SEMINAR ON PROBABILITY

vol. 7

飛　田　武　幸

Gaussian Process の表現とその応用

1 9 6 1

確 率 論 セ ミ ナ ー

Sem. on Probab.
Vol.7 1961年
P1-106

Gaussian process の表現とその応用

前書き

一般に Gaussian process は平均と covariance function が与えられたら唯一つ決定されるということはよく知られた事実である。平均の部分については確率論的な問題は殆ど起らないので0にしておくことにして、若し covariance function $\Gamma(s,t)$ が知られたとしても、特殊な場合を除いては、それからきまる Gaussian process $X(t)$ の確率論的な構造が直ちに明らかになるわけではない。それでは $X(t)$ をどのように書き表わしておいたら有効であろうか、又その表現はどのようにして作ることが出来るかということが問題になる。その一つの方法として P. Lévy によって創められた additive process を基礎にして $X(t)$ を表現する方法がある。(P. Lévy [2], [3] 参照)

既に Lévy は stochastic process を構成的にとらえ process をきめるのに次の形式的な方程式を考えていた。

$$(*)\qquad dX(t)=\Phi(X(\tau),\ \tau\le t\ ;\ \xi_t,\ t,\ dt)$$

こゝに ξ_t は $X(\tau)$, $\tau\le t$, と独立な確率変数である。一般の process では functional Φ は何等かの意味で存在が知られたとしても相当複雑なものと思われる。

Gaussian process のときには $X(t+dt)$ は、$X(\tau)$, $\tau\le t$, が知られたとき、条件つき平均値 $E(X(t+dt)/\mathcal{B}_t)$ と t 以前とは独立な ξ_t (Gaussian) を用いて

$$X(t+dt)=E(X(t+dt)/\mathcal{B}_t)+\sigma(t,dt)\xi_t$$

とかけて、しかも条件つき平均値は $X(\tau)$, $\tau\le t$, の linear functional であるから (*) の Φ が linear になる簡単な場合である。こゝに現われる ξ_t は、いわば process の接線の方向を示すともいうべき確率変数であるが、それは additive process $B(t)$ の微分のように考えられるという点に着眼して Lévy は一般の Wiener integral により $X(t)$, $0\le t<\infty$, を

$$(**)\qquad X(t)=\int_0^t F(t,u)\,dB(u)$$

Sem. on Probab.
Vol.7 1961年
P1-106

と表わした(Lévy [3])．こゝで$\{B(t)\}$が$\{X(t)\}$から作られることに注意すれば(**)は(*)の特別な場合といえる。このようにexplicitにprocessを表現することによってGaussian processを研究するのがこのノートの目標である。

本論は3章に分れる。第I章では(**)のような表現をもつものの中で，任意のt，$s(\leq t)$に対して

$$E(X(t)/\mathcal{B}_s)=\int_0^s F(t,u)\,dB(u)$$

となるような<u>canonical</u>な表現についてLévyの理論を中心にした一般論を述べる。

第II章ではGaussian processの多重Markov性を扱う．Stationary Gaussian processの多重Markov性は既にJ.L. Doob [1]によって与えられ，stationaryでない場合にもLévyの定義(Lévy [3])があるが何れも，従属性とは直接関係がないように思はれるprocessの微分可能性を仮定した定義である．我々はsimple Markov processの性質を表現を用いて研究する立場から整理することによって、その自然の拡張として多重Markov Gaussian processの定義を与え，その性質を調べる。

第III章では特にstationary Gaussian processについてK. Karhunen [1]の与えたmoving average representationと表現との関係を調べ，更に多重Markov性をもつものについて詳しい性質を研究する。その応用としてLévyのM(t) processもこのschemeの中で取扱うことが出来て，若干の未解決の問題が解かれる。§III.5では残された問題の中，重要と思われるものを一括して述べた。

附録ではGaussian processと類似の扱いが出来るlinear processについて知られている結果を報告するが，本論に較べて系統性に欠けているので別に扱った。第III章までの結果をみると，Hilbert空間論の方法と結果を随所に用いてはいるが，gaussianという仮定を本質的に使っている所が多い。しかしlinear processの研究には本論での方法を有効に適用できることがP. Lévy [5]に示されて居り，ある種のgaussianでないprocessの研究の指針を与えている。我々はその一部を紹介すると共に、知られている結果を出来るだけ詳しく述べる。

このノートは，確率論セミナー主催の第1回セミナー(1959年夏，於京都)における筆者の講演を基礎にして，その後京大のセミナーで報告した新しい

Sem. on Probab.
Vol.7 1961年
P1-106

結果を加えてまとめたものである。セミナーに出席された方々に深く感謝の意を表したい。特に池田信行氏には，準備の段階でも種々の御注意を頂き筆者との討論にも参加して頂いた。又このノートの原稿を通読され，§III.5の大部分の資料を提供された。これらの御助力に対し，同氏に厚く感謝する。

凡　　例

1．引　用

- 例えば *Lévy* [ ]とかいたときの括弧内は巻末文献表の *Lévy* の著書又は論文の番号をさす。
- 例えば (II.5) として式を引用した場合は，第II章の (5) の式をさす。同じ章の中では，単に(5)の如く引用する。

2．記　号

次のような記号は右側にかいた意味に用いる。

X，Y　ɪɪ	XとYが独立
R^N	N 次元 Euclid 空間
$\mathbb{B}(R^1)$	R^1 の Borel set 全体，$\mathbb{B}(T)$ 又は $\mathbb{B}_T$ も同様
$\{X(\tau), \tau \leq t\}$	括弧内にかいた確率変数の system （函数の system にも｛　｝を用いる）
$\mathbb{C}(T)$	T上の連続函数の全体
$\mathbb{C}^k(T)$	$\mathbb{C}(T)$ の函数で k 回連続微分可能なものの全体

Sem. on Probab.
Vol.7 1961年
P1-106

目　　次

§0　準　備 …… 5

第Ⅰ章　Gaussian processの表現 …… 11

§Ⅰ.1　Discrete parameterの場合 …… 11
§Ⅰ.2　Gaussian processの諸例 …… 14
§Ⅰ.3　Canonical representation …… 18
§Ⅰ.4　Hilbert空間論よりの準備 …… 23
§Ⅰ.5　Canonical representationの存在 …… 28
§Ⅰ.6　Canonical representationの判定条件 …… 32

第Ⅱ章　多重 Markov Gaussian process …… 36

§Ⅱ.1　Simple Markov Gaussian process …… 36
§Ⅱ.2　多重 Markov Gaussian process …… 40
§Ⅱ.3　多重 Markov Gaussian processの表現 …… 43
§Ⅱ.4　狭義多重 Markov Gaussian process …… 48

第Ⅲ章　Stationary Gaussian process …… 61

§Ⅲ.1　Stationary processの表現 …… 62
§Ⅲ.2　多重 Markov stationary Gaussian process …… 65
§Ⅲ.3　LévyのM(t) process …… 74
§Ⅲ.4　見本過程の連続性 …… 80
§Ⅲ.5　補　足 …… 81

附　録 …… 88

§A.1　Linear process …… 88
§A.2　Stationary linear process …… 94
§A.3　多重 Markov linear processの見本過程 …… 93

Sem. on Probab.
Vol.7 1961年
P1-106

§0 準備

はじめに、本論で必要な基礎概念を一括して準備しておこう。その大部分はよく知られた事柄であるけれども、記号や用語などの説明も兼ねてここで述べることにする。

1°) Gaussian system

確率空間 $\Omega(\mathcal{B}, P)$ で定義された実数値をとる確率変数 (random variable 以后 r.v と略記する) $X(\omega)$, $\omega\in\Omega$ が正規分布に従うとき Gaussian r.v という。その分布(正規分布)の平均が m, 分散が σ^2 であれば、$X(\omega)$ は $G(m, \sigma^2)$ に従うと略称する。

$\mathfrak{X}$ が $\Omega(\mathcal{B}, P)$ で定義された r.v の system であって $\mathfrak{X}$ の中の任意の有限個の r.v の一次結合が常に Gaussian r.v であるとき $\mathfrak{X}$ を Gaussian system という。これは"$\mathfrak{X}$ の任意の有限個の r.v の結合分布が(高次元)正規分布である"ということと同等である。$\mathfrak{X}$ が Gaussian system であるとき $\mathfrak{X}$ の中から選んだ確率収束する列の極限を $\mathfrak{X}$ につけ加えても再び Gaussian になる。(詳しくは K. Itô [2] §33参照)

ところで $\mathfrak{X}=\{X_\lambda(\omega);\lambda\in\Lambda\}$ が Gaussian system であれば分散行列

$$V_{\lambda\mu}=E\{(X_\lambda-m_\lambda)(X_\mu-m_\mu)\},\quad \{m_\lambda:\lambda\in\Lambda\}\text{ は平均ベクトル：}$$
$$m_\lambda=E(X_\lambda)$$

は non-negative definite である。すなわち任意の n, 任意の $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\ (\in\Lambda)$ と任意の複素数 $\xi_1, \xi_2 \cdots \xi_n$ に対して

$$\sum V_{\lambda_i\lambda_j}\xi_i\bar{\xi}_j \geq 0$$

である。逆に任意のベクトル $\{m_\lambda;\lambda\in\Lambda\}$ と任意の non-negative definite な行列 $\{V_{\lambda\mu}:\lambda,\mu\in\Lambda\}$ に対して、前者を平均ベクトル、後者を分散行列とする Gaussian system が存在する。(証明は K. Ito [2] §34参照) しかもこのような system はある意味で一意に定まる。というのは与えられた $\{m_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$ と $\{V_{\lambda\mu}:\lambda,\mu\in\Lambda\}$ に対して $\mathfrak{X}=\{X_\lambda(\omega):\lambda\in\Lambda\}$, $\omega\in\Omega$, と $\mathfrak{X}'=\{X'_\lambda(\omega'):\lambda\in\Lambda\}$ $\omega'\in\Omega'$ と二つの Gaussian system があったとすれば任意の n と任意の $\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_n$ に対して $(X_{\lambda_1}(\omega), X_{\lambda_2}(\omega), \cdots, X_{\lambda_n}(\omega))$ の分布と $(X'_{\lambda_1}(\omega'), X'_{\lambda_2}(\omega'), \cdots, X'_{\lambda_n}(\omega'))$ の分布とが同じである。このノートではこのような $\mathfrak{X}$ と $\mathfrak{X}'$ は同じ Gaussian system であると言い、区別しないことにする。

Gaussian system を取扱う場合に、Hilbert 空間論の方法は一つの有

Sem. on Probab.
Vol.7 1961年
P1-106

力な手段となっている。一般に平均が0で分散が有限なr.v.はcovarianceを内積とするHilbert空間$L^2(\Omega)$の要素と考えられるがGaussian r.vもその例にもれない。$\mathfrak{X}$を平均0のGaussian r.vの作るGaussian systemとし，$\mathfrak{X}$の張る$L^2(\Omega)$のclosed linear manifold (subspace)を$\mathfrak{M}(\mathfrak{X})$とすれば，その要素は$\mathfrak{X}$から選んだ（$L^2(\Omega)$ノルムでの）強収束する，従って確率収束するr.v.の列の極限をすべてつけ加えたものであるから，前述のことから$\mathfrak{M}(\mathfrak{X})$はGaussian systemである。ここでr.vの平均は0としたが取扱いを簡単にするためであって本質的な制限にはならない。必要があれば、平均を減ずることにより，平均0のr.vに直せて，しかもそれによって確率論的な興味が失われることはない。たゞ注意すべきことはr.v.を$L^2(\Omega)$の要素と考える場合には確率1で等しい二つのr.vは同一とみなす点である。

2°) <u>Gaussian process</u>

Tをparameter spaceとするGaussian system $\{X(t,\omega), t\in T\}$, $\omega\in\Omega(\mathfrak{B},P)$, は$T$が実数全体又はその閉区間であるとき<u>continuous parameterをもつGaussian process</u>といい，Iが整数又は自然数であるときGaussian system $\{X_n(\omega), n\in I\}$, $\omega\in\Omega(\mathfrak{B},P)$を<u>discrete parameter</u>をもつGaussian processという。両者を併せて単にGaussian processという。

このノートで取扱うGaussian processはすべて平均は0と仮定しておく。もう一つの<u>約束</u>として，今後Gaussian process $X(t)$, $t\in T$, と書いた場合の$X(t)$は，いつも$L^2(\Omega)$の要素として考えており，相等とか収束等すべて$L^2(\Omega)$での話である。見本過程(path)を考えて，その集合に函数空間の測度を与えたとする立場をとるときは必ずprobability parameter ωを明記して$X(t,\omega)$とかくことにする。
discrete parameterの場合もこれにならう。

$X(t), t\in T$, がGaussian processであるとき$\{X(s);\ s\le t\}$は明かにGaussian systemであってそれが張る$L^2(\Omega)$のclosed linear manifold $\mathfrak{M}_t(X)$も1°)にのべたことからGaussian systemである。X_n, $n\in I$, についても同様にしてGaussian system $\mathfrak{M}_n(X)$が考えられる。このような記号は今後屡々用いられる。

Gaussian processの大きな特徴の一つは最小分散の方法による近似が、単純なlinearな方法で出来るということである。例えば$\{Y, X_1, X_2,$

Sem. on Probab.
Vol.7 1961年
P1-106

$\cdots, X_n\}$ を Gaussian system (勿論 $E(Y)=E(X_i)=0$, $i=1,2,\cdots,n$) とする。YをX_i, $i=1,2,\cdots n$ で誤差の分散が最小になるように近似するにはYの$\{X_1, X_2, \cdots\cdots, X_n\}$の張る空間への projection $\hat{Y}$ (それは$\{X_i\}$の linear な函数である) を考えればよい。そのとき $Y-\hat{Y}$ はすべてのX_iと直交，従って Gaussian system の性質から $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ と独立になる。又このとき$\hat{Y}$は条件つき平均値 $E(Y/X_1, X_2, \cdots X_n)$に等しい ($L^2(\Omega)$の要素として)。(J.L. Doob [2] (chap II §3 参照) この事実は無限個の r.v からなる Gaussian system のときも同様で，例えば，$X(t)$, $t\in T$, が Gaussian process であるとき $X(t)$の$\mathfrak{M}_s(X)$, $s\leq t$ への projection $U(s,t)$は条件つき平均値 $E(X(t)/\mathfrak{B}_s)$に$L^2(\Omega)$の要素として一致する。こゝに$\mathfrak{B}_s$はすべての$X(\tau)$, $\tau\leq s$を可測にする最小の Borel field で，今后他と区別する必要のあるときは詳しく$\mathfrak{B}_s(X)$とかいたり$\mathfrak{B}(\mathfrak{M}_s)$とかいたりする。こゝで$U(s,t)$は$L^2(\Omega)$の要素としてきまるものであり，$E(X(t)/\mathfrak{B}_s)$は$\mathfrak{B}_s$-measurable な r.v. であって，この二つは元来異質なものであるが Gaussian process を扱う範囲内では両者を$L^2(\Omega)$において考えるとき同一視して差支ない。記号を簡単にする上においても便利なので本論においては$E(X(t)/\mathfrak{B}_s)$のような記号を頻繁に用いるが混乱を来す怖はあるまい。

3°) Wiener integral

Gaussian process $B_0(t)$ $t\in T\equiv[0,\infty]$, が

i) additive であり

ii) $B_0(0)=0$

iii) $B_0(t)-B_0(s)$ は $G(0,|t-s|)$に従う r.v であるとき (standard) Brownian motion という。特に断らない限り $B_0(t)$は$L^2(\Omega)$の要素と考えることは 2°) で約束した通りで $B_0(t)$とかいても path $B_0(t,w)$ を表わすものではないが必要に応じてはそのように考えてもよい。又 closed linear manifold $\mathfrak{M}_t(B_0)$ も同様に定義される。

$T=[0,\infty)$ に普通の意味の Lebesgue 測度mを結びつけて測度空間とし，T上で平方可積分な実函数の全体を$L^2(m,T)$[0)] するとき $L^2(m;T)$ の函数fに対して，積分

$$I(f)=\int_T f(u)\,dB_0(u)$$

0) m 又は T を明記する必要のないときは単に$L^2(T)$又は$L^2(m)$とかく。

Sem. on Probab.
Vol.7 1961年
P1-106

を考えよう。これは N. Wiener によって導入されたもので <u>Wiener integral</u> と呼ばれる。

まず f が次のような階段函数のときを考えよう。

$$0 < a = t_0 < t_1 < \cdots\cdots < t_n = b < \infty$$

$$f(u) = \begin{cases} 0 & u \notin (a, b) \\ \alpha_\nu & t_{\nu-1} < u \leq t_\nu, \quad \nu = 1, 2, \cdots, n \end{cases}$$

この f に対しては

$$I(f) = \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu \left(B_0(t_\nu) - B_0(t_{\nu-1})\right)$$

と定義する。この定義は一般の $f \in L^2(m; T)$ にまで拡張出来て $L^2(\Omega)$ の要素 $I(f)$ は次のような性質をもっている。(証明や詳しい説明などは K. Itô (2) §36参照) f, g, f_n 等は $L^2(T)$ の要素として

(I.1) $I(\alpha f + \beta g) = \alpha I(f) + \beta I(g)$

(I.2) $E(I(f)) = 0$

(I.3) $E(I(f) I(g)) = (f, g)$ 　　((f, g) は $L^2(T)$ の内積を表わす.)
特に $E|I(f)|^2 = \|f\|^2$ 　　($\|f\|^2 = (f, f)$)

(I.4) $I(f)$ は $G(0, \|f\|^2)$ に従う r.v である

(I.5) $(f, g) = 0$ ならば $I(f)$ と $I(g)$ は独立.

(I.6) $f_n \to f$ ($L^2(T)$ での強収束) ならば $I(f_n) \to I(f)$ ($L^2(\Omega)$ での強収束)

等が成り立つ.

Wiener integral の特別な場合として, $m(A) < \infty$ なる A の定義函数 $\chi(u, A)$ に対し

Sem. on Probab.
Vol.7 1961年
P1-106

$$B_0(A)=\int \chi(u,A)\,dB_0(u)$$

が考えられる。今 $\mathcal{B}_T^*$ を $\mathcal{B}_T$ に属する集合のうち Lebesgue 測度有限なものの全体とするとき，$A\in\mathcal{B}_T^*$ に依存する r. v. の system $B(A)$, $A\in\mathcal{B}_T^*$ は

i) $B_0(A)$ は $G(0, m(A))$ に従う

ii) $A_1, A_2, \cdots\cdots A_n\in\mathcal{B}_T^*$ が disjoint ならば，$B_0(A_1), B_0(A_2), \cdots B_0(A_n)$ は独立な r. v. の system であって

$$B_0(A_1+A_2+\cdots\cdots+A_n)=B(A_1)+B(A_2)+\cdots\cdots+B(A_n)$$

が成立つことがわかる。

4°) Gaussian random measure と一般の Wiener integral

$B_0(A)$, $A\in\mathcal{B}_T^*$ についての性質 ii) は通常の測度に似た性質である。もっと一般に $T(\mathcal{B}_T, v)$ を測度空間とし，$\mathcal{B}_T^*$ を $\mathcal{B}_T$ に属する集合のうち v 測度有限なものの全体とし，次の二条件を満足する r. v. の system $B(A)$, $A\in\mathcal{B}_T^*$ を考えよう。

i) $B(A)$ は $G(0, v(A))$ に従う

ii) $A_1, A_2, \cdots\cdots A_n\in\mathcal{B}_T^*$ が disjoint ならば $B(A_1), B(A_2), \cdots\cdots B(A_n)$ は独立な r. v. の system で

$$B(A_1+A_2+\cdots\cdots A_n)=B(A_1)+B(A_2)+\cdots\cdots+B(A_n).$$

$B(A)$, $A\in\mathcal{B}_T^*$ がこの二条件を満足すれば ii) よりも強く

ii') $\mathcal{B}_T^*$ に属する $A_1, A_2, \cdots\cdots$ が disjoint ならば $B(A_1), B(A_2), \cdots\cdots$ は独立で，もし

$$\sum_{n=1}^{\infty} v(A_n)<\infty$$

ならば

$$B\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty} B(A_n)$$

が成立つ。（上式の右辺の収束は $L^2(\Omega)$ での強収束，独立な r. v. の和だから概収束にもなる。）このような $B(A)$, $A\in\mathcal{B}_T^*$ を Gaussian random measure という。（"Gaussian" は省略することが多い）　3°) で考えた $B_0(A)$, $A\in\mathcal{B}_T^*$ はこの特別な場合で Wiener の random measure 或は Brownian motion から導かれた random measure という。m を Lebesgue measure，T を $(-\infty, \infty)$ とし $T(\mathcal{B}_T, m)$ に対応する random measure も同じく Wiener の random measure という。一般の Gaussian random measure についてはその存在を示さなけ

ればならないがこゝでは省略する。(K. Itô[2] §35に詳しい証明がある)。又3°)と同様にある種のadditive processからは直接にrandom measureを導くことができる。

$B(A)$, $A\in \mathcal{B}_T{}^*$,(単にdB或は$dB(t)$と略記することが多い)をrandom measureとし、対応する測度空間を$T(\mathcal{B}_T, v)$ (これも$E(dB(t))^2=dv(t)$と略記する)としよう。$B(A)$は次の様に分解できる。

$$B(A)=B_1(A)+\sum_{t_j\in M} X_{t_j}$$

こゝに$B_1(A)$, $A\in\mathcal{B}_T{}^*$は$E(dB_1(t))^2=dv_1(t)$が連続な測度であるようなrandom measureであり$\{X_{t_j}\}$は$EX_{t_j}=0$なる独立なGaussian r.v.のsystemである。dB_1をdBのcontinuous part, $\{X_{t_j}\}$をdBのdiscontinuous partとよぶことがある。若し$f\in L^2(v;T)$;すなわち$f\in L^2(v_1;T)$で

$$\sum_{t_j} f(t_j)^2\sigma_{t_j}^2<\infty, \qquad \sigma_{t_j}{}^2=E(X_{t_j}^2),$$

ならば、任意の$M\in\mathcal{B}_T$に対して

$$I_1(f)=\int_M f(u)\,dB_1(u)\equiv\int f(u)\chi(u,M)\,dB_1(u)$$

がWiener integralと全く同様にして定義され、又

$$I_2(f)=\sum_{t_j\in M} f(t_j)X_{t_j}$$

も収束するから

$$I(f)=\int_M f(u)\,dB(u)=\int_M f(u)\,dB_1(u)+\sum_{t_j\in M} f(t_j)X_{t_j}$$

がwell definedである。上の$I(f)$を<u>一般のWiener integral</u>と呼ぼう。こゝで$I_1(f)$は$L_2(m;T)$の代りに$L^2(v;T)$を考えればWiener integralと同様にして(I.1)~(I.5)の性質をみたすことが証明される。

尚このような一般のWiener integralを用いれば$B(A)$, $A\in\mathcal{B}_T^*$の張るclosed linear manifold $\mathfrak{M}(B)$に属する任意のZは、$L^2(v;T)$の要素fを用いて

$$Z=\int_T f(u)\,dB(u)$$

と表わされることがわかる。

Sem. on Probab.
Vol.7 1961年
P1-106

第I章 Gaussian processの表現

§I.1 Discrete parameterの場合

先ず最も簡単なdiscrete parameterをもつGaussian process $X_n,\ n\in I$を考える。この節ではcontinuous parameterの場合の見通しをつけたり，問題点を明らかにしたりするためのものであるから厳密な定義や証明などはせずに説明に留めることが多い。それは表現の問題を扱う範囲内ではdiscrete parameterをもつprocessは，continuous parameterの場合に較べて，より簡単になり，しかも後者と同様な方法で同様な結論が導かれるから，両者を併列して議論することは重複にすぎないからである。厳密なことはすべてcontinuous parameterの場合に譲ることにする。

一般性を失うことなく平均値について$EX_n=0$を仮定してよい。

1°) 最初に$I=\{1,2,3,\cdots\cdots\}$のとき考える

$X_1=a_{1,1}\xi_1$ [1]　　ξ_1は$G(0,1)$に従う，

とかける。$E(\xi_1\cdot X_2)=a_{2,1}$ならば，上で得た$\xi_1$を用いて

$X_2=a_{2,1}\xi_1+a_{2,2}\xi_2$,　ξ_2は$G(0,1)$に従う，

と表わすことができる。$a_{2,1}$の作り方から$E(\xi_1\cdot\xi_2)=0$，従ってξ_1とξ_2は独立である。このようにしてSchmidtの直交化の方法を用いて，何れも$G(0,1)$に従う独立なr.v.の列$\xi_n,\ n\in I$が作れて，

(1)　$X_n=a_{n,1}\xi_1+a_{n,2}\xi_2+\cdots\cdots+a_{n,n}\xi_n$

と書くことができる。こゝで若し$a_{n,n}=0$となることがあれば，ξ_nはすべてのX_nと独立な$G(0,1)$に従うr.v.でさえあれば任意にとってよい。$a_{n,n}\neq 0$のときはξ_nは上の作り方では一意に確定する。

この方法でX_nを(1)のようにかくとき

(2)　$a_{k,k}=0$ ならば　$a_{n+k,k}=0,\quad n>0$

が成り立つことは容易に確かめられる。

今$\mathcal{B}_n,\ \mathfrak{M}_n$をそれぞれ$X_m(\omega),\ m\le n$を可測にする最小のBorel field，$X_m,\ m\le n$の張る$L^2(\Omega)$のclosed linear manifoldとすれば(1)の構成法とGaussian systemの性質から

(3)　$E(X_n/\mathcal{B}_m)=$ Projection of X_n on $\mathfrak{M}_m=\sum_{\nu=1}^{m}a_{n,\nu}\xi_\nu$,
$m\le n$

1) こゝでも等号は§0，2°)の約束に従って$L^2(\Omega)$の要素として等しいことを示す。

Sem. on Probab.
Vol.7　1961年
P1-106

となる。これはすべてのkに対して$a_{kk} \neq 0$なら明らかであるが，$a_{k,k}=0$となることがあってもそのときのξ_kは(2)によって(3)の最后の式の和に現れてこないことに注意すれば容易に証明される。(1)と(3)からX_nは任意の$m \leq n$に対して

$$(4)\qquad X_n = E(X_n/\mathbb{B}_m) + \sum_{\nu=m+1}^{n} a_{n,\nu}\xi_\nu$$

と分解することができる。しかも右辺の二つの項は互に独立であるから，X_ν，$\nu \leq m$が知られたという条件の下でのX_nの条件つき確率は第1項の條件つき平均値（しかもX_ν，$\nu \leq m$の*linear function*）とそれと独立なものによってきまることがわかる。このような分解は以後逐次明らかにされるように非常に重要である。

今までの議論の中では，若し$a_{n,n}=0$となることがあればそのnに対するξ_nは始めから取り去っておけば話が簡単であるように思われる。実際そのようなξ_nはつけ加えること自体が不自然ですらあったわけで，むしろ除くことの方が好ましい。今敢てそれを加えて議論したのは，一般にξ_nがこことは違った方法で与えられて

$$(5)\qquad X_n \sim \sum_{\nu=1}^{n} a_{n,\nu}\xi_\nu \quad {}^{2)}$$

となっている場合も，X_nが*additive process*（*sequence*）を基礎として表現されているとして研究の対象にしたいからである。このような場合には(2)，(3)等が成立つことなどは勿論期待できない。

2°）今度はX_1，X_2，X_3のみに着目して，例えば$X_2 = cX_1$のような場合を考えてみる。1°）の方法によれば

$$X_1 = a_{11}\xi_1$$
$$X_2 = ca_{11}\xi_1 + 0\,\xi_2$$
$$X_3 = a_{31}\xi_1 + 0\,\xi_2 + a_{33}\xi_3$$

となる。しかし分布のみに着目して，次のようなものを考えよう。

$$(6)\qquad \hat{X}_1 = a_{11}\hat{\xi}_1, \qquad \hat{X}_2 = ca_{11}\hat{\xi}_1, \qquad \frac{a_{33}}{\sqrt{2}}\hat{\xi}_2 + \frac{a_{33}}{\sqrt{2}}\hat{\xi}_3$$

但し，$\hat{\xi}_1$，$\hat{\xi}_2$，$\hat{\xi}_3$は互に独立で$G(0.1)$に従う r. v. とする。

明かに(X_1, X_2, X_3)と$(\hat{X}_1, \hat{X}_2, \hat{X}_3)$とは同じ分布に従っているので(6)も*Gaussian system* (X_1, X_2, X_3)を$\hat{\xi}_1$，$\hat{\xi}_2$，$\hat{\xi}_3$を用いて表現していると考えられる。$a_{33} \neq 0$のときは

$$E(\hat{X}_3/\hat{X}_1, \hat{X}_2) = a_{31}\hat{\xi}_1 \neq a_{31}\hat{\xi}_1 + \frac{a_{33}}{\sqrt{2}}\hat{\xi}_2$$

---

2)　$X_n \sim Y_n$（或は$X(t) \sim Y(t)$）はX_nとY_n（$X(t)$と$Y(t)$）とが同じ*process*であることを示す。

Sem. on Probab.
Vol.7 1961年
P1-106

であって (2) も (3) も成り立たない。従って (6) のように表現することは、例えば *prediction* の問題などを考慮するときは，好ましい方法とは云えない。

また好ましいといった 1°) の方法も *parameter* が $-\infty < n < \infty$ であったり，*continuous parameter* であったりすると，具体的に(1)のような表現を作ることは自明なことではないし又，作れない場合もある。

3°) すでに見たように *process* を表現する方法は幾種類もあるが (3) の性質をもつものは一つしかない．実際 $\tilde{\xi}_n$, $n \in I$, を $G(0,1)$ に従う独立な r.v. の列として

(1′) $$\tilde{X}_n = \sum_{\nu=1}^{m} \tilde{a}_{n,\nu}\, \tilde{\xi}_\nu$$

で表わされる *process* が (1) で表わされるものと同じ *process* であり，且つ (3) に相当する関係

$$E(\tilde{X}_n / \tilde{\mathcal{B}}_m) = \sum_{\nu=1}^{m} \tilde{a}_{n,\nu}\, \tilde{\xi}_\nu$$

を満足するとしよう．こゝに $\tilde{\mathcal{B}}_n$ は $\tilde{X}_\nu : \nu \leq n$ を可測にする最少の *Borel field* である。X_n と $\tilde{X}_n$ とは同じ分布に従うから

$$E\left(E(X_n/\mathcal{B}_m)\right)^2 = E\left(E(\tilde{X}_n/\tilde{\mathcal{B}}_m)\right)^2 \qquad m \leq n$$

である．何故なら両辺共分布によってのみきまる量だからである．従って

$$\sum_{\nu=1}^{m} a_{n,\nu}^2 = \sum_{\nu=1}^{m} \tilde{a}_{n,\nu}^2$$

これが任意の n, $m\,(\leq n)$ について成立するから，任意の $n, \nu\,(\leq n)$ について $a_{n,\nu}^2 = \tilde{a}_{n,\nu}^2$ が得られる。ξ_ν の分布の対称性から，$a_{n,\nu}$ の符号は無視しても差支ないので，一意性が証明された．

一般に，*Gaussian process* Y_n に対して，$G(0,1)$ に従う独立な r.v. の列 ξ_n と数列 $a_{n,\nu}$ $(\nu \leq n)$ があって

(7) $$Y_n \sim X_n = \sum_{\nu = n} a_{n,\nu}\, \xi_\nu$$

となっているとき，Y_n は表現されたといゝ，$(\xi_n, a_{n,\nu})$ を Y_n の *representation* 又は表現 $a_{n,\nu}$ をその *kernel* と呼ぶ。特に (3) を満足するような $(\xi_n, a_{n,\nu})$ を *canonical representation*，そのときの *kernel* を *canonical kernel* と呼ぶ。*canonical representation* は上でみたように *kernel* の符号を無視して一意に定まる。

Sem. on Probab.
Vol.7 1961年
P1-106

4°) 1°), 2°)では parameter が 1から始まる場合であったが，$-\infty<n<\infty$ の場合には canonical representation を求めるのに Schmidt の方法は適用できない。

特別な場合として X_n が weakly stationary (Gaussian だから strictly stationary になる) で purely non-deterministic の場合は，よく知られているように

$$(8) \qquad X_n=\sum_{\nu=-\infty}^{n} C_{n-\nu}\,\xi_\nu, \qquad E\xi_\nu^2=1$$

と表わされる。さらに ξ_ν, $\nu\leq n$, が $\mathfrak{M}_n(X)$ ($=X_\nu$, $\nu\leq n$, の張る closed linear manifold $\subset L^2(\Omega)$) の完全正規直交系になるようなものが存在して，しかもそのようなものは一意的に定まることが知られている (Grenander-Rosenblatt [1], Karhunen [1] 参照) 我々の場合 X_n, $n\in I$, が Gaussian system をなすこと及び $\xi_n\in\mathfrak{M}_n(X)$ (それは ξ_n が X_ν, $\nu\in I$ の linear function であることを意味する) により ξ_n, $n\in I$ も Gaussian system をなすことがわかる。故に ξ_n の直交性は，独立性におきかえてよい。又，ξ_ν, $\nu\leq n$, の張る closed linear manifold が $\mathfrak{M}_n(X)$ に一致することから

$$E(X_n/\mathcal{B}_m)=\text{Projection of } X_n \text{ on } \mathfrak{M}_n(X)=\sum_{\nu=-\infty}^{m} C_{n-\nu}\,\xi_\nu$$

がわかり，丁度 Canonical representation が得られていることになる。

Stationary でない場合に canonical representation の存在等を確かめるには後述する (§I-5) 一般論にまたなければならない。

§I. 2. Gaussian process の諸例

以下本章では continuous parameter をもつ Gaussian process $X(t)$, $t\in T$ を扱う。前節で discrete parameter をもつ場合に，表現の方法をみたが，尚，表現の問題点をより深く認識するために，いくつかの Gaussian process の典型的な例について，それらの表現を考えよう。

1°) $B_0(t)$, $t\geq 0$, は §0 と同じ Brownian motion とし，次の Wiener integral で定義される Gaussian process

$$X_1(t)=\int_0^t \left(3-12\frac{u}{t}+10\frac{u^2}{t^2}\right)dB_0(u)$$

Sem. on Probab.
Vol.7 1961年
P1-106

を考えよう。Winer integral の性質から $EX_1(t)\equiv 0$, $\Gamma(t,s)=E(X(t)X(s))=\min(t,s)$ が直ちに出て, $X_1(t)$ はまた一つの Brownian motion であることがわかる。今 a を任意に固定した正数とし

$$Y_1=\int_0^a u\,dB_0(u),\qquad Y_2=\int_0^a u^2\,dB_0(u)$$

なる r.v. を考えると, $t\leq a$ ならば常に

$$E(X(t)\,Y_1)=0\qquad E(X(t)\cdot Y_2)=0$$

が出る。そのことは $Y_1, Y_2\in\mathfrak{M}_a(B_0)$ であるが $\notin\mathfrak{M}_a(X_1)$ なる r.v. が存在することを示し, 任意の t に対して

(9) $\qquad \mathfrak{M}_t(X_1)\subsetneqq\mathfrak{M}_t(B_0)$

が成立つことがわかった。

一般に, 任意の正整数 n に対して, $\frac{u}{t}$ の n 次の多項式 $P_n(\frac{u}{t})$ が存在して

$$X(t)=\int_0^t P_n\left(\frac{u}{t}\right)dB_0(u)$$

が Brownian motion になることが証明される (Lévy [5]) この場合も上の例と同じように

$$Y_k=\int_0^k u^k\,dB_0(u)\qquad k=1,2,\cdots\cdots,n$$

が $\mathfrak{M}_a(B_0)$ には属するが, $\mathfrak{M}_a(X)$ には属さない。そのことは $\mathfrak{M}_t(X)$ が真に小さくなっていく Brownian motion の列が作れることを示している。

2°).
$$X_{2,1}(t)=\int_0^t(2t-u)\,dB_0(u)$$
$$X_{2,2}(t)\int_0^t(-3t+4u)\,dB_0(u)$$

なる二つの Gaussian process は同じ process である。そのことは, 両者の平均 (=0) と covariance function が等しくなることから明らかである。

$X_{2,1}(t)$ については, 任意の a に対して

$$Y=\int_0^a u^2\,dB_0(u)$$

は $\mathfrak{M}_a(B_0)$ には属するが $\mathfrak{M}_a(X_{22})$ に属しない。故に任意の t に対して

(10) $\qquad \mathfrak{M}_t(X_{2,2})\subsetneqq\mathfrak{M}_t(B_0)$

しかし $X_{2,1}(t)$ については任意の t に対して,

Sem. on Probab.
Vol.7 1961年
P1-106

(11) $\mathfrak{M}_t(X_{2,1}) = \mathfrak{M}_t(B_0)$

が証明される。実際，上式は$X_{2,2}(t)$の作り方から $\subseteqq$ は成立つので $\supsetneqq$が成立つtがあったとしてそれを t_0 とすれば

$$Z\int_0^{t_0} f(u)\,dB_0(u)$$

が存在して，$\mathfrak{M}_{t_0}(X_{2,1})$と直交する。すなわちZが任意の$X_{2,1}(t)$，$t \leq t_0$，と直交する。故に

$$\int_0^t (2t-u)f(u)\,du \equiv 0 \qquad t \leq t_0.$$

上式はtについて $[0, t_0]$で絶対連続だから，微分（*Radon - Nikodym*の意味で）して

$$2\int_0^t f(u)\,du + tf(t) = 0 \quad , \qquad t \leq t_0$$

が殆んど到る所成立する。再び微分して，殆んど到る所

$$3f(t) + tf'(t) = 0 \quad , \qquad t \leq t_0$$

すなわち $f(t) = Ct^{-3}$ を得るが，これは $L^2((0, t_0])$ に属しない。従って$\mathfrak{M}_{t_0}(X_{2,1})$ と直交する $\mathfrak{M}_{t_0}(B_0)$ の要素Zは存在しないことがわかった。

このように（1°）および2°））一つの *Brownian motion* からいくつかの方法で同じ *process* が作られ，しかも各方法によって対応する$\mathfrak{M}_t$が違ってくるという事実は注意すべきことである。特に 2°）においては（11）が成り立つか否かをみるのに被積分函数ともいうべき函数 $2t-u$ のみの性質から結論出来たことを注意しよう。これを敷衍した一般論は §I. 6 で行う。

また $X_{2,1}(t)$ で *process* が与えられると，（11）が成り立つことから条件つき平均値について

$$\begin{aligned} E(X_{2,1}(t)/\mathcal{B}_s) &= \text{Projection of } X_{2,1}(t) \text{ on } \mathfrak{M}_s(X_{2,1}) \\ &= \qquad\qquad \text{〃} \qquad\qquad\quad \mathfrak{M}_s(B_0) \\ &= \int_0^s (2t-u)\,dB_0(u), \qquad s \leq t \end{aligned}$$

が成り立つ。これは前節で述べた *discret parameter* の場合の *canonical representation* の条件に相当するものである。

3°）よく知られた *Ornstein - Uhlenbeck* の *Brownian motion* $X_3(t)$，$-\infty < t < \infty$，は $e^{-t}B_0(e^{2t})$としても得られるし，また$(-\infty, \infty)$

Sem. on Probab.
Vol.7 1961年
P1-106

上の Wiener の random measure $d\widetilde{B_0}(t)$ を用いて

$$X_3(t)=\int_{-\infty}^{t} e^{-(t-u)}\, d\widetilde{B_0}(u)$$

としても表わすことができる．このときも任意のtに対して

$$\mathfrak{M}_t(X_3)=\mathfrak{M}_t(\widetilde{B_0})$$

が成立する。証明は(11)を示したときと同様だから省略する。

4°) $B_0^{(1)}(t)$, $t\geq 0$; $B_0^{(2)}(t)$, $t\geq 0$ を互に独立な Brownian motion とする。$X_4(t)$, $t\in T=[0,1]$を

$$X_4(t)=\begin{cases} B_0^{(1)}(t), & t\text{が有理数のとき} \\ B_0^{(2)}(t), & t\text{が無理数のとき} \end{cases}$$

で定義すれば

$$(12)\qquad X_4(t)=\int_0^t F(t,u)\, dB_0^{(1)}(u)+\int_0^t (1-F(t,u))\, dB_0^{(2)}(u)$$

とかくことができる。但し

$$F(t,u)\begin{cases} \equiv 1 \ (u\text{の函数として}), & t\text{が有理数のとき} \\ \equiv 0 \qquad\qquad\qquad , & t\text{が無理数のとき} \end{cases}$$

とする．$X_4(t)$についても 2°) の$X_{2,1}(t)$と同じく

$$E(X_4(t)/\mathcal{B}_s)=\int_0^s F(t,u)\, dB_0^{(1)}(u)+\int_0^s (1-F(t,u))\, dB_0^{(2)}(u)$$

が成り立つことは見易い．

このX$_4(t)$は今までの例のように一つの Winer の random measure を用いた積分で表わし，尚且つ，条件つき平均値に対して$X_{2,1}(t)$と同じような性質をもった表現（すなわち canonical representation ）を作ることはできない。その証明は，後述（§I.5）の一般論からでるのでこゝでは述べない。

しかし，単に一つの Wiener random measure を用いて表わすというだけの目的なら次のように $B_0^{(1)}(t)$ と $B_0^{(2)}(t)$とを組合せて $B(t)$ を作ることによって達成される。

すなわち $\frac{1}{2^n}>t\geq\frac{1}{2^{n+1}}$ なるtに対しては

$$B(t)-B\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)=\begin{cases} B_0^{(1)}(2^m t)-B_0^{(1)}\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right), & n=2m \text{ のとき} \\ B_0^{(2)}(2^m t)-B_0^{(2)}\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right), & n=2m-1\text{のとき} \end{cases}$$

Sem. on Probab.
Vol.7 1961年
P1-106

から $dB(t)$ を作り，(12)を変形することによって

$$X_4(t)=\int_0^t F(t,u)\,dB(u)$$

と表わすことができる。

5°) 次の例は $\mathfrak{M}_t(X)$ が複雑で，t について，不連続になるような process である。$B_0^{(1)}(t)$，$t\geq 0$；$B_0^{(2)}(t)$，$t\geq 0$ を，互に独立な Brownian motion，X をそれらと独立な Gaussian r. v. とする。$X_5(t)$，$t\geq 0$ を

$$X_5(t)=\begin{cases}0 & 0\leq t<1\\ X+B_0^{(1)}(1), & t=1\\ X_4(t)+f(t)X, & t>1\end{cases}$$

で定義する。但し $X_4(t)$ は 4°)におけるもの，$f(t)$ は常数でない適当な函数とする。これは $X_4(t)$ を含んでいるだけに 4°)と同様な注意が必要であるが，さらに事情を複雑にしているのは $\mathfrak{M}_t(X_5)$ の不連続性である。具体的に云えば

$$\mathfrak{M}_t(X_5)=\begin{cases}\{0\} & ,\ 0<t<1\\ X+B_0^{(1)}(1) & ,\ t=1\\ \{X,\ B_0^{(1)}(\tau),\ 1\leqq\tau\leq t,\ B_0^{(2)}(\sigma)\ \ 1\leq\sigma\leq t\} & ,\ t>1\end{cases}$$

だから

$$\lim_{t\downarrow 1}\mathfrak{M}_t(X_5)=\bigcap_{t>1}\mathfrak{M}_t(X_5)=\{B_0^{(1)}(1),\ B_0^{(2)}(1),\ X\}$$

となり，$\mathfrak{M}_1(X_5)$ とは等しくない。

§I.3 Canonical representation

前節の諸例から Gaussian process $X(t)$，$t\in T$ を一般の Wiener integral を用いて表現することの漠然とした意味や，そのときに起る事情などがうかがえるが，こゝでまず正確な定義を与えよう。

定義 I.1 $Y(t)$，$t\in T$，を与えられた Gaussian process とする。それに対して Gaussian random measure $dB(t)$ $\left(E(dB(t))^2=dv(t)\right.$ とする）と，各 t に対して u の函数として $L^2(v)$ に属しかつ $u>t$ で 0 になるような函数 $F(t,u)$ が存在して

(13) $\qquad Y(t)\sim X(t)\equiv\int^t F(t,u)\,dB(u)$ [3)]

---

3) $\int^t\text{------}=\int_{u\leq t}\text{----}$

Sem. on Probab.
Vol.7 1961年
P1-106

となるとき $(dB(t),\ \mathfrak{M}_t(X),\ F(t,u))$ を $Y(t)$ の *representation* 又は表現という。$\mathfrak{M}_t(X)$ を表示する必要のないときは単に $(dB(t),\ F(t,u))$ を $Y(t)$ の表現と言うことが多い。このとき，$F(t,u)$ をその *kernel* と呼ぶ

例えば前節の 1°) であげた例では $(dB_0(t),\ \mathfrak{M}_t(X_1),\ F(t,u))$ は Brownian motion $B_0(t)$ の表現である。但し，$F(t,u)$ は $u>t$ で 0 に等しく，$u\leq t$ では $3-12\frac{u}{t}+10\frac{u^2}{t^2}$ に等しい函数である。又前節の 1°) や，2°) の例から，一つの process を表現するにも幾種類もの方法があることがわかる。それらの中で例えば 2°) の (11) 式のような性質をもつものが標準的である。正確にいえば

定義 I.2　$Y(t),\ t\in T$ の表現 $(dB(t),\ \mathfrak{M}_t(X),\ F(t,u))$ は，任意の t と $s(\leq t)$ に対して，

$$(14)\qquad E(X(t)/\mathcal{B}_s)=\int^{s}F(t,u)\,dB(u)$$

が成り立つとき *canonical representation* と云い，その *kernel* $F(t,u)$ を *canonical kernel* と云う。但し，(14) の $\mathcal{B}_s$ は $X(\tau),\ \tau\leq s$ を可測にする最小の Borel field である。

こゝでは continuous parameter の場合について representation とか canonical representation の定義をしたが，$X(t)$ を X_n に，$F(t,u)$ を $a_{n,\nu}$ に，$dB(t)$ を ξ_n にかえれば discrete parameter の場合にもそのまゝ当てはまる。そしてそれらの定義は §I.1 で述べた概念と一致する。なお，そこでは ξ_n の対称性から kernel $a_{n,\nu}$ の符号は無視してもよかった。continuous parameter の場合でも $F(t,u)$ の代りに $-F(t,u)$ を用いても同じ表現といってよかろう。また表現 $(dB(t),\ F(t,u))$ と $(C\cdot dB(t),\ \frac{1}{C}F(t,u))$ なる表現（C は 0 でない常数）とは同じ表現と考えることが自然であろう（§I.1 では ξ_n は normalize されていた!）そこで

定義 I.3　二つの表現 $(dB^{(i)},\ F^{(i)}(t,u)),\ i=1,2,$ は任意の $M\in\mathcal{B}_T$ と任意の $t\in T$ に対して

$$(15)\ \int_M F^{(1)}(t,u)\,dv^{(1)}(u)=\int_M F^{(2)}(t,u)\,dv^{(2)}(u)$$

が成り立つとき *equivalent* であるという。但し

$$dv^{(i)}(u)=E(dB^{(i)}(u))^2,\quad i=1,2.$$

この equivalence は明かに equivalence relations を満足するか

Sem. on Probab.
Vol.7 1961年
P1-106

ら，すべての表現を類別することができる．今後同じ類に属する表現は，同一とみなすことにする。

定理 I.1 （P. Lévy〔3〕）もし $Y(t)$ が canonical representation をもつならば，それは唯一つに限る。

証明 $(dB^{(i)}(t), F^{(i)}(t,u))$，$i=1,2$，を $Y(t)$ の canonical representation とする。

$$X^{(i)}(t)=\int^{t}F^{(i)}(t,u)\,dB^{(i)}(u),\qquad i=1,2,$$

とすれば，表現が canonical であることから，任意の t と $S\ (\leq t)$ に対して

$$E(X^{(i)}(t)/\mathbb{B}_S^{(i)})=\int^{S}F^{(i)}(t,u)\,dB^{(i)}(u)\ ,\qquad i=1,2,$$

となる．こゝに $\mathbb{B}_S^{(i)}$ は $X^{(i)}(\tau)$，$\tau\leqq S$ を可測にする最少の Borel field である。2乗平均をとれば

$$E\left(E(X^{(1)}(t)/\mathbb{B}_S^{(1)})^2\right)=E\left(E(X^{(2)}(t)/\mathbb{B}_S^{(2)})\right)^2$$

が成り立つ．何故なら，それらは，$Y(t)$ の法則のみによってきまる量で，canonical でありさえすれば表現の方法には関係しない量だからである。上式を計算すれば

$$\int^{S}F^{(1)}(t,u)^2\,dv^{(1)}(u)=\int^{S}F^{(2)}(t,u)^2\,dv^{(2)}(u)$$

となるが $t, S\ (\leq t)$ が任意だから (15)が成り立つことがわかる。故に二つの表現は equivalent であることがわかった。

canonical representation は §I.2 で好ましい表現であることは予想されていたが，この定理からその一意性が保障され，一層好都合なものであることがわかる。

表現 $(dB(t), \mathfrak{M}_t(X), F(t,u))$ が canonical になるためには

(16) $\qquad \mathfrak{M}_t(X)=\mathfrak{M}_t(B),\qquad t\in T$

が成り立てば十分である。証明は前節 2°) で $E(X_{2,1}(t)/\mathbb{B}_S)$ を計算した方法と同様にやればよい。そこで

定義 I.4 canonical representation $(dB(t), \mathfrak{M}_t(X), F(t,u))$ が (16) を満足するとき，それを proper canonical representation と呼ぶ。

定理 I.2 任意の与えられた $Y(t)$ の canonical representation $(d\hat{B}(t), \mathfrak{M}_t(X), F(t,u))$ を変形して proper canonical representa-

Sem. on Probab.
Vol.7 1961年
P1-106

tion ($dB(t)$, $\mathfrak{M}_t(X)$, $F(t,u)$) を作ることができる。($\mathfrak{M}_t(X)$ も F も不変であることに注意)

__証明.__ 定理で主張する変形は §I.1 の場合なら $a_n, n=0$ となるような ξ_n を取り去ることに相当する. この場合なら rough について $F(t,t)$ … $d\hat{B}(t)=0$, 従ってすべての $h>0$ に対し, $F(t+h,t)\,d\hat{B}(t)=0$ なら $dB(t)=0$ となるように変形することである. 正確な証明は次のようにすればよい。

$d\hat{B}(t)$ の discontinuous part に対しては discrete parameter の場合と同じだから, $d\hat{v}(t)=E(d\hat{B}(t))^2$ が continuous measure のときだけを考えればよい。先づ測度 μ を

$$\mu(M)=\bigvee_{t\in T}\left(\int_M F(t,u)^2\,d\hat{v}(u)\right)^{4)}$$

によって定義すれば, μ は $\hat{v}$ に関して絶対連続だから, Radon-Nikodym の定理によって, Borelmeasurable な函数 $f(u)\geq 0$ が存在して

$$\mu(M)=\int_M f(u)\,d\hat{v}(u), \qquad M\in \mathbb{B}(T)$$

とかける. $N=N(f)=\{u\,;\,f(u)>0\}$ ($N\in\mathbb{B}(T)$ である) とし, $\chi_N(u)$ を N の indicator function として, random measure dB と dv を

$$(17)\qquad B(M)\equiv\int_M dB(u)=\int_M \chi_N(u)\,d\hat{B}(u), \quad E(dB(t))^2=dv(t)$$

で定義すれば, これが求めるものである。すなわち ($dB(t)$, $\mathfrak{M}_t(X)$, $F(t,u)$) が $Y(t)$ の proper canonical representation である。そのことを次の順序で確かめよう。

i) ($dB(t)$, $\mathfrak{M}_t(X)$, $F(t,u)$) は $Y(t)$ の表現である。
それには

$$(18)\qquad X(t)=\int^t F(t,u)\,dB(u)\ \sim\ \hat{X}(t)=\int^t F(t,u)\,d\hat{B}(u)\ \left(\sim Y(t)\right)$$

を言えば十分である。

$$E\left(\int^t F(t,u)\,d\hat{B}(u)-\int^t F(t,u)\,dB(u)\right)^2=\int^t F(t,u)^2(1-\chi_N(u))^2\,d\hat{v}$$
$$=\int_{(-\infty,t]\cap N} F(t,u)^2(1-\chi_N(u))^2\,d\hat{v}=0$$

から $X(t)=\hat{X}(t)$ ($L^2(\Omega)$ において) となり (18) が出る。又 $\mathfrak{M}_t(X)=\mathfrak{M}_t(\hat{X})$ でもある。

ii) 任意の t に対し

---

4). V は lattice sum を表わす。

Sem. on Probab.
Vol.7 1961年
P1-106

(19) $\qquad \mathfrak{M}_t(X) \supset \mathfrak{M}_t(B), \qquad t \in T$

若し (19) が成立しないとすれば，あるtと，$Z \in \mathfrak{M}_t(B)$ があって，Zは $\mathfrak{M}_t(X)$ と直交する。故にZは $X(S)$，$S \leq t$，及びその linear function である任意の $E(X(S'')/\mathbb{B}_{S'})$ $S' \leq t$，とも直交する。一方Zは$\mathfrak{M}_t(B)$ の要素であることから

$$Z = \int^t h(u)\, dB(u)$$

と表わすことができる。故に任意の S''に対して

(20) $\qquad E(Z \cdot E(X(S'')/\mathbb{B}_{S'})) = 0 \qquad S' \leq t.$

ところが $\mathfrak{M}_{S'}(X) = \mathfrak{M}_{S'}(\tilde{X})$ であることから

$$\begin{aligned} E(X(S'')/\mathbb{B}_{S'}) &= \text{Projection of } X(S'') \text{ on } \mathfrak{M}_{S'}(X) \\ &= \quad '' \qquad '' \ \tilde{X}(S'') \text{ on } \mathfrak{M}_{S'}(\tilde{X}) \quad (i)\text{から}) \\ &= \int^{S'} F(S'', u)\, d\tilde{B}(u) \end{aligned}$$

が得られるので，(20) より任意のS''に対して

$$\int^{S'} h(u) F(S'', u)\, dv(u) = 0, \qquad S' \leq t$$

となる。$S'(\leq t)$ も任意であったから，$h(u) = 0$. $u > t$，と併せて

$$\mu(N(h)) = 0$$

となる。但し，$N(h) = \{u ; h(u) \neq 0\}$ とする。故に Zは $\mathfrak{M}_t(B)$の 0 element でなければならない。すなわち (19) が証明された

iii) $(dB(t), \mathfrak{M}_t(X), F(t, u))$ は$Y(t)$の proper canonical represantation である。$X(t)$の定義から (19) の逆向きの不等式は明らか，故に (19) は実は等号でなければならない。すなわち表現は proper canonical である。

これまでは $Y(t)$ の canonical representationが存在したとした場合の議論であった。一般論として次に考えなければならない問題は そのような表現が，いかなる条件の下で存在するかということを調べることである。この問題は，X_n, $n \geq 1$，のときは §I.1 で解決された。また $X(t)$, $-\infty < t < \infty$, が M_2- 連続で purely non-deterministicな stationary process (Gaussian と限らない。) であれば

(21) $\qquad X(t) = \int_{-\infty}^{t} F(t-u)\, dB(u)$

と表わされ (16) を満足することが Karhunen [1] によって証明されているが，我々の場合，すなわち $X(t)$ が Gaussian process であれば

Sem. on Probab.
Vol.7 1961年
P1-106

そのことは proper canonical representation を求めたことに他ならない。（これについては第Ⅲ章で稍詳しく述べる） §I.2 の 3°）はこの特殊な場合である。その他の場合には余り，存在については研究されていなかったようである。

P. Lévy [3] には canonical representation の存在について示唆に富んだ記述がある。（PP155－156）．そこでは $X(t)$ が canonical representation をもつためには或る種の連続性の条件をみたすことが必要且つ十分であろうと予測されている。もう少し直観的にいえば，$X(S),\ S\leq t$ が知られたとき

$$X(t+dt)=E(X(t+dt)/\mathcal{B}_t)+\sigma(t,dt)\xi_t,\quad (dt>0)$$

とかけたとしよう。（ξ_t は $G(0,1)$ に従う r.v. で $X(S),\ S\leq t$ と独立である）そのとき，十分小さな dt に対して，ξ_t が $X(u),\ u\in(t,t+dt)$，の行動についての十分な information をもち，他の information を必要としないということが求める条件であるとしている。このような観点から canonical representation が存在するための条件を考えることは"前書き"に述べた P. Lévy の思想につながるものであって重要な remark のように思はれる。

我々は Lévy の注意や Karhunen [1] の方法に示唆されて，Hilbert 空間論の方法を用いてこの問題を解決しよう。次の1節は，その準備にあてる。

§I.4 Hilbert 空間論よりの準備

この節では再生核をもつ Hilbert 空間について，その構成法や、知られている定理などについて概略を説明する。詳細は N. Aronszajn [1] や Yosida [1] 等の文献に譲る。

定義 I.5 T上で定義された実数値をとる函数 $f(t)$ の作るある集合 $\mathcal{H}$ が Hilbert 空間であるとし，その内積を

(22) $\langle f,g\rangle=\langle f(t),g(t)\rangle_t$

で表わす。このとき二変数 s,t の函数 $\Gamma(s,t)$ が次の二条件を満足するとき Γ を $\mathcal{H}$ の再生核（reproducing kernel）という。

(23) $\Gamma(\cdot,t)\in\mathcal{H},\quad t\in T,$

(24) 任意の $f\in\mathcal{H}$ と $t\in T$ に対して $\langle f(s),\ \Gamma(s,t)\rangle_s=f(t)$.

特に (24) で f として $\Gamma(s,t')$ をとれば

Sem. on Probab.
Vol.7 1961年
P1-106

(25) $\quad \langle \Gamma(s,t'),\ \Gamma(s,t) \rangle = \Gamma(t,t')$

となる。このことから、$\Gamma(\cdot,t)$に$X(t)$を$\mathfrak{H}$ の内積(22)には$\mathfrak{M}$ の内積すなわちcovarianceを対応させれば、今までの話と密接に関係していることが想像されよう。

この再生核Γは次のようにしてnon-negative definiteであることがわかる。すなわち任意の$t_1, t_2 \cdots\cdots t_n \in T$ と任意の$\xi_1, \xi_2 \cdots\cdots \xi_n$, とに対して

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \Gamma(\cdot, t_i)\xi_i \right\|^2 = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \Gamma(\cdot, t_i)\xi_i,\ \sum_{j=1}^{n} \Gamma(\cdot, t_j)\xi_j \right\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \Gamma(t_i, t_j)\xi_i \xi_j \geq 0$$

が成り立つ。逆に、Tのs, tに対して定義された$\Gamma(s,t)$ がnon-negative definiteであるならば、T上で定義された実数値をとる函数fの作るHilbert空間$\mathfrak{H}$をΓが$\mathfrak{H}$の再生核であるように定めることができる。簡単にその方法を述べよう

i) まず

$$f_1(\cdot) = \sum_{k=1}^{n} a_k \Gamma(\cdot, t_k)$$

の形の函数f_1の全体$\mathfrak{H}_1$は内積(本当の内積ではないが)

$$\left\langle \sum_{k=1}^{n} a_k \Gamma(\cdot, t_k),\ \sum_{j=1}^{m} b_j \Gamma(\cdot, s_j) \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_k b_j \Gamma(t_k, s_j)$$

の定義されたlinear spaceになる

ii) $\mathfrak{H}_1$ の要素 f_1, g_1で

$$\|f_1 - g_1\|^2 = \langle f_1 - g_1,\ f_1 - g_1 \rangle = 0$$

のとき、$f_1 \sim g_1$ ということにすれば、$\sim$はequivalence relationsを満足し$\mathfrak{H}_1$が類別できる。各類を$f, g, \cdots\cdots$の如くかき、その全体を$\mathfrak{H}_2$ とする。$f, g \in \mathfrak{H}_2$のとき内積は、各々から代表元f_1, g_1をえらんで

$$\langle f, g \rangle = \langle f_1, g_1 \rangle$$

としてきめればよい。この定義は代表元のとり方に依存しない。便宜上、0とか$\Gamma(\cdot,t)$ を含む類も、それぞれ0, $\Gamma(\cdot,t)$で表わしておく。こうすれば$\mathfrak{H}_2$ は内積の定義されたlinear spaceで

$$\|f\| = 0 \text{ と } f = 0 \text{ と同等}$$

が成り立つ。

iii) $\mathfrak{H}_2$ を完備化してHilbert空間$\mathfrak{H}$を作る。

$\mathfrak{H}_2$ は距離空間だからCauchy sequenceを用いる通常の完備化の方法を

とればよい。$f_n, n=1,2\cdots\cdots$ が Cauchy sequence であったとすれば

$$\lim_{n,m\to\infty}\|f_n-f_m\|=0$$

従って f_n-f_m は $n,m\to\infty$ のとき 0 に弱収束する。すなわち，任意の t に対して

$$\langle f_n-f_m,\ \Gamma(\cdot,t)\rangle=f_n(t)-f_m(t)\longrightarrow 0\quad(m,n\longrightarrow\infty)$$

故に $\{f_n\}$ の定める完備化された $\mathfrak{H}_y$ の要素 f_∞ は

(26) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}f_n(t)=f_\infty(t)$

としてきまるT上の函数であることがわかる。

iv) Γ は $\mathfrak{H}_y$ の再生核である。

それは，$\mathfrak{H}_{y_2}$ の任意の要素 f に対して

$$\langle f,\ \Gamma(\cdot,t)\rangle=f(t)$$

は明か。$g\in\mathfrak{H}_y$ なら $g_n\in\mathfrak{H}_{y_2}$，$n=1,2\cdots\cdots$，が存在して

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\|\langle g_n,-g\|=0$ 従って (26) から $\displaystyle\lim_{n\to\infty}g_n(t)=g(t)$

となるから

$$\langle g,\Gamma(\cdot,t)\rangle=\lim_{n\to\infty}\langle g_n,\Gamma(\cdot,t)\rangle\quad（内積の連続性）$$
$$=\lim_{n\to\infty}g_n(t)=g(t)$$

から Γ は (24) を満足する。

任意の t に対して $\Gamma(\cdot,t)\in\mathfrak{H}_{y_2}$ だから勿論 $\in\mathfrak{H}_y$. 故に (23) も満足される。

このようにして Γ を再生核としてもつ Hilbert 空間 $\mathfrak{H}_y$ を作ることができた。しかも今作った $\mathfrak{H}_y$ は，Γ を再生核としてもつ Hilbert 空間の中で最小のものである。

次に今構成した $\mathfrak{H}_y$ の部分空間 $\mathfrak{H}_{y_t}$，$\mathfrak{H}_{y_t}^*$ を

(27) $\begin{cases}\mathfrak{H}_{y_t}=\Gamma(\cdot,\tau),\ \tau\leqq t,\ \text{によって張られる } \mathfrak{H}_y \text{ の部分空間}\\ \mathfrak{H}_{y_t}^*=\bigcap_n\mathfrak{H}_{y\,t+\frac{1}{n}}\end{cases}$

によって定める。

さてこゝで次の二条件を仮定しよう。

(H・1) $\mathfrak{H}_y$ は separable である。

$$\bigcap_{t\in T}\mathfrak{H}_{y_2}=\{0\}\quad\left(従って\bigcap_{t\in T}\mathfrak{H}_{y_t}^*=\{0\}\right)$$

Sem. on Probab.
Vol.7 1961年
P1-106

明らかに

$$\bigcup_{t\in T} \mathfrak{h}_{y_t}^{*} = \mathfrak{h}_y, \qquad \mathfrak{h}_{y_s}^{*} \subset \mathfrak{h}_{y_t}^{*} \quad (s<t)$$

が成り立つから

(28) $\qquad \mathfrak{h}_{y_t}^{*} = E(t)\,\mathfrak{h}_y$

で定義される projection の全体 $\{E(t);\ t\in T\}$ は単位 I の分解になっている。そこで仮定 (H・1) と併せて Hellinger-Hahn の定理 (M.H.Stone [1] 参照，尚 S. Itô [1] に見通しのよい巧妙な証明がある) が適用出来る。その結果を述べると，$\mathfrak{h}_y$ の要素 $\{f^{(i)}\}$ $i=1,2,\cdots$ 及び $g^{(j)l}$，$j,l=1,2,\cdots$ が存在して，次の諸条件 (29) ―(32) を満足する。

(29)
i) 任意の区間 $\Delta_1=(a_1,b_1)$，$\Delta_2=(a_2,b_2]\subset T$ に対して
$\Delta_i E = E(b_i)-E(a_i)$，$i=1,2$，とかくとき
$$\langle \Delta_1 E f^{(i)},\ \Delta_2 E f^{(j)}\rangle = 0 \qquad i\neq j;$$
ii) $\Delta_1\cap\Delta_2=\phi$ なる任意の区間 Δ_1,Δ_2 に対して
$$\langle \Delta_1 E f^{(i)},\ \Delta_2 E f^{(i)}\rangle = 0;$$
iii) すべての i に対して $v_i(t)\equiv\|E(t)f^{(i)}\|^2$ は t について連続で，単調非減少である。又 ρ_i から導かれる測度を dv_i とすれば
$$dv_i \gg dv_{i+1}\quad (dv_{i+1}\text{ は }dv_i\text{ に関し絶対連続});$$
iv) $g^{(j)l}$，$l=1,2,\cdots$，は self-adjoint operator H の eigenvalue t_j に対応する eigenvector である。

$$\mathfrak{M}(f^{(i)}) = \left\{ f;\ f=\int \varphi(t)\,dE(t)f^{(i)},\ \varphi\in L^2(v_i)\right\}, \quad i=1,2,\cdots$$

とするとき，それらは互いに直交[5]する $\mathfrak{h}_y$ の部分空間である。

$$\mathfrak{M} = \sum_i \oplus\ \mathfrak{M}(f^{(i)}) \qquad (\textstyle\sum_i \oplus \text{ は直和を表わす})$$

$$\mathfrak{N}(g^{(j)l}) = \{g^{(j)l}\text{ の張る（一次元）空間}\},\quad j,l=1,2\cdots\cdots$$

とすれば，これも亦，互に直交する $\mathfrak{h}_y$ の部分空間で

$$\mathfrak{N} = \sum_j\sum_l \oplus\ \mathfrak{N}(g^{(j)l})$$

とかけば

(30) $\qquad \mathfrak{h}_y = \mathfrak{M}\oplus\mathfrak{N}$

---

5) 部分空間 $\mathfrak{M}$ と $\mathfrak{N}$ が直交するとは，$\mathfrak{M}$ の任意の要素が $\mathfrak{N}$ の任意の要素と直交することを意味する。

Sem. on Probab.
Vol.7 1961年
P1-106

となる。さらに今考えた部分空間 $\mathfrak{M}(f^{(i)})$ と $h_{y_t}{}^*$ との関係については

$$(31) \qquad E(t)\,\mathfrak{M}(f^{(i)}) \subset \mathfrak{M}(f^{(i)})$$

が成立つ。このことは、P_i を $\mathfrak{M}(f^{(i)})$ への *projection* を表わす *operator* とするとき

$$(31') \qquad E(t)\cdot P_i = P_i\, E(t)$$

と同等である。

h_y を (20) のように $\mathfrak{M}(f^{(i)})$ や $\mathfrak{N}(g^{(j)\ell})$ の直和に分解するのは一通りではない。しかし、どのような分解に対しても

(32) $\{f^{(i)}\}$ の個数も $\{g^{(j)\ell}\}$ の個数も一定である。

以上が我々が今後使いたい事項で、何れも *Hellinger - Hahn* の定理の結論である。

さて (22) によって次の定義が可能である。

<u>定義 I.6</u> $\{f^{(i)}\}$ の個数と各 t_j に対する $\{g^{(j)\ell}\}$ の個数の上限（∞ も許す）を $E(t)$ のスペクトルの <u>*multiplicity*</u> という。

<u>定理 I.3</u> $\Gamma(\cdot,t)$ は次のように表わされる。

$$(33) \qquad \Gamma(\cdot,t) = \sum_i \int F_i(t,u)\, dE(u) f^{(i)} + \sum_{t_j \le t} \sum_\ell b_j^\ell(t)\, g^{(j)\ell}$$

<u>証明</u> (30) によって

$$\Gamma(\cdot,t) = \sum_i \int F_i(t,u)\, dE f^{(i)} + \sum_{t_j} \sum_\ell b_j^\ell(t)\, g^{(j)\ell}$$

と表わすことができる。(31) から

$$\Gamma(\cdot,t) = E(t)\,\Gamma(\cdot,t) \qquad (\Gamma(\cdot,t) \in h_{y_t}{}^* \text{ だから})$$

$$= \sum_i E(t) \int F_i(t,u)\, dE(u) f^{(i)} + \sum_{t_j} \sum_\ell b_j^\ell(t)\, E(t) g^{(j)\ell}$$

$$= \sum_i \int^t F_i(t,u)\, dE(u) f^{(i)} + \sum_{t_j \le t} \sum_\ell b_j^\ell(t)\, g^{(j)\ell}$$

となって (33) を得る。

<u>系</u> $\Gamma(\cdot,t)$ を (23) のように表わしたとき，$s<t$ ならば

$$(34) \qquad E(s)\,\Gamma(\cdot,t) = \sum_i \int^s F_i(t,u)\, dE(u) f^{(i)} + \sum_{t_j \le s} \sum_\ell b_j^\ell(t)\, g^{(j)\ell}$$

証明は (21) を用いれば殆ど明かである。

先に $\Gamma(\cdot,t)$ に $X(t)$ を対応させればよかろうと書いたが (33) の右辺の各項

Sem. on Probab.
Vol.7 1961年
P1-106

分は $dE(u)f^{(l)}$ に $dB(u)$ を対応させれば，丁度，表現を考えていることになる。(34)はその canonical property に相当する。それらの詳細は次節で論じることにしよう。

§I. 5 Canonical representationの存在

$\Gamma(S,t)$, $S, t\in T$. を Gaussian process $X(t)$ の covariance function とする。Γ は nonnegative definite だから，前節の結果によって，Γ を再生核としてもつ Hilbert 空間 $\mathcal{H}_\Gamma$ が存在する。前節の最後に注意したことを伏線として $\mathcal{H}_\Gamma$ においた条件 (H.1)，(H.2) に相当する仮定を $\mathfrak{M}_t$ に関する条件におきかえて，次の二条件を仮定しよう。すなわち

($\mathfrak{M}$.1) $\mathfrak{M}(X)$ は separable である。　但し $\mathfrak{M}(X)=\bigcup_t \mathfrak{M}_t(X)$

($\mathfrak{M}$.2) $\bigcap_{t\in T}\mathfrak{M}_t(X)=\{0\}$ [6)]

定理 I.4　次の対応

(35) $S:\ \mathcal{H}_\Gamma \ni \Gamma(\cdot,t)\longrightarrow X(t)\in\mathfrak{M}(X)$

によって定まる $\mathcal{H}_\Gamma$ から $\mathfrak{M}$ の上への isometric な変換 $(\bar{S})$ が存在してそれは次の対応を導く

(36) $\mathcal{H}_{\Gamma t}\longleftrightarrow\mathfrak{M}_t(X)$,　$\mathcal{H}_{\Gamma t}^{*}\longleftrightarrow\mathfrak{M}_t^{*}(X)$,　$\mathfrak{M}_t^{*}(X)=\bigcap_n\mathfrak{M}_{t+\frac{1}{n}}(X)$.

(37) $f\longleftrightarrow X$ ならば　$E(t)f\longleftrightarrow E(X/\mathcal{B}_t^{*})$,　$\mathcal{B}_t^{*}=\mathcal{B}_t(\mathfrak{M}_t^{*})$.

証明　(25)で定まる変換 S は $\Gamma(\cdot,t)$, $t\in T$ の張る linear space $\mathcal{H}_{\Gamma 2}$ (前節参照) から $X(t)$, $t\in T$. の張る linear space $\mathcal{L}$ の中への変換にまで

$$S:\quad \sum_{i=1}^{n}a_i\Gamma(\cdot,t)\longrightarrow\sum_{i=1}^{n}a_iX(t_i)$$

のようにして拡張される。これは 1:1 で $\mathcal{L}$ の上への対応である。実際

$$\sum_{i=1}^{n}a_iX(t_i)=0$$

なら，すべての $X(t)$, $t\in T$. と直交するから

$$\sum_{i=1}^{n}a_i\Gamma(t,t_i)=0\qquad t\in T.$$

---

6) これは weakly stationary process の場合には"purely non-deterministic"という条件である。

それは $\mathfrak{h}_y$ の 0 element であることを示しているが、同時に $\sum a_i X(t_i)$ の S による逆像にもなっている。

また $\mathcal{L}$ における内積として covariance を考えることにすれば、

$$\langle \Gamma(\cdot, t),\ \Gamma(\cdot, s)\rangle = \Gamma(s, t) = E(X(s)X(t))$$

に注意して S が $\mathcal{L}$ から $\mathfrak{h}_{y_2}$ の上への isometric な変換であることが証明される。

$\mathcal{L}$ と $\mathfrak{h}_{y_2}$ はそれぞれ $\mathfrak{M}(X)$ と $\mathfrak{h}_y$ とて dense だから S は $\mathfrak{h}_y$ から $\mathfrak{M}$ の上への 1:1 て isometric な変換 $\bar{S}$ にまで拡 さきる。$\bar{S}$ の作り方から

$$\bar{S}\mathfrak{h}_{y_t} = \mathfrak{M}_t(X), \qquad \bar{S}\mathfrak{h}_{y_t}^* = \mathfrak{M}_t^*(X)$$

さらに $\bar{S}f = X$ のとき

$$E(t)f \longleftrightarrow \text{Projection of } X \text{ on } \mathfrak{M}_t^*(X) = E(X/\mathcal{B}_t^*)$$

だから (37) を得る。最後の等式は $\mathfrak{M}(X)$ が gaussian system であることから出る。

定理 I.4 て得た変換によって、我々が $X(t)$ について仮定した ($\mathfrak{M}$.1) と ($\mathfrak{M}$.2) は $\mathfrak{h}_y$ に対する条件 (H-1), (H-2) にそれぞれ対応することがわかる。従って $\mathfrak{h}_y$ に Hellinger - Hahn の定理を適用して $\{f^{(i)}\}$ が得られる。(29) より

(38) $\qquad dE(t)f^{(i)} \longleftrightarrow dB^{(i)}(t)$

なる $dB^{(i)}(t)$ は continuous measure dv_i をもつ gaussian random measure であることが知られる。よって

<u>定理 I.5</u> $X(t)$ が ($\mathfrak{M}$.1) と ($\mathfrak{M}$.2) を満足すれば、gaussian random measure $\{dB^{(i)}(t)\}$ と r. v. $\{Y_{t_j}^{\ell}\}$ が存在して

i) $dB^{(i)}(t)$, $Y_{t_j}^{\ell}$, $i, j, \ell = 1, 2, \cdots\cdots$ はすべて独立,

ii) $E(dB^{(i+1)}(t))^2 \ll E(dB^{(i)}(t))^2$, $\quad i = 1, 2, \cdots\cdots$

iii) $X(t) = \sum_i \int^t F_i(t, u)\, dB^{(i)}(u) + \sum_{t_j \le t} \sum_{\ell} b_j^{\ell}(t) Y_{t_j}^{\ell}$,

iv) $E(Y(t)/\mathcal{B}_s) = \sum_i \int^s F_i(t, u)\, dB^{(i)}(u) + \sum_{t_j \le s}^{*} \sum_{\ell} b_j^{\ell}(t) Y_{t_j}^{\ell}$, [7] $\quad s \le t$

が成り立つ。

---

7) $\sum_{t_j \le s}^{*} \sum_{\ell} = \sum_{t_j < s} \sum_{\ell} + \sum_{\ell (b_j^{\ell}(s) \neq 0)}$

Sem. on Probab.
Vol.7 1961年
P1-106

証明 i). $dB^{(i)}t$ が random measure になることはすでに注意した。それらが独立(直交)であることは(29)の i)による。$Y_{t_j}^{\ell}=\overline{S}g^{(j)\ell}$ とすれば(29)の iv)からそれらが独立であり、又 $\{dB^{(i)}(t)\}$ とも独立になることがわかる。

ii) は(29)の iii)から明か。

iii) は(38)の対応と、$dE(u)f^{(i)}$ による積分[8]と $dB^{(i)}(u)$ による積分(Wiener integral)とが全く同様にして定義されることに注意すれば(33)から直ちに出る。

iv) は iii) と同様な注意と定理 I.3 の系を用いて、

$$E(Y(t)/\mathcal{B}_s^*)=S\Big[E(s)\sum_i\int^t F_i(t,u)\,dE(u)f^{(i)}+E(s)\sum_{t_j\le t}\sum_\ell b_j^{\ell}(t)g^{(j)\ell}\Big]$$
$$=S\Big[\sum_i\int^s F_i(t,u)\,dE(u)f^{(i)}+\sum_{t_j\le s}\sum_\ell b_j^{\ell}(t)g^{(i)\ell}\Big]$$
$$=\sum_i\int^s F_i(t,u)\,dB^{(i)}(u)+\sum_{t_j\le s}\sum_\ell b_j^{\ell}(t)Y_{t_j}^{\ell}$$

故に、$E(X(t)/\mathcal{B}_s)=E(E(X(t))/\mathcal{B}_s^*)/\mathcal{B}_s)$ だから

$$E(Y(t)/\mathcal{B}_s)=\sum_i\int^s F_i(t,u)\,dB^{(i)}(u)+\sum^{*}_{t_j\le s}\sum_\ell b_j^{\ell}(t)Y_{t_j}^{\ell}.$$

定義 I.7　上の定理で得た system $(dB^{(i)}(t),\ F_i(t,u),\ b_j^{\ell}(t)Y_{t_j}^{\ell})$ $i,j,\ell=1,2,\cdots\cdots$ を $X(t)$ の generalized canonical representation と呼ぶ。又 $E(t)$ のスペクトルの multiplicity を $X(t)$ の multiplicity という。

定理 I.5 は $X(t)$ が $(\mathfrak{M}.1)$ と $(\mathfrak{M}.2)$ を満足すれば必ず generalized canonical representation をもつことを主張するものである。しかしその一意性は $dB^{(i)}(t)$ のとり方($f^{(i)}$ のとり方)が一通りでないことからも察せられるように一般には保障されない。

multiplicity が 1 より大なる process の例としては §I.2 の 4°), 5°) であげた $X_4(t)$, $X_5(t)$ がある。$X_4(t)$ に対する(12)は generalized canonical representation によって表わされている。

これまでの事からもはや殆ど明かではあるが、本章の最も重要な定理である canonical representation の存在定理を述べる。

定理 I.6　$X(t)$ が canonical representation をもつための必要且つ十分な条件は $X(t)$ が $(\mathfrak{M}.1)$, $(\mathfrak{M}.2)$ 及び

$(\mathfrak{M}.3)$　$X(t)$ の multiplicity が 1

を満すことである。

8) Aronszajn [1] 参照

Sem. on Probab.
Vol.7 1961年
P1-106

証明． 必要なこと $(dB(t), F(t,u))$ を $X(t)$ の canonical representation とする。仮定から

$$X(t) \sim \hat{X}(t) = \int^{t} F(t,u)\,dB(u)$$

であるが $\mathfrak{M}(\hat{X}) = \bigcup_{t \in T} \mathfrak{M}_t(\hat{X}) \subset \mathfrak{M}(B)$ で $\mathfrak{M}(B)$ が separable だから $(\mathfrak{M}.1)$ は明か。又

$$\mathfrak{M}_t(\hat{X}) \subset \mathfrak{M}_t(B), \qquad \bigcap_{t \in T} \mathfrak{M}_t(B) = \{0\}$$

だから $\mathfrak{M}_t(X)$ について $(\mathfrak{M}.2)$ が成立つ

multiplicity については，§0. 4°) におけるように continuous part と discontinuous part に分けてみれば，1 になることも明らか

十分なこと $(\mathfrak{M}.1)$, $(\mathfrak{M}.2)$ 及び $(\mathfrak{M}.3)$ があれば定理 I.5 によって

$$X(t) = \int^{t} F_1(t,u)\,dB^{(1)}(u) + \sum_{t_j \leq t} b_j(t) X_{t_j}$$

と表わされる。そこで random measure $dB(t)$ を，$\sum a_j^2 E(X_{t_j}^2) < \infty$ なる $\{a_j\}$ を定めて，

$$B((a,b]) \equiv B(b) - B(a) = \int_a^b dB^{(1)}(u) + \sum_{a < t_j \underset{(=)}{<} b} a_j X_{t_j} \text{ [9]}, \quad a < b.$$

によって定義する。kernel $F(t,u)$ は各 t について

$$F(t,u) = \begin{cases} F_1(t,u), & u \leq t, \quad u \neq t_j \quad j = 1, 2, \cdots\cdots, \\ b_j(t)/a_j, & u = t_j, \end{cases}$$

によって定義する。$dB^{(1)}(t)$ には continuous measure dv_1 が対応するから

$$\int^{t} F(t,u)\,dB^{(1)}(u) = \int^{t} F_1(t,u)\,dB^{(1)}(u)$$

が容易にわかる。故に

$$\int^{t} F(t,u)\,dB(u) = \int^{t} F_1(t,u)\,dB^{(1)}(u) + \sum_{t_j \leq} b_j(t) X_{t_j} = X(t)$$

なることがわかり $(dB(t), F(t,u))$ が $X(t)$ の表現であることがわかる。

その表現が canonical であることは，定理 I.5 の iv) と dB の作り方から明か。

この定理から §I.2 の $X_4(t)$, $X_5(t)$ は共に canonical representation をもたないことがわかる。Lévy process や stationary process は

9) $\sum_{\underset{(=)}{<} b}$ は b がある t_j のとき $X_{t_j} \in \mathfrak{M}_{t_j}$ なら $\leq$ を $\notin \mathfrak{M}_{t_j}$ なら $<$ をとる。$\sum^{*}$ としても同じ。

Sem. on Probab.
Vol.7 1961年
P1-106

いずれもmultiplicityは1であって(M-1),(M-2)があればcanonical representationが存在する。表現に関連した問題を扱う場合にstationary processが特に簡単になる理由の一つはmultiplicityが1になる事であると思われる。

他にこの存在定理に関連して，付言したいことは，与えられたprocessのmultiplicityが1であることを知る具体的な方法（例えばcovariance functionをみて知るといった方法）が特殊なprocess以外はよくわかっていないということである。それを解決することは，一つの残された問題といえよう。又multiplicityが1より大であるか否かによって，processの確率論的な性質がどのように違ってくるかということも興味ある問題のように思われるが，まだその結果は，全然得られていないようである。

§ I.6 Canonical representationの判定条件

canonical representationについて，次に問題になることは，あるprocessの表現が与えられたとき，それがcanonicalであるか否かを判定することである。この節では　その判定条件を導く。　与えられた表現がnon-canonicalと判定された場合の処理や，non-canonical representationの特性などについて考察することは§III.5に譲る。

P. Lévy(5) §II.4. にはproper canonical representationを判定するcriterionが与えられている。それは次のような条件である。

$(dB(t), F(t,u))$ （$(E(dB(t)))^2 = dv(t)$ とする）がproper canonicalであるための必要且つ十分な条件は，任意のt_0に対して，Volterra-Stieltjes equation.

$$(39)\qquad \int_0^t F(t,u)\, dx(u) = 0 \qquad , 0<t<t_0$$

が，$(0,t_0)$において

$$(40)\qquad \int_0^{t_0} \frac{(dx(u))^2}{dv(u)} < \infty$$

を満足する，non-constantな解$x(u)$をもたないことである。″

我々は(39)や(40)に表はれる積分の意味を正確にすることよりも，それらは形式的に理解しておいてこの条件のもつ直観的な意味を考えてみよう。

$$X(t) = \int_0^t F(t,u)\, dB(u), \qquad 0<t\leq t_0$$

Sem. on Probab.
Vol.7 1961年
P1-106

として、$\mathfrak{M}_t(X)$, $\mathfrak{M}_t(B)$ は今迄と同様な意味で用いることにする。Hilbert 空間 $\mathfrak{M}_{t_0}(B)$ は $(0, t_0)$ を微小な空間 $\{\Delta_n\}$, $\Delta_n \cap \Delta_m = \phi\ (m \neq n)$, $\cup \Delta_n = [0, t_0]$ に分割したとき、$\{B(\Delta_n)/\sqrt{v(\Delta_n)}\}$ を正規直交系とする有限次元空間の、分割を一様に細かくしていった極限のように考えられる。そのとき $\mathfrak{M}_{t_0}(B)$ の要素 X は、分割を十分細かくして正規直交系 $\{B(\Delta_n)/\sqrt{v(\Delta_n)}\}$ により X を Fourier 式展開したもので十分近似できるであろう。$E(X \cdot B(\Delta_n)) = x(\Delta_n)$ としてこの展開をかけば

$$(41) \qquad X \sim \sum_n \frac{x(\Delta_n)}{\sqrt{v(\Delta_n)}} \frac{B(\Delta_n)}{\sqrt{v(\Delta_n)}} \qquad (\sim \text{は十分近似できることを示す})$$

とかく。X の norm が有限だから、すなわち $E(X^2) < \infty$, だから

$$\sum_n \frac{x(\Delta_n)^2}{v(\Delta_n)} \sim E(X^2) < \infty .$$

ここで分割を一様に細かくしていった極限が (40) であるとみてよいであろう。

proper canonical すなわち $\mathfrak{M}_{t_0}(X) = \mathfrak{M}_{t_0}(B)$ は $\mathfrak{M}_{t_0}(X)$ が Hilbert 空間 $\mathfrak{M}_{t_0}(X)$ のいかなる超平面にも含まれてしまわないことであるから、$\mathfrak{M}_{t_0}(X)$ のすべての要素と直交する $\mathfrak{M}_{t_0}(B)$ の要素が存在しないことである。もっと弱く、すべての $X(t)$, $t \leq t_0$ (それは $\mathfrak{M}_{t_0}(X)$ を張る。)と直交する $\mathfrak{M}_{t_0}(B)$ の要素をもたないことであるといってよい。再び近似の段階で考えて、$\mathfrak{M}_{t_0}(B)$ の要素 X が (41) のようにかけているとし、$X(t)$ も同じ $(0, t_0)$ の分割で

$$X(t) \sim \sum_{\Delta_n \subset [0,t]} F(t, u_n) \sqrt{v(\Delta_n)} \cdot \frac{B(\Delta_n)}{\sqrt{v(\Delta_n)}}$$

とかけたとしよう。$X \perp X(t)$ ということは、$\{B(\Delta_n)/\sqrt{v(\Delta_n)}\}$ が正規直交であるから、

$$E(X(t) \cdot X) \sim \sum_{\Delta_n \subset [0,t]} F(t, u) \sqrt{v(\Delta_n)} \cdot \frac{x(\Delta_n)}{\sqrt{v(\Delta_n)}} = 0$$

といいかえられる。すべての t について、この極限を考えたものが (39) といってよいだろう。

以上の考察から Lévy の与えた proper canonical representation に対する criterion は、$\mathfrak{M}_t(X) = \mathfrak{M}_t(B)$ ということを、kernel $F(t, v)$ と measure dv を用いて、言いかえたものであるといえよう。我々はこれまで、Hilbert 空間論の立場から表現を考えているので今の段階では、Lévy の考え方を、rigorous に言うことは容易である。

<u>定理 I・7</u> $(dB(t), F(t, u))$ が proper canonical representation であるための必要且つ十分な条件は、任意に固定した t_0 に対し

Sem. on Probab.
Vol.7 1961年
P1-106

(42) $$\int^{t} F(t,u)f(u)\,dv(u) \equiv 0, \qquad t \leq t_0. \quad (f \in L^2(v))$$

ならば

(43) $$f(u) \simeq 0 \qquad (dv),^{10)} \qquad u \leq t_0$$

となることである。

<u>証明</u> 定理の主張の対偶を証明する。

$(dB(t), F(t,u))$ が proper canonical でないとすれば、ある t_0 があって

(44) $$\mathfrak{M}_{t_0}(X) \neq \mathfrak{M}_{t_0}(B)$$

となる。従って $\mathfrak{M}_{t_0}(B)$ で $\mathfrak{M}_{t_0}(X)$ と直交する r.v. $Z (\neq 0)$ が存在する。それは $\mathfrak{M}_{t_0}(B)$ の要素であることから

(45) $$Z = \int^{t_0} f(u)\,dB(u), \qquad f \in L^2(v)$$

とかけ、$\mathfrak{M}_{t_0}(X)$ と直交することから、任意の $t\,(\leq t_0)$ に対して $E(Z\cdot X(t))=0$ すなわち

$$\int^{t} F(t,u)f(u)\,dv(u) \equiv 0, \qquad t \leq t_0$$

となる。又 $Z \neq 0$ だから(43)は成り立たない。

逆に $f \in L^2(v)$ があってある t_0 に対して(42)が成り立ち、(43)が成り立たないとすれば(45)で定義される Z は明かに $\mathfrak{M}_{t_0}(B)$ に属し、$\mathfrak{M}_{t_0}(X)$ に属さないから(44)が成り立つ。故に表現 $(dB(t), F(t,u))$ は proper canonical ではない。

〔注〕 Karhunen [1] で、M_2ー連続、purely non-deterministic な stationary process $X(t)$, $-\infty < t < \infty$, は orthogonal random measure を用いて

$$X(t) = \int_{-\infty}^{t} F(t-u)\,dZ(u), \qquad E\,(dZ(u))^2 = du$$

と表わされることが証明され、$\mathfrak{M}_t(X) = \mathfrak{M}_t(Z)$(同じく表現が proper canonical であると言おう)となる表現の作り方や、それを判定する条件も与えられている。定理 I.7. は、その判定条件を non-stationary で dv が Lebesgue measure でない場合へ拡張したものと考えられる。

---

10) $f(u) \simeq g(u)$ (dv) は dv-measure 0 の集合以外で $f(u) = g(u)$ であることを示す。

Sem. on Probab.
Vol.7 1961年
P1-106

我々はすでに §I. 2. の 2°) で $F(t,u)$ が特殊な場合について，この判定条件を用いて，(11) を証明したことを注意しよう。同じく §I. 2 であげた $X_{1}(t)$ $X_{2,2}(t)$ は共に *non-canonical* な表現で書き表わされている例である。

Sem. on Probab.
Vol.7 1961年
P1-106

第II章 多重 Markov Gaussian process

本章では, gaussian proces の多重 markov 性を表現を用いる立場から研究するのが主な目的である。多重 markov process といっても, 一般な定義の下での系統的な研究はまだ少いようで, §II.2. で触れるように, 例えば discrete parameter の場合についての Doob の研究とか, continuous parameter の場合に, 従属性以外の解析的な条件を仮定した上で, Gaussian process の多重 markov 性を研究した Doob, Lévy の結果等が著しいものといえよう。

今, 従属性という言葉を用いたが, 単純 markov 性の直観的な意味を考えてみると, process $X(t)$について, 時刻 S までの様子がわかったとき, 後の時刻 t における $X(t)$ の行動が $X(S)$のみに依存し, それ以外の得られている資料は不要であることを意味しているわけで, S 以前の観測値と, $X(t)$ の従属のし方が最も単純な場合である。従って我々が, 例えば 2 重 markov process といったものに対して, 期待する性質は, S 以前の事が知られたときに, $X(t)$ $(t>S)$が得られた観測値の函数である或る二つの量に規制されて行動するということであろう。その意味での従属性をもつ 2 重 markov process, さらに一般に N 重 markov process の一般な定義を与えて, 系統的に研究することは遙かな目標としておくことにして, こゝでは gaussian process のみについて, この目標への approach を試みたい。

最初に (§II.1) で simple markov gaussian process について, よく知られていることを冗長をも嫌わずに述べるが, それは表現を用いて研究する立場から整理しておくことゝ, この立場から多重 markov gaussian process への拡張を自然なものにするための準備としての記述に過ぎない。

§II.1 Simple markov gaussian process.

$X(t)$, $t\in T$, を $E(X(t))\equiv 0$ なる simple markov gaussian process とする。任意の t, S $(<t)$と任意の $E\in \mathcal{B}(R')$に対して

(1) $\qquad P(X(t)\in E/\mathcal{B}_S)=P(X(t)\in E/X(S))$

が確率 1 で成り立つことが定義であるが, これから

Sem. on Probab.
Vol.7 1961年
P1-106

$$E(X(t)/\mathcal{B}_s)=E(X(t)/X(s))$$

がでる。ところが上式の右辺は $(X(t), X(s))$ が gaussian system であることから $X(s)$ の一次函数になり $E(X(s))^2 \neq 0$ のときは $E(X(t)X(s))/E(X(s)^2) = \Psi(t,s)$ とかけば

(2) $E(X(t)/X(s))=\Psi(t,s)X(s)$

が得られる。故に simple markov 性から

(3) $E(X(t)/\mathcal{B}_s)=\Psi(t,s)X(s)$

がでる。逆に (3) が成り立てば、Gaussian process の性質から $E(X(t)/\mathcal{B}_s)$ は $X(t)$ の $\mathfrak{M}_s$（§0 での $\mathfrak{M}_s(X)$ を単に $\mathfrak{M}_s$ とかく）への projection だから $X(t)-\Psi(t,s)X(s)$ は $\mathfrak{M}_s$ と直交する。従ってこの場合 $\mathfrak{M}_s$ と独立になる。$X(t)=\Psi(t,s)X(s)+(X(t)-\Psi(t,s)X(s))$ とかけば K. Itô (2) §60. により simple markov process になる（尚 Doob (2) Chap. II §6 参照）

以上のことから、$X(t)$ の分散が決して 0 にならないものとすれば gaussian process に対しては (2) が simple markov であるための必要十分な条件といえる。

今、simple markov gaussian process $X(t)$ が

(4) $\mathfrak{M}_t(X)$ は t について連続

で canonical representation $(dB(t), F(t,u))$ をもつものとする。さらに独立な場合を避けるために、任意の $t, s \in T$ について

(5) $\Gamma(t,s)=E(X(t)X(s)) \neq 0$

を仮定しよう。條件つき平均値の性質と (2) から任意の $s<s'<t$ に対して

$$(6)\quad \begin{aligned} E(E(X(t)/\mathcal{B}_{s'})/\mathcal{B}_s) &= E(\Psi(t,s')X(s')/\mathcal{B}_s)=\Psi(t,s')\Psi(s',s)X(s) \\ &= E(X(t)/\mathcal{B}_s)=\Psi(t,s)X(s) \end{aligned}$$

となる。(5) の仮定から、$\Gamma(s,s) \neq 0$ だから

$$(7)\quad \begin{cases} \Psi(t,s')\Psi(s',s)=\Psi(t,s) \\ \Psi(t,t)=1 \end{cases}$$

を得る。又任意の $t, s\ (<t)$ に対し

$$\Gamma(t,s)=E(X(s)\cdot E(X(t)/\mathcal{B}_s))=\Psi(t,s)E(X(s)^2)\neq 0$$

Sem. on Probab.
Vol.7 1961年
P1-106

だから $\Psi(t,s)$ は決して 0 になることはない。便宜上 $s>t$ なら

$$\Psi(t,s) \equiv \Psi(s,t)^{-1}$$

と約束すれば Ψ は $T\times T$ で定義され、尚且つ (7) を満足することがわかる。特に一点 s_0 を固定して $f(t)\equiv\Psi(t,s_0)$ とかけば Ψ は

(8) $$\Psi(t,s)=\Psi(t,s_0)/\Psi(s,s_0)=f(t)/f(s)$$

と表わすことができる。故に $U(t)=X(t)/f(t)$ とすれば $X(t)$ に関する Borel field と $U(t)$ に関する Borel field は一致して

$$E(U(t)/\mathcal{B}_s)=\frac{1}{f(t)}E(X(t)/\mathcal{B}_s)=\frac{1}{f(t)}\Psi(t,s)X(s)=U(s)$$

が得られる。これは $U(t)-U(s)$, $(t>s)$, が $\mathfrak{M}_s$ と直交、したがって $\{U(\tau);\ \tau\leq s\}$ と独立であることを示している。すなわち $U(t)$ は additive process である。$U(t)$ から導かれる additive gaussian random measure を dU とかけば $X(t)$ は

(9) $$X(t)=f(t)\,U(t)=\int^{t}f(t)\,dU(u)$$

と表わすことができる。また決して 0 にならないような $f(t)$ を用いて、$X(t)$ が

(9') $$X(t)=\int^{t}f(t)g(u)\,dB(u)$$

と表わされるならば、それは (2) を満足し、従って simple markov process である。

以上をまとめて

<u>定理 II. 1</u> $X(t)$ が canonical representation $(dB(t),\ F(t,u))$ をもち (4), (5) を満足するとき、simple markov process であるための必要且つ十分な条件は

(10) $$F(t,u)=f(t)\,g(u)$$

と表わされることである。こゝに $f(t)$ は決して 0 になることはなく、$g(u)$ は任意の t に対して

$$0<\int^{t}g(u)^2\,dv(u)<\infty \qquad \left(dv(u)=E(dB(u))^2\right)$$

をみたす函数である。

<u>系.1.</u> M_2 −連続な $X(t)$ が (9) のように表わされるならば $f(t)$ は連続函数で、

Sem. on Probab.
Vol.7 1961年
P1-106

$U(t)$ も M_2 ー連続である。

証明. $X(t)$ が M_2 ー連続だから内積の連続性により

$$\lim_{t\to t_0} E(X(t)X(s)) = E(X(t_0)X(s)), \quad (t_0 > s)$$

これを (9) を用いてかき直せば

$$\lim_{t\to t_0} f(t)f(s)E(U(t)U(s)) = f(t_0)f(s)E(U(s)^2)$$

$f(s) \neq 0$, $E(U(s)^2) \neq 0$ を用いて $f(t)$ の連続性を得る。

$U(t)$ が M_2 ー連続であることは, $U(t) = X(t)/f(t)$ から明か。

これは定理 II.1 から導かれる簡単な事実ではあるが, $X(t)$ の連続性から *canonical kernel* $F(t,u)$ (この場合は $f(t)g(u)$) の t に関する連続性が出ることは *simple markov process* の著しい特徴である。若し, この上定常性を仮定するならば *canonical kernel* の函数形まできまってしまう。(§ III.2 参照)

上記の $U(t)$ について $E(U(t)^2)$ が C^1 に属するならば, $|g(u)|$ は連続で $U(t)$ は *Brownian motion* $B_0(t)$ の時間の *scale* をかえたものであることが知られる。従って $X(t)$ は *Brownian motion* の時間の *scale* をかえ, 適当な函数 $f(t)$ をかけることによって得られることがわかる。(T. Seguchi N. Ikeda [1] 参照) このような $X(t)$ は次の微分方程式

$$(11) \qquad dX(t) = \frac{f'(t)}{f(t)} X(t)\,dt + f(t)g(t)\,dB_0(t)$$

を満足することは (9') から直ちに得られる。

なお *covariance function* をみて *simple markov* 性を推測するときの一つの目安として殆ど明かな次の系をあげておく。

系 2. $X(t)$ が *canonical representation* をもち (4), (5) を満足する *simple markov process* ならばその *cavariance function* は

$$(12) \qquad \Gamma(t,s) = f(t)\,h(s), \qquad t \geq s.$$

と表わされる。こゝに f は, 定理 II.1によって定る (10) における f であり、$h(s) = f(s)\int^s g(u)^2\,dv(u)$ である。

(註) (10) における $F(t,u)$ の分解は一意ではない。すなわち f, g の代りに cf, $\frac{1}{c}g$ をとってもよい。これまで簡単のため恰も f, g が一意に定まっているかの如き議論をしてきたが, このような考慮は常に払われなければならない。

Sem. on Probab.
Vol.7 1961年
P1-106

§II.2 多重 markov Gaussian process

本章の冒頭にも述べたように，我々は単純 markov 性の自然な拡張として，Gaussian process の多重 markov 性を定義して，そのような process を表現を用いる立場から研究するのが主な目的である。しかし自然な拡張といっても，いろいろな立場があるわけで，すでにそれぞれの立場から一般の process（Gaussian と限らない）の多重 markov 性が定義されている。例えば Doob〔2〕Chap II.§6 には discrete parameter の場合に多重 markov process が定義され，state が discrete な場合について若干の結果が得られている。（Chap V§3）。Doob による定義は

$$P(X_n \leqq \lambda / X_{n-1}, X_{n-2}, \cdots\cdots) = P(X_n \leq \lambda / X_{n-1}, \cdots\cdots, X_{n-N})$$

が確率 1 で成り立つとき多重 markov process という。

である。これは $\mathbb{X}_n = (X_n, \cdots\cdots, X_{n+N-1})$ が単純 markov vector process になるようにという立場から与えられたもので，このような process は特に state が discrete であるようなときには単純 markov の自然な拡張になっている。

この定義を continuous parameter の場合に拡張しようとすれば，$X(t)$ から vecter process $\mathbb{X}(t)$ を如何にとればよいかが問題になる。例えば $X(t)$ が $N-1$ 回まで何等かの意味で微分可能であれば $\mathbb{X}(t) = (X(t), X'(t), \cdots, X^{(N-1)})$ とするのが一つの方法であろう。しかし元来 markov 性は過去との従属性に関する性質であるのに，そのときは宿命として一見従属性とは直接関係ないような process の微分可能性を仮定しなければならない。今 Gaussian process のときだけを考えて，すでによく知られている定義をあげてみよう。Doob〔1〕は stationary Gaussian process について N 重 markov process の定義を次のようにした。$X(t)$ が $N-1$ 回微分可能で，N 回は微分不可能であるが形式的な $X^{(N)}(t)$ を考えるとき

$$(13) \qquad a_0 X^{(N)}(t) + a_1 X^{(N-1)}(t) + \qquad + a_N X(t) = B_0'(t)$$

（$B_0'(t)$ は Brownian motion $B_0(t)$ の形式的な微係数）をみたすものを N 重 markov process（それは stationary simple markov process）がみたす。Langevin equation

$$a_0 X'(t) + a_1 X(t) = B_0'(t)$$

の自然な拡張である。

Sem. on Probab.
Vol.7 1961年
P1-106

Lévy(3)は亦，一般のGaussian processの場合（stationaryと限らない）にやはり $X(t)$ について $N-1$ 回までの微分可能性を仮定して $\{X(S), S\leq t\}$ を知ったときの条件につき平均値 $E(X(t)/\mathcal{B}_S)$ $(S<t)$ が $X(S), X'(S), \cdots\cdots, X^{(N-1)}(S)$ のみの函数（Gaussianだから必然的に一次函数）であるとき，狭義N重markovとよんだ。この定義は $X(t)$ がstationaryのときはDoobのN重markov processの定義と同じである。

この狭義のものに対して同じくLévy(3)は $X(t)$ の微分を用いる代りに，あるN個のadditive process $U_i(t)$, $i=1,2,\cdots\cdots,N$ が存在して，任意の $t, S(<t)$ に対して

$$(14)\qquad E(X(t)/\mathcal{B}_S)=\sum_{i=1}^{N} f_i(t)\,U_i(S)$$

が成り立つものを広義N重markov processと呼んだ。

例えば $N=1$ なら，$U(t)$ をadditive processとして

$$X(t)=f(t)\,U(t)$$

を考えると，これは広義1重markov processであるが，若し $f(t)=0$ となることがあればsimple markov processにならない。((9)式参照)

しかし広義N重markov processの特徴として，そのcanonical kernel Fは所謂Goursat kernelと呼ばれる形，すなわち

$$(15)\qquad F(t,u)=\sum_{i=1}^{N} f_i(t)\,g_i(u)$$

のようにかけるということがある。それは $U_i(S)=\int^{S} g_i(u)\,dB(u)$ とかけることから出る。定理II.1で得たsimple markov性とkernelとの関係に着目したときは(15)の f_i, g_i に適当な条件をつけたものが，我々の定義したいN重markov processのkernelになっている筈である。又もし(14)の $U_i(S)$ が $X(\tau_i)$ $(\tau_i\leq S)$ でおきかえられたら、我々の希望に添うものであるが，実際には

$$E(X(t)/\mathcal{B}_S)=\sum_{i=1}^{N} f_i(t)\,X(S_i)\qquad (S_i\leq S)$$

とかけるものは，後に述べる結果から明らかになるが，ごく特殊なものでしかない。

以上のことを考慮し，また単純markovの場合の(3), (5)を参考にすれば $\{E(X(t)/\mathcal{B}_S);\ t\geq S\}$ が丁度 $\mathfrak{M}$ のN次元部分空間を張るということが、我々の考えているものであることに気がつく。そこで次のような定義をしよう。

Sem. on Probab.
Vol.7 1961年
P1-106

定義 II. 2　任意の $t_0 \leqq t_1 < t_2 < \cdots\cdots < t_N$ に対して $\{E(X(t_i)/\mathcal{B}_{t_0})\}$, $i=1, 2, \cdots\cdots\cdots$ が $\mathfrak{M}$ において常に一次独立であり, また任意の $t_0 \leqq t_1 < t_2 < \cdots\cdots < t_{N+1}$ に対して $\{E(X(t_i)/\mathcal{B}_{t_0})\}$, $i=1, 2, \cdots, N+1$ は常に一次従属であるとき, $X(t)$ を N重 markov process という。

単純 markov Gaussian process は (5) を満足すればこの意味で1重 markov process である。

上の定義 II.2は, discrete parameter をもつ gaussian process に対しても, t を n にかえて, そのまま適用できる。今後このノートにおいては gaussian process の多重 markov 性の定義としては, 常に定義 II.2. を採用することにする。

(註) 定義 II.2はある意味での一様性を要求している (すなわち, 到る所N重 markov)。$X(t)$ が単純 markov process なら, 例えば $X(t)$ がある t_0 以前のものと独立であってもよいが, 我々の意味での1重 markov process はそれを許さない。局所的に多重 markov 性を定義することが望ましい場合もあるが, そのような定義をすることは, 繁雑さを免れないように思はれる。

又定義 II.2は, 確率論的な量を用いたものといっても, むしろ Hilbert 空間論の用語と方法を採用したものというべきであろう。この定義を Gaussian process 以外の広いクラスにまで, そのままの形で拡張して行くことは不可能のように思われる。(附録. §A.2. 定義A.2.参照) その点で十分満足すべきものとは言い難い。

次に多重 markov Gaussian process の例をあげよう。

例 II.1　例1. 3で考えた

$$X(t)=\int_0^t (2t-u)\,dB_0(u)$$

は2重 markov process である。実際 $2t-u$ は canonical kernel だから, 任意に $t_0 \leqq t_1 < t_2 < t_3$ をとるとき

$$\begin{aligned} E(X(t_i)/\mathcal{B}_{t_0}) &= \int_0^{t_0} (2t_i - u)\,dB_0(u) \\ &= 2t_i B_0(t_0) - \int_0^{t_0} u\,dB_0(u) \end{aligned}$$

となる. $E(X(t_i)/\mathcal{B}_{t_0})$, $i=1, 2, 3$ は何れも $B_0(t_0)$ と $\int_0^{t_0} u\,dB_0(u)$ の一次結合であるから, それらは $\mathfrak{M}$ の要素と考えて一次従属となるが, $E(X(t_i)/\mathcal{B}_{t_0})$ $i=1, 2$ は一次独立である。

例 II.2　Discrete parameter の場合, X_n, $n \in I$ が

Sem. on Probab.
Vol.7 1961年
P1-106

$$X_n=\sum_{j=-\infty}^{N}\left(\sum_{j=1}^{N}a_j\alpha_j^{\,n-\nu}\right)\xi_\nu,\quad |\alpha_j|>1,\quad j=1,2,\cdots\cdots,N.$$

とかけて $\sum_{j=1}^{N}a_j\alpha_j^{\,n-\nu}$ が canonical kernel であるとする。$n_0\leqq n_1<n_2<\cdots<n_N$ のとき

$$E(X_{n_i}/\mathbb{B}_{n_0})=\sum_{i=-\infty}^{n_0}\left(\sum_{j=1}^{N}a_j\alpha_j^{\,n_i-\nu}\right)\xi_\nu\quad,\quad i=1,2\cdots\cdots,N$$

だから，それらはいずれも $\sum_{i=-\infty}^{n_0}\alpha_j^{-\nu}\xi_\nu$，$j=1,2,\cdots\cdots,N$，の一次結合で，例Ⅱ.1と同じようにしてN重 markov process であることがわかる。

§Ⅱ.3 N重 Markov Gaussian process の表現

定義Ⅱ.2 の才2の条件をみると，単純 markov ((5) を仮定して1重 markov) の場合の (2) が成り立つことの拡長に当り，第1の条件は (2) における $\gamma(t,s)$ も $EX(s)^2$ も $\neq 0$ ということの拡張になっていることがわかる。従って定理Ⅱ.1で得た canonical kernel の性質も，そのまゝN重 markov の場合に拡張されることが予想される。

こゝでも $\mathfrak{M}_t$ は t について連続としておいて差支ない。

<u>定理Ⅱ.2</u> $X(t)$ が canonical representation $(dB(t), F(t,u))$ をもつ Gaussian process であるとき，それがN重 markov process であるための必要且十分な条件は，F が $u\leq t$ で

(16) $$F(t,u)=\sum_{i=1}^{N}f_i(t)g_i(u)$$

と表わすことが出来ることである。こゝて $f_i(t)$，$i=1,2,\cdots\cdots,N$，は任意の相異るN個の $\{t_j\}$ に対して

(17) $$\det(f_i(t_j))\neq 0$$

をみたし，$g_i(u)$ は $E(dB(t)^2)=dv(t)$ とするとき任意の t に対して $L^2(v;t)=\{f;\int_{u\leq t}f(u)^2dv(u)<\infty\}$ において，一次独立である。

<u>証明.</u> $X(t)$ の表現 $(dB(t),F(t,u))$ は proper canonical になるよう変形されていて (定理Ⅰ.2')，さらに

(18) $$X(t)=\int^{t}F(t,u)\,dB(u)$$

とかけていると仮定してよい。

Sem. on Probab.
Vol.7 1961年
P1-106

1°) <u>必要なこと</u>. $X(t)$がN重 Markov processであるとすれば, 定義II.2の第2の条件から, $t_0=t_1$, $t_{N+1}=\tau$として $a_j(\tau,\underline{t})$ ($\underline{t}$はベクトル$(t_1,\cdots,t_N)$を表す), $j=1,2,\cdots,N$が存在して

$$E(X(\tau)/\mathbb{B}_{t_1})-\sum_{j=1}^{N}a_j(\tau,\underline{t})E(X(t_j)/\mathbb{B}_{t_1})=0$$

となる。第1項の係数が1に出来ることは定義II.2の第1の条件から出る、表現がcanonicalであることに注意して上式をかき直すと

$$\int^{t_1}\left[F(\tau,u)-\sum_{j=1}^{N}a_j(\tau,\underline{t})F(t_j,u)\right]dB(u)=0$$

が得られる。ところがこれはすべての$X(S)$, $S\leqq t$ と直交するから, 表現がproper canonicalであることにより(§I.6参照)任意の$\tau>t_N$に対して

(19) $$F(\tau,u)-\sum_{j=1}^{N}a_j(\tau,\underline{t})F(t_j,u)=0\ ^{1)},\qquad u\leq t_1$$

なることがわかる。

t_1より小なる任意の$\{s_k\}$, $k=1,2,\cdots,N$ ($s_1<s_2<\cdots<s_N$)を$\{t_j\}$の代りに, $X(t_j)$を$X(\tau)$の代りにとって前と同様なことを繰り返せば

(20) $$\begin{cases}F(t_j,u)-\displaystyle\sum_{k=1}^{N}a_k(t_j,\underline{s})F(s_k,u)=0, & u\leq s_1,\ \ j=1,2,\cdots,N\\ F(\tau,u)-\displaystyle\sum_{k=1}^{N}a_k(\tau,\underline{s})F(s_k,u)=0 & u\leq s_1\end{cases}$$

これと(19)を組合せて

$$\sum_{k=1}^{N}a_k(\tau,\underline{s})F(s_k,u)=\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}a_j(\tau,\underline{t})a_k(t_j,\underline{s})F(s_k,u)$$
$$u\leq s_1,\qquad \underline{s}=(s_1,s_2,\cdots,s_N)$$

が得られる。ところが定義II.1の第一の条件から, $E(X(s_k)/\mathbb{B}_{s_1})$, $k=1,2,\cdots,N$が$\mathfrak{M}$の要素として、従って$F(s_k,u)$, $k=1,2,\cdots,N$が$L^2(v;s_1)$の要素として一次独立であるから

(21) $$a_k(\tau,\underline{s})=\sum_{j=1}^{N}a_j(\tau,\underline{t})a_k(t_j,\underline{s})$$

となるがこれは(7)の拡張に他ならない。さらに(21)の第1式で$\{F(t_j,u)\}$ $j=1,2,\cdots,N$, が一次独立なことを用いて

---

1) 等号は, 詳しくは"dv 測度に関し殆ど到る所$=0$" ということである。以下等号はこの意味に用いる。

Sem. on Probab.
Vol.7 1961年
P1-106

$$\det(a_k(t_j, \underline{\underline{s}})) \neq 0$$

が出る。故に(21)から適当な matrix $B(\underline{\underline{s}}, \underline{\underline{t}})$ が存在して

$$(22) \begin{cases} \underline{\underline{a}}(\tau, \underline{\underline{t}}) = \underline{\underline{a}}(\tau, \underline{\underline{s}}) B(\underline{\underline{s}}, \underline{\underline{t}}) \\ B(\underline{\underline{s}}', \underline{\underline{t}}) = B(\underline{\underline{s}}', \underline{\underline{s}}) B(\underline{\underline{s}}, \underline{\underline{t}}) \end{cases}$$

を満足する。但し、$\underline{\underline{a}} = (a_1, a_2, \cdots\cdots, a_N)$、$\underline{\underline{s}}' = (s_1', s_2', \cdots, s_N')$ で $s_1' < s_2' < \cdots < s_N' < s_1$ とする。

ここで $t_1, t_2, \cdots\cdots, t_N$ を固定し、ベクトル $\underline{\underline{f}}_s = (f_{1,s}, f_{2,s}, \cdots\cdots f_{N,s})$ を

$$\underline{\underline{f}}_s(\tau) = \underline{\underline{a}}(\tau, \underline{\underline{s}}) B(\underline{\underline{s}}, \underline{\underline{t}}), \qquad \tau \geqq s_N$$

と定義すれば(22)の両式より $\underline{\underline{f}}_{s'}(\tau)$ は τ の函数として $\underline{\underline{f}}_s(\tau)$ の拡張になっている。すなわち $\tau > s_N$ ならば

$$\underline{\underline{f}}_{s'}(\tau) = \underline{\underline{a}}(\tau, \underline{\underline{s}}') B(\underline{\underline{s}}', \underline{\underline{t}}) = \underline{\underline{a}}(\tau, \underline{\underline{s}}) B(\underline{\underline{s}}, \underline{\underline{s}}') \cdot B(\underline{\underline{s}}', \underline{\underline{t}})$$

$$= \underline{\underline{a}}(\tau, \underline{\underline{s}}) B(\underline{\underline{s}}, \underline{\underline{t}}) = \underline{\underline{f}}_s(\tau)$$

となる。故にすべての $\tau \in T^\circ$ で定義された $\underline{\underline{f}} = (f_1, f_2, \cdots\cdots, f_N)$ が定まる。これら $f_i(t)$, $i = 1, 2, \cdots\cdots, N$ は明らかに(17)をみたす。そして $\tau > s_N$, $u < s_1$ ならば

$$F(\tau, u) \equiv \underline{\underline{a}}(\tau, \underline{\underline{t}}) \mathbb{F}(\underline{\underline{t}}, u)^* \qquad \begin{pmatrix} {*}\text{は転置を表わす記号で } \mathbb{F}(\underline{\underline{t}}, u) \\ = (F(t_1, u), F(t_2, u), \cdots\cdots, F(t_N, u)) \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\underline{f}}(\tau) B(\underline{\underline{s}}, \underline{\underline{t}})^{-1} \mathbb{F}(\underline{\underline{s}}, u)^*$$

$$= \underline{\underline{f}}(\tau) \underline{\underline{g}}_s(u, \underline{\underline{t}})^* \quad \left(\underline{\underline{g}}_s(u, \underline{\underline{t}}) \equiv \mathbb{F}(\underline{\underline{s}}, u) B(\underline{\underline{s}}, \underline{\underline{t}})^{*-1}\right)$$

となる。この $\underline{\underline{g}}_s(u, \underline{\underline{t}})$ は、$u < s_1$ で定義されているわけだが、$\underline{\underline{f}}_s$ を拡張して $\underline{\underline{f}}$ を得たのと同様にして(17)等を用いて T° 上に拡張されることがわかる。又、ここでは $\{t_i\}$ は固定していたからその記号も省略して $\underline{\underline{g}}(u) = (g_1(u), g_2(u), \cdots\cdots, g_N(u))$ を得る。かくして $F(t, u)$ は、$u < t$ ならば、(16) のようにかけることがわかった。$u \leqq t$ としても(16)がなり立つことは $\mathfrak{M}_t$ の連続性による。

2°) <u>十分なこと</u> canonical kernel $F(t, u)$ が、定理に述べられた性質をもつ f_i, g_i $i = 1, 2, \cdots\cdots, N$ により $u \leqq t$ で(16) のようにかけているとする。このとき $t_0 \leq t_1 < t_2 < \cdots\cdots < t_N < t_{N+1}$ なる $\{t_i\}$ を任意にとるとき $E(X(t_i)/\mathcal{B}_{t_0})$, $i = 1, 2, \cdots\cdots, N, N+1$, はいずれも $\mathfrak{M}_{t_0}$ の要素

$$\int^{t_0} g_i(u) dB(u), \qquad i = 1, 2, \cdots\cdots, N$$

の一次結合であり、それが一次独立な r.v. の system である。故に定義

Sem. on Probab.
Vol.7 1961年
P1-106

II.2の第2の条件はみたされる。第1の条件がみたされることは(17)及び$\{g_i\}$についての条件から明か。故に$X(t)$はN重markov processである。

<u>系</u> $X(t)$がcanonical representationをもつN重markov processならば，そのcovariance function $\Gamma(t,s)$は

$$(23) \qquad \Gamma(t,s)=\sum_{i=1}^{N} f_i(t)\,h_i(s), \qquad s \leq t$$

と表わされ，これをN-1項以下の分解した形に表わすことはできない。

<u>証明</u> 定理II.2から$X(t)$は(16)の形のcanonical kernelを用いて，(18)のように表わされる。従って，そのcovariance functionは$s \leq t$のとき

$$\Gamma(t,s)=E\big(X(t)X(s)\big)=\sum_{i=1}^{N} f_i(t)\left[\sum_{j=1}^{N} f_j(s)\int^{s} g_i(u)g_j(u)\,dv(u)\right]$$

である。[ ]内を$h_i(s)$とかけば(23)式を得る。それが$N-1$項以下でかけないことを言うには$h_i(s)$, $i=1,2,\cdots\cdots,N$が一次独立であることを示せばよい。仮りにそれらが一次従属であったとすれば，適当な常数$a_1,a_2,\cdots\cdots,a_N$を選んで

$$\sum_{i=1}^{N} a_i\,h_i(s) \equiv 0$$

となるようにできる。h_iの定義に従ってかき直せば

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} a_i f_j(s)\int^{s} g_i(u)g_j(u)\,dv(u)=\int^{s}\Big(\sum_{i=1}^{N} a_i g_i(u)\Big)F(s,u)\,dv(u)\equiv 0.$$

$F(s,u)$はproper canonical kernelとしておいたから§I.6.より

$$\sum_{i=1}^{N} a_i g_i(u) \equiv 0$$

となるが，それは，定理II.2に述べられているg_iの一次独立性と矛盾する。

$X(t)$がcanonical representationをもつN重markov processならば定理II.2より，$X(t)$は

$$(24) \qquad U_i(t)=\int^{t} g_i(u)\,dB(u), \qquad i=1,2,\cdots\cdots,N$$

なるN個のadditive processの一次結合として$X(t)=\sum_{i=1}^{N} f_i(t)U_i(t)$のように表わすことができる。このように眺めると，我々の定義したN重markov性はprocessが何個のadditive processを基礎として構成されているかを特徴づけるものである。しかもこのときの$U_i(t)$はすべて

Sem. on Probab.
Vol.7 1961年
P1-106

$\mathfrak{M}_t$に属するのみならず$\mathfrak{M}_t(U_i)=\mathfrak{M}_t$となっていること は注意すべきである。これら$U_i(t)$を用いると

$$E(X(t)/\mathbb{B}_s)=\sum_{i=1}^{N} f_i(t)\,U_i(s)\,, \qquad s\le t$$

であり、$X(t)$はLévyの意味での広義N重 Markov process になっていることも同時に知られる。(§II.2参照)

<u>定義II.3</u> 表現の kernel $F(t,u)$ が(17)をみたす$f_i(t)$, $i=1,2,\cdots,N$と任意のtに対して$L^2(v;t)$において一次独立な$g_i(u)$, $i=1,2,\cdots,N$を用いて、$u\le t$で(16)のように表わされるとき、Fを(vについて)<u>N次の Goursat kernel</u>と言う。(P. Lévy [3])

これによれば、定理II.2は次のように言い換えれる。すなわち、canonical representation をもつ$X(t)$がN重 Markov process であるための必要且つ十分な条件はその proper canonical kernel がN次の Goursat kernel になることである。しかし、canonical でない kernel がN次の Goursat kernel であっても process はN重 Markov になるとは限らない。§I.1°)の例$X_1(t)$がその例である。

〔註1〕. 定理II.2.の証明において$\{f_i(t)\}$や$\{g_i(u)\}$を作るのに$t_1,t_2,\cdots\cdots,t_N$を固定した。そのことからも容易にわかるように$F(t,u)$を(16)のように表わす方法は一意的ではない。又定理II.1の系.1の拡張に相当するような事実、例えば$f_i(t)$の連続性が$X(t)$のM_2一連続性から導かれるかというようなことは、まだ知られていないようである。

〔註2〕 (24)の additive process $U_i(t)$について見本過程$U_i(t,\omega)$を考えてみよう。K. Itô[1]の方法によって、$P(\Omega_i)=1$であるようなΩ_iで$U_i(t,\omega)$, $\omega\in\Omega_i$, がtについて連続であるようなものを作ることができる。従って$\Omega_0=\bigcap_{i=1}^{N}\Omega_i$とするとき$P(\Omega_0)=1$で、$\omega\in\Omega_0$ならばすべての$U_i(t,\omega)$, $i=1,2,\cdots\cdots,N$はtの連続函数である。このとき若し$f_i(t)$, $i=1,2,\cdots\cdots,N$がすべてtについて連続ならば、$X(t,\omega)=\sum_{i=1}^{N} f_i(t)\,U_i(t,\omega)$, $\omega\in\Omega_0$, も連続である。さらに$X(t,\omega)$の何回かの微分可能性までみようとする場合には、$f_i(t)$や$g_i(u)$の解析性の他に$F(t,t)$についての条件が必要になってくる。(§II.4参照)。この種の問題についても、stationary process の場合を除けば詳しい結果は得られていない。

Sem. on Probab.
Vol.7 1961年
P1-106

多重 markov 性と canonical kernel との関係は discrete parameter の場合も全く同様で，X_n, $n \in I$ が canonical representation (ξ_n, $a_{n,\nu}$) をもつとき，X_n が N 重 markov process であるための必要且つ十分な条件は proper canonical kernel $a_{n,\nu}$ が

(16′) $$a_{n,\nu} = \sum_{i=1}^{N} a_n^{(i)} b_\nu^{(i)}$$

と表わされることである。但し $a_n^{(i)}$, $i=1,2,\cdots\cdots,N$ は任意の相異るN個の $\{n_j\}$ に対して

(17′) $$\det \left(a_{n_j}^{(i)}\right) \neq 0$$

をみたし $b_\nu^{(i)}$, $i=1,2,\cdots\cdots,N$ は任意の n に対して，Hilbert 空間 $l^2(n) = \{b_\nu : \sum_{\nu=-\infty}^{n} b_\nu^2 < \infty\}$ における一次独立な要素の system である。この証明は continuous parameter の場合と類似の方法で出来るので省略する。

§ II. 4　狭義多重 markov Gaussian process

§ II. 2 で説明した Lévy の意味での狭義多重 markov process は，前節で考えた多重 markov process の特殊な場合である。これは単に何回か微分可能であるかという解析性についてのみの特殊性というよりは，むしろ，定理 II. 3. でみるように，表現に用いられる random measure を process から直接求める具体的方法を与えるということが大切な特徴である。以下においてその点に特に注意しながら，狭義多重 markov process を論じたい。しかし Lévy とは多少出発点を異にするので微分方程式の理論に関する二，三の事項を注意して後，更めて我々の立場から狭義多重 markov 性についての定義をのべることにする。

先ず parameter space T は $(0,\infty)$ とする。これでは stationary process の場合を含まないことになるが，後に述べるように，それは適当に時間の scale を変換し，しかも markov 性に関する性質は不変であるようにして $T=[0,\infty)$ の process に直すことができるので我々が考える範囲内では $T=(0,\infty)$ としても支障を来たことはない。（後出の定理 III. 2参照）

次に T で定義された $N+1$ 個の函数 $v_i(t)$, $i=0,1,\cdots\cdots,N$, で条件

(25) $v_i(t) \in \mathfrak{C}(T)$, $i=0,1,\cdots\cdots,N$

(26) $v_i(t) \neq 0$, $t>0$, $i=0,1,\cdots\cdots,N$

を満足するものを考える。これらの $v_i(t)$ を用いて，次の各種の differe-

Sem. on Probab.
Vol.7 1961年
P1-106

ntial operators を作る。

$$(L)\begin{cases} L_t = \dfrac{1}{v_0(t)}\cdot\dfrac{d}{dt}\cdot\dfrac{1}{v_1(t)}\cdot\dfrac{d}{dt}\cdots\cdots\dfrac{1}{v_{N-1}(t)}\cdot\dfrac{d}{dt}\cdot\dfrac{1}{v_N(t)} \\ L_t^{(j)} = \dfrac{1}{v_j(t)}\cdot\dfrac{d}{dt}\ \dfrac{1}{v_{j+1}(t)}\ \dfrac{d}{dt}\cdots\cdots\dfrac{1}{v_{N-1}(t)}\cdot\dfrac{d}{dt}\cdot\dfrac{1}{v_N(t)}, \quad j=1,2,\cdots,N-1 \\ L_u^{*} = \dfrac{1}{v_N(u)}\ \dfrac{d}{du}\cdot\dfrac{1}{v_{N-1}(u)}\cdot\dfrac{d}{du}\cdots\cdots\dfrac{1}{v_1(u)}\cdot\dfrac{d}{du}\cdot\dfrac{1}{v_0(u)} \end{cases}$$

各 operator の domain はそれらが定義されるようなT上の函数の全体である。

ここで若し，各 $v_i(t)$ が適当な回数だけ微分可能であれば $L_t,\ L_t^{(j)},\ L_u^{*}$ 等は通常の differential operator であり，domain はそれぞれ N 回，$N-j+1$ 回，N 回微分可能な函数の全体である。そのときには L_t の (L) のような表わし方は幾通りもある。それには

$$(27)\qquad L_t f(t) = 0$$

の基本解系 $f_1(t),\ f_2(t),\cdots f_N(t)$ をとり Ince〔1〕の方法で $\{v_i(t)\}$ を作ればよい。すなわち

$$f_N(t) = v_N(t)\ ,\qquad f_{N-1}(t) = v_N(t)\int^t v_{N-1}(t_1)\,dt_1$$

一般に

$$(28)\qquad f_i(t) = v_N(t)\int^t v_{N-1}(t_1)\,dt_1\int^{t_1} v_{N-2}(t_2)\,dt_2\int^{t_2}\cdots\cdots\int^{t_{i-2}} v_{N-i+1}(t_{i-1})\,dt_{i-1}, \quad i\le N$$

によって $\{f_i(t)\}$ から $v_i(t),\ i=1,2,\cdots\cdots,N$ が定まる。

一般の場合，すなわち $\{v_i(t)\}$ について (25) のみを仮定して，前とは逆に (28) によって定まる $\{f_i(t)\}$ を考えてみると，それらは (L) で定義される L_t の domain に属し

$$(29)\qquad L_t f_i(t) = 0 \qquad i=1,2,\cdots\cdots,N$$

となり恰も (27) 式の基本解系の如き函数の system になっていることがわかる。

同様な方法で (25) をみたす $v_i(u),\ i=0,1,2,\cdots\cdots,N-1$ から定義される L_u^{*} を考え $L_u^{*}g=0$ 基本解系というべきものは，次の $g_i(u),\ i=1,2,\cdots\cdots,N$ になる。

Sem. on Probab.
Vol.7 1961年
P1-106

(30) $$g_i(u)=(-1)^{N-i}\ v_0(u)\int_0^u v_1(u_1)\int_0^{u_1} v_2(u_2)\,du_2\cdots\int_0^{u_{N-i-1}} v_{N-i}(u_{N-i})\,du_{N-i}$$

$i\leq N,$

(28), (30)における積分範囲をすべて0からにした$\{f_i(t)\}$ $\{g_i(u)\}$を組合せて T×T 上の函数$R(t,u)$を

(31) $$R(t,u)=\begin{cases}\sum_{i=1}^{N} f_i(t)g_i(u) & u\leq t,\\ 0, & u>t.\end{cases}$$

によって定義する。明かに$R(t,u)$は$t\neq u$のみならず$t=u$においても(t,u)の連続函数であるが、さらに

__補題 II. 1.__ $R(t,u)$は次の性質をもつ

(32) $$\begin{cases}L_t R(t,u)=0 & (\text{任意に個定した}u\text{に対し}) & t>u,\\ L_u^* R(t,u)=0 & (\text{任意に個定した}t\text{に対し}) & u<t,\end{cases}$$

(33) $$\begin{cases}R(t,t)=0 & \left[L_t^{(j)} R(t,u)\right]_{u=t}=0 \quad j=2,3,\cdots\cdots N-1.\\ \left[L_t^{(1)} R(t,u)\right]_{u=t}\neq 0\end{cases}$$

__証明__ (32)の第一式は、uを個定したとき、$R(t,u)$が(29)をみたす$\{f_i(t)\}$の一次結合であることより明か、第2式も同様である。

(33)については

$$L_{(t)}^{(1)} f_i(t)=0,\qquad i=1,2,\cdots\cdots N-1;\qquad L_{(t)}^{(1)} f_N(t)=1,$$

だから$g_N(t)=v_0(t)\neq 0$より最后の式が出る。他の二式はNについて数学的帰納法を用いて初等的に証明出来る。

__補題 II. 2__ $R(t,u)$を(31)で定義される函数とする。若し$\varphi\in L^2(T)$なるφについて

(34) $$\int_0^t R(t,u)\varphi(u)\,du\equiv 0\qquad a<t<b$$

ならば(a,b)で殆ど到る処

$$\varphi(t)=0$$

である。

__証明__ (34)を書き直すと、(a,b)で

Sem. on Probab.
Vol.7 1961年
P1-106

$$\sum_{i=1}^{N} f_i(t)\int_0^t g_i(u)\varphi(u)du \equiv 0$$

左辺を $v_N(t)$ でわれば，$f_i(t)$が (28)のように表わされるから，それはLebesgue 測度に関し絶対連続である。故に Radon－Nikodym の意味で微分すれば，(a, b) て殆ど到る処

$$\sum_{i=1}^{N} f_i^{(1)}(t)\int_0^t g_i(u)\varphi(u)du + \Big(\sum_{i=1}^{N} f_i(t)g_i(t)\Big)\varphi(t) = 0$$

である．但し $f^{(1)}$は $\frac{d}{dt}\cdot\frac{1}{v_N}f$ を表わす，補題Ⅱ.1より第二項＝0 だから殆ど到る処

$$\sum_{i=2}^{N} f_i^{(1)}(t)\int_0^t g_i(u)\varphi(u)du = 0, \qquad a<t<b.$$

これを $v_{N-1}(t)$ でわって微分する等をくり返せば (33) を用いて $L_t^{(2)}$ まで作用させることが出来て

$$\int_0^t g_N(u)\varphi(u)du = \int_0^t v_0(u)\varphi(u)du = 0, \quad a<t<b.$$

が殆ど到る処成り立つ．従って $v_0(t)\cdot\varphi(t)$ が (a, b) で殆ど到る処 0になるが $v_0(t)\neq 0$だから $\varphi(t)$が殆ど到る処 0になる。

この補題の証明からもわかるように，$\varphi(t)\in L^2(T)$ ならば

$$F(t) = \int_0^t R(t, u)\varphi(u)du$$

は L_t の domain に属し，殆ど到る処

(35) $\qquad L_t F(t) = \varphi(t)$

が成り立つ．この事は通常の常微分方程式の特殊解を Riemaun の函数を用いて構成する方法の拡張であるとも言い得る。その意味で，我々は $R(t, u)$ を L_t に対応する Riemann の函数と呼ぶことにする。

補題Ⅱ.3 i). (28)で定義された $f_i(t)$，$i=1, 2, \cdots\cdots, N$，は任意の相異る $S_1, S_2, \cdots\cdots, S_N$，に対して

(36) $\qquad \det(f_i(S_j)) \neq 0$

ii) (30) で定義される $g_i(u)$，$i=1, 2, \cdots\cdots, N$は任意の t に対して$[0, t]$で一次

Sem. on Probab.
Vol.7 1961年
P1-106

独立である。

<u>証明.</u> i) 今ある $S_1, S_2, \cdots, S_N$ ($S_1 < S_2 < \cdots < S_n$)が存在して

$$\Delta = det(f_i(s_j)) = 0$$

であったとする。

$$\frac{1}{\prod_j v_N(S_j)}\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \int_0^{S_1} v_{N-1}\,dt, & \int_0^{S_2} v_{N-1}\,dt & \cdots & \int_0^{S_N} v_{N-1}\,dt \\ \int_0^{S_1} v_{N-1}\int v_{N-2}(dt)^2, & \int_0^{S_2} v_{N-1}\int v_{N-2}(dt)^2 & \cdots & \int_0^{S_N} v_{N-1}\int v_{N-2}(dt)^2 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ \int_0^{S_1} v_{N-1} \int v_1(dt)^{N-1}, & \int_0^{S_2} v_{N-1}\int\cdots\int v_1(dt), & \cdots & \int_0^{S_N} v_{N-1}\int\int v_1(dt)^{N-1} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \int_{S_1}^{S_2} v_{N-1}\,dt, & \int_{S_2}^{S_3} v_{N-1}\,dt & \cdots & \int_{S_{N-1}}^{S_N} v_{N-1}\,dt \\ \int_{S_1}^{S_2} v_{N-1}\int v_{N-2}(dt)^2, & \int_{S_2}^{S_3} v_{N-1}\int v_{N-2}(dt)^2 & \cdots & \int_{S_{N-1}}^{S_N} v_{N-1}\int v_{N-2}(dt)^2 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ \int_{S_1}^{S_2} v_{N-1}\int\cdots\int v_1(dt)^{N-1} & \int_{S_2}^{S_3} v_{N-1}\int\cdots\int v_1(dt)^{N-1}, & \cdots & \int_{S_{N-1}}^{S_N} v_{N-1}\int\cdots\int v_1(dt)^{N-1} \end{vmatrix} = 0$$

ここで $S=S_1$ を変数と考えれば，Δ は $S=S_2$ および $S=S_1$ で 0 になるから平均値の定理によって第1列を

$$v_{N-1}(S_1'),\ v_{N-1}(S_1')\int_0^{S_1'} v_{N-2}\,dt, \cdots, v_{N-1}(S_1')\int_0^{S_1'} v_{N-2}\int\int v_1(dt)^{N-2},\quad S_1 < S_1' < S_2$$

におきかえた行列式が 0 になる。第2列以下も同様なおきかえをして

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \int_0^{S_1'} v_{N-2}\,dt, & \int_0^{S_2'} v_{N-2}\,dt & \cdots & \int_0^{S_{N-1}'} v_{N-2}\,dt \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \int_0^{S_1'} v_{N-2}\int\cdots\int v_1(dt)^{N-2}, & \int_0^{S_2'} v_{N-2}\int\cdots\int v_1(dt)^{N-2}, & & \int_0^{S_{N-1}'} v_{N-2}\int\cdots\int v_1(dt)^{N-2} \end{vmatrix} = 0$$

但し，$S_1 < S_1' < S_2 < S_2' < \cdots < S_{N-1}' < S_N$ である。上式の左辺を更めて Δ のように考えてこのような操作をくり返せば最後に

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \int_0^{S_1^{(N-2)}} v_1 dt & \int_0^{S_2^{(N-2)}} v_1 dt \end{vmatrix} = 0 \quad \text{すなわち} \quad \int_{S_1^{(N-2)}}^{S_2^{(N-2)}} v_1 dt = 0, \qquad S_1^{(N-2)} < S_2^{(N-2)}$$

を得る. $v_1(t)$ は $(S_1^{(N-1)}, S_2^{(N-2)})$ で0にならない連続函数だからこれは矛盾である. すなわち(36)は任意の相異る $S_1, S_2, \cdots, S_N$ について成立つ.

ii)も帰謬法で証明される。すなわち $\{g_i(u)\}$ がある区间$[0,t]$で一次従属であったとすれば, 実数 $a_1, a_2, \cdots\cdots a_N$ が存在して

$$a_1 g_1(u) + a_2 g_2(u) + \cdots\cdots + a_N g_N(u) \equiv 0 \qquad 0 \leq u \leq t$$

となる。決して0にならない $v_i(u)$ でわって微分する操作をくり返せば、$v_N(u) \equiv 0$ となって矛盾が出る。

これまで準備してきた微分作用素(L)の性質を用いて狭義多重 markov process の性質を調べる。この節での$X(t)$, $t \in T$ に対する仮定は, 次の二つである。

$$(37) \quad \begin{cases} X(t)\text{は}M_2\text{ー連続である. (従って }\mathfrak{M}\text{ は separable).} \\ \bigcap_{t \in T} \mathfrak{M}_t = \{0\} \end{cases}$$

尚、以下本節で考える process の微分はすべて $L^2(\Omega)$ のノルムに関する微分とする.

<u>定義 II. 4.</u> (37)を満足する$X(t)$, $t \in T$ に対して(L)のように表わされる differential operator L_t が存在し(そこでの $v_i(t)$, $i=0, 1, \cdots\cdots N$ は勿論(25), (26)をみたすものである), $X(t)$に $L_t^{(1)}$ を作用させることが出来て

$$(38) \qquad L_t^{(1)} X(t) = U(t)$$

が additive process であり, その分散 $\sigma^2(t)$ は(25), (26)をみたす$v_0(u)$を用いて

$$(39) \qquad \sigma^2(t) = \int_0^t v_0(u)^2 du$$

と表わすことが出来るとき, $X(t)$を<u>狭義N重 markov process</u>という。

(39)の条件は $U(t)$ 自身が, Wiener の random measure を用いて

$$(39') \qquad U(t) = \int_0^t v_0(u)\, dB_0(u)$$

Sem. on Probab.
Vol.7 1961年
P1-106

と表わすことができるということゝ同じである。このΥ(t) は§II.1 で述べたように Brownian motion から時間の scale をかえて得られる。そして (11)に相当する微分方程式は

$$dU(t) = \upsilon_0(t)\, dB_0(t)$$

である。Brownian motion の形式的な微分を $B_0'(t)$ とかけば、上式と (38) から形式的に

$$(40) \qquad L_t X(t) = B_0'(t)$$

が得られる。$X(t)$ や $B_0'(t)$ を普通の函数、L_t を普通の微分作用素と思えば (40) は常微分方程式になる。$X(0) = X'(0) = \cdots\cdots = X^{(N-1)}(0) = 0$ という初期条件でこれを解けば

$$(41) \qquad X(t) = \int_0^t R(t, u)\, B_0'(u)\, du$$

となる。こゝに $R(t, u)$ は先程考えた Riemann の函数である。$B_0'(u)du$ を $dB_0(u)$ とかき直してみると、形の上からは $X(t)$ が表現された様にみえるが、実は結果として、それが正しいことが、これからの議論することから出るわけである。Doob [1] や Dolph-Woodbury [1] にも上述のような立場からの記述がある。[3] このように形式的に眺めてみると表現を求める方針など立て易いであろう。我々は主として形式的な Brownian motion の微分などを用いることを避けるためと、なるべく一般にした L_t を考えるために定義 II.4 のような煩わしい定義をしたわけである。見通しをよくするためには、(40) や (41) を念頭におけばよいであろう。偶然にも (41) は canonical representation を構成したことになっているのである。

<u>定理 II.3.</u> i). (39') のように表わされる $U(t)$ と (L) で表わされる $L_t^{(1)}$ が与えられたとき (38) を満足する $X(t)$ は唯一つ[2] 定まる。

ii) その $X(t)$ は proper canonical representation ($dB_0(t)$, $R(t, u)$) をもち、$R(t, u)$ は $L_t \left(\equiv \frac{1}{\upsilon_0(t)} \cdot \frac{d}{dt} L_t^{(1)}\right)$ に対応する Riemann の函数である。

この定理の証明に必要な一般的性質として、次の補題を準備する。

---

2) process が唯一つ定まるという意味は §0 で約束した通りである。

3) Doob は L_t が常数係数の場合のみを扱い Dolph-Woodbury は変数係数の L_t にまで拡張している。

Sem. on Probab.
Vol.7 1961年
P1-106

補題 II.4. X(t)が

$$X(t)=\sum_{i=1}^{N} f_i(t)\int_0^t g_i(u)\,dB_0(u)$$

と表わされ

i) $f_i(t)\in C'(T)$, $g_i(u)\in C(T)$, $i=1,2,\cdots\cdots,N.$

ii) $\sum_{i=1}^{N} f_i(t)g_i(t)=0$

ならば $X'(t)$ が存在して次のように表わされる。

$$X'(t)=\sum_{i=1}^{N} f_i'(t)\int_0^t g_i(u)\,dB_0(u)$$

証明

$$X(t+\Delta t)-X(t)=\sum_{i=1}^{N} f_i(t+\Delta t)\int_t^{t+\Delta t} g_i(u)\,dB_0(u)$$
$$+\sum_{i=1}^{N}\left[f_i(t+\Delta t)-f_i(t)\right]\int_0^t g_i(u)\,dB_0(u).$$

右辺の第1項の分散は

$$\leq 2E\left(\sum_{i=1}^{N} f_i(t)\int_t^{t+\Delta t} g_i(u)\,dB_0\right)^2+2\,O(\Delta t^2)\int_t^{t+\Delta t} g_i(u)^2\,du$$

$$=2\left(\sum_{i=1}^{N} f_i(t)\int_t^{t+\Delta t} g_i(u)\,du\right)^2+O(\Delta t^2)$$

だから ii)より $O(\Delta t^2)$になる。第2項をΔtでわったものが求める$X'(t)$ に収束すること は明か.

定理の証明 i) $L_t^{(1)}$ と $E(U(t))^2$ とから *differential operator* L_t が定まり, それに対応する *Riemann* の函数 $R(t,u)$が (31) のようにしてきまる。又 $U(t)$から *random measure* $dB_0(t)$を (39′) を満足するようにきめることができる。そこで $X(t)$ を

$$X(t)=\int_0^t R(t,u)\,dB_0(u) \tag{42}$$

と定義すれば, それが求めるものである. 何となれば

$$\frac{1}{U_N(t)}X(t)=\sum_{i=1}^{N}\frac{f_i(t)}{U_N(t)}\int_0^t g_i(u)\,dB_0(u)$$

は $f_i(t)/U_N(t)$を更めて $f_i(t)$ と考えれば補題 II.4. の条件(i), (ii)を満足する ((ii) は補題 II.1 の (33)). 故に微分可能で

$$X^{(1)}(t)=\frac{d}{dt}\frac{1}{U_N(t)}X(t)=\sum_{i=2}^{N} f_i^{(1)}(t)\int_0^t g_i(u)\,dB_0(u)^{\,4)}$$

Sem. on Probab.
Vol.7 1961年
P1-106

$\sum_{i=2}^{N} f_i^{(1)}(t) g_i(u)$ が $L_t^{(1)}$ に対応する Riemann の函数であることに注意すれば，再び補題 II.4 及び II.1 を用いて $X^{(2)}(t), \cdots, X^{(N-1)}(t)$ 等が逐次存在することがわかり

$$L_t^{(1)} X(t) = \frac{1}{v_1(t)} X^{(N-1)}(t) = \int_0^t g_N(u)\, dB_0(u)$$

となるが $g_N(u) = v_0(u)$ だから (38) が出た。

一意性については，若しそのようなものが二つあったとして，それらを $X_2(t)$ とするとき両者が一致することを示せばよい。 $L_t^{(1)} X_1(t) = L_t^{(1)} X_2(t)$ であること及び両者が (37) を満足することに注意すれば

$$X_1^{(N-2)}(t) = X_2^{(N-2)}(t)$$

となる。それは $L_t^{(2)} X_1(t) = L_t^{(2)} X_2(t)$ といってもよい。これをくり返して

$$X_1(t) = X_2(t)$$

が得られる。（$X_1(t)$ と $X_2(t)$ とは同じ dB_0 でかけていると仮定して議論したが，その仮定は一般性を失わない。）

ii) $(dB_0(t), R(t,u))$ が proper canonical representation であることを言うには §I.6. の判定条件を満足していることを言えばよい。それは，補題 II.2. に他ならない。

系　$X(t)$ を狭義 N 重 Markov process とする

i). $v(t)$ が 0 にならない連続函数ならば $v(t) X(t)$ も狭義 N 重 Markov process である。

ii). $X^{(1)}(t)$ は狭義 $N-1$ 重 Markov process である。

〔註〕 本節の始めに述べたように狭義 N 重 Markov process $X(t)$ の canonical representation の random measure は具体的に $L^{(1)}_t X(t) = U(t)$ から $\frac{1}{v_0(t)} dU(t) = dB_0(t)$ として求めることが出来る。このことゝ canonical representation が微分方程式を定数変化法で解く場合と同様な方法で作れることが大きな特徴である。後者については，表現を考えるという立場ではないが，L_t が通常の微分作用素のときに Dolph - Woodbury[1] によって (42) の表現が論

---

4) $f^{(1)}$ は $\frac{d}{dt}\cdot\frac{1}{v_N(t)} f$ を表わす（補題 II.2 の証明参照）．$f^{(2)} = \frac{d}{dt}\,\frac{1}{v_{N-1}(t)} f^{(1)}$, $f^{(3)} = \cdots$，等についても process についても同様に $X^{(1)}(t)$, $X^{(2)}(t)$ 等の記号を用いる。

Sem. on Probab.
Vol.7 1961年
P1-106

じられている

定理II.3.によって狭義N重 markov process はN個の狭義1重（従って simple）markov process の和として表わされることがわかったが，その和は単なる和ではない．それを注意するために定理II.3.の一部を次の形に言いかえておく。

定理II.4　$X_i(t)$，$i=1,2,\cdots\cdots,N$ を狭義1重 markov process とする。若しすべての $X_i(t)$ が同じ random measure $dB_0(t)$ を用いて

$$X_i(t)=f_i(t)\int_0^t g_i(u)\,dB_0(u)$$

と表わされているならば $\sum_{i=1}^{N} X_i(t)$ が狭義N重 markov process であるための条件は $\sum_{i=1}^{N} f_i(t)g_i(u)$ が（L）のように表わされる，ある differential operator の Riemann の函数になっていることである。

定理II.5　狭義N重 markov process はN重 markov process である。

証明．　$X(t)$ を狭義N重 markov process とすれば前定理より L_t に対応する Riemann の函数を用いて（42）のようにかけている，$R(t,u)$ を構成する $\{f_i(t)\}$ や $\{g_i(u)\}$ については補題II.3より，そこの i）及び ii）の条件をそれぞれ満足していることがわかる。故に定理II.2を用いて $X(t)$ がN重 markov process であることがわかる。

これから定義II.4で狭義という言葉を使ったのが妥当である事が知られよう。

前にも述べたように我々の狭義N重 markov process の定義は Lévy のものと言い方が違っている。両者の関係をみようとすれば，例えば $X(t)$ の微分可能性から canonical kernel の t についての微分可能性などが出て来れば好都合である。しかし，そのような事は §II.3 の註1で述べたように，今の段階では望めない事である。我々は次善の策として canonical kernel が十分滑らかであることを仮定してみよう。

N重 markov process の canonical kernel $F(t,u)$ を $u\leq t$ で $\sum_{i=1}^{N} f_i(t)g_i(u)$ とかいたとき，次の仮定をおく

$$(43)\quad \begin{cases} f_i,\ g_i\in C^{\infty}(T^{\circ}), & i=1,2,\cdots\cdots,N \\ f_i\neq 0,\quad W(g_1,g_2\cdots\cdots g_i)\ (\equiv g_1,g_2,\cdots,g_i \text{ の Wronskian})\neq 0, & i=1,2,\cdots\cdots,N. \end{cases}$$

この仮定から決して0にならない $C^{\infty}(T^{\circ})$ に属する函数 $v_0(u),\cdots\cdots,v_{N-1}(u)$ が存在して

Sem. on Probab.
Vol.7 1961年
P1-106

(45) $$g_i(u)=(-1)^{N-i}v_0(u)\int^{u}v_1(u_1)\,du_1\int^{u_1}v_2(u_2)\,du_2\int\cdots\int^{u_{N-i-1}}v_{N-i}(u_{N-i})\,du_{N-i}$$

と表わすことができる。（f_i を適当にくみかえれば上式右辺の積分範囲を 0 からにすることができる） このとき

定理 II. 6. i) $\dfrac{\partial^i}{\partial t^i}F(t,u)=F^{(i)}(t,u)$, $i=1,2,\cdots\cdots,N$ とかくとき

(46) $$F(t,t)=F^{(1)}(t,t)=\cdots\cdots=F^{(N-2)}(t,t)=0,\quad F^{(N-1)}(t,t)\neq 0 \text{ [5]}$$

ならば $X(t)$ は $N-1$ 回微分可能で，$X(t)$ は狭義 N 重 markov process である。

ii) このとき，任意の $t, s\ (<t)$ に対して (t,s) の函数 $a_i(t,s)$, $i=0,1,\cdots\cdots,N-1$ が存在して

(47) $$E(X(t)/\mathbb{B}_s)=\sum_{i=1}^{N}a_i(t,s)X^{(i)}(s) \text{ [6]},\qquad X^{(0)}(s)=X(s)$$

が成り立つ。

証明. i) 補題 II.4 から (46) により $X(t)$ が $N-1$ 回微分可能であることは直ちに知られる。$\{g_i(u)\}$ が (45) のように表わされていることから (L) によって differential operator L_t が定まるが $\{v_i(u)\}$ がすべて C^∞ に属するから v_N を適当にえらべば L_t は通常の微分作用素である。このとき (46) は $F(t,u)$ が L_t に対応する Riemann の函数であることを示している。従って定理 II.4 から $X(t)$ が狭義 N 重 markov process であることがわかる。

ii) i) から $F(t,u)$ を (28), (30) の $\{f_i(t)\}$, $\{g_i(u)\}$ を用いて (31) のようにかくことができる。従って，$X(s)$, $X^{(1)}(s),\cdots\cdots,X^{(N-1)}(s)$ が存在するが，$X(s), X'(s),\cdots\cdots,X^{(N-1)}(s)$ はそれらの一次結合として表わすことができる。ところが

$$X^{(i)}(s)=f^{(i)}_{i+1}(s)U_{i+1}(s)+f^{(i)}_{i+2}(s)U_{i+2}(s)+\cdots\cdots+f^{(i)}_{N}(s)U_N(s),$$

$$U_i(s)=\int_0^s g_i(u)\,dB_0(u),\qquad i=1,2,\cdots\cdots,N-1$$

だから $U_i(s)$, $i=1,2,\cdots\cdots,N$ が $X(s)$, $X^{(1)}(s)$, , $X^{(N-1)}(s)$ の一次結合として表わされることがわかる（$\prod_{i=0}^{N-1}f^{(i)}_{i+1}(s)\neq 0$ に注意） Canonical representation の性質から

$$E(X(t)/\mathbb{B}_s)=\sum_{i=1}^{N}f_i(t)U_i(s)$$

---

5) $F^{(N)}(t,t)\equiv 0$ となることはない。もしそうなら g_i の一次独立性から，すべての f_i が恒等的に 0 に等しくなる。

Sem. on Probab.
Vol.7 1961年
P1-106

であるが 上のことから右辺の $\{v_i(s)\}$ が $X^{(i)}(s)$, $i=0,1,\cdots\cdots,N-1$ の一次結合として表わされるから係数 $a_i(t,s)$ を適当に選んで(47)が得られる。

Lévy は $N-1$ 回までの微分可能性と(47) とを狭義 N 重 markov 性の条件にしたが，定理Ⅱ.6.によれば N 重 markov 性と(43)があれば(46)だけから狭義 N 重 markov 性が出る。そして(47)は $X(\tau)$: $\tau \le s$ が知られたとき，未来の $X(t)$ の（分散を最小にする linear な）予測が s の近くだけできまる $X(s)$ の微係数から作られることを示している点で重要な意味をもっている。

一般の N 重 markov process $Y(t)$ は，canonical kernel が (43)の性質をもつ $\{f_i(t)\}$, $\{g_i(u)\}$ から構成されていても必ずしも(46)はみたさない。すなわち $X(t)$ が狭義の N 重 markov process になるとは限らない。例えば $F(t,t) \neq 0$ なら $Y(t)$ の微分可能性さえ否定される。しかしそれは狭義のものと無関係ではない。この辺の事情を示すものとして次の定理がある。

定理Ⅱ.7. $Y(t)$ の canonical kernel は (43) を満足する $\{g_i(u)\}$ と $\hat{f}_i(t) \in C^{\infty}(T')$ によって

$$F(t,u)=\sum_{i=1}^{N} \hat{f}_i(t)g_i(u)$$

とかけて居り

$$(48) \qquad Y(t)=\int_0^t F(t,u)\,dB_0(u)$$

であるとする。若し t に無関係な k $(0 \le k \le N-2)$ が存在して

$$F(t,t)=F^{(1)}(t,t)=\cdots\cdots=F^{(k-1)}(t,t)\equiv 0, \quad F^{(k)}(t,t) \neq 0$$

ならば狭義 N 重 markov process $X(t)$ と $N-1$ 階微分作用素 M_t が存在して

$$(49) \qquad Y(t)=M_t X(t)$$

証明 仮定から $\{g_i(u)\}$ より (25), (26) をみたす $v_i(u)$, $i=0,1,\cdots,N-1$ が作れる。それらと適当な $v_N(u)$ を用いて，狭義 N 重 markov process $X(t)$ を (42)によって定義する。これが求むるものである。M_t をきめるには

$$M_t f_i(t)=\hat{f}_i(t) \qquad i=1,2,\cdots\cdots,N$$

による。この M_t が $X(t)$ に作用出きて(49) をみたすことは明か。

系 定理Ⅱ.7 の $Y(t)$ については，任意の t と s $(<t)$ に対して

Sem. on Probab.
Vol.7 1961年
P1-106

(50) $$E(Y(t)/\mathcal{B}_s)=\sum_{j=0}^{N-1} C_j(t,s)X^{(j)}(s)$$ [6]

となる。但し，$C_j(t,s)$は$\{f_i\}$及び$\{\tilde{f}_i\}$から定まる(t,s)の函数である。

証明 (50)の左辺は，定理II.6の証明における記号を用いると，$\{U_i(s)\}$の一次結合である。それは$\{X^{(j)}(s)\}$の一次結合になる。

例II.3 再び例I.3で扱った*process*を考えよう。定理II.7の記号に合せて$Y(t)$とかく

$$Y(t)=\int_0^t (u-2t)\,dB_0(u)$$

$F(t,t)=t\neq 0$，$g_1(u)=1\int_0^u 1\,du$，$g_2(u)=-1$ の場合である。$f_1(t)=1$，$f_2(t)=t$ だから定理II.7の$X(t)$に当るものは

$$X(t)=\int_0^t (u-t)\,dB_0(u)$$

であり，M_t に当るものは $\frac{d}{dt}\cdot t$ である。$M_t X(t)=Y(t)$ は容易に確かめられる。

〔註〕上の例でM_t^{-1}に当る*operator*を形式的に考えてみると，$X(t)=M_t^{-1}Y(t)$ である。すなわち

$$X(t)=\frac{1}{t}\int_0^t Y(s)\,ds$$

とかける。この積分は*kernel*を$t=u$で0になるように積分したものを，新しい*kernel*とするといってもよい。（補題II.4の*process*の微分の逆演算！）このように考えれば定理II.7の系は

$$E(Y(t)/\mathcal{B}_s)=\sum_{i=1}^{N} C_i(t,s)\,(M_t^{-1}Y)^{(i)}(s)$$

とかけて $Y(\tau)$，$\tau=s$，が知られたときの$Y(t)$の予測は，sの近くの値だけでなく，s以前のすべての量を用いる（M_t^{-1}は*integral operator*であることに注意）ことが必要になってくる。

---

6) (47)及び(50)により，それぞれ狭義N重*markov*及びN重*markov process*についての*prediction*の問題を解決したことになる。*stationary process*についてはこの種の問題は多くの研究があり，我々も第III章で再び取り扱う事にする。

Sem. on Probab.
Vol.7 1961年
P1-106

第Ⅲ章 Stationary Gaussian process.

多重 Markov 性をもつ Gausian process の中でも，定常性をもつものは，既に知られている一般の stationary process の性質を用いて，表現についての詳しい結果が得られるので，章を改めて述べることにする。
詳しいことといった第Ⅰは Fourier 解析の理論を応用して，canonical representation の random meausure を求める方法が精具体的に知られることであり，第2にはN重 Markov stationary process の canonical kernel が非常に特殊な函数であることからくる取扱いの容易さが canonical な表現と，ある種の non-canonical なものとの関係を調べること を可能にするという点であり，第3にはN重 Markov stationary process の見本過程の連続性が，Hunt や Beljaev の結果を用いて相当詳しく知られるという事等である。

その他 §Ⅲ.3では多次元 parameter をもつ Brownian motion を parameter の空間の半径 t の球面上で平均した所謂 Lévy の $M(t)$ process の研究は Lévy が表現の問題を考える端緒ともなった重要な例であると共に多重 Markov process の典型的な例にもなっている。我々はこれを時間の scale をかえて stationary process に変換して canonical representation を得る統一的な方法を示し，特に parameter space が奇数次元の場合について Lévy の問題に対する解決を与える。

尚，本章で解決し得なかった事で重要と思われる問題とか若干の予測などは最後の節にまとめておいた。

本章で扱う Gaussian process $X(t)$, $t\in T=(-\infty,\infty)$，はすべて次の条件を満足するものである。

(1) $X(t)$ は (weakly) stationary, $E(X(t))\equiv 0$,

(2) M_2 −連続

(3) purely non-deterministic，すなわち $\bigcap_t \mathfrak{M}_t(X)=\{0\}$

$X(t)$ は Gaussian だから (1) から $X(t)$ は strictly stationary process になり，又 $X(t)$ の covariance function

$$\gamma(h)=E\{X(t+h)X(t)\}$$

は (2) より h の連続函数になる。

Sem. on Probab.
Vol.7 1961年
P1-106

§Ⅲ.1 Stationary process の表現

一般に weakly stationary process $X(t)$, $t\in T$ (Gaussian process とは限らない。) の covariance function $\gamma(h)$ は Khintchine の定理によって

(4) $\quad \gamma(h)=\int e^{ih\lambda}d\sigma(\lambda)$

と表わすことができる。このスペクトル分解に対応して $X(t)$ 自身が

(5) $\quad X(t)=\int e^{it\lambda}dM(\lambda)$

と表わされる。(例えば K. 伊藤[3] §49 参照) こゝに $dM(\lambda)$ は $L^2(\Omega)$ の値[1] をとる $\mathcal{B}^*$ ($\mathcal{B}(R^1)$ の集合で σ ―測度有限なものの全体) の上で定義された orthogonal random measure で

$$(6)\qquad \begin{cases} M(\Lambda)=\overline{M(-\Lambda)}, & -\Lambda=\{-\lambda;\ \lambda\in\Lambda\} \\ E(M(\Lambda))=0, & E|M(\Lambda)|^2=\sigma(\Lambda) \end{cases}$$

をみたすものである。尚 (5) の積分は §0 で定義した一般の Wiener integral と全く同様に (そこでの独立をこゝでは直交にして) 定義される random measure $dM(\lambda)$ は $X(t)$ から具体的に

(7) $\quad M((a,b))=\lim\limits_{c\to\infty}\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-c}^{c}\frac{e^{-ibt}-e^{-iat}}{-it}X(t)\,dt,$ (a,b は σ の連続点)

によってさだまる。しかも (7) は $X(t)$ から linear な方法で求めることができることを示している。この注意と (5) から §0 の記号を用いれば次の関係が成立っていることがわかる。

(8) $\quad \mathfrak{M}(M)=\mathfrak{M}(X)$

以上は $X(t)$ についての仮定 (1) から出ることであるが、我々は (2), (3) を仮定しているので測度 σ は絶対連続になり、その密度函数を $\sigma'(\lambda)$ とかけば、よく知られているように

(9) $\quad \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\log\sigma'(\lambda)|}{1+\lambda^2}d\lambda<\infty$

である。そこで次のような複素数 w (但し w の虚数部は負) の函数が定義出来る。

1) こゝだけ $M(\Lambda)$, $\Lambda\in\mathcal{B}^*$ は複素数値をとる r.v. である。

Sem. on Probab.
Vol.7 1961年
P1-106

$$(10)\quad \begin{cases} G_0(w) = e^{-\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+\lambda w}{\lambda - w} \frac{\log \sigma'(\lambda)}{1+\lambda^2} d\lambda} \\ G(w) = G_0(w)\,\Pi(w)\, e^{\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+\lambda w}{\lambda - w} d\chi(\lambda) - i\beta w + i\alpha} \end{cases}$$

こゝに $\Pi(w)$ は Blaschke product であり，$d\chi(\lambda)$ は singular な測度，$\beta(>0)$ と α は実数である。この $G(w)$ は w の虚数部が負のとき regular で，w が下から実数 λ に近づくとき，殆ど到る処 (λ)，極限 $G(\lambda)$ をもち，殆ど到る処

$$(11)\qquad |G(\lambda)|^2 = \sigma'(\lambda)$$

となっている。しかも $G(\lambda)$ の Fourier 変換。

$$(12)\qquad F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} G(\lambda)\, d\lambda$$

は、$t<0$ のとき 0 になっている。(G のことを $X(t)$ の <u>G－函数</u>とよぶことがある)

この $G(\lambda)$ を用いて $dM(\lambda)$ から homogeneous random measure dB^* (homogeneous とは $E|dB^*(\lambda)|^2 = d\lambda$ のときをいう) を

$$(13)\qquad B^*(\Lambda) = \int_\Lambda \frac{1}{G(\lambda)} dM(\lambda)$$

によって定める。$E(|B^*(\Lambda)|^2) = m(\Lambda)$，$m$ は Lebesgue 測度，は明らかであろう。さらに dB^* の Fourier 変換を dB とする，すなわち

$$(14)\qquad B(S) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_S e^{i\lambda t} dt \right\} dB^*(\lambda)$$

random measure の Fourier 変換についても通常の L^2 の函数の場合のように Parseval の等式が成り立つ。詳しくいえば $f(t)$ が L^2 に属し，その Fourier 変換が $f^*(t)$ ならば

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dB(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t)\, dB^*(t)$$

が成り立つ。

以上のことから

$$(15)\qquad \begin{aligned} X(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dM(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} G(\lambda)\, dB^*(\lambda) \\ &= \int_{-\infty}^{t} F(t-u)\, dB(u) \qquad (\text{Parseval の等式}) \end{aligned}$$

Sem. on Probab.
Vol.7 1961年
P1-106

となる。最後の積分の上限が t になることは(12)の $F(t)$ が $t<0$ で 0 になることによる。このような $X(t)$ の表現は moving average representation とよばれている。

(15) から明らかなように，任意の t に対して

(16) $\mathfrak{M}_t(X) \subseteqq \mathfrak{M}_t(B)$

であるが，特に $G(\omega)$ として(10)の $G_0(\omega)$ をとって dB^* から dB を作るときは(16)はすべての t に対して等号が成り立つ。このときの dB を dB_0 とかくことにする。すなわち

(16') $\mathfrak{M}_t(X) = \mathfrak{M}_t(B_0)$, $-\infty<t<\infty$.

証明は §I.6 で行ったのと同様な方法で（そこでは dB が orthogonal random measure であるという性質しか使っていない。従ってこゝでも適用する方法である） $F(t)$ のみたすべき条件を求め，それを Fourier 変換すれば $G(\omega)$ は実は $e^{i\alpha}$ だけの自由性を残して $G_0(\omega)$ でなければならないことがわかる。今後 (16')が成り立つ F や dB_0 を考えるときは実数値をとるもののみを考えることにする。かくすれば両者とも符号を除いて一意に定まる。

尚、こゝでも $dM(\lambda)$ について注意したのと同様に (13)，(14) をみれば，$dB(t)$ は $dM(\lambda)$ から，従って $X(t)$ から linear な方法で構成出来ることを注意しよう。（以上詳しくは Karhunen [1] 参照）

〔註〕 stationary process の moving average representation を求める方法は多くの著書や論文に見られるが，いずれも(16')が成立するようなものをそれぞれ特殊な方法によって求めている。

上述のように(15)の表現方法のすべてを考え，その中で(16')が成立する表現は(10)における $G(\omega)$ として特に $G_0(\omega)$ をとったものであるといった明快な特徴づけをしているものは Karhunen [1] 以外には見当らないようである。このような ($G(\omega)$，従って $F(t)$，によって、表現の特徴づけをする方法は，我々の立場からも極めて重要なものである。

これまでの議論は (1)，(2)，(3) を満足する weakly stationary process 一般に通用するものであったが，我々の場合，すなわち $X(t)$，$t\in T$，が gaussian process の場合に表現(15) のもつ意味を考えてみよう。$dB_0(t)$ は

Sem. on Probab.
Vol.7 1961年
P1-106

上に注意したように $X(t)$ から linearly に構成出来るから §0で述べた gaussian system の性質から $\{B_0(S);\ S\in\mathcal{B}_T,\ m(S)<\infty\}$ は再び gaussian system になる。ところが (6) よりか…測度は対称だから $\overline{G_0(-\Lambda)}=G(\Lambda)$，従って $\overline{B^*(-\Lambda)}=B^*(\Lambda)$. 故に $B_0(\Lambda)$ は real r. v. になる。real な orthogonal gaussian random measure は additive であるから (15) は $(dB_0(t),\ F(t-u))$ が $X(t)$ の表現であることを示している。又 $dB_0(t)$ は homogeneous になるように作られているから Wiener の random measure になり、添字 0 をつけたことは適当であった。[2)]

$X(t)$ がこのような $dB_0(t)$ を用いて (15) のように表わされていることは，$(dB_0(t),\ F(t-u))$ が $X(t)$ の表現であることに他ならない。しかも (16′) から $(dB_0(t),\ F(t-u))$ が proper canonical representation であることがわかる。前にのべた F が符号を除いて一意に定まることは canonical representation の一意性（定理 I.1）に相当する。

かくして我々は既存の理論から労せずして canonical representation を得たわけであるが，第I章の一般論において，canonical representation が存在するために提出した三条件がいかにして満足されているかを認識しておくことが重要である。まず separability は仮定(2) から出る。($\mathfrak{M}$, 2) は (3) の purely non-deterministic という条件そのものである。multiplicity が 1 ということは weakly stationary という仮定から自動的に出て来ることであって，この性質が表現の問題を考えるとき，stationary process の取扱いを容易にする理由の一つである。

§ III.2. 多重 Markov stationary gaussian process

先ず simple Markov の場合を考えよう。$X(t)$ が 1 重 Markov process であれば，定理 II.1 によって，前節で求めた canonical kernel F は

(17) $\qquad F(t-u)=f(t)\,g(u)$

とかける。g の可測性から F の，従って f の可測性も出て，よく知られたように (17) から $f,\ g,\ F$ が指数函数でなければならないことがわかる。例えば $g(u)$ を $e^{\lambda u}$ とするとき，$g(u)$ が任意の t に対して $(-\infty,\ t]$ で二乗可積分でなければならないことから $\lambda>0$ が出る。従って $f(t)$ はある常数 C があって，$C\cdot e^{-\lambda t}$ とかけて

2) dB_0 がそうだからといって dB^* も Wiener の random measure になるわけではない。dB^* は complex othogonal であり，additive でない。

Sem. on Probab.
Vol.7 1961年
P1-106

(18) $$X(t)=C\cdot e^{-\lambda t}\int_{-\infty}^{t}e^{\lambda u}dB_0(u), \qquad \lambda>0$$

すなわち $X(t)$ が Ornstein-Uhlenbeck の Brownian motion (§I.2の 3°) 参照) になる。これはよく知られた結果、すなわち simple markov stationary gaussian process が (18) の $X(t)$ であるという結果と一致する。

多重 markov process の場合は、第II章でそれを定義するときにも simple markov process の自然な拡張ということを意図して定義したものであるだけに canonical kernel に対しても、指数函数の何等かの意味での拡張になっていることが期待される。(一般の指数函数！ともいうべきもの) 次の補題はその期待に添うものである。

補題 III.1　N 次の goursat kernel

$$F(t,u)=\sum_{i=1}^{N}f_i(t)g_i(u)$$

が $t-u$ のみの函数であれば $\{f_i(t)\}$ は、ある N 階の常数係数線型微分方程式の基本解系であり、$\{g_i(u)\}$ は亦それと共軛な微分方程式の基本解系である。

この補題は $F(t,u)=F(t-u)$ が

(19) $$e^{-\lambda(t-u)}(t-u)^k\cos\mu(t-u),$$
$$e^{-\lambda(t-u)}(t-u)^k\sin\mu(t-u), \qquad \lambda>0,\quad k=0,1,\cdots\cdots,n(\leq N),$$

の形の函数の一次結合になっており、しかもその和が丁度 N 次の goursat kernel になるように書けることを示している。

補題の証明、まず F を $D_0=\{(u,t)\,;\,u\leq 0,\ t\geq 0\}$ で考える。$\mathcal{D}_0$ は carrier が $(-\infty,0]$ に含まれる compact set であるような C^∞ に属する函数の全体とする。$\varphi\in\mathcal{D}_0$ ならば

$$(F*\varphi)(t)=\int_{-\infty}^{\infty}F(t-u)\varphi(u)\,du$$

は存在して、$t\geq 0$ の範囲で C^∞ の函数になる (Schwartz (1) tom II 参照) ことを注意しておく。

次に $\mathcal{D}_0$ の中に $\varphi_j(u)$, $j=1,2,\cdots,N$, が存在して

(20) $$\det((g_i,\varphi_j))\neq 0, \qquad i,j=1,2,\cdots\cdots,N,$$

のように出来ることを証明しよう。但し(20) の (g_i,φ_j) は g_i と φ_j の $L^2(T)$ における内積を表わす。先ず $\varphi_1(u)$ は $(g_1,\varphi_1)\neq 0$ なる任意の $\mathcal{D}_0$ の函数とする

若しそのようなφが存在しなければg_1は$(-\infty, 0]$で殆ど到る処0になってしまうから，$(g_1, \varphi_1) \neq 0$ なるφ_1は存在する。帰納的に$\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots \varphi_n$が

$$\det\left((g_i, \varphi_j)\right) \neq 0 \qquad i, j = 1, 2, \cdots\cdots, n$$

なるように選べたと仮定して，φ_{n+1} のとり方を考えよう。行列式

$$\begin{vmatrix} (g_1, \varphi_1), & (g_1, \varphi_2) \cdots\cdots (g_1, \varphi_n) & (g_1, \varphi) \\ (g_2, \varphi_1) & (g_2, \varphi_2) \cdots\cdots (g_2, \varphi_n) & (g_2, \varphi) \\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ (g_{n+1}, \varphi_1) & (g_{n+1}, \varphi_2) \cdots\cdots (g_{n+1}, \varphi_n) & (g_{n+1}, \varphi) \end{vmatrix}$$

がすべてのφについて0となるならば，最後の列の(g_i, φ), $i=1, 2, \cdots, n+1$, を$g_i(u)$にかえても，殆どすべての$u \leq 0$ に対して0になる。それを最後の列について展開すれば g_i, $i=1, 2, \cdots, n+1$の一次結合が殆とすべての$u \leq 0$ に対して0になることになり$\{g_i\}$ の一次独立性に矛盾する。従ってあるφに対して上の行列式は0でない。そのφをφ_{n+1}とすればよい。かくして(20)が証明された。

一方 $(F^* \varphi_j)(t)$ を$\{f_i(t)\}$，$\{g_i(u)\}$を用いてかくと

$$(F^*\varphi_j)(t) = \sum_{i=1}^{N} (g_i, \varphi_j) f_i(t)$$

で左辺は $t \geq 0$ でC^∞ の函数である。(20)を用いれば$f_i(t)$は$\{(F^*\varphi_j)(t)\}$ の一次結合になることがわかり，すべての$f_i(t)$が $C^\infty((0, \infty))$に属することが証明される。従って $F(t) = \sum_{i=1}^{N} f_i(t) g_i(0)$ から $F(t) \in C^\infty((0, \infty))$ が出る。又 Goursat kernelの性質から任意の相異る$t_1, t_2, \cdots, t_N$ に対して $\det(f_i(t_j)) \neq 0$だから $g_i(u)$は

$$F(t_j - u) = \sum_{i=1}^{N} f_i(t_j) g_i(u)$$

より $C^\infty((-\infty, 0))$に属することがわかる。

以上の議論を各 $D_a = \{(u, t);\ u \leq a,\ t \geq a\}$, $a \in T$, について行えば

$$f_i,\ g_i \in C^\infty(T^\circ), \qquad i = 1, 2, \cdots\cdots, N$$

が証明される。次に

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N} f_i^{(k)}(t) g_i(u) &= \frac{\partial^k}{\partial t^k} F(t-u) = (-1)^k \frac{\partial^k}{\partial u^k} F(t-u) \\ &= (-1)^k \sum_{i=1}^{N} f_i(t) g_i^{(k)}(u), \qquad k = 0, 1, \cdots\cdots, N \end{aligned} \tag{21}$$

に注意すれば，$u=0$ とおいて $F^{(k)}(t)$, $k=0, 1, \cdots\cdots, N$はすべて$\{f_i(t)\}$の一次結合だから，それらは一次従属になることがわかる。よって常数$b_0, b_1, \cdots\cdots, b_N$

Sem. on Probab.
Vol.7 1961年
P1-106

が存在して

$$L_t F(t) \equiv b_0 F^{(N)}(t) + b_1 F^{(N-1)}(t) + \cdots\cdots + b_N F(t) = 0. \qquad t > 0$$

となる. t の代りに $t-u$ $(t>u)$ とおき, F を $\{f_i\}$ で表わしてから $\{g_i\}$ の一次独立性を用いれば

$$b_0 f_i^{(N)}(t) + b_1 f_i^{(N-1)}(t) + \cdots\cdots + b_N f_i(t) = 0, \qquad t \in T, \ i = 1, 2, \cdots\cdots, N$$

が出る。$\{f_i\}$ は勿論一次独立な函数の system であり $L_t f_i = 0$ で L_t が N 階の微分作用素であるから, $\{f_i\}$ は $L_t f = 0$ の基本解系で無ければならない。

$\{g_i\}$についての結論は再び (21) を用いて、類似の方法で証明される。

$X(t), t \in T,$ は本章を通じての仮定 (1) (2), (3), をみたす gaussian process として

定理 III. 1　$X(t)$ が N 重 markov process ならばその canonical kernel F は (19) の形の函数の一次結合であるような N 次の goursat kernel である。[3)]

証明　$F = F(t-u)$ は proper canonical kernel であり, それは亦定理 II. 2 によって N 次の goursat kernel である。よって補題 III. 1. より定理を得る。

〔註〕 この定理の結果を導くには, $X(t)$ が gaussian であることは本質的には使われていない。定義 II. 2. における $E(X(t_i)/\mathcal{B}_{t_0})$ の代りに $U(t_0, t_i) \equiv X(t_i)$ の $\mathfrak{M}_{t_0}(X)$ への projection として, そこでの条件を満足するならば定理 II. 2 も成り立ち補題 III. 1 によって F はやはり定理 III. 1 のような函数になっている。(附録 §A. 2, 定理 A. 5 参照)

系　$X(t)$ が N 重 markov process ならば, その G- 函数

$$G(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-i\lambda t} F(t)\,dt = \frac{Q(i\lambda)}{P(i\lambda)} \qquad (F \text{ は Canonical kernel}) \tag{22}$$

は $i\lambda$ の有理函数で, スペクトル測度の密度函数 σ' は

$$\sigma'(\lambda) = \left| \frac{Q(i\lambda)}{P(i\lambda)} \right|^2 \tag{22'}$$

---

3) 19) の形でも $\mu = 0$ の場合である. parameter space T を有限区間に限定すれば $\mu \neq 0$ もあり得る. しかし $T = (-\infty, \infty)$ で $\mu \neq 0$ のときでも僅かの注意で N 重 markov と同様に扱えるので μ にこだわらないことにする。

Sem. on Probab.
Vol.7 1961年
P1-106

である。こゝにPはN次，Qは高々$N-1$次の多項式である。

証明 先ず，仮定(3)からσが絶対連続であるのでσ'が考えられることを注意しよう。$G(\lambda)$と$F(t)$との関係は，前節の(12)式から明か．$G(\lambda)$が有理函数になることは，(22)の積分でFが(19)の函数の一次結合であることから初等的な計算によって確かめられる。又σ'の形は(11)を適用して得られる。

例Ⅲ.1 (19)の函数で$\lambda=1$，$n=1$，$\mu=0$なるものを用いた例として

$$X_1(t)=\int_{-\infty}^{t}(t-u)e^{-(t-u)}dB_0(u)$$

がある。kernelは明かにcanonical kernelで

$$G_1(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{(1+i\lambda)^2}\ ;\qquad \sigma_1'(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{(1+\lambda^2)^2}$$

となる2重markov processである。

例Ⅲ.2 同じく2重markov processでcanonical kernelは(19)の函数の中$n=0$　$\mu=0$なるものを用いた例として

$$X_2(t)=\int_{-\infty}^{t}\left\{2e^{-(t-u)}-e^{-2(t-u)}\right\}dB_0(u)$$

をあげよう。{ }内はcanonical kernelで

$$G_2(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{3+i\lambda}{(1+i)(2+i\lambda)},\qquad \sigma_2'(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{9+\lambda^2}{(1+\lambda^2)(4+\lambda^2)}$$

である。

上にあげた二つの例は何れも2重markov processであるが，相異は$X_1(t)$は微分可能($L^2(\Omega)$ノルムについて)であるが$X_2(t)$は微分不可能であるという点である。それは§Ⅱ.4の補題Ⅱ.4から知られるが又$\sigma'(\lambda)$の$\lambda\to\infty$のときのorderをみてもよい。

一般に$\sigma'(\lambda)$が

$$\int\lambda^{2n}\sigma'(\lambda)d\lambda<\infty$$

を満足すればprocessはn回微分可能である。(K. Ito [2] §47) 故に多重markov stationary processの微分可能性を調べるには(22)の多項式P, Qについて次数の差をみればよいことになる。例えば，N重markov processでQの次数が$N-k$であればそのprocessは$k-1$回微分可能である。特にQが常数のときは$N-1$回微分可能で，実は狭義N重markov processになるのである。

stationary processについて狭義多重markov性を考えたいが，

Sem. on Probab.
Vol.7 1961年
P1-106

§II.4の場合と異るのはparameter space Tのみである。§II.4で断わっておいたようにN重markov stationary processはmarkov性や微分可能性を保存したままT=[0,∞]のprocess（もはやstationaryではない）に変換することができる。

定理III.2　N重markov stationary process $\hat{X}(t)$, $-\infty<t<\infty$, は

(23)　$\sqrt{t}\,\hat{X}\left(\frac{\log t}{2}\right)=X(t)$

なる変換により、N重markov process $X(t)$, $0\leq t<\infty$ になる。しかもこの変換は微分可能性を保存する。

証明　仮定から $\hat{X}(t)$ は

(24)　$\int_{-\infty}^{t}e^{-\lambda(t-u)}\,d\hat{B}_0(u)$,　$\int_{-\infty}^{t}(t-u)^k e^{-\lambda(t-u)}\,d\hat{B}_0(u)$,　$k\leq N$

のtypeのprocessの和になっている。(23)の変換で両者はそれぞれ

(24′)　$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^t\left(\frac{u}{t}\right)^{\frac{\lambda-1}{2}}dB_0(u)$,　$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{k+1}\int_0^t\left(\log\frac{t}{u}\right)^k\left(\frac{u}{t}\right)^{\frac{\lambda-1}{2}}dB_0(u)$,

（$dB_0(t)$もWienerのrandom measure）

に移ることはcovariance functionを計算して容易に確かめられる。そして亦、いくつかのprocessの和の変換は、変換したものの和に対応するから $X(t)$ は(24′)のようなprocessの一次結合になっている。こゝで若し $\hat{X}(t)$ をcanonical kernelで(15)のようにかいたとき、対応する $X(t)$ のkernelは(24′)から $\left(\frac{u}{t}\right)^\alpha$, $\left(\log\frac{u}{t}\right)^k\left(\frac{u}{t}\right)^\alpha$（KはN以下の自然数、$\alpha>-\frac{1}{2}$）の一次結合であって、それはproper canonical kernelになることが証明される（§I.6の判定条件を用いる）。故に $X(t)$, $0\leq t<\infty$, はN重markov processである。

変換 $\hat{X}(t)\longrightarrow X(t)$ が微分可能性を保存することはcanonical kernelの変化に注意して補題II.4を用いればよい。

この定理の逆を一般化したものとして、次のLévyの定理（Lévy[3] P.141）がある。

定理III.3.　$X(t)$, $0\leq t<\infty$, がα次のhomogeneous function $F(t,u)$ をproper canonical kernelとして

$$X(t)=\int_0^t F(t,u)\,dB_0(u)$$

と表わされていれば、$e^{-(2\alpha+1)}X(e^{2t})=\hat{X}(t)$, は $-\infty<t<\infty$ はstati

Sem. on Probab.
Vol.7 1961年
P1-106

これらの定理により、今から定義しようとする狭義N重Markov stationary process は(23)の変換によってparameter spaceが$(0,\infty)$である狭義N重Markov processになっていなくてはならないことがわかる。又$T=(0,\infty)$のときは、§II.4より微分作用素を用いて定義した狭義N重Markov processは普通のN重Markov processになっていることから stationaryの場合には、普通のN重Markov processの中の特殊なprocessを狭義のものとすればよい。今の場合更に好都合なことには、定理III.1からN重Markov processのcanonical kernelはC^∞に属する(実はanalytic)函数$\{f_i(t)\}$、$\{g_i(u)\}$で構成されているので、狭義のN重Markov性を定義するのに§II.4でおいた仮定(II.25)や(II.26)に当るものは、考えなくてもよい。従って(L)におけるL_t等は普通のdifferential operatorとしてよい。

<u>定義III.1</u>　N重Markov stationary process $X(t)$, $-\infty<t<\infty$, が$N-1$回微可可能であり、適当な$N-1$階のdifferential operator $L_t^{(1)}$と$\lambda_1(>0)$が存在して

$$(25)\qquad L_t^{(1)}X(t)=\int_{\infty}^{t}e^{\lambda_1 u}\,dB_0(u)$$

となるとき<u>狭義N重Markov stationary process</u>という

定理III.1から(25)の$L_t^{(1)}$は当然常数係数であり、適当な正数[4] $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_N$が存在して

$$(26)\qquad L_t^{(1)}=e^{(\lambda_1-\lambda_2)t}\frac{d}{dt}\cdots\cdots\frac{d}{dt}e^{(\lambda_{N-1}-\lambda_N)t}\frac{d}{dt}e^{\lambda_N t}$$

とかける。ここで$\{\lambda_i\}$の中には等しいものがあってもよい。例えばkernelに$(t-u)^n e^{-\lambda_1(t-u)}$が現れてくれば$\{\lambda_i\}$の中$n+1$個は$\lambda_1$に等しい。例のIII.1は$n=1$, $\lambda_1=\lambda_2=1$の場合である。さて

$$(26')\qquad L_t=e^{-\lambda_1 t}\frac{d}{dt}L_t^{(1)}$$

とすればcanonical kernel FはL_tに対応するRiemannの函数である。((II.31)参照)、故に

$$F(0)=F'(0)=\cdots\cdots=F^{(N-2)}(0)=0$$

となるから(或は$N-1$回微分可能なことより補題II.4より) $X(t)$のG-

4) 脚註3)で注意したように$\mu\neq0$の場合をも含めて扱うならば、$\lambda_0, \lambda_1, \cdots\cdots, \lambda_N$は実数部が正なる複素数として全く同様に議論できる。

Sem. on Probab.
Vol.7 1961年
P1-106

函数は(22)の記号で

$$(27) \qquad G(\lambda)=\frac{C}{P(i\lambda)}, \quad C\text{は常数},$$

とならなければならない。この事実は$X(t)$が$N-1$回微分可能であることにより$\lambda^{2N-2}G'(\lambda)$が可積分でなければならないことからもでる。

狭義のものも含めて多重markov stationary processは§Ⅲ.1の最后に述べたことの他に上でみたように、そのスペクトル測度やG－函数が簡単な有理函数であって、markov性を明快に反映しているという事情が一層研究を容易にしている。引き続いてG－函数に注意しながらN重markov processについて調べよう。$X(t)$が狭義N重markov processで、そのG－函数が(27)のようであったとする。N次多項式Pを

$$(28) \qquad P(i\lambda)=\prod_{j=1}^{N}(i\lambda+\lambda_j)=\sum_{k=0}^{N}a_k(i\lambda)^k$$

とかけば(22)から$\{\lambda_j\}$は$X(t)$のcanonical kernelを構成する指数函数のparameterになっている。すなわち(26),(26')における$\{\lambda_i\}$と全体として一致する。

1°) すべてのλ_jが相異るとき、$D_k=e^{-\lambda_k t}\frac{d}{dt}e^{\lambda_k t}$とすれば$D_1X(t)$が存在して、それは狭義$N-1$重stationary processになる。そのときのG－函数は

$$(i\lambda+\lambda_1)\frac{C}{P(i\lambda)}=\prod_{j=2}^{N}(i\lambda+\lambda_j)$$

となる。このようにして$X(t)$に$D_1, D_2, \cdots\cdots, D_{N-1}$を逐次作用させれば、狭義$N-1$, $N-2$, …1重markov stationary process(の列)が得られる。故に(28)に対応してL_tは

$$(29) \qquad L_t=\prod_{j=1}^{N}D_j=\sum_{k=0}^{N}a_k\frac{d^k}{dt^k}=P\left(\frac{d}{dt}\right)$$

と表わされる。

2°) λ_kが$P(x)=0$のn重根のとき(29)のL_tの表現には、同じD_kがn個並ぶので途中に$e^{-\lambda_k t}\frac{d^n}{dt^n}e^{\lambda_k t}$が現われ通常の微分する操作を$n$回繰返すstepがある。

又若し(28)に現われるどのλ_jとも異るαをとり、$D_\alpha=e^{-\alpha t}\frac{d}{dt}e^{\alpha t}$を$X(t)$に作用させれば、得られるprocessは亦stationaryではあるが、そのG－函数は

Sem. on Probab.
Vol.7 1961年
P1-106

$$\frac{C\cdot(i\lambda+\alpha}{P(i\lambda)}$$

となってしまう。すなわち $D_2X(t)$ は狭義 $N-1$ 重 markov でなく、単に、狭義でない N 重 markov である。この注意は重要で微分する操作を markov 性と関係づけようとすれば (29) に現われる D_j による微分のように、markov 性の重数を下げるもののみが意味をもつように思われる。

又、狭義 N 重 markov process と狭義でない N 重 markov process との関係も微分演算を通して一層明かになる。既に定理 II.7 で理論的には両者の関係が知られているが、G－函数をみれば定理 II.7 における operator M_t が具体的に求まってしまう。$Y(t)$ を N 重 markov process とし、そのG－函数が (22) であるとする。

(30) $\quad Q(i\lambda)=b\cdot\prod_{j=1}^{m}(i\lambda+\mu_j) \quad m(\leq N-1)$ は Q の次数、b は常数

と表わし、$\widehat{D}_j=e^{-\mu_j t}\frac{d}{dt}e^{\mu_j t}$ と書こう。G－函数が (27) である狭義 N 重 markov process を $X(t)$ とすれば $\widehat{D}_1, \widehat{D}_2, \cdots\cdots, \widehat{D}_n$ を逐次 $X(t)$ に作用させることができて、得られた process のG－函数は常数を除いて $Y(t)$ のそれに一致する。$X(t)$ も $Y(t)$ も同じ $dB_0(t)$ による積分で表わしておけば

$$\frac{b}{c}\widehat{D}_m\cdot\widehat{D}_{m-1}\cdot\widehat{D}_1X(t)=Y(t)$$

となる。上式の左辺を $M_tX(t)$ とすればよい。換言すれば (30) より $M_t=\frac{1}{c}Q(\frac{d}{dt})$.

又上の $X(t)$ の場合

$$L_tX(t)=CB_0'(t)$$

なる形式的な方程式が得られるのは明らかであるが、$Y(t)$ に対応するものとしては

(31) $\quad L_tY(t)=M_tB_0'(t),\quad$ すなわち $\quad P(\frac{d}{dt})Y(t)=Q(\frac{d}{dt})B_0'(t)$

が成立つ。この式は random distribution の世界で考えたとき、正当な意味をもつが、今はそれに触れない。(Gelfand-Jaglom [1] には (31) をみたすような Gaussian process が取扱はれている)

Sem. on Probab.
Vol.7 1961年
P1-106

§Ⅲ.3 Lévy のM(t) process

今迄に得た結果を応用して Lévy の定義した $M(t)$ process の表現を求めよう。$M(t)$ process について説明するために若干準備をする。

定義Ⅲ.2 $X(A)$, $A \in R^N$ (N次元Euclid空間), が次の条件をみたす Gaussian system であるとき, parameter spaceが R^Nの Brownian という。

$$
(32)\quad \begin{cases} \text{i)} & X(A)\text{は}EX(A)=0\text{の Gaussian r.v である。} \\ \text{ii)} & X(O)=0 \qquad (O\text{は}R^N\text{の原点}) \\ \text{iii)} & X(A)-X(B)\text{の分散は}\ r(A,B)\ (r(A,B)\text{は二点}A,B\text{の距離})\ \text{である} \end{cases}
$$

このような Gaussian system が存在することは, (32)から直ちに計算される次の covariance function

$$\Gamma(A,B)=E(X(A)X(B))=\frac{1}{2}\{r(O,A)+r(O,B)-r(A,B)\}$$

が non-negative definite であること[5]により保証される。$X(A)$ は$N=1$としたとき明らかに通常のBrownian motion であるから$X(A)$, $A\in R^N$ は Brownian motion の$B_0(t)$ の拡張 (parameter space に関して) といえる。従って従属性についても $B_0(t)$ のもつ性質, 例えば単純 Markov 性等を一般化したある種の性質を$X(A)$がもつであろう。若しその観点から見た著しい性質がみつかれば parameter が多次元空間であるような一般の process の Markov 性の研究の端緒となるであろうことが想像される。この研究のための一つの手段として, Lévy [1] Chap VIII, ではR^N の球面S上の各Aについて$X(A)$ が知られたとき, 中心Cに対する$X(C)$ の条件附確率が調べられている。(T. Hida [1] の(I)参照), 例えばそのとき$X(C)$ の条件附平均値は, $X(A)$ をSの上の一様な測度で積分したものである。このことからも知られるように $X(A)$, $A\in R^N$, を R^N のある球面の上で積分したものの性質を調べておくことが重要である。Lévy は次のような$M(t)$ process を考えた。

定義Ⅲ.3 $S_N(t)$ を原点を中心とする半径tのR^N の球面として, σ_t を$S_N(t)$ 上の一様な測度で $\sigma_t(S_N(t))=1$ なるものとする。このとき$M_N(t), t\geq 0$, を

5) Schönberg Schwartzの定理, 証明はLévy [1] Chap VIII 参照.

Sem. on Probab.
Vol.7 1961年
P1-106

$$M_N(t)=\int_{S_N(t)} X(A)\,d\sigma_t(A)$$

で定義し, $M_N(t)$ process 或は (N を指定する必要のないとき又は $M_N(t)$ を総称するとき) 単に $M(t)$ process という。

$M_N(t)$, $t\geq 0$, が Gaussian process であることは定義から明か. 又 $EM_N(t)\equiv 0$ となるから $M_N(t)$ の covariance function $\Gamma_N(t,s)$ は

$$\Gamma_N(t,s)=E(M_N(t)M_N(s))$$

$$(33)\qquad =\int_{A\in S_N(t)}\int_{B\in S_N(s)} E(X(A)X(B))\,d\sigma_t(A)\,d\sigma_s(B)$$

$$=\frac{1}{2}(t+s-\rho_N(t,s))$$

となる。但し

$$\rho_N(t,s)=\int_{A\in S_N(t)}\int_{B\in S_N(s)} r(A,B)\,d\sigma_t(A)\,d\sigma_s(B)$$

この Γ_N の explicit な形を求めることは簡単ではない。先ず $t=s$ のとき $\rho_N(t,t)$ の形をみてみると, $N\geq 3$ なら

$$\rho_N(t,t)=t\,\frac{J_{N-2}}{I_{N-2}}\ .$$

となることは容易に計算出来る。こゝに I_{N-2}, J_{N-2} は

$$I_k=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^k\theta\,d\theta,\qquad J_k=\int_0^{\pi}\sin^k\theta\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta$$

なる常数である。この ρ_N を (33) に代入して $\Gamma_N(t,t)$ がすぐ求まる。

$s\neq t$ のとき $\rho_N(t,s)$ は, 積分変数をかえて次のようにかける。

$$(34)\qquad \rho_N(t,s)=\frac{1}{2I_{N-2}}\int_0^{\pi} r\sin^{N-2}\theta\,d\theta,\quad r=\sqrt{t^2+s^2-2ts\cos\theta}.$$

これは N が偶数のとき楕円積分になり複雑になる。そこで $N=2P+1$ のときのみ考えれば, 初等的な計算を繰返して explicit な形が求まる。その計算は我々の目標とは直接関係はないので省略する。(Lévy [3] 或は, Hida [1] の(1)の参照) 後にあげる例のために低次元の場合に ρ_N から求めた Γ_N の式を書いておく。何れも $t>s>0$ として

$$(35)\quad \begin{cases} \Gamma_1(t,s)=\dfrac{s}{2}, \qquad \Gamma_3(t,s)=\dfrac{s}{2}-\dfrac{s_2}{6t} \\[2ex] \Gamma_5(t,s)=\dfrac{s}{2}-\dfrac{s^2}{5t}+\dfrac{s_4}{70t^3} \end{cases}$$

Sem. on Probab.
Vol.7 1961年
P1-106

$$\begin{cases} \Gamma_7(t,s) = \dfrac{s}{2} - \dfrac{3s^2}{14t} + \dfrac{s^4}{42t^3} - \dfrac{s^6}{462t^5} \\ \Gamma_9(t,s) = \dfrac{s}{2} - \dfrac{2s^2}{9t} + \dfrac{s^4}{33t^3} - \dfrac{2s^6}{429t^5} + \dfrac{s^8}{2574t^7} \end{cases}$$

唯、注意することは、これらの函数の規則性である。何れも $\frac{s}{2}$ から始り $s\times(\frac{s}{t}$の多項式$)$ となっていて、次元が2増えると項の数が1増えるといった規則性があるが、係数については一見無規則のように思われる

Γ_{2p+1} の形から推測して Lévy は $M_{2p+1}(t)$ の表現の kernel が $\frac{u}{t}$ の多項式であると予測して $M_s(t)$ Process の表現を詳しく研究し (Lévy (2))、又 Γ_{2p+1} の微分可能性にも注意しながら、幾分天下り的に次の結論を得た。すなわち $M_{2p+1}(t)$ は、P_{2p+1} を

$$P_{2p+1}(u) = \frac{2p}{\sqrt{\pi}}\sqrt{I_{2p}}\int_u^1 (1-x^2)^{p-1}\,dx$$

で定義される $2p-1$ 次多項式とするとき、$P_{2p+1}(\frac{u}{t})$ を canonical kernel として

$$(36) \qquad M_{2p+1}(t) = \int_0^t P_{2p+1}\left(\frac{u}{t}\right) dB_0(u)$$

と表わすことができる。

例III. 3　$n=2,3$ のときはそれぞれ

$$M_5(t) = \sqrt{3}\int_0^t \left(\frac{2}{5} - \frac{3u}{4t} + \frac{u^3}{2t^3} - \frac{3u^5}{20t^5}\right) dB_0(u)$$

$$M_7(t) = \sqrt{10}\int_0^t \left(\frac{2}{5} - \frac{3u}{4t} + \frac{u^3}{2t^3} - \frac{3u^5}{20t^5}\right) dB_0(u)$$

であって、kernel が canonical kernel であること 及び上の表現から計算した covariance function が (35) と一致することも容易に確かめられる。

以上は Lévy (3) の結果であるが、この方法は N が偶数のときには通用しない。しかし N が偶数のときでも canonical kernel が homogeneous function になっているだろうということは想像出来る。そこで定理III. 3 に訴えて $M_N(t)$ を stationary process に変換したら、スペクトル測度や G－函数という強力な道具が使えて、N についての規則性が発見出来そうに思はれる。実際これらの予想はこれから述べる様にすべて正しい。

$M_N(t)$ から次の変換により $X_N(t)$、$-\infty<t<\infty$、を作る。

$$(37) \qquad X_N(t) = e^{-t}M_N(e^{2t})$$

$X_N(t)$ の covariance function は、(33)を用いると、$h\geq 0$ のとき

Sem. on Probab.
Vol.7 1961年
P1-106

(38) $$E(X_N(t)X_N(t+h)) = \frac{1}{2}\left(2\cosh h - \frac{1}{\sqrt{2}\, I_{N-2}}\int_0^{\pi}\sqrt{\cosh(2h)-\cos\theta}\,\sin^{N-2}\theta\, d\theta\right)$$

で h のみの函数（$\gamma_N(h)$ とかく）になる。従って $X_N(t)$ は stationary process である。

<u>補題 III.2</u>　$N\geq 4$ ならば $\gamma_N(h)\in C^2$ で，$\gamma_N(h)$ は次の方程式を満足する。

$$(2N-3)^2\gamma_N(h)-\gamma_N''(h)=4(N-1)(N-2)\gamma_{N-2}(h)$$

<u>証明</u>　(38) で表わされる $\gamma_N(h)$ は積分記号下での微分が可能であることに注意すれば (39) も初等的な計算で出る。

<u>定理 III.4</u>　$N\geq 4$ ならば，$X_{N-2}(t)$ と $X_N(t)$ とを用い random measure で表現[6] しておくとき，次式が成り立つ。

(39) $$e^{-(2N-3)t}\frac{d}{dt}e^{(2N-3)t}X_N(t)=C_N X_{N-2}(t),\quad C_N=2\sqrt{(N-1)(N-2)}$$

<u>証明</u>　上の補題から $X_N(t)$ が，従って $e^{(2N-3)t}X_N(t)$ が微分可能である。一方 $X_N(t)$ は purely non-deterministic だから gaussian orthogonal random measure $dZ_N(\lambda)$ が存在して

$$X_N(t)=\int e^{it\lambda}dZ_N(\lambda)$$

とかける。故に

$$e^{-(2N-3)t}\frac{d}{dt}e^{(2N-3)t}X_N(t)=\int(i\lambda+2N-3)e^{it\lambda}dZ_N(\lambda)$$

でその covariance function は $E(dZ_N(\lambda))^2=\sigma'(\lambda)\,d\lambda$ だから

$$\int e^{ih\lambda}\{\lambda^2+(2N-3)^2\}\sigma'(\lambda)d\lambda=-\gamma_N''(h)+(2N-3)^2\gamma_N(h)$$

となる。補題 III.2 より，それは $C_N^2\gamma_{N-2}(h)$ に等しい。故に (39) が成立つ。

この定理から $X_N(t)$ の表現とか markov 性とかいった性質を調べるには $X_2(t)$ 又は $X_3(t)$ を研究すればよいことがわかる。詳しくいえば

1°) <u>$N=2p+1$ のとき</u>　$C_N^{-1}e^{-(2N-3)t}\frac{d}{dt}e^{(2N-3)t}$ を D_N とおけば，D_3 は亦，$X_3(t)$ に作用させ得ることがわかり

$$D_3D_5\cdots\cdots D_{2p+1}X_{2p+1}(t)=X_1(t)$$

---

6) $X_N(t)$ の表現（しかも canonical）が存在することは，$X_N(t)$ の定義から (1)，(2)，(3) が満足されていることより明か。

Sem. on Probab.
Vol.7 1961年
P1-106

で $X_1(t)$ は常数を除いて Ornstein - Uhlenbeck の Brownian motion になる。故に $X_{2p+1}(t)$ は狭義 $p+1$ 重 markov process である。これは (23) の変換を考えるとき $M_{2p+1}(t)$ に関する Lévy の結果と一致する。ところで $X_{2p+1}(t)$ のスペクトル測度の density σ'_{2p+1} は定理 III.4 の証明から

$$\sigma'_{2p+1}(\lambda)=\frac{C_{2p+1}\qquad C_{2p-1}\quad\cdots\cdots\quad C_3}{\{(4P+1)^2+\lambda^2\}\{(4P-5)^2+\lambda^2\}\cdots\cdots\{3^2+\lambda^2\}}\cdot\frac{C_1}{1+\lambda^2},\quad C_i \text{は適当な常数}$$

ところが対応する G - 函数は $|G(\lambda)|^2=\sigma'_{2p+1}(\lambda)$ となり $G(w)$ は下半平面で regular でなければならない。そして (10) の G_0 に当るものは

$$(40)\qquad G_{2p+1}(\lambda)=\frac{\sqrt{C_{2p+1}}\ \cdots\cdots\qquad\qquad \sqrt{C_3}}{(4P-1+i\lambda)(4P-5+i\lambda)\qquad(3+i\lambda)}\cdot\frac{\sqrt{C_1}}{1+i\lambda}$$

である。これを Fourier 変換して canonical kernel を得て

$$X_{2p+1}(t)=\int_{-\infty}^{t}\left(a_0e^{-(t-u)}+\sum_{k=1}^{p}a_k e^{-(4k-1)(t-u)}\right)d\widetilde{B}_0(u)$$

を得る。更にそれを (23) の変換により，(24)，(24′) の公式から $M_{2p+1}(t)$ は，

$$M_{2p+1}(t)=\int_0^t\frac{1}{\sqrt{2}}\left(a_0+\sum_{k=1}^{p}a_k\left(\frac{u}{t}\right)^{2k-1}\right)dB_0(u)$$

を得る。これは (36) と一致する表現である。

今は $M_{2p+1}(t)$ の canonical representation を求める方法であったが，non-canonical なものとしては，どんなものを興味ある例として考え得るだろうかという疑問が起る。Lévy [3] には " $2P-1$ 次の $\left(\frac{u}{t}\right)$ の多項式を kernel とする $M_{2p+1}(t)$ の表現はどれだけあるか" という内容の問題がある。$X_{2p+1}(t)$ の問題に翻訳してみれば解答は容易である。すなわち $X_{2p+1}(t)$ の表現の kernel の種類をみるには G - 函数の種類をみればよい。上の問題の $\left(\frac{u}{t}\right)$ の多項式ということは $G(\lambda)$ が $\{i\lambda+(2k+1)\}^{-1}$ の積となることで，$2P-1$ 次ということは k が $2k+1\leq 4P-1$ を満足する自然数ということになる。G についての残る制限は $|G(\lambda)|^2=\sigma'(\lambda)$ のみである。そこで non-canonical kernel に対応する G - 函数としては (40) の $G_{2p+1}(\lambda)$ を用いて

$$G_{2p+1}(\lambda)\cdot\frac{(4P-3)-i\lambda}{(4P-3)+i\lambda}$$

といった例がある。この第2の因数は Blaschke product である。このような因数は $P-1$ 個あるから，問題の条件にかなった G - 函数は canonical なものに対応するものも含めて 2^{P-1} 個だけある。

例 III.4　$X_7(t)$ の non-canonical kernel に対応する G - 函数の例とし

Sem. on Probab.
Vol.7 1961年
P1-106

て

$$G(\lambda)=\left(\frac{C}{(11+i\lambda)(7+i\lambda)(3+i\lambda)(1+i\lambda)}\right)\cdot\frac{5-i\lambda}{5+i\lambda}$$

がある。(　)内は canonical kernel に対応する G－函数である。このときの表現を用いれば

$$M_7(t)=\int_0^t\left(\frac{3}{5}-\frac{3u}{t}+\frac{5u^2}{t^2}-\frac{3u^3}{t^3}+\frac{2u^5}{5t^5}\right)\sqrt{10}\,dB_0(u)$$

となり，これは Lévy が求めなかったものである。

前に (35) の P_N の例をみて規則性はみつからないように言ったが，$X_N(t)$ の G－函数でみれば (40) のように明白な規則性がみられる。加え，non-canonical representation のあり方まで知られるわけで G 函数を用いるのが強力な方法だと述べたことも了解されるであろう。

2°) <u>$N=2p$ のとき</u>　D_N は 1°) と同じとして

$$D_4 D_6 \cdots\cdots D_{2p} X_{2p}(t)=X_2(t)$$

だから $X_2(t)$ の性質がわかればすべての $X_{2p}(t)$, $p>1$. がわかる。スペクトル測度でいえば

$$\sigma_{2p}'(\lambda)=\frac{C_{2p}}{\{(4p-3)^2+\lambda^2\}}\frac{C_{2p-2}}{\{(4p-7)^2+\lambda^2\}}\cdots\frac{C_4}{\{5^2+\lambda^2\}}\cdot\sigma_2'(\lambda)$$

である。$\sigma_2'(\lambda)$ 及び $G_2(\lambda)$ を求めることのみが問題になる。そのため

$$\gamma_2(h)=\cosh\frac{h}{2}-\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\sqrt{2\cosh(2h)-2\cos\theta}\,d\theta$$

を Legendre の多項式を用いて展開して後 Fourier 変換をすれば

$$\sigma_2'(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{1+\lambda^2}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{b_k}{\lambda^2+(4k+3)^2}\right)$$

となる。こゝに

$$b_k=(4k+3)(a_{k+1}-a_k)^2,\quad 但し\quad a_k=\frac{(2k-1)(2k-3)\cdots 3\cdot 1}{2k\cdot(2k-2)\cdots\cdots 4\cdot 2}$$

である。これから (10) の G_0 に当る G－函数が求まればよいのだが，その explicit な形はまだ得られていない。しかし $\sigma_2'(\lambda)$ の形から我々の意味での<u>多重 markov process でない</u>ことだけはわかる。そして又 $X_2(t)$ は n 重 markov process $X^{(n)}(t)$ の極限 $(n\to\infty)$ とも考え得る。$X_{2p}(t)$ についても同様である。

〔註〕 $X_2(t)$ は我々が考えてきた多重 markov 性についての批判を与え

Sem. on Probab.
Vol.7 1961年
P1-106

又新たな概念を加えなければならないような必然性を引き起す重要な例ではないかと思われる。その意味で $X_2(t)$ を研究することが必要であろう。（Hida〔1〕の(I)，$N(t)$ process 参照）

§Ⅲ.4 見本過程の連続性

これまでは r.v. も process もすべて $L^2(\Omega)$ の要素と考えて，相等とか，収束とかその他一切を扱ってきたが，この節だけは process の見本過程（path）の性質を調べる。

$X(t)$，$-\infty<t<\infty$，を N 重 markov stationary process とし，その見本過程は§0で約束したように probability parameter $\omega\in\Omega$ を明記して $X(t,\omega)$ とかく。

$N=1$ のとき，即ち Ornstein Uhlenbeck の Brownian motion のときは §Ⅰ.2 の 3°）で述べたように Brownian motion $B_0(t)$ から $X(t)=e^{-t}B_0(2^{2t})$ として得られる。故に $X(t,\omega)$ の連続性は $B_0(t,\omega)$ から容易に導かれ，両者は，殆ど同じ程度の連続性をもっている。（$B_0(t,\omega)$ の連続性については Sirao〔1〕に詳しいのでここでは詳略する）

一般の $N(>1)$ のとき，$X(t)$ の L^2 ノルムの意味での微分可能性については §Ⅲ.2 で知られたように，スペクトル測度の density σ' を（22'）のようにかくとき Q の次数が $N-k$ であれば $X(t)$ は $k-1$ 回微分可能であった。実は，見本過程 $X(t,\omega)$ についても同じ回数だけ微分（普通の函数の微分）出来ることが知られる。証明のための重要な理論はすべて Haut〔1〕と Beljaev〔1〕に負う。我々が直接必要とするのは次の Beljaev の定理である。

定理（Beljaev） i）若し

$$\int_0^\infty \lambda^{2n}\log(1+\lambda)\,\sigma'(\lambda)\,d\lambda<\infty$$

ならば殆どすべての見本過程 $X(t,\omega)$ は n 回微分可能である。

ii）更に若し

$$\int_0^\infty \lambda^{2(n+\alpha)}\log(1+\lambda)\,\sigma'(\lambda)\,d\lambda<\infty$$

ならば殆どすべての ω について n 次導函数 $X^{(n)}(t,\omega)$ は任意の $C(>0)$ について $H(\alpha,C)$ に属する。但し $f(t)\in H(\alpha,C)$ とは，任意の $C'>C$ とすべての十分小さい h に対して

$$|f(t+h)-f(t)|<C'|h|^\alpha$$

Sem. on Probab.
Vol.7 1961年
P1-106

が任意の有限区間のtについて一様に成立することである.

これを用いて我々は次の定理を得る。

定理III.5 N重 Markov stationary process $X(t)$のG-函数についてQの次数が$N-k$であれば, $X(t)$の殆どすべての見本過程は$k-1$回微分可能で, $k-1$次導函数$X^{(k-1)}(t,\omega)$は任意の$\frac{1}{2}$より小さい$\varepsilon(>0)$と任意のCに対して, $H(\varepsilon, C)$に属する.

証明

$$\sigma'(\lambda)=\left|\frac{Q(i\lambda)}{P(i\lambda)}\right|^2$$

だから $\lambda\to\infty$のとき$\sigma'(\lambda)$は λ^{-2k}の orderである。従って

$$\int_0^\infty \lambda^{2(k-1)}\log(1+\lambda)\sigma'(\lambda)\,d\lambda<\infty.$$

故に殆どすべてのωに対して$X(t,\omega)$は$k-1$回微分可能である。又同じ理由でεを$1/2$より小さい任意の正数とするとき, $\lambda^{2(k-1+\varepsilon)}\log(1+\lambda)\sigma'(\lambda)$は$\lambda\to\infty$のとき $\lambda^{-2+2\varepsilon}\log\lambda$ の orderとなり$(0,\infty)$で可積分である。故に殆どすべてのωに対して, $X^{(k-1)}(t,\omega)$は$H(\varepsilon, C)$に属する。

この定理から$X(t,\omega)$の連続性をみるにはQの次数を求めることが要点であることがわかる。その方法として

i) $X(t)$が$L^2(\Omega)$のノルムの意味で$k-1$回微分可能でk回微分は出来ない。

ii) $X(t)$の covariance functionが$2k-2$回微分可能で$2k$回以上は微分出来ない。

iii) $X(t)$の表現の kernel Fについて

$$F(0)=F'(0)=\cdots\cdots=F^{(k-2)}(0)=0, \quad F^{(k-1)}(0)\neq 0$$

である。

等がある。これらはいずれも同等な条件で, それが成り立つときQの次数は$N-k$である。特に狭義N重 Markov processの見本過程は$N-1$回微分可能で, $N-1$次導函数は任意のε $(0<\varepsilon<1/2)$と任意のCに対して$H(\varepsilon, C)$に属する。

§III.5 補 足

最後にこの節では今までの schemeの中で述べ得なかった若干の事項を補足すると共に, 残された未解決の問題の中, 重要と思われるものを説明する

Sem. on Probab.
Vol.7 1961年
P1-106

ことにする。

1) §I.6で予告したことに関連するが，$X(t)$ が stationary の場合に non-canonical な表現はどのようなものであるかを調べてみよう。一般論（Karhnen [1]）からはG－函数として，G_0でないようなものをとって，それから random measure と kernel を作って$X(t)$を表現したものが non-canonical な表現だといえるが，こゝでは$X(t)$がN重 markov process の場合に canonical でない表現の典型的なものを具体的に構成してそれが持つ意味なども考えたい。

$X(t)$がN重 markov stationary process だから canonical representation に対応するG－函数（すなわちG_0）は(22)のようにかけている。そして多項式PはG－函数の性質からその零点はすべて負（複素数も含めれば実数部が負）でなければならない。何故なら若しPが正の零点をもてば，$G(w)$は下半平面で pole をもち，regular でなくなるからである。この性質はGがG_0であると否とにかゝわらず常に要求される。それではQにはPと共通因数をもたないということの他にどんな条件が要求されるかが問題になる。

定理III.6　N重 markov stationary process $X(t)$の表現の kernel をFとし，対応するG－函数が

$$(41)\qquad G(\lambda)\left(=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-i\lambda t}F(t)\,dt\right)=\frac{Q(i\lambda)}{P(i\lambda)},\qquad P,\ Q：多項式$$

となったとする。このときFが canonical kernel であるための必要且十分な条件は，Qが正（実数部正）の零点をもたないことである。

証明　canonical kernel に対応するG－函数を$Q_0(i\lambda)/P_0(i\lambda)$とすると，$P_0$はN次　Q_0は高々N－次の多項式である。若し(41)のPがN＋k次（$k>0$）ならば

$$(42)\qquad \left|\frac{Q(i\lambda)}{P(i\lambda)}\right|^2=\left|\frac{Q_0(i\lambda)}{P_0(i\lambda)}\right|^2$$

であるから，$\alpha_1,\cdots\cdots,\alpha_k$が存在して，$e^{i\alpha}$を無視して

$$\frac{Q(i\lambda)}{P(i\lambda)}=\frac{Q_0(i\lambda)}{P_0(i\lambda)}\cdot\frac{(i\lambda-\alpha_1)}{(i\lambda+\alpha_1)}\cdots\cdots\cdot\frac{(i\lambda-\alpha_k)}{(i\lambda+\alpha_k)}$$

とかける。$\alpha_i,\ i=1,2,\cdots\cdots,k$ がすべて正でなければならないことはG－函数の性質から出る。故にQは正の零点をもつ。

このことから(41)のPがN次であるとして，定理を証明すればよいことがわかる。しかも(42)と$P(i\lambda)$の零点の位置に関する制限から，（必要あれば

Sem. on Probab.
Vol.7 1961年
P1-106

同じ常数を，P, Q にかけて）

$$P(i\lambda)=P_0(i\lambda)$$

としてよいことが知られる。再び(42)を用いれば

(43) $$|Q(i\lambda)|^2=|Q_0(i\lambda)|^2$$

が成り立つからQに残された自由性はQ_0の零点の符号をかえることしかない。故にQ_0が正の零点をもたないことを言えば定理は証明されたことになる。

今$Q(\lambda)=0$が正根λ_0をもったとすれば

$$\varphi(u)=\begin{cases}0 & u>0\\ e^{\lambda_0 u}, & u\leq 0\end{cases}$$

はL^2に属し

$$\int_{-\infty}^{t}F(t-u)\varphi(u)du\equiv 0, \qquad t<0$$

となることが，初等的な計算によって確かめられる。故にFはcanonical kernel でない。(定理I.7) すなわちQ_0は正の零点をもち得ない。

〔註〕例III.2及び例III.4についてQの形のみれば この定理の例になっている。又、例III.2と同じprocessをnon-canonical kernel を用いて表現しようとすれば例えばG－函数として

$$\tilde{G}_2(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{-3+i\lambda}{(1+i\lambda)(2+i\lambda)}$$

をとればよい。

この定理によって，N重markov processの表現のcanonical property はQの零点の位置に反映することがわかった。それでは，Qの零点がすべて正であるようなG函数にはどんな(non-canonical)な表現が対応するかを調べることも興味ある事である。このような表現は，いわば backward canonical ともいうべきもので，$X(t)$, $t\geq t_0$, からその表現のrandom measure $dB_0(t)$, $t\geq t_0$が求められる。Levy[2]では，特殊なhomogeneous kernel をもつprocess を例にとって，backward canonical representation が研究されているが，(23)の変換をすれば，今考えているstationary process の backward canonical な表現の研究になっている。しかしこのような表現の詳しい性質はまだよく知られていない。

Sem. on Probab.
Vol.7 1961年
P1-106

(註) discrete parameter の場合には，藤井光昭氏によって研究されて居り，prediction の問題にも役立つことなどが知られている。

又定理Ⅲ.6によってFがcanonical kernel でないと判定された場合には(41)におけるQの正の零点はすべて符号をかえてそれを新たにQとし，(Pはそのまゝにして) Q/Pの Fourier 変換をとれば，それがcanonical kernel になっている。N重 markov processのG函数でありながらPがN次以上の多項式であるときは，この操作をすれば，PとQとに共通因数が現われ，それを約すことによってPはN次の多項式になる。

2°) N重markov stationary process はそのcanonical kernelが一般の指数函数からなる特殊なものではあるが，その従属性についての特徴をみれば，重要なしかも典型的なクラスであるといえる。ところで

$$(43) \qquad X(t)=\int_{-\infty}^{t}(t-u)^{\alpha-1}e^{-(t-u)}\,dB_0(u) \qquad \alpha>\frac{1}{2}$$

をみると，αが自然数であれば(狭義)α重 markov であるような，やはり典型的な process になっている。

若し，D^α を Riemann-Louville の意味でのα次の differential operator とするとき

$$e^{-t}D^{\alpha}e^{t}X(t)=B_0'(t)$$

といった形式的な微分方程式を満足する。同じく形式的にいって$e^{-t}D^{\alpha-1}e^{t}X(t)$は Ornstein-Uhlenbeck の Brownian motion になる。そして$X(t)$のG-函数でG_0にあたるものは

$$\frac{C}{(1+i\lambda)^{\alpha}}$$

となっていて，αが自然数でないときも自然数のときと同じ形をしているので強いていえばα重 markov process といってもよいような process である。

しかしαが整数でないときは上のD^αが local operatorでないので，αが整数の場合にみられるような，従属性に関する簡単な性質は，見出すのが困難のように思われる。$X(t)$の確率論的な性質が，いろいろと詳しく知られたならばN重 markov 性の拡張として，αが整数でないときのα重 markov 性を定義する手掛りを与えてくれることが予想される。

(註) P. Lévy〔5〕には，dB_0を additive random measure にしてprocess の見本過程を調べる研究がある。

Sem. on Probab.
Vol.7 1961年
P1-106

又§III.3の$M_2(t)$ process を stationary process に変換した$X_2(t)$ process はそのスペクトル測度の density を N重 markov stationary process のものと比較すれば無限重 markov process と云いたい。(§III.3の最后に述べたことを参照)。しかしそれには異論もあろうかと思う。(43)のような簡単な形で表わされることは期待出来ないだろうが、markov性の重数が整数でなくて、しかも有限であるようなものと考えた方がより自然であるかもしれない。

3°) つぎにやゝ違った立場からn重 markov process を考えてみる。そのために先ず Markov 過程論で知られているつぎの事実に注意する。

"n次元 Markov process があり、それに対応する半群$\{T_t, t\geq 0\}$が$\mathbb{C}(R^n)$を$\mathbb{C}(R^n)$に写し、調和測度$H_G(x, dy)$も作用素として、連続函数を連続函数に写すとする。しかもpathは高々第1種不連続で右連続とする。そのとき、遷移確率$P(t, x, dy)$に対して、invariant measure $m(dt)$が存在する。"

いまとくに$m(R^n)<+\infty$ならば本質的に K. Itô[2](P. 371)と同じような方法で、ある確率空間$\Omega(B, P)$の上に stationary process $\{X(t, w), -\infty<t<+\infty\}$でつぎのような関係をみたすものを構成できる:

任意の有界な$f\in\mathbb{C}(R^{n\times k})$と、任意の$t_1<t_2<\cdots\cdots<t_k$に対して

$$E_x f(X(t_1, w), X(t_2, w), \cdots\cdots, X(t_k, \omega))\}$$
$$=\underbrace{\int_{R^n}\cdots\int}_{k} f(x_1, \cdots\cdots x_k)\, P(t_k-t_{k-1}, x_{k-1}, dx_k)\, P(t_{k-1}-t_{k-2}, x_{k-2}, dx_{k-1})$$
$$\cdots\cdots P(t_2-t_1, x_1, dx_2)\, m(dx_1)$$

また上のことから、$g\in\mathbb{C}(R^n)$で$\int_{R^n} g^2(x)m(dx)<+\infty$なる函数$g(x)$を1つ固定して $X(t, w)=(X_1(t, w), \cdots\cdots, X_k(t, w))$, に対して

$$Y(t, w)=g(X_1(t, w), \cdots\cdots, X_k(t, w)), \quad -\infty<t<+\infty,$$

とおけば、$\{Y(t, w), -\infty<t<+\infty\}$はまた1つの stationary process を得る。

しかもいずれも strictly stationary process で、また$m(R^n)=+\infty$のときも本質的に同じようなことができる。

(以上の事実については G. Maruyama and H. Tanaka [1], [2] 参照)

いま任意の$x=(x_1, x_2)\in R^2$, $y=(y_1, y_2)\in R^2$に対して平均ベクトルが$(e^{-\alpha_1 t}x_1, \ e^{-\alpha_2 t}x_2)$で分散行列

Sem. on Probab.
Vol.7 1961年
P1-106

$$\begin{pmatrix} \frac{\beta_1^2}{2\lambda_1}(1-e^{-2\lambda_1 t}), & \frac{\beta_1\beta_2}{\lambda_1+\lambda_2}(1-e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}) \\ \frac{\beta_1\beta_2}{\lambda_1+\lambda_2}(1-e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}), & \frac{\beta_2^2}{2\lambda_2}(1-e^{-2\lambda_2 t}) \end{pmatrix}$$

なる2次元 Gauss 分布を遷移確率 $P(t, x, dy)$ として持つ2次元拡散過程を考えると、これは上の結果より再帰になっている。ただし λ_i, β_i は $F(t-u)\equiv\sum_{i=1}^{2}\beta_i e^{-\lambda_i(t-u)}$ が2重 Markov process の canonical kernel になるようにとってある。したがって λ_i $i=1,2$, は正の定数になっている。そのときの invariant measure は平均ベクトルが0ベクトルで、分散行列が

$$\begin{pmatrix} \frac{\beta_1^2}{2\lambda_1}, & \frac{\beta_1\beta_2}{\lambda_1+\lambda_2} \\ \frac{\beta_1\beta_2}{\lambda_1+\lambda_2}, & \frac{\beta_2^2}{2\lambda_2} \end{pmatrix}$$

なる Gauss 分布になっている。そこで上の g として、$g(t)=x_1+x_2$ とおいて上の意味で stationary process $\{Y(t,w), -\infty<t<t+\infty\}$ が得られる。これが丁度 $F(t-u)$ を canonical kernel とする2重 Markov process の1つの version を与えている。

以上のことは容易にわかるように定常な n 重 Markov process で、canonical kernel が $F(t-u)\equiv\sum_{i=1}^{n}\beta_i e^{-\lambda_i(t-u)}$ となるようなものに対しては上の意味で生成作用素が

$$\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\beta_i\beta_j}{\lambda_i+\lambda_j}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\ x_i\frac{\partial}{\partial x_i}$$

なる再帰な Markov process と、函数 $g(x)=x_1+\cdots\cdots+x_n$ が対応している。しかも canonical な表現の理論を用いると一次元 Brownian motion $\{B_0(t,w), -\infty<t<+\infty\}$ があるとき、それを用いて上の Markov process の version も作れるし、また常数な n 重 Markov process (特に断わっていないが Gauss) の研究は n 次元 Markov process の特定な形の functional の研究とみることもできる。

そこで gaussian process 以外の n 重 Markov 性という概念は linear process 以外については明確になっていないと思われるが、そのような概念およびそれに附随する性質をつかむために、上の事実は一つの参考資料になるように思える。すなわち、ある種の stationary process の

Sem. on Probab.
Vol.7 1961年
P1-106

底には基本的な Markov process が埋蔵されていると考え，目的のものが，その基本的なものの如何なる型の functional であるかという具合に考える。そうして，その基本的なものと functional の型との組と目的の process の従属性との相互関係を調べるというような考え方も可能なように思える。例えば上の2次元の例で基礎になるものは同じにして，$g(x)$ を $g(x)=x_1^3+x_2^3$ とおいてできる $\{\tilde{Y}(t,w),\ -\infty<t<+\infty\}$ は $g(x)=x_1+x_2$ に対してできるものと従属性の立場からはそれ程の相異はないように思えるが，もはや $\tilde{Y}(t,w)$ は Gauss ではない。また Markov process についての random time change を考慮に入れると functional としては，linear なものとは違ったものも考えられるだろう。またこのような立場からは 2°) の $X(t)=\int_{-\infty}^{t}(t-u)^{\alpha-1}e^{-(t-u)}dB_0(u)$, $\frac{1}{2}<\alpha<1$ の時はそこに埋蔵されている基本的な Markov 過程は生成作用素が $\frac{1}{2\lambda_1}\frac{d^2}{dx^2}-x\lambda_1\frac{d}{dx}$ なる所謂 Uhlenbeck の Brownian motion と考えられるであろう。

それから非常におおまかな言い方をすれば，表現を求めるということは，それに埋蔵されている基本的な Markov process をみつけるということと云えるかも知れない。

以上 3°) でのべたことは直観的な感じという段階の推論が多いが，Gaussian process 以外の n 重 Markov 性の研究にとって通常の Markov process の結果が一つの研究手段となるということを指摘したいのがいまの目的である。

Sem. on Probab.
Vol.7 1961年
P1-106

附　　録

Linear processの表現と多重markov性

この章ではprocessを表現するという問題に関してはGaussian processと類似の取扱いができるlinear processについて述べる。それは前書きに書いたLévyの式(*)において至がlinearになり、しかもGaussian processでないものを含む典型的な例である。

最初に従属性によるGaussian processの特徴づけをして、linear processがその性質のどれだけを持つものであるかを明らかにする。(§A.1) その類似点だけをとり立して、多重markov性がGaussian processと同様に定義されることをみる(§A.2) 大部分に定常性を仮定したのは取扱いを簡単にするためとstationary processについて既に知られている結果を使用するためである。

尚、この章はGaussianでないprocessを扱っていることと、系統的に述べるというより、むしろ知られた結果を紹介するという点に重点をおいたことのために敢て附録とした。

§A.1 Linear process

Gaussian processの著しい特徴の一つは各瞬間における値が互に他とlinearな関係にあることである。詳しくいえば $X(t)$, $t\in T$ をGaussian processとし、S を T の任意の部分集合とするとき $X(t)$ は、$X(\tau)$, $\tau\in S$, のlinearな函数 U と $\{X(\tau);\ \tau\in S\}$ と独立な V とによって

(1)　　$X(t)=U+V$

と表わせる。このとき U は条件つき平均値 $E(X(t)/X(\tau),\ \tau\in S)$ に他ならない。本論ではこの性質が基本的な役割を演じていた。

それでは(1)のような分解が可能なものはGaussian process以外にどんなものが考えるだろうかということになるが、その解答は次の基本定理から導かれる。Tが二点のみからなる特別な場合として

<u>定理 A・1</u>　(Lévy)　確率変数 X, Y を $\Omega(\mathcal{B}, P)$ で考える。もし X と Y が

Sem. on Probab.
Vol.7 1961年
P1-106

$$(2)\quad \begin{cases} Y = aX + V, & V, X \perp \\ X = bY + V', & V', Y \perp \end{cases}$$

と表わせるならば，次の三つの可能性しかない。

i) XとYは独立（従って $a = b = 0$

ii) XとYとは一次関係がある。（従って $ab = 1$）

iii) X，Yは Gaussian system をなす

説明には次の補題が必要である。

補題． f_1, f_2, f_3, f_4 を局所可積分な函数，$ad - bc \neq 0$，$abcd \neq 0$ とするとき，すべての X，Y について

$$(3)\quad f_1(ax - by) + f_2(x) = f_3(cx - dy) + f_4(y)$$

が成り立てば，f_1, f_2, f_3, f_4 はすべて高々2次の多項式である。

証明． 上式の両辺と $\varphi(y) \in \mathcal{D}$ との convolution を作れば，$\varphi(\frac{y}{b}) = \varphi_b(y)$，$\varphi(\frac{y}{d}) = \varphi_d(y) \in \mathcal{D}$ だから，等式

$$\frac{1}{b}(f_1 * \varphi_b)(ax) + f_2(x)\int \varphi(y)\,dy = \frac{1}{d}(f_3 * \varphi_d)(cx) + \int f_4(y)\varphi(y)\,dy$$

において，左辺の第二項以外はすべて C^∞ に属する。$\int \varphi(y)\,dy \neq 0$ なる φ をとれば $f_2 \in C^\infty$ がわかる．同様に $\varphi(x)$ との convolution を考えれば f_4 も C^∞ に属することがわかる。

次に $ax - by = u$，$cx - dy = v$ なる変数変換をすれば仮定から u, v は独立変数になり，(3) は u, v の函数の関係式になる。そこで再び上と同じ操作をすれば f_1 も f_3 も C^∞ に属することがわかる。

故に (3) に $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$ を施すことができて

$$ab f_1''(ax - by) = cd f_3''(cx - dy)$$

がすべての x, y について成立する。$ad - bc \neq 0$ の仮定により f_1'' も f_3'' も常数でなければならないことがわかる。故に f_1 も f_3 も高々2次多項式である。次に (3) で x を常数とみれば f_4 が，y を常数とみれば f_2 がそれぞれ高々2次の多項式であることがわかる。

定理の証明． X，Y がそれぞれ (2) のように表わせて i) の場合でも ii) の場合でもないとする。そのとき (2) の a, b は共に 0 でなく，又 $ab \neq 1$ が出る。X，Y，V および V' の特性函数をそれぞれ $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ および φ_4 で表わし，$\log \varphi_i = \psi_i$，$i = 1, 2, 3, 4$，とし，X，Y の同時分布の特性函数を $\varphi(u, v)$ とすれば

Sem. on Probab.
Vol.7 1961年
P1-106

$$(4) \qquad \log\varphi(u,v)=\log E\left[e^{i(uX+vY)}\right]=\psi_1(u+av)+\psi_3(v)$$
$$=\psi_2(v+bu)+\psi_4(u)$$

が成り立つ。各ψ_iは原点の近くで連続，従ってそこで可積分だから補題の証明でφの carrier が原点の十分近くあるようにすれば，$ab-1 \neq 0$，$ab \neq 0$と併せて，各ψ_iが高々2次の多項式であることが出る。又 i), ii) の場合でないことからψ_iのどれでも1次式ではないことがわかり，(X, Y)がGaussian system をなすことが証明された。

以上の準備の下で，本節の冒頭にあげた問題に対する解答が次の定理 (Lévy [5] §III. 2) から得られる。

定理 A.2 (Lévy)　$X(t)$，$t\in T$，は平均0，分散有限な stochastic process で$\{X(t);\ t\in T\}$の張る$L^2(\Omega)$の部分空間は separable であるとする。若しTの任意の部分集合Sに対して(1)の分解が可能ならば，Tは

$$T=T_0+\sum_{n=1}^{\infty}T_n \qquad (\text{直和})$$

と分解出来て

i) $\{X(t);\ t\in T_0\}$は Gaussian system である。

ii) $\{X(t);\ t\in T_m\}$と$\{X(t);\ t\in T_n\}$，$m\neq n$，は独立な system である。

iii) $\{X(t);\ t\in T_n\}$，$n\neq 0$，は唯一つの random variable から生成される$L^2(\Omega)$の(1次元)部分空間である。

証明　$P(X(t)=0)=1$なるtはないとしても一般性を失わない。先ず少くとも一つ Gaussian であるような$X(t)$が存在したとする。$\{X(t);\ t\in S\}$が Gaussian system であるようなSの極大集合を$T_0\ (\neq\phi)$とする。明らかに$\{X(t);\ t\in T_0\}$は Gaussian system になる。

今$T_0\ni t$，$T_0^c\ni S$なるt，Sを任意にとると，(1)を満足するという仮定から（特にSが一点のみの場合として）$X(t)$と$X(S)$は(2)の分解が可能である。

$$(5) \qquad X(t)=aX(S)+V, \qquad X(S),\ V \perp\!\!\!\perp$$

こゝで$S\notin T_0$だからVは0にはなり得ない。

上式において$a\neq 0$と仮定しよう。$aX(S)$とVとは互に独立で，その和が Gaussian ($t\in T_0$)だから$X(S)$もVも Gaussian でなければならない。ところが$S\notin T_0$なることから適当な有限個の$t_1, t_2, \cdots\cdots, t_n\in T_0$をとる

Sem. on Probab.
Vol.7　1961年
P1-106

と

$$(X(s),\ X(t_1), \cdots\cdots, X(t_n))$$

が Gaussian system でない。一方（1）の分解が可能であることから $S=\{t_i;\ 1\leqq i\leqq n\}$ とすれば

$$X(s)=\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu X(t_\nu)+V', \qquad \{X(t_\nu)\},\ V' \perp\!\!\!\perp$$

とかける。従って V' も Gaussian でなければならないから $(X(s), X(t_1), \cdots\cdots, X(t_n))$ は Gaussian system である。すなわち $s\in T_0$ となり矛盾故に $a\neq 0$ ということはない。

上の結果から，$s\notin T_0$ なる s をとれば $X(s)$ は決して Gaussian ではあり得ないことも知られる。故に T_0 は極大集合であるばかりでなく最大集合でもある。

我々は（5）における a は 0 でなければならないことを知ったが，それは，$X(t)=V$ すなわち $X(s)$ が $X(t)$ と独立であることがわかる。実際は更に強く，$X(s)$ が $\{X(t);\ t\in T_0\}$ と独立であることが証明される。何故なら，(1) で $S=T_0$ のときを考えると

$$X(s)\sum_{t_\nu\in T_0} a_\nu X(t_\nu)+V'', \qquad V'',\ \{X(t);\ t\in T_0\} \perp\!\!\!\perp,\ \{t_\nu\} \text{ は可附番個}$$

とかける。（separable という仮定から (1) の U は上式の右辺の第 1 項のようにかける。）しかし，$X(s)$ は $L^2(\Omega)$ の要素と考えてすべての $X(t_\nu)$ と直交するから $X(s)=V''$ が出る。よって $X(s)$ と $\{X(t);\ t\in T_0\}$ とが独立であることがわかる。

次に T_0^c を次の同値律に従って類別しよう。

$$S\sim S' \iff \exists c\neq 0\quad P(X(s)=cX(s'))=1$$

これによって類別された類を $\{T_\alpha\}$ とかくと

$$T=T_0+\sum_\alpha T_\alpha \qquad (\text{直和})$$

となる。$\{X(t);\ t\in T_\alpha\}$ は $L^2(\Omega)$ の一次元部分空間であることは明か，又 $\alpha\neq\alpha'$ ならば任意の $t_\alpha\in T_\alpha$ と $t_{\alpha'}\in T_{\alpha'}$ に対して (2) の分解が可能であることから，定理 A.1 における i), ii), iii) の何れかの場合でなければならない。$\alpha\neq\alpha'$ だから ii) ではなく，又 iii) でないことはすでに注意した。故に $X(t_\alpha)$ と $X(t_{\alpha'})$ とは独立でなければならない。それは $\{X(t);\ t\in T_\alpha\}$ と $\{X(t);\ t\in T_{\alpha'}\}$ との独立を意味する。$\{T_\alpha\}$ が可算個であることは separability から明か．かくして定理は証明された。

Sem. on Probab.
Vol.7 1961年
P1-106

この定理は(1)を満足するような process は質本的には Gaussian process しかない。(それに独立な random variable をつけ加えたもの)ことを示して居り、processの表現を問題にする我々の立場からは(1)の性質が Gaussial process の特徴づけになっていることが知られた。以下において我々は本論で扱った Gaussian random measure を用いる表現から additive random measure を用いる表現への一般化を試みるが、前述の注意は、仮令その相違を explicit に注意しないにもせよ、常に念頭におくべき事である。

それでは、Gaussian process を含めたより広いクラスを扱うために、しかも今迄用いてきた研究方法が適用可能な範囲の process をきめるために、条件を弛めて(1)の分解でSを任意の部分集合とはしないでTの左側すなわち$(-\infty, S]\cap T$といった形の集合に限るとしたらどうであろうか? 例えば dZ を2次の monent をもつ additive process から導かれる random measure (additive random measure) とし、2次の平均収束の意味での積分

$$X(t)=\int_0^t F(t,u)\,dZ(u)$$

より$X(t)$が定義されるような場合には、もし $\mathfrak{M}_t(Z)=\mathfrak{M}_t(X)$ (§I.3 と同じ意味) ならば、任意のtと$s(<t)$に対して

$$X(t)=\int_0^s F(t,u)\,dZ(u)+\int_s^t F(t,u)\,dZ(u)$$

が成立する。それは右辺の第1項をU、第2項をVとして(1)の分解に相当する。Caussian process の場合で甘君どの場合にそのような形で議論した。このような分解が可能であるような process は linear な表現を問題にする限りでは Gaussian process と同様な取扱いが出来る筈であるし、又上の例からもわかるように Gaussian process を含み、それよりも相当広いものであると予想される。

我々が研究目標とする process の正確な定義をする前に本章での仮定や用いる記号などを一括して整理しておくことにする。

parameter の空間は今迄通り$(-\infty,\infty)$, $(0,\infty)$又は実数の有限区間とし、$X(t)$, $t\in T$は、平均は恒等的に0、分散は有限と仮定する。分散有限の仮定から gaussian process の場合と同様に$\{X(\tau):\tau\leq t\}$の張る$L^2(\Omega)$の部分空間$\mathfrak{M}_t=\mathfrak{M}_t(X)$および$\mathfrak{M}=\bigcup_{t\in T}\mathfrak{M}_t$が定義出来る。$\mathfrak{M}_t^\perp$を

Sem. on Probab.
Vol.7 1961年
P1-106

$\mathfrak{M}$ における $\mathfrak{M}_t$ の orthogonal complement とする。

$$U(S,t) = \text{projection of } X(t) \text{ on } \mathfrak{M}_S$$

$$V(S,t) = \text{projection of } X(t) \text{ on } \mathfrak{M}_S^{\perp}$$

によって U, V を定義すれば $X(t)$ は任意の，t, S に対して，

$$(6) \qquad X(t) = U(S,t) + V(S,t)$$

と表わされる。$EX(t)=0$ という仮定から

$$EU(S,t)=0, \qquad EV(S,t)=0$$

は明か。又 $S \geq t$ ならば $X(t)=U(S,t)$，従って $V(S,t)=0$ であることを注意する。

定義A.1　任意に固定した t に対して $\mathfrak{M}_t$ と $\mathfrak{M}_t^{\perp}$ とが独立であるとき $X(t)$ を linear process と言う

（註）Lévy はこのような process を function aléatoires à corrélation linéaire と呼んでいる。（Lévy (5)）

定理A.3（Lévy (5) §III.8）．$X(t)$ が linear process ならば任意に固定した t'' に対して $U(t,t'')$ は $t\ (\leq t'')$ を parameter とする additive process である。

証明　r.v. X の $\mathfrak{M}_t$ への projection を $p_t X$，$\mathfrak{M}_t^{\perp}$ への projection を $p_t^{\perp} X$ とかく．$t \leq t' t''$ なる任意の t, t' について

$$U(t',t'') - U(t,t'') = p_{t'} X(t'') - p_t X(t'')$$

$$= \left[X(t'') - p_t X(t'')\right] - \left[X(t'') - p_{t'} X(t)\right]$$

$$= p_t^{\perp} X(t'') - p_{t'}^{\perp} X(t'')$$

$$= p_t^{\perp} X(t'') - p_t^{\perp} p_{t'}^{\perp} X(t'') \qquad (\because \mathfrak{M}_{t'}^{\perp} \subset \mathfrak{M}_t^{\perp})$$

が成立つ。故に $U(t',t'') - U(t,t'')$ は $\mathfrak{M}_t^{\perp}$ に属することがわかり，それは，仮定から $\mathfrak{M}_t$ と独立である。ところが $U(S,t'')$，$S \leq t$ は $\mathfrak{M}_t$ に属するから，$U(t',t'') - U(t,t'')$ が $U(S,t'')$ $S \leq t$，と独立になる。故に $U(t,t'')$ は additive process である。

例A.1．　$X(t)$ が Gaussian process であれば linear である。実際 $E(X(t)/\mathcal{B}_S)$ が (6) の分解における $U(S,t)$ にあたる。さらに $X(t)$ が canonical representation $(dB, F(t,u))$ をもてば

Sem. on Probab.
Vol.7 1961年
P1-106

$$U(s,t)=\int^{s}F(t,u)\,dB(u) \qquad s\leq t$$

となり t を固定したとき，s を parameter とする additive process である。

例 A.2 additive process は linear process である。

$U(t,t)=X(t)$ に注意すれば，定理 A.3 は linear process が additive process の boundary value の如く考え得ることを示している。そして，例 A.1 のような Gausian process の場合の $U(s,t)$ の表現をみれば additive process $U(\cdot\, t)$ が，すべて（形式的にいって）絶対連続になるような additive random measure をさがせば，その measure による積分として $X(t)$ が表現されるであろうと予想される。このような random measure を求める方法として我々は今のところ Gaussian process の場合と同じく Hilbert 空間論的な方法をとることにする。

§ A.2 Stationary linear process

本節では $X(t)$，$t\in T$ は平均値が 0，分散有限である他に strictly stationary でもあると仮定する。又 stationary process を考えるときは parameter space T はいつも $(-\infty,\infty)$ としておく。

$X(t)$ が strictly stationary であれば，shift operator

$$T_h:\ X(t,\omega)\longrightarrow X(t+h,\omega)$$

が定義出来て，それはまた $\mathfrak{M}$ 上の linear operator にまで拡張される。

定理 A.4 $X(t)$ が strictly stationary linear process ならば

$$(8)\qquad \begin{cases} T_h U(s,t)=U(s+h,\ t+h) \\ T_h V(s,t)=V(s+h,\ t+h) \end{cases}$$

証明．$T_h X(t)=X(t+h)=U(s+h,\ t+h)+V(s+h,\ t+h)$

一方 T_h は linear operator だから

$$T_h X(t)=T_h\big(U(s,t)+V(s,t)\big)=T_h U(s,t)+T_h V(s,t)。$$

故に

$$T_h U(s,t)-U(s+h,\ t+h)=V(s+h,\ t+h)-T_h V(s,t)$$

となるが，$T_h V(s,t)$ は定義から直ちに $\{X(\tau);\ \tau\leq s+h\}$ と独立なことがわ

Sem. on Probab.
Vol.7 1961年
P1-106

かる。よって上式の両辺は互に独立になるから常数，実は 0，にならなければならない。

次に $X(t)$ の moving average representation を考えよう。簡単のため gaussian process の場合より強く（§I.5の $(\mathfrak{M}.1)$ は次の $(\mathfrak{M}.1')$ から出る）

$(\mathfrak{M}\,1')$ $X(t)$ は M_2-連続

$(\mathfrak{M}.2)$ $\bigcap_{t\in T}\mathfrak{M}_t=\{0\}$,　(purely non-deterministic)

を仮定しよう。そうすればよく知られているように（§III.1参照）orthogonal random measure $dZ(t)$ と $L^2(t)$ に属する F によって

(9)　$$X(t)=\int_{-\infty}^{t}F(t-u)\,dZ(u)$$

と表現することができる。こゝに $EdZ(t)=0$　$E(dZ(t))^2=dt$ である。しかも $\mathfrak{M}_t(Z)=\mathfrak{M}_t$ の意味で canonical（L^2-canonical と言うことにする）な表現が一意的に求まる。(9)を L^2-canonical な表現とすれば，$\{X(\tau);\tau\le s\}$ を知ったときの $X(t)$ $(t>s)$ の最良の linear predictor は $X(t)$ の $\mathfrak{M}_s$ への projection $U(s,t)$ であるが，それは

(10)　$$U(s,t)=\int_{-\infty}^{s}F(t-u)\,dZ(u)$$

とかくことができる。以后 $X(t)$ は L^2-canonical な表現を用いて(9)のようにかけているものとする。

定理A.5　$t_0\le t_1<t_2<\cdots<t_N<t_{N+1}$ なる任意の $\{t_i\}$ について

$$(\mathfrak{M}.4)\begin{cases}\{U(t_0,t_i)\},\ i=1,2,\cdots\cdots,N, & \text{は}\mathfrak{M}\text{の要素として常に一次独立}\\ \{U(t_0,t_i)\},\ i=1,2,\cdots,N,N+1 & \text{は}\mathfrak{M}\text{の要素として常に一次従属}\end{cases}$$

ならば，(9)における $F(t-u)$ は $u\le t$ なる範囲で

(11)　$$F(t-u)=\sum_{i=1}^{N}f_i(t)\,g_i(u)$$

と表わされ，$\{f_i(t)\}$ $i=1,2,\cdots\cdots,N$ はある N 階常数係数線型微分方程式の基本解系であり $\{g_i(u)\}$ $i=1,2,\cdots\cdots,N$ はその共軛な微分方程式の基本解系である。

証明．定理II.2 および定理III.1 の結果は gaussian process 固有の性質を用いて得たものではなく実は $(\mathfrak{M}.4)$ の性質のみから導かれていることに注意すれば，この定理の正しいことがわかる。（定理III.1の註，参照）

Sem. on Probab.
Vol.7 1961年
P1-106

この場合（M.3）の二番目の性質から，任意の $t_0=t_1<t_2<\cdots<t_N<t$ に対して，t の函数 $\{a_i(t;t_1,\ \ ,t_N)\}$，$i=1,2,\cdots,N$ が存在して

$$(12)\qquad \sum_{i=1}^{N} a_i(t:t_1,\cdots\cdots,t_N)\,U(t_1,t_i)=U(t_1,t)$$

となるように出来る。さらに（M.4）の初めの性質から $\{a_i\}$ は，t の函数として1次独立でしかもそれらは，一意的に定まることがわかる。

<u>定理 A. 6</u>　(9)のように表わされる *strictly stationary linear process* X(t)が（M.3）を満足すれば dZ は *temporally homogeneous* な *additive random measure* である。

<u>証明</u>　任意の t と S（<t）に対して仮定から

$$X(t)=\int_{-\infty}^{S}F(t-u)\,dZ(u)+\int_{S}^{t}F(t-u)\,dZ(u)$$

とかけて右辺の第2項は $\{X(\tau);\tau\leq S\}$ と独立である。また第1項は $U(S,t)$ でそれは定理 A.3から S を *parameter* とする *additive process* である。

すでに定理 A.5で示されているように $F(t-u)$ は t を固定したとき u の *analytic function* だから殆ど到る処0でなく $E(U(S,t)^2)$ は $S(\leq t)$ の連続な狭義増加函数であることに注意しよう。今

$$(13)\qquad \int_E d\widetilde{Z}_t(u)=\int_E \frac{1}{F(t-u)}\,dU(u,t),\qquad E\subset(-\infty,t],\ m(E)<\infty^{\ 2)}$$

によって *random measure* $d\widetilde{Z}_t$ を定義しよう。右辺の積分は Doob [2] Chap. IX, §5の意味に作用することができて，定理 A. 4より

$$T_h\int_E d\widetilde{Z}_t(u)=\int_E \frac{1}{F(t-u)}\,T_h\,d_uU(u,t)=\int_{E\ominus h}\frac{1}{F(t+h-v)}\,d_vU(v,t+h)$$

$$=\int_{E\ominus h} d\widetilde{Z}_{t+h}(u)$$

故に $(-\infty,\infty)$ 上の *Lebesgue measure* 有限な *Borel set* にまでこの *random measure* が拡張出来ることがわかり，それを $d\widehat{Z}$ でかけば，次の性質をみたす。

$$E\left(\int_E d\widehat{Z}\right)=0,\qquad E\left(\int_E d\widehat{Z}\right)^2=m(E)$$

---

1)　m は *Lebesgue measure* を表す

2)　$E\ominus h=\{v;\ v=u-h,\ \ u\in E\}$

Sem. on Probab.
Vol.7 1961年
P1-106

明かに

$$U(s,t)=\int_{-\infty}^{s}F(t-u)\cdot\frac{1}{F(t-u)}d_u U(u,t)=\int_{-\infty}^{s}F(t-u)\,d\hat{Z}(u)$$

このことは dZ は適当な version をとれば、additive random measure と考えてよいことを示している。

<u>定理 A.7</u>　(9)のように表わされる strictly stationary process が(M.4)をみたし、かつ

(M.5)　$\{X(t)-\sum_{i=1}^{N}a_i(t:t_1,\cdots t_N)X(t_i),\ t\geqq t_N\}$ と $\{X(\tau);\tau\leqq t_1\}$ と独立 $(t_1<t_2<\cdots<t_N<t)$

ならば $X(t)$ は linear process. 従って dZ は additive random measure である。たゞし $\{a_i\}$ は(12)で定まる t の函数である。

<u>証明</u>　定理 A.5 から(12)できまる $\{a_i\}$ は

$$\sum_{i=1}^{N}a_i(t;t_1,t_2,\cdots\cdots,t_N)f_j(t_i)=f_j(t)$$

を満足するように定まっている事がわかる。今 $U_j(t)=\int_{-\infty}^{t}f_j(u)dZ(u)$ とおけば(M.5)の条件から

$$\begin{aligned}
&X(t)-\sum_{i=1}^{N}a_i(t:t_1,\cdots,t_N)\sum_{j=1}^{N}f_j(t_i)U_j(t_i)\\
&=X(t)-\sum_{i=1}^{N}a_i(t:t_1\cdots,t_N)\left[\sum_{j=1}^{N}f_j(t_i)U_j(t_1)-\sum_{j=1}^{N}f_j(t_i)\{U(t_j)-U(t_1)\}\right]\\
&=X(t)-\sum_{j=1}^{N}f_j(t)U_j(t_1)-\sum_{j=1}^{N}f_j(t)\{U(t_j)-U(t_1)\}\\
&=\int_{\infty}^{t}F(t-u)dZ(u)-\int_{-\infty}^{t_1}F(t-u)dZ(u)-\sum_{j=1}^{N}f_i(t)\{U(t_j)-U(t_1)\}\\
&=\int_{t_1}^{t}F(t-u)dZ(u)-\sum_{j=1}^{N}f_i(t)\{U(t_j)-U(t_1)\}
\end{aligned}$$

が $\{X(\tau);\tau\leq t_1\}$ と独立になる。すべての t_j を t_1 に近づけると最后の式の第2項は0に収束し、第1項、すなわち $V(t_1,t)$ が $\{X(\tau);\tau\leq t_1\}$ と独立になる。それは $X(t)$ が linear process であることを示している。このことと前定理と併せて dZ が additive random measure であることが出る。

<u>定義 A.2</u>　Linear process が(M.4)を満足するとき、それを <u>N重 Markov linear process</u>[3] という

この言葉を使えば、定理 A.6 は次のように云える：(9)のようにかける N重 Markov linear process の random measure は <u>temporally homogeneous</u> で additive である。又定理 A.7 は(M.4)をみたし

3) Barthett (1) にも linear process の定義があるが、それは狭義 N重 Markov Gaussian process の表現の Gaussian random measure を、additive random measure にかえて(9)のようにかいたものと同じものを指している。

Sem. on Probab.
Vol.7 1961年
P1-106

(9)のようにかけている $X(t)$ については $(\mathfrak{M}.5)$ から linearity が出ると言いかえることができる。

<u>例 A.3</u>　$P_1(t)$, $t \geq 0$, と $P_2(t)$, $t \geq 0$ を互に独立な Poisson process で $EP_1(t) = EP_2(t) = t$ なるものとする。$P(t)$ を

$$P(t) = \begin{cases} P_1(t) - t & , t \geq 0 \\ -P_2(-t) - t & , t < 0 \end{cases}$$

によって定義し，$dP(t)$ を $P(t)$ から導かれる random measure とする。$dP(t)$ 明かに temporally homogeneous であり additive である。これを用いて

$$X(t) = \int_{-\infty}^{t} \left(2e^{-(t-u)} - e^{-2(t-u)} \right) dP(u)$$

によって定義される $X(t)$ は strictly stationary process になる。しかも kernel $2e^{-(t-u)} - e^{-2(t-u)}$ は L^2-canonical な kernel であり（例 III 2 参照）$(\mathfrak{M}.4)$ および $(\mathfrak{M}.5)$ をみたすことは明かである。よって $X(t)$ は 2 重 Markov linear process である。

この例からもわかるように，一般に temporally homogeneous additive random measure dZ を用いて (9) のように表わされる stationary process について，もし L^2-canonical kernel F が N 次の Goursat kernel であれば，それは N 重 Markov linear process である。

§A 3　<u>N 重 Markov linear process の見本過程</u>

本節では strictly stationary N 重 Markov linear process を stochastic integral（K. Itô [1] §9）を用いて表現することによって見本過程の性質を調べる。

$X(t)$ は (9) のように表わされる strictly stationary process で $(\mathfrak{M}.4)$, $(\mathfrak{M}.5)$ を満足するものとする。このとき dZ は temporally homogeneous, additive な random measure である.（定理 A.7）故に任意の a に対して

$$Z_a(t) = \int_a^t dZ(t) \quad , \qquad t \geq a$$

Sem. on Probab.
Vol.7 1961年
P1-106

はM_2-連続な additive process だから適当な version をとれば Lévy process になる。従って次のような見本過程の分解が可能である（Lévy-Itô 表現）

$$(14)\qquad Z_a(t,w)=\sqrt{v}\,(B_0(t,w)-B_0(a,w))+(P(t,w)-P(a,w))$$

右辺のB_0は Brownian motion で第1項をZ_aの Gaussian part 第2項を Poisson part という。第2項はさらに

$$(15)\qquad P(t,w)-P(a,w)=\int_a^t\int_{|s|>0}f(s)\,q(du\cdot ds,w)$$

とかける。こゝに measure $q(\cdot,w)$ は$Z_a(t,w)$の jump（jumpする時刻とその高さ）のみから次のようにして構成されるものである。wを固定したとき，$Z_a(t,w)$が時刻uで高さsだけ jump したとするとき，(u,s)を平面上の点と考えて，そのような点の全体を$J(w)$とかく。今$[a,\infty)\times R'$の Borel set Eに対して　$E\cap J(w)$の点の個数を$p(E,w)$とかけば，それは平均が

$$\pi(E)=\int_E du\frac{ds}{s^2}$$

の Poisson 分布に従い，$E\cap F=\phi$ならば$p(E,w)$と$p(F,w)$とは独立である。(15)におけるqはこのpから

$$q(E,w)=p(E,w)-\pi(E)$$

として作られたもので$\{q(E,w):E$は$[a,\infty)\times R'$の Borel set$\}$と$\{B_0(t,w)-B_0(a,w);\ t\geq a\}$とは独立である。（詳しくは，K. Itô [1], [2]，又は Seminar on Probability vol. 6. 第5章§2を参照）$Z_a(t)$が有限の分散をもつことから，$f(s)$は

$$\int f(s)^2\frac{1}{s^2}\,ds<\infty$$

をみたしている。

dZに対するこれらの結果を用いれば(9)の積分は

$$(16)\qquad X(t)=\int_{-\infty}^t F(t-u)\,dZ(u)=\int_a^t F(t-u)\,dZ_a(u)+\int_{-\infty}^a F(t-u)\,dZ(u)$$
$$=\sum_{i=1}^N f_i(t)\Big[\sqrt{v}\int_a^t g_i(u)\,dB_0(u)+\int_a^t\int_{|s|>0}g_i(u)\,q(du\,ds)\Big]$$
$$+\int_{-\infty}^a F(t-u)\,dZ(u)$$

Sem. on Probab.
Vol.7 1961年
P1-106

$a \longrightarrow -\infty$ として

$$= \sum_{i=1}^{N} f_i(t)\left[\sqrt{v}\int_{-\infty}^{t} g_i(u)\,dB_0(u) + \int_{-\infty}^{t} g_i(u) f(s)\, q(du\, ds)\right]$$

となる．こゝで上の dB_0 および dq にする積分は L^2－ノルムの意味で定義されていることに注意しよう。それは幸にも，適当な version をとれば，各々の積分は K. Itô〔1〕§9 で定義されているものと一致して (16) により見本過程が知られたと考えてよい．すなわち

$$(16)\quad X(t,\omega) = \sum_{i=1}^{N} f_i(t)\left[\sqrt{v}\int_{-\infty}^{t} g_i(u)\, B_0(du,\omega) + \int_{-\infty}^{t}\int_{|s|>0} g_i(u) f(s)\, q(du\, ds,\ \omega)\right]$$

によって見本過程が表わされる

かくして我々は本節の初めにあげた条件の下で次の定理を得る．

定理 A.8　$X(t)$ の殆んどすべての見本過程 $X(t,\omega)$ は Gaussian part $X_1(t,\omega)$ と Poisson part $X_2(t,\omega)$ とにわけられて

i)　$F(0)\neq 0$ ならば $X_1(t,\omega)$ は連続であるが，到る所微分不可能である。$X_2(t,\omega)$ は第1種不連続点のみをもち，その jump は $Z(t,\omega)$ の jump と1対1に対応する。

ii)　$F(0)=F'(0)=\cdots\cdots=F^{(k)}(0)=0$ で $F^{(k+1)}(0)\neq 0$ ならば $X_1(t,\omega)$ 及び $X_2(t,\omega)$ は共に k 回微分可能で $X^{(k)}(t,\omega)=X_1^{(k)}(t,\omega)+X_2^{(k)}(t,\omega)$ は i) と同じ性質をもつ。

証明　(16′) の積分を B_0 による部分と q による部分にわけて，それぞれ $X_1(t,\omega)$，$X_2(t,\omega)$ とする。$X_1(t,\omega)$ は Gaussian process の見本過程だからその連続性はすでに定理 III.5 で証明した。こゝでは $X_2(t,\omega)$ についてのみ証明すればよい。

(16) に現われる各積分は Lévy process であるが，すべて右連続な version をとっておくことにする。

i)　$F(0)\neq 0$ のとき

$$U_i(t,\omega) = \int_{-\infty}^{t}\int_{|s|>0} g_i(u) f(s)\, q(du\, ds,\omega)$$

とかけば，t_0 において $P(t,\omega)-P(a,\omega)$ $(a<t_0)$ が y だけ jump したとき $U_i(t_0,\omega)-U_i(t_0-0,\omega)=g_i(t_0)y$ である．故に $f_i(t)$，$i=1,2,\cdots,N$ が連続であることに注意すれば

$$X_2(t_0,\omega)-X_2(t_0-0,\omega) = \sum_{i=1}^{N} f_i(t_0)\left(U_i(t_0,\omega)-U_i(t_0-0,\omega)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} f_i(t_0) g_i(t_0) y = F(0)\cdot y$$

Sem. on Probab.
Vol.7 1961年
P1-106

よって $X_2(t,\omega)$ の jump point は $Z(t,\omega)$ の jump point と1対1に対応し，その jump の高さは $Z(t,\omega)$ のものの $F(0)$ 倍になっていることがわかる。

ii) $k=0$ のとき，すなわち $F(0)=0$，$F'(0)\neq 0$ のとき

$h>0$ として，$f_i(t)$ が微分可能であることに注意すれば

$$f_i(t+h)U_i(t+h,\omega)-f_i(t)U_i(t,\omega)=f_i(t+h)\big(U_i(t+h,\omega)-U_i(t,\omega)\big)$$
$$+\big(f_i(t+h)-f_i(t)\big)\ U_i(t,\omega)=\big(f_i(t)+f_i'(t)h+o(h)\big)g_i(t)\cdot o(1)$$
$$+\big(hf_i'(t)+o(h)\big)\ U_i(t,\omega)$$

i について加え，h で割れば

$$\frac{1}{h}\big(X_2(t+h,\omega)-X_2(t,\omega)\big)=\Big(\frac{1}{h}\sum_{i=1}^{N}f_i(t)g_i(t)+\sum_{i=1}^{N}f_i'(t)g_i(t)+o(1)\Big)\cdot o(1)$$
$$+\sum_{i=1}^{N}f_i'(t)\,U_i(t,\omega)+o(1)$$

$h\to 0$ とすれば

$$X_2'(t,\omega)=\sum_{i=1}^{N}f_i'(t)U_i(t,\omega)=\int_{-\infty}^{t}F'(t-u)\int_{|s|>0}f(s)\ g(du\,ds,\omega)$$

を得る。但しこの場合の $X_2'(t,\omega)$ は $X_2(t,\omega)$ の右微分の意味である。

再び $h>0$ とし，上と同様にして，$Z(t,w)$ の t で jump が $y(\neq 0)$ のときは

$$f_i(t)U_i(t,\omega)-f_i(t-h)U_i(t-h)=\big(hf_i(t)+o(h)\big)\ U_i(t,\omega)+$$
$$\big(-hf_i'(t)+o(h)\big)\big(g_i(t)y+o(1)\big)$$

となるから

$$\frac{1}{h}\big(X_2(t,\omega)-X_2(t-h,\omega)\big)=\sum_{i=1}^{N}f_i(t)\,U_i(t,\omega)-\Big(\sum_{i=1}^{N}f_i'(t)g_i(t)\Big)y+o(1)$$
$$\longrightarrow\sum_{i=1}^{N}f_i(t)\,U_i(t,\omega)-F'(0)\,y$$

である。これは $F'(0)=0$ のときのみ右微分と一致する。

$k\geq 1$ のときは，右微分と左微分が一致して $X_2'(t)$ について，$k=0$ のときの議論をくり返せばよい。かくして定理はすべて証明された。

この定理についての重要な注意は，任意の a について，見本過程 $P(t,\omega)-P(a,\omega)$，$t\geq a$ の jump（jump する時刻とその高さ）が $X_2(t,\omega)$ の jump

Sem. on Probab.
Vol.7 1961年
P1-106

から構成できるということである。簡単のために定理A.8で$F(0)\neq 0$のときを考えてみれば、このことは更に詳しく、$X_2(\tau,\omega)$のtまでのjumpから$P(\tau,\omega)-P(a,\omega)$の$t$までのjumpが知られることまでわかる。今$\mathcal{B}_t(X_2)$, $\mathcal{B}_t(P)$をそれぞれ$X_2(\tau)$, $\tau\leq t$, 及び任意のaについて$P(\tau)-P(a)$, $a\leq\tau\leq t$, を可測にする最小のBorel field $(\subset\mathcal{B})$とすれば 任意のtについて

$$(17)\qquad \mathcal{B}_t(X_2)=\mathcal{B}_t(P)$$

が成り立つ。

一方Gaussian partについては$\mathcal{B}_t(X_1)$, $\mathcal{B}_t(B_0)$を上と同様な意味に用いて

$$(18)\qquad \mathcal{B}_t(X_1)=\mathcal{B}_t(B_0)$$

は明かだから、定理A.8の結論と併せて(17), (18)より任意のtについて

$$(19)\qquad \mathcal{B}_t(X)=\mathcal{B}_t(Z)$$

ということがわかる。このような性質をもつような表現(16')は$\mathcal{B}$-canonicalな表現といってよいであろう。

しかし定理A.8の証明をみると(17)を示すだけならば(16)はL^2-canonicalな表現である必要はないことに気づくであろう。そのことに注意すれば次の例は重要な示唆を与えてくれることがわかる。

例A.4 $dP(t)$は例A.3におけるものと同じとして

$$(20)\qquad X(t)=\int_{-\infty}^{t}\left[3e^{-(t-u)}-4e^{-3(t-u)}\right]dP(u)$$

を考える。[ ]内はcanonical kernelではないから

$$\mathfrak{M}_t(X)\subsetneqq\mathfrak{M}_t(P)$$

であるが(17)(X_2をこゝでのXとして)は成り立つ。すなわち$X(t)$は$\mathcal{B}$-canonicalではあるがL^2-canonicalではない例である。勿論$X(t)$はlinear processでもない。

この例についてpredictionを考えてみよう。$X(t)$はorthogonal(もはやadditiveではない。)random measure dP^*によりL^2-canonicalに

$$X(t)=\int_{-\infty}^{t}\left[2e^{-(t-u)}-e^{-3(t-u)}\right]dP^*(u)$$

Sem. on Probab.
Vol.7 1961年
P1-106

と表わされる。そして $X(\tau)$, $\tau \leqq S$, が知られたときの linear predictor は

$$U(S,t)=\int_{-\infty}^{S}\left[2e^{-(t-u)}-e^{-3(t-u)}\right]dP^{*}(u)$$

であるが $\mathcal{B}_S(X)$ が知られたときの (non-linear) predictor は (20) より

$$\int_{-\infty}^{S}\left[3e^{-(t-u)}-4e^{-3(t-u)}\right]dP(u)$$

である。両者の predicton error (分散でみる) は後者の方が小さい。すなわち (20) の $X(t)$ は non-linear predictor の方が linear predictor よりも優れている例になっている。(Hida-Ikeda[1] 参照)

文　献

N. Aronszajn (1): Theory of reproducing kernels. Trans. Amer. Math. Soc. vol. 68. 337-404 (1950)

M.S. Bartlett (1): An introduction to stochastic process with special reference to methods and applications. Cambridge (1955)

Yu. K. Beljaev (1): Local properties of the sample functions of stationary Gaussian process. Theory of Prob. and its appl. V. 1, 128-131 (1960) (ロシヤ語)

J. L. Doob (1): The elementary Gaussian processes. Ann. Math. Stat. vol. 15. 229-282 (1944)

(2): Stochastic processes. Wiley (1952)

C. L Dolph and M. A Woodbury

(1): On the relation between green's functions and covariances of certain stochastic processes and its application to unbiased linear prediction. Trans. Amer Math. Soc. vol. 72, 519-550 (1952)

U. Grenander and M. Rosenblatt

(1) Statistical analysis of stationary time series. Wiley (1957)

I.M. Gelfand und A. M. Jaglom

(1) Über die Berechnung der Menge an Information über eine zufällige Funktion, die in einer anderen zufälligen Funktion enthalten ist. Arbeiten zur Informationstheorie II
(原論文 Y.M.H (1957) ロシヤ語)

T. Hida (1) P. Lévyによる Gaussian processの研究 (I), (II), (III) 数学の歩み 5巻4号, 5号, 6巻2号 (1958)

(2) Canonical representations of Gaussian processes and their applications Memoirs College of Sci. Univ. of Kyoto, A vol 33 Math no. 1. 109-155 (1960)

Sem. on Probab.
Vol.7 1961年
P1-106

T. Hida and N. Ikeda
[1]: Multiple Markov linear processes. (to appear)

G. A. Hunt [1]: Random Fourier transforms. Trans. Amer. Math. Soc. vol 71. 38-69 (1951)

E. L. Ince [1]: Ordinary differential equations. Dover (1926).

K. Itô [1]: On stochastic differential equations. Memoirs Amer. Math Soc. 4 (1951)
[2]: 確率論, 岩波 (1953)
[3]: Stochastic process. Tata Institute Note, Bombay. (1959)

S. Itô [1]: Hellinger-Hahnの定理について. 数学5巻2号 90-91 (1953)

K. Karhunen [1]: Über die Struktur stationärer zufälliger Funktionen Arkiv för Mat. 1. nr. 13. 144-160 (1950)

P. Lévy [1]: Processus stochastiques et movement Brownien. Gautier-Villars (1948)
[2]: Brownian motion depending on n parameters: The particular case n=5. Proc. Symposia in Applied Math. vol. 7 1-20 (1957)
[3] A special problem of Brownian motion and a general theory of Gaussian random functions. Proc. 3rd Berkeley Symp. on Math Stat. and Prob. vol. II. 133-175 (1956).
[4]: Sur une classe de courbes de l'espace de Hilbert et sur une equation integrale non lineaire. Ann. École Norm. Sup. tom. 73. 121-156 (1956)
[5]: Fonction aléatoires à correlation linéaire. Illinois Journal of Math. vol. 1 217-258 (1957)

G. Maruyama and H. Tanaka
[1]: Some properties of one-dimensional diffusion processes Memoirs Fac. Sci. Kyūshū Univ. Ser. A. XI. 2, 117-141 (1957)

Sem. on Probab.
Vol.7 1961年
P1-106

〔2〕: Ergodic property of n-dimensional recurrent Markov process Memoirs Fac. Sci. Kyūshū Univ. Ser. A. XIII. 2, 157-172 (1959)

L. Schwartz 〔1〕: Théorie des distribution I. II Hermann & C^{ie} (1950)

T. Seguchi and N. Ikeda

〔1〕: Note on the statistical inferences of certain continuous stochastic processes. Memoirs Faculty of Sci. Kyūsyū Univ. Ser. A. vol. 8. no. 2, 187-199 (1954)

T. Sirao 〔1〕 確率論における強法則の精密化の一般論, Seminer on Probability vol. 2 (1960)

K. Yosida 〔1〕 ヒルベルト空間論 共立全書 (1953)

Sem. on Probab.
Vol.7 1961年
P1-106

1961. 3. 発 行　　確率論セミナー