M3')を用いても定義は同等である。

(M3') E_n, $n=1,2,\dots$ が互に排反する $\mathbb{B}^*$ の元で $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ が $\mathbb{B}^*$ に属する時

$$M(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} M(E_n) \qquad (a.e)$$

⊙ (M3)が成立する時,(M3')の条件を満す E_n, $n=1,2,\dots$ に対し

$$F_k \equiv \bigcup_{n=k}^{\infty} E_n$$

とおけば $\{F_k\}$ は減少しながら ϕ に近ずく $\mathbb{B}^*$ の元となる. 故に

$$M(F_k) \longrightarrow 0 \qquad (\text{in probability})$$

故に(M2),(M3)により

$$M(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = P\text{-}\lim_{N\to\infty} \sum_{N=1}^{N} M(E_n)'$$

所が独立確率変数の和では,確率収束と概収束は同等の為

$$M(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} M(E_n) \qquad (a.e)$$

逆に(M3')が成立するとする. E_n $(\in \mathbb{B}^*)$ が減少しながら ϕ に近ずく時

$$F_k = E_k - E_{k+1}$$

とおけば $\{F_k\}$ は互に排反する $\mathbb{B}^*$ の元で $\bigcup_{k=n}^{\infty} F_k = E_n$. 故に(M3')より

$$M(E_n) = \sum_{k=n}^{\infty} M(F_k) \qquad (a.e) \quad n=1,2,\dots$$

故に $M(E_n) \longrightarrow 0 \qquad (a.e)$

故に $M(E_n) \longrightarrow 0 \qquad (\text{in probability}) \qquad$ QED.

---

(1) $P\text{-}\lim$ は確率収束の極限

Sem. on Probab.
Vol.10 1961年
P1-103

例 1. ウィナ仿僅測度 dB

ルベーグ測度有限な一次元ボレル集合の全体は明に条件付ボレル集合体を成す。これを $\mathbb{B}_1^*$ と以後記す。独立仿僅測度 $\mathbb{M}$;

$$\mathbb{M} = \{ M(E) \ : \ E \in \mathbb{B}_1^* \}$$

が確率法則として "$M(E)$ が $N(0, |E|)$[1] に従う" 場合ウィナー仿僅測度と呼ぶ。この場合 $M(E)$ を $\Delta B(E)$, $\mathbb{M}$ を dB と記す。特に $E=(a, b)$ に対して $M(E)$ を $B(b)-B(a)$ と書く事もある。

例 2. ポアソン加法系 $\mathbb{N}$

二次元 (t, u) 平面で t 軸より正の距離はなれたボレル集合の全体は条件附ボレル集合体を作るが、これを $\mathbb{B}_2^*$ と書く。

$M(E)$ がポアソン分布に従う時, 独立仿僅測度 $\mathbb{M} = \{M(E), \ E \in \mathbb{B}_2^*\}$ をポアソン加法系と呼び, $M(E)$ の代りに $N(E)$ と記す。 $N(E)$ の平均値を $\nu(E)$ とすれば $(M3')$ により $\nu(E)$ は $\mathbb{B}_2^*$ 上で完全加法性を持つ。

例 3

$\mathfrak{X} = \{X(t), \ -\infty < t < \infty\}$ を確立連続な時間的に一様な可分加法過程とする。この時 $\mathfrak{X}$ の増分 ΔX により独立仿僅測度が導かれる。即ち, $I=(a, b)$ に対し,

$$\Delta X(I, \omega) = X(b, \omega) - X(a, \omega)$$

よく知られているように $\Delta X(I)$ は次の分解を持つ。

$$\Delta X(I, \omega) = \gamma |I| + \sigma^2 \int_I dB(t, \omega) + \lim_{n\to\infty} \int_{t\in I} \int_{n'<|u|<n} u\, dN(tu\omega) - \frac{u}{1+u^2}\, d\nu(tu) \qquad (1.2)$$

こゝで $N(J, \omega)$ はウィナー仿僅測度 dB とは独立なポアソン加法系で

$$E N(J, \omega) = \nu(J) \qquad J \in \mathbb{B}_2^* \qquad (1.3)$$

又 $N(J, \omega)$ は J に属する $(t, X(t\omega)-X(t-0\, \omega))$ の個数となり J が $\mathbb{B}_2^*$ に属する有界集合の時, 確率 1 で有限な値となる γ は実常数 $\sigma^2 \geq 0$

$\Delta X(I)$ の特性函数 $\varphi_I(z)$ は Lévy の定理より

$$\varphi_I(z) = E e^{iz\Delta X(I)}$$

---

(1) $|E|$ は E のルベーグ測度

Sem. on Probab.
Vol.10 1961年
P1-103

$$= \exp |I| \left\{ i\gamma z - \frac{\sigma^2}{2} z^2 + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{izu} - 1 - \frac{izu}{1+u^2} \right) \frac{1+u^2}{u^2} dn(u) \right. \quad (1.4)$$

こゝで$n(\cdot)$はR'上の有界測度で且$n(\{0\})=0$

$\Delta X(I)$を拡張して独立術徨測度を$E \in \mathcal{B}_1^*$に対し、次の様に定義する。

$$\Delta X(E) \gamma |E| + \gamma^2 \int_{-\infty}^{\infty} \chi_E(t) dB(t\,\omega) + \lim \int_{-\infty}^{\infty} \chi_E(t) \int_{n^{-1}<|u|<n} u\,dN(t\,u\,\omega)$$

$$- \frac{u}{1+u^2} \, dv(t.u) \quad (1.5)$$

こゝで$\chi_E(\cdot)$は集合Eの定義函数

(1.5)の定義によると、$\Delta X(E)$は次の特性函数を持つ。

$$\varphi_E(z) = \exp |E| \left\{ i\gamma z - \frac{\sigma^2}{2} z^2 + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{izu} - 1 - \frac{izu}{1+u^2} \right) \frac{1+u^2}{u^2} dn(u) \right. \quad (1.6)$$

(1.3)の測度$v(\cdot)$と$n(\cdot)$とは次の関係がある

$$v(J) = \iint_J \frac{1+u^2}{u^2} \, dt\,dn(u) \quad (1.7)$$

(1.5)の定義が条件(M1)〜(M3)を満す事は容易に確められる。

例4. X, dB, N, vを例3と同じものとする。R^2に次の測度を入れる。

$$m(E) = \iint_E (1+u^2)\,dt\,dn(u) + \sigma^2 \int_{E(0)} dt$$

$$= \iint_E u^2 \, dv(t.u) + \sigma^2 |E(0)| \quad (1.8)$$

こゝで　$E(0)\{t;\ (t.0) \in E\}$

$\mathcal{B}^*$をm測度有限な二次元ボレル集合の全体とする。独立術徨速度を次の様に定義する。

$$M(E.\omega) = \sigma \int_{E(0)} dB(t.\omega) + \lim_{n\to\infty} \iint_{E(n)} [u\ dN(t.u.\omega) - u\,dv(t.u)]$$
$$(1.9)$$

こゝで　$E(n) = \{(t.u) : (t.u) \in E.\ n^{-1} < |u| < n\}$　　$n = 1.2 \cdots\cdots$

(1.9)の右辺第二項が概収束する事は

$$X_n(\omega) \equiv \int_{E(n)-E(n-1)} [u\,dN(t.u.\omega) - u\,dv(t.u)], \quad n = 2.3 \cdots\cdots \quad (1.10)$$

$$X_1(\omega) = \iint_{E(1)} [u\,dN(t.u.\omega) - u\,dv(t.u)] \quad (1.11)$$

Sem. on Probab.
Vol.10 1961年
P1-103

とおけば $\{X_n\}$ は互に独立な確率変数で

$$E X_n = 0, \quad V(X_n) = \iint_{E(n)-E(n-1)} u^2 \, d\nu(t, u) \tag{1.12}$$

故に

$$\sum_{n=1}^{\infty} V(X_n) = \iint_E u^2 \, d\nu(t, \omega) < \infty$$

故に　$\sum X_n(\omega)$ は二次平均收束．従って独立確率変数の和より概收束する。

この場合の一次及び二次のモーメントは次の様になる．

$$E\, M(E) = 0, \quad E(M(E_1) \cdot M(E_2)) = m(E_1 \cap E_2) \tag{1.13}$$

∵　dB と N との独立性より

$$E(M(E_1) M(E_2)) = E\left(\int_{E_1(0)} \sigma \, dB(t) \int_{E_2(0)} \sigma \, dB(t)\right)$$

$$+ \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} E\left[\iint_{E_1(n)} (u\, dN(t.u.\omega) - u\, d\nu(t.u)) \cdot \iint_{E_2(m)} (u\, dN(t.u.\omega)\right.$$

$$\left. - u\, d\nu(t.u))\right) = \sigma^2 \int_{E_1(0)\cap E_2(0)} dt + \lim_{n\to\infty} E\left[\iint_{(E_1\cap E_2)(n)} u\, dN(t.u.\omega)\right.$$

$$\left. - u\, d\nu(t.u)\right]^2 = \sigma^2 \int_{(E_1 \cap E_2)(0)} dt + \lim_{n\to\infty} \iint u^2 \, d\nu(t\, u) = m(E_1 \cap E_2)$$

$M = \{M(E),\ E \in B^*\}$ が (M1)(M2)(M3) を満し．従って独立彷徨測度となる事は簡単に證明できる．

§2. 重複ウィナ積分

以后の目的の為に例４の独立彷徨測度 M を基礎にした重複ウィナー積分 (*Multiple Wiener Integral*) を定義する。

定義に入る前に測度 m の連続性を注意しておく。

連続性；任意の正数 ε と任意の集合 $E(\in B^*)$ に対し．次の条件を満す E の分解 $E = \bigcup_{i=1}^{N} E_i$ $(E_i \cap E_j = \phi)$ が存在する。

$$m(E_i) < \varepsilon \qquad i = 1.2 \cdots\cdots N \tag{2.1}$$

∵　$m_1(E) = \iint_E (1+u^2)\, dt\, dn(u) \quad m_2(E) = \sigma^2 \int_{E(0)} dt \qquad E \in B^*$

とおけば

$$m(E) = m_1(E) + m_2(E) \tag{2.2}$$

Sem. on Probab.
Vol.10 1961年
P1-103

測度 m_1 は一次元測度 dt と $(1+u^2)dn(u)$ の直積測度となっているため、直積測度空間のフビニの定理により

$$m_1(E)=\int_{-\infty}^{\infty}dt\left(\int_{-\infty}^{\infty}\chi_E(t,u)(1+u^2)dn(u)\right)^{(1)} \tag{2.3}$$

故に t 軸を適当に分割する事により

$$\frac{\varepsilon}{4}<\int_{A_i}dt\left(\int_{-\infty}^{\infty}\chi_E(t,u)(1+u^2)dn(u)\right)<\frac{\varepsilon}{2} \tag{2.4}$$

となし得る。 $m_1(E)\leq m(E)<\infty$ より分割は有限な分割となる。これを $\{A_1, A_2, \cdots\cdots, A_n\}$ とする。測度 m_2 に対しても適当な有限分割 $E(0)=\bigcup_{i=1}^{k}B_i$ により

$$\frac{\varepsilon}{4}<\int_{B_i}\sigma^2 dt<\frac{\varepsilon}{2} \qquad i=1\text{-----}k. \tag{2.5}$$

となし得る. $B_0\equiv E(0)^c$ とおき

$$\{E\cap(B_i\times R')\cap(A_j\times R'),\ i=0,\cdots\cdots,k,\ j=1\cdots\cdots n\}$$

は定理の条件(2.1)を満す E の一つの分割を与える.(QED)

$\underbrace{R^2\times\cdots\cdots\times R^2}_{p}$ を測度空間 $R^2(\mathcal{B}_2, m)$ の直積空間とし, L_2^p をその上の二次手平方可積分な函数の作るヒルベルト空間とする. R^2 の点を $\xi=(t,u)$, $\xi_i=(t_i, u_i)$ 等で表わす。

$f=f(\xi_1,\cdots\cdots\xi_p)\in L_2^p$ に対し

$$I_p(f)=\int\cdots\int f(\xi_1,\cdots\cdots\xi_p)dM(\xi_1,\omega)\cdots\cdots dM(\xi_p,\omega) \tag{2.6}$$

なる形の積分を(独立彷徨測度 M による) P 次重複ウイナー積分と云う。この積分の定義の特徴を象徴的に云えば "$(\xi_1,\cdots\cdots\xi_p)$ がすべて異るときには $dM(\xi_1,\omega)\cdots\cdots dM(\xi_p,\omega)$ は普通の積,$(\xi_1,\cdots\cdots\xi_p)$ の中に同じものがあれば 0" となる.(詳しくは定義2.1) $E_1,\cdots\cdots E_p$ が互に共通点のない集で,且 $\mathcal{B}^*$ に属する時 $E=E_1\times\cdots\cdots\times E_p$ なる集合 E の定義函数,又は、そのような形の定義函数の複素係数一次結合で表わされる函数(special elementary function)の全体を S_p とする. 明に $S_p\subset L_2^{p\,(2)}$.

測度 m の連続性により,次の定理を得る。

---

(1) $\chi_E(\cdot)$ は集合 E の定義函数

(2) S_p の中でも、殆んどすべての点で等しい二つの函数は同一と見なす。

Sem. on Probab.
Vol.10 1961年
P1-103

定理 2・1　　S_p は L_2^p の中で稠密である。

証明　L_2^p の中で elementary function[(1)] はノルムに関して稠密であるため $E=E_1\times\cdots\times E_p$ ($E_i\in\mathcal{B}^*$, $i=1\cdots p$) の定義函数 $\chi_E(\xi_1,\xi_2\cdots\xi_p)$ が special elementary function でノルム近似できることを云えば十分である。任意の $\varepsilon>0$ に対し、測度 m の連続性より次の条件を満す $\mathcal{B}^*$ の部分系 $\mathbb{F}=\{F_1,\cdots F_n\}$ が存在する

(F 1)　$F_1,\cdots F_n$ は互に共通点のない有界集合

(F 2)　$m(F_i)<\varepsilon/\binom{p}{2}\left(\sum_{i=1}^{p} m(E_i)\right)^{p-1}$ (ε_1 とおく) $i=1\cdots n$.

(F 3)　E_i は $\mathbb{F}$ の部分系の和集合となる．　$i=1\cdots p$.

故に

$$\chi_E(\xi_1\cdots\xi_p)=\sum_{i_1\cdots i_p=1}^{n}\varepsilon_{i_1\cdots i_p}\ \chi_{F_{i_1}}(\xi_1)\chi_{F_{i_2}}(\xi_2)\cdots\chi_{F_{i_p}}(\xi_p) \quad (2\cdot7)$$

こゝに $\varepsilon_{i_1\cdots i_p}=0$ 又は 1.

$i_1\cdots i_p$ に対する和を二つの部分，即ち，$i_1\cdots i_p$ がすべて異なる場合と残りの部分に分ける。前者に対する和を $\sum'$，後者の方を $\sum''$ とする。

$$f(\xi_1,\cdots\xi_p)=\sum{}'\varepsilon_{i_1\cdots i_p}\chi_{F_{i_1}}(\xi_1)\cdots\chi_{F_{i_p}}(\xi_p) \quad (2\cdot8)$$

とおけば $f\in S_p$ となり 且

$$\|\chi_E-f\|=\sum{}''\varepsilon_{i_1\cdots i_p}\ m(F_{i_1})\cdots m(F_{i_p}) \quad (2\cdot9)$$

$\sum''$ では少なくとも二つの F_i 集合が等しい為

$$\leq\binom{p}{2}\sum_{i=1}^{n}m(F_i)^2\left(\sum_{i=1}^{n}m(F_i)\right)^{p-2}$$

$$\leq\binom{p}{2}\varepsilon_1\left(\sum_{i=1}^{n}m(F_i)\right)^{p-1}\leqq\binom{p}{2}\varepsilon_1\left(\sum_{i=1}^{p}m(E_i)\right)^{p-1}<\varepsilon \quad (2\cdot10)$$

これは定理の成立を意味する。

定義 2．1　　p 次重複ウィナー積分 $I_p(f)$

f が special elementary function $f(\xi_1\cdots\xi_p)=\sum a_{i_1\cdots i_p}\chi_{E_{i_1}}(\xi_1)\cdots\chi_{E_{i_p}}(\xi_p)$ の時

$$I_p(f)=\sum a_{i_1\cdots i_p}M(E_{i_1},\omega)\cdots M(E_{i_p},\omega) \quad (2\cdot11)$$

(1)　$E=E_1\times\ \ \times E_p$ ($E_i\in\mathcal{B}^*$) なる形の集合の定義函数の複素係数一次結合で表わされる函数

Sem. on Probab.
Vol.10 1961年
P1-103

(M2) の加法性により $I_p(f)$ の値は f の表現の仕方にはよらない。

(2.11) の定義により

(i) $I_p(af+bg)=aI_p(f)+bI_p(g) \quad f, g, \in S_p$

(ii) $\|I_p(f)\|^2 \leqq p!\|f\|^2$.

が成立する。但し、その証明はまとめて定理2.2で与える。そこで一般の $f\in L_2^p$ に対して、f_n を f に収束（ノルムで）する special elementary function とした時、(i)(ii)により $I_p(f_n)$ は平均収束する。その極限を $I_p(f)$ とする、即ち

$$I_p(f)=\underset{n\to\infty}{l.i.m}\, I_p(f_n) \quad f_n\to f \quad 且\ f_n\in S_p \tag{2.12}$$

こゝで、定義可能性に注意しておく。即ち $\{f_n\}\{g_n\}$ が共に f にノルム収束する special elementary function の列とすれば、(i)、(ii) より

$$l.i.m\, I_p(f_n)=l.i.m\, I_p(g_n) \tag{2.13}$$

$\nu=0$ のとき $M=dB$ であるが $L_2(R^p)$ の函数 f に対し dB による P 次重複ウィナー積分 $\tilde{I}_p(\tilde{f})$ 全く同様に定義出来る。又これは定義2.1と同じ値を与える。即ち $\tilde{f}(t_1,\dots t_p)=f((t_1\,0),\cdots(t_p\ 0))$ とおいたとき $\tilde{I}_p(\tilde{f})=I_p(f)$

定理 2.2

(A) $I_p(af+bg)=aI_p(f)+bI_p(g) \qquad a.\ b$ 複素数

(B) $I_p(f)=I_p(\hat{f})$

　こゝで $\hat{f}(\xi_1\cdots\xi_p)=\dfrac{1}{p!}\sum_{(\pi)} f(\xi_{\pi_1}\cdots\cdots\xi_{\pi_p})$ (1)

(C) $(I_p(f),\ I_p(g))=p!(\hat{f},\hat{g})$

(C') $\|I_p(f)\|^2=p!\|\hat{f}\|^2\leqq p!\|f\|^2$

(D) $p\neq g$ ならば $(I_p(f),\ I_g(g))=0$

証明

1. 被積分函数が S_p に属する時

(A) は定義 (2.11) より明

(B) $f(\xi_1\cdots\cdots\xi_p)=\sum a_{i_1\cdots i_p}\ \chi_{E_{i_1}}(\xi_1)\cdots\chi_{E_{i_p}}(\xi_p)$ とする

(1) $(\pi)=(\pi_1\cdots\cdots\pi_p)$ は (1.2……p) の順序　和はすべての (1 p) の順列につき加える。

Sem. on Probab.
Vol.10　1961年
P1-103

$$I_p(f)=\sum_{i_1\cdots i_p} a_{i_1\cdots i_p} M(E_{i_1},\omega)\cdots\cdots M(E_{i_p},\omega)$$

$$=\sum_{i_1<i_2\cdots<i_p}\Big(\sum_{(j)\sim(i)} a_{j_1\cdots j_p}\Big) M(E_{i_1})\cdots M(E_{i_p}) \quad {}^{(1)}$$

$$= p!\sum_{i_1<\cdots<i_p}\Big(\frac{1}{p!}\sum_{(j)\sim(i)} a_{j_1\cdots j_p}\Big) M(E_{i_1})\cdots M(E_{i_p})$$

$$=\sum_{i_1,\cdots,i_p}\Big(\frac{1}{p!}\sum_{(j)\sim(i)} a_{j_1\cdots j_p}\Big) M(E_{i_1}) \quad M(E_{i_p})=I_p(\hat f)$$

(c)　f, g は次の形に表わされて居るとしてよい．互に排反する適当な $E_1,\cdots\cdots E_n \in \mathcal{B}^*$ に対し

$$f(\xi_1,\cdots\cdots \xi_p)=a_{i_1\cdots\cdots i_p} \qquad (\xi_1,\cdots\xi_p)\in E_{i_1}\times\cdots\cdots\times E_{i_p} \quad i=1\cdots n$$
$$g(\xi_1, \quad \xi_p)=b_{i_1\cdots\cdots i_p} \qquad \text{〃} \qquad \text{〃}$$

これらの余集合上では f, g 共に 0

$(I_p(f),\ I_p(g))$

$$=\Big(\sum_{i_1<\cdots<i_p}\Big(\sum_{(j)\sim(i)} a_{j_1\cdots j_p}\Big)M(E_{i_1})\cdots M(E_{i_p}),\ \sum_{i_1<\cdots<i_p}\Big(\sum_{(j)\sim(i)} b_{j_1\cdots j_p}\Big)M(E_{i_1})\cdots\cdots M(E_{i_p})\Big)$$

独立性より

$$=\sum_{i_1<\cdots<i_p}\Big(\sum_{(j)\sim(i)} a_{j_1\cdots j_p}\Big)\overline{\Big(\sum_{(j)\sim(i)} b_{j_1\cdots j_p}\Big)}\ m(E_{i_1})\cdots\cdots m(E_{i_p})$$

$$=\frac{1}{p!}\sum_{i_1\cdots i_p}\Big(\sum_{(j)\sim(i)} a_{j_1\cdots j_p}\Big)\overline{\Big(\sum_{(j)\sim(i)} b_{j_1\quad j_p}\Big)}\ m(E_{i_1})\cdots\cdots m(E_{i_p})$$

$$=p!\sum_{i_1\cdots i_p}\Big(\frac{1}{p!}\sum_{(j)\sim(i)} a_{j_1\cdots j_p}\Big)\overline{\Big(\frac{1}{p!}\sum_{(j)\sim(i)} b_{j_1\cdots j_p}\Big)}\ m(E_{i_1})\cdots m(E_{i_p})$$

$$=p!\int\cdots\int \hat f(\xi_1,\cdots\xi_p)\,\overline{\hat g}(\xi_1,\cdots\xi_p)\,dm(\xi_1)\cdots dm(\xi_p)=p!(\hat f,\hat g)$$

(c')　(c) に於て $f=g$ とする事より

$$\|I_p(f)\|^2=p!\,\|\hat f\|^2$$

$$\|\hat f\|^2=\int\cdots\int\Big|\frac{1}{p!}\sum_{(\pi)} f(\xi_{\pi_1},\cdots\xi_{\pi_p})\Big|^2 dm(\xi_1)\cdots dm(\xi_p)$$

---

(1)　$(j)\sim(i)$ は $(j)=(j_1\cdots j_p)$ が $(i)=(i_1\cdots i_p)$ の順列になる事を意味する

Sem. on Probab.
Vol.10 1961年
P1-103

$$= \left(\frac{1}{p!}\right)^2 \sum_{(\pi)(\pi')} \int\cdots\int f(\xi_{\pi_1},\cdots\xi_{\pi_p})\,\bar{f}(\xi_{\pi'_1},\cdots\xi_{\pi'_p})\,dm(\xi_1)\cdots dm(\xi_p)$$

Schwarz の不等式より

$$\leqq \left(\frac{1}{p!}\right)^2 \sum_{(\pi)(\pi')} \left[\int\cdots\int |f(\xi_{\pi_1},\cdots\xi_{\pi_p})|^2\,dm(\xi_1)\cdots dm(\xi_p)\right]^{\frac{1}{2}} \left[\int\cdots\int |f(\xi_{\pi'_1},\cdots\xi_{\pi'_p})|\,dm(\xi_1)\cdots dm(\xi_p)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\frac{1}{p!}\right)^2 \sum_{(\pi)(\pi')} \|f\|^2 = \|f\|^2$$

(D) $p > q$ とする．更に f, g は次の形に表わされて居るとしてよい。
互に排反する適当な $E_1,\cdots E_N \in \mathcal{B}^*$ に対し

$$f(\xi_1,\cdots\xi_p) = a_{i_1\cdots i_p} \quad (\xi_1\cdots\xi_p) \in E_{i_1}\times\cdots\times E_{i_p} \quad i = 1\cdots n$$
$$g(\xi_1,\cdots\xi_q) = b_{i_1\cdots i_q} \quad (\xi_1\cdots\xi_q) \in E_{i_1}\times\cdots\times E_{i_q} \quad \text{〃}$$

これら以外の集合上では f, g 共に 0

$p > q$ より、集合 $(E_{i_1},\cdots E_{i_p})$ の中には $(E_{j_1},\cdots E_{j_q})$ を排反する集合が少なくとも一つある．故に独立性より

$$(M(E_{i_1})\cdots M(E_{i_p}),\ M(E_{j_1})\cdots M(E_{j_q})) = 0$$

故に (A) より $(I_p(f),\ I_q(g)) = 0$

2．一般の $f \in L_2^p$ に対し，定理の成立する事は，(2・12) の定義に戻って S_p の函数で近似さす事により、容易に證明できる．Q.E.D.

$H(M)$ の元は直交展開可能である．即ち

<u>定理 2・3</u> (展開定理)[1] Mの任意の L_2ー汎函数 ξ は

$$\xi = \sum_{p=0}^{\infty} I_p(f_p) = \sum_{p=0}^{\infty} I_p(\hat{f}_p)$$

の形に直交展開せられる。

この定理の證明のために Lemma を三つ用意する。

<u>Lemma</u> 1 $H(M)$ の中で，次の形で表わされる確率変数は fundamental set を作る。

$$N(E_1,\omega)^{p_1}\cdots N(E_m,\omega)^{p_m} \quad \Delta B(I_1,\omega)^{q_1}\cdots\Delta B(I_n,\omega)^{q_n}$$

---

(1) 展開定理は M がウィナー彷徨測度の場合[4]に，一般の場合[10]に与えられて居る。

Sem. on Probab.
Vol.10 1961年
P1-103

$m, n = 1, 2 \cdots$ $\quad p_i, q_i = 0, 1, 2 \cdots$

こゝに $\{E_j\}$ は、互に共通点のない $\mathbb{B}^* \cap \mathbb{B}_2^*$ に属する集合, $\{I_j\}$ は互に共通点のない $\mathbb{B}_1^*$ に属する有界集合

証明

先ず $N(E, \omega)$, $\Delta B(I, \omega)$ が共に $H(\mathbb{M})$ に属する事を注意しておく。加法過程の分解を用いると直ちにわかるが、直接の計算でも得られる. 即ち $E \in B^* \cap \mathbb{B}_2^*$ のとき

$$\|M(E)\|^2 = V(N(E.\omega)) = \nu(E) = \iint_E \frac{1}{u^2}\, dm(t.u) \qquad (2.14)$$

故に $\iint_E \left(\frac{1}{u}\, dM(t.u.\omega) + \frac{1}{u}\, d\nu(t.u)\right)$ は確定するが. $\mathbb{M}$ の定義(1.12) よりこの値は $N(E.\omega)$ となる. (a.e)

$N(E.\omega)$ が $H(\mathbb{M})$ に属すと. $\Delta B(I)$ が又 $H(\mathbb{M})$ に属する事は $E(0) = I$ なる $E \in \mathbb{B}^*$ を任意に固定したとき

$$\Delta B(I) = M(E) - \lim_{n\to\infty} \iint_{E(n)} [u\, dN(t.u.\omega) - u\, d\nu(t.u)] \qquad (2.15)$$

より明である。故に $\{N(E),\ E \in \mathbb{B}_2^* \cap \mathbb{B}^*,\ \Delta B(I)\ \ I \in \mathbb{B}_1^*\}$ より作られる最小ボレル集合体を $\mathbb{B}(N, dB)$ とすれば. $\overline{\mathbb{B}}(N, dB)$ に関して可測な平方可積分複素数値確率変数の作るヒルベルト空間は $H(\mathbb{M})$ と一致する. 故に

$$\eta(\omega) = f(N(E_1, \omega) \cdots N(E_m, \omega),\ \Delta B(I_1, \omega) \cdots \Delta B(I_n, \omega)) \qquad (2.16)$$

こゝに f は有界連続函数. $E_1, \cdots E_m$ は互に排反する $\mathbb{B}^* \cap \mathbb{B}_2^*$ に属する集合, 又 $I_1, \cdots I_n$ は互に排反する $\mathbb{B}_1^*$ の集合, の形で表わされる確率変数で $\mathbb{M}$ の L_2 汎函数をはノルム近似できる.

$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(E_1, \cdots E_m.\ I_1, \cdots I_n)$ を $N(E_1)$, $\quad N(E_m), \Delta B(I_1) \cdots \Delta B(I_n)$ の多項式で張られる閉線型空間とすれば. Lemma の証明の為には $\eta \in \mathfrak{M}$ を云えばよい。 η を直交分解して;

$$\eta(\omega) = U(\omega) + V(\omega), \quad U \in \mathfrak{M}, \quad V \perp \mathfrak{M} \qquad (2.17)$$

$V(\omega) = h(N(E_1, \omega), \quad N(E_m, \omega), \Delta B(I_1, \omega); \quad \Delta B(I_n, \omega))$ とおく. $1 \in \mathfrak{M}$ により $EV = 0$. 又 (2.17) より

$$(V,\ N(E_1)^{p_1} \cdots N(E_m)^{p_m}\, \Delta B(I_1)^{q_1} \cdots \Delta B(I_n)^{q_n}) = 0 \qquad (2.18)$$

即ち

Sem. on Probab.
Vol.10 1961年
P1-103

$$\int\cdots\int h(x_1,\cdots x_m,\ y_1,\cdots y_n)x_1^{p_1}\cdots x_m^{p_m}\ y_1^{q_1}\cdots y_n^{q_n}\ d\sigma_1(x_1)\ \ d\sigma_m(x_m)d\gamma_1\cdots$$
$$\cdots d\gamma_n(y_n)=0 \qquad (2\cdot 19)$$

こゝにσ_i は平均$\nu(E_i)$のポアソン分布, γ_i は$N(0,|I_i|)$の分布函数

一方

$$\int\cdots\int e^{\sum_{i=1}^{m}|t_i x_i|+\sum_{i=1}^{n}|S_i y_i|}\ |h(x_1,\cdots y_n)|\,d\sigma_1(x_1)\cdots d\gamma_n(y_n)$$
$$\leqslant\left[\int\cdots\int|h(x_1\cdots y_n)|^2\,d\sigma_1(x_1)\cdots d\gamma_n(y_n)\right]^{\frac12}\left[\int\cdots\int e^{2(\sum_{i=1}^{m}|t_i x_i|+\sum_{i=1}^{n}|S_i y_i|)}\,d\sigma_1(x_1)\right.$$
$$\left.\cdots d\gamma_n(y_n)\right]^{\frac12}=\|h(N(E_1),\cdots\Delta B(I_n))\|\left[\int e^{2|t_1x_1|}d\sigma_1(x_1)\right]^{\frac12}$$
$$\cdots\left[\int e^{2|S_n y_n|}d\gamma_n(y_n)\right]^{\frac12}$$

故に無限和と積分の順序交換が出来(2・19)より

$$\int\cdots\int h(x_1,\cdots y_n)\ e^{i(t_1x_1+\cdots+S_ny_n)}\,d\sigma_1(x_1)\cdots d\gamma_n(y_n)=0$$

即ち 殆んどすべての($d\sigma_1\cdots d\gamma_n$ 測度に関して)$(x_1,\cdots y_n)$に対し

$$h(x_1,\cdots y_n)=0$$

故に $\eta\in\mathfrak{M}$.

<u>*Lemma. 2*</u> $\varphi_1,\cdots\varphi_n$ を $L_2(R')$ の正規直交系, $H_p(x)$をP次エルミット多項式とする.

$$\int\cdots\int\varphi_1(t_1)\cdots\varphi_1(t_{p_1})\,\varphi_2(t_{p_1+1})\cdots\varphi_2(t_{p_1+p_2})\quad\varphi_n(t_{p_1+\cdots+p_n})\,dB(t_1\omega)$$
$$\cdots dB(t_{p_1+\cdots+p_n},\omega)=\prod_{\nu=1}^{n}\frac{H_{p_\nu}\left(\frac{1}{\sqrt2}\int\varphi_\nu(t)\,dB(t,\omega)\right)}{\sqrt2^{\,p_\nu}}$$

<u>證 明</u>

1. $\Phi\in L_2(R^p)$ $\ \Psi\in L_2(R')$ に対し, $\Phi\overset{\times}{\scriptstyle(k)}\Psi$ を

$$(\Phi\overset{\times}{\scriptstyle(k)}\Psi)(t_1\cdots t_{k-1},\ t_{k+1}\cdots t_p)=\int\Phi(t_1\cdots t_p)\Psi(t_k)\,dt_k \qquad (2\cdot 20)$$

とおくとき $\Phi\overset{\times}{\scriptstyle(k)}\Psi\in L_2(R^{p-1})$ 　先ず

$$I_{p+1}(\Phi\cdot\Psi)=I_p(\Phi)\,I_1(\Psi)-\sum_{k=1}^{p}I_{p-1}(\Phi\overset{\times}{\scriptstyle(k)}\Psi) \qquad (2\cdot 21)$$

を證明する.

Sem. on Probab.
Vol.10 1961年
P1-103

Φ ψ 共に *special elementary function* の時. $A \equiv \sup|\Phi|$ $= \sup|\psi|$, $S(\Phi)$[1]. $S(\psi)$ 共に $[-C, C]$ に含まれて居るとする。

$$\Phi(t_1, \dots, t_p) = \begin{cases} a_{i_1 \cdots i_p} & (t_1 \ \ t_p) \in I_{i_1} \times \ \ \times I_{i_p}. \quad i = \cdots N \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

$$\psi(t) = \begin{cases} b_i & t \in I_i \quad i = 1 \cdots N \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

と表わされて居るとする。このとき. 必要ならば細分する事により $|I_i| < \varepsilon$ $\{I_i\}$ は互に共通点のない $[-C, C]$ に含まれる集合としてよい.

special elementary function χ_ε を次の様に定義する.

$$\chi_\varepsilon(t_1, \dots, t_p, t) = \begin{cases} a_{i_1 \cdots i_p} b_i & (t_1, \dots, t_p, t) \in I_{i_1} \times \cdots \times I_{i_p} \times I_i \\ & i \neq i_1, \cdots i_p \qquad i = 1 \cdots N \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

この時. 定義より

$$I_p(\Phi)\, I_1(\psi) = \Big(\sum_{i_1 \cdots i_p} a_{i_1 \ \ i_p} \, \Delta B(I_{i_1}) \ \ \Delta B(I_{i_p}) \Big) \Big(\sum_i b_i \, \Delta B(I_i) \Big)$$

$$= \sum_{i \neq i_1 \cdots i_p} a_{i_1 \cdots i_p} b_i \, \Delta B(I_{i_1}) \cdots \Delta B(I_{i_p}) \, \Delta B(I_i)$$

$$+ \sum_{k=1}^{p} \sum_{i_1 \cdots i_p} a_{i_1 \cdots i_p} b_{i_k} \, \Delta B(I_{i_1}) \ \ \Delta B(I_k)^2 \cdots \Delta B(I_{i_p})$$

$$= I_{p+1}(\chi_\varepsilon) + \sum_{k=1}^{p} \sum_{i_1 \cdots i_p} a_{i_1 \cdots i_p} b_{i_k} \, \Delta B(I_{i_1}) \cdots \Delta B(I_{i_{k-1}}) |I_{i_k}| \Delta B(I_{i_{k+1}})$$

$$\cdots \Delta B(I_{i_p}) + \sum_{k=1}^{p} \sum_{i_1 \cdots i_p} a_{i_1 \cdots i_p} b_{i_k} \, \Delta B(I_{i_1}) \cdots \Delta B(I_{i_{k-1}}) \big((\Delta B(I_{i_k}))^2$$

$$- |I_{i_k}| \big) \Delta B(I_{i_{k+1}}) \cdots \Delta B(I_{i_p})$$

$$= I_{p+1}(\chi_\varepsilon) + \sum_{k=1}^{p} I_{p-1}(\Phi \underset{(k)}{\wedge} \psi) + \sum_{k=1}^{p} R_k \tag{2·22}$$

$$\| I_{p+1}(\chi_\varepsilon) - I_{p+1}(\Phi\psi) \|^2 = \Big\| \sum_{k=1}^{p} \sum_{i_1 \cdots i_p} a_{i_1 \ \ i_p} b_{i_k} \, \Delta B(I_{i_1}) \ \ \Delta B(I_{i_{k-1}}) \big(\Delta B(I_{i_k})^2$$

$$- |I_{i_k}| \big) \Delta B(I_{i_{k+1}}) \cdots \Delta B(I_{i_p}) \Big\|^2$$

$$= 2 \sum_{k=1}^{p} \sum_{i_1 \cdots i_p} a_{i_1 \cdots i_p}^2 \; b_{i_k}^2 \, |I_{i_1}| \cdots |I_{i_{k-1}}| \, |I_{i_k}|^2 \, |I_{i_{k+1}}| \cdots |I_{i_p}|$$

---

(1) $S(\Phi)$ は Φ の台

Sem. on Probab.
Vol.10 1961年
P1-103

$$\leqslant 2PA^2B^2\Big(\sum_{i=1}^{N}|I_i|\Big)^{p-1}\Big(\sum_{i=1}^{N}|I_i|^2\Big) \leqslant 2\varepsilon PA^2B^2(2C)^p \tag{2.23}$$

$\sum_{k=1}^{p} R_k$の定義より $\|\sum_{k=1}^{p} R_k\|^2$は(2.23)で与えられる．故に

$$\|\sum_{k=1}^{p} R_k\|^2 \leqslant 2\varepsilon PA^2B^2(2C)^p \tag{2.24}$$

(2.22), (2.23)及び(2.24)より $\varepsilon \to 0$として(2.21)を得る．

Φ, Ψが一般の場合には special elementary function Φ_n, Ψ_nでノルム近似する． $\|\Phi_n - \Phi\| \longrightarrow 0$, $\|\Psi_n - \Psi\| \longrightarrow 0$.

上に述べた事より Φ_n, Ψ_n に対して(2.21)は成立する．即ち

$$I_{p+1}(\Phi_n \Psi_n) = I_p(\Phi_n) I_1(\Psi_n) - \sum_{k=1}^{p} I_{p-1}(\Phi \underset{(k)}{\times} \Psi_n) \tag{2.25}$$

$$\|I_{p+1}(\Phi_n\Psi_n) - I_{p+1}(\Phi\Psi)\|_1 = \|I_{p+1}(\Phi_n\Psi_n - \Phi\Psi)\|_1^{(1)}$$

$$\leqslant \|I_{p+1}(\Phi_n\Psi_n - \Phi\Psi)\| \leqslant \sqrt{(P+1)!}\,\|\Phi_n\Psi_n - \Phi\Psi\|$$

$$\leqslant \sqrt{(P+1)!}\,\|\Phi_n(\Psi_n - \Psi)\| + \sqrt{(P+1)!}\,\|(\Phi_n - \Phi)\Psi\|$$

$$\leqslant \sqrt{(P+1)!}\,\|\Phi_n\|\,\|\Psi_n - \Psi\| + \sqrt{(P+1)!}\,\|\Phi_n - \Phi\|\,\|\Psi\| \tag{2.26}$$

$$\|I_p(\Phi_n) I_1(\Psi_n) - I_p(\Phi) I_1(\Psi)\|_1$$

$$\leqslant \|I_p(\Phi_n) I_1(\Psi_n - \Psi)\|_1 + \|I_p(\Phi_n - \Phi) I_1(\Psi)\|_1$$

$$\leqslant \|I_p(\Phi_n)\|\,\|I_1(\Psi_n - \Psi)\| + \|I_p(\Phi_n - \Phi)\|\,\|I_1(\Psi)\|$$

$$\leqslant \sqrt{P!}\,\|\Phi_n\|\,\|\Psi_n - \Psi\| + \sqrt{P!}\,\|\Phi_n - \Phi\|\,\|\Psi\| \tag{2.27}$$

$$\|I_{p-1}(\Phi_n \underset{(k)}{\times} \Psi_n) - I_{p-1}(\Phi \underset{(k)}{\times} \Psi)\|_1 \leqslant \|I_{p-1}(\Phi_n \underset{(k)}{\times} \Psi_n - \Phi \underset{(k)}{\times} \Psi)\|$$

$$\leqslant \sqrt{(P-1)!}\,\|\Phi_n \underset{(k)}{\times} \Psi_n - \Phi \underset{(k)}{\times} \Psi\|$$

$$\leqslant \sqrt{(P-1)!}\,\|(\Phi_n - \Phi) \underset{(k)}{\times} \Psi_n\| + \sqrt{(P-1)!}\,\|\Phi \underset{(k)}{\times} (\Psi_n - \Psi)\|$$

Schwarzの不等式より

$$\leqslant \sqrt{(P-1)!}\,\|\Phi_n - \Phi\|\,\|\Psi_n\| + \sqrt{(P-1)!}\,\|\Phi\|\,\|\Psi_n - \Psi\| \tag{2.28}$$

(2.26) (2.27) 及び (2.28) より一般の Φ, Ψに対しても(2.21)が成立する．

2. Lemma の證明は $q = \sum_{i=1}^{n} P_i$ に関する帰納法による．

---

(1) $\|\ \ \|_1$ は L_1-ノルム

Sem. on Probab.
Vol.10　1961年
P1-103

$g=0.\ 1$ の時は 明に成立する。

$g=p-2.\ p-1$ で成立すると仮定. この時 $p_1 \geq 1$ とする事は制限にはならない。

$$\Phi(t_1 \cdots t_{p-1}) = \varphi_1(t_1)\cdots\varphi(t_{p_1})\varphi_2(t_{p_1})\cdots\varphi_2(t_{p_1+p_2-1})\cdots\varphi_n(t_{p-1})$$

$$\psi(t) = \varphi_1(t)$$

とおいて (2.21) を用いると

$$\int\cdots\int \Phi(t_1 \cdots t_{p-1})\varphi_1(t)\,dB(t_1\omega)\cdots dB(t_{p-1}\omega)\,dB(t\cdot\omega)$$

$$= \int\cdots\int \Phi(t_1\cdots t_{p-1})\,dB(t_1\omega)\cdots dB(t_{p-1}\omega)\cdot\int\varphi_1(t)\,dB(t\cdot\omega)$$

$$- \sum_{k=1}^{p-1}\int\cdots\int(\Phi \underset{(k)}{\times} \varphi_1)\,dB(t_1\omega)\cdots dB(t_{k-1}\omega)\,dB(t_{k+1}\omega)\cdots dB(t_{p-1}\omega)$$

所が直交性により $k > p_1$ ならば $(\Phi \underset{(k)}{\times} \varphi_1)=0$ 故に仮定により

$$= \frac{H_{p_1-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\int\varphi_1(t)\,dB(t\cdot\omega)\right)}{\sqrt{2}^{\,p_1-1}}\prod_{\nu=2}^{n}\frac{H_{p_\nu}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\int\varphi_\nu(t)\,dB(t\,\omega)\right)}{\sqrt{2}^{\,p_\nu}}\cdot\int\varphi_1(t)\,dB(t\,\omega)$$

$$-(p_1-1)\frac{H_{p_1-2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\int\varphi_1(t)\,dB(t\,\omega)\right)}{\sqrt{2}^{\,p_1-2}}\prod_{\nu=2}^{n}\frac{H_{p_\nu}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\int\varphi_\nu(t)\,dB(t\cdot\omega)\right)}{\sqrt{2}^{\,p_\nu}}.$$

こゝでエルミット多項式の漸化式

$$H_{p+1}(x) - 2xH_p(x) + 2PH_{p-1}(x) = 0$$

により

$$= \prod_{\nu=1}^{n}\frac{H_{p_\nu}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\int\varphi_\nu(t)\,dB(t\,\omega)\right)}{\sqrt{2}^{\,p_\nu}} \qquad QED$$

__Lemma 3__

$$Y(\omega) = N(E_1\omega)N(E_2\omega)\cdots N(E_m\omega)\,\Delta B(I_1\omega)\cdots\Delta B(I_n\omega)$$

こゝで $\{E_i\}$ は互に排反する $\mathcal{B}^* \cap \mathcal{B}_2^*$ の集合 $\{I_i\}$ は互に排反する $\mathcal{B}^*$ の集合, の形で表わされる確率変数は $H(M)$ の中で fundamental set を作る。

__証明__

1. 二つの確率変数系 $\{X_1, X_2\cdots\}\{Y_1, Y_2\cdots\}$ が互に独立とする。X_n が X に, Y_n が Y にそれぞれ二次平均収束する時 $\{X.\ X_1.\ X_2\cdots\}$ と $\{Y.\ Y_1.\ Y_2\cdots\}$ は独立となる。更に X_nY_n は XY に二次平均収束する。何故ならば

$$E|X_nY_n - XY|^2 = E|(X_n - X)Y_n + X(Y_n - Y)|^2$$

Sem. on Probab.
Vol.10 1961年
P1-103

$$\leqslant E|X_n - X|^2 E|Y_n|^2 + E|X|^2 E|Y_n - Y|^2 + 2\{E|X|^2 E|X_n - X|^2 E|Y_n|^2 E|Y_n - Y|^2\}^{\frac{1}{2}}$$

故に十分大きなnに対し

$$E|X_n Y_n - XY|^2 < \varepsilon.$$

2. $\mathfrak{M}$ を$\{N(E_1)\cdots\cdots N(E_m),\ m=0,1,2\cdots\cdots E_i$ は互に排反する$\mathcal{B}^*\cap\mathcal{B}_2^*$の集合$\}$より作られる閉線型空間，$\mathcal{B}$を$\{\Delta B(I_1)\cdots\cdots\Delta B(I_n),\ n=0,2,1\cdots$ I_i は互に排反する有界ボレル集合$\}$より作られる閉線型空間とする。1の結果及び *Lemma* 1より

$$N(E_1)^{p_1}\cdots\cdots N(E_m)^{p_m}\in\mathfrak{M} \qquad (2\cdot29)$$

$$\Delta B(I_1)^{g_1}\cdots\cdots\Delta B(I_n)^{g_n}\in\mathcal{B} \qquad (2\cdot30)$$

を云えば *Lemma* 3は成立する。

(2・29)を示す為に $E_1\cdots\cdots E_m$ を細分して，$\{F_1\cdots\cdots F_s\}$ が $\nu(F_i) < \min(\varepsilon/\sum_{i=1}^{m}\nu(E_i),\ 1)$ を満す様にする。

$$N(\omega)\equiv N(E_1\,\omega)^{p_1}\cdots\cdots N(E_m\,\omega)^{p_m}=\sum_{i_1<\cdots<i_\nu}N(F_{i_1}\,\omega)^{j_1}\cdots N(F_{i_\nu}\,\omega)^{j_\nu} \qquad (2\cdot31)$$

所が$N(F_i)$は$0,1,2\cdots\cdots$の値を取る確率変数のため

$$N(\omega)\geq\sum_{i_1<\cdots<i_r}N(F_{i_1}\,\omega)\cdots N(F_{i_r}\,\omega)\equiv N_\varepsilon(\omega) \qquad (2\cdot32)$$

又

$$P(N(\omega)\neq N_\varepsilon(\omega)) = P({}^{\exists}i;\ N(F_i\,\omega)\geq2)$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{s}P(N(F_i\,\omega)\geq2)\leqslant\sum_{i=1}^{s}\nu^2(F_i)\leqslant\sum_{i=1}^{s}\nu(F_i)<\varepsilon \qquad (2\cdot33)$$

故にN_εは$\varepsilon\to0$でNに確率収束する。従って適当な部分列ε_nに対し，N_{ε_n}はNに概収束する。更に

$$0\leqslant N_{\varepsilon_n}(\omega)\leqslant N(\omega),\quad N\in L_2(\Omega) \qquad (2\cdot34)$$

故に $\|N_{\varepsilon_n}-N\|\to0.$ 　即ち$N\in\mathfrak{N}.$

(2・30) に対しては，$\bigcup_{k=1}^{n}I_k\subset[a,b]$ とすれば $B(I_1)^{g_1}\cdots\Delta B(I_n)^{g_n}$ は$[a,b]$ 上の完全正規直交系$\{\varphi_i\}$により $\prod_{\nu=1}^{n}\dfrac{H_{p_\nu}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\int_a^b\varphi_i(s)\,dB(s)\right)}{\sqrt{2}^{\,p_\nu}}$

なる形の線型結合でL_2-近似出来る(S.P vol 8，第五章)　$\varphi_i(s)$を

Sem. on Probab.
Vol.10 1961年
P1-103

$(a,b)^c$ 上で0とする事によりR^1上の正規直交系となる. 考えている確率変数$\Delta B(I_1)^{g_1}\cdots\Delta B(I_n)^{g_n}$ の Fourier-Hermite 展開は Lemma 2 により

$$\int\cdots\int \varphi_1(t_1)\cdots\varphi_1(t_{p_1})\cdots\varphi_n(t_{p_1+p_2+\cdots+p_n})\,dB(t_1,\omega)\cdots dB(t_p,\omega)$$

なる形の一次結合で近似できる事を示すものに外ならない。故に$\varphi_1(t_1)\cdots\varphi_n(t_{p_1+\cdots+p_n})$ を special elementary function で近似すれば (2.30) は證明できる. QED.

定理の證明：定理の成立するMのL_2-汎函数の全体は定理2.2より閉線型空間を作る. 故に Lemma 3 より確率変数 $Y=N(E_1)\cdots\Delta B(I_n)$ が直交展開出来る事を示せばよい。
即ち

$$Y=I_0(f_0)+\cdots+I_{m+n}(f_{m+n}) \tag{2.35}$$

なる様に$f_0, f_1\cdots f_{m+n}$ を決定するわけであるが最高次は次の様になる.

$$f_{m+n}(\xi_1,\cdots\xi_m,\ \xi_{m+1}\cdots\xi_{m+n})$$
$$=\frac{1}{u_1\cdots u_m}\sigma^{-n}\chi_{E_1}(\xi_1)\cdots\chi_{E_m}(\xi_m)\chi_{I_1\times\{0\}}(\xi_{m+1})\cdots$$
$$\cdots\chi_{I_n\times\{0\}}(\xi_{m+n})$$

但. $\xi_i=(t_i\ u_i)$　σ : $M(E)=\sigma\Delta B(E(0))+\lim\iint_{E(n)}u\,dN(t,u)-u\,d\nu(t\ u)$.
何故ならば

$$I_{m+n}(f_{m+n})=(N(E_1)-\nu(E_1))\quad(N(E_m)-\nu(E_m))\Delta B(I_1)\cdots\Delta B(I_n)$$
$$=N(E_1)\cdots N(E_m)\Delta B(I_1)\cdots\Delta B(I_n)+R \tag{2.36}$$

こゝでRは$N(E_{i_1})\cdots N(E_{i_p})\Delta B(I_1)\cdots\Delta B(I_n)$　$P<m$. の一次結合となる。 $m=0$の時 $R=0$, mについての帰納法で(2.35) を示す事が出来る. 即ち. $m=P-1$ の時. (2.35)が成立しているとすれば (2.36)に於るRは(2.35) の様な展開ができる. 故に (2.36) により $m=p$ の時も (2.35) の展開が出来る. QED

定理 2.4 (一意性)

$\sum_p I_p(f_p)=\sum_p I_p(g_p)$ (a.e) ならば $\hat{f}_p=\hat{g}_p$ (a.e)

證明

Sem. on Probab.
Vol.10 1961年
P1-103

L_2^p の中で対称函数の全体は閉線型部分空間となる。これを $\widehat{L_2^p}$ とする。

$$\xi=\sum I_p(f_p),\quad F(\widehat{h_p})=\frac{1}{p!}(\xi,\ I_p(\widehat{h_p}))\quad h_p\in\widehat{L_2^p}$$

とおけば

$$F_p(a\widehat{h_p}+b\widehat{g_p})=aF_p(\widehat{h_p})+bF_p(\widehat{g_p})$$

$$|F_p(\widehat{h_p})|\leqslant\frac{1}{p!}\|\xi\|\,\|I_p(\widehat{h_p})\|\leqslant\|\xi\|\,\|\widehat{h_p}\|$$

故に F_p は $\widehat{L_2^p}$ 上の有界線型汎函数となる。故に Riesz - Fisher の定理により

$$F_p(\widehat{h_p})=(\widehat{S_p},\ \widehat{h_p})\qquad \widehat{h_p}\in\widehat{L_2^p}\tag{2.37}$$

となる $\widehat{S_p}$ が $\widehat{L_2^p}$ の中に存在する。

一方定理 2.2 (B). (C)・(D) より

$$F_p(\widehat{h_p})=\frac{1}{p!}(I_p(\widehat{f_p}),\ I_p(\widehat{h_p}))=(\widehat{f_p},\ \widehat{h_p})\tag{2.38}$$

(2.37). (2.38) により、すべての $\widehat{h_p}\in\widehat{L_2^p}$ に対し

$$(\widehat{S_p},\ \widehat{h_p})=(\widehat{f_p},\ \widehat{h_p})$$

故に $\widehat{S_p}=\widehat{f_p}$ (a.e) 即ち被積分函数は対称化すれば一意に定まる。

特に Lemma 2 より $M=dB$ (即ち $v(E)=0$) なる場合の L_2-汎函数 ξ は次の形に展開せられる。

<u>定理 2.5</u> $\{\varphi_n,\ n=0,1,2\cdots\}$ をルベーグ測度に関する $L_2(R^1)$ の完全正規直交系とする。ξ は次の形に展開せられる。

$$\xi(\omega)=\sum_p\sum_n\sum_{p_1+\cdots+p_n=p}\sum_{\alpha_1\cdots\alpha_n}a_{p_1\cdots p_n}^{\alpha_1\cdots\alpha_n}\prod_{\nu=1}^{n}H_{p_\nu}\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\int\varphi_{\alpha_\nu}(t)dB(t,\omega)\Big)=\sum_p I_p(f_p)\tag{2.39}$$

こゝで

$$f_p(t_1\cdots t_p)=\sqrt{2}\sum_n\sum_{p_1+\cdots+p_n=p}\sum_{\alpha_1\cdots\alpha_n}a_{p_1\cdots p_n}^{\alpha_1\cdots\alpha_n}\varphi_{\alpha_1}(t_1)\cdots\varphi_{\alpha_1}(t_{p_1})\cdots\varphi_{\alpha_n}(t_{p_1+\cdots+p_n})\tag{2.40}$$

更に、この係数は、次の方法でも求め得る。

$$f_p(t_1\cdots t_p)=\frac{1}{p!}\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\Big(\frac{1}{2\varepsilon}\Big)^p E\int_{t_p-\varepsilon}^{t_p+\varepsilon}\cdots\int_{t_1-\varepsilon}^{t_1+\varepsilon}\xi(\omega)dB(s_1,\omega)\cdots dB(s_p,\omega)\quad(a.e)\tag{2.41}$$

∵ $(t_1-\varepsilon,\ t_1+\varepsilon]\times\cdots\times(t_p-\varepsilon,\ t_p+\varepsilon]$ の定義函数を $\chi(\cdot)$ とすれば、定理 2.2 (C)(C) より

Sem. on Probab.
Vol.10 1961年
P1-103

$$E\int_{t_p-\varepsilon}^{t_p+\varepsilon}\cdots\cdots\int_{t_1-\varepsilon}^{t_1+\varepsilon} \xi(\omega)\, dB(S_1\,\omega)\cdots dB(S_p\,\omega) = p!\,(f_p,\, \chi)$$

$$= p!\int_{t_p-\varepsilon}^{t_p+\varepsilon}\cdots\cdots\int_{t_1-\varepsilon}^{t_1+\varepsilon} f_p\,(S_1 \cdots S_p)\, dS_1 \cdots dS_p \qquad (2.24)$$

故に(2・41)は成立する。

$\{\varphi_\nu\}$ の直交性より(2・40)を用いると、次の系を得る。

系 $f_p = 0$ ならば $P_1 + \cdots + P_n = P$ なる $(P_1 \cdots P_n)$ に対し $a^{\alpha_1 \cdots \alpha_n}_{P_1 \cdots P_n} = 0$

§3. 確率積分

$\Omega(\mathcal{B}.P)$ 上の複素数値可分確率過程 $\mathfrak{X} = \{X(t.\omega),\ -\infty < t < \infty\}$ と $\mathcal{B}$ の部分ボレル集合体の系 $\{\mathcal{F}_t\,;\ -\infty < t < \infty\}$ が次の条件を満すとする。

(F 1) $s < t$ ならば $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$

(X 1) 殆んどすべての path は t の連続函数

(X 2) $X(t)$ は $\mathcal{F}_t$ − 可測

(X 3) $E(X(t) - X(s)/\mathcal{F}_s) = 0$

(X 4) 次に述べる(Φ1)(Φ2)の条件を満す非負な函数 f が存在して、任意の $t > s$ に対し

$$E(\,|X(t) - X(s)|^2/\mathcal{F}_s) = E(\int_s^t f(u.\omega)\, du/\mathcal{F}_s) \qquad (3.1)$$

且、 $$\int_s^t E(f(u.\omega))\, du < \infty \qquad (3.2)$$

$R^1 \times \Omega$ 上で定義された複素数値函数Φが次の条件を満すとする。

(Φ1) 各固定した t に対し、ω の函数として $\Phi(t.\cdot)$ は $\mathcal{F}_t$ − 可測

(Φ2) $(t.\omega)$ = 変数の函数として $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}$ − 可測

(Φ3) (X4)で存在した函数 f に対し

$$\int_{-\infty}^{\infty} E\{\,|\Phi(t.\omega)|^2 f(t.\omega)\}\, dt < \infty \qquad (3.3)$$

(Φ1)〜(Φ3)を満すΦの全体は(3-3)でノルムを定義する事によりヒルベルト空間を作る。ノルムに函数 f を特に明示したい時は $\|\ \ \|_f$ と書く。

定義 3.1 Φと$\mathfrak{X}$に対し確立積分(*stochastic integral*)

$$I(\Phi.\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t.\omega)\, dX(t.\omega)$$

Sem. on Probab.
Vol.10 1961年
P1-103

は次の様に定義される。

1. $\Phi(t.\omega)$ が $(t.\omega)$ - 階段函数で次の様に表わされて居る時

$$\Phi(t.\omega)=\begin{cases} a_i(\omega) & \tau_i \leqq t < \tau_{i+1}, \quad i=1\cdots\cdots n \\ 0 & \text{その他} \end{cases} \tag{3.4}$$

こゝで $\tau_1\ \tau_2\cdots\cdots\tau_{n+1}$ は ω に無関係

$$I(\Phi.\omega)=\sum_{i=1}^{n} a_i(\omega)\left(X(\tau_{i+1}.\omega)-X(\tau_i.\omega)\right) \tag{3.5}$$

明な事であるが、$I(\Phi.\omega)$ の値は Φ の表わし方 (3.4) にはよらない。(即ち確率1で等しい確率変数となる)

2. 一般の Φ に対し、$(t.\omega)$-階段函数 Φ_n によるノルム近似が出来る。

即ち

$$\|\Phi-\Phi_n\|^2=\int_{-\infty}^{\infty}E\left|\Phi(t\,\omega)-\Phi_n(t\,\omega)\right|^2 f(t\,\omega)\,dt \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{3.6}$$

近似列 Φ_n は具体的には次の様に取り得る。適当な S_0 に対し

$$\Phi_n(t.\omega)=\Phi(\alpha_n(t-S_0)+S_0,\ \omega) \tag{3.7}$$

こゝで α_n は $t\in(\frac{j}{2^n},\ \frac{j+1}{2^n})$ に対し $\alpha_n(t)=\frac{j}{2^n}$ $\quad j=0,\ \pm1\cdots$

このとき

$$I(\Phi,\omega)=\text{l.i.m}\ I(\Phi_n.\omega) \tag{3.8}$$

$I(\Phi.\omega)$ が定義可能な事即ち、近似例 Φ_n の取り方によらない事は、次の (A) (C) より明である。

$(t.\omega)$ - 階段函数 Φ に対し、確率積分 $I(\Phi.\omega)$ は次の性質を持つ。

(A) $I(a\Phi_1+b\Phi_2\,\omega)=aI(\Phi_1\omega)+bI(\Phi_2.\omega)$ $\quad$ (a.e)

(B) $E(I(\Phi.\omega))=0$

(C) $\left(I(\Phi_1\omega),\ I(\Phi_2\omega)\right)=(\Phi_1,\ \Phi_2)$ [1]

$\quad \|I(\Phi,\omega)\|=\|\Phi\|_f$

証明

(A) は定義より明

(B) $E(I(\Phi.\omega))=\sum_{i=1}^{n}E\left(a_i(\omega)\left(X(\tau_{i+1}\omega)-X(\tau_i\,\omega)\right)\right)$

(X3) により

---

(1) 左辺は $L_2(\Omega)$ の内積、右辺は (3.3) による内積。

Sem. on Probab.
Vol.10 1961年
P1-103

$$= \sum E\left(a_i(\omega) E\left(X(\tau_{i+1}) - X(\tau_i)/\mathcal{F}_{\tau_i}\right)\right) = 0$$

(C). Φ_1, Φ_2 を共通の分点 $\tau_1 \cdots\cdots \tau_{n+1}$ により次の様に表わす.

$$\Phi_1(t.\omega) = \begin{cases} a_i(\omega) & \tau_i \leq t < \tau_{i+1} \quad i = 1.2 \cdots\cdots n \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

$$\Phi_2(t.\omega) = \begin{cases} b_i(\omega) & \tau_i \leq t < \tau_{i+1} \quad i = 1.2 \cdots n \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

$i < j$ に対し

$$E\left[a_i(\omega)\overline{b_j}(\omega)\left(X(\tau_{i+1}) - X(\tau_i)\right)\overline{\left(X(\tau_{j+1}) - X(\tau_j)\right)}\right]$$

$$= E\left[a_i(\omega)\overline{b_j}(\omega)\left(X(\tau_{i+1}) - X(\tau_i)\right)E\left(X(\tau_{j+1}) - X(\tau_i)/\mathcal{F}_{\tau_j}\right)\right] = 0$$

$$E\left[a_j(\omega)\overline{b_i}(\omega)\left|X(\tau_{i+1}) - X(\tau_i)\right|^2\right] \tag{3.9}$$

$$= E\left(a_i(\omega)\overline{b_i}(\omega)\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f(u\,\omega)\,du\right) \tag{3.10}$$

故に (3.9) (3.10) より

$$\left(I(\Phi_1.\omega).\ I(\Phi_2\,\omega)\right) = \sum_{i=1}^{n} E\left(a_i(\omega)\overline{b_i}(\omega)\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f(u\,\omega)\,du\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} E\left(\Phi_1(t\,\omega)\,\overline{\Phi_2}(t.\omega)f(t\,\omega)\right)dt = (\Phi_1.\ \Phi_2) \tag{3.11}$$

QED.

一般の Φ を $(t.\omega)$ - 階段函数で近似する事により次の定理が証明できる.

<u>定理 3. 1</u>　(Φ1) ～ (Φ3) を満す Φ に対し

(A) $I(a\Phi_1 + b\Phi_2.\ \omega) = aI(\Phi_1\omega) + bI(\Phi_2\omega)$　(a.e)

(B) $E(I(\Phi,\omega)) = 0$

(C) $(I(\Phi_1\,\omega).\ I(\Phi_2.\ \omega)) = (\Phi_1\ \Phi_2)$

(C') $\|I(\Phi\,\omega)\| = \|\Phi\|_f$

Φ が (Φ1) ～ (Φ3) を満す時, 固定した t に対し $\chi_{(-\infty.t)}\Phi$ も亦 (Φ1) ～ (Φ3) を満す.　$I(\chi_{(-\infty.t)}\Phi,\ \omega)$ を $I(\Phi.\ t.\omega)$ 又は $\int_{-\infty}^{t}\Phi(u\,\omega)\,dX(u\,\omega)$ とおく. 同様に $I(\chi_{(s.t)}\Phi.\omega)$ を $\int_s^t \Phi(u\,\omega)\,dX(u\,\omega)$ とも書く. (C')より $\{I(\Phi.\ t.\ \omega).\ -\infty < t < \infty\}$ は二次平均連続な確率過程となる. しかも (X2) 及び (Φ1) より, $I(\Phi.\ t\,\omega)$ は ω の函数として $\mathcal{F}_t$- 可測となる.

Sem. on Probab.
Vol.10 1961年
P1-103

定理 3・2

(i) $E\left((I(\Phi, t\cdot\omega)-I(\Phi.s.\omega)/\mathcal{F}_s\right)=0$

(ii) $E\left(|I(\Phi, t.\omega)-I(\Phi.s.\omega)|^2/\mathcal{F}_s\right)=\int_s^t E\left(|\Phi(u\,\omega)|^2 f(u\,\omega)/\mathcal{F}_s\right)du$

証 明

(i) Φが$(t\ \omega)$- 階段函数の時は明. 一般のΦに対しては$(t\omega)$- 階段函数Φ_nで近似すれば

$$E\left|E\left(I(\Phi, t.\omega)-I(\Phi.s.\omega)/\mathcal{F}_s\right)\right|^2$$

$$=E\left|E\left(I(\Phi.t.\omega)-I(\Phi.s\,\omega)-I(\Phi_n\,t.\omega)+I(\Phi_n.s.\omega)/\mathcal{F}_s\right)\right|^2$$
$$\leqq E\left\{E\left(|I(\Phi.t.\omega)-I(\Phi.s.\omega)-I(\Phi_n\,t.\omega)+I(\Phi_n\,s\,\omega)|^2/\mathcal{F}_s\right)\right|$$
$$=E\left|I(\Phi.t.\omega)-I(\Phi.s.\omega)-I(\Phi_n\ t\ \omega)+I(\Phi_n\ s.\omega)\right|^2$$
$$=\int_s^t E\left(|\Phi(u.\omega)-\Phi_n(u.\omega)|^2 f(u.\omega)\right)du \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad (3.12)$$

故に $E\left(I(\Phi.\ t.\ \omega)-I(\Phi.s.\omega)/\mathcal{F}_s\right)=0$

(ii) Φが$(t\,\omega)$-階段函数の時は(3.4)の様な表現を用いて直接計算が出来る. 一般のΦに対し$(t\omega)$- 階段函数Φ_nで近似すれば

$$E\left|E\left(|I(\Phi.t\ \omega)-I(\Phi.S.\omega)|^2-|(\Phi_n t.\omega)-I(\Phi_n\,s\,\omega)|^2/\mathcal{F}_s\right)\right|$$

$$\leqq E\left[E\left(\left||I(\Phi.t\,\omega)-I(\Phi.S.\omega)|^2-|I(\Phi_n.t.\omega)-I(\Phi.S.\omega|^2\right|/\mathcal{F}_s\right)\right]$$

$$=E\left||I(\Phi.t.\omega)-I(\Phi.S.\omega|^2-|I(\Phi_n\,t.\ \omega)-I(\Phi_n.s.\omega|^2\right|$$

十分大きなNに対し

$$\leqq\ 2\left[\int_s^t E|\Phi(u.\omega)|^2 f(u.\omega)du\right]^2\left[\int_s^t E|\Phi(u\,\epsilon)-\Phi_n(u\,\omega)|^2 f(u\,\omega)\,du\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$+\ \varepsilon^{\omega}$$

故に

$$E\left(|I(\Phi.t.\omega)-I(\Phi.S.\omega)|^2/\mathcal{F}_s\right)=(L_1(\Omega))\lim E\left(|I|\Phi_n.t.\omega.\right)$$
$$-I(\Phi_n\,s.\omega)|^2/\mathcal{F}_s)$$
$$=(L_1(\Omega))\lim\int_S^t E\left(|\Phi_n(u\,\omega)|^2 f(u\,\omega)/\mathcal{F}_s\right)du$$
$$=\int_s^t E\left(|\Phi(u\ \omega)|^2 f(u\,\omega)/\mathcal{F}_s\right)du$$

定理 3.2(i)は確率過程$\{I(\Phi.\ t.\ \omega),\ -\infty<t<\infty\}$がマルチンゲールである

ω: $\left||X|^2-|Y|^2\right|\leq|(|X|+|Y|)(|X|-|Y|)|\leqq(|X|+|Y|)(|X-Y|)$

Sem. on Probab.
Vol.10 1961年
P1-103

事を意味する．この確率過程は平均連続性より，可分変形を取る事が出来るが，この時，次の定理が成立する．

定理 3.3. 確率過程 $\{I(\Phi, t, \omega),\ -\infty < t < \infty\}$ の可分変形は殆んどすべての見本過程は t の連続函数となる．

証明

Φ が (t, ω)－階段函数の時は $\mathfrak{X}$ の連続性 $(\mathfrak{X}1)$ より明．

一般の Φ に対し證明する為，次の事に注意しておく．

1. "Φ が $(t\ \omega)$－階段函数の時，$c > 0$ に対し

$$c^2 P\{\sup_{a \leqslant t \leqslant b} |I(\Phi, t, \omega)| > c\} \leqslant \|\Phi\|^2 \qquad (3.13)$$

(3.13) の證明の為には Kolmogorov 不等式の拡張を用いる．[2] 即ち

"$Y_1, \ldots, Y_n$ が次の条件を満す複素数値確率変数とする．

(i) $E|Y_i|^2 = \sigma_i^2 < \infty$

(ii) $E(Y_j / Y_1, \ldots, Y_{j-1}) = 0 \qquad j > 1$

この時 $c > 0$ に対し

$$c^2 P\{\max_{k=1\cdots n} |\sum_{j=1}^{k} Y_j| \geq c\} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 \qquad (3.14)$$

Φ が (3.4) の様に表わされているとして $a = \tau_1$，$b = \tau_{n+1}$ とおく．$a = t_0 \leqslant t_1 \leqslant \quad \leqslant t_k = b$ を $\{\tau_i\}$ を含む任意の分点系とする時 $I(\Phi, t, \omega)$ の連続性により

$$c^2 P\{\max_{\ell=1\cdots k} |I(\Phi, t_\ell\ \omega)| \geq c\} \leqslant \|\Phi\|^2 \qquad (3.15)$$

を示せば (3.13) は成立する．

$$Y_j(\omega) = I(\Phi, t_j, \omega) - I(\Phi, t_{j-1}, \omega), \quad j = 1, 2, \ldots, k.$$

とおく時 $Y_1, \ldots, Y_k$ は定理 3.2 より条件 (i). (ii) を満す．故に (3.14) より (3.15) を得る．

2. 一般の Φ に対し，近似列（$(t\ \omega)$－階段函数）Φ_n をとれば，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，(3.13) より

$$P\{\sup_{t \in R^1} |I(\Phi_n\ t\ \omega) - I(\Phi_m, t, \omega)| > \varepsilon\} \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2} \|\Phi_n - \Phi_m\|^2 \quad (3.16)$$

---

(1) (1) chap III Th 2,1

Sem. on Probab.
Vol.10 1961年
P1-103

故に適当な部分列 $\{\Phi_{p(n)}\}$ に対し，$I(\Phi_{p(n)}, t, \omega)$ は殆んどすべての ω に対し，t に関して一様に収束する．その極限を $I^*(\Phi, t, \omega)$ とすれば これは確率 1 で t の連続函数で，しかも

$$P(I(\Phi, t, \omega) = I^*(\Phi, t, \omega)) = 1 \qquad (3.17)$$

即ち $I(\Phi, t, \omega)$ の可分変形は t の連続函数となる． Q.E.D.

以後 $I(\Phi, t, \omega)$ と書いた時は一々断らなくても可分変形をとったものとする．定理 3.2 及び 3.3 より，確率過程 $\{I(\Phi, t, \omega), -\infty < t < \infty\}$ は亦 (X1)～(X4) を満す．而もこの場合 (X4) の f としては $|\Phi(u, \omega)|^2 f(u, \omega)$ となる．故にこの確率過程による確率積分が考えられる．

定理 3.4 Ψ を (Φ.1)～(Φ3) を満す函数とする（但しノルムは $\| \; \|_{|\Phi|^2 f}$）

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi(t, \omega)\, dI(\Phi, t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(t, \omega)\, \Phi(t, \omega)\, dX(t, \omega) \qquad (3.18)$$

証明

1. Ψ が (3.4) の様に表わされる (t, ω)-階段函数の時

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= \sum_i a_i(\omega) \left(I(\Phi, \tau_{i+1}, \omega) - I(\Phi, \tau_i, \omega) \right) \\
&= \sum_i a_i(\omega) \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \Phi(u, \omega)\, dX(u, \omega) = \sum_i \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} a_i(\omega) \Phi(u, \omega)\, dX(u, \omega) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(u, \omega)\, \Phi(u, \omega)\, dX(u, \omega)
\end{aligned}$$

2. 一般の Ψ に対し (t, ω)-階段函数 Ψ_n でノルム ($\| \; \|_{|\Phi|^2 f}$) 近似すれば，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi(t, \omega)\, dI(\Phi, t, \omega) = \mathrm{l.i.m} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_n(t, \omega)\, dI(\Phi, t, \omega) \qquad (3.19)$$

一方

$$\begin{aligned}
\|\Psi - \Psi_n\|_{|\Phi|^2 f}^2 &= \int E|\Psi(u, \omega) - \Psi_n(u, \omega)|^2 |\Phi(u, \omega)|^2 f(u, \omega)\, du \\
&= \int E|\Psi(u, \omega)\Phi(u, \omega) - \Psi_n(u, \omega)\Phi(u, \omega)|^2 f(u, \omega)\, du \\
&= \|\Psi\Phi - \Psi_n \Phi\|_f \qquad (3.20)
\end{aligned}$$

故に

$$\int \Psi(u, \omega)\Phi(u, \omega)\, dX(u, \omega) = \mathrm{l.i.m} \int \Psi_n(u, \omega)\Phi(u, \omega)\, dX(u, \omega) \qquad (3.21)$$

Sem. on Probab.
Vol.10 1961年
P1-103

(3.19), (3.21) より定理は一般の Ψ に対しても成立する。　QED

系.　殆んどすべての $(t\ \omega)$ に対し、$\Phi(t\ \omega)$ が 0 でないならば

$$X(t\ \omega)-X(s\ \omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\chi_{(s,t)}(u)\ \frac{dI(\Phi,u\ \omega)}{\Phi(u\ \omega)}$$

$$=\int_{s}^{t}\frac{dI(\Phi,u\ \omega)}{\Phi(u\ \omega)} \qquad (3.22)$$

証　明

$\Psi(u\ \omega)=\chi_{(s,t)}(u)/\Phi(u\ \omega)$ とおけば Ψ は $\| \quad \|_{|\Phi|^2 f}$ ノルムに関して (Ψ1)～(Ψ3) を満す。故に定理3.4より

$$\int_{-\infty}^{\infty}\chi_{(s,t)}(u)\ \frac{dI(\Phi,u\ \omega)}{\Phi(u\ \omega)}=\int_{-\infty}^{\infty}\chi_{(s,t)}(u)dX(u,\omega)=X(t)-X(s) \qquad \text{QED}$$

蛇足であるが、この系は $X(t\ \omega)$ は $(X(s,\omega),\ I(\Phi\ E,\omega),\ E\subset(s,t],\ \Phi(u,\omega),\ u\leq t)$ の可測函数となる事を示して居る。この事より $\mathcal{F}_s=\mathcal{B}s(\mathfrak{X})$ の時 $X(t\ \omega)$ が $(X(u\ \omega),\ u\leq s,\ I(\Phi,E\ \omega),\ E\subset(s,t])$ の可測函数となるかどうかはわからない。この問題は二章 §1. 问1(a). (特に定理1・2) と関係がある。

定常過程の表現に利用する上で特に重要なのは

$$f(t,\omega)=1 \quad 即ち \quad E\left(|X(t,\omega)-X(s,\omega)|^2/\mathcal{F}_s\right)=t-s \qquad (3\cdot 23)$$

の場合である。この時

定理3・5　(X1)～(X4) 及び (2・23) を満す実数値確率過程 $\mathfrak{X}$ はブラウン運動となる。しかもその場合 $X(t)-X(s)$ は $\mathcal{F}_s$ と独立である。

証　明

前半は[1]. Chap 7. Th 11.9.

後半；

$$\xi(\omega)=\prod_{i=1}^{n}\left(X(t_i\ \omega)-X(s_i\ \omega)\right) \qquad s\leq s_1<t_1\leq s_2<t_2\cdots\cdots<t_n \quad (3.24)$$

とおけば

$$E(\xi(\omega)/\mathcal{F}_s)=E\left(E(\xi(\omega)/\mathcal{F}_{s_n})/\mathcal{F}_s\right)$$

$$=E\left(\prod_{i=1}^{n-1}(X(t_i\ \omega)-X(s_i\ \omega).\ E(X(t_n)-X(s_n)/\mathcal{F}_{s_n})/\mathcal{F}_s\right)=0 \qquad (3.25)$$

Sem. on Probab.
Vol.10 1961年
P1-103

故に(3.24)の形の確率変数の複素係数一次結合 $\eta(\omega)$ に対しても

$$E(\eta(\omega)/\mathfrak{F}_s)=0$$

所がこの様な確率変数は展開定理により稠密のため，増分 $X(t)-X(s)$ は $\mathfrak{F}_s$ と独立である。

系．殆んどすべての $(t\omega)$ 上で $|\Phi(t,\omega)|^2 f(t,\omega)$ が 0 でないならば

$$Y(t,\omega)=\int^t \Phi(u\,\omega)\,dX(u\,\omega)$$

と表わされる可分確率過程 Y は dB による確率積分で次の様に表わされる。

$$Y(t,\omega)=\int^t \Phi(u\,\omega)\sqrt{f(u\,\omega)}\;dB(u,\omega) \qquad (3.26)$$

且つ

$$B(t,\omega)-B(S,\omega)=\int_S^t \frac{dY(u,\omega)}{\Phi(u\,\omega)\sqrt{f(u\,\omega)}} \qquad (3.27)$$

dB による P 次重複ウィナー積分は確率積分の重複としても表わされる事を最後に注意しておく。

<u>定理 3.6</u>　$f\in \hat{L}_2^p$ に対し

$$I_p(f)=\int\cdots\int f(t_1,\cdots t_p)\,dB(t_1,\omega)\cdots\cdots dB(t_p,\omega)$$

$$=P!\int dB(t_p,\omega)\Big[\int^{t_p} dB(t_{p-1},\omega)\int^{t_{p-1}} dB(t_{p-2},\omega)\cdots\Big[\int^{t_2} f(t_1,\dots t_p)\,dB(t_1\,\omega)\Big]\cdots\Big] \qquad (3.28)$$

<u>證　明</u>　ウィナー術復測度の場合は L_2^p のノルムは P 次元ルベーグ測度による普通の L_2 ノルムになる為，$I=I_1\times\cdots\times I_p$．$I_i=(a_i\ b_i)$ なる形の集合の定義函数 $\chi_I(t_1,\cdots t_p)$ の複素係数一次結合で表わされる special elementary function が稠密になる。

1．$a_1<b_1<a_2<b_2\cdots\cdots<a_p<b_p$ に対し，$f(t,\cdots t_p)=\sum_{i_1\cdots i_p}\chi_{I_{i_1}\times\cdots\times I_{i_p}}(t_1\cdots t_p)$ の場合 $I_p(f)=\sum_{i_1\cdots i_p} B(I_{i_1}\,\omega)\cdots B(I_{i_p}\,\omega)=P!\,B(I_1,\omega)\cdots\cdot B(I_p\,\omega)$ (3.29)

右辺 $=P!\int dB(t_p,\omega)\Big[\int^{t_p} dB(t_{p-1},\omega)\cdots\Big[\int^{t_2}\chi_{I_1}(t_1)\cdots\chi_{I_p}(t_p)\,dB(t_1\omega)\Big]\cdots\Big]$

$$=P!\int dB(t_p\,\omega)\Big[\int^{t_p}\cdots\int^{t_3}\chi_{I_2}(t_2)\cdots\chi_{I_p}(t_p)\big(B(t_2\wedge b_1,\omega)-B(a,\omega)\big)dB(t_2\omega)\Big]\cdots\Big]$$

Sem. on Probab.
Vol.10 1961年
P1-103

$$= p!\int dB(t_p\omega)\Big[\int^{t_p}\cdots\int^{t_4}\big(B(t_3\wedge b_2,\omega)-B(t_2\,\omega)\big)\big(B(b_1\omega)$$

$$-B(a,\omega)\big)\,dB(t_3,\omega)\Big]\cdots\Big]$$

これをくり返すと

$$= p!\,\big(B(b_p,\omega)-B(a_p,\omega)\big)-\big(B(b,\omega)-B(a_1,\omega)\big) \qquad (3.30)$$

故に (3.28) は成立する.

f につき (3.28) の両辺は線型の為. $\widehat{L_2^p}$ の稠密性より (3.28) は成立する.

2. $\widehat{L_2^p}$ の f に対し, 右辺のノルムを計算すれば

$$(p!)^2\int E\Big|\int^{t_p} dB(t_{p-1},\omega)\Big[\int^{t_{p-1}}\cdots\int^{t_2} f(t_1,\cdots t_p)\,dB(t_1,\omega)\Big]\cdots\Big]\Big|^2 dt_n$$

$$=(p!)^2\int dt_p\int dt_{p-1}\, E\Big|\int^{t_{p-1}} dB(t_{p-2}\,\omega)\Big[\int^{t_{p-2}}\cdots\int^{t_2}\chi_{(-\infty,t_p)}(t_{p-1})f(t_1,\ldots t_p)\,dB(t,\omega)\Big]\cdots\Big]^2$$

$$=(p!)^2\int dt_p\int dt_{p-1}\cdots\int dt_1\,\chi_{(-\infty\,t_p)}(t_{p-1})\chi_{(-\infty,\,t_{p-1})}(t_{p-2})\cdots$$

$$\cdots\chi_{(-\infty\,t_2)}(t_1)f(t_1,\ldots t_p)$$

$$=(p!)^2\int dt_p\int^{t_p} dt_{p-1}\cdots\int^{t_2} dt_1\big|f(t_1,\ldots t_p)\big|^2 = p!\,\|f\|^2 \qquad (3.31)$$

$\|I_p(f)\|^2 = p!\,\|f\|^2$; と (3.31) により両辺とも $f_n\to f\,(L_2^p)$ ならば 2次平均収束する. 故に任意の $f\,(\in\widehat{L_2^p})$ に対し (3.28) は成立する.

(QED)

§4. 推移変換

§1. 例3で用いた確率過程 X の増分 ΔX を可測とする最小のボレル集合体 (*difference field*) を $\mathcal{B}(dX)$ とする. 即ち

$$\mathcal{B}(dX) = \mathcal{B}\,\{\Delta X(I<C,\ I\in\mathcal{B}_1^*,\ C\in R'\}$$

二次平均有限な $\overline{\mathcal{B}}(dX)$-可測確率変数全体の作るヒルベルト空間を $H(dX)$ とする時, $H(dX)$ 上に推移変換 (*shift operator*) が次の様に定義される. 先ず

$$T_t\,\Delta X(I,\omega) = \Delta X(I+t,\omega)^{(1)}$$

(1) $I+t = \{u\,;\ u-t\in I\}$

Sem. on Probab.
Vol.10 1961年
P1-103

有限個の$\Delta X(I)$に依存する確率変数$f(\Delta X(I_1,\omega),\ \Delta X(I_n,\omega))$ に対し

$$T_t f(\Delta X(I_1,\omega),\cdots\Delta X(I_n,\omega))=f(\Delta X(I_1+t,\omega),\ \Delta X(I_n+t,\omega)) \quad (4.1)$$

ΔXの定常性と独立性に注意すれば

$$\| T_t f(\Delta X(I_i),\ i=1\cdots n)\| = \| f(\Delta X(I_i),\ i=1\cdots n)\| \quad (4.2)$$

$H(dX)$ の中で有限個の$\Delta X(I)$の函数はノルムで稠密の為 (4.2)により(4.1)の定義は$H(dX)$ 上に拡張できる。

定義4・1　$\xi\in H(dX)$ 且 $\xi(\omega)=\mathrm{l.i.m}\, f_n(\Delta X(I_i^n,\omega),\ i=1\cdots p(n))$ なるとき

$$(T_t\xi)(\omega)=\mathrm{l.i.m}\, f_n(\Delta X(I_i^n+t,\omega),\ i=1,\ p(n))\cdots\cdots(4.3)$$

(4.2)により T_t は$H(dX)$ 上のユニタリー作用素となる。

例4の独立彷徨測度Mの各元$M(E)$は加法過程の分解を用いると$H(dX)$に属する為T_tを作用させ得る。

$$T_t M(E,\omega)=M(E+(t,0),\omega)^{(1)}$$

$$=\sigma\Delta B(E(\ )+t)+\lim_{n\to\infty}\iint_{E(n)+(t,0)} u\,dN(s,u,\omega)-u\,d\nu(s,u) \quad (4.4)$$

∵ Eが$\mathbb{B}_2^*\cap\mathbb{B}^*$に属する有界集合の時

$$T_t N(E,\omega)=T_t[(s,\ X(s,\omega)-X(s-0,\omega))\in E\ \text{なる}\ s\ \text{の個数}]$$

$$=[(s,\ X(s+t,\omega)-X(s+t-0,\omega))\in E\ \text{なる}\ s\ \text{の個数}]$$

$$=[(s,\ X(s,\omega)-X(s-0,\omega))\in E+(t,0)\ \text{なる}\ s\ \text{の個数}]$$

$$=N(E+(t,0),\omega) \quad (4.5)$$

こゝで $d\nu(s,u)=ds(1+u^2)dn(u)$. 及び$(E+(t,0))(n)=E(n)+(t,0)$ に注意すれば

$$T_t\Big(\lim_{n\to\infty}\iint_{E(n)} u\,dN(s,u,\omega)-u\,d\nu(s,u)\Big)$$

$$=\lim\iint_{E(n)+(t,0)} u\,dN(s,u,\omega)-u\,d\nu(s,u) \quad (4.6)$$

---

(1) $E+(t,0)=\{(s,u)\,;\,(s-t,u)\in E\}$

Sem. on Probab.
Vol.10 1961年
P1-103

$$T_t(\sigma\Delta B(E(0),\omega)) = T_t\left[\Delta X(E(0),\omega) - \lim_{n\to\infty}\iint_{E(n)} u\,dN(s.u,\omega) - u\,d\nu(s.u)\right]$$
$$= \Delta X(E(0)+t,\omega) - \lim_{n\to\infty}\iint_{E(n)+(t.0)} u\,dN(s.u\,\omega) - u\,d\nu(s.u)$$
$$= \sigma\Delta B(E(0)+t.\omega) \qquad (4.7)$$

(4.6). (4.7)より　$T_t M(E.\omega) = M(E+(t.0),\omega)$

$\xi\in H(M)$ に対し．$\{T_t\xi(\omega)\ -\infty<t<\infty\}$ は確率過程となる．そこで，この様にして得られる確率過程の性質が問題になるが（二章 §1 問3）．完全な特長附けは．未だ得られていない。

Lemma 1　$H_p(M)$ を P 次重複ウィナー積分全体の作るヒルベルト空間とする．対応 V_p．

$$V_p\ !\ \widehat{L_2^p}\ni f_p \longrightarrow \frac{I_p(f_p)}{\sqrt{P!}}\in H_p(M)$$

はノルムを変えない線型作用素であり．定理2.4により $\widehat{L_2^p}$ と $H_p(M)$ は．V_p により同型となる．S_t を V_p により引起される $\widehat{L_2^p}$ 上の推移変換とすれば　$f\in\widehat{L_2^p}$　に対し

$$(S_t f)(t_1.u_1,\cdots t_p.u_p) = f(t_1-t.\ u_1,\cdots t_p-t.\ u_p) \qquad (4.8)$$

証　明

$$V_p(S_t f) = T_t(V_p f)\quad より$$
$$I_p(S_t f) = T_t(I_p(f)) \qquad (4.9)$$

$f\in\widetilde{S_p}$ の時

$$T_t(I_p(f)) = T_t\left(\sum a_{i_1\cdots i_p} M(E_{i_1})\cdots M(E_{i_p})\right)$$
$$= \sum a_{i_1\cdots i_p} M(E_{i_1}+(t.0))\cdots M(E_{i_p}+(t.0))$$
$$= \int\cdots\int \sum a_{i_1\cdots i_p}\,\chi_{E_{i_1}+(t.0)}(t_1.u_1)\cdots\chi_{E_{i_p}+(t.0)}(t_p u_p)$$
$$\times\, dM(t_1 u_1)\cdots dM(t_p u_p)$$
$$= \int\cdots\int \sum a_{i_1\cdots i_p}\,\chi_{E_{i_p}}(t_1-t.\ u_1)\cdots\chi_{E_{i_p}}(t_p-t.\ u_p)\,dM(t_1 u_1)\cdots$$
$$\cdots dM(t_p.u_p)$$

Sem. on Probab.
Vol.10 1961年
P1-103

故に定理2.4の一意性より(4.8)は成立する.

(4.9)の両辺がfについて一次で且つ、両辺のノルムが$\sqrt{P!}\,\|f\|$になる事より、一般の$f\in\widetilde{L_2^p}$に対しても(4.8)は成立する. QED

<u>定理4.1</u> $\xi\in H(M)$に対し、確率過程$\xi=\{T_t\,\xi(\omega),\ -\infty<t<\infty\}$は、強混合[(1)]二次平均連続強定常過程である.

<u>証明</u>

強定常性; 集合$\{\omega;\ \xi(t_i,\omega)\in C_i,\ i=1\cdots n\}$(但 $\xi(t,\omega)=T_t\,\xi(\omega)$)の定義函数を$\chi$とすれば、$\chi\in H(M)$. T_tが$H(M)$上のユニタリー作用素である為、

$$P\{\xi(t_i)\in C_i\quad i=1\cdots n\}=\|\chi\|=\|T_t\,\chi\|$$
$$=P(\xi(t_i+t)\in C_i\quad i=1\cdots n)$$

連続性; 定常性より$t=0$に於る連続性を示せばよい. $\xi(\omega)$の展開を

$$\xi(\omega)=\sum_{p=0}^{\infty}I_p(f_p)\qquad f_p\in\widetilde{L_2^p}$$

とおけば

$$E|\xi(h,\omega)-\xi(\omega)|^2=\sum P!\,\|S_hf_p-f_p\|^2$$
$$=\sum P!\int\cdots\int|f_p(t_1-h,u_1,\cdots t_p-h,u_p)-f(t_1,u_1,\cdots t_p,u_p)|^2dm(t_1u_1)\cdots$$
$$\cdots dm(t_p\,u_p)\qquad(4.10)$$

$\widehat{n}(E)=n(E)+\sigma^2\delta_0(E)$, $E\in\mathbb{B}$. δ_0は単位分布とおけば$dm(t,u)=(1+u^2)d\widehat{n}(u)dt$. フビニーの定理より

$$(4.10)\text{の}P\text{-th項}=P!\int\cdots\int|f(t_1-h,u_1,\cdots t_p-h,u_p)-f(t_1,\cdots u_p)|^2dt_1\cdots$$
$$\cdots dt_p\ (1+u_1^2)\cdots(1+u_p^2)\,d\widehat{n}(u_1)\cdots d\widehat{n}(u_p)\qquad(4.11)$$

$f\in\widetilde{L_2^p}$より($d\widehat{n}(u_1)\cdots d\widehat{n}(u_p)$測度に関して)殆んどすべての$(u_1,\ldots u_p)$に対し、$f$は$(t_1\cdots t_p)$の函数としてルベーグ測度に関する二次モーメントが存在する. 故に殆んどすべての$(u_1,\cdots u_p)$に対し

---

(1) $H(\xi)$に属する任意の確率変数X, Yに対し $E((T_tX)\cdot\overline{Y})\xrightarrow[t\to\infty]{}E(X).E(\overline{Y})$

Sem. on Probab.
Vol.10 1961年
P1-103

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int |f_p(t_1-h, u_1, \cdots t_p-h, u_p)-f(t_1 u_1 \cdots t_p)|^2 dt_1 \cdots dt_p \xrightarrow[h\to 0]{} 0 \quad (4.12)$$

一方（4.12）の積分値は h に無関係に次の様なもので押えられる.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int |f_p(t_1-h, u_1, \cdots t_p-h, u_p)|^2 + f_p(t_1 u_1 \cdots t_p. u_p)|^2 dt_1 \cdots dt_p$$

$$= 2\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int |f_p(t_1 u_1, \cdots t_p. u_p)|^2 dt_1 \cdots dt_p \quad (4\cdot 13)$$

（4·13）の右辺は h に無関係な $(u_1 \cdots u_p)$ の可積分函数である. 故にルベーグの bounded convergence theorem より（4·11）に於る $(u_1 \cdots u_p)$ の積分と $h\to 0$ は交換出来る. 故に（4.12）より

$$p!\,\| S_h f_p - f_p \|^2 \xrightarrow[h\to 0]{} 0 \quad (4\cdot 14)$$

又, $\| S_h f_p - f_p \|^2 \leqslant \| S_h f_p \|^2 + \| f_p \|^2 = 2\| f_p \|^2$ 且 $\sum p!\,\| f_p \|^2 < \infty$ より, 無限和と $h\to 0$ は交換できる. 故に（4./4）より

$$\lim_{h\to 0} \sum p!\,\| S_h f_p - f_p \|^2 = 0 \qquad \text{即ち } E|\xi(h.\omega) - \xi(\omega)|^2 \xrightarrow[h\to 0]{} 0 \quad (4.15)$$

強混合性： $\xi(\omega)$ の展開が有限次 即ち

$$\xi(\omega) = \sum_{p=0}^{n} I_p(f_p)$$

且 $f_1, \cdots f_n$ が special elementary function ;

$$f_p(\xi_1 \cdots \xi_p) = \sum_{\text{有限和}} a^{(p)}_{i_1 \cdots i_p} \chi_{E^p_{i_1}}(\xi_1) \cdots \chi_{E^p_{i_p}}(\xi_p) \quad p = 1 \cdots n$$

で, 充分大きな N をとれば $\bigcup_{p=1}^{n} \bigcup_{i_k} E^p_{i_k} \subset [-N.N] \times [-N.N]$. のとき

$\{ E^p_{i_k} + (2N.0).\ i_k, p \}$ と $\{ E^p_{i_k}.\ i_k\ p \}$ は互に排反する集合系となる. 故に

$$\{\xi(2N+S).\ S>0\} \perp\!\!\!\perp \{\xi(t).\ t<0\} \quad (4\cdot 16)$$

故にこの場合 ξ は強混合性を持つ.
一般の場合は上に述べた性質を持つ確率過程 ξ_n で

$$\| \xi(t.\omega) - \xi_n(t.\omega) \| = \| \xi(0.\omega) - \xi_n(0.\omega) \| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad (4.17)$$

とな し得る為, 一般の ξ も強混合性を持つ。 QED.

Sem. on Probab.
Vol.10 1961年
P1-103

定理 4・2[1] $X(t)=\gamma t+\alpha$ ($\gamma\ \alpha$ は常数) と云う場合を除き

$$H(\mathfrak{X}) \simeq L_2(R') \oplus L_2(R') \oplus \cdots\cdots \qquad (4.18)$$

且 この同型対応により $H(\mathfrak{X})$ 上の推移変換 T_t はΦ_t

$$\Phi_t : (C,\ f_1(S),\ f_2(S)\cdots\cdots) \longrightarrow (C.\ f_1(S-t),\ f_2(S.t)\cdots\cdots) \quad (4.19)$$

となる.

證 明

1. $2p$次元ユークリッド空間R^{2p} 上に、実数τと$(1,\ldots\ldots,p)$の順列$\epsilon=(\epsilon(1),\cdots\cdots\epsilon(p))$ に対し, 変換(τ). (ϵ)を次の様に定義する.

$$(\tau)(t_1 u_1,\cdots\cdots t_p\ u_p)=(t_1-\tau,\ u_1,\cdots\cdots t_p-\tau,\ u_p) \qquad (4.20)$$
$$(\epsilon)(t_1,\ u_1,\cdots t_p,\ u_p)=(t_{\epsilon(1)}\ u_{\epsilon(1)}\cdots\cdots t_{\epsilon(p)}\cdot u_{\epsilon(p)}) \qquad (4.21)$$

この二つの変換の性質をしらべる為に座標を次の様に変換する.

$$A(t_1,\ u_1,\cdots\cdots t_p,\ u_p)=(S_1,S_2,\cdots\cdots S_p,\ v_1,\cdots\cdots v_p)$$

こゝで $S_i=\sum_{j=1}^{p} a_{ij}\ t_j \qquad det(a_{ij})=1 \quad a_{1j}=\frac{1}{p}\ \sum_{j=1}^{p} a_{ij}=0 \quad i\neq 1 \quad (4.22)$

$$v_i=u_i$$

与えられたS_1. $V=(S_2,\ S_3,\cdots\cdots S_p.\ v_1\cdots v_p)$ に対し(4・22)を解いて, t_i, u_i, を求め. 次に

$$S_i'=\sum_{j=1}^{p} a_{ij}\ t_{\epsilon(j)} \qquad v_i'=v_{\epsilon(i)}$$

とすれば

$$(S_1',\ S_2',\cdots\cdots S_p',\ \ v_1'\cdots\cdots v_p')=A(\epsilon)\ A^{-1}(S_1\cdots\cdots S_p\ \ v_1\cdots v_p) \qquad (4.23)$$

(4.22)より

$$S_1'=\sum_{j=1}^{p} a_{1j}\ t_{\epsilon(j)}=\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} t_{\epsilon(j)}=\frac{1}{p}\sum_{j=1}^{p} t_j=\sum_{j=1}^{p} a_{1j}\ t_j=S_1 \quad (4.24)$$

次に $S_2',\cdots\cdots S_p'$ が $S_2\cdots\cdots S_n$ の一次式でかける事を示す. $det(a_{ij})=1(\neq 0)$ により

$$\sum_{j=1}^{p} a_{ij}\ b_{jk}=\delta_{ik} \qquad (4.25)$$

(1) 定理4.2は〔10〕参照.

Sem. on Probab.
Vol.10 1961年
P1-103

は唯一つの解 (b_{jk}) を持つ. (4.22)を解いた結果は

$$t_i = \sum_{j=1}^{p} b_{ij}\ s_j \tag{4.26}$$

で与えられる. $a_{ij} = \frac{1}{p}$ $\sum_j a_{ij} = 0$ $(i \neq 1)$ に注意すれば(4.25)の $k=1$ に対し $b_{j1} \equiv 1$ が解となる. 又, $i = 2, \ldots, p$ に対し

$$\begin{aligned} s_i' &= \sum_{j=1}^{p} a_{ij}\ t_{\epsilon(j)} = \sum_{j,k} a_{ij}\ b_{\epsilon(j)k} s_k \\ &= \Big(\sum_{j=1}^{p} a_{ij}\ b_{\epsilon(j)1}\Big) s_1 + \sum_{k=2}^{p} \Big(\sum_{j=1}^{p} a_{ij}\ b_{\epsilon(j)k}\Big) s_k \\ &= \Big(\sum_j a_{ij}\Big) s_1 + \sum_{k=2}^{p} \Big(\sum_j a_{ij}\ b_{\epsilon(j)k}\Big) s_k \\ &= \sum_{k=2}^{p} \Big(\sum_j a_{ij}\ b_{\epsilon(j)k}\Big) s_k \quad \Big(= \sum_{k=2}^{p} c_{ik}\ s_k \text{ とおく}\Big) \end{aligned} \tag{4.27}$$

即ち, $s_2', \ldots, s_p'$ は $s_2, \ldots, s_p$ の一次式で表わされる.
故に

$$A(\epsilon)A^{-1}(s_1 \ldots s_p,\ v_1 \ldots v_p) = A(\epsilon)\ A^{-1}(s_1,\ V) = (s_1, (\bar{\epsilon})V) \tag{4.28}$$

こゝで $(\bar{\epsilon})\ V = (s_2', \ldots s_p',\ v_{\epsilon(1)} \cdots v_{\epsilon(p)})$ $s_i' = \sum_{k=2}^{p} c_{ik}\ s_k$ $i = 2 \cdots p$.
又,

$$A(\tau)A^{-1}(s_1,\ V) = (s-\tau,\ V) \tag{4.29}$$

$\det(a_{ij}) = 1$ より, 変数 A は体積素を変えない. 即ち

$$dt_1(1+u_1^2)d\hat{\pi}(u_1) \cdots dt_p(1+u_p^2)d\hat{\pi}(u_p) = ds_1 ds_2 \cdots ds_p (1+u_1^2) d\hat{\pi}(u_1) \cdots \cdots (1+u_p^2)\ d\hat{\pi}(u_p)$$

こゝで $d\lambda_p(V) = ds_2 \cdots ds_p (1+u_1^2) d\hat{\pi}(u_1) \cdots (1+u_p^2) d\hat{\pi}(u_p)$ とおけば

$$= ds_1\ d\lambda_p(V) \tag{4.30}$$

変換 (ϵ) は体積素(4.30)を変えない為

$$ds_1 d\lambda_p((\bar{\epsilon})\ V) = ds_1\ d\lambda_p(V)$$

即ち $d\lambda_p((\bar{\epsilon})\ V) = d\lambda_p(V)$. 故に $f \in \hat{L}_2^p$ となる必要十分条件は f を $(s_1,\ V)$ の函数と見た時, $f(s_1, (\bar{\epsilon})V) = f(s_1,\ V)$ となる事である.

2. 測度空間 $(R^{2k-1}, d\lambda_p)$ 上の L_2 函数の作るヒルベルト空間を $\mathcal{L}_2^{2p-1}$ とする. この中で変換 $(\bar{\epsilon})$ で不変なもの は閉線型空間 $\tilde{\mathcal{L}}_2^{2p-1}$ を作る.

Sem. on Probab.
Vol.10 1961年
P1-103

$X(t)=\gamma t+\alpha$ なる場合を除き $\widetilde{\mathcal{L}}_2^{2p-1}$ の次元は1以上である。又高々可附番無限である。$\widetilde{\Phi}_{p,i}(V)$ $i=1,2,\cdots$ を $\widetilde{\mathcal{L}}_2^{2p-1}$ の完全正規直交系とすれば、$f(S_1,V)$ は $\{\phi_{p,i}\}$ により展開できる。即ち

$$f(S_1,V)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(S_1)\,\phi_{p,n}(V) \quad f_n\in L_2(R') \tag{4.31}$$

且 $\|f(S_1,V)\|^2=\sum\|f_n\|^2$

T_t の $H_p(M)$ 上への制限を $T_t^{(P)}$ とすれば定理2.3より

$$T_t=\sum_{p=0}^{\infty}\oplus T_t^{(P)}$$

更に Lemma 1により、$T^{(P)}$ の V_p による変形を $S_t^{(P)}$ とすれば

$$(S_t^{(P)}f)(S_1,V)=f(S_1-t,V)=\sum_i f_i(S_1-t)\,\widetilde{\Phi}_{p,i}(V) \tag{4.32}$$

(4.31)及び(4.32)より $\widetilde{L}_2^{p}$ は $L_2(R')$ の高々可附番直和と同型であり、各 $L_2(R')$ 上では $S_t^{(P)}$ は変換 $f(S)\to f(S-t)$ となる　　　QED

§5 複素重複ウィナー積分[1]

この節は定常過程の表現とは関連ないが、重複ウィナー積分を利用して正規定常過程のエルゴード性をしらべる事が出来るので、その事を記しておく。これまでの独立彷徨測度は実数値であったが、複素正規彷徨測度に関する重複ウィナー積分を定義するのが後の為に便利である。$R'(\mathbb{B},m)$ を測度空間 $\mathbb{B}^*$ を m-測度有限な集合の全体とする。

<u>定義5.1</u>　複素数値確率変数の系 $\mathbb{Z}=\{Z(E\,\omega),\ E\in\mathbb{B}^*\}$ が次の条件を満す時、複素正規彷徨測度と云う。

任意の正整数 n、任意の複素数 $c_1,\cdots,c_n$ と任意の $E_1,\cdots,E_n(\in\mathbb{B}^*)$ に対し

$$E\,e^{i\mathcal{R}\left(\sum_{i=1}^{n}\bar{c}_i Z(E_i)\right)}\,{}^{(2)}=\exp\left\{-\frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{n}c_i\,\bar{c}_j\,m(E_i\cap E_j)\right\} \tag{5.1}$$

(5.1)より $\mathbb{Z}$ は複素数値であるが、独立彷徨測度の条件を満す事が証明できる。

<u>定理5.1</u>

---

(1)　詳しい証明等は[5]参照。

(2)　$\mathcal{R}(\alpha)$ は α の実数部分，$\mathcal{J}(\alpha)$ は α の虚数部分。

Sem. on Probab.
Vol.10 1961年
P1-103

(i) $P(|Z(E)|<\infty)=1 \quad \forall E\in \mathcal{B}^*$

(ii) $E_1,\cdots,E_n$ が互に共通点のない $\mathcal{B}^*$ の元の時 $Z(E_1)\cdots Z(E_n)$ は互に独立な確率変数で

$$Z\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right)=\sum_{i=1}^{n} Z(E_i)$$

(iii) $\{E_n\}$ が減少しながら空集合 ϕ に近づく $\mathcal{B}^*$ の元のとき.

$$Z(E_n)\longrightarrow 0 \quad (\text{in probability})$$

(iv) $\mathcal{R}(Z(E))=X(E)$, $\mathcal{J}(Z(E))=Y(E)$ とすれば $\{X(E),\ E\in\mathcal{B}^*\}$ と $\{Y(E),\ E\in\mathcal{B}^*\}$ は互に独立な正規彷徨測度となる.

定義 2.1 と同様にして複素正規彷徨測度についての重複ウィナー積分を定義したいのであるが, その前に連続性を仮定しておく.

連続性：任意の正数 ε と任意の集合 $E(\in\mathcal{B}^*)$ に対し次の条件を満すEの分解 $E=\bigcup_{i=1}^{N} E_i \quad (E_i\cap E_j)=\phi$ が存在する.

$$m(E_i)<\varepsilon \quad i=1,2,\cdots,N(\varepsilon,E)$$

$L_2^{p,q}=L_2(R^p\times R^q\ m^p\times m^q)$ とおく. 明に $L_2^{p,q}$ は $L_2(R^{p+q},\ m^{p+q})$ と同型である. $E_1,\cdots,E_{p+q}$ を $\mathcal{B}^*$ に属する互に共通点のない集合とした時, $E_1\times\cdots\times E_{p+q}$ なる集合Eの定義函数, 又はその様な形の定義函数の複素係数一次結合で表わされるものの全体を $S_{p,q}$ とする. 明に $S_{p,q}\subset L_2^{p,q}$ であるが, 連続性により $S_{p,q}$ は $L_2^{p,q}$ の中で稠密になる.

定義 5.2 (p,q) 次複素ウィナー積分 $I_{p,q}(f)$ $f\in L_2^{p,q}$

$$f\in S_{p,q} \quad f(t_1\cdots t_p\ s_1\cdots s_q)=\sum a_{i_1\cdots i_p j_1\cdots j_q}\ \chi_{E_{i_1}}(t_1)\cdots$$
$$\cdots\chi_{E_{i_p}}(t_p)\chi_{E_{j_1}}(s_1)\cdots\chi_{E_{j_q}}(s_q)$$

に対し,

$$I_{p,q}(f)=\sum a_{i_1\cdots i_p j_1\cdots j_q}\ Z(E_{i_1})\cdots Z(E_{i_p})\ \bar{Z}(E_{j_1})\cdots\bar{Z}(E_{j_q}) \quad (5.2)$$

一般の $f\in L_2^{p,q}$ に対し $f_n\to f$ (ノルム近似) とする.

$$I_{p,q}(f)=\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m}}\ I_{p,q}(f_n) \quad (5.3)$$

但 $I_{0,0}(c)=c$ (c；複素数) と定める.

$I_{p,q}$ の定義可能性は定義 2.1 と同様である. 又、定理 2.2 と同様に

Sem. on Probab.
Vol.10 1961年
P1-103

定理 5.2

(A) $I_{p,q}(f) = I_{p,q}(\hat{f})$

但 $\hat{f}(t_1 \cdots t_p, s_1 \cdots s_p) = \frac{1}{p!q!} \sum_{(i)(j)} f(t_{i_1} \cdots t_{i_p}, s_{j_1} \cdots s_{j_q})$ こゝで $(i)=(i_1 \cdots i_p)$ $(j)=(j_1 \cdots j_q)$ は各々 $(1 \cdots p)$, $(1 \cdots q)$ の順列で和はすべての順列につき加える事の意味.

(B) $I_{p,q}(\alpha f + \beta g) = \alpha I_{p,q}(f) + \beta I_{p,q}(g)$ $\quad p+q \neq 0$

(C) $E(I_{p,q}(f)) = 0$

(D) $(I_{p,q}(f), I_{p,q}(g)) = p!q!(\hat{f}, \hat{g})$

(D′) $\| I_{p,q}(f) \|^2 = p!q! \|\hat{f}\|^2 \leq p!q! \|f\|^2$

(E) $(p,q) \neq (r,s)$ ならば $(I_{p,q}(f), I_{r,s}(g)) = 0$

定理 5.3 (展開定理) Z の任意の L_2-汎函数 ξ は

$$\xi = \sum_{p,q} I_{p,q}(f_{p,q}) = \sum I_{p,q}(\hat{f}_{p,q})$$

の形に直交展開せられる.

証明 1. 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, 次の条件を満す互に共通点のない集合 $E_1, \cdots E_m \in \mathcal{B}^*$ と m 変数可測函数 $f(\alpha_1, \cdots \alpha_m)$ が存在する事はよく知られている.

$$\| \xi - f(Z(E_1) \cdots Z(E_m)) \| < \varepsilon \tag{5.4}$$

$\frac{Z(E_k)}{\sqrt{m(E_k)}} = X_k + iY_k$ とすれば $\{X_1 Y_1 \cdots X_m, Y_m\}$ は互に独立な $N(0, \frac{1}{2})$ に従う確率変数である. 故にエルミット多項式の完備性により $f(Z(E_1) \cdots Z(E_m)) = g(X_1, Y_1 \cdots X_m, Y_m)$ に対し

$$\int \cdots \int \left| g(x_1 y_1 \cdots x_m y_m) - P(x_1 y_1 \cdots x_m y_m) \right|^2 e^{-\frac{x_1^2}{2} - \frac{y_1^2}{2} \cdots - \frac{x_m^2}{2} - \frac{y_m^2}{2}} dx_1 \cdots dy_m < \varepsilon^2 \tag{5.5}$$

なる多項式 P が存在する. 即ち (5.5) は

$$\| g(X_1 Y_1 \cdots X_m Y_m) - P(X_1 Y_1 \cdots Y_m) \| < \varepsilon$$

$$Q(\alpha_1 \cdots \alpha_m, \bar{\alpha}_1 \cdots \bar{\alpha}_m) = P\left(\frac{\alpha_1 + \bar{\alpha}_1}{2}, \frac{\alpha_1 - \bar{\alpha}_1}{2i}, \cdots \frac{\alpha_m + \bar{\alpha}_m}{2}, \frac{\alpha_m - \bar{\alpha}_m}{2i} \right)$$

と Q を定義すれば

$$\| \xi - Q(Z(E_1) \cdots Z(E_m), \bar{Z}(E_1) \cdots \bar{Z}(E_m)) \| < 2\varepsilon \tag{5.6}$$

Sem. on Probab.
Vol.10　1961年
P1-103

即ち $H(Z)$ の中で $\{Z(E_1)\cdots Z(E_m)\ \bar{Z}(E_1)\cdots \bar{Z}(E_m)\}$ の多項式は稠密となる。

2. $\varphi\in L_2^{p.q}$ $\psi\in L_2^{1.0}$ $\theta\in L_2^{0.1}$ に対し，次の函数を定義する．

$$(\varphi\circ\psi)(t_1\ldots t_p\ t\ s_1\ldots s_q)=\varphi(t_1\ldots t_p\ s_1\ldots s_q)\psi(t) \qquad (5.7)$$

$$(\varphi\bar{\circ}\theta)(t_1\ldots t_p\ s_1\ldots s_q\ s)=\varphi(t_1\ldots t_p\ s_1\ldots s_q)\theta(s) \qquad (5.8)$$

$$(\varphi\underset{(k)}{\times}\psi)(t_1\ldots t_{k-1},\ t_{k-1}\ldots t_p\ s_1\ldots s_q)=\int\varphi(t_1\ldots t_p\ s_1\ldots s_q)\psi(t_k)\,dt_k \qquad (5.9)$$

$$(\varphi\underset{(k)}{\bar{\times}}\theta)(t_1\ldots t_p\ s_1\ldots s_{k-1},\ s_{k+1}\ldots s_q)=\int\varphi(t_1\ldots t_p\ s_1\ldots s_q)\theta(s_k)\,ds_k \qquad (5.10)$$

明に

$$\varphi\circ\psi\in L_2^{p+1.q}\quad \varphi\bar{\circ}\theta=L_2^{p.q+1}\quad \varphi\underset{(k)}{\times}\psi\in L_2^{p-1.q}\quad \varphi\underset{(k)}{\bar{\times}}\theta\in L_2^{p.q-1}$$

(2.25) と同様，次の Recurrence formnla を得る．

$$I_{p.q}(\varphi)\,I_{1.0}(\theta)=I_{p+1,q}(\varphi\circ\psi)+\sum_{k=1}^{p}I_{p-1,q}(\varphi\underset{(k)}{\times}\psi) \qquad (5.11)$$

$$I_{p.q}(\varphi)\,I_{0.1}(\theta)=I_{p.q+1}(\varphi\bar{\circ}\psi)+\sum_{k=1}^{q}I_{p.q-1}(\varphi\underset{(k)}{\bar{\times}}\theta) \qquad (5.12)$$

3. $\xi=Z(E_1)^{p_1}\cdots Z(E_n)^{p_n}\bar{Z}(E_1)^{q_1}\cdots\bar{Z}(E_n)^{q_n}$ ならば $\xi=\sum_{r=0}^{p}\sum_{\sigma=0}^{q}I_{r\sigma}(f_{r.\sigma})$ —— ($p=\sum p_i$, $q=\sum q_i$) の形に展開できる．

☺ $p+q$ についての帰納法による．$p+q=0$ の時は定義から明．
$p+q=r$ の時に成立すると仮定する．$\sum p_i+\sum q_i=r+1\ (\geq 1)$ となるため $p_1\ldots q_n$ の中には正整数のものがある．

Case 1 $\exists_i\ p_i>0$ 簡単にする為 $p_1>0$ として証明する．

仮定より $\xi'=Z(E_1)^{p_1-1}Z(E_2)^{p_2}\cdots Z(E_n)^{p_n}\bar{Z}(E_1)^{q_1}\cdots\bar{Z}(E_n)^{q_n}\ \sum_{r=0}^{p-1}\sum_{\sigma=0}^{q}I_{r\sigma}(f_{r\sigma})$

$\chi(t)$ を E_1 の定数函数とすれば (5.11) より

$$\xi=\xi' I_{1.0}(\chi)=\sum_{r=0}^{p-1}\sum_{\sigma=0}^{q}I_{r+1.\sigma}(f_{r.\sigma}\circ\chi)+\sum_{k=1}^{p}\sum_{r=0}^{p-1}\sum_{\sigma=0}^{q}I_{r.\sigma}(f_{r.\sigma}\underset{(k)}{\times}\chi)$$

即ち，この場合は重複ウィナー積分に展開できる．

Case 2. $\exists_i\ q_i>0$ の時は (5.11) の代りに (5.12) を用いて同様である．

定理 5.2 (b′) より展開 $\sum I_{p.q}(\hat{f}_{p.q}^{(n)})$ の $n\to\infty$ の極限（ノルム）は亦 $\sum I_{pq}(f_{p.q})$ の形である．

定理 5.4 (一意性)

$$\sum_{p.q}I_{p.q}(f_{p.q})=\sum_{p.q}I_{p.q}(g_{p.q})\Rightarrow\hat{f}_{p.q}=\hat{g}_{p.q}$$

証明は定理 2.4 と同様

Sem. on Probab.
Vol.10 1961年
P1-103

定理 5.5 平均連続な正規定常過程 $Y=\{Y(t,\omega),\ -\infty<t<\infty\}$ がエルゴード性を持つ為にはスペクトル函数 $F(\lambda)$ (1) が連続な事が必要十分である。

証明　$H(Y)$ 上に推移変換 T_t が次の様に定義できる。

$$T_t(Y(s))=Y(t+s)\quad T_t\varphi(Y(S_1)\cdots Y(S_n))=\varphi(Y(S_1+t),\cdots Y(S_n+t))$$

$H(Y)$ の中で有限ケの $(S_1\cdots S_n)$ に依存するものが稠密であり、且 T_t が稠密集合上での等長変換となるため、$H(Y)$ に拡張できる。

必要性：$F(\lambda)$ が $\lambda=\mu$ で不連続とする。Y の Kolmogorov 分解を

$$Y(t,\omega)=m+\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2\pi i\lambda t}dZ(\lambda,\omega)$$

とすれば $Z(\lambda,\omega)$ も $\lambda=\mu$ で確率 1 で不連続で

$$\xi(\omega)\equiv Z(\mu+0,\omega)-Z(\mu-0,\omega)$$

は $H(Y)$ に属し

$$(T_t\xi)(\omega)=e^{-2\pi i\lambda t}\xi(\omega)$$

故に

$$T_t|\xi|=|T_t\xi|=|\xi|$$

又、$E|\xi|^2=F(\mu+0)-F(\mu-0)>0$ より $|\xi|$ は定数ではない。

故に Y はエルゴード性を持たない。

十分性：Z は複素正規彷徨測度で $H(Y)=H(Z)$。X を $H(Y)$ に属する、有界且 T_t 不変な確率変数とすれば Z による重複ウィナー積分で展開できる。

$$X(\omega)=C+\sum_{p+q>0}\int\cdots\int\tilde{f}_{p,q}(\lambda_1\cdots\lambda_p,\mu_1\cdots\mu_q)dZ(\lambda_1)\cdots dZ(\lambda_p)d\bar{Z}\cdots d\bar{Z}(\mu_q)$$

$$\begin{aligned}T_tX&=C+\sum_{p+q>0}\int\cdots\int\tilde{f}_{p,q}(\lambda_1\cdots\mu_q)T_t(dZ(\lambda_1))\cdots T_t(d\bar{Z}(\mu_q)),\\&=C+\sum_{p+q>0}\int\cdots\int\tilde{f}_{p,q}(\lambda_1\cdots\mu_q)e^{-i2\pi t}dZ(\lambda_1)\cdots e^{i2\pi\mu_q t}d\bar{Z}(\mu_q)\\&=C+\sum_{p+q<0}\int\cdots\int\tilde{f}_{p,q}(\lambda_1\cdots\mu_q)e^{-i2\pi t(\Sigma\lambda_i-\Sigma\mu_i)}dZ(\lambda_1)\cdots dZ(\mu_q)\end{aligned}$$

故に $T_tX=X$ より、定理 5.4 を用いると

$$\tilde{f}_{p,q}(\lambda_1\cdots\lambda_p\,\mu_1\cdots\mu_q)e^{-i2\pi t(\Sigma\lambda_i-\Sigma\mu_i)}=\tilde{f}_{p,q}(\lambda_1\cdots\cdots\mu_q)$$

即ち 超平面 π：$\Sigma\lambda_i-\Sigma\mu_i=0$ の外では $f_{p,q}=0$

所が F の連続性より

$$\int\cdots\int_\pi dF(\lambda_1)\cdots dF(\lambda_p)\,dF(\mu_1)\,dF(\mu_q)=0$$

$$\therefore\ E|X-C|^2=\int\cdots\int_{\pi^c}dF(\lambda_1)\cdots dF(\mu_q)+\int\cdots\int_\pi dF(\lambda_1)\cdots dF(\mu_q)=0$$

即ち X は常数となる。　　QED

(1) F が、定義 5.1 の測度 m に対応

Sem. on Probab.
Vol.10 1961年
P1-103

第二章 強定常過程の表現

§1. 表現の問題

$\mathfrak{X}=\{X(t,\omega),\ -\infty<t<\infty\}$ を平均連続な実数値強定常過程，T_t を $H(\mathfrak{X})$ 上の推移変換とする．一般に確率過程の構造をしらべる時比較的よく性質の知られている確率過程によく表わす事が行われる．前書きに述べた(2)の立場より次の問題が提起される．

問1 (a) 次の条件を満す例4に述べた独立彷徨測度 $\mathbb{M}=\{M(E,\omega),\ E\in\mathcal{B}^*\}$ が存在する条件．

(i) $E\subset(-\infty,t]\times R'$ ならば $M(E)$ は $\mathcal{B}_t(\mathfrak{X})$-可測

(ii) $T_t M(E,\omega)=M(E+(t,0),\omega)$

(iii) $E\subset(t,\infty)\times R'$ ならば $M(E)$ は $\{X(s), s\leq t\}$ と独立

(iv) $X(t)$ は任意の $s(<t)$ に対し $\{M(E);\ E\subset(s,t]\times R',\ X(u);\ u\leq s\}$ の可測函数となる．

問1 (b) (iv) の代りに (iv') が成立し即ち (i)(ii)(iii)(iv') する条件．

(iv') $X(t)$ は $\mathcal{B}_t(\mathbb{M})$-可測

問2. 基礎確率空間 $\hat{\Omega}$（$\mathfrak{X}$ の定義されて居る基礎確率空間と異ってもよい。）上の例4の独立彷徨測度 $\hat{\mathbb{M}}=\{\hat{M}(E,\hat{\omega});\ E\in\mathcal{B}^*\}$ に対し $H(\hat{\mathbb{M}})$ 上の推移変換を S_t とする．$H_0(\hat{\mathbb{M}})$ に属する適当な確率変数 ξ に対し，確率過程 $=\{S_t\xi(\hat{\omega}),\ -\infty<t<\infty\}$ が $\mathfrak{X}$ と同じ確率法則を持つ様に出来る条件．

問3. $H(\hat{\mathbb{M}})$ に属する適当な確率変数 ξ に対し，確率過程が $\mathfrak{X}$ と同じ確率法則を持つ様に出来る条件．

これらの問題は定常過程の平均移動表現と呼ばれる型の問題である．$\mathfrak{X}$ が平均0の平均連続正規定常過程の時 $H(\mathfrak{X})$ を $\{X(t,\omega),\ -\infty<t<\infty\}$ の張る閉線型空間 $\mathfrak{M}(\mathfrak{X})$ に置き代えた場合，問1，2，3には，よく知られて居る様に次の解答が与えられている．[1]

$\mathfrak{X}$ の自己相関函数 ρ; $\rho(t)=E(X(t+s)X(s))$ のスペクトル分解を

$$\rho(t)=\int e^{it\lambda}\,d\sigma(\lambda)\qquad d\sigma=d\sigma_1+d\sigma_2+d\sigma_3$$

こゝに σ_i は各々不連続部分，特異部分，絶対連続部分とすれば $\mathfrak{X}$ の Kolmogorov 分解は各々に対応して

(1) 定常過程資料

Sem. on Probab.
Vol.10 1961年
P1-103

$$X(t,\omega)=\int e^{it\lambda}\,d\xi(\lambda,\omega)=\sum_j e^{it\lambda_j}\,\Delta\xi_1(\lambda_j,\omega)+\int e^{it\lambda}\,d\xi_2(\lambda,\omega)+\int e^{it\lambda}\,d\xi_3(\lambda,\omega)$$

となる。この時$\{d\xi_i(\lambda)\}$は互に独立な複素正規彷徨測度となる。

問3の成立する必要十分条件は$d\sigma=d\sigma_3$，即ち，スペクトル測度がルベーグ測度に関し，絶対連続な事である。この時$|f^*|^2=\sigma'$なるf^*に対し

$$Y(t,\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(s-t)\,dB(s,\omega),\quad 但\ f(t)=\int e^{it\lambda}f^*(\lambda)\,d\lambda \qquad (1\cdot1)$$

なる確率過程Yは$\mathfrak{X}$と同じ確率法則を持つ。

問2の成立する必要十分条件は

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\log\sigma'(\lambda)|}{1+\lambda^2}\,d\lambda<\infty \qquad (1\cdot2)$$

この時(1.1)のfは$f(t)=0\quad on\ t>0$となる。更に(1.2)は問1(b)の成立する条件でもある。又(1.2)は$\mathfrak{X}$が純非決定的，即ち

$$\mathfrak{M}(\mathfrak{X})\neq\{0\},\quad \mathfrak{M}_{-\infty}(\mathfrak{X})\equiv\bigcap_t\mathfrak{M}_t(\mathfrak{X})=\{0\}^{(1)} \qquad (1\cdot3)$$

と同値な条件である。

問1(a)の条件は純非決定より弱く

$$\mathfrak{M}(\mathfrak{X})\neq\mathfrak{M}_{-\infty}(\mathfrak{X})^{(2)} \qquad (1\cdot4)$$

正規性より$H(\mathfrak{X})$を$\mathfrak{M}(\mathfrak{X})$で置き代えた問1〜3が成立する時元の形の問1〜3は成立している。正規定常過程以外では問1〜3部分的な結果しか得られて居ない。明に問1(b)が成立するならば問1(a)は成立し，更に問1(b)が成立するならば問2は成立し，問2が成立するならば問?は成立する。ここで問1(a)の$\{M(E);E\subset(s,t]\times R'\}$は$\{X(u);u\leqq s\}$に対し，$X(t)$の含んで居る過去とは無関係な部分即ち真にrandomな部分と考えられる。

先に提起された問に関連して正規過程の場合と同様確率過程の純非決定性を次の様に定義する。

<u>定義1·1</u>　確率過程$\mathfrak{X}$が純非決定的であるとは

$$L_2(\mathfrak{X},-\infty)\equiv\bigcap_s L_2(\mathfrak{X},s)=\{0\},\quad 且\ L_2(\mathfrak{X})\neq\{0\} \qquad (1\cdot5)$$

この定義から直ちに得られる結果をまとめると

---

(1)　$\mathfrak{M}_t(\mathfrak{X})$は$\{X(s,\omega),s\leqq t\}$の張る閉線型空間

(2)　定常性より$\mathfrak{M}_t(\mathfrak{X})\uparrow(t\uparrow)$と同値

Sem. on Probab.
Vol.10 1961年
P1-103

定理 1.1

(A) 問2が成立するならば $\mathfrak{X}$ は純非決定的である.

(B) 正規定常過程では二つの条件 (1.3) と (1.5) は同値

(C) 強定常マルコフ過程で、推移確率 $P(t.a.E)$ が "任意の有界連続函数 g に対し $\int P(t.a.db)g(b)$ が a の連続函数で、且 φ を不変測度とすれば

$$\int P(t.a\ db)g(b) \xrightarrow[t\to\infty]{} \int \varphi(db)g(b)$$

なる条件を満すならば $\mathfrak{X}$ は純非決定的である.

(D) $\mathfrak{X}$ が純非決定的ならば強混合性を持つ.

証明

(A) 有界な確率変数 $Z(\hat{\omega})$ が $L_2(\xi,-\infty)$ に属すれば、$\overline{\mathbb{B}}_t(\xi) \subset \overline{\mathbb{B}}_t(\hat{\mathbb{M}})$ より任意の t に対し、Z は $\mathbb{B}_t(\hat{\mathbb{M}})$-可測なものと確率1で一致する.
$\hat{M}(E)$ の独立性より、Kolmogorov の 0−1 法則により、Z は確率1で0となる. 即ち、有界な任意の函数 $f(x_1,\cdots x_n)$ に対し、$Ef(\xi(t_1,\hat{\omega}),\cdots\xi(t_n\ \hat{\omega})) = C$ とおけば

$$E\left[f(\xi(t_1)\cdots\xi(t_n)) - C \,/\, \mathbb{B}_{-\infty}(\xi)\right] = 0 \qquad (1.6)$$

$\mathfrak{X}$ と ξ は同じ確率法則を持つため

$$E\left[f(X(t_1), \quad X(t_n)) - C \,/\, \mathbb{B}_{-\infty}(\mathfrak{X})\right] = 0 \qquad (1.7)$$

故に $\mathfrak{X}$ は純非決定的になる.

(B) (1.5) ⇒ (1.3) $\quad V(X(t))^{(1)} > 0$ より $\mathfrak{M}_t(\mathfrak{X}) \neq \{0\}$
$\mathfrak{M}_t(\mathfrak{X}) \subset L_2(\mathfrak{X},t)$ より $\mathfrak{M}_{-\infty}(\mathfrak{X}) \subset L_2(\mathfrak{X}.-\infty) = \{0\}$.
(1.3) ⇒ (1.5). (1.3) より前に述べた如く、問2が成立し、従って (1.5) は成立する.

(C) 任意の $H(\mathfrak{X})$ に属する確率変数は

$$\xi(\omega) = f_1(X(t_1\,\omega))\cdot f_2(X(t_2\,\omega))\cdots\cdots f_n(X(t_n\,\omega)) \quad (t_1<\cdots<t_n) \quad (1.8)$$

ここで f_i は連続函数.
なる形の確立変数でノルム近似出来る為、(C) の証明の為には

$$\lim_{t\to-\infty} E(\xi(\omega)/\mathbb{B}_t(\mathfrak{X})) = E(\xi)$$

を云えばよい。仮定により

(1) $V(X)$ は X の分散.

Sem. on Probab.
Vol.10 1961年
P1-103

$$E(\xi/\mathcal{B}_t(\mathfrak{X}))=\int\cdots\int f_1(x_1)\cdots f_n(x_n)P(t_n-t_{n-1},\ x_{n-1},dx_n)\cdots P(t_1-t,\ X(t\omega),dx_1)$$

$$\xrightarrow[t\to-\infty]{}\int\cdots\int f_1(x_1)\cdots f_n(x_n)\ P(t_n-t_{n-1},\ x_{n-1},\ dx_n)\cdots P(t_2-t_1,\ x_1,\ dx_2)\varphi(dx_1)$$

$$=E(\xi) \tag{1.9}$$

(D) $\xi(\omega)$, $\eta(\omega)$は $L_2(\mathfrak{X})$ に属する任意の確率変数とする $\varepsilon>0$ に対し充分 S を大きく取れば，適当な ξ_s, η_s $\in L_2(\mathfrak{X}\cdot S)$ に対し，

$$\|\xi-\xi_s\|<\varepsilon,\qquad \|\eta-\eta_s\|<\varepsilon$$

更に $\mathfrak{X}$ の純非決定性より，充分大きな t に対し

$$\|E(\xi_s/\mathcal{B}_{-t}(\mathfrak{X}))\|<\varepsilon,\qquad \|E(\eta_s/\mathcal{B}_{-t}(\mathfrak{X}))\|<\varepsilon$$

となし得る．即ち任意の $\varepsilon>0$ に対し，充分大きな t を取れば、次の条件を満す確率変数 ξ_t, η_t が $L_2(\mathfrak{X},t)$ の中に存在する．

$$\|\xi-\xi_t\|<\varepsilon,\qquad \xi_t\perp L_2(\mathfrak{X},-t)$$

$$\|\eta-\eta_t\|<\varepsilon,\qquad \eta_t\perp L_2(\mathfrak{X},-t) \tag{1.10}$$

故に

$$|(T_s\xi,\eta)-(T_s\xi_t,\eta)|\leqslant\|\xi-\xi_t\|\ \|\eta\|+\|\xi_t\|\ \|\xi-\eta_t\|$$

$$\leqslant\varepsilon(\|\xi\|+\|\eta\|)$$

更に (1.10) より $S<-2t$ なる S に対し

$$(T_s\xi_t,\ \eta_t)=0 \tag{1.11}$$

故に

$$\lim_{s\to-\infty}(T_s\xi,\ \eta)=0 \tag{1.12}$$

ξ, η が $H(\mathfrak{X})$ に属するとき $\xi-E(\xi)$, $\eta-E(\eta)$ は $L_2(\mathfrak{X})$ に属する．故に (1.12) より

$$\lim_{s\to-\infty}(T_s\xi-E(\xi),\ \eta-E(\eta))=0$$

即ち

$$\lim_{s\to-\infty}E(T_s\xi\cdot\bar{\eta})=E(\xi)\overline{E(\eta)} \tag{1.13}$$

Sem. on Probab.
Vol.10 1961年
P1-103

定常性より

$$E(\xi\cdot\overline{T_{-s}\eta}) = E(T_s\xi\cdot\bar{\eta})$$

故に

$$\lim_{s\to\infty} E(\xi.\overline{T_s\eta}) = E(\xi)E(\bar{\eta}) \qquad \text{QED}$$

<u>定理 1.2</u>　殆んどすべての見本過程が連続な強定常マルコフ過程$\mathfrak{X}$が次の条件を満すとする．

(i) $\exists \lim_{h\downarrow 0} E\left(X(t+h,\omega)-X(t,\omega)/\mathbb{B}_t(\mathfrak{X})\right) \equiv m(X(t.\omega))$　（概収束）

且 $m(x)$ は適当な常数 K で

$$|m(x)| \leqslant K(1+x^2)^{\frac{1}{2}} \qquad |m(x_1)-m(x_2)| \leqslant K|x_1-x_2|$$

(ii) $\exists \lim_{h\downarrow 0} E\left((X(t+h.\omega)-X(t.\omega))^2/\mathcal{B}_t(\mathfrak{X})\right) \equiv v^2(X(t.\omega))$　（概収束）

且 $v(x)$は適当な常数 K((i) と同じとしても一般性を失わない) で

$$0 \leqslant v(x) \leqslant K(1+x^2)^{\frac{1}{2}} \qquad |v(x_1)-v(x_2)| \leqslant K|x_1-x_2|$$

(iii) $E\left(\dfrac{1}{v^2(X(t.\omega))}\right) < \infty$

このとき，向 1 (a) は成立し，独立彷復測度 $\mathbb{M}$ はウイナー彷復測度 dB となる．

<u>證　明</u>

$t \geq 0$ に対し

$$Y(t.\omega) = X(t.\omega) - X(0.\omega) - \int_0^t m(X(s.\omega))\,ds \qquad (1.14)$$

とおけば $\{Y(t.\omega),\ t\geq 0,\ \mathbb{B}_t(\mathfrak{X})\}$ はマルチンゲールとなる．(iii) より殆んどすべてのωに対し　$v(X(t.\omega))>0$　定常性より (iii) の積分値は t に無関係となり，確率積分

$$Z(s.\omega) = \int_0^s \frac{dY(t.\omega)}{v(X(t.\omega))} \qquad (1.15)$$

が定義できる．しかも一章．定理 3.2 及び定理 3.5 より $Z(S)$ はブラウン運動となる．$Z(S)$ より導かれるウイナー彷復測度 $\{dZ(t)\ \ t\geq 0\}$ に一章定理 3.4 を用いると

Sem. on Probab.
Vol.10 1961年
P1-103

$$Y(t,\omega)=\int_0^t v(X(s,\omega))\,dZ(s,\omega) \qquad (1.16)$$

と表わされる．即ち

$$X(t,\omega)=X(0,\omega)+\int_0^t m(X(s,\omega))\,ds+\int_0^t v(X(s,\omega))\,dZ(s,\omega) \qquad (1.17)$$

所が一章定理3-5により $X(0,\cdot) \perp\!\!\!\perp \{dZ(s),\ s\geq 0\}$ になる事に注意して，(1.17) を $\{X(s,\omega)\ \ s\geq 0\}$ に関する確率微分方程式と見れば，条件(i)(ii)より(1.17)は解け，$X(t)$ は $X(0)$ と $\{dZ(s\ \omega)\ \ s\geq 0\}$ の可測函数となる．

$\Delta Z(E)$ は $H(\mathfrak{X})$ に属するが，E，$E+t$ が共に $(0\ \infty)$ の部分集合の時，

$$T_t\Delta Z(E,\omega)=\Delta Z(E+t,\omega) \qquad (1.18)$$

一般の有界なボレル集合 E に対し，$E+a\subset(0\ \infty)$ なる a をえらんで

$$\Delta B(E,\omega)=T_{-a}\ \Delta Z(E+a,\omega) \qquad (1.19)$$

と $\Delta B(E)$ を定義すれば，$\Delta B(E)$ は a のえらび方によらない．何故ならば $E+a\subset(0\ \infty)$ 且 $a'>a$ ならば，(1.18) より

$$T_{-a'}\ \Delta Z(E+a')=T_{-a}\ T_{-a'+a}\ \Delta Z(E+a')=T_{-a}\ \Delta Z(E+a)$$

又，$dB=\{\Delta B(E,\omega);\ E\in\mathcal{B}_1^*\}$ はウィナー術徨測度となり向1(a)の(i)〜(iV)の条件を満す。

$\mathfrak{X}$ が純非決定的で向1(a)が成立しても向1(b)が成立するとは限らない．次の例はこのことを示している．

例．$\{P(t,\omega),\ t\geq 0\}$ を平均1の可分ポアソン過程とする．$(P(0)=0)$

$$\xi(t,\omega)=P(t,\omega)\quad \mathrm{mod}\ 2. \qquad (1.20)$$

とすれば $\{\xi(t,\omega),\ t\geq 0\}$ は次の推移確率を持つ，時間的に一様なマルコフ過程となり，殆んどすべての見本過程は右連続である．

$$P(\xi(t)=1/\xi(s)=1)=P(\xi(t)=0/\xi(s)=0)$$

$$=e^{-(t-s)}+\frac{e^{-(t-s)}(t-s)^2}{2!}+\cdots+\frac{e^{-(t-s)}(t-s)^{2n}}{(2n)!}+\cdots=\frac{1}{2}+\frac{e^{-2(t-s)}}{2} \qquad (1.21)$$

$$P(\xi(t)=1/\xi(s)=0)=P(\xi(t)=0/\xi(s)=1)=\frac{1}{2}-\frac{e^{-2(t-s)}}{2} \qquad (1.22)$$

Sem. on Probab.
Vol.10 1961年
P1-103

この推移確率に対し

$$P(\xi(t)=1)=P(\xi(t)=0)=\frac{1}{2} \qquad (1.23)$$

は不変測度となる. 故に $t\in(0,\infty)$ で ξ と同じ確率法則を持つ強定常マルコフ過程 $\mathfrak{X}=\{X(t), -\infty<t<\infty\}$ が存在する.(1)
(1.21)(1.22)(1.23)により推移確率は $t\to\infty$ で不変測度に近づくため, 定理1.1 (c)により $\mathfrak{X}$ は純非決定的である.
ボレル集合 $E(\subset(-\infty,\infty))$ に対し

$$M(E,\omega)=\{t;\ X(t+0,\omega)-X(t-0,\omega)\neq 0 \quad t\in E\} \text{ の個数} \qquad (1.24)$$

とおけば,

$$X(t,\omega)=X(s,\omega)+M((s,t],\omega), \ \mathrm{mod}\ 2 \ (a.e) \qquad (1.25)$$

$P(t,\omega)-P(s,\omega)=\{\tau;\ \xi(\tau+0,\omega)-\xi(\tau-0,\omega)\neq 0,\ t\in(s,t]\}$ の個数なる事に注意すれば $s>0$ に対し

$$P(M(s,t],\omega)=k/\mathcal{B}_s(\mathfrak{X}))=P(M((s,t],\omega)=k/X(s))$$

$$=\frac{e^{-(t-s)}(t-s)^k}{k!} \qquad (1.26)$$

こゝで最後の等式は $\mathfrak{X}$ と ξ が $(0,\infty)$ 上で同じ確率法則を持つ事より, 確率が $P(P(t,\omega)-P(s,\omega)=k/\xi(s))$ に等しい事を用いて求められる. 故に(1.26)より $\mathfrak{X}$ の定常性を用いると, 任意の s に対し

$$P(M(s,t],\omega)=k/\mathcal{B}_s(\mathfrak{X}))=\frac{e^{-(t-s)}(t-s)^k}{k!}$$

故に $M((s,t],\omega) \perp\!\!\!\perp \{X(\tau,s),\ \tau\leq s\}$ (1.27)
即ち, 独立仿偉測度Mは問1(a)の解になっている.

$\mathcal{B}_{(s,t]}(M)=\mathcal{B}(M(E,\omega);\ E\subset(s,t],\ E\in\mathcal{B})$ とおけば,

$$\lim_{s\to-\infty}\overline{\mathcal{B}_{(s,t]}}(M)\overset{(2)}{=}\overline{\mathcal{B}_t}(M)$$

∵ $\overline{\mathcal{B}_{(s,t]}}(M)\subset\overline{\mathcal{B}_t}(M)$ より $\lim_{s\to-\infty}\overline{\mathcal{B}_{(s,t]}}(M)\subset\overline{\mathcal{B}_t}(M)$
$E_n=E\cap(-n,t]$ とおけば $M(E,\omega)=\lim M(E_n,\omega)$ (a.e)

(1) ξ と同じ確率空間に存在するとは限らない. 一般に $\mathfrak{X}$ と ξ は異なる確率空間上にある.
(2) $\lim_{n\to\infty}\mathcal{B}_n$ は, すべての $\mathcal{B}_n$ を含む最小のボレル集合体.

Sem. on Probab.
Vol.10 1961年
P1-103

故に $M(E.\ \omega)$ は $\lim_{s\to-\infty} \overline{\mathbb{B}}_{(s.t]}$ - 可測 $\therefore \lim \overline{\mathbb{B}}_{(s.t]}(\mathbb{M}) \supset \overline{\mathbb{B}}_t(\mathbb{M})$

$E|E(x(t)/\mathbb{B}_t(\mathbb{M}))-x(t)|$

故に $= E|E(X(t)/\overline{\mathbb{B}}_t(\mathbb{M}))-X(t\,\omega)| = \lim_{s\to-\infty} E|E(X(t)/\overline{\mathbb{B}}_{(s\,t]}(\mathbb{M}))-X(t)|$

定常性より

$$= \lim_{s\to-\infty} E|X(t-s)/\overline{\mathbb{B}}_{(0.\ t-s]}(\mathbb{M}))-X(t-s)|$$

$$= \lim_{t\to\infty} E|E(X(t)/\mathbb{B}_{(0\,t]}(\mathbb{M}))-X(t)| \qquad (1\cdot 28)$$

一方

$$E(X(t)/\mathbb{B}_{(0\,t]}(\mathbb{M})) = E(X(0)+M((0\,t])\ mod\ 2/\mathbb{B}_{(0\,t]}(\mathbb{M}))$$

(1.27) より. $M(0.t]$ の値を固定して $X(0)$ につき平均すれば よい.

$$= \frac{1}{2}(M(0t]\ mod\ 2)+\frac{1}{2}((1+M(0\,t])\ mod\ 2) = \frac{1}{2} \qquad (1.29)$$

故に

$$E|E(X(t)/\overline{\mathbb{B}}_t(\mathbb{M}))-X(t)| = E\left|\frac{1}{2}-X(t)\right| = \frac{1}{2}$$

故に问 1 (b) は成立しない.

<u>定理 1・3</u>　问 1(a) が成立したとき. 问 1(b) が成立する必要十分条件は任意の数列 $t_1 < t_2 \cdots \to \infty$ に対し. 次の条件を满す確率 1 の集合 E_0 が $\mathbb{B}(\mathfrak{X})$ の中に存在する事である.

適当な部分列 $t_{n_1} < t_{n_2} < \cdots \longrightarrow \infty$ に対し, 任意の x. $y \in E_0$ に対し, (1.30) が成立する.

$$E|\varphi_{n_i}((M.\ x)-\varphi_{t_{n_i}}(\mathbb{M}.\ y)| \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad (1.30)$$

但. φ_t の定義は. $Y(t.\omega) = t_g^{-1}X(t\,\omega)$[(1)] とおけば $\mathfrak{X}$ が问 1 (a) を满すとき $\mathfrak{Y}$ も满す. そこで

$$Y(t.\omega) = \varphi_t(M(E\,\omega),\ E<(0.\ t].\ X(u.\omega)\ u\leqslant 0) = \varphi_t(\mathbb{M}.x)$$

とおく.

<u>証　明</u>

---

(1) $\mathbb{B}_\Lambda(\mathfrak{X}) = \mathbb{B}_\Lambda(\mathfrak{Y})$ $(\Lambda \in \mathcal{B}_1)$ 且 $|Y(t)| \leqslant \frac{\pi}{2}$ となるため. ボレル集合体をしらべる場合 X より便利.

Sem. on Probab.
Vol.10 1961年
P1-103

(1.28) と同様

$$E\left|E(Y(t)/\mathcal{B}_t(\mathbb{M}))-Y(t)\right|=\lim_{t\to\infty} E\left|E(Y(t)/\mathcal{B}_{(0t]}(\mathbb{M}))-Y(t)\right|$$

故に (iv') の成立する必要十分条件は $X(t)=t_g Y(t)$ に注意すれば

$$\lim_{t\to\infty} E\left|Y(t)-E(Y(t)/\mathcal{B}_{(0,t]}(\mathbb{M}))\right|=0 \qquad (1.31)$$

必要性： (iv') が成立すれば (1.31) より任意の $t_1<t_2\cdots\cdots\to\infty$ に対し 適当な $t_{n_1}<t_{n_2}<\cdots t_{n_k}<\cdots\to\infty$ に対し

$$Y(t_{n_i})-E(Y(t_{n_i})/\mathcal{B}_{(0,t_{n_i}]}(\mathbb{M}))\longrightarrow 0 \quad a.e$$

$Y(t)$ の有界性より

$$E\left[\left|Y(t_{n_i})-E(Y(t_{n_i})/\mathcal{B}_{(0,t_{n_i}]}(\mathbb{M}))\right|/\mathcal{B}_0(\mathfrak{X})\right]\xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad a.e$$

同 1(a)(iii) より 殆んどすべての x に対し

$$E\left|\varphi_{t_{n_i}}(\mathbb{M}.x)-E(Y(t_n)/\mathcal{B}_{(0t_{n_i}]}(\mathbb{M}))\right|\xrightarrow[n_i\to\infty]{} 0$$

故に定理の条件は成立する.

充分性；t を任意に固定し，$t_1<t_2<\cdots\cdots\longrightarrow\infty$ を (1.28) より

$$E\left|E(Y(t)/\mathcal{B}_t(\mathbb{M}))-Y(t)\right|=\lim_{n\to\infty} E\left|E(Y(t_n)/\mathcal{B}_{(0t_n]}(\mathbb{M}))-Y(t_n)\right| \qquad (1.32)$$

なる様に固定する.

E_0 を条件を満す集合とする. $x\in E_0$ に対し

$$E\left|Y(t_{n_i})-\varphi_{t_{n_i}}(\mathbb{M}.x)\right|=E\left(E\left|\varphi_{t_{n_i}}(\mathbb{M}.X(u).u\leq 0)\right.\right.$$
$$\left.\left.-\varphi_{t_{n_i}}(\mathbb{M}.x)\right|/\mathcal{B}_0(\mathfrak{X})\right)$$

$\varphi_{t_{n_i}}$ の有界性よりルベーグの収束定理を用いると

$$E\left|Y(t_{n_i})-\varphi_{t_{n_i}}(\mathbb{M}\,x)\right|\xrightarrow[n_i\to\infty]{} 0 \qquad (1.33)$$

$$E\left|Y(t)-E(Y(t)/\mathcal{B}_{(0t]}(\mathbb{M}))\right|$$
$$=E\left|Y(t)-\varphi_t(\mathbb{M}.x)+\varphi_t(\mathbb{M}.x)-E(Y(t)/\mathcal{B}_{(0t]}(\mathbb{M}))\right|$$

$\varphi_t(\mathbb{M}.x)$ は $\mathcal{B}_{(0t]}(\hat{\mathbb{M}})$-可測な事に注意すれば

Sem. on Probab.
Vol.10 1961年
P1-103

$$\leqq 2E\left[E\left(\left|Y(t)-\varphi_t(M.X)\right|/\mathcal{B}_{(0\,t]}(M)\right)\right] = 2E\left|Y(t)-\varphi_t(M.X)\right|$$

故に(1.33)を用いると(1.32)により

$$E\left|Y(t)-E\left(Y(t)/\mathcal{B}_t(M)\right)\right| = 0 \qquad (1.33)$$

又、定常性より任意のSに対し

$$0 = E\left|Y(t)-E\left(Y(t)/\mathcal{B}_t(M)\right)\right| = E\left|Y(s)-E\left(Y(s)/\mathcal{B}_s(M)\right)\right|$$

即ち(iv′)は成立する. Q.E.D.

問1(a)の解であるMは一般に一意(常数係数を除き)であるかどうか判からない. 又その中であるMは(iv′)を満し, あるMは満さないと云う事は一応考えられる. この様な例は時間経数が離散の場合には実際あるが(二章§5)連続経数では未解決である. 更に問1(a)を満すMの間の関係も未だ決定されて居ないが, §3 定理3.1は一つの手がかりを与えると思われる.

§2. 多項式近似

問3. に対する第一近似的な解答は可成り古く 1938年N. Wiener (the Homogeneous chaos)により$\hat{M}$をウィナー術測度dB. $\xi(\hat{\omega})$をdBの多項式. 即ち $\xi(\hat{\omega}) = \sum_p \sum_{i_1\cdots i_p} a_{i_1\cdots i_p} \prod_{\nu=1}^{p} \left(B(t_{i_\nu}, \hat{\omega}) - B(S_{i_\nu}, \hat{\omega})\right)$としたとき, $\{a_{i_1\cdots i_p},\ t_{i_\nu}, S_{i_\nu}\}$を適当にえらぶと, ξはXと法則的にいくらでも近く出来る事が示されて居る. この節の目的はこの定理の証明である.

先ず次の二つの位相を導入する.

<u>定義2.1</u> U位相:確率過程$Y = \{Y(t.\omega), -\infty < t < \infty\}$の$\varepsilon$近傍$U(\varepsilon, Y)$は次の条件をみたす確率過程$X$の全体とする.

" $n|\theta_j|, |t_j|$, $j=1\cdots n$, $< \frac{1}{\varepsilon}$なる任意のn, θ_j, t_j $j=1\cdots n$ に対し

$$\left|E e^{i\theta_1 X(t_1,\omega)+\cdots+i\theta_n X(t_n,\omega)} - E e^{i\theta_1 Y(t_1,\omega)+\cdots+i\theta_n Y(t_n,\omega)}\right| < \varepsilon \text{ "} \qquad (2.1)$$

この近傍より定まる位相をU位相と云う.

<u>定義2.2</u> V位相;確率過程Yのε近傍$V(\varepsilon, Y)$は次の条件を満すXの全体とする.

" $|t|$が$\frac{1}{\varepsilon}$をこえない任意のtに対し

$$\text{"}P\left(\left|Y(t.\omega)-X(t.\omega)\right|>\varepsilon\right) < \varepsilon\text{"} \qquad (2.2)$$

Sem. on Probab.
Vol.10 1961年
P1-103

U位相，V位相は各々確率変数の法則（確率）収束を無限次元に拡張し，“確率過程の列$\{\mathfrak{X}_n\}$が確率過程$\mathfrak{X}$に法則（確率）収束するとは，任意に固定したn，$t_1,\cdots\cdots t_n$に対し，$(X_n(t_1,\omega),\cdots\cdots X_n(t_n,\omega))$が$n$次元確率ベクトルとして$n$次元確率ベクトル$(X(t_1,\omega),\cdots\cdots X(t_n,\omega))$に法則（確率）収束する事”と定義する。定理の表現には，この定義でよいが，$\{\mathfrak{X}_{n,m}\}$が$m\to\infty$で$\mathfrak{X}_n$に収束し，$\{\mathfrak{X}_n\}$が$\mathfrak{X}$に$n\to\infty$で収束しても，適当な部分列$\{\mathfrak{X}_{n,m_n}\}$が$n\to\infty$で$\mathfrak{X}$に収束するとは限らない。定理の証明のためにはこの事を成立させる必要があり，もう少し強い収束を導入しなければならない。U位相，V位相による収束は，この望ましい性質を持っており，しかも$\{\mathfrak{X}_n\}$が$\mathfrak{X}$にU位相（V位相）で収束すれば$\{\mathfrak{X}_n\}$は$\mathfrak{X}$に法則（確率）収束する。

V位相では$\mathfrak{X}$と$\mathfrak{Y}$は同じ確率空間上で定義されなければならないがU位相では確率法則だけが問題で，$\mathfrak{X}$と$\mathfrak{Y}$は同じ空間上で定義されている必要はない。U位相は正確に云えば確率測度の全体に導入された位相であり，確率過程の言葉を使うならば，確率過程をR^R上に座標表現し，$\mathfrak{Y}\in R^R$のε近傍$U(\varepsilon,\mathfrak{Y})$は(1)を満す$\mathfrak{X}\in R^R$の全体と云うべきだが，定義2.1の表現で混乱はないであろう。$V(\mathfrak{X},\frac{1}{3n^2})$に属する確率過程$\mathfrak{Y}$は$U(\mathfrak{X},\frac{1}{n})$に属するからV位相はU位相より強くなる。又$\mathfrak{Y}$が$\mathfrak{X}$の$\varepsilon$近傍（U又はV位相），$\mathfrak{Z}$が$\mathfrak{Y}$の$\varepsilon'$近傍（U又はV位相）にあれば$\mathfrak{Z}$は$\mathfrak{X}$の$\varepsilon+\varepsilon'$近傍（U又はV位相）に入る。

<u>定義 2.3</u>　確率過程$\mathfrak{X}$が

$$X(t,\omega)=\sum_{p:\text{有限}}\sum_{i_1\cdots i_p} a_{i_1\cdots i_p}\prod_{\nu=1}^{p}\left(B(t+t_{i_\nu},\omega)-B(t+s_{i_\nu},\omega)\right) \qquad (2.3)$$

と表わされるとき，$\mathfrak{X}$をウィナー彷徨測度の多項式と云う意味で多項式過程と云う。

以上の定義を用いると，目的の定理は次の様になる。

<u>定理 2.1</u>　$\mathfrak{X}=\{X(t,\omega),\ -\infty<t<\infty\}$を確率連続，エルゴード的な強定常過程とすれば　U位相の任意の近傍には多項式過程が存在する。

<u>定理 2.2</u>　$\mathfrak{X}$を確率連続な強定常過程とすれば，U位相の任意の近傍には確率連続エルゴード的な強定常過程が存在する。

定理2.1及び2.2により，直ちに

Sem. on Probab.
Vol.10 1961年
P1-103

定理 2.3　$\mathfrak{X}$が確率連続な強定常過程とすれば U 位相の任意の近傍に多項式過程が存在する.

定理 2.3 により, $\mathfrak{X}$が確率連続な強定常過程であれば $\mathfrak{X}$に法則収束する多項式過程の列$\{\mathfrak{X}_n\}$が存在する事がわかる. これが Wiener 多項式近似である.

定理 2.1 の証明は非常に面白い工夫がなされて居る. $\{B(t, \hat{\omega}), -\infty < t < \infty\}$ を可分なブラウン運動とする. 定義されて居る基礎確率空間$\hat{\Omega}$は$\mathfrak{X}$と同一であってもなくてもよい. 座標表現する事により,

$$\hat{\omega} = (\hat{\omega}_t,\ t \in R^1) \in R^{R}.\quad \hat{\omega}_t = B(t, \hat{\omega}) \tag{2.4}$$

としてもよい. *shifted path* $\hat{\omega}_s^+$ はその t 座標が$\hat{\omega}$の$(t+s)$座標になる *path* と定義する. 即ち

$$(\hat{\omega}_s^+)_t = \hat{\omega}_{t+s} \tag{2.5}$$

ブラウン運動より, 確率変数列 $a_n(\hat{\omega})$ を次の様に作る.

$$S(\hat{\omega}) \equiv \{t ;\ |B(t+1, \hat{\omega}) - B(t-1, \hat{\omega})| > 1\}$$

とおけば, 見本過程の連続性より $S(\hat{\omega})$は開集合, 従って互に排反する開区間$\{I_i(\hat{\omega})\}$の可附番和となる. 即ち

$$S(\hat{\omega}) = \bigcup_i I_i(\hat{\omega}),\quad I_i(\hat{\omega}) \cap I_j(\hat{\omega}) = \phi.$$

$$\mathcal{T}_n(\hat{\omega}) \equiv \{ I_i(\hat{\omega}) ;\ |I_i(\hat{\omega})| > n,\ I_i(\hat{\omega}) \subset (-n, \infty) \}$$

$$S_n(\hat{\omega}) \equiv \bigcup_{I_i \in \mathcal{T}_n(\hat{\omega})} I_i(\hat{\omega})$$

Lemma 2.1　殆んどすべての$\hat{\omega}$に対し, $S_n(\hat{\omega}) \neq \phi$　$(n \geq 3)$

証明　$f(\hat{\omega})$を$B(dB)$[1]-可測な可積分確率変数とすればブラウン運動のエルゴード性より

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(\hat{\omega}_t^+)\, dt = E(f(\hat{\omega})) \tag{2.6}$$

但, 殆んどすべてのωに対し $(f(\omega_t^+)$ は t の可測函数である. 何故ならば適当な有限次元 Borel 函数$\{\varphi_n\}$に対し

$$f(\hat{\omega}) = (L_1) \lim_n \varphi_n(B(t_i, \hat{\omega}) - B(S_i, \hat{\omega}),\ i = 1 \cdots n)$$

---

(1)　ウィナー仿標測度dB はブラウン運動の増分により作られたもの.

Sem. on Probab.
Vol.10 1961年
P1-103

となるが，定常性より $f(\tilde{\omega}_t^+)-\varphi_n(B(t_i+t,\tilde{\omega})-B(S_i+t,\tilde{\omega})\ i=1\cdots n)$ の確率法則は t に無関係となる．故に部分列 $n_1<n_2\cdots\to\infty$ を

$$E|f(\tilde{\omega})-\varphi_{n_k}(B(t_i,\tilde{\omega})-B(S_i,\tilde{\omega}),\ i=1\cdots n)|<\frac{1}{2^k}$$

なる様にえられば，任意の t に対し

$$f(\tilde{\omega}_t^+)=\lim_{k\to\infty}\varphi_{n_k}(B(t_i+t,\tilde{\omega})-B(S_i+t,\tilde{\omega}))\qquad(\text{概収束})$$

故にフビニーの定理により，殆んどすべての $\tilde{\omega}$ に対し，
殆んどすべての t に対し $f(\tilde{\omega}_t^+)=\lim_{k\to\infty}\varphi_{n_k}((B(t_i+t,\tilde{\omega})-B(S_i+t,\tilde{\omega}))$
故に $f(\tilde{\omega}_t^+)$ は t の可測函数となる．

さて $f(\tilde{\omega})=\begin{cases}1 & \{\tilde{\omega};|B(t+1,\tilde{\omega})-B(t-1,\tilde{\omega})|>1,\ 0\le t\le n,\ |B(-n+1,\tilde{\omega}) \\ & -B(-n-1,\tilde{\omega})|\leq 1\}\ \text{上で} \\ 0 & \text{その他}\end{cases}$

とおけば $f(\tilde{\omega})$ に対し，(6) は成立する．更に $f(\tilde{\omega}_t^+)=1$ ならば $t\in S_n(\tilde{\omega})$ に注意すれば，殆んどすべての $\tilde{\omega}$ に対し

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}|(S_n(\tilde{\omega})\cap(-n,-n+T)|\ge\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-n}^{n+T}f(\omega_t^+)\,dt$$

$$=E\{f(\tilde{\omega})\}=P\{|B(t+1,\tilde{\omega})-B(t-1,\tilde{\omega})|>1,\ 0\leq t\leq n,\ |B(-n+1,\tilde{\omega})-B(-n-1,\tilde{\omega})|<1\}$$

$n\ge\varepsilon$ ならば，独立性より

$$=P(|B(t+1,\tilde{\omega})-B(t-1,\tilde{\omega})|>1,\ 0\leq t\leq n)\,P\{|B(-n+1,\tilde{\omega})-B(-n-1,\tilde{\omega})|\leq 1\}\qquad(2.7)$$

$$A\equiv\{\tilde{\omega};|B(t+2,\tilde{\omega})-B(t,\tilde{\omega})|>1,\ 0\leq t\leq n).$$

とおけば

$$A\supset\bigcap_{\nu=0}^{n-1}\{\tilde{\omega};2\nu-2<B(t,\tilde{\omega})-B(0,\tilde{\omega})<2\nu+1,\ \nu\leq t\leq\nu+1\}\qquad(2.8)$$

所が (8) の右辺の確率はブラウン運動の性質より正である．故に $P(A)>0$．
故に (7) の等式の最后の値は正である．この事は $n\geqq 3$ の時，殆んどすべての $\tilde{\omega}$ に対し，$S_n(\tilde{\omega})\neq\phi$ を示す． QED

<u>定義 2.4</u>　$a_n(\tilde{\omega})=\begin{cases}n+\inf(t;t\in S_n(\tilde{\omega})). & \text{if } S_n(\tilde{\omega})\neq\phi \\ \infty & \text{if } S_n(\tilde{\omega})=\phi\end{cases}$

即ち，確率変数 $a_n(\tilde{\omega})-n$ は time lag ± 1 のブラウン運動の差の絶対

Sem. on Probab.
Vol.10 1961年
P1-103

値が 1 をこえることが時刻 $-n$ 以後で，n 時間続き始めた最初の時刻を表わす．Lemma 2.1 により，$a_n(\hat{\omega})$ は確率 1 で $[0, \infty)$ の値をとる．

次に $a_n(\hat{\omega})$ の確率法則に関して，二つの Lemma を証明する．

<u>Lemma 2.2</u>　$a_n(\hat{\omega})$ の確率密度函数 f_n は

$$C_y(t) = \begin{cases} \frac{1}{y} & 0 \leq t \leq y \\ 0 & t > y \end{cases} \tag{2.9}$$

の convex 結合で表わされる．即ち $f_n(t) = \int_0^\infty C_y(t) d\sigma_n(y)$．　(2.10)

且　$d\sigma_n(y) = y[-df_n(y)]$　(2.11)

<u>證明 1</u>　$a_n(\hat{\omega})$ の定義より "$a_n(\hat{\omega}) = t$" となる必要十分条件は

"$0 \leq t \leq n$ の時　$t-n \notin S(\hat{\omega})$．$(t-n, t] \subset S(\hat{\omega})$　(2.12)

$t > n$ の時　$t-n \notin S(\hat{\omega})$　$(t-n, t] \subset S(\hat{\omega})$．$(-n, t-n) \cap S_n(\hat{\omega}) = \phi$　(2.13)"

$0 \leq t \leq n$ の時は "$t-n \notin S(\hat{\omega})$" より "$(-n, t-n) \cap S_n(\hat{\omega}) = \phi$" となる．

$s > 0$，$t \geq 0$，$t'+s \leq n$ に対し，(2.12)を用いると

$$P(a_n(\hat{\omega}) \in (t+s, t'+s)) = P({}^{\exists}h \in (t+s, t'+s);\ h-n \notin S(\hat{\omega}).\ (h-n, h] \subset S(\hat{\omega}))$$

$$= P({}^{\exists}h \in (t, t');\ h-n \notin S(\hat{\omega}_s^+).\ (h-n, h] \subset S(\hat{\omega}_s^+))$$

ブラウン運動の差の定常性より

$$= P({}^{\exists}h \in (t, t');\ h-n \notin S(\hat{\omega}).\ (h-n, h] \subset S(\hat{\omega})) = P(a_n(\hat{\omega}) \in (t, t')) \tag{2.14}$$

一方 $s > 0$，$t \geq 0$，$t'+s \geq n$ に対し，(2.13)を用いると

$$P(a_n(\omega) \in (t+s, t'+s)) = P({}^{\exists}h \notin (t+s, t'+s);\ h-n \notin S(\hat{\omega}).\ (h-n, h] \subset S(\hat{\omega}).\ (-n, h-n) \cap S_n(\hat{\omega}) = \phi)$$

$$= P({}^{\exists}h \in (t, t');\ h-n \notin S(\hat{\omega}_s^+).\ (h-n, h] \subset S(\tilde{\omega}_s^+).\ (-n-s, h-n) \cap S_n(\tilde{\omega}_s^+) = \phi)$$

$$\leq P({}^{\exists}h \in (t, t');\ h-n \notin S(\hat{\omega}_s^+).\ (h-n, h] \subset S(\hat{\omega}_s^+).\ (-n, h-n) \cap S_n(\tilde{\omega}_s^+) = \phi)$$

$$= P(a_n(\hat{\omega}) \in (t, t')) \tag{2.15}$$

(2.14) 及び (2.15) により，$a_n(\hat{\omega})$ の確率法則はルベーグ測度に関し絶対連続で，しかも $(0, n]$ 上では一様，(n, ∞) 上では単調減少する事がわかる．

2.　$a_n(\omega)$ の確率密度函数 f_n は非負，非増加且可積分函数であることより　$f_n(y) = o\left(\frac{1}{y}\right)$　$(y \to \infty)$　故に

Sem. on Probab.
Vol.10 1961年
P1-103

$$f_n(t)=\int_t^\infty -df_n(y)=\int_0^\infty C_y(t)y(-df_n(y))$$

且. $\int_0^\infty y(-df_n(y))=-yf_n(y)\Big|_0^\infty+\int_0^\infty f_n(y)dy=1$ Q.E.D.

<u>Lemma 2.3</u> 任意の正なる ℓ, ε に対し $n>\frac{2\ell}{\varepsilon}$ ならば

$$P(a_n(\hat{\omega}_s^+)=a_n(\hat{\omega})-s,\ -\ell\leq s\leq \ell)>1-\varepsilon \tag{2.16}$$

<u>證明</u> $S(\hat{\omega}_s^+)=S(\hat{\omega})-s$ に注意すれば次の同値関係が得られる.

$s\geq 0$ の時 "$a_n(\hat{\omega}_s^+)=t$"

$\Leftrightarrow$ "$t-n\notin S(\hat{\omega}_s^+),\ (t-n,t]\subset S(\hat{\omega}_s^+),\ (-n,t-n)\cap S_n(\hat{\omega}_s^+)=\phi$"

$\Leftrightarrow$ "$t-s-n\notin S(\hat{\omega}),\ (t+s-n,t+s]\subset S(\hat{\omega}),\ (-n+s,t+s-n)\cap S_n(\hat{\omega})=\phi$"

一方 "$a_n(\hat{\omega})=t+s$"

$\Leftrightarrow$ "$t+s-n\notin S(\hat{\omega}),\ (t+s-n,t+s]\subset S(\hat{\omega}),\ (-n,t+s-n)\cap S_n(\hat{\omega})=\phi$"

故に "$a_n(\hat{\omega}_s^+)=a_n(\hat{\omega})-s$" $\Leftrightarrow$ "$(-n,-n+s)\cap S_n(\hat{\omega})=\phi$"

$$\Leftrightarrow \text{"}a_n(\hat{\omega})\geq s\text{"} \tag{2.17}$$

更に(2.17)より $s>s'>0$ に対し 若し"$a_n(\hat{\omega}_s^+)=a_n(\hat{\omega})-s$" が成立するならば "$a_n(\hat{\omega}_{s'}^+)=a_n(\hat{\omega})-s'$" となる.

$s<0$ のとき $u=-s$ とおけば, $\hat{\omega}=(\hat{\omega}_{-u}^+)_u^+$, $\hat{\omega}_s^+=\hat{\omega}_{-u}^+$

$s>0$ の時の結果を $\hat{\omega}$ の代りに $(\hat{\omega}_{-u}^+)$ に用いると (2.17) より

"$a_n(\hat{\omega})=a_n(\hat{\omega}_{-u}^+)-u$" $\Leftrightarrow$ "$(-n,-n+u)\cap S_n(\hat{\omega}_{-u}^+)=\phi$"

$$\Leftrightarrow \text{"}a_n(\hat{\omega}_{-u}^+)-u\text{"} \tag{2.18}$$

所が $s<s'<0$ に対し, $(S(\hat{\omega})-s)\cap(-n,\infty)\supset(S(\hat{\omega})-s')\cap(-n,\infty)$. により

$$S_n(\hat{\omega}_s^+)\supset S_n(\hat{\omega}_{s'}^+) \tag{2.19}$$

故に(18), (19)により "$a_n(\hat{\omega}_s^+)=a_n(\hat{\omega})-s$" が成立するならば "$a_n(\hat{\omega}_{s'}^+)=a_n(\hat{\omega})-s'$"

以上の事を合わせると

Sem. on Probab.
Vol.10 1961年
P1-103

$$P\ (a_n(\hat{\omega}_s^+)=a_n(\hat{\omega})-s \quad -\ell\le s\le \ell)$$

$$=P\ (a_n(\hat{\omega}_\ell^+)=a_n(\hat{\omega})-\ell,\ \ a_n(\hat{\omega}_{-\ell}^+)=a_n(\hat{\omega})+\ell)$$

$$\ge 1-P(a_n(\hat{\omega}_\ell^+)\ne a_n(\hat{\omega})-\ell)-P(a_n(\hat{\omega}_{-\ell}^+)\ne a_n(\hat{\omega})+\ell)$$

$$=1-P(a_n(\hat{\omega})\le \ell)-P(a_n(\hat{\omega}_{-\ell}^+)\le \ell)$$

Lemma 2.2 より $\ge 1-2\dfrac{\ell}{n}$ QED

Lemma 2.4 $a_n(\hat{\omega}_s^+)$ は $(s,\hat{\omega})$ = 変数の可測函数

証明 固定した s に対し，$a_n(\hat{\omega}_s^+)$ が $\hat{\omega}$ の可測函数であることは明，連続な見本過程 $\hat{\omega}$ に対しては $S(\hat{\omega})$ が閉集合の事より "$a_n(\hat{\omega})=t$" のとき充分小さな $h>0$ ($\hat{\omega}$ に依存する) に対し，"$a_n(\hat{\omega}_{s-h}^+)$ に $t+h$" となる故に左連続な函数となる．故に $(s.\omega)$-可測である．

Lemma 2.2 及び 2.3 は確率過程 $\{a_n(\hat{\omega}_s^+),\ -\infty<s<\infty\}$ が $n\to\infty$ で，乱暴な表現であるが，次の性質を持つ確率過程 $\{a(t.\hat{\omega}),\ -\infty<t<\infty\}$ となる事を意味する．

"$a(0.\hat{\omega})$ は $(0.\infty)$ 上の一様分布に従い，$a(t.\hat{\omega})=a(0.\hat{\omega})-t$"

こゝで定理 2.1 の證明を略述すれば，次の様になる．ω_0 をエルゴード性を持つ見本過程とする時，$Y(t.\hat{\omega})\equiv X(-a(t.\hat{\omega}).\ \omega_0)$ とおけば

$$E(e^{i\Sigma\theta_j Y(t_j\ \hat{\omega})})=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^t e^{i\Sigma\theta_j X(t_j-s.\ \omega_0)}ds=E(e^{i\Sigma\theta_j X(t_j\ .\ \omega)})$$

$Y(t.\hat{\omega})$ はウィナー彷徨測度の汎函数である事にも注意すれば，重複ウィナー積分による展開を利用して，多項式過程が作れる．

$\mathfrak{X}=\{X(t.\omega),\ -\infty<t<\infty\}$ を Ω 上に与えられた確率連続エルゴード的な強定常過程とする．これに対し

$$P(X(t.\omega)=Y(t.\omega))=1 \qquad -\infty<t<\infty$$

なる可測過程 $\mathfrak{Y}$ の存在する事が知られている。$\mathfrak{Y}$ を切って

$$Y_N(t.\omega)=\begin{cases} Y(t.\omega) & |Y(t.\omega)|\le N \\ 0 & |Y(t.\omega)|>N \end{cases}$$

確率過程 $\mathfrak{Y}_N$ を作れば，平均連続エルゴード的な強定常過程で

$\mathfrak{Y}_N\to\mathfrak{Y}$ (V-位相) となる．

更に平均して

Sem. on Probab.
Vol.10 1961年
P1-103

$$Z_{M.N}(t.\omega)=\frac{M}{2}\int_{\frac{1}{M}}^{\frac{1}{M}} Y_N(t+s.\omega)ds$$

とおけば，確率過程 $Z_{M,N}$ は $M\longrightarrow\infty$ で Y_N に V 位相で收束する．$Z_{M.N}$ はエルゴード性，強定常性の他に次の一様連続性を持つ．

$$|Z_{M.N}(t+h.\omega)-Z_{M.N}(t.\omega)|\leq M.Nh. \qquad (2.20)$$

$Z_{M.N}$ に対し、定理 2.1 の成立を云えば十分の為，与えられた X が次の性質を持つとしても制限にはならない．

(X1) エルゴード的な強定常過程

(X2) 一様有界性 $|X(t.\omega)|\leq K$ 　 K は $(t.\omega)$ に無関係

(X3) 一様連続性 $|X(t.\omega)-X(s.\omega)|\leqslant C|t-s|$ 　C は $(t.\omega)$ に無関係

$$\rho_T(\theta_1,\cdots\theta_n,\ t_1\cdots t_n\ \omega)=\frac{1}{T}\int_{-T}^{0} e^{i\sum_{j=1}^{n}\theta_j X(t_j+t\,\omega)}dt \qquad (2.21)$$

とおけば，殆んどすべての ω に対し

$$|\rho_T(\theta_1,\cdots\theta_n\ \ t_1,\cdots t_n.\ \omega)-\rho_T(\lambda_1,\cdots\lambda_n\ \ r_1,\cdots r_n.\ \omega)|$$

$$\leqslant\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{T}\int_{-T}^{0}\left|e^{i\theta_j(X(t_j+t.\omega)-X(r_j+t.\omega))}-1\right|dt+\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{T}\int_{-T}^{0}\left|e^{i(\theta_j-\lambda_j)X(r_j+t.\omega)}-1\right|dt \qquad (2.22)$$

右辺の各項を計算すれば

$$\frac{1}{T}\int_{-T}^{0}\left|e^{i\theta[X(t+s+h.\omega)-X(t+s.\omega)]}-1\right|dt$$

$$\leqslant\frac{1}{T}\int_{-T}^{0}4\sin^2\left\{\frac{\theta}{2}(X(t+s+h.\omega)-X(t+s.\omega))\right\}dt$$

$$\leqslant\frac{\theta^2}{T}\int_{-T}^{0}|X(t+s+h.\omega)-X(t+s.\omega)|^2dt\leq\theta^2C^2h^2 \qquad (2.23)$$

$$\frac{1}{T}\int_{-T}^{0}\left|e^{i(\theta-\lambda)X(t\,\omega)}-1\right|dt\leq\frac{(\theta-\lambda)^2}{T}\int_{-T}^{0}X(t\,\omega)dt\leq(\theta-\lambda)^2K^2 \qquad (2.24)$$

(2.22)(2.23) 及び (2.24) により

<u>Lemma 2.5</u>　任意の $\varepsilon>0$ に対し次の条件を満す $\delta(\varepsilon)$ が存在する．

$n,|\theta_i|,|\lambda_i|,|t_i|,|r_i|<\frac{1}{\varepsilon}$ 　且 $|\theta_i-\lambda_i|,\ |t_i-r_i|<\delta(\varepsilon)$

Sem. on Probab.
Vol.10 1961年
P1-103

ならば、任意のTに対し

$$|\rho_T(\theta_1,\cdots\theta_n,t_1,\cdots t_n\ \omega)-\rho_T(\lambda_1,\cdots\lambda_n,\gamma_1,\cdots\gamma_n\ \omega)|<\varepsilon \qquad (2\cdot25)$$

がすべてのωに対し成立する。

所が$\mathfrak{X}$のエルゴード性より、殆んどすべてのωに対し

"任意の正整数nと任意の有理数$\{\lambda_i\}\{\gamma_i\}$に対し

$$\lim_{T\to\infty}\rho_T(\lambda_1,\cdots\lambda_n,\gamma_1,\cdots\gamma_n\ \omega)=E\,e^{i\sum_{j=1}^{n}\lambda_j(\gamma_j\,\omega)}\text{"} \qquad (2\cdot26)$$

$(2\cdot26)$を満すωを固定し、ω_0とする。$(2\cdot26)$の等式の右辺が$(\lambda_1\cdots\lambda_n\ \gamma_1,\cdots\gamma_n)$の連続函数、従って有界閉集合上で一様連続、である事に注意すれば $Lemma$ 2-5より

<u>$Lemma$ 2·6</u> 任意の$\varepsilon>0$に対し、次の条件を満す$T_0(\varepsilon)$が存在する。$T>T_0(\varepsilon)$ならば

"任意のn・$|\theta_i|$ $|t_i|<\frac{1}{\varepsilon}$ に対し

$$|\rho_T(\theta_1\cdots\theta_n\ t_1\cdots t_n\ \omega_0)-E\,e^{i\sum_{j=1}^{n}\theta_j\,x(t_j\,\omega)}|<\varepsilon\text{"} \qquad (2\cdot27)$$

即ち$(2\cdot6)$を満すωに対し、実数$\{\theta_j\}\{t_j\}$に対しても$(2\cdot26)$の等式は成立する。

$a_k(\omega^*)$を用いてΩ^*上に確率過程Y_kを次の様に定義する。

$$Y_k(t\ \omega^*)=X(-a_k(\omega^*\,t)\ \omega_0) \qquad (2\cdot28)$$

$X(t,\omega)$はtにつきボレル函数(もっと強く連続函数)の為 $Lemma$ 2·4より$Y_k(t\,\omega^*)$は$(t\,\omega^*)$-可測である。

<u>$Lemma$ 2·7</u> $\{Y_k\}$は$k\to\infty$で$\mathfrak{X}$にU位相で収束する。

<u>證明</u> $(Y_k(t_1\,\omega^*),\cdots Y_k(t_n\,\omega^*))$の特性函数を計算すれば

$$E\,e^{i\sum_{j=1}^{n}\theta_j Y_k(t_j\,\omega^*)}=E\,e^{i\sum_{j=1}^{n}\theta_j\,x(-a_k(\omega^*_{t_j}),\,\omega_0)}$$

$$=E\,e^{i\sum_{j=1}^{n}\theta_j\,x(t_j-a_k(\omega^*)\ \omega_0)}+\varepsilon(k,\theta_1\cdots\theta_n\ t_1\cdots t_n)$$

$Lemma$ 2·2 より

$$=\int_k^\infty d\sigma_k(T)\frac{1}{T}\int_0^T e^{i\Sigma\theta_j\,x(t_j-S\ \omega_0)}dS+\varepsilon(k,\theta_1\cdots\theta_n t_1\cdots t_n)$$

$$=\int_k^\infty d\sigma_k(T)\,\rho_T(\theta_1\cdots\theta_n.\ t_1\cdots t_n.\ \omega_0)+\varepsilon(k,\theta_1\cdots\theta_n\ t_1\cdots t_n) \qquad (2\cdot29)$$

Sem. on Probab.
Vol.10 1961年
P1-103

Lemma 2.3に於て εを$\frac{\varepsilon}{2}$, lを$\frac{1}{4\varepsilon}$ とすれば$|t_i|<\frac{1}{4\varepsilon}$ $i=1\cdots n$

$k>\frac{1}{\varepsilon^2}$ に対し

$$|\mathcal{E}(k, \theta_1\cdots\theta_n;\ t_1\cdots t_n)|<\frac{\varepsilon}{2} \tag{2.30}$$

一方 *Lemma* 2.6により, n, $|\theta_j|$, $|t_j|<\frac{1}{\varepsilon}$, 且 $k>T_0\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ ならば

$$\int_k^\infty d\sigma_k(T)\left|\rho_T(\theta_1\cdots\theta_n\ t_1\cdots t_n, \omega_0)-Ee^{i\sum_{j=1}^n\theta_j x(t_j\,\omega)}\right|<\frac{\varepsilon}{2} \tag{2.31}$$

(2.29)(2.30)及び(2.31)により $k>\max_n\left(T_0\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), \frac{1}{\varepsilon^2}\right)$ ならば

"n, $|\theta_j|$ $|t_j|<\frac{1}{\varepsilon}$に対し

$$\left|Ee^{i\sum\theta_j Y_k(t_j\ \omega^*)}-Ee^{i\sum_{j=1}^n\theta_j x(t_j\ \omega)}\right|<\varepsilon\text{"} \tag{2.32}$$

Q.E.D

$Y_k(t, \omega^*)$を用いて目的の多項式過程を作るのは次の様にする. $Y_k(0, \omega^*)$はウィナー彷徨測度のL^2-孔函数になっているため重複ウィナー積分で展開できる. 故に適当な $\{a_{i_1\cdots i_p}\ t_i\cdots S_i\}$ に対し

$$E\left|Y_k(0\ \omega^*)-\sum_p\sum_{i_1\cdots i_p}a_{i_1\cdots i_p}\prod_{\nu=1}^p(B(t_{i_\nu}, \omega^*)-B(S_{i_\nu}, \omega^*))\right|^2<\varepsilon \tag{2.33}$$

dBの定常性により

$$E\left|Y_k(t\ \omega^*)-\sum_p\sum_{i_1\cdots i_p}a_{i_1\cdots i_p}\prod_{\nu=1}^p(B(t_{i_\nu}+t, \omega^*)-B(S_{i_\nu}, \omega^*))\right|^2<\varepsilon \tag{2.34}$$

即ちY_kは多項式過程によりV位相, 従ってU位相, で近似できる. これにより定理2.1は成立する.

定理2.2の證明には強定常過程の代りに, それより引起される保測変換を用いる. Xが与えられた確率連続な強定常過程とする時, 定理2.1の證明と同様, Xは(X.2)(X.3)を満すとしても制限にはならない. Xを座標表現する事により, 基礎確率空間を

$$\Omega=\{\omega:\ \omega\in R^R,\ |x(t\omega)|\le K, |x(t,\omega)-x(S,\omega)|\le C|S-t|\} \tag{2.35}$$

各座標を可測とするボレル集合体$\mathcal{B}$, とし, その上に推移変換 T_t を$(T_t\,\omega)_s=\omega_{t+s}$ と定義する. Xの条件より

$T_t\,\Omega=\Omega$

Sem. on Probab.
Vol.10 1961年
P1-103

一点集合は$\mathcal{B}$に属するが、Ωの中に正の確率を持つ点は高々可附番しかない。それをω_i $i=1,2\cdots$ とすれば ω_i は常数函数である。

∵ 若し $X(0,T_t\omega_i)\neq X(0,\omega_i)$ なるtが存在すれば連続性(X3)より $\{T_t\omega_i,\ -\infty<t<\infty\}$ の中に互に異なる点が無限ケなければならない。これはT_t が保測変換の為 $P(\Omega)=1$ に反する。即ち$X(0,\omega_i)=X(t,\omega_i)$.

測度空間Ω_1 $(\mathcal{B}_1,P_1)$ を次の様に定義する。

$$\Omega_1=\Omega \qquad \mathcal{B}_1=\mathcal{B} \qquad P_1(E)=P(E\cap\Omega_2^c) \tag{2.36}$$

但し $\Omega_2=\bigcup_{i=1}^{\infty}\omega_i$

即ち Ω_1はΩを non-atomic な測度空間としたものである。

Ω_1 の中に次の様に距離ρを定義する。

$$\rho(\omega,\omega')=\max_{-n\leq t\leq n}|X(t,\omega)-X(t,\omega')| \tag{2.37}$$

$$\rho(\omega,\omega')=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\rho_n(\omega,\omega')}{2^n} \tag{2.38}$$

即ちρは広義一様収束を与える位相を定める。ρによりΩ_1は可分な完備距備距離空間となる。

$$E_j=\{\omega;X(r_i,\omega)\leq c_j\}$$

但 r_i 有理数 $\{c_j\}$ は$[-K,K]$ の稠密な点で

$$P(X(0)=c_j)=0 \tag{2.39}$$

(2.39) よりすべてのtに対し、定常性を用いると、

$$P(X(t)=c_j)=0 \tag{2.40}$$

又E_{ij}^c は閉集合であるが (2.39) より

$$P(E_{ij}^c)=P(\overline{E_{ij}^c}) \tag{2.41}$$

$\{E_{ij}\}$は適当に番号をつけ $E_1,E_2\cdots$ とする。条件(X3)より $\mathcal{B}_1=\mathcal{B}\{E_i\ \ i=1,2\cdots\}$ となる。$P(\Omega_2^c)=m$ とすれば $P_1(\Omega_1)=m$.
Ω_1 より$[0,m]$ 上への保測な set transfomation Φを次の様に定義する。

$$\Phi(E_1)=(0,P_1(E))\equiv I_1 \qquad \Phi(E_1^c)=(P_1(E_1),m)\equiv I_2$$

Sem. on Probab.
Vol.10 1961年
P1-103

$\Phi(E_1\cap E_2)=(0, P_1(E_1\cap E_2))\equiv I_{1.1}$, $\Phi(E_1\cap E_2^c)=(P_1(E_1\cap E_2), P_1(E_1))\equiv I_{1.2}$

$\Phi(E_1^c\cap E_2)=(P_1(E_1), P_1(E_1)+P_1(E_1\cap E_2^c))\equiv I_{2.1}$, $\Phi(E_1^c\cap E_2^c)\equiv(P_1(E_1)+P_1(E_1\cap E_2^c), m)\equiv I_{2.2}$

$\Phi(E_1\cap E_2\cap E_3)\equiv(0, P_1(E_1\cap E_2\cap E_3))\equiv I_{1.1.1}$ etc. (2.42)

E_i' を E_i 又は $\bar{E}_i^c$ とすれば $\{\bigcap_{i=1}^{n} E_i'\}$ は n に関して単調減少な閉集合列となる。

すべての n に対し $P_1(\bigcap_{i=1}^{n} E_i')>0$ ならば $\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i'$ は Ω_1 の一点を定める。

∵ すべての n に対し $\bigcap_{i=1}^{n} E_i'\neq\phi$ の為、閉集合である事を考えると $\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i'\neq\phi$. $dia(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i')^{(1)}>0$ とすれば $(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i')$ の中に異なる二点 ω, ω' が存在する。故に条件(X3)より 或る γ_i ς_j に対し

$$X(\gamma_i\ \omega)\underset{(>)}{<}\varsigma_j \qquad X(\gamma_i\ \omega')\underset{(<)}{>}\varsigma_j \quad ^{(2)} \qquad (2.43)$$

これは ω, ω' が或る E_i に対し $\omega\in E_i^c$ $\omega'\in E_i-(E_i\cap\bar{E}_i^c)$. を意味する。故に $\omega, \omega'\in\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i'$ と矛盾する i.e. $dia(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i')=0$

$$\mathfrak{A}_n=\{\bigcap_{i=1}^{n} E_i' \ ;\ P(\bigcap_{i=1}^{n} E_i')=0 \quad P_1(\bigcap_{i=1}^{n-1} E_i')\neq 0\} \qquad (2.44)$$

とおけば $\mathfrak{A}_n$ は有限ヶの集合より成る集合系で

$$P_1(\bigcup_{A_n\in\mathfrak{A}_n} A_n)=0 \qquad (2.45)$$

故に

$$P_1(\bigcup_{n}\bigcup_{A_n\in\mathfrak{A}_n} A_n)=0 \qquad (2.46)$$

$$\mathfrak{A}=\{\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i' \ ;\ \exists n,\ \bigcap_{i=1}^{n} E_i'\in\mathfrak{A}_n\}$$

とおけば (2.46) より

$$P_1(\bigcup_{A\in\mathfrak{A}} A)=0$$

$\{I_1, I_2, I_{11}, I_{12}, ---- I_{i_1 i_2 --- i_n} ---\}$ の境界点の全体を B とすれば $|B|=0$. $x\notin B$ ならば、x を内点として含む様な $\bar{I}_{i_1}, \bar{I}_{i_1,i_2}, \bar{I}_{i_1,i_2,i_3}$ --- が存在する。$\{\bar{I}_{i_1 i_2 \cdots i_n}\}$ は単調減少な閉区間列且 $E_1'=\Phi^{-1}(I_{i_1})$, $E_1'\cap E_2'=\Phi^{-1}(I_{i_1,i_2})$, ---- とすれば

---

(1) $dia(A)=\sup_{\omega,\omega'\in A}\rho(\omega,\omega')$

(2) $X(\gamma_j\omega)<\varsigma_j$, $X(\gamma_j\omega')>\varsigma_j$. 又は $X(\gamma_j\omega)>\varsigma_j$ $X(\gamma_j\omega')<\varsigma_j$ の意味

Sem. on Probab.
Vol.10 1961年
P1-103

$$\left|\bar{I}_{i_1,\cdots i_n}\right| = P_1\left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i'\right) \longrightarrow 0$$

故に $I_{i_1,\cdots i_n} \longrightarrow x$

$x \in B$ に対し上の様な $I_{i_1}, I_{i_1, i_2}\cdots$ 又 $\bigcap_{i=1}^{n} E_i'$ は一意的に定まる故 x に $\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i'$ なる ω を対応させる事により $(0, m] - B$ より $\Omega_1 - \bigcup_{A\in\mathfrak{A}} A$ の中への対応 φ が定義できる. 一方

$$C = \{\omega\,;\ {}^{\exists} r_i\ c_j,\ X(r_i, \omega) = c_j\}$$

とすれば $C \subset \bigcup_{r_i, c_j} \{\omega\,;\ X(r_i\ \omega) = c_j\}$ 　故に $P(C) = 0$.

ω の連続性より ω を含む $\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i'$ (実は $\omega = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i'$) は $\omega \notin C$ に対しては一意的に定まる故[(1)] $D = \{x\,;\ \varphi(x) \in C\}$ とおけば, φ を $(0, m] - m - D (\equiv R)$ に制限すれば $\Omega_1 - \bigcup_{A\in\mathfrak{A}} A - C$ への $1:1$ 対応を与える. 又, 作り方より φ が保測な事は明である. Ω より $(0, 1)$ への保測変換 ψ を次の様に定義する

$$\psi\omega = \varphi^{-1}\omega, \quad \omega \in \Omega - \bigcup_{i=1}^{\infty}\{\omega_i\} - \bigcup_{A\in\mathfrak{A}} A - C\ (\equiv \Omega_1')$$

$$\psi\omega_i = \left(m + \sum_{j=1}^{i-1} p_j\ \ m + \sum_{j=1}^{i} p_j\right) \qquad i = 1, 2 \cdots\cdots$$

但 $p_j = P(\omega_j)$

$(0, 1)$ より $(0, 1)^2$ 上への $1:1$ 保測変換 ν は、例えばペアノ曲線を利用して, 作り得る.

$$F(\hat{\omega}) \equiv \begin{cases} X(0, \psi^{-1}\nu^{-1}\hat{\omega}) & \hat{\omega} \in \nu R_1 \cap (0, 1)^2 \\ X(0,\ \omega_i) & \hat{\omega} \in \nu\left(m + \sum_{j=1}^{i-1} p_j,\ \sum_{j=1}^{i} p_j\right) \cap (0, 1)^2 \\ 0 & \text{その他} \end{cases} \qquad (2.47)$$

$$\widetilde{T}_h\hat{\omega} = \begin{cases} \nu\psi T_h \varphi^{-1}\nu^{-1}\hat{\omega} & \hat{\omega} \in \nu\psi(\Omega_1' \cap T_h\Omega_1') \cap (0, 1)^2\ {}^{(2)} \\ \tilde{\omega} & \text{その他} \end{cases} \qquad (2.48)$$

(即ち $\widetilde{T}_h$ は $\mathfrak{X}$ を $(0, 1)^2$ 上で表わした時の推移変換を表わす)

とおけば $\{F(\widetilde{T}_h^{k}\hat{\omega})\ k = 0, \pm 1\cdots\cdots\}$ は $\{X(kh\ \omega)\ k = 0 \pm 1\cdots\cdots\}$ と同じ確率法則を持つ $(0, 1)^2$ 上の確率系列となる.

Halmos に従って $(0, 1)^2$ 上の保測(実)変換 S に

---

(1) $E_k = \{\omega\,;\ (r_i, \omega) \leqq c_j\}$ とすれば $X(r_i\ \omega) = c_j$ なる ω は $\omega\in$ は $\omega \in E_k$ $\omega \in \bar{E}_k^c$ と二通りに表わせる.

(2) $\psi(A) \equiv \{\psi(x),\ \ x \in A\}$

Sem. on Probab.
Vol.10 1961年
P1-103

$$N(S)=N(S.E.\varepsilon)=\{T;|SE\sim TE|<\varepsilon\}\qquad E\in\mathcal{B}$$

をsubbaseとする近傍を導入する. $\left(\frac{i}{2^n},\frac{i+1}{2^n}\right)\times\left(\frac{j}{2^n}\ \frac{j+1}{2^n}\right)$ の形の二次元集合を次数 n の diadic square と呼ぶ diadic square を同じ次数の diadic square に写す 1:1 保測変換[1]を permutation. 更に次数 n の diadic square を一つの cycle を作りながら写す permutation を次数 n の cyclic permutation (全体で一つの cycle しかない) と呼ぶ.

Lemma 2·8[2] (Halmos) 任意の近傍は任意に高い次数の cyclic permutation を含む.

このLemma を用いて定理 2.2 を證明する.

$$f(\cdot)=\sum_{ij=0}^{2^M-1}a_{ij}\,\chi_{A_{ij}}(\cdot)\qquad A_{ij}=\left(\frac{i}{2^M}\ \frac{i+1}{2^M}\right)\times\left(\frac{j}{2^M}\ \frac{j+1}{2^M}\right)\qquad(2\cdot49)$$

なる形の階段函数を次数 M の diadic step function と云う(次数は表現の仕方に関する) 任意の可測函数 ($(0,1)^2$ 上の) f に対し, 次の条件を満す diadic step function の列 $\{f_n\}$ が存在する.

$$|\widetilde{\omega};|f_n(\widetilde{\omega})-f(\widetilde{\omega})|>\frac{1}{n}|<\frac{1}{n}\qquad(2\cdot50)$$

$\widetilde{T}_h$ の保測性より, 任意の整数 k に対し

$$|\widetilde{\omega};|f_n(\widetilde{T}_h^k\,\widetilde{\omega})-f(\widetilde{T}_h^k\,\widetilde{\omega})|>\frac{1}{n}|<\frac{1}{n}\qquad(2\cdot51)$$

$f(\widetilde{\omega})$ として (2·47) で定義された $F(\widetilde{\omega})$ を取れば, 連続性 (X3) より "$|h|\leq\frac{1}{2nc}$ なる任意の h に対し

$$|\widetilde{\omega};|f_n(\widetilde{T}_n\,\widetilde{\omega})-f_n(\widetilde{\omega})|>\frac{3}{n}|<\frac{1}{n}\text{''}\qquad(2\cdot52)$$

記号を簡単にするため n を任意に固定して $\delta\equiv\frac{1}{2nc}$, $T\equiv\widetilde{T}_\delta$ $g\equiv f_n$ $m=2n^2c$ とおく. 更にこの證明の終りまで $(0,1)^2$ 上で考える為 ルベーグ空間 $(0,1)^2$ を基礎確率空間 $\widehat{\Omega}(\widehat{\mathcal{B}},\widehat{P})$ とする.

g が (2·49) の様に表現されて居る次数 M の diadic step function とする. $|\ell|\leq m$ なる整数 ℓ に対し

$$B_{ij}^{\ell}\equiv T^{\ell}A_{ij}\quad B_{(ij)(i'j')}^{\ell}\equiv B_{ij}^{\ell}\cap A_{i'j'}\quad D_{(ij)(i'j')}^{\ell}\equiv T^{-\ell}B_{(ij)(i'j')}^{\ell}$$

---

(1) diadic square の内部は線型に写す

(2) 證明は [13]

Sem. on Probab.
Vol.10 1961年
P1-103

とおけば，明に

$$A_{ij} = \bigcup_{(i'j')} D^{\ell}_{(ij)(i'j')}$$

$$D^{\ell}_{(ij)(i'j')} \cap D^{\ell}_{(ij)(n\,m)} = \phi \quad m \neq i' \quad n \neq j'$$

所が $\{D^{\ell}_{(ij)(i'j')} \ ; \ \ell.\ i\ j.\ i'j'\}$ は有限個の為適当な互に素な有限ヶの可測集合 $\{D_i \ \ i=1,\cdots k\}$ の有限和で各 $D^{\ell}_{(ij)(i'j')}$ を表わすことができる．又必要ならば，更に D_i を細分する事により，次の条件を満す様に出来る．

$$\text{“各 } \ell\ (|\ell| \leqslant m) \text{ に対し } \quad T^{\ell} D_i \subset {}^{\exists} A_{n.\,m} \text{”} \tag{2.53}$$

(2.53)の条件は

$$g(T^{\ell}\omega) = a_{n.\,m} \ (\ell \text{ に依存}) \ \omega \in D_i \tag{2.54}$$

を意味する．

Lemma 2.8 により次の条件を満す任意に高い次数 $N\ (>M)$ の *cyclic permutation* Q が存在する．

$$\varepsilon' = \frac{1}{m^2 k n} \text{ に対し } \ |Q D_i \sim T D_i| < \varepsilon', \quad i=1\cdots\cdots k \tag{2.55}$$

次の計算は $g(T^n\omega)$ と $g(Q^n\omega)$ の差が小さい事を示して居る：

$\ell > 0$ に対し

$$\widehat{P}(g(T^{\ell}\widehat{\omega}) \neq g(Q^{\ell}\widehat{\omega})) \leq \sum_{i=0}^{\ell-1} \widehat{P}(g(T^{\ell-i}Q^{i}\widehat{\omega}) \neq g(T^{\ell-i-1}Q^{i+1}\widehat{\omega})) \tag{2.56}$$

$$\widehat{P}(g(T^{\ell-i}Q^{i}\widehat{\omega}) \neq g(T^{\ell-i-1}Q^{i+1}\widehat{\omega}))$$

$$= \widehat{P}(Q^{-i}\widetilde{\omega} : g(T^{\ell-i-1}T\widetilde{\omega}) \neq g(T^{\ell-i-1}Q\,\widetilde{\omega}))$$

$$= \widehat{P}(g(T^{\ell-i-1}T\widehat{\omega}) \neq g(T^{\ell-i-1}Q\,\widehat{\omega}))$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \widehat{P}(g(T^{\ell-i-1}T\widehat{\omega}) \neq g(T^{\ell-i-1}Q\,\widehat{\omega}) \ ; \ \widehat{\omega} \in D_j)$$

$\{\widehat{\omega} : Q\,\widehat{\omega} \in TD_j\} \cap D_j$ 上では(2.54)より，$g(T^{\ell-i-1}Q\,\widehat{\omega}) = g(T^{\ell-i-1}T\widehat{\omega})$ のため

$$\leqslant \sum_{j=1}^{k} |TD_j \sim QD_j| < k\varepsilon'$$

故に(2.56)の左辺 $\leqslant |\ell| k \varepsilon'$

$\ell < 0$ に対しても，全く同様である．故に

Sem. on Probab.
Vol.10 1961年
P1-103

$$\hat{P}\left({}^{\exists}|\ell| \leqq m \,;\, g(Q^{\ell}\hat{\omega}) \neq g(T^{\ell}\hat{\omega})\right) \leqq \sum_{\ell=-m}^{m} |\ell| \hat{\varepsilon}\varepsilon' < \frac{1}{n} \qquad (2.57)$$

$(0.1)^2$ を次数Nの diadic square $\{F_0, \cdots F_{4^N-1}\}$ へ分割する.
この時F_i を

$$F_0 = [0.\ \tfrac{1}{2^N}) \times [0.\ \tfrac{1}{2^N}),\quad QF_i = F_{i+1},\quad i \neq 4^{N-1} \qquad (2.58)$$

の様に番号をつけておくと, $QF_{4^N-1} = F_0$ 且 $N > M$ より各F_i は、或るA_{nm}に含まれる. Sを次の$(0.1)^2$上の保測変換とする.

"$\hat{\omega} = (\frac{n}{2^N} + x,\ \frac{n'}{2^N} + y) \in F_{ij}$ $(0 \leq x, y < \frac{1}{2^N})$ の時

$S\hat{\omega} = (x,\ \frac{i}{2^N} + y)$ 但 $(x, y+1) = (x + \frac{1}{2^N},\ y)$ と identify する."

このとき, SはF_i を$[0.\ \frac{1}{2^N}) \times [\frac{i}{2^N},\ \frac{i+1}{2^N})$ に同じ identificationの下で写す.

Q_t を次の様に定義する

$$Q_t(x, y) = (x,\ y + \frac{t}{\delta}\ \frac{1}{2^N}) \quad \text{但}\ (x, y+1) = (x + \tfrac{1}{2^N}, y)\ (x+1, y) = (x, y)$$

とidentify さす.

Q_t は $Q_{t+s} = Q_t Q_s$なる保測変換で

$$g(S^{-1} Q_\delta S \hat{\omega}) = g(Q\hat{\omega}) \qquad (2.59)$$

確率過程$\tilde{Y} = \{g(S^{-1} Q_t S \hat{\omega})\ -\infty < t < \infty\}$ は次の連続性を持つ;

$|t-s| \leq \delta$ なるsに対し, $Q_s(x, y)$ は $Q_t(x, y)$, $Q_{t+\delta}(x, y)$, $Q_{t-\delta}(x, y)$ のいずれかと同じ diadic square (次数N)に入る為(2.52) 及び(2.57)を用いると

$$\hat{P}\left({}^{\exists}s : |t-s| \leqq \delta,\ |g(S^{-1}Q_t S\hat{\omega}) - g(S^{-1}Q_s S\hat{\omega})| > \frac{3}{n}\right)$$

$$= \hat{P}\left({}^{\exists}h : |h| \leq \delta,\ |g(S^{-1}Q_h S\hat{\omega}) - g(\hat{\omega})| > \frac{3}{n}\right)$$

$$\leq \hat{P}\left(|g(S^{-1}Q_\delta S\hat{\omega}) - g(\hat{\omega})| > \frac{3}{n}\right) + P\left(|g(S^{-1}Q_{-\delta} S\hat{\omega}) - g(\hat{\omega})| > \frac{3}{n}\right)$$

$$= 2\hat{P}\left(|g(S^{-1}Q_\delta S\hat{\omega}) - g(\hat{\omega})| > \frac{3}{n}\right.$$

$$\leq 2\left[P\left(g(Q\hat{\omega}) \neq g(T\hat{\omega})\right) + P\left(|g(T\hat{\omega}) - g(\hat{\omega})| > \frac{3}{n}\right)\right] \leq \frac{6}{n} \qquad (2.60)$$

$\Omega(\mathbb{B}.P)$より$\hat{\Omega}(\hat{\mathbb{B}}.\hat{P})$ 上への保測な set transformation

Sem. on Probab.
Vol.10 1961年
P1-103

$\widehat{\Phi}=\widetilde{\nu}\Phi$[1] により $\mathfrak{X}$ の version を $\widehat{\Omega}$ 上に構成できる。即ち

$$P(X(t,\omega)\neq f_t(\chi_{E_1}(\omega),\cdots,\chi_{\omega_1}(\omega),\cdots))=0$$

なる無限次元ボレル可測函数 f_t に対し、確率過程 $\widehat{\mathfrak{X}}\equiv\{\chi_{\widehat{\Phi}E_1}(\widehat{\omega}),\ \chi_{\widehat{\Phi}\omega_1}(\widehat{\omega})\cdots\ -\infty<t<\infty\}$ は $\mathfrak{X}$ と同じ確率法則を持つ。$\widehat{\mathfrak{X}}$ と $\widehat{\mathfrak{Y}}$ の差は次の様になる；任意の $|t|<m\delta(=n)$ なる t に対し、$(\ell-1)\delta\leq t<\ell\delta$ なる時

$$\widehat{P}(|g(S^{-1}Q_tS\widehat{\omega})-\widehat{X}(t,\widehat{\omega})|>\frac{6}{n})$$

$$\leq\widehat{P}(|g(S^{-1}Q_tS\widehat{\omega})-g(Q^{\ell}\widehat{\omega})|>\frac{3}{n})+\widehat{P}(g(Q^{\ell}\widehat{\omega})\neq g(T^{\ell}\widehat{\omega}))$$

$$+\widehat{P}(|g(T^{\ell}\widehat{\omega})-\widehat{X}(\ell\delta,\widehat{\omega})|>\frac{3}{n})+\widehat{P}(|\widehat{X}(\ell\delta,\widehat{\omega})-\widehat{X}(t,\widehat{\omega})|>\frac{1}{n})\qquad(2\cdot 61)$$

$(2\cdot 61)$ $(2\cdot 51)$ $(2\cdot 57)$ を用いると

$$\widehat{P}(|g(S^{-1}Q_tS^{-1}\widehat{\omega})-\widehat{X}(t,\widehat{\omega})|>\frac{6}{n})<\frac{9}{n}\qquad(2\cdot 62)$$

即ち、$\widehat{\mathfrak{Y}}\in V(\widehat{\mathfrak{X}},\ \frac{9}{n})$

そこで、$\widehat{\mathfrak{Y}}$ に V－位相で收束するエルゴード的確率連続な強定常過程の列を作れば定理2-2は證明できる。Q_t を少し変形して R_t^{α} を次の様に定義する。

$$R_t^{\alpha}(x,y)=(x,y+\frac{t}{\delta}\frac{1}{2^N})$$ 但し $(x,y+1)=(x+\alpha,y)$, $(x+1,y)=(x,y)$ と identify さす。

α を無理数にとれば R_t^{α} はエルゴード的な保測変換となる。

$$\mathfrak{F}_0^{\alpha}\equiv[0,\frac{1}{2^N})\times[0,\frac{1}{2^N}),\quad \mathfrak{F}_{i+1}^{\alpha}\equiv R_{\delta}^{\alpha}\mathfrak{F}_i^{\alpha}\qquad i=0,1,2\cdots\cdots$$

$$H_0\equiv[0,\frac{1}{2^N})\times[0,\frac{1}{2^N}),\quad H_{i+1}\equiv Q_{\delta}H_i\qquad i=0,1,2\cdots\cdots$$

とおけば $SF_i=H_j$ $i\equiv j\pmod{4^N}$ 更に

$$\widehat{P}(H_i\sim\mathfrak{F}_i^{\alpha})=2\left|\frac{1}{2^N}-\alpha\right|\left|\left[\frac{i}{2^N}\right]\right|\frac{1}{2^N}\qquad(2\cdot 63)$$[2]

故に $(i-1)\delta\leq t<i\delta$ なる t に対し

$$\widehat{P}(g(S^{-1}Q_tS\widehat{\omega})\neq g(S^{-1}R_t^{\alpha}S\widehat{\omega}))=\sum_{i=0}^{4^N-1}\widehat{P}(g(S^{-1}Q_tS\widehat{\omega})\neq g(S^{-1}R_t^{\alpha}S\widehat{\omega}),\omega\in F_i)$$

---

(1) $\widetilde{\nu}$ は写変換 ν より定まる set transfomation ; $[0,1)\to[0,1)^2$

(2) [ ] はガウス記号。

Sem. on Probab.
Vol.10 1961年
P1-103

$$\leq \hat{P}(H_i \sim \mathfrak{C}_i^\alpha)\,4^N \leq 2\left|\frac{1}{2^N}-\alpha\right|\left(\frac{|t|}{2^N\delta}+1\right)2^N \tag{2.64}$$

故に $\left|\frac{1}{2^N}-\alpha\right| < \frac{1}{2\left(\frac{n}{2^N\delta}+1\right)2^N}\ \frac{1}{n}$ なる α を取れば (2.64) より

" $|t|<n$ なる t に対し

$$\hat{P}(g(S^{-1}Q_t S\tilde{\omega}) \neq g(S^t R_t^\alpha S\tilde{\omega})) < \frac{1}{n}\text{"} \tag{2.65}$$

即ち，確率過程 $\{g(S^{-1}R_t^\alpha S\tilde{\omega})\ -\infty<t<\infty\}$ は $V(\tilde{\mathfrak{Y}}, \frac{1}{n})$ に属する．エルゴード的な強定常過程とみる．次の計算はこの確率過程の連続性を示している；

$$\hat{P}(\exists h\ ; |h| \leq \delta\varepsilon,\ \ g(S^{-1}R_{t+h}^\alpha S\tilde{\omega}) \neq g(S^{-1}R_t^\alpha S\tilde{\omega}))$$

$$\leq \hat{P}(g(S^{-1}R_{t+\delta\varepsilon}^\alpha S\tilde{\omega}) \neq g(S^{-1}R_t^\alpha S\tilde{\omega})) + \hat{P}(g(S^{-1}R_{t-\delta\varepsilon}^\alpha S\tilde{\omega}) \neq g(S^{-1}R_t^\alpha S\tilde{\omega}))$$

$$= 2\hat{P}(g(S^{-1}R_{\delta\varepsilon}^\alpha S\tilde{\omega}) \neq g(\tilde{\omega})) \leq 2\cdot 4^N \frac{1}{2^N}\cdot\frac{1}{2^N}\ \frac{\delta\varepsilon}{\delta} = 2\varepsilon. \qquad \text{Q.E.D.}$$

<u>定理 2.4</u>　$\mathfrak{X}$ が確率連続な正規定常過程である時，一次の多項式過程で近似できる．

<u>証　明</u>　定理2.3の証明と異なり *covariance function* の近似を用いる．

$E\,x(t,\omega)=0$ としても一般性を失わない為，この様に仮定する．

covariance function ρ のスペクトル分解を次の様にする．

$$\rho(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i t\lambda}\,dF(\lambda) \tag{2.66}$$

1　スペクトル測度 F が絶対連続 $F'=f$ の場合

$$g(s)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i\lambda s} f^{\frac{1}{2}}(\lambda)\,d\lambda \tag{2.67}$$

とおけば $g \in L^2(R^1)$ 且

$$\rho(t)=\int_{-\infty}^{\infty} g(s)\,g(s+t)\,ds \tag{2.68}$$

一方，$\mathfrak{Y}(t,\tilde{\omega}) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} g(s)\,ds\,B(s+t,\omega)$ とおけば

$\mathfrak{Y}$ の *covariance function* は (2.68) で表わされる．g を階段函数で近似すれば求める多項式（一次）過程 $\mathfrak{Y}_n$ が得られる； 且．

$$E(\mathfrak{Y}_n(t,\tilde{\omega})-\mathfrak{Y}(t,\tilde{\omega}))^2=\int_{-\infty}^{\infty}(g(s)-g(s))^2\,ds \longrightarrow 0$$

---

(1) 多項式過程の次数は $\max\{p : a_{i_1\cdots i_p} \neq 0\}$

Sem. on Probab.
Vol.10 1961年
P1-103

即ち Y_n は Y に V 位相で収束する.

2. 一般のスペクトル測度 F に対し次の様な絶対連続なスペクトル測度 F_n が存在する.

$$\lim F_n(\lambda) = F(\lambda) \quad \lambda \text{ は } F \text{ の連続点}$$

F_n に対する正規過程を X_n covariance function を ρ_n とすると $\rho_n(t)$ は $\rho(t)$ に任意の有限区間で一様収束する. 正規過程の特性函数が

$$E\, e^{i\Sigma\theta_j X_n(t_j\omega)} = e^{-\frac{1}{2}\Sigma\rho_n(t_i - t_j)\theta_i\theta_j}$$

に注意すれば X_n は X に U - 位相で収束する. 従って X に近づく一次の多項式過程が存在する.

§3. 標準表現[1]

定理 2·3 と定理 2·4 を比べた時, 正規定常過程の表現[2]の一般の定常過程へのーつの自然の拡張として, ウィナー積分の代りに重複ウィナー積分を用いる事が考えられる. そこで表現を次の様に定義する. 基礎確率空間 $\tilde{\Omega}(\tilde{\mathcal{B}}, \tilde{P})$ 上にウィナー彷徨測度 dB が与えられ, 函数の系 $\mathfrak{f} = \{f_n;\ n = 0, 1, 2, \cdots\}$ が次の条件を満すとする.

(K1) 各 f_n は $(-\infty, 0]^n$ 上で定義された対称な実数値 L_2 - 函数[3]

(K2) $\sum n!\, \|f_n\|^2 < \infty$

(K1), (K2) を満す函数の系 $\mathfrak{f}$ の全体を K とする. $\mathfrak{f} \in K$ に対し確率過程 $Y = \{Y(t, \tilde{\omega}), -\infty < t < \infty\}$ が次の様に定義できる.

$$Y(t\,\tilde{\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{t} \cdots \int_{-\infty}^{t} f_n(t_1 - t, \ldots\, t_n - t)\, dB(t_1\,\tilde{\omega}) \ldots\, dB(t_n\,\tilde{\omega}) \qquad (3\cdot1)$$

Y は明に平均連続, 純非決定的な強定常過程で $E(Y(t)) = f_0$ となる. 更に展開定理の一意性より Y により $\mathfrak{f}$ に定まる (dB は固定)

<u>定義 3.1</u> Y が与えられた強定常過程 X と同じ確率法則に従うとき (3.1) の右辺を X の表現と云う. (Y が X の表現と云う云い方をする時もある) $\mathfrak{f}$ を表現核, 更に $\sup\{n;\ \|f_n\| > 0\}$ を表現の次数と呼ぶ. すべての

---

(1) 主として[15]による.

(2) [3] にくわしい.

(3) X が実数値函数のため, 実数値ウィナー積分だけでよい.

Sem. on Probab.
Vol.10 1961年
P1-103

nに対し$\|f_n\|=0$の時、便宜的に次数を-1とする．

定義 3.2　すべてのtに対し

$$H_t(\mathbb{Y}) = H_t(dB) \tag{3.2}$$

なる時 表現を真の標準表現（*Properly canonical represention*）と云う．

定義 3.3　すべてのtに対し

$$H_t(dB) \perp \left(H(\mathbb{Y}) \ominus H_t(\mathbb{Y})\right)^{(1)} \tag{3.3}$$

の時 表現を標準表現（*canonical representation*）と呼ぶ．

直観的には(3.3)の右辺は確率過程$\mathbb{Y}$の含む未来の情報と考えられる．即ち(3.3)はt迄のウィナー彷徨測度にt以後の$\mathbb{Y}$の情報が入って居ない事を示す．この点で予報を考える上に望ましい性質となる．定義から次の結果が直ちに得られる．

dB, dB^*を共にウィナー彷徨測度，$F \in K$とする．Fを核として(3.1)により定義した確率過程を$\mathbb{Y}$, $\mathbb{Y}^*$とする．

定理 3.1

(i)　$\mathbb{Y}$が$\mathbb{X}$の表現になって居るとき，$\mathbb{Y}^*$も亦表現である．

(ii)　$\mathbb{Y}$が標準表現（又は真の標準表現）ならば$\mathbb{Y}^*$も同じである．

(iii)　$\mathbb{Y}$が$\mathbb{X}$の表現で，$\mathbb{Y}$と独立な確率過程$\mathbb{V}$が存在して

$$H_t(\mathbb{V}, \mathbb{Y}) = H_t(dB) \qquad (\text{すべての} t)$$

と出来れば$\mathbb{Y}$は標準表現となる．

証明

(i)　dBからdB^*への変換Uを

$$U \Delta B(E) = \Delta B^*(E)$$

と定義すればUは$H(dB)$より$H(dB^*)$へのユニタリー変換に拡張できる．
即ち　$\xi = \Phi(\Delta B(E_1), \cdots \Delta B(E_n))$　に対し

$$U\xi = \Phi(\Delta B^*(E_1), \cdots\cdots \Delta B(E_n))$$

一般の$\xi \in H(dB)$に対し，その展開を

---

(1)　$\ominus$ は orthogonal complement

Sem. on Probab.
Vol.10 1961年
P1-103

$$\xi = \sum \int \cdots \int g(t_1, \dots t_n)\, dB(t_1) \cdots\cdots dB(t_n)$$

とすれば

$$U\xi = \sum \int \cdots \int g(t_1 \cdots\cdots t_n)\, dB^*(t_1) \cdots dB^*(t_n) \quad \text{且} \quad \|U\xi\| = \|\xi\| \qquad (3 \cdot 4)$$

故に U の定義に従えば　$UY(t) = Y^*(t)$

$$U\Phi(Y(t_1), \cdots\cdots Y(t_n)) = \Phi(Y^*(t_1) \cdots\cdots Y^*(t_n))$$

故に U がノルムを変えない事より，Y と Y^* は同じ法則を持つ．

(ii) 任意の $\xi \in H(Y) \ominus H_t(Y)$ をとれば、任意の $\eta \in H_t(Y)$ に対し

$(\xi, \eta) = 0$　且　任意の $\zeta \in H_t(dB)$ に対し　$(\xi, \zeta) = 0$　(i) で定義した U は内積を変えない為

$$(U\xi, U\eta) = 0, \quad (U\xi, U\zeta) = 0 \qquad (3 \cdot 5)$$

$H_t(dB^*) = \{U\zeta : \zeta \in H_t(dB)\}$　$H_t(Y^*) = \{U\eta ; \eta \in H_t(Y)\}$ より

(3・5) を用いると，任意の $\eta^* \in H_t(Y^*)$　$\zeta^* \in H_t(dB^*)$ に対し，

$$(U\xi, \eta^*) = 0, \quad (U\xi, \zeta^*) = 0 \qquad (3 \cdot 6)$$

即ち $U\xi \in H(Y^*) \ominus H_t(Y^*)$　且　$U\xi \perp H_t(dB^*)$

所が U の逆変換 U^{-1} を考えると同じ方法により，任意に $\xi^* \in H(Y^*) \ominus H_t(Y^*)$ をとれば $U^{-1}\xi^* \in H(Y) \ominus H_t(Y)$．故に (3・6) より任意の $\xi^* \in H(Y^*) \ominus H_t(Y^*)$ に対し　$UU^{-1}\xi^* = \xi^*$ に注意すれば

$$(\xi^*, \zeta^*) = 0$$

即ち　$\xi^* \perp H_t(dB^*)$

(iii) 条件により $H_t(dB)$ の中で有限ヶの $Y(t_1) \cdots Y(t_n)$，$V(s_1) \cdots V(s_m)$ の函数がノルム稠密になる．任意の $\eta \in (H(Y) \ominus H_t(Y))$ に対し

$$E(\Phi(Y(t_1) \cdots Y(t_n)\ V(s_1) \cdots V(s_m))\, \bar{\eta}) = E(E(\Phi\, \bar{\eta} / \mathbb{B}(Y)))$$

$$= E(E(\Phi / \mathbb{B}(Y)) \cdot \bar{\eta})$$

こゝで　Φ は $\mathcal{B}(\mathbb{B}_t(Y), \mathbb{B}_t(V))$-可測で且　Y と V は独立な事より

$E(\Phi / \mathbb{B}(Y)) = E(\Phi / \mathbb{B}_t(Y))$　を用いると，

$$= E(E(\Phi / \mathbb{B}_t(Y))\, \bar{\eta}) = 0 \quad (\because\ \eta \perp H_t(Y)).$$

Sem. on Probab.
Vol.10 1961年
P1-103

故に $H_t(dB) \perp (H(Y) \ominus H_t(Y))$ Q.E.D

定理3.1. (i) (ii) より、定義 3.1, 3.2, 3.3 はすべてウィナー彷徨測度の方にはよらなく、表現核のみに関係する定義である事がわかる。故に標準表現を与える表現核を標準核、又、真の標準表現を与える表現核を真の標準核と呼び得る。真の標準核ならば明に標準核になる。

強定常過程 Y に対し、$H(Y)$ 上に推移変換 $\widehat{T}_t$ が

$$\widehat{T}_t Y(s) = Y(t+s),\quad \widehat{T}_t \Phi(Y(t_1) \cdots Y(t_n)) = \Phi(Y(t_1+t), \cdots Y(t_n+t))$$

より定義できる。又 $H(dB)$ 上にも推移変換 T_t が

$$T_t(B(u) - B(v)) = B(u+t) - B(v+t),\quad T_t \Phi(B(t_1) - B(s_1), \cdots B(t_n) - B(s_n)) = \Phi(B(t_1+t) - B(s_1+t), \cdots B(t_n+t) - B(s_n+t))$$

より定義できる。Y が (3.1) の様に表わされる事は $T_t \supset \widehat{T}_t$ を意味する。更に (3.3) では $T_t = \widehat{T}_t$ となる。

定理 3.2 X が真の標準表現を持つとして g を其の真の標準核とする。X^* が X と同じ確率法則を持つ Ω^* 上の確率過程とすれば

$$X^*(t) = \sum \int \cdots \int g(t_1 - t, \cdots t_n - t)\, dB^*(t_1) \cdots dB^*(t_n)$$

となる様に Ω^* 上のウィナー彷徨測度 dB^* が構成できる。[1]

証明 X の真の標準表現を

$$Y(t\ \omega) = \sum \int \cdots \int g(t_1 - t, \cdots t_n - t)\, dB(t_1\ \omega) \cdots dB(t_n\ \omega) \quad (3.7)$$

とする。 $H_t(Y) = H_t(dB)$ より

$$B(t\ \omega) - B(s\ \omega) = f_{s.t}(Y(\tau\ \omega),\ \tau \leqq t)$$

となる無限次元可測函数 f_{st} が存在する。$\{f_{s.t}(Y(\tau\ \omega), \tau \leqq t), -\infty < s < t < \infty\}$ はウイナー彷徨測度となるため、X^* と Y が同じ確率法則を持つ事に注意すれば $\{f_{st}(X^*(\tau\ \omega^*), \tau \leqq t), -\infty < s < t < \infty\}$ は Ω^* 上のウイナー彷徨測度 dB となる。(Y, dB) の結合法則は (X^*, dB^*) の結合法則に等しい。故にウィナー彷徨測度が求めるものであることは (3.8) より $Y(t)$ を求める一つの解は (3.7) により示される事に注意すれば

---

(1) 証明からわかる様に dB^* が一意に定まるかどうかわからない。

Sem. on Probab.
Vol.10 1961年
P1-103

$$0=\|Y(t)-\sum\int\cdots\int g(t_1-t,\ \ t_n-t)\,dB(t_1)\cdots dB(t_n)\|=\|X^*(t)-\sum\int\cdots\int g(t_1-t,\cdots t_n-t)\,dB^*(t_1)\cdots dB(t_n)\|.$$

より定理の成立がわかる.

表現の存在は問2に真の標準表現の存在は問1(b)に関係しているが，いずれも未解決の問題である．更に表現がある時，標準表現が存在するか，又標準表現があるとき，真の標準表現が存在するかも未解決である．

しかし，逆に真の標準表現がある場合，すべての標準表現は決定できる．(定理3.3)

<u>*Lemma* 1.</u> $\Phi(t\,\omega)$ が次の条件(ref. 一章§3(Φ1)〜Φ(3)) を満すとする

(Φ1) 各固定した t に対し ω の函数として $\Phi(t,\cdot)$ は $\mathcal{B}_t(dB)$-可測.

(Φ2) $(t\ \omega)$ = 変数の函数として $\mathcal{B}_1\times\widehat{\mathcal{B}}$- 可測.

(Φ3) 値域は $+1.\ -1$ の二点集合

$$\Delta\bar{B}(E\ \omega)\doteq\int\chi_E(\tau)\,\Phi(\tau\,\omega)\,dB(\tau\,\omega)=\int_E\Phi(\tau\,\omega)\,dB(\tau\,\omega)\qquad(3.9)$$

はホウイナー彷徨測度 $d\bar{B}$ となる.

<u>證 明 1</u>　$\Phi(\tau\ \omega)$ が次の形の $(\tau\ \omega)$ 一階段函数の時

$$\Phi(\tau\,\omega)=a_i(\omega)\qquad \tau_i\le\tau<\tau_{i+1}\qquad i=1,2\cdots n.$$

任意の $s.\ t\in(\tau_i\ \tau_{i+1})$ に対し

$$\hat{P}(\bar{B}(t)-\bar{B}(s)<c/\mathcal{B}_s(dB))$$
$$=\hat{P}(a_i(\omega)=1\ \text{且}\ B(t)-B(s)<c/\mathcal{B}_s(dB))+\hat{P}(a_i(\omega)=-1\ \text{且}\ B(t)-B(s)>-c/\mathcal{B}_s(dB))$$

独立性により

$$=\tilde{P}(a_i(\omega)=1/\mathcal{B}_s(dB))\,\tilde{P}(B(t)-B(s)<c)+\tilde{P}(a_i(\omega)=-1/\mathcal{B}_s(dB))\,\tilde{P}(B(t)-B(s)>-c)$$
$$=\int_{-\infty}^{c}\frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}\,e^{-\frac{x^2}{2(t-s)}}\,dx$$

故に $\bar{B}(t)-\bar{B}(s)$ は $\{dB(\tau).\ \tau\le s\}$ とは独立で，且正規分布に従う

一方 $\bar{B}(u)-\bar{B}(v)$ は $\mathcal{B}_u(dB)$- 可測な為，$d\bar{B}$ は独立な増分を持つ.

Sem. on Probab.
Vol.10 1961年
P1-103

即ちウィナー的偏測度となる.

2. (Φ1)〜(Φ3) を満す一般のΦに対しては次の条件を満す$(\tau\,\tilde{\omega})$一階段函数Φ_nが存在する.

$$\int_{-n}^{n} E\left|\Phi(\tau\,\tilde{\omega})-\Phi_n(\tau\,\tilde{\omega})\right|^2 d\tau < \frac{1}{n}$$

Φ_nに対し(3.9)により定まる ウィナー的偏測度を$d\bar{B}_n$とすれば, 各t, sに対し

$$\bar{B}(t\,\tilde{\omega})-\bar{B}(s\,\tilde{\omega})=\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\ \bar{B}_n(t\,\tilde{\omega})-\bar{B}_n(s\,\tilde{\omega})$$

故に$\{\bar{B}(t\,\tilde{\omega})-\bar{B}(s\,\tilde{\omega})\ s<t\}$も正規系となるが, $s'<t'<s<t$に対し

$E(\bar{B}(t)-\bar{B}(s))(\bar{B}(t')-\bar{B}(s'))=0$ よりウィナー的偏測度となる.

Q E D

$E\in\mathbb{B}_0(dB)$に対し $\bar{\chi}_E(\cdot)$ を次の様に定義する.

$$\bar{\chi}_E(\tilde{\omega})=\begin{cases}1 & \tilde{\omega}\in E\\ -1 & \omega\in E^c\end{cases}$$

その展開を

$$\bar{\chi}_E(\tilde{\omega})=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{0}\cdots\int\varphi_{E\,n}(t_1\cdots t_n)\,dB(t_1\,\tilde{\omega})\quad dB(t_n\,\tilde{\omega})^{(1)}$$

と表わす. ($\varphi_{E\,n}$は対称函数とする).

$$\mathcal{F}\equiv\{\mathcal{L}_E=(\varphi_{E,0},\ \varphi_{E,1}\ \cdots\cdots)\ ;\ E\in\mathbb{B}_0(dB)\}$$

とおけば, $\mathcal{F}$は集合として dB のえらび方に無関係となる. 且 $\mathcal{L}$ が$\mathcal{F}$に属すれば, $-\mathcal{L}=(-\varphi_0\ -\varphi_1\ \cdots\cdots)$も亦$\mathcal{F}$に属す.

任意の$\mathcal{L}\in\mathcal{F}$と任意の$\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}\in K$に対し $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}\circ\mathcal{L}$ を次の様に定義する. 任意の$s<t$に対し

$$\bar{B}(t)-\bar{B}(s)\equiv\sum_{n=0}^{\infty}\int_s^t dB(\tau)\left[\int_{-\infty}^{\tau}\cdots\int\varphi_n(t_1-\tau,\ \cdots\ t_n-\tau)\,dB(t_1)\cdots dB(t_n)\right]\tag{3.10}$$

とおけば Lemma 1より $d\bar{B}$ はウィナー的偏測度となるが

<u>定義 3.4</u> $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}\circ\mathcal{L}\Leftrightarrow$

$$\sum\int_{-\infty}^{0}\cdots\int a_n(t_1\cdots t_n)\,dB(t_1)\cdots dB(t_n)=\sum\int_{-\infty}^{0}\cdots\int b_n(t_1\cdots t_n)\,d\bar{B}(t_1)\cdots d\bar{B}(t_n)\tag{3.11}$$

(1) $\bar{\chi}_E$ は$\mathbb{B}_0(dB)$-可測な為, 積分範囲は$(-\infty\ 0]$となる.

Sem. on Probab.
Vol.10 1961年
P1-103

定義は補助的にウィナー彷徨測度を用いて居るが、$\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \circ \mathfrak{P}$ なる関係はウィナー彷徨測度のえらび方には無関係である。

∵ dB, dB^* を共にウィナー彷徨測度とすれば $H(dB)$ より $H(dB^*)$ 上へのユニタリー変換 U が定理3.1(i) ((3.4)) により定まる。

dB に対し(3.11)が成立して居るとする。(3.10)の両辺に U を作用さすと

$$U(\bar{B}(t)-\bar{B}(s)) = \sum_{n=0}^{\infty}\int_s^t dB^*(\tau)\left[\int_{-\infty}^{\tau}\cdots\int \varphi_n(t_1-\tau,\cdots t_n-\tau)\,dB^*(t_1)\cdots dB^*(t_n)\right]$$

$$=\bar{B}^*(t)-\bar{B}^*(s) \tag{3.12}$$

故に(3.11)の両辺に U を作用させると

$$\sum\int_{-\infty}^{0}\cdots\int a_n(t_1\cdots t_n)\,dB^*(t_1)\cdots dB^*(t_n) = \sum\int_{-\infty}^{0}\cdots\int b_n(t_1\cdots t_n)\,dB^*(t_1)\cdots dB^*(t_n)$$

即ち ウィナー彷徨測度 dB^* に対しても $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}\circ\mathfrak{P}$ となる。

<u>定理3.3</u> $\mathfrak{g}$ が X の真の標準核である場合 $\mathfrak{f}(\in K)$ が X の標準核となる必要十分条件は、$\mathfrak{f} = \mathfrak{g}\circ\mathfrak{P}$ なる $\mathfrak{P}$ が $\mathfrak{F}$ の中に存在する事である。

<u>証明</u> 必要性

1. $\mathfrak{f}$ を標準核とする。

$$X(t\,\omega) = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{t}\cdots\int f_n(t_1-t,\cdots t_n-t)\,dB(t_1\,\omega)\cdots dB(t_n\,\omega)^{(1)} \tag{3.13}$$

は X の標準表現。従って(3.3)より

$$L_2(dB,t)\perp\left(L_2(X)\ominus L_2(X,t)\right) \tag{3.14}$$

定理3.2より

$$X(t,\omega) = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{t}\cdots\int g_n(t_1-t,\cdots t_n-t)\,dB^*(t_1\,\omega)\cdots dB^*(t_n\,\omega)$$

となるウィナ彷徨測度 dB^* が存在する。且 $L_2(X\cdot t) = L_2(dB^*\cdot t)$。

故に

$$L_2(dB\cdot t)\perp\left(L_2(dB^*)\ominus L_2(dB^*\cdot t)\right) \tag{3.15}$$

$\Delta B^*(E)$ は dB の L_2-汎函数の為 その展開を次の様にする。

---

(1) 与えられた強定常過程は平均0とする。従って $f_0=0$ $g_0=0$

Sem. on Probab.
Vol.10 1961年
P1-103

$$B^*(t)-B^*(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{t}\cdots\int a_{t,s,n}(t_1\cdots t_n)\,dt(t_1)\cdots dB(t_n)$$

更に一章．定理3.6より

$$A_{t,s}(\tau,\hat{\omega})=\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\int_{-\infty}^{\tau}\int_{-\infty}^{t_{n-1}}\cdots\int_{-\infty}^{t_2} a_{t,s,n}(t_1\cdots t_{n-1},\tau)\,dB(t_1)\cdots dB(t_{n-1})$$

とおけば

$$B^*(t)-B^*(s)=\int_{-\infty}^{t} A_{t,s}(\tau,\hat{\omega})\,dB(\tau\hat{\omega}) \qquad (3.16)$$

一方(3.15)より

$$\int_{-\infty}^{s} A_{t,s}(\tau\hat{\omega})\,dB(\tau\hat{\omega})=E(B^*(t)-B^*(s)/\mathbb{B}_s(dB))=0 \qquad (3.17)$$

故に殆んどすべての$(\tau\hat{\omega})\in(-\infty,s)\times\hat{\Omega}$に対し，$A_{t,s}(\tau\hat{\omega})=0$.

又 $s<u<v<t$ に対し

$$E(B^*(t)-B^*(s)/\mathbb{B}_v(dB))-E(B^*(t)-B^*(s)/\mathbb{B}_u(dB))=B^*(v)-B^*(u) \qquad (3.18)$$

(3.17)を(3.16)に代入すれば

$$B^*(t)-B^*(s)=\int_{s}^{t} A_{t,s}(\tau\hat{\omega})\,dB(\tau\hat{\omega}) \qquad (3.19)$$

(3.18)を(3.16)に代入すれば(3.19)より

$$\int_{u}^{v} A_{t,s}(\tau\hat{\omega})\,dB(\tau\hat{\omega})=\int_{u}^{v} A_{v,u}(\tau\hat{\omega})\,dB(\tau\hat{\omega}) \qquad (3.20)$$

故に(3.20)より，殆んどすべての$(\tau\hat{\omega})\in[u,v]\times\hat{\Omega}$に対し

$$A_{t,s}(\tau\hat{\omega})=A_{v,u}(\tau\hat{\omega}) \qquad (3.21)$$

故に$R^1\times\hat{\Omega}$上で定義された(Φ1)(Φ2)及び，次の(3.22)を満す$\Phi(\tau\hat{\omega})$が存在する.

$$\Phi(\tau\hat{\omega})=A_{t,s}(\tau\hat{\omega}) \quad (a.e\ (\tau\hat{\omega})\in[s,t]\times\hat{\Omega}) \qquad (3.22)$$

故に

$$B^*(t)-B^*(s)=\int_{s}^{t}\Phi(\tau\hat{\omega})\,dB(\tau\hat{\omega}) \qquad (s<t) \qquad (3.23)$$

2. 次に$\Phi^2(\tau\hat{\omega})=1$ となる事を示す．(3.15)と一章定理3.2より

$$\int_{s}^{t} E(\Phi^2(\tau\hat{\omega})/\mathbb{B}_s(dB))\,d\tau=E((B^*(t)-B^*(s))^2/\mathbb{B}_s(dB))=t-s \qquad (3.24)$$

Sem. on Probab.
Vol.10 1961年
P1-103

故に任意に固定したsに対し，殆んどすべての$(\tau,\hat{\omega})\in(s\infty)\times\hat{\Omega}$に対し

$$E(\Phi^2(\tau\hat{\omega})/\mathbb{B}_s(dB))=1 \tag{3.25}$$

故に$\xi_h(s\hat{\omega})=\frac{1}{h}\int_0^h E(\Phi^2(s+v.\hat{\omega})/\mathbb{B}_s(dB))dv$とおけば，任意の$s$に対し，殆んどすべての$\hat{\omega}$に対して

$$\xi_h(s\hat{\omega})=1 \tag{3.26}$$

故に

$$E|1-\Phi^2(s\hat{\omega})|=E\left|\frac{1}{h}\int_0^h E(\Phi^2(s+v.\hat{\omega})-\Phi^2(s.\hat{\omega})/\mathbb{B}_s(dB))\right|$$
$$\leq\frac{1}{h}\int_0^h E|\Phi^2(s+v.\hat{\omega})-\Phi^2(s\hat{\omega})|dv \tag{3.27}$$

殆んどすべての$\hat{\omega}$に対し　$\Phi^2(\tau\hat{\omega})$はτの有限区間$(a.b]$上での可積分函数（ルベーグ測度に関して）となる故，殆んどすべての$\hat{\omega}$に対して

$$\frac{1}{h}\int_0^h dv\int_a^b|\Phi^2(u+v.\hat{\omega})-\Phi^2(u.\hat{\omega})|du\xrightarrow[n\to 0]{}0 \tag{3.28}$$

一方$h<1$に対しては

$$\frac{1}{h}\int_0^h dv\int_a^b|\Phi^2(u+v.\hat{\omega})-\Phi^2(u\ \hat{\omega})|du\leq\frac{1}{h}\int_0^h\int_{a-1}^{b+1}2\Phi^2(\tau\hat{\omega})d\tau$$
$$=2\int_{a-1}^{b+1}\Phi^2(\tau\hat{\omega})d\tau \tag{3.29}$$

右辺が$\hat{\omega}$につき可積な為ルベーグの收束定理より

$$\frac{1}{h}\int_a^b du\int_0^h E|\Phi^2(u+v\ \hat{\omega})-\Phi^2(u,\hat{\omega})|dv\xrightarrow[h\to 0]{}0 \tag{3.30}$$

故に適当な$h_n(\to 0)$を取る事により，殆んどすべてのuに対し，

$$\frac{1}{h_n}\int_0^{h_n}E|\Phi^2(u+v.\hat{\omega})-\Phi^2(u\ \hat{\omega})|dv\xrightarrow[n\to\infty]{}0 \tag{3.31}$$

故に(3.27)より，殆んどすべてのuに対し

$$\text{“殆んどすべての}\hat{\omega}\text{に対して}\quad\Phi^2(u.\hat{\omega})=1\text{”} \tag{3.32}$$

3. $\Phi(s.\hat{\omega})$を重複ウィナー積分で展開すると，$\Phi(s.\hat{\omega})$が$\mathbb{B}_s(dB)$-可測な為(3.23)は次の様に書ける．

$$B^*(t)-B^*(s)=\sum_{n=0}^{\infty}\int_s^t dB(u.\omega)\left(\int_{-\infty}^{u}\cdots\int_{-\infty}^{u}\varphi_n(t_1\cdots t_n.u)dB(t_1)\cdots dB(t_n)\right) \tag{3.33}$$

推移変換 T_τ を(33)の両辺に施すと

$$B^*(t+\tau,\omega)-B^*(s+\tau,\hat{\omega})=\sum_{n=0}^{\infty}\int^{u+\tau} dB(u,\hat{\omega})\int_{-\infty}^{u}\cdots\int_{-\infty}^{u}\varphi(t_1-\tau,\cdots t_n-\tau,u-\tau)\,dB(t_1)\cdots dB(t_n) \tag{3.34}$$

展開の一意性より(3.33)(3.34)を比べると，殆んどすべての$(t_1\cdots t_n,u)$に対し

$$\varphi_n(t_1,\cdots t_n,u)=\varphi_n(t_1-\tau\cdots t_n-\tau,u-\tau)$$

故にフビニーの定理より，殆んどすべてのuに対し，
"殆んどすべての$(\tau,t_1,\cdots t_n)$に対して

$$\varphi_n(t_1\cdots t_n,u)=\varphi_n(t_1-\tau,\cdots t_n-\tau,u-\tau)\text{''}\quad\text{''} \tag{3.35}$$

(3.32)及び(3.35)を満すuを任意に取り，u_0，固定する．ψ_nを次の様に定義する．

$$\psi_n(t_1-u_0,\cdots t_n-u_0)=\varphi_n(t_1,\cdots t_n,u_0).$$

故に殆んどすべての$(\tau,t_1,\cdots t_n)$に対し

$$\psi_n(t_1-u_0-\tau,\cdots t_n-u_0-\tau)=\varphi_n(t_1\cdots t_n,u_0+\tau) \tag{3.36}$$

故に殆んどすべての$(\tau\,\hat{\omega})$に対し

$$\Phi(u_0+\tau,\hat{\omega})=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\tau}\cdots\int\psi_n(t_1-u_0-\tau,\cdots t_n-u_0-\tau)\,dB(t_1)\cdots dB(t_n) \tag{3.37}$$

(3.37)の右辺は平均連続な強定常過程を与える為，その可分変形を$\bar{\Phi}(\tau,\hat{\omega})$とする．明に，殆んどすべての$\tau$に対し
"殆んどすべての$\hat{\omega}$に対して $\bar{\Phi}(\tau\,\hat{\omega})=\Phi(\tau,\hat{\omega})$" (3.38)
且，Φの定常性より(3.32)より

$$\hat{P}(\bar{\Phi}(\tau,\hat{\omega})=1\ \text{or}\ -1)=\hat{P}(\Phi(u_0\,\hat{\omega})=1\ \text{or}\ -1)=1 \tag{3.39}$$

故に $\Psi=(\psi_0\,\psi_1,\cdots\cdots)\in\mathcal{F}$，且 $\mathcal{F}=\mathcal{G}/\circ\Psi$．

十分性： $\mathcal{F}=\mathcal{G}/\circ\Psi$．($\Psi\in\mathcal{F}$) とする．

$$Y(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{t}\cdots\int f_n(t_1-t,\cdots t_n-t)\,dB(t_1)\cdots dB(t_n) \tag{3.40}$$

Sem. on Probab.
Vol.10 1961年
P1-103

$$\bar{B}(t)-\bar{B}(s)=\sum_{n=0}^{\infty}\int_s^t dB(\tau)\int_{-\infty}^{\tau}\cdots\int \varphi_n(t_1-\tau,\cdots t_n-\tau)dB(t_1)\cdots dB(t_n)$$

とおけば $\mathcal{Y}$・Φ の定義より

$$Y(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{t}\cdots\int g_n(t_1-t,\cdots t_n-t)d\bar{B}(t_1)\cdots d\bar{B}(t_n) \qquad (3.41)$$

且. $\mathcal{Y}$が真の標準核である事より

$$L_2(Y,t)=L_2(d\bar{B}.t) \qquad (3.42)$$

(3.41) より Y と Y_0 は同じ確率法則を持つ事がわかる. 即ち $\mathcal{g}$は表現核である. 標準核である事を示す為には (3.42) より

$$L_2(dB\cdot t)\perp(L_2(d\bar{B})\ominus L_2(d\bar{B}.t)) \qquad (3.43)$$

を証明すればよい。

$Z\in L_2(d\bar{B})\ominus L_2(d\bar{B},t)$ とする. 更に Z の展開を

$$Z(\hat{\omega})=\int_{-\infty}^{\infty}\eta(\tau.\hat{\omega})d\bar{B}(\tau.\hat{\omega})$$

と確率積分で示すと. $Z\perp L_2(d\bar{B}\ t)$ より

$$Z'(\hat{\omega})=\int_{-\infty}^{\infty}\eta(\tau\ \hat{\omega})d\bar{B}(\tau.\hat{\omega}) \quad (\in L_2(d\bar{B}.t))$$

とは直交する. 即ち

$$0=E(Z.\ \bar{Z}')=\int_{-\infty}^{t}E|\eta^2(\tau\ \hat{\omega})|^2 d\tau$$

故に殆んどすべての $(\tau,\hat{\omega})\in(-\infty.t]\times\hat{\Omega}$ に対し $\eta(\tau\ \hat{\omega})=0$. 即ち

$$Z(\hat{\omega})=\int_t^{\infty}\eta(\tau\ \hat{\omega})d\bar{B}(\tau\hat{\omega})=\int_t^{\infty}\eta(\tau\hat{\omega})\Phi(\tau\ \hat{\omega})dB(\tau\ \hat{\omega}). \qquad (3.44)$$

所が $\eta(\tau\ \hat{\omega})$は $\mathcal{B}_\tau(d\bar{B})$-可測. 従って $\mathcal{B}_\tau(dB)$-可測な事に注意すれば. (3.44) の右辺の表現より $Z(\hat{\omega})$は一般の$\int_{-\infty}^{t}\zeta(\tau\ \omega)dB(\tau\ \hat{\omega})$ と表わされる確率変数と直交する. 故に $Z\perp L_2(dB.\ t)$ QED

定理 3.3 の直観的な意味はウィナー仿径測度 dB の増分の符号を random に変えて. 新しくウィナー仿径測度 $d\bar{B}$ を作る. 真の標準核を $d\bar{B}$ で積分したものを. もとの dB の L_2-汎函数として. もう一度展開し直した時にできるのが標準核である事を示している. 更に一つ真の標準核があったとき. $\mathcal{B}_0(dB)$ のボレル集合の数だけ. 標準核が考えられるが. この中で. 真の標準核には

Sem. on Probab.
Vol.10 1961年
P1-103

る条件等は未だ求まっていない。しかし次の例は真の標準核でない標準核の存在を示す

例 Xを Ornstein-Uhlenbeck のブラウン運動とする.

$$X(t,\omega)=\beta\int_{-\infty}^{t} e^{-\alpha(t-s)}\,dB(s,\omega) \tag{3.45}$$

$E=\{\omega; X(0,\omega)>0\}$ 即ち $\Phi(u,\omega)=\mathrm{sgn}\,X(u,\omega)$. とすれば真の標準核にならない 標準核が得られる.

証明 Φに対し次の様な (t,ω)-階段函数Φが存在する.

$$\Phi_n(t,\omega)=\Phi(\tau_i^{(n)},\omega)\quad \tau_i^{(n)}\le t<\tau_{i+1}^{(n)},\quad i=-k(n),\cdots 0\cdots k(n)$$

但 $\tau_0^{(n)}=0$

且 $$E\int_{-n}^{n}|\Phi(t,\omega)-\Phi_n(t,\omega)|^2dt\le\frac{1}{n}.$$

$$\bar{B}_n(t)-\bar{B}_n(S)=\int_S^t\Phi_n(u,\omega)\,dB(u,\omega)\quad \bar{B}(t)-\bar{B}(S)=\int_S^t\Phi(u,\omega)\,dB(u,\omega)$$

とおけば、一葉定理3.4系より

$$B(t)-B(S)=\int_S^t\Phi_n(u,\omega)\,d\bar{B}(u,\omega)$$

故に、$t,S\in[\tau_i^{(n)},\tau_{i+1}^{(n)})$ ならば

$$B(t)-B(S)=\mathrm{sgn}\,X(\tau_i^{(n)},\omega)\,(\bar{B}_n(t)-\bar{B}_n(S))$$

故に順操りに入れる事により

$$\mathcal{B}_{[0,S]}(dB)=\mathcal{B}\{\mathrm{sgn}\,X(0,\omega),\ d\bar{B}_n(t);\ 0\le t\le S\}$$

$X(0,\omega)$が$\mathcal{B}_0(d\bar{B})$-可測と仮定する. 任意の$\varepsilon>0$に対し Tを充分大きくとれば

$$E\left|X(0,\omega)-\sum\int_{-T}^{0}\!\!\cdots\!\int f_k(t_1\cdots t_k)\,d\bar{B}(t_1)\cdots d\bar{B}(t_k)\right|^2<\varepsilon$$

とできる. 故に定常性より $t>T$なるtに対し

$$E\left|X(t)-\sum\int_0^t\!\!\cdots\!\int f_k(t_1-t,\cdots t_k-t)\,d\bar{B}(t_1)\cdots d\bar{B}(t_k)\right|^2<\varepsilon \tag{3.46}$$

(3.46)を充すtを任意に固定すれば、充分大きなnに対し

Sem. on Probab.
Vol.10 1961年
P1-103

$$E\left|\sum\int_0^t\cdots\int f_k(t_1-t,\cdots t_k-t)\,d\bar{B}(t_1)\cdots\cdots dB(t_k)-\sum\int_0^t\cdots\int f_k(t_1-t\cdots\right.$$

$$\left.\cdots t_k-t)\,d\bar{B}_n(t_1)\cdots d\bar{B}_n(t_k)\right|^2<\varepsilon$$

即ち $E\left|X(t)-\sum\int_0^t\cdots\int f_k(t_1-t,\cdots t_k-t)\,d\bar{B}_n(t_1)\cdots d\bar{B}_n(t_k)\right|^2<4\varepsilon$ (3.47)

一方

$$X(t)=e^{-\alpha t}X(0)+\beta\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}\,dB(s)$$

$$=e^{-\alpha t}X(0)+\beta\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}\,\Phi_n(s,\omega)\,d\bar{B}_n(s,\omega)$$

$$=e^{-\alpha t}X(0)+\sum_{k=0}^{[t]-1}\operatorname{sgn}X(\tau_k^{(n)}\omega)\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}}e^{-\alpha(t-s)}\,d\bar{B}_n(s)$$

$$+\operatorname{sgn}X(\tau_{[t]}^{(n)}\omega)\int_{\tau_{[t]}}^{t}e^{-\alpha(t-s)}\,dB(s)\qquad(3.48)$$

故に $0\leq t\leq\tau_1^{(n)}$ に対し

$$E(X(t)/X(0\,\omega)=c,\ \mathbb{B}_{[0\infty]}(d\bar{B}_n))$$

$$=-E(X(t)/X(0\,\omega)=-c,\ \mathbb{B}_{[0\infty)}(d\bar{B}_n))\qquad(3.49)$$

帰納法により (3.48)を用いると，(3.49) は $t\geq 0$ で成立する．
$X(0)$ と $\{\bar{B}_n(t)-\bar{B}_n(s)\ ;\ s\geq 0\}$ は互に独立なため，(3.49) より

$$E(X(t)/\mathbb{B}_{[0\infty]}(d\bar{B}_n))=0\qquad(3.50)$$

これは (3.47) と矛盾する．即ち $\mathbb{B}_t(dB)\neq\mathbb{B}_t(dB)$．　QED
X_t が平均 0 の平均連続な純非決定正規定常過程とすれば
定理 3.3 より

Sem. on Probab.
Vol.10 1961年
P1-103

定理3·4　$\int^t g(s-t)\,dB(s)$ を X の一次の真の標準表現とすれば f が X の標準核である必要十分条件は（3·51）を満す $\mathcal{G}$ が $\mathcal{F}$ の中に存在する事である。

"殆んどすべての $(t_1\cdots t_n)\in(-\infty,0]^n$ に対し

$$f_n(t_1\cdots t_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(t_i)\chi_{(-\infty t_i]^{n-1}}(t_1\dots t_{i-1}, t_{i+1}\cdots t_n)\varphi_{n-1}(t_1-t_i\cdots$$

$$\cdots t_{i-1}-t_i,\ t_{i+1}-t_i,\cdots t_n-t_i) \qquad (3\cdot 51)$$

定理3·4により正規定常過程の標準表現の次数が計算できる。

定理3·5　正規定常過程の標準表現の次数は1か∞である。

証　明　（3.51）より直接の計算より

$$\|f_n\|^2=\frac{1}{n}\|g\|^2\,\|\varphi_{n-1}\|^2$$

次に定理の證明の為には $\mathcal{G}_E\ (E\in\mathcal{B}_0(dB))$ の次数が0か∞である事を示せばよい。

$\mathcal{G}_E$ の次数 N が有限とする。即ち $\mathcal{G}_E=(\varphi_{E0},\ \varphi_{E1},\cdots\varphi_{EN}\ 0\ 0\cdot 0)$

$\{\theta_n,\ n=1.2\cdots\}$ を $L_2(-\infty\ 0]$ の完全正規直交系とする。

$\xi_n(\bar\omega)=\int_{-\infty}^{0}\theta_n(t)\,dB(t\ \bar\omega)$ とおけば一章定理2.5及びその系[1]により

$$\bar\chi_E(\bar\omega)=\sum_{p=0}^{N}\sum_{n}\sum_{p_1+\cdots+p_n=p}\sum_{\alpha_1\cdots\alpha_n} a^{\alpha_1\cdots\alpha_n}_{p_1\cdots p_n}\prod_{\nu=1}^{n}H_{p_\nu}\left(\frac{1}{\sqrt2}\,\xi_{\alpha_\nu}(\bar\omega)\right) \qquad (3.52)$$

ξ_1 のベキ　の形に直せば

$$=\sum_{\nu=0}^{N} C_\nu(\xi_2,\xi_3\cdots)\,\xi_1^{\nu}. \qquad (3.53)$$

即ち（$\xi_2(\bar\omega)$, $\xi_3(\bar\omega)\cdots$）を固定した時 $\bar\chi_E$ は ξ_1 の高々 N 次の多項式となる。所が $\bar\chi_E$ は1又は−1の値しか取らない為 ξ_1 が $(-\infty,\infty)$ の値をとる事に注意すれば、多項式の次数は0次でなければならない。

$$\bar\chi_E(\bar\omega)=C_0(\xi_2(\bar\omega),\ \xi_3(\bar\omega)\cdots\cdots)$$

再び ξ_2 の巾の形に直せば

$$\bar\chi_E(\bar\omega)=\sum_{\nu=0}^{N} C_\nu^{(1)}(\xi_3(\bar\omega),\ \xi_4(\bar\omega),\cdots)\,\xi_2^{\nu}(\bar\omega) \qquad (3.54)$$

---

(1)　一章定理2·5及び系は R' の代りに $(-\infty,0]$ としても同様に成立する。

Sem. on Probab.
Vol.10 1961年
P1-103

前と同様の理由で

$$\bar{\chi}_E(\tilde{\omega}) = C_0^{(1)}(\xi_3(\tilde{\omega}), \xi_4(\tilde{\omega}) \cdots)$$

この論議をくり返すと、$\bar{\chi}_E$ は任意のnに対し$(\xi_n, \xi_{n+1} \cdots)$ の可測函数となる. $\{\xi_n\}$は互に独立な確率変数の為, Kolmogorov の 0-1 法則より $\bar{\chi}_E$ は常数. 即ち $N = 0$となる. QED.

系. 一次の表現に於ては(従って$\mathfrak{X}$は正規定常過程) 真の標準表現と標準表現は同値である[1]

定理 3.5より一次の標準表現は符号を除いて一意的であるが一次の非標準表現は符号を除いても一意的でない。正規定常過程$Y(t) = B(t) - B(t-1)$は linear manifold については $m_Y(t) \neq \mathfrak{M}_{dB}(t)$ である事が Vol. 7より与えられるが、系を用いると $L_2(Y, t) \neq L_2(dB, t)$ がわかる.

§4. 表現の例

具体的な定常過程についても. それが表現を持つかどうかを定める事は、殆んど行われていないため, この節でも. 二つの例を述べ得るにすぎない。例 1は標準表現を持たない例で、例 2は真の標準表現を持つ例となって居る.

例 1 $\mathbb{P} = \{P(t, \omega), -\infty < t < \infty\}$を平均$\lambda$の可分ポアソン過程とする.

$$X(t, \omega) = P(t, \omega) - P(t-1, \omega) - \lambda$$

とおけば $\mathfrak{X}$ は純非決定的な強定常過程となるが, 標準表現を持たない。

<u>證 明 1</u> $\mathfrak{X}$の殆んどすべての見本過程($\omega \in \Omega_1$ とする)は飛躍の高さが 1 又は −1 の右連続階段函数となる.

$$D_m = \{\omega ;\ m > {}^{\exists}t > -m,\ P(t, \omega) - P(t-0, \omega) = P(t-1, \omega) - P(t-1-0, \omega) = 1\}$$

とおけば、明に

$$\Omega_1 \cap D_m \subset \Omega_1 \cap \Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} \{\omega ;\ m \geq {}^{\exists}\frac{k}{n} \geq -m,\ P(\tfrac{k}{n}, \omega) - P(\tfrac{k-1}{n}, \omega) \neq 0,\ P(\tfrac{k-n}{n}, \omega) - P(\tfrac{k-n-1}{n}, \omega) \neq 0\}\Big) \tag{4.1}$$

所がポアソン過程の独立性より $n(>2)$に対し

---

(1) この系は定理 3.5 を用いなくても直接に出来る〔15〕

Sem. on Probab.
Vol.10 1961年
P1-103

$$P\left\{P\left(\frac{k}{n}\right)-P\left(\frac{k-1}{n}\right)\neq 0,\ P\left(\frac{k-n}{n}\right)-P\left(\frac{k-n-1}{n}\right)\neq 0\right\}=\left(1-e^{-\frac{\lambda}{n}}\right)^2 \tag{4.2}$$

故に(4.1)の右辺のn番目の集合の確率測度は$2(m+1)n\left(1-e^{-\frac{\lambda}{n}}\right)$を越えない。故に(4.1)の右辺は確率$0$の集合となる。故に

$$P(D_m)=0$$

故に
$$P\left(\Omega_1\cap\left(\bigcap_{m=1}^{\infty}D_m^c\right)\right)=1 \tag{4.3}$$

任意に固定したS. tに対し

$$Z_n(\omega)=\sum_{k=1}^{n}\left(\left(X(\tau_k\ \omega)-X(\tau_{k-1}\ \omega)\right)\vee 0\right]^{(1)}\quad \tau_k=\frac{k(t-S)}{n}+S$$

とおけば $\omega\in\Omega_1\cap\left(\bigcap_{m=1}^{\infty}D_m^c\right)$ に対して$Z_n(\omega)$はnと共に増大しながら $P(t\ \omega)-P(S\ \omega)$ に近づく。故に$P(t)-P(S)$ は $\overline{\mathcal{B}}_t(\mathfrak{X})$—可測.
即ち $L_2(dP\ t)\subset L_2(\mathfrak{X}\ t)^{(2)}$ 又逆は明な為

$$L_2(dP,t)=L_2(\mathfrak{X}:t) \tag{4.4}$$

2. (4.4)より. $t\geq S\geq S'\geq t-1$ に対し

$$E(X(t)/\mathcal{B}_S(\mathfrak{X}))=P(S)-P(t-1)-\lambda(S-t+1) \tag{4.5}$$

$$E\left[\left|(X(t)/\mathcal{B}_S(\mathfrak{X}))-E(X(t)/\mathcal{B}_{S'}(\mathfrak{X}))\right|^2/\mathcal{B}_{S'}(\mathfrak{X})\right]=\lambda(S-S') \tag{4.6}$$

$$Y(t,\tilde\omega)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{t}\!\!\cdots\!\int f_n(t_1-t,\cdots t_n-t)\,dB(t_1\ \tilde\omega)\cdots dB(t_n\ \tilde\omega)$$
$$=\int_{-\infty}^{t}F(t\ u\ \tilde\omega)\,dB(u\ \tilde\omega)$$

を$\mathfrak{X}$の標準表現とする. (3.32)の證明と同様にして(4.6)より

$$F^2(t.\ u\ \ \tilde\omega)=\begin{cases}\lambda & t\geq u\geq t-1\\ 0 & u<t-1\end{cases}$$

故に $F(t.\ u.\ \tilde\omega)$は$\sqrt{\lambda}$ 又は$-\sqrt{\lambda}$ の値となり,

$$Y(t)=\int_{t-1}^{t}F(t.\ u\ \tilde\omega)\,dB(u\ \tilde\omega)$$

は正規分布 $N(0.\ \lambda)$ に従う. これは $\mathfrak{X}$ がポアソン過程と矛盾する.

---

(1) $a\vee b=\max(a.\ b)$

(2) Pの差分より作られるボレル集合体を$\mathcal{B}_t(dP)$とする.

Sem. on Probab.
Vol.10 1961年
P1-103

例2. generator $\mathcal{G}=A(x-B)^2\frac{d^2}{dx^2}+(Dx+E)\frac{d}{dx}$ $(x>B$ なるマルコフ過程は条件

$$A>0 \quad DB+E>0 \quad D<A \tag{4.7}$$

の下で唯一つの不変測度が存在して、且その密度函数は次の様になる[(1)]

$$P(y)=\text{const}\,(y-B)^{\frac{D}{A}-2}\exp\left(-\frac{DB+E}{A}\frac{1}{y-B}\right) \tag{4.8}$$

故に適当な空間Ωの上に generator $\mathcal{G}$ を持つ強定常マルコフ過程$\mathfrak{X}=\{X(t.\omega),\ -\infty<t<\infty\}$ が構成できる。更に

$$D<0 \quad -D>A>0 \tag{4.9}$$

を仮定すれば、$X(t)$ は有限な二次平均を持つ。

<u>證 明</u> $\mathcal{G}$ の形より

$$\lim_{t\to S} E(X(t\,\omega)-X(S\,\omega)/\mathcal{B}_S(\mathfrak{X}))=DX(S\,\omega)+E \tag{4.10}$$

$$\lim_{t\to S} E(X(t\,\omega)-X(S\,\omega)/\mathcal{B}_S(\mathfrak{X}))=\sqrt{2A}(X(S\,\omega)-B) \tag{4.11}$$

故に定理1.2より問1(a)の解となるウィナー彷徨測度dBが存在する。且、$\sqrt{2A}$ をαとおけば

$$X(t.\omega)=X(0\,\omega)+\int_0^t(DX(S\,\omega)+E)\,dS+\alpha\int_0^t(X(S.\omega)-B)\,dB(S.\omega) \tag{4.12}$$

$t_g^{-1}(X(t))$ と変換する事なしに定理1.3の證明を行う。

$a>b>B$ なる$a.\ b$ を任意に固定し、時間0で$a,\ b$ より出発した path を$X_a(t.\omega)$、$X_b(t.\omega)$ と表わす。(4.12)より

$$X_i(t.\omega)=i+\int_0^t D(X_i(S.\omega)+E)\,dS+\alpha\int_0^t(X_i(S\,\omega)-B)\,dB(S.\omega) \quad i=a.\ b \tag{4.13}$$

そこで $Y(t)=X_a(t)-X_b(t)$ とおけば Y は

$$Y(t+\tau)=Y(t)+\int_t^{t+\tau}DY(S)\,dS+\alpha\int_t^{t+\tau}Y(S)\,dB(S) \tag{4.14}$$

を満す。(4.14)を解けば

$$Y(t.\omega)=(a-b)\exp[(D-A)t+\alpha(B(t.\omega)-B(0\,\omega))] \quad t\geq 0 \tag{4.15}$$

故に

---

(1) 證明は H. Tanaka : On Limiting Distribution for One-dimensional Diffusion Processes Bull. Math Stat. 7 ('57)

Sem. on Probab.
Vol.10 1961年
P1-103

$$E|X_a(t)-X_b(t)| = |b-a|\, e^{\sigma t} \tag{4.16}$$

(4.16) の右辺は、tに無関係に $|b-a|$ で押えられ．且 $|b-a|$ は b の函数として (4.8) の測度により積分可能である．故に $\lim_{t\to\infty}$ と b による積分は交換できる．更に $X(0)$ と $\{B(t)-B(S),\ 0 \le S \le t\}$ は独立である事に注意すれば $a(>B)$ を固定したとき

$$\lim_{t\to\infty} E|X(t)-X_a(t)| = \lim_{t\to\infty} E\left[E\left(|X(t)-X_a(t)|/X(0)\right)\right]$$

$$= E\left(\lim_{t\to\infty} E\left(|X(t)-X_a(t)|/X(0)\right)\right) = 0 \tag{4.17}$$

一方 $X_a(t)$ は $\mathbb{B}_{[0t]}(dB)$-可測となる為

$$E|E(X(t)/\mathbb{B}_{[0t]}(dB)) - X_a(t)| \le E\left[E\left(|X(t)-X_a(t)|/\mathbb{B}_{[0t]}(dB)\right)\right]$$

$$= E|X(t)-X_a(t)| \xrightarrow[t\to\infty]{} 0 \tag{4.18}$$

(4.17) と (4.18) より

$$E|E(X(t)/\mathbb{B}_{[0t]}(dB)) - X(t)| \longrightarrow 0 \tag{4.19}$$

定常性より

$$E|E(X(t)/\mathbb{B}_{[0t]}(dB)) - X(t)| = E|E(X(0)/\mathbb{B}_{[-t,0]}(dB)) - X(0)| \tag{4.20}$$

且 $\lim_{t\to\infty} \mathbb{B}_{[-t,0]}(dB) = \mathbb{B}_0(dB)$ よりマルチンゲールにより

$$\lim_{t\to\infty} E(X(0)/\mathbb{B}_{[-t,0]}(dB)) = E(X(0)/\mathbb{B}_0(dB)) \tag{4.21}$$

故に (4.19) (4.20) 及び (4.21) より

$$X(0,\omega) = E(X(0)/\mathbb{B}_0(dB)) \qquad (a.e)$$

即ち，問1(b) が成立する．

この例では真の標準核が計算できる．問1(b) の成立より X_t の展開は次の様になる．

$$X(t,\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{t}\cdots\int f_n(t_1-t,\cdots t_n-t)\, dB(t_1,\omega)\cdots dB(t_n,\omega)$$

$$X_k(t,\omega) = \sum_{n=0}^{k} \int_{-\infty}^{t}\cdots\int f_n(t_1-t\cdots t_n-t)\, dB(t_1\omega)\cdots dB(t_n\omega)$$

Sem. on Probab.
Vol.10 1961年
P1-103

とおいたとき，任意に固定したs. tに対し，

$$E\left|\int_s^t X_k(\tau\,\omega)d\tau-\int_s^t X(\tau\,\omega)d\tau\right|^2\leq E\left(\int_s^t|X_k(\tau)-X(\tau)|^2d\tau\right)(t-s)^2=(t-s)^2\int_s^t E|X_k(\tau)-X(\tau)|^2d\tau\xrightarrow[k\to\infty]{}0 \qquad (4.22)$$

$$E\left|\int_s^t X_k(\tau)dB(\tau)-\int_s^t X(\tau)dB(\tau)\right|^2=\int_s^t E|X_k(\tau)-X(\tau)|^2d\tau\xrightarrow[k\to\infty]{}0 \qquad (4.23)$$

(4.22) 及び (4.23) より (4.12) の展開が得られる．即ち

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{t}\!\!\cdots\!\int f_n(t_1-t,\cdots t_n-t)dB(t_1)\cdots dB(t_n)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{0}\!\!\cdots\!\int f_n(t_1,\cdots t_n)dB(t_1)\cdots dB(t_n)$$

$$+D\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{\tau}\!\!\cdots\!\int f_n(t_1-\tau,\cdots t_n-t)dB(t_1)\cdots dB(t_n)$$

$$+Et+\alpha\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^t dB(\tau)\int_0^{\tau}\!\!\cdots\!\int f_n(t_1-\tau,\cdots t_n-\tau)dB(t_1)\cdots dB(t_n)$$

$$-\alpha B\int_0^t dB(\tau,\omega) \qquad (4.24)$$

展開の一意性より，0次の係数（常数項）については，任意の$t>0$に対し

$$f_0=f_0+Df_0\,t+Et$$

故に $f_0=-\dfrac{E}{D}$． 一次については

$$\int_{-\infty}^{t}f_1(t_1-t)dB(t_1)=\int_{-\infty}^{0}f_1(t_1)dB(t_1)+\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{\tau}Df_1(t_1-t)dB(t_1)$$

$$+\int_0^t\left(-\frac{E}{D}\alpha-\alpha B\right)dB(t_1)$$

故に殆んどすべてのt_1に対し

$$f_1(t_1-t)=\chi_{(-\infty,0)}(t_1)f_1(t_1)+D\int_{0\vee t_1}^{t}f_1(t_1-\tau)d\tau+\chi_{(0\,t)}(t_1)\left(-\frac{E}{D}\alpha-\alpha B\right) \qquad (4.25)$$

$f_1(s)=-\alpha\left(\dfrac{E}{D}+B\right)e^{-as}$ $(s\leq 0)$ が (4.25) の解となる事は直接代入すればわ

Sem. on Probab.
Vol.10 1961年
P1-103

かる。順繰りに n 次の方程式を作り、それを解けばよいが、その解は

$$f_n(t_1 \ldots t_n) = \frac{\alpha^n}{n!}\left(\frac{E}{D}+B\right) e^{-D(t_1 \wedge t_2 \wedge \cdots \wedge t_n)^{(1)}} \qquad (n \geq 1)$$

故に求める項の標準表現は

$$X(t\,\omega) = -\frac{E}{D} - \sum_{n=1} \int_{-\infty}^{t} \cdots \int \frac{\alpha^n}{n!}\left(\frac{E}{D}+B\right)^{-D[(t_1-t)\wedge\cdots\wedge(t_n-t)]} dB(t_1)\cdots dB(t_n)$$

§5. 強定常系列の表現

強定常過程の表現は、二章で述べた様に断片的な結果しか得られていないが、時間経数が離散である強定常系列の場合、特にマルコフ系列では或る程度まとまった結果が得られて居る。

$\mathfrak{X} = \{X_n(\omega),\ n=0\ \pm 1 \cdots\}$ が二次平均有限な強定常系列、T を H_X 上の推移変換とするとき、二章と同様、次の表現の問題が提起される。

問1 (a) 次の条件を満す確率変数 ξ_0 が存在するか

(i) ξ_0 は $\mathcal{B}(\mathfrak{X})$ - 可測 且 $\{X_i\ \ i \leq -1\}$ とは独立

(ii) $\overline{\mathcal{B}}_0(\mathfrak{X}) = \overline{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{-1}(\mathfrak{X}),\ \xi_0)$

(b) $\xi_n = T^n \xi_0$ とおけば $\{\xi_n\}$ は互に独立な確率変数列となるが、$\overline{\mathcal{B}}_n(\mathfrak{X}) = \overline{\mathcal{B}}_n(\Xi)$ となる条件

問2. $\eta = \{\eta_n(\tilde{\omega}),\ n=0,\ \pm 1, -\}$ を $\tilde{\Omega}$ 上の互に独立な $(0, 1)$ 上の一様分布に従う確率系列、$\tilde{T}$ を推移変換とする

$\zeta_n = \tilde{T}^n \zeta_0$ とおけば $\zeta = \{\zeta_n(\tilde{\omega}),\ n=0, \pm 1, \cdots\}$ は $\mathfrak{X}$ と同じ確率法則に従う。

<u>定義1</u> 確率系列 $\mathfrak{X}$ が純非決定的であるとは

$$L_2(\mathfrak{X}) \neq \{0\} \qquad L_2(\mathfrak{X}, -\infty) = \{0\} \qquad (5.1)$$

二章定理1.1は同様な形で成立する。

定義2. F, G を一次元分布函数 F, G の不連続点の集合を各々 D_F, D_G とする。D_F より D_G 上への飛躍の高さを変えない 1:1 対応 φ があったとき、即ち

---

(1) $a \wedge b = \min(a, b)$

Sem. on Probab.
Vol.10 1961年
P1-103

$$F(a)-F(a-0)=G(\Phi a)-G(\Phi a-0) \qquad a\in D_F.$$

F と G を同値と云う.

定理 1[1] 問 1 (a) が成立する必要十分条件は条件付分布函数 $F(x, \mathfrak{X}_{-1}(\omega)) \equiv F(X_0<x/\mathcal{B}_{-1}(\mathfrak{X}))$ 但 $\mathfrak{X}_{-1}^{(\omega)}\equiv\{\cdots X_{-2}^{(\omega)}X_{-1}(\omega)\}$ が殆んどすべての ω に対し, 同値な分布函数となる事である.

証明 必要性 ξ_0 の条件 (i) (ii) より

$$\xi_0(\omega)=f(X_0(\omega), \mathfrak{X}_{-1}(\omega)) \quad (a.e) \qquad X_0(\omega)=g(\xi_0(\omega), \mathfrak{X}_{-1}(\omega)) \quad a.e \qquad (5.2)$$

なる無限次元ボレル函数 f, g が存在する.

$$G(x)\equiv P(\xi_0<x)=P(\xi_0<x/\mathcal{B}_{-1}(\mathfrak{X}))$$

と G を定義すれば, 必要性を示す為には, 殆んどすべての ω に対し $F(\cdot, \mathfrak{X}_{-1}(\omega))$ と G が同値となる事を示せば十分である.

G- 測度 0 の例外集合を除いた残りの点 B に対して $\xi_0(\omega)=b$ ならば (5.2) より殆んどすべての $\mathfrak{X}_{-1}(\omega)$ に対し

$$X_0(\omega)=g(b, \mathfrak{X}_{-1}(\omega)) \qquad (5.3)$$

故に

$$P\left(X_0(\omega)=g(b, \mathfrak{X}_{-1}(\omega))/\mathcal{B}_{-1}(\mathfrak{X})\right) \geq P(\xi_0(\omega)=b) \qquad (5.4)$$

故に $b\in D_G$ なる b に対し, 殆んどすべての $\mathfrak{X}_{-1}(\omega)$ に対して

$$g(b, \mathfrak{X}_{-1}(\omega)) \in D_{F(\cdot, \mathfrak{X}_{-1}(\omega))}.$$ 一方, 又 (5.2) より

$$\xi_0(\omega)=f\left(g(\xi_0(\omega), \mathfrak{X}_{-1}(\omega)), \mathfrak{X}_{-1}(\omega)\right) \quad a.e \qquad (5.5)$$

故にフビニーの定理により, 殆んどすべての $\mathfrak{X}_{-1}(\omega)$ に対し, 殆んどすべての $\xi_0(\omega)$ に対し (5.5) は成立する. $\chi(\cdot, \mathfrak{X}_{-1}(\omega))$ を $D_{F(\cdot, \mathfrak{X}_{-1}(\omega))}$ の定義函数とするとき

$$\int_{-\infty}^{\infty} \chi(b, \mathfrak{X}_{-1}(\omega))\, dF(b, \mathfrak{X}_{-1}(\omega))=E\left(\chi(X_0(\omega), \mathfrak{X}_{-1}(\omega))/\mathcal{B}_{-1}(\mathfrak{X})\right)$$

---

(1) この定理は $F(x, \mathfrak{X}_{-1}(\omega))$ が確率 1 で x の連続函数となる場合, P. Lévy [11] により述べられて居る.

Sem. on Probab.
Vol.10 1961年
P1-103

$$= E\left(\chi(\mathcal{g}(\xi_0(\omega), \mathfrak{X}_{-1}(\omega)), \mathfrak{X}_{-1}(\omega))/\mathcal{B}_{-1}(\mathfrak{X})\right)$$

$$= \int \chi(\mathcal{g}(b, \mathfrak{X}_{-1}(\omega))\mathfrak{X}_{-1}(\omega))\, d\mathfrak{G}(b) = \int_{D_{\mathfrak{G}}} \text{〃}\, d\mathfrak{G}(b) + \int_{D_{\mathfrak{G}}^c} \text{〃}\, d\mathfrak{G}(b)$$

所が $\chi(\cdot, \mathfrak{X}_{-1}(\omega))$ は殆んどすべての $\mathfrak{X}_{-1}(\omega)$ に対し 可附番の点以外では 0 となるため $\mathfrak{G}$ ー測度の連続部分（即ち積分の第二項）

$$\int_{D_{\mathfrak{G}}^c} \chi(\mathcal{g}(b, \mathfrak{X}_{-1}(\omega)), \mathfrak{X}_{-1}(\omega))\, d\mathfrak{G}(b) = 0 \qquad (5.6)$$

故に

$$\int_{D_{F(\cdot, \mathfrak{X}_{-1}(\omega))}} dF(b, \mathfrak{X}_{-1}(\omega)) = \int_{D_{\mathfrak{G}}} \chi(\mathcal{g}(b, \mathfrak{X}_{-1}(\omega)), \mathfrak{X}_{-1}(\omega))\, d\mathfrak{G}(b) \qquad (5.7)$$

故に

$$\int_{D_{F(\cdot, \mathfrak{X}_{-1}(\omega))}} dF(b, \mathfrak{X}_{-1}(\omega)) \le \int_{D_{\mathfrak{G}}} d\mathfrak{G}(b) \qquad (5.8)$$

今（5.4）で実際不等式の成立する $b(\in D_{\mathfrak{G}})$ が存在すれば

$$\int_{D_{\mathfrak{G}}} d\mathfrak{G}(b) < \int_{D_{F(\cdot, \mathfrak{X}_{-1}(\omega))}} dF(b, \mathfrak{X}_{-1}(\omega)) \qquad (5.9)$$

これは (5.8) と矛盾するため すべての $b(\in D_{\mathfrak{G}})$ に対し

$$\mathfrak{G}(b) - \mathfrak{G}(b-0) = F(\mathcal{g}(b, \mathfrak{X}_{-1}(\omega)), \mathfrak{X}_{-1}(\omega)) - F(\mathcal{g}(b, \mathfrak{X}_{-1}(\omega)) - 0, \mathfrak{X}_{-1}(\omega))$$

即ち $F(\cdot, \mathfrak{X}_{-1}(\omega))$ と $\mathfrak{G}$ は同値となる.

十分性：同値な $F(\cdot, \mathfrak{X}_{-1}(\omega_0))$ を任意に一つ固定し $\mathfrak{G}$ とする.
即ち 殆んどすべての $\mathfrak{X}_{-1}(\omega)$ に対し $F(\cdot, \mathfrak{X}_{-1}(\omega))$ は $\mathfrak{G}$ と同値となる.

$P_i = \mathfrak{G}(b_i) - \mathfrak{G}(b_i - 0)$ $\quad P_1 \ge P_2 \ge \cdots$ $\quad D_{\mathfrak{G}} = \{b, b_2 \cdots\}$ とする.
$\eta(\mathfrak{X}_{-1}(\omega))$ を $D_{\mathfrak{G}}$ より $F(\cdot, \mathfrak{X}_{-1}(\omega))$ 上への 1:1 且跳躍の高さを変えない対応とする. 即ち

$$F(\eta(\mathfrak{X}_{-1}(\omega))\, b_i,\ \mathfrak{X}_{-1}(\omega)) - F(\eta(\mathfrak{X}_{-1}(\omega))\, b_i - 0,\ \mathfrak{X}_{-1}(\omega)) = P_i$$

ξ_0 を次の様に定義する.

Sem. on Probab.
Vol.10 1961年
P1-103

$$\xi_0(\omega) \equiv \begin{cases} j & X_0(\omega)=\eta(\mathbb{X}_{-1}(\omega))\,b_j \quad \text{の時} \\ F(X_0(\omega), \mathbb{X}_{-1}(\omega)) - \sum\limits_{j:\eta(\mathbb{X}_{-1}(\omega))b_j < X_0(\omega)} p_j & X_0(\omega) \neq \eta(\mathbb{X}_{-1}(\omega))\,b_i \ \text{の時} \\ & i=1,2\cdots \end{cases} \qquad (5.10)$$

$j=1,2\cdots$ に対し

$$P(\xi_0(\omega)=j\,/\,\mathcal{B}_{-1}(\mathbb{X})) = P(X_0(\omega)=\eta(\mathbb{X}_{-1}(\omega))\,b_j\,/\,\mathcal{B}_{-1}(\mathbb{X}))$$

$$= F(\eta(\mathbb{X}_{-1}(\omega))\,b_j,\ \mathbb{X}_{-1}(\omega)) - F(\eta(\mathbb{X}_{-1}(\omega))\,b_j-0,\ \mathbb{X}_{-1}(\omega)) = p_j \qquad (5.11)$$

$$F_c(x,\ \mathbb{X}_{-1}(\omega)) = F(x,\ \mathbb{X}_{-1}(\omega)) - \sum_{j:\eta(\mathbb{X}_{-1}(\omega))b_j < x} p_j$$

とおけば F_c は F の連続部分を与える　$1-\sum_j p_j > x$ なる x に対し

$$P(\xi_0(\omega) \le x/\mathcal{B}_{-1}(\mathbb{X})) = P(F_c(X_0(\omega),\ \mathbb{X}_{-1}(\omega)) \le x/\mathcal{B}_{-1}(\mathbb{X}))$$

$$= P(X_0(\omega) \le F_c^{-1}(x,\ \mathbb{X}_{-1}(\omega))/\mathcal{B}_{-1}(\mathbb{X})) = F(F_c^{-1}(x, \mathbb{X}_{-1}(\omega)), \mathbb{X}_{-1}(\omega)) = x \qquad (5.12)$$

(5.11) 及び (5.12) より ξ_0 は $\mathbb{X}_{-1}$ と独立な $\mathcal{B}_0(\mathbb{X})$-可測な確率変数となる.

ξ_0 の定義 (5.10) を逆に解けば

$$X_0(\omega) = \begin{cases} \eta(\mathbb{X}_{-1}(\omega))\ b_{\xi_0(\omega)} & \xi_0(\omega) \ge 1 \\ F_c^{-1}(\xi(\omega),\ \mathbb{X}_{-1}(\omega)) & \xi_0(\omega) \le 1-\sum_j p_j \ \text{の時} \end{cases} \qquad (5.13)$$

こゝで些細な事であるが F_c^{-1} は flat な所では右端とする.
(5.13)により　ξ_0　は条件 (ii) を満す事がわかる.　　　　Q.E.D.

系 1.　$\mathbb{X}$ が状態空間 $\{1,2\cdots n\}$ の定常マルコフ系列の時
その推理確率を

$$P_{ij} = P(X_0=j/X_{-1}=i) \qquad \mathbb{P}=(P_{ij})$$

確率分布　$P_i = P(X_0=i)$,　$(P_{ij},\ P_i)$ をすべて正とする.

$\mathbb{X}$ が同 1 (a)　を満す必要十分条件は各 i, i' に対し　次の条件を満す $\{1,\cdots n\}$ 上の順列 $M(i,i')$ が存在する事である.

$$P_{ij} = P_{i'}\,M(i,i')j \qquad j=1\cdots n \qquad (5.14)$$

即ち、行列 $\mathbb{P}$ の各行は一行目の適当な順列により得られる.　推移行列がこの条件 (5.14) を満すとき　一様マルコフ系列と云う.

Sem. on Probab.
Vol.10 1961年
P1-103

系2. 更に $g_i = P_i$ とおき $g_1 > g_2 > \quad > g_n$ のとき.
問1 (a) の解となる ξ_0 は

$$\xi_0(\omega) = \sum_{k=1}^{n} k \chi_{A_k}(\omega) \qquad 但 \quad A_k = \{\omega \,;\, P_{X_{-1}(\omega),\, X_0(\omega)} = g_k\} \tag{5.15}$$

で与えられる.

証明. 系1は定理より明. 系2の ξ_0 が解となる事は明である.
値域が $\{1, 2 \cdots n\}$ なる確率変数 η が問1 (a) の解とする.

$$B_i = \{\omega \,;\, \eta(\omega) = i\} \quad とおけば \qquad \eta(\omega) = \sum k \chi_{B_k}(\omega)$$

所が $\overline{\mathcal{B}}_0(\mathfrak{X}) = \mathcal{B}(\xi_0, \overline{\mathcal{B}}_{-1}(\mathfrak{X}))$ より A_i に含まれる $\overline{\mathcal{B}}_0(\mathfrak{X})$ の元は
$A_i \cap E$. $E \in \overline{\mathcal{B}}_{-1}(\mathfrak{X})$ と表わされる.

$$A_{ij} = \{\omega : \xi_0(\omega) = i, \ \eta(\omega) = j\}$$

とおく. $i < j$ 且 $P(A_{ij}) > 0$ なる (i, j)
が存在したと仮定すれば, $A_{ij} \subset A_i$. $A_{ij} \in \overline{\mathcal{B}}_0(\mathfrak{X})$
故に $\overline{\mathcal{B}}_{-1}(\mathfrak{X})$ の中に E が存在して $A_{ij} = A_i \cap E$ となる

$$P(A_{ij} \,/\, \mathcal{B}_{-1}(\mathfrak{X})) = \begin{cases} g_i & \text{on } E \\ 0 & \text{on } E^c \end{cases}$$

A_{ij} の定義より $A_{ij} \subset B_j$ 故に $P(A_{ij} \,/\, \mathcal{B}_{-1}(\mathfrak{X})) \leq g_j < g_i$

故に $\qquad P(A_{ij} \,/\, \mathcal{B}_{-1}(\mathfrak{X})) = 0$

故に $\qquad P(A_{ij}) = 0$ 　これは仮定と矛盾する.

即ち $\qquad \eta = \xi_0 \quad (a.e)$

定理2. $\mathfrak{X}$ が $(g_1 \cdots g_n)$ がすべて異る一様定常マルコフ系列とする.
$(g_1 > g_2 \cdots > g_n$ とする) 問1 (b) が成立する必要十分条件は
$(M(1), \cdots M(n))$ の適当な有限積で或列に1が並び, 他の列はすべて0と
なる行列 $\begin{pmatrix} 0 \cdot 0 1 0 \cdots 0 \\ 0 - 0 1 0 \cdots 0 \end{pmatrix}$ が作れる事である.

但 $M(k) = (M_{ij}(k)) \qquad M_{ij}(k) = \begin{cases} 1 & P_{ij} = g_k \\ 0 & その他 \end{cases}$

証明
行列 $M(k)$ は各行が一つの1と $n-1$ ケの0より成る. しかも有限積 $\prod M(k_i)$

Sem. on Probab.
Vol.10 1961年
P1-103

も同じ型の行列となる.

十分性. $M(k_1)M(k_2)\cdots M(k_s)=\begin{pmatrix} 0\cdots 1 \\ 0\ \vdots\ 0 \end{pmatrix}$ (i列に1が並ぶとする) (5.16)
(5.15) で定まるξ_0 に対し $\xi_n=T^n\xi_0$ とおけば

$$\xi_n(\omega)=\sum_{k=1}^{n} k\ \chi_{\{\omega;\ p_{x_{n-1}(\omega),x_n(\omega)}=g_k\}}$$

$C_j\equiv\{\omega;\ \xi_j(\omega)=k_1,\cdots\ \xi_{j+s}(\omega)=k_s\}$ とおけば C_j に属するωに対し. $X_{j+s}(\omega)=i$ となる. 何故ならば $\xi_j(\omega)=k$ なるωに対し $X_{j-1}(\omega)$ より $X_j(\omega)$ えの変換は$M(k)$ で定まる. 即ち

$$\begin{pmatrix} j_1 \\ \vdots \\ j_n \end{pmatrix}=M(k)\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} \quad \text{とおけば}\quad X_{j-1}(\omega)=i.$$

$\xi_j(\omega)=k$ の時 $X_j(\omega)=j_i$ である. この変換をV_k とおく.

仮定(5.16) より任意のlに対し $V_{k_s}V_{k_{s-1}}\cdots V_{k_1}\ l=i$ (5.17)
即ち. X_{j-1}の値で何であっても C_j に属するωに対し $X_{j+s}(\omega)=i$ となる.

C_j は$(\xi_j\cdots\xi_{j+s})$の可測集合の為 C_{n-s} $C_{n-2s},\cdots$ は互に独立.
且 $P(C_{n-js})=g_{k_1}\cdots g_{k_s}>0$ である.

故に Borel-Cantelli の定理より

$$P(\varlimsup_j C_{n-js})=1 \tag{5.18}$$

$S_2\equiv C_{-2s}$ $S_3\equiv C_{-2s}\cap C_{-2s},\cdots S_j\equiv C_{-js}\cap(C_{-2s}\cup\cdots\cup C_{-js+s})^c\cdots$

とおけば $\{S_j\}$ は互に素な可測集合 $(\mathcal{B}_0(\xi))$ である.

(5.18) より 明に $P(\bigcup_j S_j)=1$ (5.19)

(5.17) より S_jに属するωに対しては $X_{-js+s}(\omega)=i$ 故に

$$X_0(\omega)=\sum_{j=2}^{\infty} V_{\xi_0}\cdots V_{\xi_{-js+s+1}}\ i\ \chi_{S_j}(\omega) \tag{5.20}$$

右辺は$\mathcal{B}_0(\xi)$- 可測より問1(b) は成立する

必要性 問1(b) が成立するとすれば

$$0=E|X_0 - E(X_0/\mathcal{B}_0(\xi))|=\lim_{N\to\infty}E|X_0-E(X_0/\xi_{-N}\cdots\xi_0)| \tag{5.21}$$

$\xi=\{\xi_n,\ n=0,\pm1\cdots\}$ を問1(b) の解とし $X_n=V_{\xi_0}\cdots V_{\xi_{-N}}X_{N-1}$ と

Sem. on Probab.
Vol.10 1961年
P1-103

すれば $E(X_0/\xi_{-n}\cdots\xi_0)=\sum_{i=1}^{n} V_{\xi_0}\cdots V_{\xi_{-n}}\ i\cdot P_i$ ……(5.22)

$\{ i-\sum_{j=1}^{n}\pi_j P_j \ , \ i=1\cdots n\ \pi,\ \pi=(\pi_1\cdots\pi_n)$. $(1\cdots n)$ の順列$\}$ の中で正の最小値より小さく $\varepsilon(>0)$ を任意に固定する。適当に ω_0 を $X_0(\omega_0)=1$ なる様に固定した時 充分大きな N に対し (5.21) より

$$|X_0(\omega_0)-E(X_0/\xi_{-N}(\omega_0)\cdots\xi_0(\omega_0))|<\varepsilon \qquad (5.23)$$

故に ε のえらび方より (5.22) を代入すれば

$$X_0(\omega_0)-\sum_{i=1}^{n} V_{\xi_1(\omega)}\cdots V_{\xi_{-N}(\omega_0)}\ iP_i=0 \qquad (5\cdot 24)$$

$P_i>0\quad i=1\cdots n$ より

(5.24) が成立する必要十分条件は

$$V_{\xi_0(\omega_0)}\cdots V_{\xi_{-N}(\omega_0)}\quad i=1 \qquad i=1\cdots n \qquad (5\cdot 25)$$

故に V_k に対応する行列を $M(k)$ とすれば (5.25) より

$$M(\xi_0(\omega_0))\cdots M(\xi_{-N}(\omega_0))=\begin{pmatrix}1&0\cdots&0\\1&0&\vdots&0\\ \vdots&&0\end{pmatrix}\ (1\text{ は }1\text{ 列目})\quad QED$$

実際の場合 n が大きければ定理2の条件を確かめる事は 可成り面倒である。次の例は 純非決定なマルコフ系列で問1(a)は成立し、問1(b)は成立しない例である。

例 X_n は状態空間が $\{1,2\}$ で次の確率法則を持つ。

$$P(X_0=1)=P(X_0=2)=\frac{1}{2} \qquad \mathbb{P}=\begin{pmatrix}p&q\\q&p\end{pmatrix},\quad 0<q=1-p<1,$$

X_n は一様マルコフ系列の為問1(a)の解となる事は

$$\xi_n=\begin{cases}1 & (X_{n-1},X_n)=(1,1)\text{ 又は }(2,2)\\ 2 & \text{その他}\end{cases}$$

$$M(1)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \quad M(2)=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$ となるため

$M^2(2)=M^2(1)=M(1)\quad M(2)M(1)=M(1)M(2)=M(2)$ より定理2の条件は成立しない。即ち問1(b)は成立しない。

条件附確率が連続測度となると問1(a)の解が一意でない為、ξ_0 のとり方により 問1(b)が成立する場合と しない場合が起る。

次の例は、技巧的であるが、それを示す。

Sem. on Probab.
Vol.10 1961年
P1-103

例．Xは状態空間$[0,1]$の定常マルコフ系列で，推移確率

$P(a, E)=P(X_n\in E/X_{n-1}=a)$が次の密度函数$P(a,b)$を持つとする

$\{b_i\ \ i=0\pm 1\cdots\}$が$0,1$に集積する狭義の増加数列

$S=\bigcup_i\{y: b_{2i}\le y<b_{2i+1}\}$とおく．又$\{P_i\ \ i=0,\pm\cdots\}$を$\sum_i P_i=1$なる正数列とする．

$$P(a,b)=\begin{cases}\dfrac{P_i}{b_{i+1}-b_i} & b_i\le b<b_{i+1} \quad a\in S\\[2mm] \dfrac{P_i}{b_i-b_{i-1}} & b_{i-1}\le b<b_i \quad a\in S^c\end{cases}\tag{5.26}$$

この推移確率に対し，不変測度φが存在し，且任意のaに対し

$$P^{(\nu)}(a,E)\xrightarrow[\nu\to\infty]{}\varphi(E)$$

条件付確率 $F(x,a)\equiv P(X_0<x/X_{-1}=a)=\int_{-\infty}^{x}P(a,b)\,db$

を具体的に計算すれば

$$F(x,a)=\begin{cases}\sum_{j\le i-1}P_j+\dfrac{x-b_i}{b_{i+1}-b_i}P_i & a\in S. \quad b_i\le x<b_{i+1}\\[2mm] \sum_{j\le i}P_j+\dfrac{x-b_i}{b_{i+1}-b_i}P_{i+1} & a\in S^c \quad b_i\le x<b_{i+1}\end{cases}\tag{5.27}$$

故に $\xi_n=F(X_n,X_{n-1})$ とおけば ξ_n は$\{X_i,\ i\le n-1\}$

と独立な$[0,1]$上の一様分布に従う確率変数となる．

$X_n=V_{\xi_n}X_{n-1}$ なるVを具体的に書けば(5.27)を解く事により．

$$V_y a=\begin{cases}b_i+\dfrac{b_{i+1}-b_i}{P_i}\Big(y-\sum_{j\le i-1}P_j\Big) & a\in S\\[2mm] b_{i-1}+\dfrac{b_i-b_{i-1}}{P_i}\Big(y-\sum_{j\le i-1}P_j\Big) & a\in S^c\end{cases}\tag{5.28}$$

故に a,a' が共にS（又はS^c）に属する時

$$V_y a=V_y a'\tag{5.29}$$

所が a,a' が各々SとS^cに分れて属する時 $V_y a$ と $V_y a'$ は共にS（又はS^c）に入る事はできない．従って $V_{\xi_n}\cdots V_{\xi_1}a$ と $V_{\xi_n}\cdots V_{\xi_1}a'$ も共にS（又はS^c）に入る事は出来ない．即ち，P_i を超えない任意の正数εに対し，

Sem. on Probab.
Vol.10 1961年
P1-103

$\sum_{j\le i-1} P_j + \varepsilon < y < \sum_{j\le i} P_j$ なる y に対し，a と a' が各々 S，S^c に分れて属するとき $|V_y a - V_y a'| \ge \varepsilon \frac{b_{i+1}-b_i}{P_i} > 0$ (5.30)

故に $\sum_{j\le i-1} P_j + \varepsilon < \xi_n < \sum_{j\le i} P_j$ なる ξ_n に対し，$\xi_{n-1}, \cdots, \xi_1$ が何であっても，a，a' が各々 S，S^c に分れて属するとき

$$|V_{\xi_n} V_{\xi_{n-1}} \cdots V_{\xi_1} a - V_{\xi_n} V_{\xi_{n-1}} \cdots V_{\xi_1} a'| \ge \varepsilon \frac{b_{i+1}-b_i}{P_i} \qquad (5.31)$$

故に $E|X_n - E(X_n/\xi_0 \cdots \xi_n)| \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$

即ち $\mathcal{B}_n(\xi) \neq \mathcal{B}_n(X_n)$.

而し，ξ_n を次の様に変形すると，問1 (b) の解となる．

$P_i \le P_{i+1}$ なる i を任意に固定し，$f(\alpha, a)$ を次の様に定義する

$a \in S$ の時 $f(\alpha, a) = \alpha$

$$a \in S^c \text{ の時 } f(\alpha, a) = \begin{cases} \alpha \\ \sum_{j\le i+1} P_j - (\sum_{j\le i} P_j - \alpha) & \alpha \in (\sum_{j\le i-1} P_j, \sum_{j\le i} P_j) \\ \sum_{j\le i-1} P_j + (\alpha - \sum_{j\le i} P_j) & \alpha \in (\sum_{j\le i} P_j, \sum_{j\le i+1} P_j) \end{cases} \qquad (5.32)$$

即ち f は $(\sum_{j\le i-1} P_j, \sum_{j\le i} P_j)$ と $(\sum_{j\le i} P_j, \sum_{j\le i+1} P_j)$ の二つの区间の順序の入れ変えを与える．故に $a \in S^c$ の時 $\alpha \in (\sum_{j\le i-1} P_j, \sum_{j\le i} P_j)$

ならば $f(\alpha, a) \in (\sum_{j\le i} P_j, \sum_{j\le i+1} P_j)$ となる．($P_i \le P_{i+1}$ より) a を固定して α の函数として $f(\alpha, a)$ の逆函数を $g(\alpha, a)$ とする．即ち

$a \in S$ の時 $g(\alpha, a) = \alpha$

$$a \in S^c \text{ の時 } g(\alpha, a) = \begin{cases} \alpha \\ \sum_{j\le i} P_j + (\alpha - \sum_{j\le i-1} P_j) & \alpha \in (\sum_{j\le i-1} P_j, \sum_{j\le i-1} P_j + P_{i+1}) \\ \sum_{j\le i} P_j - (\sum_{j\le i+1} P_j - \alpha) & \alpha \in (\sum_{j\le i-1} P_j + P_{i+1}, \sum_{j\le i+1} P_j) \end{cases} \qquad (5.33)$$

$$\widetilde{V}_\alpha a = V_{f(\alpha, a)} a \qquad (5.34)$$

とおけば $\alpha \in (\sum_{j\le i-1} P_j, \sum_{j\le i} P_j)$ ならば a に無関係に (5.28) より

$$\widetilde{V}_\alpha a \in (b_i, b_{i+1}) \qquad (5.35)$$

Sem. on Probab.
Vol.10 1961年
P1-103

を得る. 故に $\alpha \in (\sum_{j \le i-1} p_j \ \sum_{j \le i} p_j)$ ならば. 任意の a, a' β に対し

$$\tilde{V}_\beta \ \tilde{V}_\alpha \ a = \tilde{V}_\beta \ \tilde{V}_\alpha \ a' \tag{5.36}$$

$$\tilde{\xi}_n(\omega) = g(\xi_n(\omega), X_{n-1}(\omega)) \tag{5.37}$$

とおけば $\tilde{\xi}_n$ も亦 $\{X_i \ \ i \le n-1\}$ と独立になり且. 一様分布に従う 又、$X_n = V_{\xi_n} X_{n-1} = \tilde{V}_{\tilde{\xi}} X_{n-1}$ より $\tilde{\xi}_0$ も問1 (a) の解となる.

$$A_k = \{ \omega ; \ \tilde{\xi}_k(\omega) \in (\sum_{j \le i-1} p_j \ \sum_{j \le i} p_j) \} \quad S_k = A_k \cap (A_{-2} \cup A_{-3} \cdots \cup A_{k+1})$$
$$k = -2, -3 \cdots\cdots$$

とおけば $\{ S_k \ \ k = -2, -3 \cdots \}$ は互に素な $\mathcal{B}_0(\tilde{\xi})$ に属する集合系となり

$$P(\bigcup_{k \le -2} S_k) = 1 \tag{5.38}$$

(5.36) より $\omega \in S_k$ ならば. 任意の $\hat{b}_i \in (b_i \ b_{i+1})$ に対し

$$X_{k+2}(\omega) = \tilde{V}_{\tilde{\xi}_{k+2}} \ \tilde{V}_{\tilde{\xi}_{k+1}} X_k(\omega) = \tilde{K}_{\tilde{\xi}_{k+1}} \ \hat{b}_i \tag{5.39}$$

故に $$X_0(\omega) = \sum_{k=2}^{\infty} \chi_{S_k}(\omega) \ \tilde{V}_{\tilde{\xi}_0} \ \tilde{V}_{\tilde{\xi}_1} \cdots \tilde{V}_{\tilde{\xi}_{-k+2}} \ \hat{b}_i \tag{5.40}$$

Q E D

<u>定理3</u> Xが状態空間 $\{1, \cdots n\}$ 且 推移確率 P_{ij} 確率測度 P_i がすべて正なる定常マルコフ系列とする. この時問2は成立する.

<u>証 明</u> Xの定義されている確率空間を Ω, Ω' を無限次元ルベーグ測度空間 $[0, 1]^{\aleph_0}$ $\hat{\Omega} = \Omega \times \Omega'$ とする. $\hat{\Omega}$ を新しい確率空間とし. $X_n(\hat{\omega}) = X_n(\omega)$ $U_n(\hat{\omega}) = \omega'_n$ (ω' の n-th 座標) とすれば X と U は互に独立な確率系列となる. 又 $\{U_n\}$ は $(0, 1)$ 上の一様分布を持つ互に独立な確率変数系となる.

$$Y_n(\hat{\omega}) = X_n(\hat{\omega}) + U_n(\hat{\omega}) \tag{5.41}$$

とおけば

$$X_n(\hat{\omega}) = [Y_n(\hat{\omega})] \ \ a.e \quad U_n(\hat{\omega}) = (Y_n(\omega))^{(1)} \ \ a.e \tag{5.42}$$

故に $\hat{\mathcal{B}}_n(Y) = \bar{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_n(X), \mathcal{B}_n(U))$

$[j, j+1)$ に含まれる区間 (a, b) に対し

$$P(Y_n \in (a, b)/\mathcal{B}_{n-1}(Y)) = P(X_n = j, \ U_n \in (a-j, b-j)/\mathcal{B}_{n-1}(Y))$$

(1) (α) は α の小数部分

Sem. on Probab.
Vol.10 1961年
P1-103

$$= P(U_n \in (a-j, b-j)/\mathcal{B}_{n-1}(\mathbb{Y})\, X_n = j) P(X_n = j/\mathcal{B}_{n-1}(\mathbb{Y}))$$

$$= P(U_n \in (a-j, b-j)\ P(X_n = j/\mathcal{B}_{n-1}(\mathbb{X})) = (b-a)\, P_{X_{n-1}, j}$$

即ち $\mathbb{Y}$ は推移確率が密度函数 $P(y, y')$

$$P(y, y') = P_{ij} \quad j \leq y' < j+1, \quad i = \leq y < i+1$$

を持ち 確率測度が密度函数 $P(y)$

$$P(y) = P_j \quad j \leq y < j+1$$

を持つマルコフ系列となる.

故に条件附確率を利用して $\mathbb{Y}$ に対する問 1 (a) の解を求めると

$$P(Y_0 < \alpha / Y_{-1}) = \sum_{j=1}^{[\alpha]-1} P_{[Y_{-1}], j} + (\alpha) P_{[Y_{-1}], [\alpha]}$$

故に

$$\xi_0 = \sum_{j=1}^{[Y_0]-1} P_{[Y_{-1}] j} + (Y_0) P_{[Y_{-1}][Y_0]}$$

は問 1 (a) の解となる. 更に $Y_0 = V_{\xi_0} Y_{-1}$ を具体的に書けば $Y_{-1} \in (i, i+1)$ に対し

$$[Y_0] = y \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{y-1} P_{ij} \leq \xi_0 < \sum_{j=1}^{y} P_{ij} \tag{5.43}$$

$$(Y_0) = \left(\xi_0 - \sum_{j=1}^{y-1} P_{ij}\right) / P_{i[Y_0]} \tag{5.44}$$

即ち Y_0 は ξ_0 と X_0 の値により求まる.

$g = \min_{ij} P_{ij}$ とおき $[\gamma, \delta] \subset (0, g)$ なる様に任意に γ, δ を固定しておく. (5.43) より, $\alpha \in [\gamma, \delta]$ に対し. 任意の Y_{-1} の値に対して

$$[Y_0] = 1 \qquad \text{即ち} \quad V_\alpha Y_{-1} \in (1, 2] \tag{5.45}$$

故に $\alpha, \alpha' \in [\gamma, \delta]$ に対し (5.43) (5.44) 及び (5.45) より.

$$V_\beta V_\alpha Y_{-1} = V_\beta V_{\alpha'} Y_{-1} \tag{5.46}$$

$A_j \equiv \{\hat{\omega}\ ;\ \gamma \leq j \leq \delta\}$ とおけば $\{A_j\}$ は互に独立な事象となる

$S_j = A_j \cap (A_{-1} \cup A_{-2} \cup \cdots A_{k+1})^c \qquad j \leq -1$

Sem. on Probab.
Vol.10 1961年
P1-103

とおけば $\{S_j \ ; \ j \leq -1\}$ は互に排反する $\mathcal{B}_{-1}(\mathfrak{Z})$ の元で，$\bigcup_{j \leq -1} S_j$ は確率測度 1 の集合となる。（5.45）より $\hat{\omega} \in S_j$ に対し

$$V_{\xi_j} \, Y_{j-1} \ \in (1.2)$$

故に $C \in (1,2)$ を任意に固定すれば $\hat{\omega} \in S_j$ に対し，（5.46）より

$$Y_{j+1}(\hat{\omega}) = V_{\xi_{j+1}}(\omega) V_{\xi_j}(\omega) Y_{j-1}(\hat{\omega}) = V_{\xi_{j+1}}(\omega)\, C \qquad (5.47)$$

故に $$Y_0(\hat{\omega}) = \sum_{j \leq -1} \chi_{S_j}(\hat{\omega}) V_{\xi_0}(\hat{\omega}) \cdots\cdots V_{\xi_{j+1}}(\hat{\omega})^{\,C} \qquad (5.48)$$

故に（5.42）より $\mathfrak{X}$ に対し問 2 は成立する。　　QED

猶 $\mathfrak{X}$ と $\mathfrak{U}$ の独立性より $\overline{\mathcal{B}}_n(\mathfrak{Y}) = \overline{\mathcal{B}}_n(\mathfrak{Z})$ に注意すれば

$$\left(L_2(\mathfrak{X}) \ominus L_2(\mathfrak{X}, n)\right) \perp L_2(\mathfrak{Z}, n)$$

Sem. on Probab.
Vol.10 1961年
P1-103

文 献 表

(1) J. L. Doob : Stochastic processes Wiley 1952.

(2) T. Hida : Canonical representation of Gaussian processes and their applications. Mem. Colleg. of Sci Univ. of Kyoto A-vol 33, ('60) 109-155.

(3) 〃 : Gaussian processの表現とその応用. Seminer on probability vol 7

(4) K. Ito : Multiple Wiener Integral. Jour Math Soc. Japan. vol 3 ('51) 157-169.

(5) 〃 Complex Multiple Wiener Integral. Jap. Jour of Math. vol 22 ('52) 63-86

(6) 〃 : On stochastic differential equations: Mem. Amer Math. Soc 4 ('51)

(7) 〃 : 重複ウィナー積分について. (北川編) 確率論及び推計学の進歩 ('53) 1-17 岩波

(8) 〃 : 確率論 ('53) 岩波

(9) 〃 : 確率過程 1. 岩波講座 現代応用数学

(10) 〃 : Spectral type of the shift transformation of differential processes with stationary increments, Trans of Amer. Math. Soc. Vol 81 ('56) 253-263.

(11) P. Lévy : Théorie de l'additions des variables aléatoires Paris 1937

(12) 〃 : Esquisse d'une théorie de la multiplication des variables aléatoires, Ann. l'Ecole norm. Sup. Tom 76 ('59) 59-82

(13) P. R. Halmos : Lectures on Ergodic Theory. Publ. Math. Soc Japan. No.3. (1957)

(14) M. Nisio : On polynomial approximation for strictly stationary processes. Jour.

Math Soc. of Japan. Vol 12 ('60) 207-226

[15] : Remark on the canonical representation of strictly stationary processes, Jour. Math. of Kyoto Univ. Vol 1 ('61) 129-146

[16] M. Rosenblatt ; Stationary processes as shift of Function of Independent Random Variables. Jour. Math and Mech 8('59) 665-681

[17] : Stationary Markov Chains and Independent Random Variables. Jour. Math. and Mech. 9('60) 945-950.

[18] N. Wiener ; The Homogeneous Chaos. Amer. Jour. Math. 60 ('38) 897-936.

[19] : Non linear Problems in Random Theory ('58)

[20] H. Watanabe : Wiener 空間における積分とその応用. Sem. on proba Vol 8.

[21] 池田, 国田, 野本, 飛田, 渡辺毅 : Paul Lévy の業績 Semi on proba Vol 9

[22] 定常過程資料 No. 1 ~ No. 3

Sem. on Probab.
Vol.10 1961年
P1-103

1 9 6 1. 1 2. 発行　確 率 論 セ ミ ナ ー