Sem. on Probab.
Vol.3 1960年
P1-94

SEMINAR ON PROBABILITY

vol. 3

伊藤　清，渡邊　信三，福島　正俊；拡散過程

1960

確率論セミナー

Sem. on Probab.
Vol.3 1960年
P1-94

前書き

この報告は第一章 markov process の一般論、第二章一次元の拡散過程の二部に分れる。目的は標題の示すように第二章にあるが、準備の章として第一章をそえた。

一次元の拡散過程は一次元の state space をもつ continuous path の markov process である。第一章で説明するように markov process は generator できまる。

一次元の diffusion の generator については"適当な条件の下で"いろいろの研究があった。まず 1931 年に Kolmogorov〔12〕が generator が二階の微分作用素となることを示し、Feller は与えられた二階の微分作用素から、これを generator とする diffusion を解析的に構成し〔2〕、私は stochastic differential equation〔11〕を用いて確率的に path を構成した。

しかしながら、完全に一般の条件の下でこの問題を解くためには、一つの本質的な飛躍が必要であった。定義から明らかであるように、一次元の拡散過程は全く位相的な概念で、differential structure が介入する余地はない。従って generator として微分作用素という differential structure を基礎とする概念をもち出すのは不自然である。

この必要な飛躍を可能ならしめた第一歩は semi-group に関する Yosida-Hille の理論である。これによって markov process が全く抽象的にとりあつかうことができるようになり、generator の本質が明らかにされた。Feller はこの理論を拡散過程の場合に応用し、更に微分作用素なる概念の位相的拡張である、local operator を用い、ついに全く一般的条件の下で一次元の拡散過程の generator を決定した〔3〕〔4〕。その後 Ray〔17〕、Dynkin〔1〕は strong markov property の重要性を指摘し、私と McKean とは与えられた Feller operator を generator としてもつ問題を考え、Lévy の local time〔15〕を用いて、この問題をといた。最近 P. Lévy も同じ解法を発表している。ここでのべるのはこれらの理論の基本的な部分である。Feller の理論の説明には Feller の解析的方法によらず Dynkin の確率論的方法によった。

第一章と第二章の §10 は渡辺信三君が執筆、第二章 §§1-4 は福島正俊君、§5-9 は私が執筆した。内容は多く 1957-58 年京大における McKean

Sem. on Probab.
Vol.3 1960年
P1-94

の講義と 1959－60年の Tata Institute と京大における私の講義からとった．

尚本報告の印刷校正について京大教養部池田信行氏．渡田武彦氏はじめ京大大学院の確率セミナールの諸君に多大の手数をわずらわせた．ここに厚く感謝する．

1960年5月

京都にて　伊藤　清

凡　　例

1. Kolmogorov〔　〕の括弧内は文献表中の番号をさす．

2. 前の定理を引用するときには次のようにする．

   同じ章の中では"定理5.2"というようにし，これは同じ章内の§5定理5.2 をさす．異なる章の定理を引用するには"定理 I. 3.2"というようにし，これはI章§3定理3.2をさす．

3. a.e = almost everywhere

   ↑ = strictly increasing = 真に増大する．

4. strictly は"真に"と訳する．

   strictly increasing = 真に増大する
   strictly convex = 真に凸
   strictly positive = 真に正

Sem. on Probab.
Vol.3 1960年
P1-94

拡 散 過 程

伊 藤 清
渡 辺 信 三
福 島 正 俊

目 次

第一章 Markov 過程の一般論

第二章 一次元拡散過程

Sem. on Probab.
Vol.3 1960年
P1-94

第1章 Markov 過程の一般論

§0. 測度論からの準備

1. ある集合Ωの部分集合のあつまり$\mathbb{A}$が
 i) $\Omega \in \mathbb{A}$、 ii) $A_1, A_2 \in \mathbb{A}$ なら $A_1 \cup A_2$, $A_1 - A_2$ $A_1 \cap A_2 \in \mathbb{A}$
 なる性質をもつとき$\mathbb{A}$は algebra であるという。
2. $\mathbb{A}$が algebra であつてさらに有限個の union を作る操作でとじているとき Borel algebra であるという.
3. Ωの部分集合のあつまり$\mathbb{M}$が
 i) $A_n \in \mathbb{M}$ $A_n \uparrow$ ならば $\cup A_n \in \mathbb{M}$
 ii) $A_n \in \mathbb{M}$ $A_n \downarrow$ ならば $\cap A_n \in \mathbb{M}$
 なる条件をみたすとき $\mathbb{M}$は monotone class であるという。
4. Monotone lemma[1)]
 Ωの部分集合のあつまり$\mathbb{A}$が algebra であるとし、$\mathbb{A}$を含む最小の monotone class を $m(\mathbb{A})$ とする、このとき $m(\mathbb{A}) = B(\mathbb{A}) \equiv$ Aを含む最小の Borel algebra が成立つ。故に、特に monotone class $\mathbb{M}$ がある algebra $\mathbb{A}$を含めば $\mathbb{M} \supset B(\mathbb{A})$

§1. Markov 過程の定義

1. Sを第二可算公理をみたす局所 compact な Hausdorff 空間とし、open set 全体を含む最小のBorel Algebra を$\mathbb{B}(S)$[(1)]、S上の有界可測($\mathbb{B}(S)$に関し)函数全体を$\mathcal{B}(S)$であらわす。さらにSに一点∞を isolated point としてつけ加え、これをS^*であらわし、その open set によつて生成されるBorel algebra を$\mathbb{B}(S^*)$ S^*上の有界可測函数で $f(\infty)=0$ をみたすもの全体を$\mathcal{B}(S^*)$とかく。
 $\mathcal{B}(S^*)$の元は$\mathcal{B}(S)$の元を$f(\infty)=0$としてS^*上へ拡張したものに他ならないから$\mathcal{B}(S^*)$は本質的には$\mathcal{B}(S)$と同じであり単に$\mathcal{B}(S)$とかくことがよくある。

---

(1) 証明はたとえば伊藤清 確率論(P392)その他測度論の本には大抵ある。

(1) $\mathbb{B}(S)$ のことを topological Borel algebra 又その元を SのBorel setという。

Sem. on Probab.
Vol.3 1960年
P1-94

2. 次に $T=[0\ +\infty]$ から S^* への写像を w であらわし、$t\in[0\ \infty]$ の値を $w(t)$ 又は $X_t(w)$ とあらわす。次の (1)−(3) の条件をみたすような w の全体を考えこれを $\tilde{W}$ とする。

(1) $w(+\infty)=\infty$

(2) w に対してある時間(2) $\sigma_\infty(w)\in[0.+\infty]$ があって

$$w(t)=\infty \qquad \forall t\geq\sigma_\infty(w)$$
$$w(t)\in S \qquad \forall t<\sigma_\infty(w)$$

(3) $w(t)$ は右連続

$w\in\tilde{W}$. $t\in[0\ \infty]$ に対し Stopped path w_t^- Shifted path w_t^+ を次のように定義する。

$$w_t^- : \ w_t^-(S) = w(t\wedge S)^{(3)} \qquad 0\leq S<+\infty$$
$$\qquad\qquad = \infty \qquad\qquad S=\infty$$
$$w_t^+ : \ w_t^+(S) = w(t+S) \qquad 0\leq S\leq+\infty$$

あきらかに w_t^- w_t^+ は (1)−(3) をみたすから $\tilde{W}$ の元である。
次に W は $\tilde{W}$ の部分集合で $w\in W$ ならば $\forall t\in[0\ \infty]$ に対し $w_t^-\in W$ $w_t^+\in W$ となるものとする。
さてかような W があたえられたとき $\{w : w\in W\ [w(t_1)\cdots w(t_n)]\in E^n\}$ $0\leq t_1<t_2\cdots<t_n<+\infty$ $E^n\in\mathbb{B}(S^{*n})^{(4)}$ なる形の集合全体(5)はあきらかに W の algebra を作るが Borel algebra ではない。
$\mathbb{B}(W)=\mathbb{A}(w)$ を含む最小の Borel algebra と定義しこれを W の固有の Borel algebra とする。

このとき $w\to w_t^-$ 及び $w\to w_t^+$ は $W(\mathbb{B}(W))$ から $W(\mathbb{B}(W))$ への写像として可測であることが容易にわかる。

今、$t\in[0\ \infty]$ を1つ fix するとき $\{w : w_t^-\in E\}$ $E\in\mathbb{B}(W)$ なる形の集合全体は $\mathbb{B}(W)$ の Sub Borel algebra である。これを $\mathbb{B}_t(W)$ あるいは単に $\mathbb{B}_t$ とあらわす。

3. 次に、各 $a\in S^*$ に対して $[W\ \mathbb{B}(W)]$ 上の確率測度 P_a があたえられ次の性質をみたすとする

(P1) $P_a(B)$, $B\in\mathbb{B}(W)$ は B を固定したとき a について $\mathbb{B}(S^*)$ 可測

---

(2) $T=[0,+\infty]$ のことを tim interual その元を時間ということがある。
(3) $t\wedge S=min(S,t)$ $\quad t\vee S=max(S,t)$
(4) S^{*n} は S^* の n 個の直積空間 $\mathbb{B}(S^{*n})$ はその上の topological Borel algebra
(5) もちろん n はあらゆる自然数をうごく
(6) S のことを state Space W を path space $w\in W$ を path という

Sem. on Probab.
Vol.3 1960年
P1-94

(P2)　$P_a(w : x_0(w) = a) = 1$

(P3)　(Markov性)　$\forall t > 0$ に対し次のことが成り立つ

$\forall B_1 \in \mathbb{B}_t$,　$\forall B_2 \in \mathbb{B}(W)$ に対して

$$P_a(w : w \in B_1,\ w_t^+ \in B_2) = E_a(P_{x_t(w)}(w' \in B_2) : B_1)$$

(ここで一般に $E_a(f(w) : B) \equiv \int_B f(w) P_a(dw)$ とする)

注意 1.　(P3)は条件つき確率でかけば "$P_a(w_t^+ \in B/\mathbb{B}_t)(w) = P_{x_t(w)}(B)$ が P_a－measure 1をもってなりたつ" となる。

定義 1.1　$(S \cup \infty, W, \mathbb{B}(W))$ の上に(P1)～(P3)をみたす確率測度の系 $\{P_a, a \in S^*\}$ があたえられたとき S の上に Markov 過程 $\mathbb{M}$ があたえられたといい、

$\mathbb{M} = (S \cup \infty, W, \mathbb{B}(W), P_a\ a \in S \cup \infty)$ とあらわす。(6)

ここで直観的意味について簡単にのべておく。P_a は S の点 a から出発する粒子の行動をあたえる確率法則で、Markov性は、a から P_a にしたがって出発した粒子が時間 t にある点 b へくれば、それまでの行動に無関係に b から P_b にしたがって動いていくことを意味している、すなわち Markov 粒子は到達した各点各点から新たに出発していくのである。

Prop 1.1

$\mathbb{M} = (S^* W P_a)$ を Markov 過程とする、このとき

$\forall f \in \mathcal{B}_t(S)$(7)　$\forall g \in \mathcal{B}(S)$ に対し

$$(1.1)\quad E_a(f(w) g(w_t^+)) = E_a(f(w) E_{x_t(w)}(g(w')))$$

証明　f g がある集合の特性函数のときは(P3)に他ならない、両辺は f 及び g について加法的であるから Simple function に対してなりたち、それの単調極限として一般の f, g に対してなりたつ。

定義 1.2　$P_a(\forall t < \sigma_\infty(w), w(t) = a) = 1$ なる点 a を trap という

すなわち a が trap であるとは a から出発したら死ぬまで a をはなれないことである(8)。

∞ が trap であることはあきらかである、なぜなら $P_\infty(w(0) = \infty) = 1$ であり又、Path の性質(2)より $w(t) = \infty$ なら $\forall t' \geq t$ $w(t') = \infty$ 故に

$P_\infty(\forall t\, w(t) = \infty) = 1$　となるからである。

定義 1.3　$\forall a \in S$ に対し $P_a(\sigma_\infty(W) = +\infty) = 1$ なる Markov 過程を conservative であるという

この場合には、∞ は始めからないものと思ってもさしつかえない。

Prop 1.2

(7)　$\mathcal{B}_t(S) = \{ f ; f \in \mathcal{B}(S)$ かつ $\mathbb{B}_t$－可測$\}$

(8)　$w(t) = \infty$ なるときこの Path は死んでいるという、この意味で $\sigma_\infty(w)$ を Killing time という

Sem. on Probab.
Vol.3 1960年
P1-94

$X_t(w) \equiv X(t\,w)$ は $(t\,w)$ について $(\mathbb{B}(T)\times\mathbb{B}(W)$ に関し$)$可測である。

証明　$X_n(t\,w) = X\left(\frac{k}{2^n}\,w\right) \quad \frac{k-1}{2^n} \leq t < \frac{k}{2^n} \quad k=1,2\cdots\cdots$

とおくと $X_n(t\,w)$ は $(t\,w)$ について可測である

実際 $\{(t\,w) : X_n(t\,w)\in E\} = \bigcup_{k=1}^{\infty}\left\{\left[\frac{k-1}{2^n}\,\frac{k}{2^n}\right)\times\left(w : X\left(\frac{k}{2^n}w\right)\in E\right)\right\}$

$\in \mathbb{B}(T)\times\mathbb{B}(W)$　又 $X(\cdot\,w)$ は右連続であるから

$X_n(t\,w)\to X(t\,w)$　故に $X(t\,w)$ は $(t\,w)$ について可測である。

§2. 遷移確率系

定義 2.1　$P(t\,a\,E) = P_a(X_t(w)\in E)$ (1)　$t>0,\ a\in S,\ E\in\mathbb{B}(S)$
によって $\{P(t\,a\,E)\ t>0,\ a\in S^*,\ E\in\mathbb{B}(S^*)\}$ を定義しこれを遷移確率系という。

これに対して (T1)-(T4) の性質がある

(T1)　$P(t\,a\,E)$ は E に関し測度であり
　　$0\leq P(t\,a\,S^*)=1$　　特に $0\leq P(t\,a\,S)\leq 1$

(T2)　$P(t\,a\,E)$ は a に関し $\mathbb{B}(S^*)$ 可測

(T3)　(Chapman-Kolmogorov の方程式)
　　$P(t+s\,a\,E) = \int_{S^*} P(t\,a\,db)\,P(s\,b\,E)$

(T4)　U_a を a を含む任意の Open Set とするとき
　　$\lim_{t\to 0} P(t\,a\,U_a) = 1$

証明

(T1)　あきらか

(T2)　(P1) よりあきらか

(T3)　$P(t+s.\,a\,E) = P_a(X_{t+s}(w)\in E)$
$$= P_a(X_s(w_t^+)\in E)$$
$$\overset{(P.3)}{=} E_a(P_{X_t}(X_s\in E))$$
$$= \int P_b(X_s\in E)\,P_a(X_t\in db)$$

---

(1) もちろん $P_a(w : X_t(w)\in E)$ のことである
又、$P(t\,a\,E)$ は $E\subset S$ についてのみ定義することもある、実際 $P(t\,a\,\{\infty\}) = 1-P(t\,a\,S)$ なのであるから $P(t\,a\,E)$ $E\in\mathbb{B}(S)$ だけ考えれば十分なのである。

Sem. on Probab.
Vol.3 1960年
P1-94

$$= \int_{S^*} P(S\, b\, E)\, p(t\, a\, db)$$

(T4) $t_n \downarrow 0$ とする

$B_n = \{w : w(t_n) \in U_a\}$ とおくと $w(t)$ が $t = 0$ で右連続であるから

$$\{w : w(0) \in U_a\} \subset \{w : {}^{\exists n}_{\forall n' \geq n}\ w_{n'} \in U_a\} = \varliminf_{n} B_n$$

B_n の定義から $P_a(B_n) = p(t_n\, a\, U_a)$

故に $\varliminf_{n \to \infty} P(t_n\, a\, U_a) = \varliminf_{n} P_a(B_n) \geq P_a(\varliminf B_n) \geq P_a\{w : w(0) \in U(a)\}$

$$\geq P_a\{w : w(0) = a\} = 1$$

Prop 2.1 $E^n \in \mathbb{B}(S^{*n})$ $0 < t_1 < t_2 \cdots < t_n < \infty$ とする、このとき

(T5). $P_a([x_{t_1}(w), x_{t_2}(w) \cdots x_{t_n}(w)] \in E^n)$

$$= \int \cdots \int_{E^n} p(t_1\, a\, d\xi_1)\, p(t_2 - t_1\, \xi_1\, d\xi_2) \cdots p(t_n - t_{n-1}\, \xi_{n-1}\, d\xi_n)$$

$f(\xi_1 \cdots \xi_n) \in \mathbb{B}(S^{*n})$ に対して

(T5)' $E_a(f(x_{t_1}, \cdots x_{t_n})) = \int\int_{S^{*n}} f(\xi_1 \cdots \xi_n)\, p(t_1\, a\, d\xi_1)\, p(t_2 - t_1\, \xi_1\, d\xi_2) \cdots p(t_n - t_{n-1}\, \xi_{n-1}\, d\xi_n)$

証明 (T5) から (T5)' がしたがうのは Prop 1.1 と同じやり方でしめせるので (T5) をいえば十分である。

又 $E^n = E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ $E_i \in \mathbb{B}(S^*)$ なる形[(2)]の E^n に対していえれば (T5) の両辺はあきらかに E^n について $\mathbb{B}(S^{*n})$ の上の測度なのであるから product measure の一意性によって (T5) がなりたつ

今 $n = 2$ としよう

$P_a([x_{t_1}(w)\ x_{t_2}(w)] \in E_1 \times E_2) = P_a(x_{t_1}(w) \in E_1,\ x_{t_2}(w) \in E_2)$

$= P_a(x_{t_1}(w)) \in E_1\ \ x_{t_2 - t_1}(w_{t_1}^+) \in E_2)$

$= E_a(P_{x_{t_1}(w)}(x_{t_2 - t_1}(w') \in E_2) : x_{t_1}(w) \in E_1))$

$= \int_{E_1} P_a(x_{t_1} \in db)\, P_b(x_{t_2 - t_1}(w') \in E_2) = \int_{E_1} p(t_1\, a\, db)\, p(t_2 - t_1\, b\, E_2)$

$= \int\int_{E_1 \times E_2} p(t_1\, a\, db)\, p(t_2 - t_1\, b\, dc)$

同じようなことをくりかえせば一般の n についてもいえる (証了)

Prop 2.1 は前に定義した algebra $\mathbb{A}(W)$ の上の P_a の値が遷移確率系よって explicit にあらわされることをしめしている。

---

(2) いわゆる rectangular set

Sem. on Probab.
Vol.3 1960年
P1-94

Prop 2.2 $\mathbb{M}_1 = (S.W\ \ P_a^{(1)}\ a \in S \cup \infty)$ を同じ state space 及び
$\mathbb{M}_2 = (S\ W\ \ P_a^{(2)}\ a \in S \cup \infty)$
同じ Path space をもった二つの Markov 過程とする
もし $\mathbb{M}_1$ と $\mathbb{M}_2$ の遷移確率系が一致すれば $\mathbb{M}_1 = \mathbb{M}_2$ (i e $P_a^{(1)} = P_a^{(2)}\ \forall a$)

証明 $P_a^{(1)}(B) = P_a^{(2)}(B)$ となる $B \in \mathbb{B}(W)$ の全体を $\mathbb{M}$ とかこう
Prop 2.1 (T5) より $\mathbb{A}(W) \subset \mathbb{M}$
又 $P_a^{(1)}$ $P_a^{(2)}$ は有界な measure なのであるから $\mathbb{M}$ はあきらかに monotone class である. 故に monotone lemma によつて

$$B(\mathbb{A}(W)) = \mathbb{B}(W) \subset \mathbb{M}$$

$$\text{i.e}\quad P_a^{(1)}(B) = P_a^{(2)}(B) \qquad \forall B \in \mathbb{B}(W)$$

証了

Prop 2.3 S^* W $\mathbb{B}(W)$ を今までどおりのものとし
P_a, $a \in S^*$ は $\mathbb{B}(W)$ 上の測度の系で
$P(taE) = P_a(X_t(w) \in E)$ が (T2)(T4)(T5) をみたすとする
このとき $\mathbb{M} = (S^*. W\ \mathbb{B}(W)\ P_a)$ は Markov 過程になる

証明 P_a が (P1)―(P3) をみたすことをいえばよい

(P1) について
$\mathbb{M}$ をもつて $P_a(B)$ が a について $\mathbb{B}(S^*)$ 可測となるべき $B \in \mathbb{B}(W)$ の全体とする, (T5) によつて $B \in \mathbb{A}(W)$ に対しては $P_a(B)$ は $\{P(ta'E)\}$ による重複積分でかけ. 各 $P(ta'E)$ は a' について可測 (cf (T2)) なのであるから a について可測 i.e. $\mathbb{A}(W) \subset \mathbb{M}$
又 $\mathbb{M}$ が monotone class であることもあきらか(3) 故に monotone lemma によって $\mathbb{B}(W) \subset \mathbb{M}$ i.e $P_a(B)$ は a について可測 ($\forall B \in \mathbb{B}(W)$)

(P2) $t_n \downarrow 0$ とする、又 U_a を a の任意の近傍とする
$B_n = \{w : X_{t_n}(w) \in U_a\}$ とおくと (T4)より $\lim_{n\to\infty} P_a(B_n) = \lim_{n\to\infty} P(t_n\, a\, U_a) = 1$
又 $X_t(w)$ は各 w について t に関し右連続であるから

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ B_n = \{w : w \in B_n\ .\ i.o\}^{(4)} \subset \{w : w(0) \in \overline{U_a}\}$$

$$\therefore 1 = \overline{\lim_{n\to\infty}}\ P_a(B_n) \leq P_a(\overline{\lim}\, B_n) \leq P_a\{w : w(0) \in \overline{U_a}\}$$

今に $U_a^i \supset \overline{U}_a^{i+1}$ かつ $\bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{U}_a^i = \{a\}$ なる a の近傍列をとると

$$P_a(w(0) = a) = P_a\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} \{w(0) \in \overline{U}_a^i\}\right) = \lim_{i\to 0} P_a(w(0) \in \overline{U}_a^i) = 1.$$

(3) 可測函数の単調極限は又可測!
(4) $i \cdot o$ = infinitely often : 無限回

Sem. on Probab.
Vol.3 1960年
P1-94

(P3) 今 $t_1>0$, $E\in \mathbb{B}(S^*)$ を固定する

(1) $P_a(X_{t_1}\in E,\ w_{t_1}^+\in B)=E_a(P_{X_t}(w\in E);X_{t_1}\in B)$

となる B の全体を $\mathbb{M}$ であらわそう (T5)より $\mathbb{A}(W)\subset\mathbb{M}$ がいえる

又 (1) の両辺は B に関して measure であるから $\mathbb{M}$ は monotone class になる

故に $\mathbb{B}(W)\subset\mathbb{M}$ (monotone lemma)

故に $\forall B\in\mathbb{B}(W)$ に対して (1) がなりたつ

次に $B_1\in\mathbb{B}(W)$ を一つ固定する。$\mathbb{M}$ として

(2) $P_a(w_t^-\in B:\ w_t^+\in B_1)=E_a(P_{X_t}(w\in B_1);w_t^-\in B)$

となる $B\in\mathbb{B}(W)$ の全体とすると同じ議論によって $\mathbb{M}=\mathbb{B}(W)$

故に (2) が $\forall B\in\mathbb{B}(W)$ でなりたつ. これ (P3) に他ならない.

§3. Semi-group

<u>定義 3.1</u> $f\in\mathcal{B}(S)$(1) $t>0$ に対し

$H_tf(a)=E_a(f(X_t))=\int_S f(b)p(t\,a\,db)$ と定義しこの $\mathcal{B}(S)$ 上の operator H_t を Markov 過程 $\mathbb{M}$ の <u>semi-group</u> と呼ぶ

H_t は次の性質をもつ

(H1) $H_t:\mathcal{B}(S)\to\mathcal{B}(S)$

(H2) $H_t\geqq 0$ (i.e. $f\geqslant 0\to H_tf\geqslant 0$)

$H_t1\leqslant 1$

(H3) $H_{t+s}=H_t\cdot H_s$

(H4) $f(a)$ が a で連続ならば $\lim_{t\to 0}H_tf(a)=f(a)$

(H5) f が連続のとき $H_tf(a)$ は t に関し右連続

<u>証明</u>

(H1) (H2) はあきらかであろう

(H3) $H_{t+s}f(a)=\int_S f(b)p(t+s\,a\,db)=\int_{b\in S}f(b)\int_{b'\in S}p(t\,a\,db')p(s\,b'\,db)$ (cf (T3))

$=\int_S p(t\,a\,db')\int_S f(b)p(s\,b'\,db)=\int p(t\,a\,db')H_sf(b')=H_tH_sf(a)$

(H4) $\forall\varepsilon>0$ があたえられたとする. $f(a)$ の連続性から a の近傍 $U(a)$ があって $f(a)-\varepsilon<f(b)<f(a)+\varepsilon$ $\forall b\in U(a)$ となる

$H_tf(a)=\int_S f(b)p(t\,a\,db)=\int_{U(a)}f(b)p(t\,a\,db)+\int_{U(a)^c}f(b)p(t\,a\,db)=I_1+I_2$

---

(1) $f\in\mathcal{B}(S^*)$ といっても $f(\infty)=0$ であるから同じことである又

$\|f\|=\sup_{a\in S}|f(a)|$ なる norm で $\mathcal{B}(S)$ は Banach space である

Sem. on Probab.
Vol.3 1960年
P1-94

$|T_2| \leq \|f\| P(t,a,U(a)^c) = \|f\|(1-P(t,a,U(a)) \longrightarrow 0\ (t\downarrow 0)$ (f(T4)

$(f(a)-\varepsilon)P(t,a,U(a)) < I_1 < (f(a)+\varepsilon)P(t,a,U(a))$ かつ $P(t\,a\,U(a)) \to 1\ (t\downarrow 0)$

$\overline{\lim}\,|H_t f(a) - f(a)| \leq \varepsilon$ εは任意であるから証明できた。

(H5) $X_t(w)$がtに関し右連続でfが連続であるから$f(X_t)$はtに関し右連続かつ$|f(X_t)| \leq \|f\|$であるからBounded convergence theorem より$E_a(f(X_t))$がtについて右連続

$E \in \mathbb{B}(S)$の特性函数$\chi_E(a)$に対しては $H_t\chi_E(a) = P(t\,a\,E)$

であるから Prop 2.2より ただちに

Prop 3.1 S^* W $\mathbb{B}$(W) 上の二つのMarkov 過程の semi-group が一致すれば、同じMarkov 過程である。

§4. Green operator (Resolvent operator)

定義4.1 $\alpha > 0$ $f \in \mathcal{B}(S)$ に対し

$G_\alpha f(a) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} H_t f(a)\,dt$ と定義しGreen operatorという

(G1) $G_\alpha : \mathcal{B}(S) \longrightarrow \mathcal{B}(S)$

(G2) $G \geq 0$ $G_\alpha 1 \leq \frac{1}{\alpha}$

(G3) (Resolvent equation)

$$G_\alpha - G_\beta + (\alpha-\beta)G_\alpha G_\beta = 0$$

(G4) $f(a)$がaで連続とすると

$$\lim_{\alpha\to\infty} \alpha G_\alpha f(a) = f(a)$$

証明 (G1)(G2) は明らか

(G3) (H3)を用いて

$$G_\alpha G_\beta f(a) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} H_t G_\beta f(a)\,dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-\alpha t} H_t \left(\int_0^\infty e^{-\beta s} H_s f(a)\,ds\right) dt = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\alpha t} e^{-\beta s} H_t H_s f(a)\,ds\,dt$$

$$= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\alpha t-\beta s} H_{t+s} f(a)\,ds\,dt = \int_0^\infty e^{-\alpha t} e^{\beta t} \int_0^\infty e^{-\beta(t+s)} H_{t+s} f(a)\,ds\cdot dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-\alpha t+\beta t}\left(\int_t^\infty e^{-\beta s} H_s f(a)\,ds\right)dt = \int_0^\infty e^{-\beta s} H_s f(a)\left(\int_0^s e^{-\alpha t+\beta t}\,dt\right)ds$$

$$= \int_0^\infty e^{-\beta s} H_s f(a) \frac{e^{-(\alpha-\beta)s}-1}{-(\alpha-\beta)}\,ds$$

$$= -\frac{1}{\alpha-\beta}\left(\int_0^\infty e^{-\alpha s} H_s f(a)\,ds - \int_0^\infty e^{-\beta s} H_s f(a)\,ds\right)$$

Sem. on Probab.
Vol.3 1960年
P1-94

$$= -\frac{1}{(\alpha-\beta)}\left(G_\alpha f(a) - G_\beta f(a)\right)$$

(G4)　(H4) より $\forall \varepsilon > 0$ に対して $\exists t_0,\ t_0 \geq \forall t > 0,\ |H_t f(a) - f(a)| < \varepsilon$ とできる.

$$\alpha G_\alpha f(a) - f(a) = \alpha\int_0^\infty e^{-\alpha t} H_t f(a)\,dt - \alpha\int_0^\infty e^{-\alpha t}\,dt \cdot f(a)$$

$$= \alpha\int_0^\infty e^{-\alpha t}(H_t f(a) - f(a))\,dt$$

$$= \alpha\int_0^{t_0} e^{-\alpha t}(H_t f(a) - f(a))\,dt + \alpha\int_{t_0}^\infty e^{-\alpha t}(H_t f(a) - f(a))\,dt = I_1 + I_2$$

$$|I_1| \leq \varepsilon\,\alpha\int_0^{t_0} e^{-\alpha t}\,dt \leq \varepsilon\alpha\int_0^\infty e^{-\alpha t}\,dt = \varepsilon$$

$$|I_2| \leq 2\|f\|\cdot\alpha\int_{t_0}^\infty e^{-\alpha t}\,dt = 2\|f\|e^{-\alpha t_0} \longrightarrow 0 \quad \alpha \longrightarrow \infty$$

ε は任意であるから証明できた。

Prop 4.1　$(S, W, \mathbb{B}(W))$ 上の二つの Markov 過程 $\mathbb{M}_1\ \mathbb{M}_2$ があり その Green operator が一致すれば $\mathbb{M}_1 = \mathbb{M}_2$

証明　Green operator をそれぞれ $G_\alpha^{(1)}\ G_\alpha^{(2)}$ とする

$G_\alpha^{(1)} f(a) = G_\alpha^{(2)} f(a)$ であれば Laplace 変換の一意性により

$H_t^{(1)} f(a) = H_t^{(2)} f(a)$ がほとんどすべて t に対してなりたつ

今 $f(x)$ が連続であると (H5) より　この両辺は t について右連続であるから

(1) $\forall t\quad H_t^{(1)} f(a) = H_t^{(2)} f(a)$

又 $f_n \to f\quad |f_n| \leq M$ なら　$H_t f_n(a) \to H_t f(a)$ なることに注意すること (1)のなりたつような(有界な) f の全体は、連続函数を含み極限をとる操作でとじている。したがって $\forall f \in \mathcal{B}(S)$ を含む(下の注意1を見よ)

i.e　$\forall f \in \mathcal{B}(S)\quad H_t^{(1)} f = H_t^{(2)} f$　Prop 3.1 により証明できた。

(注1) 一般に連続函数を含み、極限をとる操作でとじているような函数族の最小のものを *Baire* 函数族という。これは考えている空間が距離空間のとき Borel 可測な函数全体と一致する。

(注2) 我々の考えている空間 S は距離空間と考えてよい。
一般に Hausdorff 空間で各点 a の近傍 V に対し $\exists U$: a の近傍, $\overline{U} \subset V$ なる空間を *Regular space* という、あきらかに局所 *compact* であれば *regular* である.このとき次の有名な定理がある.

Sem. on Probab.
Vol.3 1960年
P1-94

"第二可算公理をみたすregular spaceは距離空間である(Urysohn)"
証明はTopologyの本(例えば河野伊三郎　位相空間論P183)をみられたい。

§5. Generator

1. Prop 5.1　$\mathcal{B}(S)$のG_αによる像$\mathcal{R}_\alpha = G_\alpha[\mathcal{B}(S)]$は$\alpha$によらない

証明　$\alpha \neq \beta$に対し$\mathcal{R}_\alpha = \mathcal{R}_\beta$をいえばよい

$\forall u \in \mathcal{R}_\beta$　$u = G_\beta f$とするとResolvent equation (G4)によって

$$u = G_\beta f = G_\alpha f + (\alpha - \beta) G_\alpha G_\beta f$$
$$= G_\alpha (f + (\alpha - \beta) G_\beta f) \qquad \text{故に} \quad u \in \mathcal{R}_\alpha$$

すなわち　$\mathcal{R}_\beta \subset \mathcal{R}_\alpha$　同様にして　$\mathcal{R}_\alpha \subset \mathcal{R}_\beta$　故に　$\mathcal{R}_\alpha = \mathcal{R}_\beta$

故に以後$\mathcal{R}_\alpha$を単に$\mathcal{R}$とかくことができる

Prop 5.2　$\mathcal{N}_\alpha = \{ f ; G_\alpha f = 0 \}$　はαによらない

証明　$\mathcal{N}_\alpha = \mathcal{N}_\beta$をいえばよい

$\forall f \in \mathcal{N}_\alpha$　すなわち　$G_\alpha f = 0$　とする　再び(G4)より

$$G_\beta f = G_\alpha f + (\alpha - \beta) G_\beta G_\alpha f = 0$$

すなわち　$f \in \mathcal{N}_\beta$、故に　$\mathcal{N}_\alpha \subset \mathcal{N}_\beta$　同様にして$\mathcal{N}_\beta \subset \mathcal{N}_\alpha$

故に　$\mathcal{N}_\alpha = \mathcal{N}_\beta$　(3)

以後$\mathcal{N}_\alpha$のことを単に$\mathcal{N}$とかく

$\mathcal{B}(S)$はvector空間であるが、$\mathcal{N}$はあきらかに部分vector空間を作るからfactor space

$\mathcal{B}(S)/\mathcal{N}$が定義できる、すなわち$\mathcal{B}(S)/\mathcal{N}$は$f_1 \sim f_2 \equiv f_1 - f_2 \in \mathcal{N}$なる同値律で

$\mathcal{B}(S)$を類別したものに他ならない、又$f_1 \sim f_2$であれば$G_\alpha f_1 = G_\alpha f_2$であるから

G_αは$\mathcal{B}(S)/\mathcal{N}$から$\mathcal{R}$へのoperatorと考えてよい、しかもこう考えると一対一であることはあきらかである。　すなわち

$$G_\alpha : \mathcal{B}(S)/\mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{R} \qquad \text{one-to-one onto}$$

故に　$G_\alpha^{-1} : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{B}(S)/\mathcal{N}$　が定義できる

Prop 5.3　$\mathcal{R}$から$\mathcal{B}(S)/\mathcal{N}$へのoperator $\alpha u - G_\alpha^{-1} u$は$\alpha$によらない

証明　$\forall u \in \mathcal{R}$をとる　$u = G_\alpha f$とすると

$\alpha u - G_\alpha^{-1} u = \alpha G_\alpha f - f \pmod{\mathcal{N}}$　他方　R.E (G4)より

$$u = G_\alpha f = G_\beta f + (\beta - \alpha) G_\beta G_\alpha f = G_\beta (f + (\beta - \alpha) G_\alpha f)$$

Sem. on Probab.
Vol.3 1960年
P1-94

故に $\beta u - G_\beta^{-1} u = \beta u - [f + (\beta - \alpha) G_\alpha f]$

$$= \beta G_\alpha f - f - \beta G_\alpha f + \alpha G_\alpha f = \alpha G_\alpha f - f \pmod{\mathfrak{N}}$$

i.e $\quad \beta u - G_\beta^{-1} u = \alpha u - G_\alpha^{-1} u \quad$ in $\mathcal{B}(S)/\mathfrak{N}$

定義5.1 $\quad \mathcal{R}$から$\mathcal{B}/\mathfrak{N}$への operator $\mathfrak{G}$ を

$\mathfrak{G} u = \alpha u - G_\alpha^{-1} u$ と定義し、これを今考えているMarkov過程の Generator という、又$\mathcal{R}$をしばしば$\mathfrak{D}(\mathfrak{G})$とかいて$\mathfrak{G}$の定義域という

Prop 5.4

$\mathbb{M}$、$\mathbb{M}_2$ を $(S, W, \mathbb{B}(W))$ 上の二つのMarkov過程とし、そのGeneratorを $\mathfrak{G}_1$ $\mathfrak{G}_2$ とする $\quad \mathfrak{G}_1 = \mathfrak{G}_2$ であれば $\mathbb{M}_1 = \mathbb{M}_2$

証明 $\quad$ Green operator をそれぞれ $G_\alpha^{(1)}$ $G_\alpha^{(2)}$ とする

$\mathfrak{G}_1 = \mathfrak{G}_2$ であるから $\mathcal{R}_1 = G_\alpha^{(1)}[\mathcal{B}(S)] = \mathcal{R}_2 = G_\alpha^{(2)}[\mathcal{B}(S)] \equiv \mathcal{R}$

$$\mathfrak{N}_1 = \{f : G_\alpha^{(1)} f = 0\} = \mathfrak{N}_2 = \{f : G_\alpha^{(2)} f = 0\} \equiv \mathfrak{N}$$

でなければならない、又任意の $u \in \mathcal{R}$ に対して

$G_\alpha^{(1)-1} u = \alpha u - \mathfrak{G}_1 u = \alpha u - \mathfrak{G}_2 u = G_\alpha^{(2)-1} u$

$G_\alpha^{(1)-1}$ $G_\alpha^{(2)-1}$ は一対一であるから

$G_\alpha^{(1)} = G_\alpha^{(2)} \quad : \mathcal{B}/\mathfrak{N} \longrightarrow \mathcal{R}$

故に $\forall f \in \mathcal{B}(S) \quad G_\alpha^{(1)} f = G_\alpha^{(2)} f \qquad$ ∴Prop 4.1 より証明できた

2. Dual generator

$\mathcal{B}(S)$ は $\|f\| = \sup_{a \in S} |f(a)|$ なるノルムでBanach space であり、その dual space $\mathcal{B}^*$は S上の有界な Signed measure の全体である

$\mu \in \mathcal{B}^*$ に対し $\quad H_t^* \mu(E) = \int_S P(t\,b\,E)\mu(db)$ と定義し、dual semi-group という

(1) $\|H_t^* \mu\| \leq \|\mu\| \qquad \|\mu\| = $ total variation of μ

(2) $(H_t f\ \mu) = (f\ H_t^* \mu) \overset{(1)}{=} \int_S \int_S f(b)\, p(t\,a\,db)\mu(db) \qquad \forall f \in \mathcal{B}\ \forall \mu \in \mathcal{B}^*$

(3) $H_t^* H_s^* = H_{t+s}^*$

次に $\mu \in \mathcal{B}^*$ に対し $\quad G_\alpha^* \mu(E) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} H_t^* \mu(E)\,dt$ と定義し dual Green operator という $\qquad (\alpha > 0)$

1 $\quad \|G_\alpha^* \mu\| \leq \frac{1}{\alpha}$

2 $\quad (G_\alpha f\ \mu) = (f\ G_\alpha^* \mu)$

3 $\quad G_\alpha^* - G_\beta^* + (\alpha - \beta) G_\alpha^* G_\beta^* = 0$

G_αのときと同じように $\mathcal{R}^* = G_\alpha^*[\mathcal{B}^*]$ はαによらない

(1) $\quad (f\ \mu) = \int_S f(b)\mu(db)$

Sem. on Probab.
Vol.3 1960年
P1-94

又 $G_\alpha^* u=0 \iff u=0$ が示せる

故に G_α^* は $\mathcal{B}^*$ から $\mathcal{R}^*$ の上への一対一写像であるから

$G_\alpha^{*-1} : \mathcal{R}^* \to \mathcal{B}^*$ が定義できる

<u>定義 5.2</u> $\mathcal{R}^*$ から $\mathcal{B}^*$ への operator $\mathfrak{g}^*$ を

$\mathfrak{g}^* u = \alpha u - G_\alpha^{*-1} u$ で定義し(2) <u>dual generator</u> という

<u>Prop 5.5</u> $\mathbb{M}_1, \mathbb{M}_2$ を $(S\ W\ \mathbb{B}(W))$ 上の二つの Markov 過程とし、その dual generator を $\mathfrak{g}_1^*$ $\mathfrak{g}_2^*$ とする

$\mathfrak{g}_1^* = \mathfrak{g}_2^*$ なら $\mathbb{M}_1 = \mathbb{M}_2$

<u>証明</u> $\mathfrak{g}_1^* = \mathfrak{g}_2^*$ であれば $G_\alpha^{(1)*} = (\alpha - \mathfrak{g}_1^*)^{-1} = (\alpha - \mathfrak{g}_2^*)^{-1} = G_\alpha^{(2)*}$

故に $\forall f \in \mathcal{B}$ $\forall u \in \mathcal{B}^*$ に対し

$(G_\alpha^{(1)} f\ u) = (f\ G_\alpha^{*(1)} u) = (f\ G_\alpha^{*(2)} u) = (G_\alpha^{(2)} f\ u)$

これより $G_\alpha^{(1)} f = G_\alpha^{(2)} f$ となるから <u>Prop 5.4</u> よりしたがう

3. <u>Generatorの定義に関する一注意</u>

Generator $\mathfrak{g}$ の定義によると $\mathfrak{g}$ は $\mathcal{R}$ から $\mathcal{B}/\mathfrak{N}$ への写像であり $\mathfrak{N}$ の元だけのあいまいさがあった、dual generatorについてこのようなあいまいさはおこらない。 今 $\mathfrak{O}(S)$ を $\mathcal{B}(S)$ の subspace で次の条件をみたすものとする。

(i) $G_\alpha f = 0$ $f \in \mathfrak{O}(S) \Rightarrow f = 0$

(ii) $\nu \in \mathcal{B}^*$ が $(f\ \nu) = 0$ $\forall f \in \mathfrak{O}(S)$ なら $\nu = 0$

(iii) $G_\alpha(\mathfrak{O}(S)) \subset \mathfrak{O}(S)$

このとき G_α は $\mathfrak{O}(S)$ から $\mathfrak{O}(S)$ への一対一写像となるから

$G_\alpha^{-1} : \tilde{\mathcal{R}} = G_\alpha(\mathfrak{O}(S)) \longrightarrow \mathfrak{O}(S)$ があいまいさなしに定まる

そこで $\tilde{\mathfrak{g}} : \tilde{\mathcal{R}} \to \mathfrak{O}(S)$ を $\tilde{\mathfrak{g}} u = \alpha u - G_\alpha^{-1} u$ で定義する

このような $\tilde{\mathfrak{g}}$ を Generator としておいた方が便利なことがある

<u>Prop 5.6</u> このような $\tilde{\mathfrak{g}}$ で Markov process は完全に決定される

<u>証明</u> $\tilde{\mathfrak{g}} u = \alpha u - G_\alpha^{-1} u$ であるから $\tilde{\mathfrak{g}}$ によって

$G_\alpha^{-1} u$, $u \in \tilde{\mathcal{R}}$ が完全にきまり、したがって $u = G_\alpha f$

$f \in \mathfrak{O}(S)$ が完全にきまる

$(G_\alpha f\ u) = (f\ G_\alpha^* u)$ $\forall f \in \mathfrak{O}(S)$ から ii) によって $G_\alpha^* u$ が完全にきまり、したがって dual generator $\mathfrak{g}^*$ が完全にきまる、故に <u>Prop 5.5</u> より Markov Process は完全に決定される。

---

(2) $\mathfrak{g}$ の場合と同じく $\alpha u - G_\alpha^{*-1} u$ は α によらない

Sem. on Probab.
Vol.3 1960年
P1-94

§6. 例

EX 6.1　もっと簡単な例として $S=R^1$ とし、$a\in S$ から出る path $W(t)=a+t$ のみという Process を考えよう。これは出発点 a がきまれば完全にきまってしまうから、いわゆる決定論的（deterministic）である。あきらかに conservative であるから ∞はないものとしておく。

$$\mathbb{M}=(R^1\ \ W=\{w_a\ \ a\in R_1\ ;\ ,\ \overset{\text{ただし}}{w_a}(t)=a+t\}\ \ P_a)$$

$$P_a(w=w_a)=1$$

で $\mathbb{M}$ が定義でき Markov 過程になる

$$P(t\,a\,E)=\delta(a+t,E)=\begin{cases}1 & a+t\in E\\ 0 & a+t\notin E\end{cases}$$

$$H_t f(a)=f(a+t)$$

$$u(a)=G_\alpha f(a)=\int_0^\infty e^{-\alpha t}f(a+t)\,dt=e^{\alpha a}\int_a^\infty e^{-\alpha t}f(t)\,dt$$

$$\mathfrak{D}(\mathfrak{G})=\mathfrak{R}=\{f\ ;\ f:\ bdd^{(1)}\cdot a\cdot c^{(2)},\ f':\ bdd\}$$

$$\mathfrak{N}=\{f:\ f=0\quad a\cdot e^{(3)}\}$$

$$\mathfrak{G}u(a)=\alpha u(a)-f(a)=\alpha e^{\alpha a}\int_a^\infty e^{-\alpha t}f(t)\,dt-f(a)=\frac{d}{da}\Big(e^{\alpha a}\int_a^\infty e^{-\alpha t}f$$

$$=\frac{d}{da}u(a)$$

なお§4、3における $\mathfrak{D}(S)$ の例として $C(R^1)=\{f\ :\ 有界連続\}$ がとれる
このとき $\tilde{\mathfrak{R}}$ は $\mathfrak{R}$ の元で特に連続的可微分なもの全体である。

EX 6.2　Ex 1 では generator が一階微分となる Markov 過程がえられたが、ここでは R^1 の開区間 $S=(r_1,r_2)$ で $\mathfrak{G}u(a)=v(a)u'(a)$ なる Process を作ってみよう。
ただし $v(a)$ は S上で本当に正で連続なあたえられた函数である。

Case 1　$a\in S$ に対し $\int_a^{r_2}\frac{d\xi}{v(\xi)}=+\infty$ のとき(4)

(1) $t=\int_a^x\frac{d\xi}{v(\xi)}$　$a\le x<r_2$　$\Uparrow$ in x(5) であるから x について逆にとける。

(2) $x=\xi^a(t)$　$0\le t<+\infty$　であらわす

$P_a(w=\xi^a)=1$ で P_a $a\in S$ を定める（故にこれも deterministic conservative である）

---

(1) bdd = bounded（有界）
(2) a・c = absolutely continuous（絶対連続）
(3) a・e = almost everywhere
(4) これは a に無関係な性質である
(5) $\Uparrow$ は真の増加函数をあらわす

Sem. on Probab.
Vol.3 1960年
P1-94

あきらかに $P_a(B)=0$ or 1 であり

又 $t=\int_a^x \frac{d\xi}{v(\xi)}$ $s=\int_x^y \frac{d\xi}{v(\xi)}$ とすると $t+s=\int_a^y \frac{d\xi}{v(\xi)}$ $\therefore y=\xi^a(t+s)=\xi^x(s)=\xi^{\xi^a(t)}(s)$

したがって

$P_a(w_t^- \in B_1\ \ w_t^+ \in B_2)=1 \iff w_t^- \in B_1\ \ w_t^+ \in B_2$

$\iff w_t^- \in B_1\ \ \xi^{\xi^{a(t)}} \in B_2 \iff E_a(w_t^- \in B_1\ ;P_{X_t}(B_2))=1$

故に $^\forall B_1 B_2$ に対し $P_a(w_t^- \in B_1\ w_t^+ \in B_2)=E_a(w_t^- \in B_1\ ;P_{X_t}(B_2))$ 故にMarkov過程になる

$H_t f(a)=f(\xi^a(t))$

$u(a)=G_\alpha f(a)=\int_0^\infty e^{-\alpha t} f(\xi_a(t))dt=\int_a^{r_2} e^{-\alpha\int_a^x \frac{d\xi}{v(\xi)}} f(x)\frac{dx}{v(x)}$ $\left(t=\int_a^x \frac{d\xi}{v(\xi)}\right.$ で $\left. t\longrightarrow x\right)$

これより $\alpha u(a)-f(a)=v(a)u'(a)$ が容易に示せる

故に $\mathfrak{G}u(a)=v(a)u'(a)$

$\mathfrak{N}=\{f\ ;f=0\quad a.e\}$ はあきらかであろう

$G_\alpha[\mathcal{B}(S)]=\mathcal{R}\equiv\{u\ ;u,$ bdd. a.c. かつ vu' bdd$\}$ をしめす

$G_\alpha[\mathcal{B}(S)]\subset\mathcal{R}$ はあきらかであるから、逆をいう、$u\in\mathcal{R}$ とせよ

$f=\alpha u-vu'\in\mathcal{B}(S)$ で $w=u-G_\alpha f$ とおくと容易に $v\cdot w'=\alpha w$

故に $w(x)=C\cdot e^{\frac{1}{\alpha}\int^x\frac{d\xi}{v(\xi)}}$ (c const) とかける w は有界で 又 $\int^{r_2}\frac{d\xi}{v(\xi)}=+\infty$ で

あるから $C=0$ でなければならぬ 故に $w=0$ $\therefore u=G_\alpha f$ $\therefore \mathcal{R}\subset G_\alpha[\mathcal{B}]$

これより $\mathfrak{D}(\mathfrak{G})=\mathcal{R}$

<u>Case 2</u> $\int_a^{r_2}\frac{d\xi}{v(\xi)}<+\infty$ この場合には、いわゆる境界条件というものが必要になる

$\sigma_a^{r_2}\equiv\int_a^{r_2}\frac{d\xi}{v(\xi)}$ とおくと Case 1 の $X=\xi^a(t)$ は $0\leq t<\sigma_a^{r_2}$ で定義できる

$P_a(w(t)=\xi^a(t)\ ;0\leq t<\sigma_a^{r_2})=1$ とおく、今conservativeの場合とする. $t=\sigma_a^{r_2}$ のとき

$w(t)$ は S のどこかの点でなければならない、そこで $\Phi(db)$ を S 上の 確率測度とし、

$P_a(w(\sigma_a^{r_2})\in db)=\Phi(db)$ と定義すれば process は完全にきまる. すなわち a から出た path は $t\uparrow\sigma_a^{r_2}$ につれて r_2 へ近づくが $t=\sigma_a^{r_2}$ になった瞬間に $\Phi(db)$ なる分布で S へ飛込むのである (r_2 が S の点でないことに注意) このとき

$u(a)=G_\alpha f(a)=E_a\int_0^\infty e^{-\alpha t}f(X_t)dt=\int_a^{r_2}e^{-\alpha\int_a^x\frac{d\xi}{v(\xi)}}f(x)\frac{dx}{v(x)}+e^{-\alpha\sigma_a^{r_2}}\int_S G_\alpha f(b)\Phi(db)$

$\mathfrak{N}=\{f\ ;f=0\quad a\cdot e\}$

$\mathcal{R}=\mathfrak{D}(\mathfrak{G})=\{u\ ;u,$ bdd, a.c, vu' bdd, $u(r_2-)$ (6) $=\int_S u(b)\Phi(db)\}$

(6) $u(r_2-)=\lim_{x\to r_2} u(x)$

Sem. on Probab.
Vol.3 1960年
P1-94

$$\mathcal{G}u = v.u'$$ となることが示せるが省略する

なお §5.3 における$\mathcal{D}(S)$の例として$C(S)=\{f:$有界,連続$\}$がとれることに注意しておく.

このとき$\widehat{\mathcal{R}}$は$\mathcal{R}$のa、Cが連続的可微分とかわるだけである。

EX 6.3 Wiener Process (Brown 運動)

$B(t\ \omega)\quad B(0\ \omega)\equiv 0\quad \omega\in\Omega(\mathbb{B}\ P)$

を Wiener Process(7)とする

すなわち$B(t,\omega)$は加法過程で$P(B(t\omega)\in E)=\int_E \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{\xi^2}{2t}}d\xi$なるものである. $B(t\omega)$はほとんどすべてのωについてtの連続函数である.

$S=R^1\quad W=\{w: w(t)\ 0\le t<\infty$ て 実数値連続函数$\}$

この場合も conservative であるから∞は考えない

$P_a(B)=P(\omega: B(\cdot\omega)\in B)\qquad \forall B\in\mathbb{B}(W)$

によってP_aを定義すると Markov 過程がえられる

$$P(t\ a\ E)=\int_E\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{|a-b|^2}{2t}}db$$

$$H_t f(a)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{|a-b|^2}{2t}}f(b)db$$

$$u(a)=G_\alpha f(a)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\alpha}}e^{-\sqrt{2\alpha}|a-b|}f(b)db^{(8)}$$

generator をもとめるために

lemma $\frac{1}{\sqrt{2\alpha}}e^{-\sqrt{2\alpha}|a|}$ は超函数論の意味で$\alpha-\frac{1}{2}\frac{d^2}{da^2}$なる微分作用素の素解である

(∵) $\varphi\in(\mathcal{D}_{R^1})$に対し$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\alpha}}e^{-\sqrt{2\alpha}|a|}(\alpha\varphi(a)-\frac{\varphi''(a)}{2})da=\varphi(0)$をいえばよい

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\alpha}}e^{-\sqrt{2\alpha}|a|}\frac{\varphi''(a)}{2}da=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{\sqrt{2\alpha}}e^{\sqrt{2\alpha}a}\frac{\varphi''(a)}{2}da+\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\alpha}}e^{-\sqrt{2\alpha}a}\frac{\varphi''(a)}{2}da$$

$$=\left[\frac{1}{\sqrt{2\alpha}}e^{\sqrt{2\alpha}a}\frac{\varphi'(a)}{2}\right]_{-\infty}^{0}+\left[\frac{1}{\sqrt{2\alpha}}e^{-\sqrt{2\alpha}a}\frac{\varphi'(a)}{2}\right]_0^{\infty}-\int_{-\infty}^{0}e^{\sqrt{2\alpha}a}\frac{\varphi'(a)}{2}da+\int_0^{\infty}e^{-\sqrt{2\alpha}a}\frac{\varphi'(a)}{2}da$$

$$=\frac{\varphi'(0)}{2}-\frac{\varphi'(0)}{2}-\int_{-\infty}^{0}e^{\sqrt{2\alpha}a}\frac{\varphi'(a)}{2}da+\int_0^{\infty}e^{-\sqrt{2\alpha}a}\frac{\varphi'(a)}{2}da$$

---

(7) 伊藤 清 確率論 [岩波書店] P128

(8) この計算については 例えば、吉田耕作 位相解析 II 岩波・応・数講座 (P120~121) あるいは Frourier 変換によってもたしかめうる.

Sem. on Probab.
Vol.3 1960年
P1-94

$$= -\left[e^{\sqrt{2\alpha}a}\frac{\varphi(a)}{2}\right]_{-\infty}^{0} + \left[e^{-\sqrt{2\alpha}a}\frac{\varphi(a)}{2}\right]_{0}^{\infty} + \int_{-\infty}^{0}\sqrt{2\alpha}\, e^{\sqrt{2\alpha}a}\frac{\varphi(a)}{2}da + \int_{0}^{\infty}\sqrt{2\alpha}\, e^{-\sqrt{2\alpha}a}\frac{\varphi(a)}{2}da$$

$$= -\frac{\varphi(0)}{2} - \frac{\varphi(0)}{2} + \int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{2\alpha}\; e^{-\sqrt{2\alpha}|a|}\frac{\varphi(a)}{2}da$$

$$= -\varphi(0) + \alpha\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\alpha}}e^{-\sqrt{2\alpha}|a|}\varphi(a)\,da$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\alpha}}e^{-\sqrt{2\alpha}|a|}\left(\alpha\varphi(a) - \frac{\varphi''(a)}{2}\right)da = \varphi(0)$$

$u = \dfrac{1}{\sqrt{2\alpha}}e^{-\sqrt{2\alpha}|x|} * f$ 　　であるから超函数の意味で

$$\alpha u - \frac{1}{2}u'' = f$$

このことから u は連続的可微分 u'は絶体連続で $\alpha u - \frac{1}{2}u'' = f$ (a.e) がしたがうことはよく知られている。[9]

次に $u = 0$ であれば上式から $f = 0$ (a.e)

故に $\mathfrak{N} = \{f : f = 0 \quad a.e\}$

$\mathfrak{R} = G_\alpha[\mathcal{B}(R^1)] \subset \mathfrak{R}_1 \equiv \{u,\ C^1,\ bdd,\ u'\ a.c\ bdd^{(10)}\ u'' : bdd\}$

であるが

実は $\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R}$ (∵) $u \in \mathfrak{R}_1$ とせよ　$\alpha u - \frac{1}{2}u'' = f \in \mathcal{B}(R^1)$ であるが

$w = u - G_\alpha f$ とおくと　$\frac{1}{2}w'' = \alpha w$ となり

$w = c_1 e^{\sqrt{2\alpha}a} + c_2 e^{-\sqrt{2\alpha}a}$ 　　しかも w は有界であるから $c_1 = c_2 = 0$

$\therefore\ w = 0$ 　　故に $u = G_\alpha f$

以上をまとめて、Brown 運動の generator は

$$\begin{cases} \mathfrak{D}(\mathcal{G}) = \{u,\ bdd,\ C^1,\ u',\ bdd,\ a.c,\ u''\ bdd\} \\ \mathcal{G}u = \frac{1}{2}u'' \quad \text{であたえられる} \end{cases}$$

[注意1 $\mathcal{B}(R^1)$ のかわりに $C(R^1) = \{f : bdd,\ conti\}$ をとると§4.3の條件をみたし $\tilde{\mathcal{G}}$ が定義できる。このとき

$\mathfrak{R} = \mathfrak{D}(\tilde{\mathcal{G}}) = \{u : bdd,\ C^2,\ u',\ u''\ bdd\}$

$\tilde{\mathcal{G}}u = \frac{1}{2}u''$

[注意2、かくして得られたBrown 運動がMarKov 過程になることの証明

(9) Schwarz Théorie distributions I P58 (岩村訳 P45)

(10) C^nはいつものとおり n 回連続的可微分な函数の全体である。

Sem. on Probab.
Vol.3 1960年
P1-94

P_a が (T2) (T4) (T5) をみたすことをいえばよい

(T2) は明らかである

(T4) $\displaystyle\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{x^2}{2t}}dx=\int_{-\frac{\varepsilon}{\sqrt{t}}}^{\frac{\varepsilon}{\sqrt{t}}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\xrightarrow[(t\downarrow 0)]{}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=1$

(T5) $E^n\in\mathbb{B}(R^n)$ とする

$$\begin{cases} y_1=x_1 \\ y_2=x_2-x_1 \\ \vdots \\ y_n=x_n-x_{n-1}\end{cases}$$

によって $y=f(x)$ $x\in R^n\to y\in R^n$ を定義する

$$P_a([x_{t_1},x_{t_2},\cdots x_{t_n}]\in E^n)=P_a([x_{t_1},x_{t_2}-x_{t_1}\cdots x_{t_n}-x_{t_{n-1}}]\in f(E^n))$$

$$(\text{交換}f\text{のJacobianは}1)\quad=\int_{f(E^n)}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\right)^n e^{-\frac{(\xi_1-a)^2}{2t_1}}e^{-\frac{\xi_2^2}{2(t_2-t_1)}}\cdots e^{-\frac{\xi_n^2}{2(t_n-t_{n-1})}}d\xi_1d\xi_2\cdots d\xi_n$$

$$(\xi=f(\eta))\quad=\int_{E^n}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\right)^n e^{-\frac{(\eta_1-a)^2}{2t}}e^{-\frac{(\eta_2-\eta_1)^2}{2(t_2-t_1)}}\cdots e^{-\frac{(\eta_n-\eta_{n-1})^2}{2(t_n-t_{n-1})^2}}d\eta_1\cdots d\eta_n$$

ここで x_t が加法過程であるから $(x_{t_1},x_{t_2}-x_{t_1}\cdots x_{t_n}-x_{t_{n-1}})$ の結合分布が各々の分布の直積になることを用いた. 故に (T5) がなりたつ

EX 6.4

Reflecting barrier Brownian motion

$M_B=(R_1,P_a{}^B)$ を Ex 6.3 の Brown 運動とする

$S=[0+\infty)$ $\quad W=\{w:[0+\infty)\to S\ :\text{連続}\}$

$P_a(B)=P_a{}^B(w:|w|\in B)$ $\quad B\in\mathbb{B}(W)$

(但し $|W|$: $|w|(t)=|w(t)|$)

$\mathbb{M}=(S,W,P_a)$ を 0 に反射壁をもつ Brown 運動という

あきらかに $|W|_t^-=|W_t^-|$ $\quad |W_t^-|=|W|_t^+$ であるから($P_a{}^B$にMarkov性を用いて)

$P_a(W_t^-\in B_1,W_t^+\in B_2)=P_a{}^B(w;|W|_t^-\in B_1\ |W|_t^+\in B_2)$

$=P_a{}^B(w:|W_t^-|\in B_1,|W_t^+|\in B_2)=E_a{}^B(P^B_{|w|(t)}(|w|\in B_2);|W_t^-|\in B_1)$

$=E_a(P_{w(t)}(B_2);W_t^-\in B_1)$ 故にMarkov 過程である。

$$P(t\,a\,E)=\int_E\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{(a-b)^2}{2t}}+\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{(a+b)^2}{2t}}\right)db$$

$$H_tf(a)=\int_0^\infty\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\left(e^{-\frac{(a-b)^2}{2t}}+e^{-\frac{(a+b)^2}{2t}}\right)f(b)db\qquad a\geqslant 0$$

Sem. on Probab.
Vol.3 1960年
P1-94

$$u(a)=G_\alpha f(a)=\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}\left(e^{-\sqrt{2\alpha}|a-b|}+e^{-\sqrt{2\alpha}|a+b|}\right)f(b)\,db \qquad a\geq 0$$

$$=\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}e^{-\sqrt{2\alpha}|a-b|}f(b)\,db+\frac{e^{-\sqrt{2\alpha}a}}{\sqrt{2\alpha}}\int_0^\infty e^{-\sqrt{2\alpha}b}f(b)\,db$$

$$= u_1(a) \quad + u_2(a)$$

前と同様にして $\alpha u_1-\frac{1}{2}u_1''=f \ (a.e)$ 又あきらかに $\alpha u_2-\frac{1}{2}u_2''=0$

故に $\alpha u-\frac{1}{2}u''=f \quad (a.e)$

次に $u'(a)=-\int_0^a e^{-\sqrt{2\alpha}(a-b)}f(b)\,db+\int_a^\infty e^{\sqrt{2\alpha}(a-b)}f(b)\,db-e^{-\sqrt{2\alpha}a}\int_0^\infty e^{-\sqrt{2\alpha}b}f(b)\,db$

ここで $a\downarrow 0$ として $u'(0+)=u'(0)=0$

故に

$$\mathcal{R}\subset\mathcal{R}'\equiv\{u.\ bdd.\ a.c\ \ u',\ bdd\ \ a.c\ \ u'',\ bdd\ \ u'(0)=0\}$$

逆に $u\in\mathcal{R}'$ とする $w=u-G_\alpha f$ とおくと 容易に

$$\frac{1}{2}w''=\alpha w \qquad w'(0)=0 \quad ,w : 有界,$$

始め式から $w(a)=C_1e^{\sqrt{2\alpha}a}+C_2e^{-\sqrt{2\alpha}a}$ 有界性から $C_1=0$

$$w'(0)=-C_2\sqrt{2\alpha}=0 \quad \therefore C_2=0 \quad \therefore w=0 \quad \therefore u=G_\alpha f$$

以上より $\mathcal{D}(\mathcal{G})=\mathcal{R}'$ で $\mathcal{G}u=\frac{1}{2}u''$

§7. Markov time

$\mathbb{M}=(S^*, W, \mathbb{B}(W), P_a)$ を Markov 過程 $\sigma(w)$ $w\in W$ を

$T=[0+\infty]$ の値をとる random variable (i.e $\mathbb{B}(W)$－可測函数)とする

<u>定義 7.1</u> $\sigma(w)$ が <u>Markov time</u> であるとは

$\forall t\geq 0$ に対して $(w : \sigma(w)<t)\in\mathbb{B}_t$ がなりたつこととする

次に Path w をその Path w できまる時間 $\sigma(w)$ で stop した Path $w^-_{\sigma(w)}$ 及び Shift した Path $w^+_{\sigma(w)}$ は各 $w\in W$ に対して定義できるが

<u>Prop 7.1</u>

$w\longrightarrow w^-_{\sigma(w)}$ は $[W.\mathbb{B}(W)]$ から $[W.\mathbb{B}(W)]$ への写像として
$w\longrightarrow w^+_{\sigma(w)}$ 可測である

<u>証明</u> $T\times W$ から W への写像 $(t\ w)\longrightarrow w_t^-$ は可測であり(1)
$(t\ w)\longrightarrow w_t^+$

Sem. on Probab.
Vol.3 1960年
P1-94

$w \longrightarrow w_{\sigma(w)}^{-}$ は $w \to (\sigma(w)w)$, $(\sigma(w), w) \to (t, w)$, $(tw) \to w_t^-$
なる三つの可測写像の合成として可測である

定義 7.2　可測写像 $w \longrightarrow w_{\sigma(w)}^{-}$ による $\mathbb{B}(W)$ の inverse Borel algebra
を $\mathbb{B}_\sigma$ i.e. $\mathbb{B}_\sigma = \{(w; w_{\sigma(w)}^{-} \in B),\ B \in \mathbb{B}(W)\}$
$\mathbb{B}_{\sigma+} = \bigcap_n \mathbb{B}_{\sigma+\frac{1}{n}}$ とする　あきらかに $\mathbb{B}_\sigma \subset \mathbb{B}_{\sigma+}$ (2)

EX 7.1　$\sigma(w) \equiv t$ は Markov time で $\mathbb{B}_\sigma = \mathbb{B}_t$ である

EX 7.2　G を S^* の open set とするとき

$$\sigma_G = \begin{cases} \inf \{t : x_t \in G\} \\ \infty \quad \{t, x_t \in G\} が空集合のとき \end{cases}$$

は Markov time になる．これを open set G への first passage time という
(∵) $x_t(w)$ が右連続なことに注意すると
$\{w : \sigma_G < t\} = \{w ; {}^\exists r < t,\ r : 有理数\ x_r(w) \in G\}$
がなりたち、したがって $\{w : \sigma_G < t\} = \bigcup_{r<t} \{w : x_r(w) \in G\}$

$$= \bigcup_{r<t} \{w : x_r(w_t^-) \in G\} \in \mathbb{B}_t$$

Prop 7.2

(1) σ_1, σ_2 が Markov time であれば $\sigma_1 \vee \sigma_2$, $\sigma_1 \wedge \sigma_2$ も Markov time である

(2) σ_n が Markov time, $\sigma_n \uparrow$ (3) なら $\sigma = \lim \sigma_n$ も Markov time
同じく σ_n が Markov time, $\sigma_n \downarrow$ なら $\sigma = \lim \sigma_n$ も Markov time

(3) σ τ が Markov time であれば $\theta : \theta(w) = \sigma(w) + \tau(w_{\sigma(w)}^{+})$ も Markov time である．

証明 (1) $\{\omega ; \sigma_1 \vee \sigma_2 < t\} = \{\omega ; \sigma_1 < t\} \wedge \{\omega : \sigma_2 < t\} \in \mathbb{B}_t$
$\{\omega : \sigma_1 \wedge \sigma_2 < t\} = \{\omega : \sigma_1 < t) \cup \{\omega : \sigma_2 < t\} \in \mathbb{B}_t$

(2) $\sigma_n \uparrow$ のとき
$\{\omega ; \sigma < t\} = \bigcup_n \bigcap_m \{\omega : \sigma_m < t - \frac{1}{n}\} \in \mathbb{B}_t$

(3) (i) まず $\tau(\omega)$ を Markov time とするとき
$\tau_n(\omega) = \frac{k}{2^n}$, $\frac{k-1}{2^n} \leq \tau(\omega) < \frac{k}{2^n}$ によって $\tau_n(\omega)$ を定義すると
であるが $\tau_n(\omega)$ は Markov time である、なぜなら

(1) 実際 Prop 1.2 によって $x_t(w) = x(t\,w)$ は $(t\,w)$ について可測であり，このことから $B = \{w ; x_s(w) \in E\}$
なる形については $\{(t\,w) : w_t^- \in B\} \in \mathbb{B}(T) \times \mathbb{B}(W)$ である．したがって ${}^\forall B \in \mathbb{B}(W)$ について
$\{(t\,w) : w_t^- \in B\} \in \mathbb{B}(T) \times \mathbb{B}(W)$ となる

(2) $t \leq s$ なら $\mathbb{B}_t \subset \mathbb{B}_s$ に注意せよ

(3) $a_n \uparrow$ は $a_1 \leq a_2 \leq \quad \leq a_n \leq a_{n+1}$ のこと

Sem. on Probab.
Vol.3 1960年
P1-94

$$(\tau_n(\omega)<t)=\bigcup_{\frac{k}{2^n}<t}\left(\tau_n=\frac{k}{2^n}\right)=\bigcup_{\frac{k}{2^n}<t}\left(\frac{k-1}{2^n}\leq\tau<\frac{k}{2^n}\right)$$

$\left(\frac{k-1}{2^n}\leq\tau<\frac{k}{2^n}\right)^{(4)}$ は $\mathbb{B}_{\frac{k}{2^n}}$ $(\subset\mathbb{B}_t)$ の元であるから $(\tau_n<t)\in\mathbb{B}_t$

(ii) 次に $\theta_n(w)=\sigma(w)+\tau_n(w_{\sigma(w)}^{+})$ とおく $\theta_n\downarrow\theta$ であるから θ_n が Markov time なら (2) によって θ も Markov time となる

$$\{w:\theta_n(w)<t\}=\bigcup_{k,}\left\{w:\sigma(w)+\frac{k}{2^n}<t,\ \tau_n(w_{\sigma(w)}^{+})=\frac{k}{2^n}\right\}$$

$$=\bigcup_k\left(\sigma+\frac{k}{2^n}<t,\quad w_{\sigma(w)}^{+}\in B_{n\text{-}k}\right)\qquad B_{nk}=\left(w:\tau_n(w)=\frac{k}{2^n}\right)\in\mathbb{B}_{\frac{k}{2^n}}$$

$$=\bigcup_k\left(\sigma+\frac{k}{2^n}<t\quad (w_\sigma^{+})_{\frac{k}{2^n}}^{-}\in B'_{nk}\right)\qquad \text{故に } B_{nk}=\{w:w_{\frac{k}{2^n}}^{-}\in B'_{nk}\}$$

$$B'_{nk}\in\mathbb{B}(W)$$

$$=\bigcup_k\left(\sigma+\frac{k}{2^n}<t\quad w_{\sigma+\frac{k}{2^n}}^{-}\in B''_{nk}\right)^{(4)}$$

$$=\bigcup_k\left(\sigma+\frac{k}{2^n}<t,\ (w_t^{-})_{\sigma(w_t^{-})+\frac{k}{2^n}}^{-}\in B''_{nk}\right)^{(5)}$$

$$=\bigcup_k\left(\sigma+\frac{k}{2^n}<t,\ w_t^{-}\in B'''_{nk}\right)=\bigcup_k\left[\left(\sigma+\frac{k}{2^n}<t\right)\cap(w_t^{-}\in B''_{nk})\right]$$

$$\uparrow$$

$$\mathbb{B}_{t-\frac{k}{2^n}}\subset\mathbb{B}_t$$

$$\in\mathbb{B}_t$$

故に θ_n は Markov time である

Prop 7.3 σ が Markov time であれば

$\forall\varepsilon>0$ に対し $\sigma(w)=\sigma(w_{\sigma(w)+\varepsilon}^{-})$ がなりたつ

証明 $w_0\in W$ をかってにとって固定する

$B_1\equiv(w;\sigma(w_0)+\delta>\sigma(w)\geqq\sigma(w_0))\in\mathbb{B}_{\sigma(w_0)+\delta}$ であるから

$B_1=\{w:w_{\sigma(w_0)+\delta}^{-}\in B\}$ とかける $w_0\in B_1$ であるから

$(w_0)_{\sigma(w_0)+\delta}^{-}\in B$ であるが $\forall\varepsilon>\delta$ に対して $[(w_0)_{\sigma(w)+\varepsilon}^{-}]_{\sigma(w_0)+\delta}^{-}=(w_0)_{\sigma(w)+\delta}^{-}$ であるから $[(w_0)_{\sigma(w_0)+\varepsilon}^{-}]_{\sigma(w_0)+\delta}\in B$ 故に $(w_0)_{\sigma(w_0)+\varepsilon}^{-}\in B_1$

---

(4) $\left(\frac{k-1}{2^n}\leq\tau<\frac{k}{2^n}\right)=\left(\tau<\frac{k}{2^n}\right)-\left(\tau<\frac{k-1}{2^n}\right)$

$$\underset{\mathbb{B}_{\frac{k}{2^n}}}{\uparrow}\qquad\qquad \underset{\mathbb{B}_{\frac{k-1}{2^n}}\subset\mathbb{B}_{\frac{k}{2^n}}}{\uparrow}$$

(4) $(w_\sigma^{+})_{\frac{k}{2^n}}^{-}=(w_{\sigma+\frac{k}{2^n}}^{-})_\sigma^{+}$ に注意せよ 故に $B''_{nk}=\{w:w_\sigma^{+}\in B'_{nk}\}$ である。

(5) $\sigma(w)<t$ であれば $\sigma(w_t^{-})=\sigma(w)$ がなりたつ、次の Prop 7.3 で $\varepsilon=t-\sigma(w)$ とせよ。

Sem. on Probab.
Vol.3 1960年
P1-94

すなわち $\sigma(w_0)+\delta > \sigma(w_0{}^{-}_{\sigma(w_0)+\varepsilon}) \geq \sigma(w_0)$

$\delta\downarrow 0$ として $\sigma(w_0)=\sigma((w_0)^{-}_{\sigma(w_0)+\varepsilon})$ q.e.d

<u>Ex 7.3</u> W の各 path は死ぬまで連続

i.e $\forall w\in W$ $w(t)$ は $0\le t<\sigma_\infty(w)$ で連続とする

このとき F を S^* の closed set とするとき F への first passage time

$\sigma_F=\inf\{t\,;\,x_t(w)\in F\}$ は Markov time である

(∵) 1° $F\subset S$ のとき $G_1\supset G_2\supset\cdots$ を open set の例で $\bigcap_n G_n=F$ なるものとする

$$(w:\sigma_F<t)=\bigcup_{\substack{r<r'<t\\ \text{有理数}}}\bigcap_n\{w:\sigma_{G_n}<r<r'\le\sigma_\infty\}$$ がなりたつ

なぜなら $\subset$ はあきらかであるから(6) $\supset$ をしめす

$w\in$ 右辺とせよ. $\exists r\ \forall n\ \sigma_{G_n}(w)<r<\sigma_\infty$ であるから

$\lim\sigma_{G_n}(w)\le r<\sigma_\infty$ すると σ_∞ までの Path の連続性からあきらかに $w(\lim\sigma_{G_n})\in F$

すなわち $\sigma_F\le r<t$

<u>Ex 7.2</u> より σ_{G_n}, σ_∞ は Markov time であるから $\{w:\sigma_{G_n}<r<r'\le\sigma_\infty\}$

$=\{w:\sigma_{G_n}<r\}\cap\{w:\sigma_\infty\ge r'\}=\{w:\sigma_{G_n}<r\}\cap\{w:\sigma_\infty<r'\}^c\in\mathbb{B}_{r'}\subset\mathbb{B}_t$

故に $(w:\sigma_F<t)\in\mathbb{B}_t$

2° $F'=F\cup\infty$. $F\subset S$ のときには

$\sigma_{F'}=\sigma_F\wedge\sigma_\infty$ なることが容易にわかるから <u>Prop 7.2</u> より $\sigma_{F'}$ は Markov time である.

<u>Ex 7.4</u> G_1, G_2 を S'^* の open set で $G_1\cap G_2=\phi$ とする

このとき σ_{G_1}, σ_{G_2} は Markov time であるが <u>Prop 7.2</u> より

$\sigma(w)=\sigma_{G_1}(w)+\sigma_{G_2}(w^{+}_{\sigma_{G_1}})$ は Markov time である

これは G_1 へ行ってから G_2 へ行く最小時間と考えられる.

<u>Prop 7.4</u> $\sigma(w)$ は $\mathbb{B}_{\sigma+}$ 可測である

<u>証明</u> <u>Prop 7.2</u> によって $\forall n$ $\sigma(w)=\sigma(w^{-}_{\sigma(w)+\frac{1}{n}})$

$$\text{故に}\ \{w:\sigma(w)<t\}=\underbrace{\{w: w^{-}_{\sigma(w)+\frac{1}{n}}\in B_1\}}_{\in\mathbb{B}_{\sigma+\frac{1}{n}}}\quad \left(\text{ここで } B_1=\{w:\sigma(w)<t\}\right)$$

$$\text{故に}\ \{w:\sigma(w)<t\}\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathbb{B}_{\sigma+\frac{1}{n}}=\mathbb{B}_{\sigma+}$$ q.e.d

以上ですでに気づかれたであろうが Markov time とは直観的にいって"その

(6) $\sigma_{G_1}\le\sigma_{G_2}\le\cdots\le\sigma_F$, $\lim\sigma_{G_n}\le\sigma_F$ であるが $=$ にならないのは $\lim\sigma_{G_n}=\sigma_\infty$ となることがあるためである。

Sem. on Probab.
Vol.3 1960年
P1-94

時間までのPathの行動だけできまる時間"なのである。

§8. 強Markov過程 Dynkinの公式

定義 8.1 $\mathbb{M}$をMarkov過程とする．任意のMarkov time σ に対して次の性質がなりたつとき、$\mathbb{M}$は強Markov過程である．といわれる。

(強Markov性)

$\forall B_1 \in \mathbb{B}_{\sigma+}$,(1) $B_2 \in \mathbb{B}(W)$ に対し

$P_a(w\ ;\ w \in B_1,\ w_{\sigma(w)}^{+} \in B_2)$

$= E_a(P_{x_{\sigma(w)}(w)}(B_2)\ ;\ B_1)$

あきらかなCorollaryとして

Prop 8.1 $\mathbb{M}$が強Markov過程、σをMarkov timeとするとき

$\forall f_1$: 有界$\mathbb{B}_{\sigma+}$可測

$f_2 \in \mathcal{B}(S)$ に対し

$E_a(f_1(w) f_2(w_\sigma^+)) = E_a[f_1(w) E_{x_{\sigma(w)}(w)}(f_2(w'))]$ がなりたつ

ではどのようなMarkov過程が強Markov過程になるのであろうか、それについて次の重要な定理がある。

Prop 8.2 $\mathbb{M}$(Markov)について、そのSemi-group H_tが

$C(S) = \{f$: S上で有界連続$\}$を$C(S)$の中へうつすとする

このとき $\mathbb{M}$は 強Markov になる

証明

i) $\sigma_n(w) = \frac{k}{2^n}$ $\quad \frac{k-1}{2^n} \leq \sigma(w) < \frac{k}{2^n}$ で$\sigma_n(w)$を定義すると

$\sigma_n(w)$はMarkov timeで $\sigma_n \downarrow \sigma$ である(Prop 7.2 (3)の証明をみよ)

ii) $\varphi(a)$をS上の連続函数としたとき

$E_a(\varphi(w(t+\sigma(w)))\ ;\ w \in B_1) = E_a(E_{x_\sigma}(\varphi(w(t))\ ;\ w \in B_1)$

$B_1 \in \mathbb{B}_{\sigma+}$ をしめす

$$E_a(\varphi(w(t+\sigma_n))\ ;\ w \in B_1) = \sum_k E_a(\varphi(w(t+\frac{k}{2^n}))\ ;\ w \in B_1,\ \sigma_n = \frac{k}{2^n})$$

$$= \sum_k E_a(\varphi(w(t+\frac{k}{2^n})),\ ;\ w \in B_1\ \frac{k-1}{2^n} \leq \sigma(w) < \frac{k}{2^n})$$

(1) $\mathbb{B}_\sigma \subset \mathbb{B}_{\sigma+}$ であるから $B_1 \in \mathbb{B}_\sigma$ ならもちろんなりたつわけである
故に強Markov過程であれば、§1 Markov性(P3)の条件、$B_1 \in \mathbb{B}_t$ が
$B_1 \in \mathbb{B}_{t+}$ まで強められるわけである。

$$=\sum_{k} E_a\left(\varphi(w(t+\tfrac{k}{2^n}))\ ;\ w_{\frac{k}{2}}^{-} \in B'_{nk}\right) \qquad B'_{nk} \in \mathbb{B}(W)$$

$$\left(w \in B_1, \frac{k-1}{2^n} \le \sigma(w) < \frac{k}{2^n}\right)$$

$$=\bigcup_{m=1}^{\infty}\left(w \in B_1, \frac{k-1}{2^n} \le \sigma < \frac{k}{2^n} - \frac{1}{m}\right)$$

$B_1 \in \mathbb{B}_{\sigma+}$ であるから $^{\forall m>0}B_1 = \{w : w_{\sigma+\frac{1}{m}}^{-} \in B'_m\}$ とかけ

$$=\bigcup_{m=1}^{\infty}\left(w_{\sigma+\frac{1}{m}}^{-} \in B'_m \quad \frac{k-1}{2^n} \le \sigma < \frac{k}{2^n} - \frac{1}{m}\right)$$

$$=\bigcup_{m=1}^{\infty}\left[\left(w_{\frac{k}{2^n}}^{-}\right)_{\sigma+\frac{1}{m}}^{-} \in B'_m\ ,\ \frac{k-1}{2^n} \le \sigma < \frac{k}{2^n} - \frac{1}{m}\right]$$

$$\uparrow$$

$$\mathbb{B}_{\frac{k}{2^n}-\frac{1}{m}} \subset \mathbb{B}_{\frac{k}{2^n}}$$

$$=\left[w_{\frac{k}{2^n}}^{-} \in B'_{nk}\right]$$

Markov 性より

$$=\sum_{k} E_a\left(E_{X_{\frac{k}{2^n}}}(\varphi(w(t)))\ ;\ w_{\frac{k}{2^n}}^{-} \in B'_{nk}\right)$$

$$=E_a\left(E_{X_{\sigma_n}}(\varphi(w(t)))\ ;\ w \in B_1\right)$$

$$=E_a\left(H_t\varphi(X_{\sigma_n})\ ;\ w \in B_1\right)$$ $\varphi(b)$, $H_t\varphi(b)$ は連続かつ $X_t(w)$ は連続

又 $\sigma_n \downarrow \sigma$ であるから $n \longrightarrow \infty$ として

$$E_a(\varphi(w(t+\sigma))\ ;\ B_1) = E_a(H_t\varphi(X_\sigma)\ ;\ w \in B_1)$$
$$= E_a(E_{X_\sigma}(\varphi(w(t))\ ;\ B_1)$$

iii) (ii) における φ は容易に φ 有界可測まで拡張できる，$\varphi = \chi_E$ として

$B_2 = \{w : w(t) \in E\}$ なる集合については

$P_a(w_\sigma^+ \in B_2, B_1) = E_a(P_{X_\sigma}(B_2)\ ;\ B_1)$ がなりたつ. 一般の $B \in \mathbb{B}(W)$ へ拡張するには Monotone lemma を用いればよい。

<u>EX 1</u>　Brown 運動については

$$H_t f(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{|a-b|^2}{2t}} f(b)\,db = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} f(a+b) e^{-\frac{|b|^2}{2t}}\,db$$ であるから

$H_t : C \to C$　故に強マルコフ過程である.

<u>EX 2</u>　同様に反射壁のある Brown 運動も強マルコフ過程である.

<u>Prop 8.3</u> (Dynkin)

$\mathbb{M}$ を強 Markov 過程 σ を Markov time とする。

Sem. on Probab.
Vol.3 1960年
P1-94

もし $E_a(\sigma)<+\infty$ ならば $^{\forall}u\in\mathfrak{D}(\mathcal{G})$ に対し

$$u(a)=-E_a\left(\int_0^{\sigma(w)}\mathcal{G}u(x_t(w))\,dt\right)+E_a\left(u(x_{\sigma(w)}(w))\right)$$ がなりたつ

<u>証明</u>　$h_\alpha(a)=\alpha u(a)-\mathcal{G}u(a)$ とおく.　$(\alpha-\mathcal{G})=G_\alpha^{-1}:\mathfrak{D}(\mathcal{G})\to B/\mathfrak{N}$

故に $G_\alpha h_\alpha(a)=u(a)$

故に $u(a)=\int_0^\infty e^{-\alpha t}H_t h_\alpha(a)\,dt=E_a\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t}h_\alpha(x_t)\,dt\right)$

$$=E_a\left(\int_0^\sigma 〃\right)+E_a\left(\int_\sigma^\infty 〃\right)$$

$$=A_\alpha+B_\alpha$$

$\alpha\to0$ とすると $h_\alpha(a)\longrightarrow-\mathcal{G}u(a)$　かつ $|h_\alpha(a)|\le\alpha\|u\|+\|\mathcal{G}u\|$

$E_a\left(\int_0^\sigma 1\,dt\right)=E_a(\sigma)<+\infty$

故に Bounded convergence Thより

$$A_\alpha\longrightarrow-E_a\left(\int_0^\sigma\mathcal{G}u(x_t)\,dt\right)\qquad(\alpha\to0)$$

$$B_\alpha=E_a\left(e^{-\alpha\sigma}\int_0^\infty e^{-\alpha t}h_\alpha(x_{t+\sigma})\,dt\right)$$

$$=E_a\left(e^{-\alpha\sigma}\int_0^\infty e^{-\alpha t}h_\alpha(x_t(w_\sigma^+))\,dt\right)$$

強マルコフ性より (2)

$$=E_a\left(e^{-\alpha\sigma}E_{x_\sigma}\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t}h_\alpha(x_t)\,dt\right)\right)$$

$$=E_a\left(e^{-\alpha\sigma}G_\alpha h_\alpha(x_\alpha)\right)=E_a\left(e^{-\alpha\sigma}u(x_\sigma)\right)$$

$\alpha\to0$ として $B_\alpha\longrightarrow E_a(u(x_\sigma))$

故に証明できた〃

$\mathbb{M}=(S\cup\infty,W,P_a)$ を 強Markov過程とする

$\tau_U=\inf\{t: x_t\notin U\}=\sigma_{U^c}$ で τ_U を定義し. <u>Uでの滞在時間(holding time)</u>という(3)

§5.3で注意したように適当な$\mathfrak{D}(S)\subset\mathbb{B}(S)$があるとき$\mathcal{G}$は$\tilde{\mathcal{R}}\subset\mathfrak{D}(S)$から

---

(2) $e^{-\alpha\sigma}$は$\mathbb{B}_{\sigma+}$可測である　Cf <u>Prop 7.4</u>

(3) Ex 7.2よりUが開集合ならτ_UはMarkov timeであり
すべてのPathが死ぬまで連続ならUが閉集合でもMarkov timeになる(Ex 7.3)
又 τ_Uのことを<u>first leaving time</u>という

Sem. on Probab.
Vol.3 1960年
P1-94

$\mathfrak{D}(S)$の写像としてあいまいさなしに定義できた．今は、特に$\mathfrak{D}(S)=C(S)$ととれる場合について考え $\widetilde{\mathfrak{G}}$はかく制限されたgeneratorとする。

Prop 8.4 $a\in S$をtrapとする i.e $P_a(x_t=a \quad 0\le{}^\forall t<\sigma_\infty)=1$

このとき． $\widetilde{\mathfrak{G}}u(a)=-\dfrac{u(a)}{E_a(\sigma_\infty)}$ $\quad E_a(\sigma_\infty)<+\infty$

$\qquad\qquad = 0$ $\quad E_a(\sigma_\infty)=+\infty$

証明 $E_a(\sigma_\infty)<+\infty$ならDynkinの公式（Prop 8.3）で$\sigma=\sigma_\infty$とおいて

$$u(a)=-E_a\left(\int_0^{\sigma_\infty}\widetilde{\mathfrak{G}}u(x_t)dt\right)+E_a(u(x_{\sigma_\infty}))=-\widetilde{\mathfrak{G}}u(a)E_a\left(\int_0^{\sigma_\infty}1\,dt\right)^{(4)}$$

$$=-\widetilde{\mathfrak{G}}u(a)E_a(\sigma_\infty)$$

$E_a(\sigma_\infty)=+\infty$ なら $\sigma_n=\sigma_\infty\wedge n$ とおいて

$$u(a)=-E_a\left(\int_0^{\sigma_n}\widetilde{\mathfrak{G}}u(x_t)dt\right)+E_a(u(x_{\sigma_n}))=-\widetilde{\mathfrak{G}}u(a)E_a(\sigma_n)+E_a(u(x_{\sigma_n}))$$

故に $|\widetilde{\mathfrak{G}}u(a)|\cdot E_a(\sigma_n)\le 2\|u\|$ $\quad n\to\infty$とすると$E_a(\sigma_n)\to E_a(\sigma_\infty)=+\infty$

故に $\widetilde{\mathfrak{G}}u(a)=0$

Prop 8.5 $a\in S$はtrapでないとし Uをaの閉近傍とする．このとき

$$\widetilde{\mathfrak{G}}u(a)=\lim_{U\downarrow a}\frac{E_a(u(x_{\tau_U}))-u(a)}{E_a(\tau_U)}$$ がなりたつ

証明

(i) aがtrapでないなら ${}^\exists v\in\mathfrak{D}(\mathfrak{G})$ $\widetilde{\mathfrak{G}}v(a)\neq 0$

なぜなら ${}^\forall v\in\mathfrak{D}(\widetilde{\mathfrak{G}})$ $\widetilde{\mathfrak{G}}v(a)=0$ なら $\widetilde{\mathfrak{G}}=\alpha-G_\alpha^{-1}$ であったから

$\alpha v(a)=G_\alpha^{-1}v(a)$ 故に $\alpha G_\alpha f(a)=f(a)$ ${}^\forall f\in C(S)$

これより $H_tf(a)=f(a)$がすべてのtになりたつ（$f\in C$であるからH_tfはtについて右連続）

これより$f_n\in C$を$f_n\to\chi_{\{a\}}$ [5] なるようにとって $P_a(x_t=a)=1$

故にP_a（${}^\forall t$有理数に対し $x_t=a$)$=1$ $\quad x_t$は右連続であったから

$P_a(0\le{}^\forall t<+\infty,\ x_t=a)=1$ [6] これはaがtrapであることを意味し矛盾である

(ii) aの閉近傍Uがあって $E_a(\tau_U)<+\infty$

なぜなら(i)より ${}^\exists v\in\mathfrak{D}(\widetilde{\mathfrak{G}})$ $v(a)\neq 0$（必要なら$-v$をとることにより）

$\widetilde{\mathfrak{G}}v(a)=\alpha>0$ と仮定してよい、$\widetilde{\mathfrak{G}}v$は今、連続であるから

(4) $u(x_{\sigma_\infty})=u(\infty)=0$

(5) $\chi_{\{a\}}(x)=1 \quad x=a$

$\qquad\qquad\;\; =0 \quad x\neq a$

(6) このように$P_a(\sigma_\infty=+\infty)=1$なるtrapをconservative trapという。

$\exists U$: a の閉近傍 $\qquad \widetilde{\mathcal{G}}\, v(b) > \frac{\alpha}{2} \qquad {}^{\forall} b \in U$

$\tau_n = \tau_U \wedge n$ は Markov time で Prop 8.3 より

$$u(a) = -E_a\left(\int_0^{\tau_n} \widetilde{\mathcal{G}}\, u(x_t)\, dt\right) + E_a(u(x_{\tau_n}))$$

故に $\frac{\alpha}{2} E_a(\tau_n) \leq E_a\left(\int_0^{\tau_n} \widetilde{\mathcal{G}}\, u(x_t)\, dt\right) \leq 2\|u\|$ (7)

故に $E_a(\tau_n) \leq \frac{4\|u\|}{\alpha} \qquad n \to \infty$ として $E_a(\tau_U) \leq \frac{4\|u\|}{\alpha} < +\infty$

(iii) 又 path の右連続性より $E_a(\tau_U) > 0$ はあきらかである. 又 $U' \subset U$ なら $\tau_{U'} \leq \tau_U$ したがって $E_a(\tau_U) < +\infty$ なら $E_a(\tau_{U'}) < +\infty$ に注意する.

$$E_a(u(x_{\tau_U})) - u(a) = E_a\left(\int_0^{\tau_U} \widetilde{\mathcal{G}}\, u(x_t)\, dt\right)$$

故に
$$\left|\frac{E_a(u(x_{\tau_U})) - u(a)}{E_a(\tau_U)} - \widetilde{\mathcal{G}}\, u(a)\right| \leq \frac{1}{E_a(\tau_U)} \left| E_a\left(\int_0^{\tau_U} [\widetilde{\mathcal{G}} u(x_t) - \widetilde{\mathcal{G}} u(a)]\, dt\right)\right|$$
$$\leqq \max_{b \in U} |\widetilde{\mathcal{G}}\, u(b) - \widetilde{\mathcal{G}}\, u(a)|$$

$\widetilde{\mathcal{G}}\, u$ の連続性を考えると

$U \downarrow a$ とて 右辺 $\longrightarrow 0$ 故に $\displaystyle\lim_{U \downarrow a} \frac{E_a(u(x_{\tau_U})) - u(a)}{E_a(\tau_U)} = \widetilde{\mathcal{G}}\, u(a)$

q.e.d

§9. Kac の定理と local time

$\mathbb{M}$ を Markov process とする

Prop 9.1 (Kac)

$V(a)$ は $\mathcal{B}(S)$ に属すれば

$f \in \mathcal{B}(S)$ に対し

$$R_\alpha f(a) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} E_a\left(e^{-\int_0^t V(x_\tau)\, d\tau} f(x_t)\right) dt \qquad \alpha > \|V_-\|$$

と定義すると R_α は $\mathcal{B}(S)$ から $\mathcal{B}(S)$ の一つの operator である. このとき

(1) $R_\alpha f(a) = G_\alpha f(a) - R_\alpha(V \cdot G_\alpha f)(a)$

(2) $R_\alpha f(a) = G_\alpha f(a) - G_\alpha(V \cdot R_\alpha f)(a)$

(3) $v = R_\alpha f$ とおくと $\quad v \in \mathcal{D}(\mathcal{G})$ かつ

(7) $0 \leq t < \tau_n$ なら $x_t \in U$ に注意せよ

(1) $V_-(a) = -V(a) \vee 0$

Sem. on Probab.
Vol.3 1960年
P1-94

$$(\alpha - V(a) + \mathfrak{g})\, v = f$$ がなりたつ

証明

$$R_\alpha f(a) - G_\alpha f(a) = E_a\Big(\int_0^\infty e^{-\alpha t}\big(e^{-\int_0^t V(X_t)dt} - 1\big) f(X_t)\,dt\Big)$$

$$\overset{(2)}{=} -E_a\Big(\int_0^\infty e^{-\alpha t}\int_0^t e^{-\int_s^t V(X_\theta)d\theta} V(X_s)\,ds\, f(X_t)\,dt\Big)$$

$$= -E_a\Big(\int_0^\infty V(X_s)\,ds \int_s^\infty e^{-\alpha t} e^{-\int_s^t V(X_\theta)d\theta} f(X_t)\,dt\Big)$$

$$= -E_a\Big(\int_0^\infty V(X_s)\,ds\ e^{-\alpha s}\int_0^\infty e^{-\alpha t} e^{-\int_s^{t+s} V(X_\theta)d\theta} f(X_{t+s})\,dt\Big)$$

$$= -E_a\Big(\int_0^\infty V(X_s)\,ds\ e^{-\alpha s}\int_0^\infty e^{-\alpha t} e^{-\int_0^t V(X_\theta(w_s^+))d\theta} f(X_t(w_s^+))\,dt\Big)$$

Markov 性より

$$= -E_a\Big(\int_0^\infty e^{-\alpha s}\, V(X_s)\, E_{X_s}\Big(\int_0^\infty e^{-\alpha t}\, e^{-\int_0^t V(X_\theta)d\theta} f(X_t)\,dt\Big)$$

$$= -G(V R_\alpha f)(a)$$

故に (2) が示せた　(1) は脚注 (2) の二番目の変形式を用いて同様に証明できる

(3) の証明

$v(a) = R_\alpha f(a)$ とおくと　(2) 式から

$$v = G_\alpha[f - V\cdot R_\alpha f] \in G_\alpha[\mathcal{B}(S)] = \mathcal{D}(\mathfrak{g})$$

かつ　$(\alpha - \mathfrak{g})\, v = G_\alpha^{-1} v = f - V\cdot R_\alpha f = f - V\cdot v$

故に　$(\alpha + V - \mathfrak{g})\, v = f$

この定理の応用を二、三のべてみる

1　Arcsin law

Brown 運動 (Ex 6.3) を考える

$$V(a) = 1 \qquad a \geqq 0$$
$$\quad\ = 0 \qquad a < 0$$

このとき $\int_0^t V(X_\tau(w))\,d\tau$ は Path W が時間 t までに $[0\ \infty)$ に滞在する時間の合計であるが、このとき

$$P_0\Big(\int_0^t V(X_\tau)\,d\tau < \sigma\Big) = \frac{2}{\pi}\sin^{-1}\sqrt{\frac{\sigma}{t}} \qquad (\sigma \leq t)$$ がなりたつ

(2)　一般に　$e^{\int_0^t \varphi(s)ds} - 1 = \int_0^t e^{\int_s^t \varphi(\theta)d\theta}\varphi(s)\,ds$

$e^{\int_0^t \varphi(s)ds} - 1 = \int_0^t e^{\int_0^s \varphi(\theta)d\theta}\varphi(s)\,ds$

Sem. on Probab.
Vol.3 1960年
P1-94

証明 $v(a)=\int_0^\infty e^{-\alpha t}E_a(e^{-\beta\int_0^t V(X_\tau)d\tau})dt.\ \binom{\alpha>0}{\beta>0}$ とおくと Prop 9.1 (3)

より $v\in\mathfrak{D}(\mathfrak{G})$ で $(\alpha+\beta V-\frac{1}{2}\frac{d^2}{da^2})v=1$ がなりたつ

i.e v bdd. a.c v' bdd, a.c. v'' bdd

かつ $(\alpha+\beta)v-\frac{1}{2}v''=1 \qquad 0\leq a<\infty \qquad \cdots\cdots ①$

$\alpha v-\frac{1}{2}v''=1 \qquad -\infty<a<0 \qquad \cdots\cdots ②$

① から $v=\frac{1}{\alpha+\beta}+C_1e^{-\sqrt{2(\alpha+\beta)}a}+C_2e^{\sqrt{2(\alpha+\beta)}a} \qquad 0\leq a<\infty$

② から $v=\frac{1}{\alpha}+C_3e^{-\sqrt{2\alpha}a}+C_4e^{\sqrt{2\alpha}a} \qquad -\infty<a<0$

有界性より $C_2=C_3=0$

$a=0$ での vの連続性より $\frac{1}{\alpha+\beta}+C_1=\frac{1}{\alpha}+C_4$

$a=0$ での v'の連続性より $-C_1\sqrt{2(\alpha+\beta)}=C_4\sqrt{2\alpha}$

これより $v(0)=\frac{1}{\alpha+\beta}+C_1=\frac{1}{\sqrt{\alpha(\alpha+\beta)}}$ となる

故に $\int_0^\infty e^{-\alpha t}E_0(e^{-\beta\int_0^t V(X_\tau)d\tau})dt=\frac{1}{\sqrt{\alpha(\alpha+\beta)}}$

ところで $\int_0^\infty\frac{e^{-\alpha t}}{\sqrt{\pi t}}dt=\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \qquad \int_0^\infty\frac{e^{-\beta t}}{\sqrt{\pi t}}e^{-\alpha t}dt=\frac{1}{\sqrt{\alpha+\beta}}$

故に $\frac{1}{\sqrt{\alpha(\alpha+\beta)}}=\int_0^\infty\frac{e^{-\alpha t}}{\sqrt{\pi t}}dt\cdot\int_0^\infty\frac{e^{-\beta t}}{\sqrt{\pi t}}e^{-\alpha t}dt=\int_0^\infty e^{-\alpha t}\left[\frac{1}{\pi}\int_0^t\frac{e^{-\beta s}}{\sqrt{(t-s)s}}ds\right]dt$

故に $E_0(e^{-\beta\int_0^t V(X_t)d\tau})=\frac{1}{\pi}\int_0^t\frac{e^{-\beta s}}{\sqrt{(t-s)s}}ds$

故に $P_0(\int_0^t V(X_\tau)d\tau<\sigma)=\Phi(\sigma)$ とおくと

$$\int_0^\infty e^{-\beta s}d\Phi(s)=\frac{1}{\pi}\int_0^t\frac{e^{-\beta s}}{\sqrt{(t-s)s}}ds$$

故に $\Phi(\sigma)=\frac{1}{\pi}\int_0^\sigma\frac{e^{-\beta s}}{\sqrt{(t-s)s}}ds=\frac{2}{\pi}\sin^{-1}\sqrt{\frac{\sigma}{t}} \qquad (\sigma\leq t)$

2、同じく Brown 運動を考える、この Generator は $\mathfrak{G}u=\frac{1}{2}u''$ であったが

Sem. on Probab.
Vol.3 1960年
P1-94

これから $\mathcal{G}u=\frac{1}{2}u''-V\cdot u$ $(V\geqq 0)$ なるGenerator をもつ process を作ってみよう

i) $(S=R^1, W, \mathbb{B}(W), P_a^B)$ を Brown運動[3]とする $T=[0+\infty]$ と W との積空間 $T\times W$ を考え、それの上の確率測度の系 Q_a を まず rectangular set $[t,+\infty]\times B$ に対し

$$Q_a([t,+\infty]\times B)=E_a^B(e^{-\int_0^t V(x_\tau(w))d\tau};\ w\in B)$$ と定める

これは一意的に $\mathbb{B}(T\times W)$ へ拡張できるから、それを Q_a とする。

ii) $\phi: T\times W\to\widetilde{W}$ を次のように定義する

$$\overline{w}=\phi[(tw)]\ ;\ \overline{w}(s)=w(s)\qquad 0\leqq s<t$$

$$\overline{w}(s)=\infty\qquad t\leqq s\leqq+\infty$$

$\overline{W}=\phi[T\times W]$ とする

W 上の確率測度の系 $\overline{P}_a$ を $\overline{P}_a(B)=Q_a[\phi^{-1}(B)]$ で定める

この定義より

$$\overline{P}_a(\sigma_\infty(w)>t,\ w_t^-\in B)=E_a^B(e^{-\int_0^t V(x_\tau(w))d\tau};\ w_t^-\in B)^{(4)}$$

(iii) かくして $\overline{M}=(R^1\cup\infty, \overline{W}, \mathbb{B}(\overline{W}), \overline{P}_a)$ が得られた

$E\subset R^1$ のとき

$$\overline{P}(t,a,E)=\overline{P}_a(\sigma_\infty(w)>t,\ x_t\in E)$$

$$=E_a^B(e^{-\int_0^t V(x_\tau(w))d\tau};\ x_t\in E)$$

$$\overline{H}_t f(a)=\int_{-\infty}^{\infty}f(b)P(t,a,db)=\int_{-\infty}^{\infty}f(b)E_a^B(e^{-\int_0^t V(x_\tau(w))d\tau};\ x_t\in db)$$

$$=E_a^B(f(x_t)e^{-\int_0^t V(x_\tau(w))d\tau})$$

$$\overline{G}_\alpha f(a)=\int_0^\infty e^{-\alpha t}\overline{H}_t f(a)dt=\int_0^\infty e^{-\alpha t}E_a^B(f(x_t)e^{-\int_0^t V(x_\tau)d\tau})dt$$

$$=E_a^B(\int_0^\infty e^{-\alpha t}e^{-\int_0^t V(x_\tau)d\tau}f(x_t)dt)$$

かくして $\overline{M}$－Process の Green operator が Brown運動の上の平均であらわされ

3) 以後その平均を $E^B(\cdot)$ Green operator を G_α^B 等すべて B をつけてあらわすことにする。

4) 両辺にあるBは左辺は $\mathbb{B}(W_1)$ の元，右辺は $\mathbb{B}(W)$ の元であるが、$\sigma_\infty(w)>t$ なる条件のもとで同一視できる。

Sem. on Probab.
Vol.3 1960年
P1-94

しかも Prop 9.1 における R_α なる operator に他ならない．故に Prop 9.1より
$\overline{G}_\alpha[\mathcal{B}(S)] = G_\alpha^B[\mathcal{B}(S)] = \{u, u', u''\ bdd\}$
かつ $v = \overline{G}_\alpha f$ は $(\alpha + V - \frac{1}{2}\frac{d}{da^2})v = f$ をみたす

すなわち $\overline{\mathcal{G}}\,v = \alpha v - f = \frac{1}{2}v'' - V\cdot v$

かくして Brown 運動から出発して generator が $\frac{1}{2}\frac{d^2}{da^2} - V(a)\cdot$ なる Process が構成できた．

(注) この Process が Markov Process であることは E_a^B の Markov 性から証明できるがここでは省略する。

3．Local time　後の diffusion の構成に重要な local time についてのべる

今、原点から出発する Brown 運動 $X_t(w)$ を考える $(w \in \Omega(BP))$ $A \subset R^1$ その特性函数を χ_A とするとき $\int_0^t \chi_A(X_\tau(w))d\tau$ は原点から出た Path w が時間 t までに集合 A に滞在する時間である。

$$\mu(t\,A\,w) \equiv \int_0^t \chi_A(X_\tau(w))d\tau = |\{\tau;\ 0 \le \tau \le t,\ X_\tau(w) \in A\}|^{(5)}$$

これは A に関し測度であるが、実は Lebesgue 測度に関し density $f(t,x,w)$ をもちしかもこの $f(t,x,w)$ は、ほとんどすべての w に対して (t,x) について連続であることが、H. Trotter によつて証明された。 この $f(t,x,w)$ を Brownian local time という．

すなわち

Prop 9.2　(H. Trotter)

$\mu(t\,A\,w)$ は、ほとんどすべての w に対し (t,x) について連続な density $f(t,x,w)$ をもつ

$$\mu(t\ A\ w) = \int_A f(t\ x\ w)\ dx$$

証明

$$I_n = [nr, (n+1)r) \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots\cdots$$

$$f_r(t\ x\ w) = \frac{1}{r}\mu(t, I_n\ w) \qquad \text{とおく}$$

あきらかに $f_r(t,\cdot,w)$ は I_n なる interval では定数で $x = nr$ なる点で jump をもつ step function である。 $x = nr$ での f の jump の大きさを $\Delta_{nr}^{(t)}$ とおく

$$\Delta_{nr}^{(t)} = \frac{1}{r}|\mu(t\ I_n\ w) - \mu(t\ I_{n-1}\ w)|$$

(5) $|\ \ |$ は Lebesgue 測度をあらわす

(6) 証明はかなり長く、いくぶんめんどうであるので、とばして先をよまれてさしつかえない。
H. Trotter. A Property of Brownian Motion Paths. Illinois Journal

Sem. on Probab.
Vol.3 1960年
P1-94

このとき次の lemma がなりたつ

Lemma1 $\quad {}^\exists r_0 > 0$ (univeral constant)

$^\forall T, > 0$ $\ ^\forall \delta > 0$ に対し $\ ^\exists K(T\ \delta)$ が次のようにとれる

$^\forall t \in [0\ T]$

$r_0 > {}^\forall r > 0$, $\ ^\forall d > 0$, ただし $r^{-\frac{1}{2}} d \geq \delta$ に対し

$$P(\max_n \Delta_{nr}^{(t)} \geq d) < K r^{-1} \cdot e^{-r^{-\frac{1}{2}} d}$$

この証明はあとまわしにしてこれを仮定して定理を証明しよう。

$r_i = 2^{-i}$ $\ d_i = 3i \cdot 2^{-\frac{i}{2}}$ とおく $\ r_i^{-\frac{1}{2}} d_i = 3i \geq 1$ であるから

$T > 0$ に対し $^\exists K(T)$

$^\forall t \in [0\ T+1]$ $\quad {}^\forall i$, $2^{-i} < r_0$

に対し

(1) …… $P[\max_n \Delta_{n 2^{-i}}^{(t)} > 3i \cdot 2^{-\frac{i}{2}}] \leq K 2^i e^{-3i}$

次に $A_i = \{k \cdot 2^{-2i},\ k 2^{-2i} \in [0\ T+1),\ k = 1.2 \cdots\}$

とおくと

(2) $P[\bigcup_{t \in A_i} \{\max_n \Delta_{n 2^{-i}}^{(t)} > 3i \cdot 2^{-\frac{i}{2}}\}] \leq K(T+1) 2^{2i} \cdot e^{-3i}$ [7]

(2)の左辺は収束(iについて)するから Borel Cantelli の Lemma より Pの[ ]中の集合に無限回入るようなωは P-measure 0 すなわち $^\exists \Omega_T \subset \Omega$

(3) $P(\Omega_T) = 1$ かつ $^\forall \omega \in \Omega_T$ に対し $^\exists i_0$ $\ ^\forall i \geq i_0$ $\ ^\forall t \in A_i$

$\max \Delta_{n 2^{-i}}^{(t)} \leq 3i \cdot 2^{-\frac{i}{2}}$

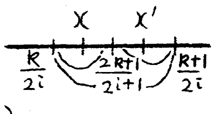
次に定義からすぐに $f_i = f_{2^{-i}}(t, x, \omega)$ として

(4) $|f_i(t\ x\ \omega) - f_i(t\ x'\ \omega)| < \max_n |\Delta_{n\, 2^{-i}}^{(t)}|$ $\quad$ if $|x - x'| < 2^{-i}$

(5) $f_i(t\ x\ \omega) \uparrow$ in t かつ $|f_i(t'\, x\, \omega) - f_i(t\, x\, \omega)| \leq 2^i |t' - t|$

(6) $f_i(t\ x\ \omega) = \frac{1}{2}(f_{i+1}(t\ x\ \omega) + f_{i+1}(t\ x'\ \omega))$

但 x, x' は右図のごとき関係にあるとする



i.e. $x \in I_1$ $\ I_1 = I_2 + I_3$ $\quad x \in I_2$ $\ x' \in I_3$

$I_1 = [\frac{k}{2^i}\ \ \frac{k+1}{2^i})$ $\quad I_2 = [\frac{k}{2^i}\ \ \frac{2k+1}{2^{i+1}})$ $\quad I_3 = [\frac{2k+1}{2^{i+1}}\ \ \frac{k+1}{2^i})$

$\because$ $I_1 = I_2 + I_3$ であるから

---

(7) $t \in A_i$ の個数はせいぜい $(T+1)2^{2i}$ である

Sem. on Probab.
Vol.3 1960年
P1-94

$$
\begin{aligned}
f_i(t\,x\,w) &= 2^i\mu(t\,I_1\,w) \qquad x\in I_1\\
&= 2^i\{\mu(t\,I_2\,w)+\mu(t\,I_3\,w)\}\\
&= \frac{1}{2}(2^{i+1}\mu(t\,I_2\,w)+2^{i+1}\mu(t\,I_3\,w))\\
&= f_{i+1}(t\,x\,w)+f_{i+1}(t\,x'\,w) \qquad x'\in I_3
\end{aligned}
$$

(3) (4) より $w\in\Omega_T$ に対して

$|x-x'|<2^{-i}$ $\quad i\geqq i_0 \quad t\in A_i$ ならば

$|f_i(t\,x\,w)-f_i(t\,x'\,w)|<3i\cdot 2^{-\frac{i}{2}}$

さらに $\forall t\in[0\,T]$ に対しては $\exists t'\in A_i \quad |t-t'|\leqq 2^{-2i}$ であるから (5) を用いて) $|x-x'|<2^{-i}$ のとき

(7) $$|f_i(t\,x\,w)-f_i(t\,x'\,w)|\leqq|f_i(t\,x\,w)-f_i(t'\,x\,w)|+|f_i(t'\,x\,w)-f_i(t'\,x'\,w)|$$
$$+|f_i(t'\,x'\,w)-f_i(t,x,w)|$$
$$\leqq 2^i 2^{-2i}+3^i 2^{-\frac{i}{2}}+2^i\cdot 2^{-2i}=2^{-i+1}+3i\,2^{-\frac{i}{2}}$$

又 (6) より $|f_i(t\,x\,w)-f_{i+1}(t\,x\,w)|\leqq\frac{1}{2}|f_{i+1}(t\,x\,w)-f_{i+1}(t\,x'\,w)|$

x、x' の間に一点 x'' を $|x-x''|\leqq 2^{-(i+1)}$, $|x''-x'|\leqq 2^{-(i+1)}$ なるようにはさむ、このとき (7) で i を $i+1$ として

$$|f_i(t\,x\,w)-f_{i+1}(t\,x\,w)|\leqq\frac{1}{2}|f_{i+1}(t\,x\,w)-f_{i+1}(t\,x\,w')|\leqq\frac{1}{2}|f_{i+1}(t\,x\,w)-f_{i+1}(t\,x''\,w)|$$
$$+\frac{1}{2}|f_{i+1}(t\,x''\,w)-f_{i+1}(t\,x'\,w)|\leqq 2^{-i}+3(i+1)2^{-\frac{i+1}{2}}$$

$$|f_{i+m}(t\,x\,w)-f_i(t\,x\,w)|\leqq\sum_{j=i}^{i+m-1}2^{-j}+3(j+1)2^{-\frac{j+1}{2}}\leqq\alpha\cdot i\,2^{-\frac{i}{2}}\xrightarrow[(i\to\infty)]{}0$$
$$(\alpha : const)$$

故に $\omega\in\Omega_T$ に対し $f_i(t\,x\,w)$ は $t\in[0\,T]$ $x\in R^1$ で收束し、しかも $(t\,x)$ について一様收束である。 極限を $f(t\,x\,w)$ とおこう $f(t\,x\,w)$ は $(t\,x)$ について連続である。なぜなら

$|f_i(t\,x\,w)-f_i(t'\,x\,w)|\leqq 2^i|t-t'|$

$|f_i(t\,x'\,w)-f_i(t\,x\,w)|\leqq 3^i 2^{-\frac{i}{2}}+2^{-i+1} \qquad 0\leqq t\leqq T,\ |x-x'|\leqq\frac{1}{2i}$

$|f(x+w)-f_i(t\,x\,w)|\leqq\alpha\, i\,2^{-\frac{i}{2}}$

の三式がなりたち、これより $|x-x'|<\frac{1}{2^i}$ $\quad t\cdot t'\in[0\,T]$ に対し

$$
\begin{aligned}
|f(t'\,x'\,w)-f(t\,x\,w)| &\leqq|f(t'\,x'\,w)-f_m(t'\,x'\,w)|\\
&+|f_m(t'\,x'\,w)-f_m(t\,x'\,w)|\\
&+|f_m(t\,x'\,w)-f_m(t\,x\,w)|\\
&+|f_m(t\,x\,w)-f(t\,x\,w)|
\end{aligned}
$$

Sem. on Probab.
Vol.3 1960年
P1-94

$$\leq 2\cdot\alpha i 2^{-\frac{i}{2}}+2^{i}|t-t'|+3^{i}2^{-\frac{i}{2}}+2^{-i+1}$$

ここでまず i を十分大きくし、そのうち $|t-t'|$ を十分小さくとれば いくらでも小さくなる。

次に $T=1,2\cdots\cdots n\cdots\cdots$, $\bigcap_{T=1}^{\infty}\Omega_T=\Omega''$ とおくと

$P(\Omega'')=1$

かゝ) $w\in\Omega''$ に対しては $f(t,x,w)$ が $(t\,x)\in[0\,\infty)\times R^1$ で定義され連続、

又 $\mu(t\,E\,w)=\int_E f(t\,x\,w)\,dx$ はあきらかであろう

故に Prop 9.2 は (lemma1をのぞいて) 証明できた。

Lemma 1 の証明

$x_t(w)$ $w\in\Omega(\mathbb{B}P)$ から Ex 6.3 の方法で Markov 過程がえられる

$V(x)=-1$ $(0\;r)$

$=1$ $(-r\;0)$ とおく、Brown 運動の対称性、及び空間

$=0$ その他 的一様性よりあきらかに

$\Delta_{nr}^{(t)}(w)=\frac{1}{r}|\mu(t\;I_{n-1}\,w)-\mu(t\;I_n\,w)|$ の P_0 による法則は $\frac{1}{r}\left|\int_0^t V(x_\tau(w))d\tau\right|$

の P_{nr} による法則に等しい

$$E_a(e^{-u\int_0^t V(x_\tau)d\tau})=m(a\;u\;t)\qquad(u>0)$$

$$E_a\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t}e^{-u\int_0^t V(x_\tau)d\tau}dt\right)=\int_0^\infty e^{-\alpha t}m(a\,u\,t)\,dt=F(a\;u\;\alpha)\text{とおく}$$

$(u>0,\ \alpha>0,)$

Lemma 2 $a\geqq 0$ とする

このとき $m(a\;u\;t)\uparrow$ in t

Proof $u=1$ としてさしつかえない

$$e^{-\int_0^t V(x_\tau)d\tau}=1+\int_0^t -V(x_\tau)\,e^{-\int_0^\tau V(x_s)ds}d\tau$$

故に

$$m(a\,1\,t)=1+\int_0^t E_a(-V(x_\tau)e^{-\int_0^\tau V(x_s)ds})\,d\tau$$

故に $E_a(-V(x_\tau)e^{-\int_0^\tau V(x_s)ds})\geq 0$ をいえばよい

上と同様に変形して

$$E_a(-V(x_t)e^{-\int_0^t V(x_s)ds})=E_a\left(-V(x_t)-V(x_t)\int_0^t(-V(x_s))e^{-\int_0^s V(x_\tau)d\tau}ds\right)$$

$$=E_a(-V(x_t))+\int_0^t E_a(V(x_t)V(x_s)\,e^{-\int_0^s V(x_\tau)d\tau}ds)$$

Sem. on Probab.
Vol.3 1960年
P1-94

$= I_1(a) + I_2(a)$

$I_1(a) \geqq 0$

∵ $\sigma_0 = \inf\{t\ ;\ x_t = 0\}$ は Markov time (Ex 7.3) であるから

強 Markov 性より (Ex 8.1)

$$
\begin{aligned}
I_1(a) &= E_a(-V(x_t)\ ;\ \sigma \geqq t) + E_a(-V(x_t)\ ;\ \sigma < t) \\
&= E_a(-V(x_t)\ ;\ \sigma \geqq t) + E_a(-V(x_{t-\sigma}(w_\sigma^+))\ ;\ \sigma < t) \\
&= E_a(-V(x_t)\ ;\ \sigma \geqq t) + E_a(E_{x_\sigma}(-V(x_{t-\sigma}))\ ;\ \sigma < t) \\
&= E_a(-V(x_t)\ ;\ \sigma \geqq t) + E_a(E_0(-V(x_{t-\sigma}))\ ;\ \sigma < t)^{(8)} \\
&= E_a(-V(x_t)\ ;\ \sigma \geqq t)
\end{aligned}
$$

$\sigma \geqq t$ ならば $a \geqq 0$ から出た Path はあきらかに $x_t \geqq 0$ 故に $-V(x_t) \geqq 0$

故に $I_1(a) \geqq 0$

$I_2(a) \geqq 0$

∵ $\varphi(s\, w) = e^{-\int_0^s V(x_\tau(w))d\tau}$ $J_1 = (-r\ 0)$ $J_2 = (0\ r)$ とおく

$$I_2(a) = \int_0^t E_a(V(x_t)V(x_s)\varphi(s\, w))\, ds$$

$$= \int_0^t \left\{ \sum_{i,j=1}^{2} (-1)^{i+j} E_a(\varphi(s\, w)\ ;\ x_t \in I_i\ x_s \in I_j) \right\} ds$$

例えば $\{\Sigma\ \cdot\}$ の第1項 $E_a(\varphi(s\, w)\ ;\ x_t \in (-r\ 0),\ x_s \in (-r\ 0))$

$$
\begin{aligned}
&= E_a(\varphi\ ;\ x_s \in (-r\ 0),\ x_{t-s}(w_s^+) \in (-r\ 0)) \\
&= E_a(\varphi\ P_{x_s}[x_{t-s} \in (-r\ 0)]\ ;\ x_s \in (-r\ 0))^{(9)}
\end{aligned}
$$

$\mathcal{M}(E) \equiv E_a(\varphi\ ;\ x_s \in E)$ によって正の測度が定義され

それにより

$$= \int_{(-r\ 0)} P_b[x_{t-s} \in (-r\ 0)]\, \mathcal{M}(db)$$

$$= \int_{(-r\ 0)} \left(\int_{(-r\ 0)} N(t-s,\ c-b)\, dc \right) \mathcal{M}(db)^{(10)}$$

故に $I_2(a) = \int_0^t \sum_{i,j=1}^{2} (-1)^{i+j} \int_{I_i} \left(\int_{I_j} N(t-s\ \ c-b)\, dc \right) \mathcal{M}(db) \cdot dt$

$$= \int_0^t \sum_{i=1}^{2} \iint_{I_i \times I_i} (N(t-s\ \ c-b) - N(t-s\ \ c+b))\, dc\, \mathcal{M}(db) \cdot dt \geqq 0$$

---

(8) Brown 運動の対称性 又 V が奇函数なることに注意すると $\forall \tau \geqq 0\ E_0(-V(x_\tau)) = 0$

(9) φ が $\mathbb{B}_s$ 可測なることに注意せよ

(10) $N(t\ x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}$ (Gaussian Kernel)

Sem. on Probab.
Vol.3 1960年
P1-94

なぜなら $N(t-S\ (-b)-N(t-S\ (+b)\geq 0$ （C、bが同符号）は
あきらかであるから

<u>Lemma 3</u>　　$a\geq 0$ 　のとき

$$E_a\left(\sinh\left(-u\int_0^t V(x_\tau)\,d\tau\right)\right)\geq 0 \qquad (u>0)$$

証明は σ_0 に強Markov性をつかって $I_1(a)\geq 0$ をいつたのとほゞ同様にできるので省略

<u>Kacの定理 Prop 9.1</u>　より　$F(a\,u\,\alpha)=\int_0^\infty e^{-\alpha t}m(a\,u\,t)\,dt$ は a の函数として

F、F' a・c　$F, F'F''$ bdd　であり

$$-\frac{1}{2}F''+(\alpha+uV)F=1 \qquad \text{の解である}$$

すなわち　Fは次の(1)なる方程式の解である

$$(1)\begin{cases} -\frac{1}{2}f''+(\alpha-u)f=1 & (0\ r) \\ -\frac{1}{2}f''+(\alpha+u)f=1 & (-r\ 0) \quad \text{かつ}\ f\ f'\ a\cdot c \\ -\frac{1}{2}f''+\alpha f=1 & \text{他} \quad f\ f'f''\ bdd \end{cases}$$

(1)の解を具体的にあらわすために次の函数を用意する[(1)]

$$C(x,u,\alpha)=\cosh(2\alpha+2u)^{\frac{1}{2}}x \qquad \bar{C}(x,u,\alpha)=C(x,-u,\alpha)$$

$$S(x,u,\alpha)=\frac{\sinh(2\alpha+2u)^{\frac{1}{2}}x}{(2\alpha+2u)^{\frac{1}{2}}x} \qquad \bar{S}(x,u,\alpha)=S(x,-u,\alpha)$$

$$Q(x,u,\alpha)=\frac{\cosh(2\alpha+2u)^{\frac{1}{2}}x-1}{(\alpha+u)x^2} \qquad \bar{Q}(x,u,\alpha)=Q(x,-u,\alpha)$$

まず(1)で $(-r\ 0)$ での一般解は $f_1=q\,C(x)+p\,x\,S(x)-x^2Q(x)$

$(-\infty-r)$ での一般解は $f_2=\frac{1}{\alpha}+C\,e^{(2\alpha)^{\frac{1}{2}}x}$

$x=-r$ で $f_1=f_2$　$f_1'=f_2'$　なるように p、q　C　をきめよう

あきらかに　$f_2'=(2\alpha)^{\frac{1}{2}}(f_2-\frac{1}{\alpha})$ であるから

$$(2)\cdots\cdots \quad f_1'(-r)=(2\alpha)^{\frac{1}{2}}\left(f_1(-r)-\frac{1}{\alpha}\right)$$

次に $(0\ r)$ の一般解は $f_3=q'\bar{C}(x)+p'x\bar{S}(x)-x^2\bar{Q}(x)$

であるが　$f_3(0)=f_1(0)$　より　$p=p'$　$q=q'$ である

(1) これらは x について偶函数で、実際に $(\alpha+u)x^2$ の巾で展開できるので $\alpha+u<0$ でも定義され x、α、u について正則である。

Sem. on Probab.
Vol.3 1960年
P1-94

$$f_3'(0) = f_1'(0)$$

(2)に対応する $x = r$ での一致条件 は

(3) $f_3'(r) = -(2\alpha)^{\frac{1}{2}}\left(f_3(r) - \frac{1}{\alpha}\right)$ となる

(2) (3) を具体的にかくと ($C = C(r,u,\alpha)$ $S = S(r,u,\alpha)$ …… $\bar{C} = \bar{C}(r,u,\alpha)$ ……) として[12]

$$(3)\ \begin{cases} -p(C + rS) + q\left(2(\alpha+u)rS + (2\alpha)^{\frac{1}{2}}C\right) = 2rS + (2\alpha)^{\frac{1}{2}}r^2Q + \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} \\ p\left(\bar{C} + (2\alpha)^{\frac{1}{2}}r\bar{S}\right) + q\left((2\alpha)^{\frac{1}{2}}\bar{C} + 2(\alpha-u)r\bar{S}\right) = \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} + 2r\bar{S} + (2\alpha)^{\frac{1}{2}}r^2Q \end{cases}$$

ここで $f(x\,u\,\alpha)$ を次の式で定義する

$$(4)\ \begin{cases} \frac{1}{\alpha} + A_1 e^{(2\alpha)^{\frac{1}{2}}x} & x \leqq -r \\ qC(x) + pxS(x) - x^2Q(x) & -r \leqq x \leqq 0 \\ q\bar{C}(x) + px\bar{S}(x) - x^2\bar{Q}(x) & 0 \leqq x \leqq r \\ \frac{1}{\alpha} + A_2 e^{-(2\alpha)^{\frac{1}{2}}x} & r \leqq x \end{cases}$$

ここで $P.q$ は(3)の解

A_1, A_2 は

$$(5)\ \begin{aligned} A_1 &= e^{-(2\alpha)^{\frac{1}{2}}r}\left(qC + prS - r^2Q - \frac{1}{\alpha}\right) \\ A_2 &= e^{(2\alpha)^{\frac{1}{2}}r}\left(q\bar{C} + pr\bar{S} - r^2\bar{Q} - \frac{1}{\alpha}\right) \end{aligned}$$

とする[13]

(3)の *determinant*, D が 0 でないとき、この $f(x\,u\,\alpha)$ はたしかに(1)の 唯一つの解である、しかも $D \neq 0$ なる α の領域で α の正則函数である。

(3)の *determinant* D は

$$(6)\ D = 2(2\alpha)^{\frac{1}{2}}\left(C\bar{C} + 2\alpha r^2 S\bar{S} + (2\alpha)^{\frac{1}{2}}r(C\bar{S} + \bar{C}S)\right) + 2ur\bar{C}S - 2urC\bar{S}$$

$\alpha > u$ ならば容易に $2(2\alpha)^{\frac{1}{2}}C\bar{C} > 2urC\bar{S}$ がしめせ $C.S$ 等はすべて正であるから

$\alpha > u$ ならば $D > 0$

故に KaC の定理より

(7) $F(a\,u\,\alpha) = f(a\,u\,\alpha)$ $\alpha > u$ (α について正則)

以後 $u^2 r^3 = 1$ ($u > 0$ $r > 0$) な関係をおく[14]

---

(12) $C(r,u,\alpha) = C(-r,u,\alpha)$ …… $\bar{C}(r,u,\alpha) = \bar{C}(-r,u,\alpha)$ …… に注意

(13) $x = -r$, 及び $x = r$ での一致条件から A_1 A_2 がこのようにとける

(14) 今までは $F(x\,u\,\alpha)$ は本当は $x\,u\,\alpha$, r の函数であったこの関係によりはじめて本当に $x\,u\,\alpha$ のみの函数になる。

Sem. on Probab.
Vol.3 1960年
P1-94

$\alpha \leqq u$ のとき (15)

$$C = 1 + (\alpha+u) r^2 + o(r^{\frac{1}{2}}) \qquad (r \to 0)$$

$$S = 1 + \frac{(\alpha+u)}{3} r^2 + o(r^{\frac{1}{2}}) \qquad 〃$$

$$Q = 1 + \frac{(\alpha+u)}{8} r^2 + o(r^{\frac{1}{2}}) \qquad 〃$$

これより

(8) $D = 2(2\alpha)^{\frac{1}{2}}(1+o(1)) - \frac{8}{3} + o(1)$

故に $\exists r_0 > 0$; $u \geqq \alpha \geqq 2$, $r = u^{-\frac{2}{3}} < r_0$
に対し $D > 0$ となることがわかる
故に $u \geqq \alpha \geqq 2$, $r = u^{-\frac{3}{2}} < r_0$ で (3) の P. q は α について正則函数、したがって

(9) $f(x\,u\,\alpha)$ は $u \geqq \alpha \geqq 2$ $r = u^{-\frac{3}{2}} < r_0$で αの正則函数である

一方 $F(x\,u\,\alpha)$ は $m(x\,u\,t)dt$ なる正の測度の Laplace変換であるが、Laplace変換の理論によると正の測度のLaplace 変換$\varphi(\alpha)$についてその収束座標$\alpha = \sigma_c$は $\varphi(\alpha)$ の特異点となる(16)

(7)(9) より $f(x\,u\,\alpha)$ は $r = u^{-\frac{3}{2}} < r_0$ なるとき、$\alpha \geqq 2$で正則であるから結局

(10) $r = u^{-\frac{3}{2}} < r_0$ のとき $F(x\,u\,\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} m(x\,u\,t)\,dt$
は $\alpha \geqq 2$で収束し、そこで$f(x\,u\,\alpha)$ に等しい。

以後$\alpha = 2$とする

(3) より

$$DP = 2u(2\alpha)^{\frac{1}{2}}\left\{2r(S+\bar{S}) + 4(2\alpha)^{\frac{1}{2}} r^2 S\bar{S} + 2\alpha r^3 (Q\bar{S} + \bar{Q}S)\right\}$$
$$+ 2(C - \bar{C}) + 2(2\alpha)^{\frac{1}{2}} r (S - \bar{S} + C\bar{S} - \bar{C}S)$$

$$Dq = 2\alpha^{-\frac{1}{2}}(C+\bar{C}) + 2r(C\bar{S} + \bar{C}S + S + \bar{S})$$
$$+ (2\alpha)^{\frac{1}{2}} r^2 (C\bar{Q} + \bar{C}Q + 4S\bar{S}) + 2\alpha r^3 (S\bar{Q} + \bar{S}Q)$$

ここで $\alpha = 2$、$u = r^{-\frac{3}{2}}$ を用いて容易に

$$p = O(r^{-\frac{1}{2}})$$
$$q = O(1) \qquad 0 < r < r_0$$

---

(15) $(\alpha+u) r^2 = O(u r^2) = O(r^{\frac{1}{2}})$ 故に $O((\alpha+u) r^2) = o(r^{\frac{1}{2}})$ である。

(16) R. D、Widder Laplace Transform (Princeton) (P58)

Sem. on Probab.
Vol.3 1960年
P1-94

したがって (5) の

$$A_1 = A_1(r) = 0(1) \qquad 0 < r < r_0$$
$$A_2 = A_2(r) = 0(1)$$

f の定義式 (4) より

$$\left| f(x\ r^{-\frac{3}{2}}\ 2) - \frac{1}{2} \right| = |A_2|\, e^{-2x} \leq M \cdot e^{-2x} \quad (0<r<r_0)$$

(ここで M は r によらない定数) $\qquad x \geq r$

M が r によらないから $\quad x \geq 0$ でなりたつ

故に

(11) $\quad \left| F(a\ r^{-\frac{3}{2}}\ 2) - \frac{1}{2} \right| \leq M \cdot e^{-2a} \qquad a \geq 0 \quad (0 < r < r_0)$

$m(a\ u\ t) \uparrow$ in t かつ $m(a\ u\ 0) = 1$ に注意して (lemma 2)

(12) $\quad Me^{-2a} \geq \left| F(a\ r^{-\frac{3}{2}}\ 2) - \frac{1}{2} \right| \geqslant \int_0^\infty e^{-2t}\left(m(a\,r^{-\frac{3}{2}}t) - 1\right) dt$

$$\geq \int_T^\infty e^{-2t}\left(m(a\,r^{-\frac{3}{2}}t) - 1\right) dt \geqslant \frac{1}{2}\, e^{-2T}\left(m(a\,r^{-\frac{3}{2}}T) - 1\right)$$

$$\geq \frac{1}{2}\, e^{-2T}\left(m(a\,r^{-\frac{3}{2}}t) - 1\right) \qquad 0 \leq t \leq T$$

故に

$$E_a\left\{\cosh\left(r^{-\frac{3}{2}}\int_0^t V(x_\tau)\,d\tau\right) - 1\right\} = m(a\ r^{-\frac{3}{2}}t) - 1$$

$$-E_a\left(\sinh\left(-r^{-\frac{3}{2}}\int_0^t V(x_\tau)\,d\tau\right)\right) \leqslant \overset{(17)}{m}(a\,r^{-\frac{3}{2}}t) - 1 \leqslant 2Me^{-2a}\,e^{2T}$$

$$0 \leq t \leq T, \quad a \geqslant 0, \quad 0 < r < r_0$$

ところで Brown 運動の対称性を考えると

(13) $\quad E_a\left\{\cosh\left(r^{-\frac{3}{2}}\int_0^t V(x_\tau)\,d\tau\right) - 1\right\} \leqslant 2Me^{-2|a|}\,e^{2T}, \quad t \in [0\ T]$

$$0 < r < r_0$$

$$E_a\left\{\cosh\left(r^{-\frac{3}{2}}\int_0^t V(x_\tau)\,d\tau\right) - 1\right\} \geqq (\cosh\beta - 1)\, P_a\left(\left|r^{-\frac{3}{2}}\int_0^t V(x_\tau)\,d\tau\right| \geq \beta\right)$$

故に $\beta = r^{-\frac{1}{2}}d$ として $\qquad$ 左辺 $\quad \geqq \left(\cosh r^{-\frac{1}{2}}d - 1\right) P_a\left(\frac{1}{r}\left|\int_0^t V(x_\tau)\,d\tau\right| \geq d\right)$

故に (13) と合せて

(14) $\quad P_a\left(\frac{1}{r}\left|\int_0^t V(x_\tau)\,d\tau\right| \geq d\right) \leqslant \dfrac{2Me^{-2|a|}e^{2T}}{\left(\cosh r^{-\frac{1}{2}}d - 1\right)} \qquad \begin{array}{l} t \in [0\ T] \\ 0 < r < r_0 \end{array}$

$a = nr \quad n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \cdots\cdots$ として

$$P_0\left(\Delta_{nr}^{(t)} \geq d\right) = P_{nr}\left(\frac{1}{r}\left|\int_0^t V(x_\tau)\,d\tau\right| \geq d\right)$$

---

(17) lemma (3)

Sem. on Probab.
Vol.3 1960年
P1-94

$$P_0\left(\max_n \Delta_{nr}^{(t)} \geq d\right) \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_{nr}\left(\frac{1}{r}\left|\int_0^t V(X\tau)d\tau\right| \geq d\right)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2Me^{-2|n|r}e^{2T}}{(\cosh r^{-\frac{1}{2}}d-1)} \leqslant K(T\delta)\frac{1}{r}e^{-r^{-\frac{1}{2}}d}$$

$r^{-\frac{1}{2}}d \geqq \delta$

$0 < r < r_0$

$t \in [0T]$

ここで $K(T\delta) = \dfrac{2Me^{2T}}{(1-e^{-\delta})^2}$

これで lemma が証明できた

Sem. on Probab.
Vol.3 1960年
P1-94

第2章 一次元拡散過程

§1. 一般的事項

1、*linear diffusion* の定義

第一章で定義された *markov* 過程 $(W, \mathbb{B}, P_a)$ のうち特に次の条件を満すものを、一次元拡散過程(*linear diffusion*)という

1. *state space* S は、一次元実数空間全体又はその区間、又は一点と *homeomorphic* な空間である。
   即ち、S は次のような *type* の実数の空間と考えてよい。
   $\{a\}$, (a, b) $(a, b]$ $[a, b)$ $[a, b]$ $(-\infty, \infty)$　　$a, b \in R^1$
2. *Sample space* W_C は $W : [0, +\infty] \to S \cup \{\infty\}$ なる *mapping* で次の条件を満すものの全体である (∞ は *extra point*)
   但し第1章に従って *sample path* w の t 座標を $w(t)$, *killing time* を $\sigma_\infty(w)$ で表わす
   イ) $w(+\infty) = \infty$
   ロ) $0 \leq t < \sigma_\infty(w)$ のとき　　$w(t)$ は t に関し連続
3. *strong markov property* をもつ

2. *State space* の点の分類

今 *linear diffusion* (W_C $\mathbb{B}$, P_a $a \in S \cup \infty$)が与えられたとして、*Sample path* の行動によって *state space* S の点を以下の様に分類する。

Definition 1.1

K_+ : 任意の $t > 0$ に対し、$P_a(x_t < a) = 0$ なる点 $a (\in S)$ の全体
　K_+ に属する点を *right shunt* と呼ぶ。
K_- : 任意の $t > 0$ に対し $P_a(x_t > a) = 0$ なる点 $a (\in S)$ の全体
　K_- に属する点を *left shunt* と呼ぶ
$K_+ \cap K_-$ に属する点を *trap* と呼ぶ
　$K_+ \cap K_- \ni a$ は上の定義により、$\forall t$ $P_a(x_t \notin a \cup \infty) = 0$ を意味する
　これは第1章で与えられた *trap* の定義と一致している。
$K_+ - K_- (= K_+ - K_+ \cap K_-)$ に属する点を *proper right shunt* と呼ぶ
$K_- - K_+ (= K_- - K_- \cap K_+)$ に属する点を *proper left shunt* と呼ぶ
$K_+^c \cap K_-^c = (K_+ \cup K_-)^c$ に属する点を *regular point* と呼ぶ
T_+ : $a \in S$ に対し $\exists b, c \in S$　$b < a < c$　$P_b(\sigma_c < +\infty) > 0$ なる点 a の全体

T_+ に属する点を <u>right translation point</u> と呼ぶ

T_- : $a \in S$ に対し $^\exists b.\ c \in S$ $b<a<c$ $P_c(\sigma_b<+\infty)>0$ なる点 a の全体

T_- に属する点を <u>left translation point</u> と呼ぶ

(σ_c は第1章で定義された、c への first passage time である。
これは markov time である)

この節では、K_+, K_-, $K_+^c \cap K_-^c$ 等の topological な性質を調べる。
そのための準備として、S の点が right (left) shunt であるための解析的な criterion を与えておく

<u>Definition 1.2</u>

S の任意の内点 a に対し σ_{a-}, σ_{a+} を次の様にきめる

$$\sigma_{a-} = \lim_{n\to\infty} \sigma_{a-\frac{1}{n}}$$
$$\sigma_{a+} = \lim_{n\to\infty} \sigma_{a+\frac{1}{n}}$$

この極限は無限大もこめて、存在し、且つ markov time である,

実際 $X(0)=b$ とすると

$b<a$ のとき $^\exists n_0$ $b<a-\frac{1}{n_0}$

path の連続性により $n\geq n_0$ なる n に関し、$\sigma_{a-\frac{1}{n}}$ は単調増大. $b\geq a$ のとき path の連続性により、明らかに $\sigma_{a-\frac{1}{n}}$ は単調減少、いずれにしても無限大もこめて $\sigma_{a-}=\lim_{n\to\infty}\sigma_{a-\frac{1}{n}}$ が存在する。

σ_{a-} が markov time であることは次の様にしてわかる

任意の n について $\sigma_{a-\frac{1}{n}}$ は markov time であるから $\{w\,;\,\sigma_{a-\frac{1}{n}}<t\}\in\mathbb{B}_t$

$$\{w\,;\,\lim_{n\to\infty}\sigma_{a-\frac{1}{n}}<t\}=\{w\,;\,\lim_{n\to\infty}\sigma_{a-\frac{1}{n}}<t,\ w(0)<a\}+\{w\,;\,\lim_{n\to\infty}\sigma_{a-\frac{1}{n}}<t,\ w(0)\geq a\}$$

$$=\bigcup_m\{w\,;\,\lim\sigma_{a-\frac{1}{n}}<t,\ w(0)\leq a-\frac{1}{m}\}+\{w\,;\,\lim_{n\to\infty}\sigma_{a-\frac{1}{n}}<t\ \ w(0)\geq a\}$$

$w(0)\leq a-\frac{1}{m}$ のときは $n>m$ に対し、$\sigma_{a-\frac{1}{n}}$ は単調増大だから

$$\{w\,;\,\lim_{n\to\infty}\sigma_{a-\frac{1}{n}}<t,\ w(0)\leq a-\frac{1}{m}\}=\bigcup_{\ell}\bigcap_{n\geq m}\{w\,;\,\sigma_{a-\frac{1}{n}}<t-\frac{1}{\ell},\ w(0)\leq a-\frac{1}{m}\}\in\mathbb{B}_t$$

$w(0)\geq a$ なら、$\sigma_{a-\frac{1}{n}}$ は 単調減少故

$$\{w\,;\,\lim_{n\to\infty}\sigma_{a-\frac{1}{n}}<t\ \ w(0)\geq a\}=\bigcup_n\{w\,;\,\sigma_{a-\frac{1}{n}}<t,\ w(0)\geq a\}\in\mathbb{B}_t$$

σ_{a+} が存在して markov time であることも同様にしてわかる

今 a を S の内点として考えたが、a が S の右端点 (S 自身に属しても属さなくてもよい) の時も、σ_{a-} は存在して markov time であることは上の証明を

Sem. on Probab.
Vol.3 1960年
P1-94

見れば明らかである。

同様に a が S の左端点の時 σ_{a+} が存在して markov time となる。

Lemma 1.1.

$a\in S$ が right shunt であることと $E_a(e^{-\sigma_{a-}})=0$ は同等である

$a\in S$ が left shunt であることと、$E_a(e^{-\sigma_{a+}})=0$ は同等である

Proof 前半を証明するには

$E_a(e^{-\sigma_{a-}})=0 \iff \forall t,\ P_a(X_t<a)=0$ をいえばよい

$E_a(e^{-\sigma_{a-}})=0$ と $P_a(\sigma_{a-}<+\infty)=0$ は同等である

path の連続性に注目すればこれは又 $P_a(\exists t\ X_t<a)=0$ に等しい。

任意の s を固定すれば $\{w:\exists t\ X_t(w)<a\}\supset\{w. X_s(w)<a\}$ だから

$P_a(\exists t.\ X_t<a)=0$ なら $\forall s\ P_a(X_s<a)=0$ が従がう

逆に、$\forall t\ P_a(X_t<a)=0$ を仮定すると path の連続性に注目して

$$P_a(\exists t\ X_t<a)=P_a(\exists r\,(\text{rational number})\ X_r<a)\le\sum_r P_a(X_r<a)=0$$

後半も、同様にして、証明出来る。

Lemma 1.2

$$E_a(e^{-\sigma_{a+}})=0 \quad \text{or} \quad 1$$
$$E_a(e^{-\sigma_{a-}})=0 \quad \text{or} \quad 1$$

Proof. strong markov 性と $P_a(\sigma_{a+}=+\infty \text{ or } \sigma_{a+}(w_{\sigma_{a+}}^+)=0)=1$ に注意して

$$E_a(e^{-\sigma_{a+}})=E_a(e^{-\sigma_{a+}}:\sigma_{a+}<+\infty)=E_a(e^{-\sigma_{a+}}e^{-\sigma_{a+}(w_{\sigma_{a+}}^+)}:\sigma_{a+}<+\infty)$$

$$=E_a(e^{-\sigma_{a+}}E_{X_{\sigma_{a+}}}(e^{-\sigma_{a+}}):\sigma_{a+}<+\infty)=E_a(e^{-\sigma_{a+}}:\sigma_{a+}<+\infty)E_a(e^{-\sigma_{a+}})$$

$=E_a(e^{-\sigma_{a+}})^2$ よって上の結果を得る

Lemma 2 の後半も同様にして証明できる。

Lemma 1.3 $\alpha\le\beta\le\gamma\le\delta$ ならば

$$E_\gamma(e^{-\sigma_\delta})\le E_\beta(e^{-\sigma_\gamma})$$
$$E_\delta(e^{-\sigma_\alpha})\le E_\gamma(e^{-\sigma_\beta})$$

Proof

$$E_\alpha(e^{-\sigma_\delta})=E_\alpha(e^{-\sigma_\delta}:\sigma_\delta<+\infty)=E_\alpha(e^{-\sigma_\beta-\sigma_\delta(w_{\sigma_\beta}^+)}:\sigma_\beta<+\infty,\sigma_\delta(w_{\sigma_\beta}^+)<+\infty)$$

$$=E_\alpha(e^{-\sigma_\beta}E_{X_{\sigma_\beta}}(e^{-\sigma_\delta}:\sigma_\delta<+\infty):\sigma_\beta<+\infty)=E_\alpha(e^{-\sigma_\beta})E_\beta(e^{-\sigma_\delta})$$

同様に $E_\beta(e^{-\sigma_\delta})=E_\beta(e^{-\sigma_\gamma})\,E_\gamma(e^{-\sigma_\delta})$

故に $E_\alpha(e^{-\sigma_\delta})=E_\alpha(e^{-\sigma_\beta})\,E_\beta(e^{-\sigma_\gamma})\,E_\gamma(e^{-\sigma_\delta})\le E_\beta(e^{-\sigma_\gamma})$

Lemma 3 の後半も同様に証明出来る。

Sem. on Probab.
Vol.3 1960年
P1-94

Remark　$a \leq b$ のとき
$a \leq a_+ \leq b_- \leq b$ と大小関係を定める
この規約の下においても，Lemma 3 の主張が成立することが容易にわかる
例えば $a \leq b \leq c$ のとき　$a \leq b \leq b_+ \leq c$ として
$E_a(e^{-\sigma_c}) \leq E_b(e^{-\sigma_{b+}})$ が成立する。

Theorem 1.1
K_+ は right closed である．即ち $a_n \in K_+ \quad a_n \uparrow a \Rightarrow a \in K_+$
K_- は left closed である．即ち $a_n \in K_- \quad a_n \downarrow a \Rightarrow a \in K_-$

Proof　$a_n \in K_+ \quad a_n \uparrow a$ とする
$a \notin K_+$ とすると Lemma 1 及び 2 により $E_a(e^{-\sigma_{a-}}) = 1$
$E_a(e^{-\sigma_{a-}}) = \lim_{b \uparrow a} E_a(e^{-\sigma_b})$ だから $\exists b < a \quad E_a(e^{-\sigma_b}) > 0$
Lemma 1.3 の Remark により　$b < c < a$ なる任意の c に対し $E_c(e^{-\sigma_{c-}}) > 0$
即ち $E_c(e^{-\sigma_{c-}}) = 1$
これは $(b, a) \subset K_+^c$ であることを意味し，仮定に反する。

Theorem 1.2
regular points の set $K_+^c \cap K_-^c$ は open である

Proof　$K_+^c \cap K_-^c \ni a \Rightarrow \exists b, c \quad b < a < c$
$E_b(e^{-\sigma_c}) \, E_c(e^{-\sigma_b}) > 0$ を証明する。
$E_a(e^{-\sigma_{a-}}) = 1$ だから $\exists b < a \quad E_a(e^{-\sigma_b}) > 0$
又，$E_a(e^{-\sigma_{a+}}) = 1$ だから　$P_a(\sigma_{a+} = 0) = 1$
$a \neq b$ より $P_a(\sigma_b = 0) = 0$ であることに注意して
$0 < E_a(e^{-\sigma_b}) = E_a(e^{-\sigma_b}; \sigma_b > 0) = E_a(e^{-\sigma_b}; \sigma_b > \sigma_{a+}) = \lim_{c \downarrow a} E_a(e^{-\sigma_b}; \sigma_b > \sigma_c)$
故に $\exists c > 0 \quad E_a(e^{-\sigma_b}; \sigma_b > \sigma_c) > 0$
σ_c に関し strong markov 性を使って
$E_a(e^{-\sigma_b}: \sigma_b > \sigma_c) = E_a(e^{-\sigma_c}; \sigma_b > \sigma_c) \, E_c(e^{-\sigma_b})$
$\therefore E_c(e^{-\sigma_b}) > 0$
同じ操作で $\exists b_1, c_1 \quad b_1 < a < c_1 \quad E_{b_1}(e^{-\sigma_{c_1}}) > 0$
$(b, c) \cap (b_1, c_1)$ を再び (b, c) と表わすと　Lemma 1.3 より
$E_b(e^{-\sigma_c}) \, E_c(e^{-\sigma_b}) > 0$ を得る
かくて，Lemma 1.3 の Remark と Lemma 1.2 とにより
$(b, c) \ni \forall d \quad E_d(e^{-\sigma_{d-}}) = 1 \quad E_d(e^{-\sigma_{d+}}) = 1$
即ち，$a \in (b, c) \subset K_+^c \cap K_-^c$

Remark　上の証明は $K_+^c \cap K_-^c = T_+ \cap T_-$　即ち regular point は

Sem. on Probab.
Vol.3 1960年
P1-94

right 且つ left translation point であることを示したことにもなる。

§2. State space の分解

この節では、linear diffusion $\mathbb{M}=(S.W_c.P_a.\ a\in S\vee\infty)$ の state space を三段階にわけて分解し、出来るだけ簡単な type の interval に還元することを考える。

1. Communication による分解

Definition 2.1

$a.b.a_i$ 等は S の点とする。

$P_a(\sigma_b<+\infty)>0$ のとき a から b へ one-side communication があるといい、$a\to b$ と表わす。

$a\to b$, $b\to a$ の少なくとも一方が成立するとき、$a\leftrightarrow b$ と表わし a と b とに direct communication があるという。

$a=a_0, a_1, a_2\cdots\cdots, a_n=b$ なる有限ケの点が存在して、$a_{i-1}\leftrightarrow a_i$ $(i=1,2,\cdots\cdots,n)$ が成立っているとき、$a\sim b$ と表わし、a と b とに indirect communication があるという。

$\sim$ なる関係は、明らかに次の equivalent relation を満す

1. $a\sim a$
2. $a\sim b \Rightarrow b\sim a$
3. $a\sim b,\ b\sim c \Rightarrow a\sim c$

かくて S は $S=\sum_\alpha S_\alpha$ $(a.b\in S_\alpha\Rightarrow a\sim b,\ a\sim b\Rightarrow{}^\exists\alpha\ \ a.b\in S_\alpha)$ の如く類別される。

ここで S_α は connected set である、即ち $\{a\}$, $(a.b)$, $(a.b]$, $[a.b)$, $[a.b]$ なる type の set である。

実際、$a.b\in S_\alpha$ とし、$a<c<b$ なる任意の c をとると

$a\sim b$ より $a=a_0, a_1, a_2,\cdots, a_n=b$ なる点が存在して、$a_{i-1}\leftrightarrow a_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$ ${}^\exists j$ $a_{j-1}<c<a_j$, 例えば $a_{j-1}\to a_j$ とすると Lemma 1.3 より

$$E_{a_{j-1}}(e^{-\sigma_c})>E_{a_{j-1}}(e^{-\sigma_{a_j}})>0$$

故に $a_{j-1}\to c$ 故に $a\sim c$ $c\in S_\alpha$ となる。

与 sample space W_c のうち S_α から出発した path 全体を W_c^α とする。S_α の定義より、$a\in S_\alpha\Rightarrow P_a(x_t\in S_\alpha\vee\infty)=1$ 即ち S_α から出発した path は ∞ 以外 S_α の外へは出ない。

この意味で　$W_c = \sum_{\alpha} W_c^{\alpha}$

次に　$P_a^{\alpha}(B) = P_a(B)$　$a \in S_\alpha \vee \infty$　と　$\mathbb{B}(W_c^{\alpha})(\subset \mathbb{B}(W_c))$ 上の measure を定義する、これは probability measure である。

実際 $P_a^{\alpha}(W_c^{\alpha}) = P_a(W_c^{\alpha}) = P_a(W_c) = 1$　if　$a \in S_\alpha \vee \infty$

このようにして　$\mathbb{M}_\alpha = (S_\alpha, W_c^{\alpha}, P_a^{\alpha} : a \in S_\alpha \vee \infty)$ は又、linear diffusion であることがわかる

しかも、もとの diffusion　$\mathbb{M} = (S, W_c, P_a, a \in S_\alpha \vee \infty)$ は以上の意味で $\mathbb{M} = \sum_{\alpha} \oplus \mathbb{M}_\alpha$ と diffusion $\mathbb{M}_\alpha$ の直和に分解出来たわけである。

linear diffusion $\mathbb{M}$ を研究するのには、$\mathbb{M}_\alpha$ を研究すれば充分である。
よつて今後 $\mathbb{M} = (S, W_c, P_a \; a \in S \vee \infty)$ なる linear diffusion に次の仮定をおく。

<u>Sの任意の二点は indirect communication をもつ</u>

2、trap による分解

<u>Theorem 2.1</u>

Sの trapsの集合はSの内点には集積しない

よつて、traps の set は $\cdots\cdots < a_{n-1} < a_n < a_{n+1} \cdots\cdots$ の如く並べることが出来る。

<u>Proof</u>　$a_n \in K_+ \cap K_-$　$a_n \downarrow a$　$a \in S^i$（Sの内点）と仮定する。
$b < a < c$ なる $b, c \in S$ をとると、Sの任意の二点は indirect communication をもつと仮定しているから、当然 $b \sim c$
即ち $\exists c_0 = b, c_1, c_2, \cdots\cdots, c_{k-1}, c_k = c$　なるSの有限ケの点があつて　$c_{h-1} \longleftrightarrow c_h \; (h = 1, 2, \cdots, k)$
ところが区間 (b, c) に含まれる trap の点はその性質より、$(c_h ; h=1,2 \cdots k-1)$ のどれかでなければならない。
一方 $a_n \downarrow a$ より無限ケの trap a_n が (b, c) に含まれる、
これは矛盾である。

Therem 2.1 により diffusion の traps は高々可算ケで
$\cdots\cdots a_{-n} < a_{-n+1} < \cdots\cdots < a_{-1} < a_0 < a_1 < \cdots\cdots < a_n < a_{n+1} < \cdots\cdots$
の如く並べられることがわかつた。
今 $S_n = (a_n, a_{n+1})$　を考えると
S_n から出発した path は trap a_n、又は a_{n+1} に到達すると、そこで exponential holding time でもつて滞留し ∞ へ飛ぶ。

Sem. on Probab.
Vol.3 1960年
P1-94

即ち、S_n から出発した path は S_n の外へは出ない。
よって communication の項で述べたのと同じように、S_n の上の diffusion のみを考えれば充分であることがわかる。
よって今後 linear diffusion $\mathbb{M}=(S, W_c, P_a, a\in S\cup\infty)$ に次の仮定をおく
S は trap を含まない

3. regular interval, right interval, left interval.

Theorem 1.2 により S の regular points の set は open であることがわかっている、即ち、高々可算ケの disjoint な open interval の和集合である。
この open intervals について次の定理が成立する。

Theorem 2.2

regular intervals (b, c) で $b\in T_+$、$c\in T_-$ なるものの全体は S の内点には集積しない、よってこれらは $\cdots<b_n<c_n<b_{n+1}<c_{n+1}<\cdots$ の如く並べられる。

Proof (b_n, c_n) $b_n\in T_+$, $c_n\in T_-$ なる regular intervals の列があって
$b_n\downarrow a$, $c_n\downarrow a$ $a\in S^i$ と仮定する
$b<a<c$ なる $b, c\in S$ をとると $b\sim c$ だから、$b=d_0, d_1, \cdots d_{k-1}, d_k=c$ なる点があって、$d_{h-1}\longleftrightarrow d_h$ $(h=1, 2, \cdots, k)$
$b<b_n<c_n<c$ とすると $b_n\in T_+$、$c_n\in T_-$ であるから、閉区間 $[b_n, c_n]$ に属する少くとも一点 l_n は $(d_h; h=1, 2, \cdots, k-1)$ のどれかでなければならぬ、ところが仮定よりこのような l_n は無限ケであり、矛盾である。

Theorem 2.3

regular interval (d, e) で $d\in T_-$, $e\in T_+$ なるものの全体は S の内点には集積しない、よってこれらは $\cdots<d_n<e_n<d_{n+1}<e_{n+1}<\cdots$ の如く並べられる。

Proof Theorem 2 の証明と analogous である。

Theorem 2.2, 2.3 に述べた点 (b_n, c_n, e_n $n=\pm1, \pm2, \cdots$) 全てを考え、それに大小の順をつけて並べたものを
$\cdots<r_{n-1}<r_n<r_{n+1}<r_{n+2}<\cdots$ と表わす

Theorem 2.4

$(r_i\ r_{i+1})$ は次の三つの type に分類される
(a) regular interval

Sem. on Probab.
Vol.3 1960年
P1-94

(b) right interval ; 即ち内点が全て regular か right translation かである。

(c) left interval ; 即ち内点が全て regular か left translation かである。

Proof (r_i, r_{i+1}) が regular interval でない場合、それに含まれる regular intervals の補集合は regular でない閉区間か半開区間（端点が r_i か r_{i+1} のとき）である。

今その閉区間の一つを $[s, t]$ とする。

さて、trap はないと仮定しているのだから regular でない区間 $[s, t]$ の任意の点は proper right shunt か proper left shunt かどちらかに限る。

$[s\ t] \ni^{\exists} a$: proper right shunt とする

仮定より a と s には indirect communication があるから $s = P_0 \leq P_1 \leq P_2 \cdots \leq P_{n-1} \leq P_n = a$ なる点列が存在して $P_{j-1} \leftrightarrow P_j$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$

ところが a から左側へは行けないのだから $P_{n-1} \rightarrow a$ でしかあり得ない。即ち、P_{n-1} は Proper right shunt, よって又 $P_{n-2} \rightarrow P_{n-1}$ 同じ論法をくりかえせば結局 $s \rightarrow a$ となり $[s, a]$ の点は全て proper right shunt であることがわかる，一方 a と t にも indirect communication があるから $a = q_0 \leq q_1 \leq \cdots \leq q_{m-1} \leq q_m = t$ なる点列が存在して、$q_{j-1} \leftrightarrow q_j$ $(j = 1, 2, \cdots, m)$

先ず $a \rightarrow q_1$ でしかあり得ないことがわかる、もし $a_1 \leftrightarrow q_1$ なら Theorem 1.1 により left shunt の左極限として a は left chunt でなければならず矛盾である。

よって $a \rightarrow q_1$　q_1 は再び Theorem 1.1 により proper right shunt、同じ論法で結局 $a \rightarrow t$ となり $[a, t]$ の点は全て、prope right chunt である。

properright shunt ならば right trans-lation であることは communication があることに注意すると明らかだから $[s, t] \subset T_+$ がわかった。

次に (V_i, V_{i+1}) に含まれる regular intervals のうち、s, t を端点とするものを、各々 (s', s) (t, t') と表わせば $\{r_i\}$ の作り方より $s', t' \in T_+$ である。

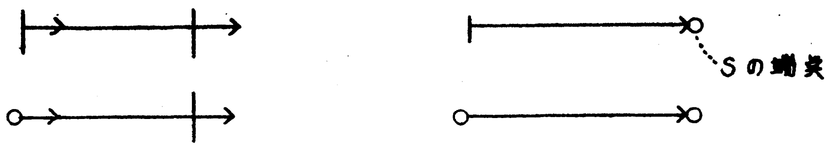
このようにして regular でない部分は全て T_+ に含まれることがわかる。

同様にもし (r_i, r_{i+1}) に T_- に属する点があると、(V_i, V_{i+1}) の点は全て regular か left translation かである。

Remark

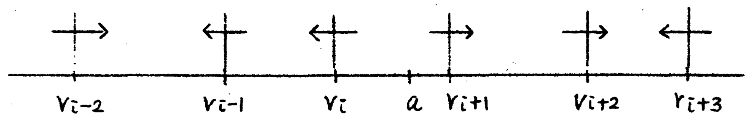
1. right interval は端点における行動により、次の四つの型をもつ。

Sem. on Probab.
Vol.3 1960年
P1-94



2. $a \in (r_i, r_{i+1}) \Rightarrow \forall t \quad P_a(x_t \in (r_{i-2}, r_{i+3})) = 1$

実際、下図はaが最も遠くへ到達出来る場合を示す。



§3. Green function の性質

linear diffusion (S, W_c, P_a $a \in S \vee \infty$) が与えられたとする、その process をx_tで表わす。

$\mathcal{B}(S) = \{f;\ S$上の measurable function, bounded, $f(\infty) = 0\}$ とすると
$f \in \mathcal{B}(S)$ に対し

$$G_\alpha f(x) = E_x\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t} f(x_t)\,dt\right)$$

として定義される operator G_α は $\mathcal{B}(S)$を$\mathcal{B}(S)$へうつす (see 第1章)
$=\alpha$ Green function $G_\alpha f$ の性質を調べるのがこの節の目的である。

Lemma 3.1

(1) $E_a(e^{-\alpha\sigma_{a+}}) = E_a(e^{-\sigma_{a+}}) = 1$ or 0

(2) $E_{a+}(e^{-\alpha\sigma_{a++}}) = E_{a+}(e^{-\sigma_{a++}}) = 1$ or 0

(3) $E_{a++}(e^{-\alpha\sigma_{a+}}) = E_{a++}(e^{-\sigma_{a+}}) = 1$ or 0

(4) $E_{a+}(e^{-\alpha\sigma_a}) = E_{a+}(e^{-\sigma_a}) = p_-(a) \in [0, 1]$

但し $E_{a+}(e^{-\alpha\sigma_{a++}}) = \lim_{c\downarrow a}\lim_{b\downarrow a} E_b(e^{-\alpha\sigma_c})$

$E_{a++}(e^{-\alpha\sigma_{a+}}) \quad \lim_{b\downarrow a}\lim_{c\downarrow a} E_b(e^{-\alpha\sigma_c})$

$E_{a+}(e^{-\alpha\sigma_a}) = \lim_{b\downarrow a} E_b(e^{-\alpha\sigma_a})$ ..

Lemma 1.3より右辺は全て単調な量の極限であることがわかるから定義可能である。

Proof

(1) Lemma 1.1 の証明より明らか

(2) $a < b < c < d$ のとき Lemma 1.2 の計算により

Sem. on Probab.
Vol.3 1960年
P1-94

$E_b(e^{-\sigma_a}) = E_b(e^{-\sigma_c})E_c(e^{-\sigma_a})$

順次 $b\downarrow a$ $c\downarrow a$ $d\downarrow a$ とすることによって

$E_{a+}(e^{-\sigma_{a++}}) = (E_{a+}(e^{-\sigma_{a++}}))^2$ を得る

(3) (2)の場合と同様に $a<b<c<d$ として

$E_b(e^{-\sigma_a}) = E_b(e^{-\sigma_c})E_c(e^{-\sigma_d})$

順次 $d\downarrow a$ $c\downarrow a$ $b\downarrow a$ として

$E_{a++}(e^{-\sigma_{a+}}) = (E_{a++}(e^{-\sigma_{a+}}))^2$ を得る

(4) (i) $E_{a++}(e^{-\sigma_{a+}}) = 0$ のとき

Lemma 1.3 は $a<b$ ならば $a \le a_+ \le a_{++} \le b$ なる規約の下でも成立することを考慮して $E_b(e^{-\sigma_a}) = 0$ が成立する

$b\downarrow a$ として $p_-(a) = E_{a+}(e^{-\sigma_a}) = 0$

このとき $E_{a+}(e^{-\alpha\sigma_a})$ も 0に等しいことも明らか

(ii) $E_{a++}(e^{-\sigma_{a+}}) = 1$ のとき 次の事実が成立する

$$p_-(a) = {}^{\exists}\lim_{b\downarrow a} P_b(\sigma_a < +\infty) = P_{a+}(\sigma_a < +\infty)$$
$$= {}^{\exists}\lim_{b\downarrow a} P_b(\sigma_a < \delta) = P_{a+}(\sigma_a < \delta) \qquad {}^{\forall}\delta > 0$$

実際 $b>a$ なら *path* の連続性によって $P_b(\sigma_a = +\infty \text{ or } \sigma_a = \sigma_{a+}) = 1$ であるから

$$0 \le P_b(\sigma_a < +\infty) - E_b(e^{-\sigma_a}) = P_b(\sigma_a < +\infty) - E_b(e^{-\sigma_a};\ \sigma_a < +\infty)$$
$$= P_b(\sigma_a < +\infty) - E_b(e^{-\sigma_{a+}};\ \sigma_a < +\infty) = E_b(1 - e^{-\sigma_{a+}};\ \sigma_a < +\infty)$$
$$\le E_b(1 - e^{-\sigma_{a+}}) = 1 - E_b(e^{-\sigma_{a+}}) \xrightarrow[b\downarrow a]{} 1 - E_{a++}(e^{-\sigma_{a+}}) = 0$$

故に $\lim\limits_{b\downarrow a} P_b(\sigma_a < +\infty)$ が存在して $p_-(a) = \lim\limits_{b\downarrow a} E_b(e^{-\sigma_a}) = \lim\limits_{b\downarrow a} P_b(\sigma_a < +\infty)$

又 $\delta > 0$ なる任意の δ に対し

$$1 - E_b(e^{-\sigma_{a+}}) = E_b(1 - e^{-\sigma_{a+}}) \ge E_b(1 - e^{-\sigma_{a+}};\ \sigma_{a+} \ge \delta)$$
$$\ge (1 - e^{-\delta})P_b(\sigma_{a+} \ge \delta)$$

ここで $b\downarrow a$ とした *limit superior* をとると

$$0 = 1 - E_{a++}(e^{-\sigma_{a+}}) \ge (1 - e^{-\delta})\varlimsup_{b\downarrow a} P_b(\sigma_{a+} \ge \delta) \ge 0$$

故に $\varlimsup\limits_{b\downarrow a} P_b(\sigma_{a+} \ge \delta) = 0$

$$P_b(\sigma_a < +\infty) = P_b(\sigma_a < \delta,\ \sigma_a < +\infty) + P_b(\sigma_a \ge \delta\ \ \sigma_a < +\infty)$$
$$= P_b(\sigma_a < \delta) + P_b(\sigma_{a+} \ge \delta,\ \sigma_a < +\infty)$$

ところが $\varlimsup\limits_{b\downarrow a} P_b(\sigma_{a+} \ge \delta,\ \sigma_a < +\infty) \le \varlimsup\limits_{b\downarrow a} P_b(\sigma_{a+} \ge \delta) = 0$ だから

$$p_-(a) = \lim_{b\downarrow a} P_b(\sigma_a < +\infty) = \lim_{b\downarrow a} P_b(\sigma_a < \delta)$$

Sem. on Probab.
Vol.3 1960年
P1-94

同様に

$E_{a+}(e^{-\alpha\sigma_a}) = P_{a+}(\alpha\sigma_a < \delta)$　δ は任意だから、これも $P_-(a)$ に等しい。

<u>Remark</u>　<u>Lemma 3.1</u> に現われた + の記号を全て − に代えても Lemma 1 の主張が成立するのは明らかである。但し、(4) の $P_-(a)$ に対応する量 $P_+(a)$ を $E_{a-}(e^{-\alpha\sigma_a}) = E_{a-}(e^{-\sigma_a}) = P_+(a)$ ときめる、明らかに $P_+(a) \in [0, 1]$

<u>Theorem 3.1</u>

$f \in \mathbb{B}(S)$ のとき $G_\alpha f$ は次の性質をもつ

regular point で連続

proper right shunt で右連続

proper left shunt で左連続

<u>proof</u>　Lemma 1.1, 1.2, より $a \in S$ が proper right shunt なら $E_a(e^{-\sigma_{a+}})=1$

proper left shunt なら $E_a(e^{-\sigma_{a-}})=1$

今　$E_a(e^{-\sigma_{a+}}) = 1 \Rightarrow G_\alpha f(a+) = G_\alpha f(a)$ ------ (1)

$E_a(e^{-\sigma_{a-}}) = 1 \Rightarrow G_\alpha f(a-) = G_\alpha f(a)$ ------ (2)

を証明すれば regular point での $G_\alpha f$ の連続性は (1) (2) を合わせることによりいえる。

(2)の証明は(1)に analogous であるから(1)だけを証明する。

$a < b$ とし σ_b を b への first passage time とする

σ_b は markov time だから Dynkin's formula によって（see 第1章）

$$G_\alpha f(a) = E_a\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t} f(X_t)\,dt\right)$$

$$= E_a\left(\int_0^{\sigma_b} e^{-\alpha t} f(X_t)\,dt\right) + E_a\left(e^{-\alpha\sigma_b} G_\alpha f(X_{\sigma_b})\right)$$

$$= E_a\left(\int_0^{\sigma_b} e^{-\alpha t} f(X_t)\,dt\right) + E_a\left(e^{-\alpha\sigma_b}\right) G_\alpha f(b)$$

$$\left| G_\alpha f(a) - E_a(e^{-\alpha\sigma_b}) G_\alpha f(b) \right| \leqq \left| E_a\left(\int_0^{\sigma_b} e^{-\alpha t} f(X_t)\,dt\right) \right| \leqq \|f\| E_a\left(\frac{1-e^{-\alpha\sigma_b}}{\alpha}\right)$$

$\lim_{b \downarrow a} E_a(e^{-\alpha\sigma_b}) = 1$ だから

$b \downarrow a$ とすることによって　$G_\alpha f(a) = \lim_{b \downarrow a} G_\alpha f(b)$　を得る

<u>Theorem 3.2</u>

$E_{a++}(e^{-\sigma_{a+}}) = 1$ ならば　$G_\alpha f(a+) = P_-(a)\, G_\alpha f(a)$

$E_{a--}(e^{-\sigma_{a-}}) = 1$ ならば　$G_\alpha f(a-) = P_+(a)\, G_\alpha f(a)$

<u>Proof</u>　$a < b$ とする。markov time σ_{a+} に関し Dynkin's formula を用いて

$$G_\alpha f(b) = E_b\left(\int_0^{\sigma_{a+}} e^{-\alpha t} f(X_t)dt\right) + E_b\left(e^{-\alpha\sigma_{a+}} G_\alpha f(X_{\sigma_{a+}})\right)$$

最初の項は

$$\left|E_b\left(\int_0^{\sigma_{a+}} e^{-\alpha t} f(X_t)dt\right)\right| \leqq \|f\| \frac{1-E_b(e^{-\alpha\sigma_{a+}})}{\alpha} \xrightarrow[b\downarrow a]{} \frac{1-E_{a++}(e^{-\alpha\sigma_{a+}})}{\alpha} = 0$$

さて、*path* の連続性によって　$a<b$ なら

$$P_b(\sigma_a < +\infty \Rightarrow \sigma_{a+} = \sigma_a) = 1$$

$$P_b(\sigma_a = +\infty \Rightarrow \sigma_{a+} = \sigma_\infty) = 1$$

故に　$E_b(e^{-\alpha\sigma_{a+}} G_\alpha f(X_{\sigma_{a+}}))$

$$= E_b(e^{-\alpha\sigma_{a+}} G_\alpha f(X_{\sigma_{a+}}) : \sigma_a < +\infty) + E_b(e^{-\alpha\sigma_{a+}} G_\alpha f(X_{\sigma_{a+}}) : \sigma_a = +\infty)$$

$$= E_b(e^{-\alpha\sigma_a} G_\alpha f(X_{\sigma_a}) : \sigma_a < +\infty) + E_b(e^{-\alpha\sigma_{a+}} G_\alpha f(X_{\sigma_\infty}) : \sigma_a = +\infty)$$

$$= G_\alpha f(a) E_b(e^{-\alpha\sigma_a}) + E_b(e^{-\alpha\sigma_{a+}} G_\alpha f(\infty) : \sigma_a = +\infty)$$

$$= G_\alpha f(a) E_b(e^{-\alpha\sigma_a}) \xrightarrow[b\downarrow a]{} p_-(a)\, G_\alpha f(a)$$

よって　$G_\alpha f(a+) = p_-(a)\, G_\alpha f(a)$ を得る

定理の後半も同様にして証明される。

<u>*Theorem 3.3*</u>

$E_{a+}(e^{-\sigma_{a++}}) = 1$　なら　$G_\alpha f(a+)$ が存在する

<u>*Proof*</u>　$a<b<c$ とする

$$G_\alpha f(b) = E_b\left(\int_0^{\sigma_c} e^{-\alpha t} f(X_t)dt\right) + E_b(e^{-\alpha\sigma_c}) G_\alpha f(c)$$

故に　$\overline{\lim\limits_{b\downarrow a}}\, G_\alpha f(b) \leqq \|f\| \dfrac{1-E_{a+}(e^{-\alpha\sigma_c})}{\alpha} + E_{a+}(e^{-\alpha\sigma_c}) G_\alpha f(c)$

今　$c_n \downarrow a$ なる点列を選んで　$G_\alpha f(c_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \underline{\lim\limits_{b\downarrow a}}\, G_\alpha f(b)$　ならしめる。

上の不等式の c の代りに c_n をおくと $E_{a+}(e^{-\alpha\sigma_{c_n}}) \xrightarrow[n\to\infty]{} E_{a+}(e^{-\alpha\sigma_{a++}}) = 1$ だから

結局　$\overline{\lim\limits_{b\downarrow a}}\, G_\alpha f(b) \leqq \underline{\lim\limits_{b\downarrow a}}\, G_\alpha f(b)$　を得る

これは　$G_\alpha f(a+) = \lim\limits_{b\downarrow a} G_\alpha f(b)$ の存在を意味している

同様に　$E_{a-}(e^{-\sigma_{a--}}) = 1$　なら　$G_\alpha f(a-)$ が存在する。

<u>Remark</u>　*Lemma* 3.1 の証明(4)で示したように、$E_{a++}(e^{-\sigma_{a+}}) = 1$　のとき

$p_-(a) = \lim\limits_{b\downarrow a} P_b(\sigma_a < +\infty)$ である、　即ち　$p_-(a)$ は *path* が a の右側

から a へ上陸する確率を表わす

a が *regular* なら　$p_-(a) = 1$　$p_+(a) = 1$　である。

実際 a が *regular* だとすると　$\exists b$、$a<b$　$E_b(e^{-\sigma_a}) > 0$

$a<c<b$ なる任意の c に対し　$E_b(e^{-\sigma_c}) \geq E_b(e^{-\sigma_a}) > 0$　だから

Sem. on Probab.
Vol.3 1960年
P1-94

$E_b(e^{-\sigma_{a+}}) = \lim_{c \downarrow a} E_b(e^{-\sigma_c}) > 0$ 從がって $E_{a++}(e^{-\sigma_{a+}}) = \lim_{b \downarrow a} E_b(e^{-\sigma_{a+}}) > 0$

即ち $E_{a++}(e^{-\sigma_{a+}}) = 1$ 故に Theorem 3.2より $G_\alpha f(a+) = p_-(a) G_\alpha f(a)$ が成立する、ところが a は regular だから Theorem 3.1より $G_\alpha f(a+) = G_\alpha f(a)$

$\therefore p_-(a) = 1$ $p_+(a) = 1$ も同様に示される。

§4. 狭義の generator

一般の markov process の generator については既に才一章で述べてある更に才1章に於て、G_α の domain として bounded Borel function 全体 $\mathbb{B}_S$ よりもっと狭い函数空間 $D(\subset \mathbb{B}_S)$ を指定しても D がある種の条件を満していれば $G_\alpha D$ 上で定義される generator はもとの process を characterize するに充分であるという事実を説明した。

この節では linear diffusion $\mathbb{M} = (S, W_c, P_a, a \in S \vee \infty)$ に於て上の D として次の様なものをきめて generator を定義して行く。

$\mathbb{B}_S$ を §3 の最初に述べたように ∞ での値が 0 であるような S 上の bounded, Borel measurable function の全体とする。

$\mathbb{B}_S \supset D$ を次の様に定義する

$$D = \left\{ f ; f \in \mathbb{B}_S \quad \text{且つ} \quad \begin{array}{lll} \text{proper right shunt} & \text{で} & \text{右連続} \\ \text{proper left shunt} & \text{で} & \text{左連続} \\ \text{regular point} & \text{で} & \text{連続} \end{array} \right\}$$

Theorem 3.1 より直ちに次の Theorem が成立する

<u>Theorem 4.1</u>

G_α は $\mathbb{B}_S$ を D の中に移す

よつて $G_\alpha : D \longrightarrow D$

<u>Theorem 4.2</u>

$G_\alpha D$ は α に無関係である、それを改ためて $G \cdot D$ と記すと

$G_\alpha : D \longrightarrow G \cdot D = R$ なる対応は one to one である。

<u>Proof</u>

$G_\alpha D$ が α に無関係であることは G_α が D を D に移すことに注意して resolvent equation により容易に証明出来る (see 才1章)

定理の後半を示すには

$^\exists \alpha_0 > 0$, $G_{\alpha_0} f \equiv 0$ $f \in D \Rightarrow f \equiv 0$ をいえばよい。

$G_{\alpha_0} f = 0$ ならば、任意の $\lambda > 0$ に対し resolvent equation

Sem. on Probab.
Vol.3 1960年
P1-94

$G_\alpha f - G_{\alpha_0} f + (\alpha - \alpha_0) G_\alpha G_{\alpha_0} f = 0$ より $G_\alpha f = 0$

故に $\alpha E_a \left(\int_0^\infty e^{-\alpha t} f(X_t) dt \right) = 0$ が任意の $\alpha > 0$ に対して成立する.

変数変換により $E_a \left(\int_0^\infty e^{-s} f(X_{\frac{s}{\alpha}}) ds \right) = 0$

ここで $\alpha \longrightarrow +\infty$ とする

path の右連続性より $P_a (X_{\frac{s}{\alpha}} \xrightarrow[\alpha \to +\infty]{} a) = 1$

$f \in D$ であるから $f(X_{\frac{s}{\alpha}}) \xrightarrow[\alpha \to +\infty]{} f(a)$ （P_a - measure 1 で）

かくて $f(a) = 0$ を得る

Definition 4.1

$\widetilde{\mathfrak{G}}_\alpha = \alpha - G_\alpha^{-1}$ $\mathfrak{D}(\mathfrak{G}_\alpha) = R (= G \cdot D)$ なる R から D への operator を、考えている diffusion の 広義の generator という

前定理より広義の generator は一意的な operator であることが保証される.

Theorem 4.3 $\widetilde{\mathfrak{G}}_\alpha$ は α に無関係である、よって今度 $\widetilde{\mathfrak{G}}_\alpha$ を単に $\widetilde{\mathfrak{G}}$ と書く

Proof $f \in R$ とする、resolvent equation $G_\alpha G_\beta = G_\beta G_\alpha$ が出ることに注意して、

$$G_\alpha G_\beta [(\alpha - G_\alpha^{-1}) - (\beta - G_\beta^{-1})] f = [(\alpha - \beta) G_\alpha G_\beta + G_\alpha - G_\beta] f = 0$$

故に $G_\alpha G_\beta [\widetilde{\mathfrak{G}}_\alpha - \widetilde{\mathfrak{G}}_\beta] f = 0$

G_α, G_β が $D \longrightarrow R$ の一対一対応を与えることから $\widetilde{\mathfrak{G}}_\alpha = \widetilde{\mathfrak{G}}_\beta$

次に上の広義の generator と Dynkin の意味の generator との関係を調べる、そのための準備として、次の定理をあげる。

Theorem 4.4

S の点 a が trap でないとすると、$\exists u \in \mathfrak{D}(\widetilde{\mathfrak{G}})$ $\widetilde{\mathfrak{G}} u(a) \neq 0$

Proof

全ての $u \in \mathfrak{D}(\widetilde{\mathfrak{G}})$ に対して $\widetilde{\mathfrak{G}} u(a) = 0$ と仮定して矛盾を導く、

即ち、$\forall f \in D$ $\widetilde{\mathfrak{G}} G_\alpha f = \alpha G_\alpha f - f = 0$

$$\int_0^\infty \alpha e^{-\alpha t} [H_t f(a) - f(a)] dt = 0 \qquad (1)$$

今 h を S 上の連続函数で、a を含む S の有界集合の外では 0、$h(\infty) = 0$ 且つ、$h(a) \neq 0$，$a \neq b$ なる b に対して、$h(b) < h(a)$ を満すものとする、このような h は明らかに存在し、$h \in D$ である。

$$H_t h(a) = \int_S P(t, a, db) h(b) \leq h(a) P(t, a, S) \leq h(a) \qquad (2)$$

Sem. on Probab.
Vol.3 1960年
P1-94

(1)(2)より　$H_t h(a) = h(a)$ *for almost all* t

$P(t, a, db) = \delta_a(db)$ *for almost all* t (但 δ_a は a に mass 1 をもつ δ-function)

$P_a(X_t = a) = 1$ *for almost all* t

よって S で dense な可算集合 C が存在して

$\forall t \in C \quad P_a(X_t = a) = 1$ 　故に　$P_a(X_t = a \ \forall t \in C) = 1$

X_t は t に関し連続だから、$P_a(X_t = a$ *for all* $t) = 1$

これは、a が trap であることを意味し、矛盾である。

Theorem 4.5

S の点 a は trap でないとする．狭義の generator $\tilde{\mathcal{G}}$ は次の様に表現出来る．

$$\tilde{\mathcal{G}} u(a) = \lim_{V \to a} \frac{E_a(u(X_{\tau_V})) - u(a)}{E_a(\tau_V)} \qquad u \in D$$

但し、V は次の様にして定められる a の近傍である

a が regular point のとき　$V = (b, c)$　$b < a < c$

a が proper right shunt のとき　$V = [a, c]$　$a < c$

a が proper left shunt のとき　$V = (b, a]$　$b < a$

又．τ_V は V からの first leaving time

即ち．$\tau_V = \inf\{t : X_t \in (S - V) \vee \infty\}$ である

path が連続であるから τ_V は markov time である．

Proof

a は trap ではないのだから theorem 4 より $\exists u \in \mathfrak{D}(\tilde{\mathcal{G}})$ 　$\tilde{\mathcal{G}} u(a) \neq 0$

a が regular point のとき．

$\tilde{\mathcal{G}} u \in D$ であるから、$\tilde{\mathcal{G}} u$ は a に於て連続である．

故に第1章と全く同じ方法で $\exists V = (b, c)$ 　$b < a < c$ 　$E_a(\tau_V) < +\infty$

を得る。

再び任意の $u \in D$ につき $\tilde{\mathcal{G}} u$ の a に於ける連続性を用いて．上の表現を得る。　　(see 第1章 prop 8.5)

a が proper right shunt のとき

$u \in D$ なら $\tilde{\mathcal{G}} u \in D$ で $\tilde{\mathcal{G}} u$ は a に於て右連続である．

從つて、この場合、V として $[a, c)$ 　$a < c$ なる type の近傍を考えると、a が regular の場合と事情が全く同じになる。

a が proper left shunt のとき、a の近傍として、$V = (b, a]$ 　$b < a$ なる type のものを考えればよい。

Sem. on Probab.
Vol.3 1960年
P1-94

§5 regular interval における generator

与えられた linear diffusion の一つの regular interval (ℓ, r) をとり、この diffusion の generator が この区間 (ℓ, r) の中でどんな形をとるかを調べよう。目的とする所は次の定理である。

Theorem 5.1 (Feller - Mckean)[1]

$u \in \mathfrak{D}(\mathcal{G})$ ならば

(1) $\mathcal{G}u(\xi)\, m(d\xi) = d(D_s u)(\xi) - u(\xi)\, k(d\xi)$

ここに

(2) $s(\xi)$ は $\ell < \xi < r$ で定義せられた真に増大する連続函数で canonical scale とよばれる

(3) $m(d\xi)$ は (ℓ, r) で定義せられた真に正なる測度で、かつ (ℓ, r) の内部で有界である。これは canonical measure とよばれる。

(4) $k(d\xi)$ は (ℓ, r) で定義せられた測度で、(ℓ, r) の内部で有界である。これは killing measure とよばれる。

註1 (1)の意味を詳しくいうと次のようである。

(1. a) $u(\xi)$ は (ℓ, r) の内部で有界変動である。

(1. b) u に対応する有符号測度 du は s に対する測度 ds について絶対連続であって $\frac{du}{ds}$ は有界変動なる version $D_s u$ をもつ

(1. c) $D_s u$ に対応する有符号測度 $d(D_s u)$ は (1) を満す。

註2. $u \in \mathfrak{D}(\mathcal{G})$ のとき $\mathcal{G}u(\xi)$ には mod m のあいまいさがあるが、どの version をとっても (1) がなりたつ、それは m に属する函数は (ℓ, r) の中で、m について殆んど到る所 0 となるからである。

註3 (1)によって $\mathcal{G}u(\xi)$ は "$(d(D_s u)(\xi) - u(\xi)\, k(d\xi))/m(d\xi)$" として m 測度 0 を除いて定まる。この m 測度 0 を除いてというあいまいさが、mod m を除いてというあいまいさに対応する。特に $u \in \mathfrak{D}(\hat{\mathcal{G}})$ のときには $\hat{\mathcal{G}}u(\xi)$ は (ℓ, r) の中で連続となり $(\hat{\mathcal{G}}u)(\xi)$ は

$$\hat{\mathcal{G}}u(\xi) = \text{"}(d(D_s u)(\xi) - u(\xi)k(d\xi))/m(d\xi)\text{"}$$

の連続な version として定まることになる。

---

1) この定理は本質的には Feller が導いたものであるが killing measure を導入してこの形にかいたのは Mckean である。

Sem. on Probab.
Vol.3 1960年
P1-94

定理の証明

準備として次の三条件を満す特殊な diffusion を考察する。

(ID.1) state space S は閉区内 $[a, b]$ で、S の内点はすべて regular で両端 a, b は conservative trap である。

(ID.2) $P_\xi(\sigma_a < +\infty)$, $P_\xi(\sigma_b < +\infty) > 0$ $\quad \xi \in S$

(ID.3) $E_\xi(\sigma_a \wedge \sigma_b) < +\infty$, $\quad \xi \in S$

(ID.3) により $P_\xi(\sigma_a \wedge \sigma_b < +\infty) = 1$ であるから、$P_\xi(\sigma_\infty = +\infty) = 1$, $\xi \in (a, b)$, である (ID.1) により、$P_\xi(\sigma_\infty = +\infty) = 1$ は $\xi = a, b$ に対してもなりたち、この process は conservative である

Prop 1. $s(\xi) = P_\xi(\sigma_b < +\infty)$ とおけば、S は真に増大する連続函数で $S(a) = 0$, $S(b) = 1$

証明 $f(\xi) = 0$ $(a < \xi < b)$, $f(b) = 1$ とおくと、$f \in B(S)$

$$G_\beta f(\xi) = E_\xi\left(\int_0^{+\infty} e^{-\beta t} f(x_t)\,dt\right)$$
$$= E_\xi\left(\int_{\sigma_b}^{+\infty} e^{-\beta t}\right)$$
$$= \frac{1}{\beta} E_\xi\left(e^{-\beta\sigma_b}\right)^{2)}$$

故に

(5) $\lim_{\beta \downarrow 0} \beta G_\beta f(\xi) = P_\xi(\sigma_b < +\infty) = S(\xi)$

さて resolvent equation :

$$G_\beta f - G_\alpha f + (\beta - \alpha) G_\alpha G_\beta f = 0$$

の両辺に β をかけ、$\beta \downarrow 0$ の極限をとると、(5) により

(6) $\quad S = \alpha G_\alpha S$

故に Theorem 3.1 により、S は $[a, b]$ で連続。又 $\xi < \eta$ のときには

$$P_\xi(\sigma_b < +\infty) = P_\xi(\sigma_\eta < +\infty \quad \sigma_b < +\infty) \quad \text{(Pathの連続性)}$$
$$= P_\xi(\sigma_\eta < +\infty,\ \sigma_b(w^+_{\sigma_\eta}) < +\infty)$$
$$= P_\xi(\sigma_\eta < +\infty)\, P_\eta(\sigma_b < +\infty) \quad \text{(強マルコフ性)}$$

即ち $\quad S(\xi) = P_\xi(\sigma_\eta < +\infty)\, S(\eta)$

---

2) $e^{-\infty} = 0$ なる convention による

Sem. on Probab.
Vol.3 1960年
P1-94

(D.2) により $S(\eta)>0$ であるから，$P_\xi(\sigma_\eta<+\infty)<1$ をいえば $S(\xi)<S(\eta)$ となつて証明が終る．もし $P_\xi(\sigma_\eta<+\infty)=1$ とすれば，a が trap であることから，$P_\xi(\sigma_\eta<\sigma_a)=1$．故に

$$E_\xi(e^{-\sigma_a}) = E_\xi(e^{-\sigma_a} : \sigma_\eta<\sigma_a)$$
$$= E_\xi(e^{-\sigma_\eta})E_\eta(e^{-\sigma_a}) \quad (\text{強マルコフ性})$$
$$= E_\xi(e^{-\sigma_\eta})E_\eta(e^{-\sigma_\xi})E_\xi(e^{-\sigma_a}) \quad (\ \text{〃}\ )$$

Path の連続性により

$$E_\xi(e^{-\sigma_\eta})\,E_\eta(e^{-\sigma_\xi})<1$$

$P_\xi(\sigma_a<+\infty)>0$ により $E_\xi(e^{-\sigma_a})>0$ 故に $E_\xi(e^{-\sigma_a}) < E_\xi(e^{-\sigma_a})$ となり矛盾

Prop.2. $a\leqq\alpha<\xi<\beta\leqq b$ のときには

$$P_\xi(\sigma_\beta<\sigma_\alpha)=\frac{S(\xi)-S(\alpha)}{S(\beta)-S(\alpha)},\quad P_\xi(\sigma_\alpha<\sigma_\beta)=\frac{S(\beta)-S(\xi)}{S(\beta)-S(\alpha)}$$

証　明　左辺をそれぞれ π_1, π_2 とする

$$S(\xi)=P_\xi(\sigma_b<\sigma_a)=P_\xi(\sigma_b<\sigma_a,\ \sigma_\beta<\sigma_\alpha)+P_\xi(\sigma_b<\sigma_a,\ \sigma_\alpha<\sigma_\beta)$$
$$=P_\xi(\sigma_\beta<\sigma_\alpha,\ \sigma_b(w_{\sigma_\beta}^+)<\sigma_a(w_{\sigma_\beta}^+))+P_\xi(\sigma_\alpha<\sigma_\beta;\ \sigma_b(w_{\sigma_\alpha}^+)<\sigma_a(w_{\sigma_\alpha}^+))$$

強マルコフ性により

$$=P_\xi(\sigma_\beta<\sigma_\alpha)P_\beta(\sigma_b<\sigma_a)+P_\xi(\sigma_\alpha<\sigma_\beta)\times P_\alpha(\sigma_b<\sigma_a)$$

故に

$$S(\xi)=\pi_1\,S(\beta)+\pi_2\,S(\alpha)$$

又 $1=\pi_1+\pi_2$ は明らか、この二式から π_1,π_2 をとけばよい

Prop 3　$g(\xi)=E_\xi(\sigma_a\wedge\sigma_b)$ とおけば，g は連続でかつ S に関して真に concave で，$g(a)=g(b)=0$　$m(\xi)=-D_S^+g$ は真に増加する函数であつて，$m(d\xi)=dm(\xi)$ は定理の条件 (2) を満す

証　明　$f(\xi)=1\quad(a<\xi<b)$，$f(a)=f(b)=0$ とおくと

$$G_\beta f(\xi)=E_\xi\left(\int_0^{+\infty}e^{-\beta t}f(x_t)\,dt\right).$$
$$=E_\xi\left(\int_0^{\sigma_a\wedge\sigma_b}e^{-\beta t}\,dt\right)$$

Sem. on Probab.
Vol.3 1960年
P1-94

故に

(7) $\lim_{\beta \downarrow 0} G_\beta f(\xi) = E_\xi(\sigma_a \wedge \sigma_b = g(\xi)$

resolvent equation $G_\beta f - G_\alpha f + (\beta - \alpha) G_\alpha G_\beta f = 0$

において $\beta \downarrow 0$ として

(8) $g = G_\alpha (f + \alpha g)$

故に Theorem 3.1 により g は連続である。定理により $g(a) = g(b) = 0$ は明らか，又 $a < \alpha < \xi < \beta < b$ ならば $\sigma = \sigma_\alpha \wedge \sigma_\beta$ とおくと

$$
\begin{aligned}
g(\xi) &= E_\xi(\sigma_a \wedge \sigma_b) = E_\xi(\sigma + (\sigma_a \wedge \sigma_b)(W_\sigma^+)) \\
&= E_\xi(\sigma) + E_\xi((\sigma_a \wedge \sigma_b)(W_\sigma^+)) \\
&= E_\xi(\sigma) + E_\xi(E_{x_\sigma}(\sigma_a \wedge \sigma_b)) \\
&= E_\xi(\sigma) + E_\xi(g(x_\sigma)) \\
&= E_\xi(\sigma) + g(\alpha) P_\xi(\sigma_\alpha < \sigma_\beta) \quad g(\beta) P_\xi(\sigma_\beta < \sigma_\alpha) \\
&= E_\xi(\sigma) + g(\alpha) \frac{S(\beta) - S(\xi)}{S(\beta) - S(\alpha)} + g(\beta) \frac{S(\xi) - S(\alpha)}{S(\beta) - S(\alpha)} \\
&> g(\alpha) \frac{S(\beta) - S(\xi)}{S(\beta) - S(\alpha)} + g(\beta) \frac{S(\xi) - S(\alpha)}{S(\beta) - S(\alpha)}
\end{aligned}
$$

故に g は S について真に concave 従って $m(\xi) = -D_S^+ g(\xi)$ は真に増加する．かくして $m(d\xi) = dm(\xi)$ は条件 (2) を満す

Prop 4 $f \in \mathbb{B}(S)$ のとき

(9) $E_\xi\left(\int_0^{\sigma_a \wedge \sigma_b} f(x_t)\, dt\right) = \int_a^b G(\xi, \eta) f(\xi)\, m(d\xi)$

こゝに

(10) $G(\xi, \eta) = G(\eta, \xi) = \dfrac{(S(b) - S(\eta))(S(\xi) - S(a))}{S(b) - S(a)}$

$\xi \leq \eta$.

更に (9) の両辺を $u(\xi)$ とおけば

(11) $-d(D_S u)(\xi) = f(\xi)\, m(d\xi)$, $\quad a < \xi < b$

証 明 (9)が証明できれば，(11) は(9) の右辺の式を用いて容易に示される。

即ち.

Sem. on Probab.
Vol.3 1960年
P1-94

$$u(\xi) = \int_a^b G(\xi, \eta) f(\eta) m(d\eta)$$
$$= \frac{S(b)-S(\xi)}{S(b)-S(a)} \int_a^{\xi} (S(\eta)-S(a)) f(\eta) m(d\eta) + \frac{S(\xi)-S(a)}{S(b)-S(a)}$$
$$\int_{\xi}^b (S(b)-S(\eta)) f(\eta) m(d\eta)$$

に注意して

$$du(\xi)^{3)} = \frac{-dS(\xi)}{S(b)-S(a)} \int_a^{\xi} (S(\eta)-S(a)) f(\eta) m(d\eta) +$$
$$G(\xi,\xi) f(\xi) m(d\xi)$$
$$+ \frac{dS(\xi)}{S(b)-S(a)} \int_{\xi}^b (S(b)-S(\eta)) f(\eta) m(d\eta) - G(\xi,\xi) f(\xi)$$
$$m(d\xi),$$

$$D_S u(\xi) = \frac{1}{S(b)-S(a)} \left[-\int_a^{\xi} (S(\eta)-S(a)) f(\eta) m(d\eta) + \right.$$
$$\left. \int_{\xi}^b (S(b)-S(\eta)) f(\eta) m(d\eta) \right].$$
$$-d D_S^+ u(\xi) = f(\xi) m(d\xi); \quad a < \xi < b$$

(9)の両辺は $f \in B(S)$ の非負線型汎函数であるから、f が区間 $[\alpha\ \beta]$（$a<\alpha<\beta<b$，α、β は m の連続点）の定義函数のときに (9) を証明すれば、一般の場合はそれから導かれる。まず始めに (9) の左辺を $v(\xi)$ とおくと、

$a < \xi < \alpha$ では

$$v(\xi) = E_{\xi}\left(\int_{\sigma_\alpha}^{\sigma_a \wedge \sigma_b} f(x_t)\, dt \ ; \sigma_\alpha < \sigma_a \wedge \sigma_b \right)$$
$$= E_{\xi}\left(\int_0^{(\sigma_a \wedge \sigma_b)(w^+_{\sigma_\alpha})} f(x_t(w_{\sigma_\alpha}^+))\, dt \ ; \sigma_\alpha < \sigma_a \right.$$
$$\left. \wedge \sigma_b \right)$$
$$= E_{\xi}\left(E_{x_{\sigma_\alpha}}\left(\int_0^{\sigma_a \wedge \sigma_b} f(x_t)\, dt \right) ; \sigma_\alpha < \sigma_a \wedge \sigma_b \right)$$

3）u，v が有界変動ならば，uv も同様で
$$d(u \cdot v)(\xi) = u(\xi+) dv(\xi) + v(\xi-) du(\xi) = u(\xi-) dv(\xi)$$
$$+ v(\xi+) du(\xi)$$ 特に u，v の中一方が連続ならば
$$d(uv)(\xi) = u(\xi) dv(\xi) + v(\xi) du(\xi)$$

$$= E_\xi(v(\alpha) : \sigma_\alpha < \sigma_a \wedge \sigma_b) = v(\alpha) P_\xi(\sigma_\alpha < \sigma_a)$$

$$= v(\alpha) \cdot \frac{S(\xi) - S(a)}{S(\alpha) - S(a)} = S(\xi) \text{ の一次式}$$

同様に $\beta < \xi < b$ では

$$v(\xi) = v(\beta) \frac{S(b) - S(\xi)}{S(b) - S(\beta)} = S(\xi) \text{ の一次式}$$

又 $\alpha < \xi < \beta$ では

$$v(\xi) = E_\xi(\sigma_\alpha \wedge \sigma_\beta) + \frac{S(\beta) - S(\xi)}{S(\beta) - S(\alpha)} v(\alpha) + \frac{S(\xi) - S(\alpha)}{S(\beta) - S(\alpha)} v(\beta)$$

又 prop 3の証明の途中にあったように

$$g(\xi) = E_\xi(\sigma_\alpha \wedge \sigma_\beta) + \frac{S(\beta) - S(\xi)}{S(\beta) - S(\alpha)} g(\alpha) + \frac{S(\xi) - S(\alpha)}{S(\beta) - S(\alpha)} g(\beta)$$

従って $v(\xi) = g(\xi) + S(\xi)$ の一次式

上のことから $v(\xi)$ は $a \leq \xi \leq b$ で連続で, $v(a) = v(b) = 0$

しかも

$$(12)\quad -dD_S v(\xi) = \begin{cases} 0 & (a < \xi < \alpha \text{ 又は } \beta < \xi < b) \\ -dD_S g(\xi) = m(d\xi) & (\alpha < \xi < \beta) \end{cases}$$

さて、一般に $f \geq 0$ ならば, $v(\xi)$ が S に関して concave であり

$-dD_S v \geq 0$ となることは prop 3における g の場合と同様に示される。又 $g \geq f \geq 0$ ならば $g, f, h\ (= g - f)$ に対する v を G, F, H とおくと, $h \geq 0$ により $-dD_S H \geq 0$ $g = f + h$ により $G = F + H$ である

$$-dD_S G = -dD_S F - dD_S H \geq -dD_S F$$

特に $g \equiv 1$ f を上の特別の f にとると

$$0 \leq -dD_S v \leq -dD_S g = dm$$

α, β は m の連続点であるから、α、β 各点の $(-dD_S v)$ 測度も 0

Sem. on Probab.
Vol.3 1960年
P1-94

従って (12) により

$$-dD_s v(\xi) = f(\xi) m(d\xi) \qquad a < \xi < b$$

又 (9) の右辺 $u(\xi)$ も定義から明らかに $a \leq \xi \leq b$ で連続で

$u(a) = u(b) = 0$

しかも上に述べたように

$$-dD_s u(\xi) = f(\xi) \qquad a < \xi < b$$

従って $-dD_s(v-u) = 0$ これから $v-u = s$ の一次式となるが

$(v-u)(a) = (v-u)(b) = 0$ であるから この一次式の部分は消えて $v \equiv u$ となる。

さて、定理の証明にうつる、まず始めに (l, r) の各点 c の近傍で、$G_{J}u$ が (1) の形にかけることを示し、次にこれをうまく連結して (l, r) 全体で (1) の形にかけることをいう．c は regular point であるから c を含む開区間 (a, b) を十分小さくとって，任意の $\xi \in [a, b]$ に対し

$$P_\xi(\sigma_a < +\infty), \quad P_\xi(\sigma_b < +\infty) > 0$$

$$P_\xi(\sigma_a \wedge \sigma_b < +\infty) > 0$$

$$E_\xi(\sigma_a \wedge \sigma_b \wedge \sigma_\infty) < +\infty$$

となるようにできる

今 $S^* = [a, b]$ を state space とする diffusion D^* を

$$P^*_\xi(B) = P_\xi(W^-_{\sigma_a \wedge \sigma_b} \in B \mid \sigma_a \wedge \sigma_b < +\infty)$$

によって定義すると，これは上にのべた三条件 (D.1) (D.2) (D.3) を満たす diffusion であることが証明できる．（証明略） この diffusion に対して平均値，S, m, G_α, G などすべて $*$ をつけて $E^*_\xi, S^*, m^*, G^*_\alpha, G^*$, とかく，又

Sem. on Probab.
Vol.3 1960年
P1-94

$p(\xi) = P_\xi(\sigma_a \wedge \sigma_b < +\infty) \quad (>0)$

とおき、任意のuに対して，$u^* = u p^{-1}$とおく、特に$1^* = p^{-1}$

さて $u \in \mathfrak{D}(\mathcal{G})$ とせよ

$$E_\xi^*(u^*(x_{\sigma_a \wedge \sigma_b})) - u^*(\xi)$$

$$= E_\xi(u(x_{\sigma_a \wedge \sigma_b})), \sigma_a \wedge \sigma_b < +\infty) - u(\xi)) p(\xi)^{-1}$$

$$\overset{4)}{=} [E_\xi(u(x_{\sigma_a \wedge \sigma_b \wedge \sigma_\infty})) - u(\xi)] p(\xi)^{-1}$$

$$= E_\xi\left(\int_0^{\sigma_a \wedge \sigma_b \wedge \sigma_\infty} \mathcal{G}u(x_t)\,dt\right) p(\xi)^{-1}$$

$$= E_\xi\left(\int_0^{\sigma_a \wedge \sigma_b \sigma_\infty} (\mathcal{G}u)^*(x_t)\,p(x_t)\,dt\right) p(\xi)^{-1}$$

$$\overset{5)}{=} E_\xi\left(\int_0^{+\infty} (\mathcal{G}u)^*(x_t)\,P_{x_t}(\sigma_a \wedge \sigma_b < t\infty)\,\chi_{\sigma_a \wedge \sigma_b \wedge \sigma_\infty}(t)\,dt\right)$$

$$\times p(\xi)^{-1}$$

$$= \int_0^{+\infty} E_\xi((\mathcal{G}u)^*(x_t) : (\sigma_a \wedge \sigma_b)(w_t^t) < +\infty,\ t \leq \sigma_a \wedge \sigma_b \wedge \sigma_\infty)$$

$$dt \cdot p(\xi)^{-1}$$

$$= \int_0^{+\infty} E_\xi((\mathcal{G}u)^*(x_t) = t \leq \sigma_a \wedge \sigma_b)\,p(\xi)^{-1}\,dt$$

$$= \int_0^{+\infty} E_\xi((\mathcal{G}u)^*(x_t) : t \leq \sigma_a \wedge \sigma_b)\,dt$$

$$= E_\xi^*\left(\int_0^{\sigma_a \wedge \sigma_b} (\mathcal{G}u)^*(x_t)\,dt\right)$$

$$E_\xi^*(u^*(x_{\sigma_a \wedge \sigma_b})) = u^*(a)\,\frac{s^*(b) - s^*(a)}{s^*(b) - s^*(a)} + u^*(b)\,\frac{s^*(\xi) - s^*(a)}{s^*(b) - s^*(a)}$$

であるから，これは$s^*(\xi)$の一次式である。従って prop 4により．

(13) $d D_{s^*} u^*(\xi) = (\mathcal{G}u)^*(\xi)\, m^*(d\xi)$

となる。

---

4) $\sigma_a \wedge \sigma_b \geq \sigma_\infty$ のときには

$u(x_{\sigma_a \wedge \sigma_b \wedge \sigma_\infty}) = u(\infty) = 0$

5) χ_τは $[0, \tau]$ の定義函数

Sem. on Probab.
Vol.3 1960年
P1-94

さて$u_\alpha = G_\alpha 1$とおけば，$u \in \mathfrak{D}(\mathcal{G})$　$\mathcal{G} u_\alpha = \alpha G_\alpha 1 - 1 \leqq 0$

故に　$(\mathcal{G} u_\alpha)^* \leqq 0$

従って(13)により　$d D_{S^*} u_\alpha^* \leqq 0$で，　u_α^*は　S^*について

concaveである。しかるに$1 = \lim_{\alpha \to +\infty} \alpha u_\alpha^*$であるから　$p^{-1} = 1^*$

$= \lim_{\alpha \to \infty} \alpha u_\alpha^*$　も又S^*についてconcaveである。しかるに

$1 = \lim_{\alpha \to +\infty} \alpha u_\alpha$　であるから，$p^{-1} = 1^* = \lim_{\alpha \to +\infty} \alpha u_\alpha^*$も又$S^*$につ

いてConcaveである

即ち　$D_{S^*} p^{-1}$は減少函数となる．

$$dS = p^2 dS^*, \qquad dm = p^{-2} dm^*$$

とおく　S^*は連続であるから　p^{-1}も連続で　$dp^{-1} = -p^{-2} dp$

故に　$D_S p = -p^2 D_S p^{-1} = -D_{S^*} p$　となり，$D_S p$は増加函数である。du^*がdSについて絶対連続，dpもdSについて絶対連続であるから　$u = pu^*$も同様である。又dp^{-1}はdS^*について従ってdSについて絶対連続である。しかも

$$D_S u = D_S p u^* + p D_S u^*$$

で$D_S u$も有界変動である，さて(13)をかきなおして

$$d[p^2 D_S(p^{-1} u)] = (\mathcal{G} u) p^{-1} p^2 dm$$

さて

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= d[p^2 D_S p^{-1} \cdot u + p^2 p^{-1} D_S u] \\
&= d[-p^2 p^{-2} D_S p u + p D_S u] \\
&= d[-D_S p u + p D_S u] \\
&= -d(D_S p) u - D_S p\, du + dp \cdot D_S u + p\, d D_S u \\
&= -d(D_S p) u - D_S p D_S u\, dS + D_S p D_S u\, dS + p\, d D_S u \\
&= -d(D_S p) u + p\, d(D_S u)
\end{aligned}$$

Sem. on Probab.
Vol.3 1960年
P1-94

$$(\mathcal{G}u)\,dm = d(D_s u) - u\cdot p^{-1}\,dD_s p$$

$dk = up^{-1}\,dD_s p\ (\geq 0)$ とおけば

$$(\mathcal{G}u)\,dm = d(D_s u) - u\,dk$$

さて(l, r)の各点cに対して、上のような近傍(a, b)（これを以後基本区間とよぶ）を定め、その上で$\mathcal{G}u$を上のようにかくとする。今二つの近傍$(a_1\ b_1)$，$(a_2\ b_2)$があって、これが共通点をもつとするとき、その共通部分の区間(a, b)の中では常数λが存在して

$$dS_1 = \lambda\, dS_2\ ,\quad dm_1 = \lambda^{-1} dm_2\ ,\quad dk_1 = \lambda^{-1} dk_2$$

となることを示そう。こゝに(S_i, dm_i, dk_i) $i=1,2$はいうまでもなく(a_i, b_i)におけるS dm dkである。

今 $f_a(\xi)$，$f_b(\xi)$を

$$f_a(\xi)\begin{cases} > 0 & \xi < a \\ = 0 & \xi \geq a \end{cases}$$

$$f_b(\xi)\begin{cases} = 0 & \xi \leq b \\ > 0 & \xi > b \end{cases}$$

なる有界連続函数とせよ $g_a = G_\alpha f_a$，$g_b = G_\alpha f_b$ は共に$\mathfrak{D}(\hat{\mathcal{G}})$に入る。しかも

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{G}} g_a &= \alpha g_a - f_a = \alpha g_a \\ \hat{\mathcal{G}} g_b &= \alpha g_b - f_b = \alpha g_b \end{aligned} \qquad (a<\xi<b)$$

故に
(14)
$$\begin{cases} \alpha g_a\, dm_i = dD_{s_i} g_a - g_a\, dk_i \\ \alpha g_b\, dm_i = dD_{s_i} g_b - g_b\, dk_i \end{cases} \quad (i=1,2\quad a<\xi<b)$$

$$g_b\, dD_{s_i} g_a - g_a\, dD_{s_i} g_b = 0$$

$$d(g_b D_{s_i} g_a - g_a D_{s_i} g_b) = 0$$

$$g_b D_{s_i} g_a - g_a D_{s_i} g_b = \lambda_i \ (\lambda_i \text{は} \xi\in(a,b) \text{には無関係})$$

Sem. on Probab.
Vol.3 1960年
P1-94

(15) $\lambda_i dS_i = g_i dg_a - g_a dg_b$

さて $a<\xi<b$ のとき

$$g_a(\xi) = G_\alpha f_a(\xi) = E_\xi\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t} f_a(x_t)dt\right) = E_\xi\left(\int_{\sigma_a}^\infty e^{-\alpha t} f_a(x_t)dt\right)$$
$$= E_\xi(e^{-\alpha\sigma_a})\, g_a(a)$$

a は regular point であり，常に $f_a(\xi)\geq 0$，かつ $f_a(\xi)>0$

$(\xi<a)$ で a は regular point であるから

$g_a(a)>0$ 故に $g_a(\xi)>0$ 又上の式から $g_a(\xi)$ は $a<\xi<b$ で

真に減少、同様に $g_b(\xi)$ も $a<\xi<b$ で正で、かつ真に増大、従って

(15) の右辺は 真に正常な測度であり $\lambda_i>0$ これから

$$dS_1 = \lambda dS_2 \qquad \lambda = \lambda_1^{-1}\lambda_2$$

となる

(14) の第一式により

$$\alpha g_a dm_i = dD_{S_i} g_a - g_a dk_i$$

$dD_{S_1} g_a = \lambda^{-1} D_{S_2} g_a$ であるから

$$\lambda^{-1}(\alpha g_a dm_2 + g_a dk_2) = \alpha g_a dm_1 + g_a dk_1$$

$\alpha\to 0$ とすると $g_a(\xi)\uparrow g_a(a)\ (>0)$ 故に

$$\lambda^{-1} g_a(a) dk_2 = g_a(a) dk, \quad dk_1 = \lambda^{-1} dk_2$$

故に $\lambda^{-1}\alpha g_a dm_2 = \alpha g_a dm_1$

$g_a(\xi)>0$ であるから $dm_1 = \lambda^{-1} dm_2$

$(a_1, b_1)\vee(a_2, b_2)$ なる区間では S, m, k を

$$dS = dS_1,\ dm = dm_1,\ dk = dk_1 \quad (\xi\in(a, b))$$

$$dS = \lambda dS_2,\ dm = \lambda^{-1} dm_2\ dk = \lambda^{-1} dk_2\ (\xi\in(a_2, b_2))$$

と定めるとこれは矛盾なく定まり $u\in\mathcal{D}(\mathcal{G})$ は

Sem. on Probab.
Vol.3 1960年
P1-94

$$(\mathcal{G}u)\, dm = d\, D_S u - u\, dk$$

を満たす、このようにして、共通点のある二区間の上では dm, dS, dk がつながる (l, r) に含まれる。任意の閉区間 $[a, b]$ は有限個の基本区間でおおわれるが、この基本区間の中の dS, dm, dk は上の方法でつながるから、結局 $[a, b]$ の中では上の dS, dm, dk が定まり、上の $\mathcal{G}u$ の表現が可能である。

この様な区間 $[a, b]$ の列 $[l_n, r_n]$ $n = 1, 2 \cdots\cdots$ をとって

$$[l_1\ r_1] \subset [l_2\ r_2] \subset \cdots\cdots \to (l, r)$$

ならしめ，$[l_1\ r_1]$ と $[l_n\ r_n]$ に対する dS, dm, dk の線型関係を利用して，$[l_1, r_1]$ の中の dS, dm, dk を $(l_n\ r_n)$ に拡張し、この拡張は（異なる n に対して）互に consistant であることを注意すれば dS, dm, dk が (l, r) 全体に拡張され $[l_n, r_n]$ に対する $dS_n\ dm_n\ dk_n$ と (l, r) に対する dS, dm, dk とは

$$dS_n = \lambda dS, \quad dm_n = \lambda^{-1} dm, \quad dk_n = \lambda^{-1} dk$$

なる関係でむすばれる。従って $a < \xi < b$ で

$$(\mathcal{G}u)(\xi)\, m(d\xi) = d\,(D_S u)(\xi) - u(\xi)\, k(d\xi)$$

となる。

更に上の証明を見ると次の定理がなりたつこともわかる。

Theorem 5.2 (Feller — Mckean)

定理 5.1 における dS, dm, dk はある意味で一意に定まる。

即ち

dS_1, dm_1, dk_1 が別のとり方をすれば

$$dS_1 = \lambda dS_1, \quad dm_1 = \lambda^{-1} dm \quad dk_1 = \lambda^{-1} dk$$

Sem. on Probab.
Vol.3 1960年
P1-94

§6. 一般微分作用素 $\hat{\mathcal{G}}$

前節において、regular interval (l, r) の中で

(1) $$\mathcal{G}u = \frac{d\,D_s u - u\,dK}{dm} \qquad u \in \mathcal{D}(\mathcal{G})$$

がなりたつことを導いた。この左辺は $u \in \mathcal{D}(\mathcal{G})$ のときにのみ意味があるが 右辺はもっと一般の u に対しても定義ができる

右辺の operator：

$$\frac{d\,D_s\cdot - \cdot\,dK}{dm}$$

をできる限り一般に定義したものを $\hat{\mathcal{G}}$ とかくことにする。詳しくいうと次のようになる。1)

(l, r) の部分区間 (l', r') に対して $u \in \mathcal{D}(\hat{\mathcal{G}}, (l', r'))$ とは

(i) u は (l', r') の内部で有界変動で du は ds に関して絶対連続

(ii) $\frac{du}{ds}$ は (l', r') の内部で有界変動な version $D_s u$ をもつ。

(iii) $d\,D_s u - u\,dk$ は (l', r') で dm について絶対連続で

$(d\,D_s u - u\,dk)/dm$ は (l', r') で連続な version をもつ。

この連続な version を $\hat{\mathcal{G}}u$ であらわす。従って

(2) (l', r') の中で $\hat{\mathcal{G}}u = f$

とは、$u \in \mathcal{D}(\hat{\mathcal{G}}, (l', r'))$, $\hat{\mathcal{G}}u(\xi) = f(\xi)$, $\xi \in (l', r')$ を意味する。

$\hat{\mathcal{G}}$ は 二階微分作用素：

$$L = \alpha(\xi)\frac{d^2}{d\xi^2} + \beta(\xi)\frac{d}{d\xi} - \gamma(\xi) \qquad \alpha > 0,\ \gamma \leq 0$$

の一般化となっている。実際

$$B(\xi) = \int_c^\xi \frac{\beta}{\alpha}(\eta)\,d\eta \qquad (c\text{ は問題の区間 }(l, r)\text{ の中の一点})$$

とおけば

$$Lu = e^{-B}\alpha\{e^B u'' + e^B B' u'\} - \gamma u$$

$$= \frac{d\left(\frac{1}{e^{-B}}\frac{du}{d\xi}\right) - u\frac{\gamma e^B}{\alpha}d\xi}{\frac{e^B}{\alpha}d\xi}$$

$$= \frac{d(D_s u) - u\,dk}{dm} \qquad ds = e^{-B}d\xi,\ dm = \frac{e^B}{\alpha}d\xi,\ dk = \frac{\gamma e^B}{\alpha}d\xi,$$

---

1) $\hat{\mathcal{G}}$ を定義する最も気のきいた方法は sheaf（層）の言葉を用いる方法であろうが、我々の目的には 層をもち出すのに大げさすぎる。

Sem. on Probab.
Vol.3 1960年
P1-94

二階の微分作用素に関する Sturm-Liouville の理論は $\hat{\mathcal{G}}$ に対しても次のような形でなりたつ.

Theorem 6.1 $[a, b] \subset (l, r)$ とし. u は $[a, b]$ で連続で $\mathcal{D}(\hat{\mathcal{G}}, (a, b))$ に属するものとする. 又 $\alpha \geq 0$ とする.

(4) $\xi = \xi_0$ で u が正の極大値をとれば $\hat{\mathcal{G}} u(\xi_0) \leq 0$.

(5) $(\alpha - \hat{\mathcal{G}}) u(\xi) = 0$, $a < \xi < b$.

$$g^{\alpha}_{+}(a) = 0 \qquad D_s g^{\alpha}_{+}(a) = 1$$

なる g^{α}_{+} が一つしかして唯一つ存在し. 又

$$g^{\alpha}_{-}(b) = 0 \qquad D_s g^{\alpha}_{-}(b) = -1$$

なる g^{α}_{-} が一つしかして唯一存在する. g^{α}_{+} は真に増大し. g^{α}_{-} は真に減少する. g^{α}_{+} と g^{α}_{-} とは $(\alpha - \hat{\mathcal{G}}) u = 0$, $a < \xi < b$, の解の一次独立な base である.

(6) $G_\alpha(\xi, \eta) = G_\alpha(\xi, \eta : a, b)$ を

$$G_\alpha(\xi, \eta) = G_\alpha(\eta, \xi) = g^{\alpha}_{+}(\xi) g^{\alpha}_{-}(\eta) / W^{\alpha} \qquad \xi \leq \eta$$

但し $W^{\alpha} = (D_s g^{\alpha}_{+})(\xi+) g^{\alpha}_{-}(\xi) - g^{\alpha}_{+}(\xi)(D_s g_{-})(\xi+)$ (= Wronskian)

と定めると. W^{α} は常数で

$$(\alpha - \hat{\mathcal{G}}) u = f, \quad a < \xi < b, \quad u(a) = A, \quad u(b) = B$$

なる u は

$$u(\xi) = \int_a^b G_\alpha(\xi, \eta) f(\eta) m(d\eta) \; A \frac{g^{\alpha}_{-}(\xi)}{g^{\alpha}_{-}(a)} + B \frac{g^{\alpha}_{+}(\xi)}{g^{\alpha}_{+}(b)}$$

であらわされる。

証明

(4) $\xi = \xi_0$ で u が極大値をとり $u(\xi_0) > 0$. $\hat{\mathcal{G}} u(\xi_0) > 0$ として矛盾を出す. u 及び $\hat{\mathcal{G}} u$ の連続性により ξ_0 の近傍 U で u, $\hat{\mathcal{G}} u > 0$. 従って U で

$$d D_s u = \hat{\mathcal{G}} u \, dm + u \, dk \geq \hat{\mathcal{G}} u \, dm$$

故に $d D_s$ は U の中で真に正なる測度である. これから u が s について真に Convex となり, $\xi = \xi_0$ で u が極大値をとることに反する.

(5) $u_0 = 0$. u_n に対して

$$u_{n+1}(\xi) = \int_a^{\xi} \{1 + \int_a^{\eta} u_n (\alpha dm + dk)\} ds \qquad n = 1, 2, \cdots$$

とおくと u_n は単調増大であることが帰納法でわかる. 又

$$\sigma(\xi) = \int_a^{\xi} (\alpha dm + dk + ds), \quad \alpha dm + dk = f d\sigma, \quad ds = g d\sigma$$

$$\lambda = \mathrm{Max}\,(1, f, g)$$

Sem. on Probab.
Vol.3 1960年
P1-94

とおけば

$$u_{n+1}(\xi)\le\lambda^3\int_a^\xi\Big[1+\int_a^\eta u_n(\zeta)\,d\sigma(\zeta)\Big]\,d\sigma(\eta)$$

これから

$$u_{n+1}(\xi)\le\lambda^3\Big[\sigma(\xi)+\frac{\sigma(\xi)^2}{2!}+\frac{\sigma(\xi)^3}{3!}+\cdots\Big]\le\lambda^3e^{\sigma(b)}$$

となり u_n は (a,b) で一様有界である. $g_+^\alpha=\lim_{n\to\infty}u_n$
とおく.

$$g_+^\alpha(\xi)=\int_a^\xi\Big(1+\int_a^\eta g_+(\zeta)(\alpha\,dm(\zeta)+dk(\zeta))\Big]\,ds(\eta)$$

この式から g_+^α は真に増大であること及び

$dD_s g_+^\alpha=\alpha g_+^\alpha\,dm+g_+^\alpha\,dk$, $g_+^\alpha(a)=0$, $D_s g_+^\alpha(a)=1$

を満すことがすぐわかる g_-^α についても同様である.

$(\alpha-\hat{\mathcal{G}})u=0$ の任意の解 u をとり

$$v=u-\frac{u(b)}{g_+^\alpha(b)}g_+^\alpha-\frac{u(a)}{g_-^\alpha(a)}g_-^\alpha$$

とおくと. $(\alpha-\hat{\mathcal{G}})v=0$. しかも $v(a)=v(b)=0$.
a と b との間で v が正になれば. 区間 $(a',b')\subset(a,b)$ があってその内部で $v>0$, かつ両端で 0. (a',b') では

$\hat{\mathcal{G}}v=\alpha v\ge 0 \quad\therefore\ dD_s v\ge v\,dk\ge 0.$

故に (a',b') では v は s について convex; $v(a')=v(b')=0$ により (a',b') では $v\le 0$. これは矛盾である. 故に (a,b) の中で $v\le 0$. 同様に $-v\le 0$ $\therefore v\equiv 0$, 従って u は g_+^α, g_-^α の一次結合である. g_+^α, g_-^α が一次独立であることは明らかである.

(6) $dW^\alpha=g_-^\alpha\,dD_s g_+^\alpha+D_s g_-^\alpha\,D_s g_+^\alpha\,ds-g_+^\alpha\,dD_s g_-^\alpha-D_s g_+^\alpha\,D_s g_-^\alpha\,ds$

$\quad=g_-^\alpha(\alpha g_+^\alpha\,dm+g_+^\alpha\,dk)-g_+^\alpha(\alpha g_-^\alpha\,dm+g_-^\alpha\,dk)$

$\quad=0$

故に W^α は常数である.

$$u_0(\xi)=(W^\alpha)^{-1}\Big\{g_-^\alpha(\xi)\int_a^\xi g_+^\alpha f\,dm+g_+^\alpha(\xi)\int_\xi^b g_-^\alpha f\,dm\Big\}$$

とおくと. §5 の脚注 3)により. (a,b) において

$dD_s u_0-u_0\,dk=(\alpha u_0-f)\,dm.$

従って $(\alpha-\hat{\mathcal{G}})u_0=f$. 又 $u_0(a)=u_0(b)=0$ は明らか
一般に $(\alpha-\hat{\mathcal{G}})u=f$. $u(a)=A$. $u(b)=B$ の解を u とし. $v=u-u_0$
とおくと

$(\alpha-\hat{\mathcal{G}})v=0$. $v(a)=A$. $v(b)=B$.

Sem. on Probab.
Vol.3 1960年
P1-94

故に (5) により

$$v = A\,\frac{g_-^\alpha}{g_-^\alpha(a)} + B\,\frac{g_+^\alpha}{g_+^\alpha(b)}$$

となり. uは (7) に示した形となる. 逆にかかるuが $(\alpha-\hat{\mathcal{G}})u=f$, $a<\xi<b$, $u(a)=A$, $u(b)=B$ の解となることは明らかである.

さて もとの diffusion の問題にもどり, (l, r) を regular interval. s, m, k をそれぞれ canonical scale, canonical measure killing measure とする. この s, m, k により $\hat{\mathcal{G}}$ を上のように定義する.

Theorem 6.2. $[a, b]\subset(l, r)$ とし. $\alpha>0$ に対し

(7) $E_\xi\left(\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} f(x_t(w_{\sigma_a\wedge\sigma_b}))\,dt\right)$

$$= \int_a^b G_\alpha(\xi,\eta) f(\eta)\, m(d\eta) + \frac{f(a)}{\alpha}\,\frac{g_-^\alpha(\xi)}{g_-^\alpha(a)} + \frac{f(b)}{\alpha}\,\frac{g_+^\alpha(\xi)}{g_+^\alpha(b)}$$

証明 $\mathbb{D}^- = \{S^-=(a,b),\ P_\xi^-(B)=P_\xi(w_{\sigma_a\wedge\sigma_b}\in B)\}$ とすれば. これも diffusion で (a, b) の中の s, m, k はもとの diffusion に対するものと (a, b)内では一致する. $\mathbb{D}^-$に対して G_α^-, $\hat{\mathcal{G}}^-$ などとかくと, (8)の左辺uは $G_\alpha^- f$ であって

$(\alpha-\hat{\mathcal{G}}^-)u=f \quad \therefore\ (\alpha-\hat{\mathcal{G}})u=f$

$u(a)=E_a^-\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t} f(x_t)\,dt\right) = E_a\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t} f(a)\,dt\right) = \frac{f(a)}{\alpha}$

同様に $u(b) = \frac{f(b)}{\alpha}$

従って前定理により (7) 式が得られる.

Cor. 1 $E_\xi(\sigma_a\wedge\sigma_b) = \int_a^b G_0(\xi,\eta)\, m(d\eta)$

証明 上の定理で

$f(\xi)=1$, $a<\xi<b$, $f(a)=f(b)=0$,

とおき $\alpha\longrightarrow 0$ とすれば $E^-(\sigma_a\wedge\sigma_b)$ が得られるが これは $E(\sigma_a\wedge\sigma_b)$ と一致する.

Cor. 2 $E_\xi(e^{-\alpha\sigma_b} : \sigma_b<\sigma_a) = \frac{g_+^\alpha(\xi)}{g_+^\alpha(b)} \quad (\alpha>0)$

証明 定理で

$f(\xi)=0$, $0<\xi<b$, $f(b)=1$

とおけ.

Cor. 3 $P_\xi(\sigma_b<\sigma_a) = \frac{g_+^0(\xi)}{g_+^0(b)}$

証明 上の Cor. 2 で $\alpha\to 0$ とおけ.

Cor 4 Cor 1. 2. 3 の式をそれぞれ u, v, w とおけばこれはそれぞれ次の方程式の解である.

$\hat{\mathcal{G}}u(\xi)=-1$, $a<\xi<b$, $u(a)=u(b)=0$

$\hat{\mathcal{G}}\hat{v}(\xi)=\alpha\hat{v}(\xi)$, $a<\xi<b$, $v(a)=0$, $v(b)=1$

$\hat{\mathcal{G}}\hat{w}(\xi)=0$, $a<\xi<b$, $w(a)=0$, $w(b)=1$

Sem. on Probab.
Vol.3 1960年
P1-94

§7. Regular intervalの端点における状態

(l, r) を regular interal とし，その canonical scale, canonical measure, killing measure をそれぞれ s, m, k とする．これから一般微分作用素 $\mathfrak{g}$ を前節のように定義する．

端点における状態を論ずる前に端点のすぐ内側即ち $l+$, $r-$ における状態を Feller に従って分類する．$dn = dm + dk$ とおき，c を l, r の間に任意に定め．

(3) $\quad \nu(l) = \int_l^c \int_l^\xi ds(\eta)\, dn(\xi) \qquad \sigma(l) = \int_l^c \int_l^\xi dn(\eta)\, ds(\xi)$

とおき $l+$ を次の4種に分ける．

$l+$ が regular $\iff \nu(l) < +\infty, \quad \sigma(l) < +\infty$
$l+$ が exit $\iff \nu(l) = +\infty, \quad \sigma(l) < +\infty$
$l+$ が entrance $\iff \nu(l) < +\infty, \quad \sigma(l) = +\infty$
$l+$ が natural $\iff \nu(l) = +\infty, \quad \sigma(l) = +\infty$

$l+$ が regular, exit, -----というかわりに l が regular exit; --- ということも多い．

$r-$ については $\nu(l)$, $\sigma(l)$ のかわりに

$\nu(r) = \int_c^r \int_\xi^r ds(\eta)\, dn(\xi), \quad \sigma(r) = \int_c^r \int_\xi^r dn(\eta)\, ds(\xi)$

を基準とする．まず

$$g_+(\xi) = \lim_{b \uparrow r} \frac{E_\xi(e^{-\alpha\sigma_b})}{E_c(e^{-\alpha\sigma_b})} \qquad g_-(\xi) = \lim_{a \downarrow l} \frac{E_\xi(e^{-\alpha\sigma_a})}{E_c(e^{-\alpha\sigma_a})}$$

が (2) の解の一次独立な base であること．$g_+(\xi)$ は $l < \xi < r$ で正で増大．$g_-(\xi)$ は $l < \xi < r$ で正で減少である．$g_+(\xi)$ が (2) の正，増大解であることを示せば，他のことは容易に出る．

$$g_b(\xi) = \frac{E_\xi(e^{-\alpha\sigma_b})}{E_c(e^{-\alpha\sigma_b})} = \begin{cases} E_\xi(e^{-\alpha\sigma_c}) & \xi \le c < b \\ \dfrac{1}{E_c(e^{-\alpha\sigma_\xi})} & b > \xi > c \end{cases}$$

により極限の存在は明らか．次に $f(\xi)$, $\xi \in S$, を $\xi \le b$ では0．$\xi > b$ では正なる連続函数とすれば

$$u(\xi) \equiv G_\alpha f(\xi) = E_\xi(e^{-\sigma_b}) G_\alpha f(b)$$

となり $u \in \mathcal{D}(\mathfrak{g})$ で

$$(\alpha - \mathfrak{g})u = f = 0, \quad \xi < b.$$

故に

$$(\alpha - \mathfrak{g})u = 0, \quad l < \xi < b.$$

Sem. on Probab.
Vol.3 1960年
P1-94

さて $l<\xi<b$ では. $g_b(\xi)$ はこの u に比例するから. $g_b(\xi)$ も $l<\xi<b$ では $(\alpha-\hat{\mathcal{G}})g_b=0$ を満す.
しかるに $b>c$ ならば $g_b(\xi)=g_+(\xi)$ であるから. $(\alpha-\hat{\mathcal{G}})g_+=0$. $l<\xi<b$. となる. 従って $(\alpha-\hat{\mathcal{G}})g_+=0$. $l<\xi<r$.

以上のことを頭において解析的考察をすると $l+$ の Feller 分類に関して次の表が得られる. ($dk=0$ のときには伊藤 (10) に証明がある)

(表)

	$\int_l^c s(d\xi)$	$\int_l^c n(d\xi)$	$g_+(l+)$	$g_-(l+)$	$D_s g_+(l+)$	$D_s g_-(l+)$
regular	$<+\infty$	$<+\infty$	$0\leq<+\infty$	$<+\infty$	$0\leq<+\infty$	$0>>-\infty$
exit	$<+\infty$	$=+\infty$	$=0$	$<+\infty$	$0<<+\infty$	$=-\infty$
entrance	$=+\infty$	$<+\infty$	$0<<+\infty$	$=+\infty$	$=0$	$0>>-\infty$
natural	$\leq+\infty$	$\leq+\infty$	$=0$	$=+\infty$	$=0$	$=-\infty$

この表から次のようなことがわかる.
<u>naturalのとき</u> : $a<\xi<c$ のときには

$$g_-(\xi)=\frac{1}{E_c(e^{-\alpha\sigma_\xi})}$$

であるが. 表から. $g_-(l+)=+\infty$ であるから. $E_c(e^{-\alpha\sigma_{l+}})=0$.
故に $E_{l++}(e^{-\alpha\sigma_+})=0$. 従って l の右側から出発して l に迫ることはできない. まして (l が S に属していても) l に上陸することはできない.
又. $\xi<c$ のときには

$$g_+(\xi)=E_\xi(e^{-\alpha\sigma_c})$$

故に $E_{l+}(e^{-\alpha\sigma_c})=g_+(l+)=0$. $g_+(\xi)$ は C が動いても常数倍されるだけであるから. $E_{l+}(e^{-\alpha\sigma_{l++}})=0$ となる.
従って. (l が S に属していても) $E_l(e^{-\alpha\sigma_{l+}})$ は必ず 0 となり. l から右に入ることはない.
<u>entranceのとき</u> : naturalの場合と同様にして $g_-(l+)=+\infty$ から. l の右から l に迫ることができないことがわかる. しかし $g_+(l+)>0$ であるから. $E_{l+}(e^{-\alpha\sigma_{l++}})=1$ となり. もし. l が S に属するとしても. $E_l(e^{-\alpha\sigma_{l+}})$ は. 0. 1 のどちらかわからない. 0 のときには l から右へは入れないが. 1 のときには. 確率 1 を以って右に入り. 以後 l にもどることはない.
<u>exit のとき</u> : $g_-(l+)<+\infty$ であるから. $E_c(e^{-\alpha\sigma_{l+}})>0$ 従って $E_{l++}(e^{-\alpha\sigma_{l+}})=1$ となり. l の右側から l に迫ることができる. もし. $l\in S$ で $p(l)=E_{l+}(e^{-\alpha\sigma_l})=P_{l+}(\sigma_l<+\infty)$ が正であれば. $E_{l+}(e^{-\alpha\sigma_l})>0$ となり. l の右から l に上陸できる。その確率は

Sem. on Probab.
Vol.3 1960年
P1-94

$$P_\xi(\sigma_{l+}=\sigma_l/\sigma_{l+}<+\infty)=p_+(l)$$

である．残りの確率では死ぬわけである．実際

$$P_\xi(\sigma_{l+}=\sigma_\infty/\sigma_{l+}<+\infty)=1-p_-(l)$$

である．又 $E_{l+}(e^{-\alpha\sigma_c})=g_+(l+)=0$ であるから．$E_{l+}(e^{-\alpha\sigma_{l++}})=0$ となり $l\in S$ としても $E_l(e^{-\sigma_{l+}})=0$ で．lから右にでることはない．

regularのとき：lに迫ったり，上陸したりする状態は exit と同じであるが，lから右にでることも可能な点で exit と異なる．lから右にでることができるときには

$$G_\alpha f(l+)=G_\alpha(l)$$

であるから．$p(l)=1$でなければならない．即ち上陸の瞬間に死ぬことはない．

さて lから右にでることができるとしよう．即ち $E_l(e^{-\alpha\sigma_{l+}})=1$ このとき適当に $k(l)$．$m(l)\geq 0$ をとると．

$$k(l)u(l)-D_s u(l+)+m(l)(\tilde{\mathfrak{g}}u)(l)=0 \qquad u\in\mathfrak{D}(\tilde{\mathfrak{g}})$$

となることを証明しよう。ここで $k(l)$．$m(l)$ とかいたのは一点lに$k(l)$，$m(l)$を与えることにより．(l,r)内のdk，dmを自然に拡張できるからである．(これは次節の path の構成を見るとよくわかる．)

仮定 $E_l(e^{-\alpha\sigma_{l+}})=1$により lは proper right shunt である．即ち．$l\in K_+-K_-$ 従って Dynkin の公式により $u\in\mathfrak{D}(\mathfrak{g})$に対し．

$$(\tilde{\mathfrak{g}}u)(l)=\lim_{a\downarrow l}\frac{u(a)P_l(\sigma_a<+\infty)-u(l)}{E_l(\sigma_a\wedge\sigma_\infty)}$$

$$=\lim_{a\downarrow l}\frac{\{u(a)-u(l)\}-\psi(a)u(l)}{\varphi(a)}$$

ここに

$$\varphi(a)=E_a(\sigma_a\wedge\sigma_\infty)/P_l(\sigma_a<+\infty)>0$$

$$\psi(a)=P_l(\sigma_a<+\infty)^{-1}-1\geq 0$$

もし適当な $u\in\mathfrak{D}(\tilde{\mathfrak{g}})$があって $D_s u(l+)>0$．$u(l)=0$ ならば

$$(\tilde{\mathfrak{g}}u)(l)=\lim_{a\downarrow l}\frac{\int_l^a D_s u(\xi)ds(\xi)}{\varphi(a)}=\lim_{a\downarrow l}\frac{\int_l^a D_s u(\xi)ds(\xi)}{s(a)-s(l)}\cdot\frac{s(a)-s(l)}{\varphi(a)}$$

第一因子の極限は $D_s u(l+)>0$ であるから $C_1=\lim_{a\downarrow l}\frac{s(a)-s(l)}{\varphi(a)}(\geq 0)$ が存在する

次に $g(\xi)=E_\xi(e^{-\sigma_c})$ は明らかに $\mathfrak{D}(\mathfrak{g})$に入り $g(l)>0$．$D_s g(l+)\geq 0$．

Sem. on Probab.
Vol.3 1960年
P1-94

$$(\tilde{\mathscr{G}} g)(\ell) = C_1 D_s g(\ell+) - \lim_{a \downarrow \ell} \frac{\psi(a)}{\varphi(a)} g(\ell)$$

故に $C_2 = \lim_{a \downarrow \ell} \frac{\psi(a)}{\varphi(a)} \ (\geq 0)$ が存在する.

一般の $u \in \mathscr{D}(\tilde{\mathscr{G}})$ に対しては

$\ell < \ell' < c$ なる ℓ' に対して

$$D_s u(c) - D_s u(\ell') = \int_{\ell'}^{c} (\tilde{\mathscr{G}} u\, dm + u \cdot dk)$$

さて u, $\tilde{\mathscr{G}} u$ は有界 $\int_\ell^c dm + dk = \int_\ell^c dn < +\infty$

であるから $\ell' \downarrow \ell$ のとき 右辺の極限は存在する 故に $D_s u(\ell+)$ も確定する. 従って

$$(\tilde{\mathscr{G}} u)(\ell) = \lim_{a \downarrow \ell} \frac{\int_\ell^a D_s u\, ds - \psi(a) u(\ell)}{\varphi(a)}$$

$$= C_1 D_s u(\ell+) - C_2\, u(\ell)$$

さて特に $u = g$ とおくと

$$0 = (\alpha - \tilde{\mathscr{G}}) g(\ell) = \alpha g(\ell) - C_1 D_s g(\ell+) + C_2 g(\ell)$$

もし $C_1 = 0$ ならば $(\alpha + C_2) g(\ell) = 0$. これは $\alpha > 0$. $C_2 \geq 0$.

$g(\ell) > 0$ と矛盾する. 故に $C_1 > 0$. $m(\ell) = C_1^{-1}$, $k(\ell) = C_2 / C_1$ とおくと

$$k(\ell) u(\ell) - D_s u(\ell+) - m(\ell)(\tilde{\mathscr{G}} u)(\ell) = 0$$

もし $u(\ell) = 0$. $u \in \mathscr{D}(\tilde{\mathscr{G}})$ ならば $D_s u(\ell+) = 0$ となるならば任意の $u \in \mathscr{D}(\tilde{\mathscr{G}})$ に対して

$$v = u - \lambda g \qquad \lambda = u(\ell) / g(\ell)$$

とおくと. $v \in \mathscr{D}(\tilde{\mathscr{G}})$ で $v(\ell) = 0$. 故に $D_s v(\ell+) = 0$

従って

$$D_s u(\ell) - \lambda D_s g(\ell) = 0$$

$$D_s u(\ell) - \frac{D_s g(\ell)}{g(\ell)} u(\ell) = 0$$

$k(\ell) = \dfrac{D_s g(\ell)}{g(\ell)}$ とおくと

$$k(\ell) u(\ell) - D_s u(\ell+) = 0$$

$m(\ell) = 0$ とおくと前と同じ形になる.

Sem. on Probab.
Vol.3 1960年
P1-94

§8. time change と killing による process の構成

1° 始めに time change の idea の概略を説明する. これは一般的にいえば. 一つの markov process から random time change によって新しい markov process をつくる方法である. 今 $M = (S, W, P_\xi)$ を与えられた Markov process とし. $a \in \mathbb{B}(S)$ が $a(\xi) > 0,\ \xi \in S$ であるとする. このとき

(1) $\quad \underline{\underline{S}}(t) = \underline{\underline{S}}(t, w) = \int_0^t a(x(s, w))\,ds$

(2) $\quad x_1(t, w) = x(\underline{\underline{S}}^{-1}(t), w) \equiv x(\underline{\underline{S}}^{-1}(t, w), w)$

(3) $\quad P'_\xi(B) = P_\xi(x_1(\cdot, w) \in B) \qquad B \in \mathbb{B}(W)$

として $M_1 = (S, W, P'_\xi)$ を定義すると これがやはり strong marker process となり その generator $\mathfrak{G}_1$ は $a^{-1}\mathfrak{G}$ の縮小である. 即ち $u \in \mathcal{D}(\mathfrak{G}_1) \Longrightarrow u \in \mathcal{D}(\mathfrak{G})$ で $\mathfrak{G}_1 u = a^{-1}\mathfrak{G}u$.

$$\begin{aligned} u(\xi) &= G'_\alpha f(\xi) \\ &= E'_\xi\left(\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} f(x(t, w))\,dt\right) \\ &= E'_\xi\left(\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} f(x(\underline{\underline{S}}^{-1}(t, w)))\,dt\right) \\ &= E_\xi\left(\int_0^{+\infty} e^{-\alpha\int_0^t a(s, w)\,ds} f(x(t, w))\, a(x(t, w))\,dt\right) \\ &= E_\xi\left(\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} e^{-\int_0^t \alpha(a(s, w)-1)\,ds} (f\cdot a)(x(t, w))\,dt\right) \end{aligned}$$

故に Kac の定理 (Theorem I.) により $u \in \mathcal{D}(\mathfrak{G})$ で

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_1 u &= \alpha u - f = \alpha u - a^{-1}\cdot af \\ &= \alpha u - a^{-1}(\alpha u - (\mathfrak{G} - \alpha(a-1))u) \\ &= a^{-1}\mathfrak{G}u \end{aligned}$$

即ち (1), (2), (3) の変換により $\mathfrak{G}$ を generator とする Markov process から $a^{-1}\mathfrak{G}$ を generator とする Markov process が得られる.

この考えにより standard Brownian motion ($\mathfrak{G} = \frac{1}{2}\frac{d^2}{d\xi^2}$) から $\mathfrak{G}_1 = \frac{1}{2a(\xi)}\frac{d^2}{d\xi^2}$ を generator とする diffusion が定義できる.
local time $\underline{\underline{t}}(t, \xi, w)$ (§1) を用いると (1) 式は

(1') $\quad \underline{\underline{S}}(t) = \underline{\underline{S}}(t, w) = \int \underline{\underline{t}}(t, \xi, w)\, 2a(\xi)\,d\xi$

となるから. $2a(\xi)\,d\xi$ を $dm(\xi)$ とおくと

(1'') $\quad \underline{\underline{S}}(t) = \underline{\underline{S}}(t, w) = \int \underline{\underline{t}}(t, \xi, w)\,dm(\xi)$

から出発して (2), (3) と定義すれば

Sem. on Probab.
Vol.3 1960年
P1-94

$$\mathfrak{g}_1 = \frac{d}{dm}\frac{d}{d\xi}$$

を generator とする diffusion が得られるのではないかと想像される。これは全く正しいので conservative linear diffusion を standard Brownian motion から time change で作る原理である。

2° 上の原理に従って $S=(l, r)$ でしかも S の点はすべて regular 即ち S が唯一つの regular interval からできているという簡単な場合を考えてみよう。canonical scale は s, canonical measure は m, killing measure $k \equiv 0$ とする。s は (l, r) と $(s(l), s(r))$ との間の同位相，同順序の対応を与えるから $s(\xi)=\xi$ としておいても一般性を失わない。更に説明を簡単にする為に $l=-\infty$, $r=+\infty$ としておく。従って l, r 共に entrance 又は natural である。

さて M として standard Brownian motion とし，これから (1"), (2), (3) によって M_1 を定める。そのとき M_1 が diffusion となることは $\underline{s}(t)$ の性質：

(s.1) $\underline{s}(t+s, w) = \underline{s}(t, w) + \underline{s}(s, w_t^+)$

(s.2) t が 0 から $+\infty$ まで増加するとき $\underline{s}(t, w)$ は 0 から $+\infty$ まで真に増加する（確率 1 で）

(s.3) $\underline{s}(t, w)$ は B_t 可測である。

を用いて示される。

$$\begin{aligned} P'_\xi(\sigma_a \wedge \sigma_b < +\infty) &= P_\xi(\underline{s}(\sigma_a) \wedge \underline{s}(\sigma_b) < +\infty) \\ &= P_\xi(\underline{s}(\sigma_a \wedge \sigma_b) < +\infty) \\ &= P_\xi(\sigma_a \wedge \sigma_b < +\infty) = 1 \end{aligned}$$

故に §5 $dk' \equiv 0$ であることがわかる。従って

$$\begin{aligned} \frac{s_1(\xi) - s_1(a)}{s_1(b) - s_1(a)} &= P'_\xi(\sigma_b < \sigma_a) = P_\xi(\underline{s}(\sigma_b) < \underline{s}(\sigma_a)) \\ &= P_\xi(\sigma_b < \sigma_a) = \frac{\xi - a}{b - a} \end{aligned}$$

故に $ds_1 = \mathrm{const.}\, d\xi$，この const $= 1$ としてよい。

(4) $$\begin{aligned} E'_\xi(\sigma_a \wedge \sigma_b) &= E_\xi(\underline{s}(\sigma_a) \wedge \underline{s}(\sigma_b)) = E_\xi(\underline{s}(\sigma_a \wedge \sigma_b)) \\ &= E_\xi\left(\int_a^b \underline{t}(\sigma_a \wedge \sigma_b, \eta)\, m(d\eta)\right) \\ &= \int_a^b E_\xi(\underline{t}(\sigma_a \wedge \sigma_b, \eta))\, m(d\eta) \end{aligned}$$

しかるに §6 でのべた様に

(5) $$E_\xi\left(\int_0^{\sigma_a \wedge \sigma_b} f(x_t)\, dt\right) = \int_a^b G(\xi, \eta) f(\eta)\, 2d\eta$$

Sem. on Probab.
Vol.3 1960年
P1-94

ここに

$$G(\xi,\eta)=G(\eta,\xi)=\frac{(b-\eta)(\xi-a)}{b-a}\qquad a\le\xi\le\eta\le b$$

又

$$(6)\qquad E_\xi\left(\int_0^{\sigma_a\wedge\sigma_b} f(x_t)\,dt\right)=E_\xi\left(\int_a^b f(\xi)\,\underline{t}(\sigma_a\wedge\sigma_b,\eta)\,2\,d\eta\right)$$
$$=\int_a^b E_\xi\left(\underline{t}(\sigma_a\wedge\sigma_b,\eta)\right)f(\eta)\,2\,d\eta$$

(5),(6)を比較して

$$(7)\qquad E_\xi\left(\underline{t}(\sigma_a\wedge\sigma_b,\eta)\right)=G(\xi,\eta)$$

これを(4)に入れて

$$(5)\qquad E'_\xi(\sigma_a\wedge\sigma_b)=\int_a^b G(\xi,\eta)\,m(d\eta)$$

故に

$$dm^1=-d\left(\frac{d}{d\xi}E'_\xi(\sigma_a\wedge\sigma_b)\right)=dm.$$

従って結局

$ds_1=d\xi,\quad dm'=dm,\quad dk'=0$ となり M_1 は求める process であることがわかる。

3° 次に $S=[0,+\infty)$, $ds=d\xi$, dm は一般 $dk=0$.

0における boundary condition

$$\frac{du}{d\xi}(0+)-m(0)\,\mathcal{G}u(0)=0$$

なる process を作ろう。$m(0)=0$, $dm=2d\xi$ のときには所謂 reflecting barrier Brownian motion である。これは standard Brownian motion から

$$P'_\xi(B)=P_\xi(|x(\cdot,w)|\in B)\quad,\ \xi\ge 0$$

により構成できることは第一章にのべた。これから local time[1] を用いて、time change をして求める process が構成される。このとき $m(0)$ は一点 0 に附与された canonical measure と見なせばよい。

4° 今度は killing について考えよう。M を与えられた conservative strong Markov process とする。さて $k(\xi)$, $\xi\in S$ を任意の非負ベール函数とする。$\tilde{W}=[0,+\infty)\times W$ の上の分布 Q を

$$Q_\xi((u,+\infty)\times B)=\int_B e^{-\int_0^u k(x_t(w))\,dt}\,P_\xi(dw)$$

1) reflecting barrier B. M. に対する local time であるが、定義は全く同様で、その性質も同じである。

Sem. on Probab.
Vol.3 1960年
P1-94

で定義し $\hat{w} \in \widetilde{W}$ を $\hat{w} = (T, w)$ とかくことにすると T, w は共に $(\widetilde{W}, Q_\xi)$ の上の確率変数である.（勿論 T は一次元 w は無限次元である. さて M_1 の確率法則 P'_ξ を次のように定める.

$$x'_t(\tilde{w}) = x'_t(T, w) = \begin{cases} x_t(w) & t < T \\ \infty & t \geq T \end{cases}$$

$$P'_\xi(B) = Q_\xi(x'(\tilde{w}) \in B)$$

これが strong markov process となることが証明できて, その generator $\mathcal{G}'$ は $\mathcal{G} - k$ となる. その証明の概略をいうと.

$$\begin{aligned} u(\xi) &= G'_\alpha f(\xi) \\ &= E'_\xi\left(\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} f(x_t(w))\, dt\right) \\ &= E^Q_\xi\left(\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} f(x_t(w)) \chi_{(0,T)}(t)\, dt\right)^{1)} \\ &= E^Q_\xi\left(\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} f(x_t(w))\, E^Q_\xi(\chi_{(0,T)}(t)/w)\, dt\right) \\ &= E^Q_\xi\left(\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} f(x_t(w))\, P^Q_\xi(T \geq t/w)\, dt\right) \\ &= E_\xi\left(\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} f(x_t(w))\, e^{-\int_0^t k(x_s(w))ds}\, ds\right) \end{aligned}$$

故に Kac の定理により. $u \in \mathcal{D}(\mathcal{G})$ で

$$\alpha u - \mathcal{G} u + ku = f$$

他方 $\quad \alpha u - \mathcal{G}' u = f$

$\therefore \quad \mathcal{G}' u = \mathcal{G} u - ku$

5° さて linear diffusion の場合にもどつて. killing のあるものを構成する方法を考えよう. 簡単の為に S が唯一つの regular interval (l, r) からなるとして. ds, dm, dk, を与えて作ってみよう. $dk = 0$ のときには time change で構成できるから $dk = 0$ のとき即ち大まかにいって.

$$\mathcal{G} = \frac{d}{dm}\frac{d}{d\xi} \qquad (s(\xi) = \xi \text{ としてよいことは明らか})$$

のときから出発して

$$\mathcal{G}' = \frac{d\frac{d}{d\xi} \cdot - \cdot dk}{dm}$$

---

1) $E^Q_\xi(g) = \int_{\widetilde{W}} g(\tilde{w})\, Q(d\tilde{w})$, $\tilde{w} = (T, w)$.

Sem. on Probab.
Vol.3 1960年
P1-94

に対応するものを作ればよい．もし dk が dm について絶対連続で，
$k(\xi) = \dfrac{dk}{dm}(\xi)$ ならば

$$\mathfrak{g}'_u = \mathfrak{g} - k(\xi)u$$

となるから，4° の方法でできる．これを一般の dk の場合にうつすには，
Q_ξ の分布の定義にあらわれた

$$\int_0^u k(x_t(w))\,dt$$

を local time[1] を用いて

$$\int \underline{t}(u,\xi)\, k(\xi)\, 2d\xi$$

となるから，これを

$$\underline{\underline{k}}(t) = \int \underline{\underline{t}}(u,\xi)\, k(d\xi)$$

とすればよいわけである．$\underline{\underline{k}}(t)$ は $\underline{\underline{s}}(t)$ と同じような性質をもつ．
唯 $\underline{\underline{s}}(t)$ が真に増大するのに対し，$\underline{\underline{k}}(t)$ は弱い意味で増大（＝非減少）
であるにすぎない．即ち

($\underline{\underline{k}}$.1)　$\underline{\underline{k}}(t+s, w) = \underline{\underline{k}}(t, w) + \underline{\underline{k}}(s, w_s^{+})$

($\underline{\underline{k}}$.2)　$\underline{\underline{k}}(t, w)$ は非減少

($\underline{\underline{k}}$.3)　$\underline{\underline{k}}(t, w)$ は $\mathbb{B}_t$ 可測

これから $\mathbb{M}_1$ が diffusion となることがわかり，次にその ds_1, dm_1,
dk_1 を time change のときと同じ idea で定めると，$ds = d\xi$,
$dm_1 = dm$, $dk_1 = dk$ となることがわかる．

§9. right interval の例

$S = [0, 1]$ とし，$I_1 = (l_1, r_1)$, $I_2 = (l_2, r_2)$, ---
を S の中の cantor set K の補集合を構成する区間とする．

---

1) $\mathfrak{g}$ に対応する process に対する local time であるがこれは time change する前にもどって考えると B.m. に対するものに帰着される．

Sem. on Probab.
Vol.3 1960年
P1-94

H. P. M. Kean は K の点はすべて proper right shunt で各区間 I の中では 左端が反射壁とし. 右端は right shunt となるようなものを構成した. これは一般の right interval のモデルとなるのでここにのべておく.

まず 0から出発する path の法則 P_0 を次のように定める. 今 I_n の左端から出発して 左端を反射壁、右側を trap とし 内部は standard Brownian motion とする stochcstic process を $X_n(t)$ とする. しかも $X_1(\cdot)$, $X_2(\cdot)$, ---- は process として独立とする.
$P(X_n(0) = l_n) = 1$ は明らかであるが. $\theta_n = \min(t : X_n(t) = r_n)$ は $X_n(\cdot)$ について measurable な確率変数で. 従って $\theta_1, \theta_2, \cdots\cdots$ は独立である.
θ_n の確率法則を定めるに $E(e^{-\alpha\theta_n})$ を計算すればよい. この為には reflecting barrier Brownian motion について $E_0(e^{-\alpha\sigma_d})$, $d = r_n - l_n$. を求めたらよい. $u(\xi) = E_\xi(e^{-\alpha\sigma_r})$ とおくと.

$$u'(0) = 0$$

$$\alpha u(\xi) - \frac{1}{2}u''(\xi) = 0 \quad 0 < \xi < r$$

$$u(r) = 1$$

これをといて. $u(\xi) = \cosh\sqrt{2\alpha}\,\xi / \cosh\sqrt{2\alpha}\,d$.

$$\therefore \quad u(0) = \frac{1}{\cosh\sqrt{2\alpha}\,d}$$

故に $$E(e^{-\alpha\theta_n}) = \frac{1}{\cosh\sqrt{2\alpha}(r_n - l_n)}$$

さて $$E(e^{-\alpha\sum_n\theta_n}) = \prod_n E(e^{-\alpha\theta_n}) = \prod_n \frac{1}{\cosh\sqrt{2\alpha}(r_n - l_n)}$$

$$= \frac{1}{\prod_n(1 + h_n(\alpha))}$$

ここに $$h_n(\alpha) = \cosh\sqrt{2\alpha}(r_n - l_n) - 1 \sim \frac{\alpha(r_n - l_n)^2}{4}$$

$$\sum h_n(\alpha) \sim \frac{\alpha}{4}\sum_n 2^{n-1}\left(\frac{1}{3^n}\right)^2 = \frac{\alpha}{8}\sum\left(\frac{2}{9}\right)^n = \frac{\alpha}{28}$$

故に $$\prod_n(1 + h_n(\alpha)) < +\infty \text{ で } \quad E(e^{-\alpha\sum_n\theta_n}) > 0$$

しかも $\prod_n(1 + h_n(\alpha))$ の収束は α の有界な範囲では一様であるから.

$$\lim_{\alpha\downarrow 0} E(e^{-\alpha\sum_n\theta_n}) = \prod_n(1 + h_n(0)) = 1$$

Sem. on Probab.
Vol.3 1960年
P1-94

故に　$P(\sum_n \theta_n < +\infty) = 1$

さて $x(t)$を次のように定める

$$t = \Sigma \theta_v$$
$$r_n \leq \xi$$

なる $\xi \in K$ があれば $x(t) = \xi$ とする　もし

$$t_m \equiv \sum_{r_n \leq l_m} \theta_n < t < t'_m \equiv t_m + \theta_m$$

のときには

$$x(t) = x_m(t - t_m) \text{ とおく}$$

$P_0(B) = P(x(\cdot) \in B)$は mckeam process の 0から出る pathの法則を与える．これを変形して P_ξを定め得るであろう．

更にCantor set の上だけで増加する所謂 singular continuous function を用いて K を通過する時間を正にすることもできる．(Mckean process ではこれは 0 である)

Mckean process の generator を考えよう　Cantor set の外では

(1)　$\mathcal{G} u = \frac{1}{2} u''$

Cantor set の上では Dynkin の公式により

(2)　$$\mathcal{G} u(\xi) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{u(\xi+\varepsilon) - u(\xi)}{E_\xi(\sigma_{\xi+\varepsilon})}$$

さて (2) を見易い形にする為に　前の θ_n に対し $E(\theta_n)$ を計算すると

$$E(\theta_n) = -\frac{d}{d\alpha} E(e^{-\alpha\theta_n}) \Big|_{\alpha\downarrow 0} = -\frac{d}{d\alpha} \frac{1}{ch\sqrt{2\alpha}(r_n - l_n)} \Big|_{\alpha\downarrow 0}$$
$$= (r_n - l_n)^2$$

従って $\xi \in K$ のとき

$$E_\xi(\sigma_{\xi+\varepsilon}) = S_+(\xi+\varepsilon) - S_+(\xi)$$
$$S_+(\eta) = \sum_{r_n < \eta} (r_n - l_n)^2 + (\eta - l_m)^2 \quad \eta \in I_m$$
$$= \sum_{r_n < \eta} (r_n - l_n)^2$$

かくして

(2')　$$\mathcal{G} u(\xi) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{u(\xi+\varepsilon) - u(\xi)}{S_+(\xi+\varepsilon) - S_+(\xi)} = \frac{d^+}{dS_+} u(\xi)$$

このように K では generator は一回の微分であらわされるが　その微分の scale S_+ は極めて妙な形のもので　ξ による微分とは似ても似つかぬものである．

Sem. on Probab.
Vol.3 1960年
P1-94

§10. 固有函数展開によるProcessの構成

$S=(r_1, r_2)$において、Fellerの作用素$\frac{d}{dm}\frac{d}{dS}$があたえられたとき、これをgeneratorとするdiffusionを解析的に構成しようというのが、この節の目的である。
まずLのgreen函数を作り、それにTitchmarsh－小平式の固有函数展開をほどこす。そのとき出てくるKernelのLaplace変換として遷移確率のdm－測度にかんする密度が定義される。

$S=(r_1\ \ r_2)\qquad -\infty\leq r_1<0<r_2\leq+\infty$

$S(x)$：連続 狭義増加

$m(x)$： 狭義増加

〔記号〕： ○f：BV　　はfが有界変動(bounded variation)の函数ということ

このときfはつねに右連続にしておく

fに対応する測度を df とかく

○$df\ll dg$　　は測度dfが測度dgに関し絶対連続ということ

このとき$\frac{df}{dg}$によって，dfのdgに関する密度函数をあらわす。

○$C(S)$ ： S上の有界連続函数の全体 $\|f\|_\infty=\sup_{x\in S}|f(x)|$

$$B(L)=\left\{u : u\in C(S) : BV,\ du\ll dS\right.$$
$$\left.\frac{du}{dS} : BV,\ d\frac{du}{dS}\ll dm\quad \frac{d}{dm}\frac{du}{dS} : S\text{で有界}\right\}$$

$$C(L)=\left\{u : u\in B(L)\ \frac{d}{dm}\frac{du}{dS}\in C(S)\right\}$$

1° 境界の分類

$$\sigma_1=\int_{(r_1 0)}dm(x)\int_{(x 0)}dS(y)\qquad \mu_1=\int_{(r_1 0)}dS(x)\int_{(x 0)}dm(y)$$

$$\sigma_2=\int_{(0 r_2)}dm(x)\int_{(0x)}dS(y)\qquad \mu_2=\int_{(0 r_2)}dS(x)\int_{(0x)}dm(y)\ \text{とおく。}$$

点r_i：($i=1$ 又は2)を次のように分類する。

regular $\Longleftrightarrow$ $\sigma_i<+\infty$ $\mu_i<\infty$

exit $\Longleftrightarrow$ $\sigma_i<+\infty$ $\mu_i=+\infty$

entrance $\Longleftrightarrow$ $\sigma_i=+\infty$ $\mu_i<+\infty$

natural $\Longleftrightarrow$ $\sigma_i=+\infty$ $\mu_i=+\infty$

Sem. on Probab.
Vol.3 1960年
P1-94

2° $(\alpha - L)u = 0$ の増加解と減少解 $\alpha > 0$

$e_1(x\alpha)$ $e_2(x\alpha)$ $\alpha > 0$ を次の解として定義する。

$$\frac{d}{dm}\frac{d}{dS}e_i = \alpha e_i \qquad e_0(0) = 1 \quad \frac{d}{dS}e_0(0) = 0$$
$$e_1(0) = 0 \quad \frac{d}{dS}e_1(0) = 1$$

Therom 10.1 $\frac{d}{dm}\frac{d}{dS}u = \alpha u$ の正の増加解が

(i) r_1 が regular boundary のとき $(1-P_1)u(r_1) - P_1\frac{du}{dS}(r_1) = 0$ なる条件のもとに（定数倍をのぞいて）一意的に存在する。 $0 \le P_1 \le 1$

(ii) r_1 が regular でないときには（定数倍をのぞいて）一意的に存在する （注：$u(r_1) \equiv u(r_1+)$ $u(r_2) \equiv u(r_2-)$ とする）.

同様に $\frac{d}{dm}\frac{d}{dS}u = \alpha u$ の正の減少解が

(i) r_2 が regular のとき $(1-P_2)u(r_2) + P_2\frac{du}{dS}(r_2) = 0$ $0 \le P_2 \le 1$ なる条約のもとに（定数倍をのぞいて）一意的に存在する

(ii) r_2 が regular でないとき（定数倍をのぞいて）一意的に存在する。

正の増加解を $u_1(x\alpha)$ 正の減少解を $u_2(x\alpha)$ とする。このとき $\frac{du_1}{dS}u_2 - \frac{du_2}{dS}u_1$ は正の定数であり、適当に u_1 u_2 をえらべば この値を1と仮定してさしつかえない。

$u_1(x\alpha)$, $u_2(x\alpha)$ の境界での行動を表にしておく。

r_2 での行動

	Regular	Exit	Entrance	Natural
$u_1(r_2\ \alpha)$	$< +\infty$	$< +\infty$	$= +\infty$	$= +\infty$
$u_2(r_2\ \alpha)$	$= 0\ (P_2 = 0)$ $> 0\ (P_2 > 0)$	$= 0$	> 0	$= 0$
$\frac{du_1}{dS}(r_2\ \alpha)$	$< +\infty$	$= +\infty$	$< +\infty$	$= +\infty$
$\frac{du_2}{dS}(r_2\ \alpha)$	$= 0\ (P_2 = 1)$ $< 0\ (P_2 < 1)$	< 0	$= 0$	$= 0$

r_1 での行動はこの表で番号を1と2と交換し $\frac{du}{dS}$ を $-\frac{du}{dS}$ とおきかえればよい。これらの証明はすべて、伊藤 清 確率過程論Ⅱ P173へ にでているので参照されたい。

Sem. on Probab.
Vol.3 1960年
P1-94

3° Green 函数

$$G(x\ y\ \alpha)=\begin{cases} u_1(x\alpha)\ u_2(y\alpha) & x\leq y \\ u_2(x\alpha)\ u_1(y\alpha) & y\leq x \end{cases}$$

を operator $L=\frac{d}{dm}\frac{d}{ds}$ の Green 函数という。

Theorem 10.2 $f\in C(S)$

$g(x)=\int_S G(x\ y\ \alpha)f(y)\,dm(y)$ とおくと

$g\in C(L)$ かつ $(\alpha-\frac{d}{dm}\frac{d}{ds})g=f$ がなりたつ

又 $g(x)$ は境界において 次の性質をもつ

(1)
- r_i が regular　$(1-p_i)g(r_i)+(-1)^i p_i\frac{dg}{ds}(r_i)=0$
- exit　$g(r_i)=0$
- entrance　$\frac{dg}{ds}(r_i)=0$
- natural　$g(x)$ は r_i の附近で有界)

(証明は同じく 伊藤：確率過程論 P181へをみられたい)

定　義　$D(L)=\{u:u\in C(L)$ かつ u は境界条件 (1) をみたす$\}$

したがって $f\longrightarrow G_\alpha f=\int G(\cdot\,y\alpha)f(y)\,dm(y)$ は $C(S)$ から $D(L)$ の operator である。逆に

Therem 10.3 $g\in D(L)$ とする

$(\alpha-\frac{d}{dm}\frac{d}{ds})g=f$ とすれば　$g=G_\alpha f$ となる。

故に

(G1)　G_α は $C(S)$ から $D(L)$ への一対一写像であり
$G_\alpha^{-1}=(\alpha-L):D(L)\longrightarrow C(S)$

さらに

(G2)　$G_\alpha\geq 0$
$G_\alpha 1(x)\leq\frac{1}{\alpha}$, ここで $G_\alpha 1\equiv\frac{1}{\alpha}$ となるのは r_1, r_2 が次の三つのうちのどれかであるときかつそのときのみである。

i) regular reflecting (i e $p_i=1$)
ii) entrance
iii) natural

Sem. on Probab.
Vol.3 1960年
P1-94

したがって $\|G_\alpha f\|_\infty \leq \frac{1}{\alpha}\|f\|_\infty$

証 明

$$\alpha G_\alpha 1(x) = \alpha \int_{(r_1 r_2)} G(x\,y\,\alpha)\,dy = u_2(x\alpha)\int_{(r_1 x)} \alpha u_1(y\alpha)\,dm(y) +$$

$$u_1(x\alpha)\int_{(x\,r_2)} \alpha u_2(y\alpha)\,dm(y)$$

$\left(\alpha u_i = \frac{d}{dm}\frac{d}{ds}u_i \quad \therefore \alpha u_i\,dm = d\frac{du_i}{ds}\right.$ であるから$\left.\right)$

$$= u_2(x\cdot\alpha)\int_{(r_1 x)} d\frac{du_1}{ds}(y\cdot\alpha) + u_1(x\,\alpha)\int_{(x\,r_2)} d\cdot\frac{du_2}{ds}(y\cdot\alpha)$$

$$= u_2(x\,\alpha)\left\{\frac{du_1}{ds}(x\,\alpha) - \frac{du_1}{dx}(r_1\alpha)\right\} + u_1(x\alpha)\left\{\frac{du_2}{ds}(r_2\alpha) - \frac{du_2}{ds}(x\alpha)\right\}$$

$$= u_2(x\alpha)\frac{du_1}{ds}(x\,\alpha) - u_1(x\alpha)\frac{du_2}{ds}(x\,\alpha) + u_1(x\,\alpha)\frac{du_2}{ds}(r_2\alpha) - u_1(x\,\alpha)\frac{du_2}{ds}(r\cdot\alpha)$$

$$= 1 + u_1(x\,\alpha)\frac{du_2}{ds}(r_2\,\alpha) - u_2(x\,\alpha)\frac{du_1}{ds}(r_1\,\alpha)$$

ここで $u_2, u_1 > 0$ $\frac{du_2}{ds} \leq 0$ $\frac{du_1}{ds} \geq 0$ であるから

$\alpha G_\alpha 1(x) \leq 1$

かつ $\alpha G_\alpha 1(x) \equiv 1 \iff \frac{du_2}{ds}(r_2) = \frac{du_1}{ds}(r_1) = 0$

$\iff$ r_i が regular かつ $p_i = 1$ か
$(i = 1, 2)$
entrance か
natural　　　q.e.d

(G 3)　(Resolvent equation)

$$G_\alpha - G_\beta + (\alpha - \beta)G_\alpha G_\beta = 0$$

証 明

$g = G_\alpha f \iff g \in D(L)$ かつ $(\alpha - L)g = f$
$f \in C(S)$

であったから

$$f = (\alpha - L)g = (\alpha - \beta)g + (\beta - L)g = (\alpha - \beta)G_\alpha f + (\beta - L)g$$

$$(\beta - L)g = f - (\alpha - \beta)G_\alpha f$$

$$\therefore\ g = G_\alpha f = G_\beta(f - (\alpha - \beta)G_\alpha f)$$

Sem. on Probab.
Vol.3 1960年
P1-94

$$\therefore G_\alpha f - G_\beta f + (\alpha-\beta) G_\beta G_\alpha f = 0$$

$(G4)$ $\dfrac{d^n}{d\alpha^n} G_\alpha = (-1)^n n!\, G_\alpha^{n+1}$ $\qquad \alpha > 0$

こゝで微分は $\lim_{h\to 0} \left\| \dfrac{G_{\alpha+h} - G_\alpha}{h} f - \dfrac{d}{d\alpha} G_\alpha f \right\|_\infty = 0$ で定義される

証明 $(G3)$ によって

$$\frac{G_{\alpha+h} - G_\alpha}{h} f = - G_\alpha G_{\alpha+h} f \quad \text{であるから}$$

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{G_{\alpha+h} - G_\alpha}{h} f + G_\alpha^2 f \right\| &= \| G_\alpha (G_\alpha - G_{\alpha+h}) f \|_\infty \\
&\leq \frac{1}{\alpha} \| (G_\alpha - G_{\alpha+h}) f \|_\infty \\
&= \frac{1}{\alpha} \| h\, G_\alpha G_{\alpha+h} f \|_\infty \\
&\leq \frac{h}{\alpha^2(\alpha+h)} \| f \|_\infty \longrightarrow 0 \quad (h \to 0)
\end{aligned}$$

一般には induction で証明できる。

$$(G4)' \quad \frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} G(x\, y\, \alpha) = (-1)^n \int_{S\times S\times S} G(x, \xi_1\, \alpha)\, G_2(\xi_1, \xi_2\, \alpha) \cdots$$

$$\times\, G(\xi_n\, y, \alpha)\, dm(\xi_1) \cdots\cdots dm(\xi_n)$$

$4°$ Green 函数の Spectral 分解

$L_2(S) = L_2(S, dm)$: 実 Hilbert 空間 $\|u\|_2 = \int f^2 \cdot dm$

$$G_\alpha : u \in L_2(S) \longrightarrow \int_S G(x\, y\, \alpha)\, u(y)\, dm(y) \qquad \alpha > 0$$

は 有界な Operator である 実際

$$\| G_\alpha u \|_2^2 \leq \int_S dm(x) \left\{ \int G(x\, y\, \alpha)^{\frac{1}{2}} G(x\, y\, \alpha)^{\frac{1}{2}} u(y)\, dm(y) \right\}^2$$

$$\leq \int G_\alpha 1(x) \cdot \int G(x\, y\, \alpha)\, u^2(y)\, dm(y) \quad dm(x)$$

$$\leq \int \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\alpha} u^2(x)\, dm(x) = \frac{1}{\alpha^2} \|u\|_2$$

あきらかに対称であるがさらに

<u>Theorem 10.4</u> r_1 r_2 がどちらも natural でないとき

$$\iint_{S\times S} G^2(x\, y\, \alpha)\, dm(x)\, dm(y) < +\infty$$

<u>証 明</u> $G(x\, y\, \alpha) \leq G(x\, x\, \alpha)$ に注意して

$$\iint G^2(x\, y\, \alpha)\, dm(x)\, dm(y)$$

$$\leq \int_S G(x\, x\, \alpha)\, dm(x) \int_S G(x\, y\, \alpha)\, dm(y)$$

Sem. on Probab.
Vol.3 1960年
P1-94

$$\leq \int \frac{G(xx\alpha)}{\alpha} dm(x) = \int_{(r_1 0)} + \int_{(0 \cdot r_2)}$$

例えば第２項は

$$\frac{1}{\alpha}\int_{(0\, r_2)} u_1(x)\, u_2(x)\, dm(x) \leq \frac{u_2(0)}{\alpha^2} \int_{(0\, r_2)} \alpha\, u_1(x)\, dm(x)$$

$$\leq \frac{u_2(0)}{\alpha^2} \left(\frac{d}{ds} u_1(r_2) - \frac{d}{ds} u_1(0)\right) < +\infty$$

(regular entrance)

$$\frac{1}{\alpha}\int_{(0 r_2)} u_1(x)\, u_2(x)\, dm(x) \leq \frac{u_1(r_2)}{\alpha^2} \left\{\frac{du_2}{ds}(r_2) - \frac{du_2}{ds}(0)\right\} < +\infty$$

(exit)

又 $\frac{d}{d\alpha} G_\alpha = -G_\alpha^2$ であるから

$$(G_\alpha u \;\; u) = \int_0^{+\infty} \| G_\alpha u \|_2^2 \, d\alpha$$

故に G_α は Positive definite

かくして r_1, r_2 が natural でないとき

G_α は $L^2(S) \to L^2(S)$ の operator として Symmetric, Positive definite completely continuous であることがわかった。

固有値 $\| G_\alpha \|_2 = \frac{1}{\alpha} \geqslant \frac{1}{\nu_1} \geqslant \frac{1}{\nu_2} \geqslant \cdots\cdots \to 0$

固有函数 v_i $\quad G_\alpha v_i = \frac{1}{\nu_i} v_i$ が存在し

$\{v_i\}$ は $L^2(S)$ の基底になる Mercer の定理により

$G(x\, y\, \alpha) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{v_i(x) v_i(y)}{\nu_i}$ と展開でき $S \times S$ の任意の Compact set の上で一様収束である。

$$G_\alpha v_i = \frac{1}{\nu_i} v_i \iff v_i \in D(L) \;\; (\alpha - L)\frac{1}{\nu_i} v_i = v_i$$

であるから

$\mu_i = \alpha - \nu_i$ として

Theorem 10.5 r_1 r_2 が natural でないとき

Sem. on Probab.
Vol.3 1960年
P1-94

$0 \geq \mu_1 > \mu_2 > \cdots\cdots \downarrow -\infty$ と $L_2(S)$ の基底 $\{v_i\}$ が
あって $v_i \in D(L)$ $L v_i = \mu_i v_i$

$$G(x\, y\, \alpha) = \sum_{i>0} \frac{v_i(x) v_i(y)}{(\alpha - \mu_i)}$$ かつ $S \times S$ 上で（広義）一次収束

（なお固有値の重複度が1なることは Strum-Liouville の場合と同様に証明できる）

$v_i(x)$ は $e_1(x\, \mu_i)$ $e_2(x\, \mu_i)$ の一次結合であるから

$v_i(x)\, v_j(y) = e(x\, \mu_i)\ \mathfrak{f}(\mu_i)\ \mathfrak{e}(y\, \mu_i) = e(x \cdot y\ \mu_i)$

$e = (e_1\ e_2)$，$\mathfrak{f}(\mu_i)$ 2×2 行列 なる形にまとめることができる

故に

(2) $$G(x\, y\, \alpha) = \int_{(-\infty 0)} \frac{e(x\ y\ d\mu)}{\alpha - \mu}$$ （$e(xy\,d\mu)$ は $\mu = \mu_i$ に $e(xy\,\mu_i)$ なる mass をもつ測度）

natural boundary があるときには一般には continuous spectrum があらわれる。
そのときにも

<u>Theorem 10.6</u> $(-\infty\ 0]$ 上の Borel 測度の行列 $\mathfrak{f}(d\mu)$（対称正定値）が存在し

$e(x.y\ d\mu) = \mathfrak{e}(x\,\mu)\, \mathfrak{f}(d\mu)\, \mathfrak{e}(y\,\mu)$ とするとき

$$G(x\ y\ \alpha) = \int_{(-\infty\ 0]} \frac{e(x\ y\ d\mu)}{\alpha - \mu}$$ かつ $S \times S$ で（広義）一様収束となる

証明は省略するが、やり方は $S_1 \subset S_2 \quad \to S$ なるように内側から S に近ずく区間で (2) の形に展開しておいて $n \to \infty$ とやるのである。
一般展開定理について Coddington − Levinson（Theory of Ord Diff equation）の本にあるのと同じ方法であるが、評価はより簡単になる場合が多い　くわしく McKean の論文をみられたい（H. P McKean JR Elementary Solution for Certain Parabolic partial equations Trans A.M.S Vol 82 PP519〜(1956)）

なおこゝで我々の境界の分類と Weyl による境界の分類（極限点型

極限円型）との関係をのべておく

r_2が（Lに関し）極限円型である，というのは　あるλ_0に対し $Lu=\lambda_0 u$のすべての解が$L_2[(0r_2)dm]$に属することである。

（実はあるλ_0に対し、上のことがなりたてば、任意の複素数 λに対してもなりたつ）

そうでないとき　r_2は（Lに関し）極限点型であるという。このとき$Lu=\lambda u$の解で$L_2(0r)$に入るものは、定数倍をのぞいて唯一つ存在する

<u>Theorem 10.7.</u>

(i) r_2 が regular $\longrightarrow$ r_2 は極限円型

(ii) r_2 が exit, natural $\longrightarrow$ r_2 は極限点型

(iii) r_2 が entrance $\longrightarrow$ r_2 は $\int_{(0r_2)}(S(x)-S(0))^2 dm(x)<+\infty$ なるとき，かつそのときのみ極限円型

<u>証　明</u>　r_2 が regular なら $\int_{(0r_2)} dm(y)<+\infty$で（伊藤　確率過程論　P176）

すべての解は有界であるから　すべて$L_2[(0r)dm]$に属する

r_2 がexit なら $\int_{(0r_2)} dm=+\infty$であり　したがって $u(0)=1$ なる増加解　$u_1(x)$は$L^2(0r)$に入らない。

r_2がentranceのとき$\int dm<+\infty$ であり減少解 u_2は$L_2(0r)$に入る

$v(x)=u_2(x)\int_{(0x)}\frac{dS(y)}{[u_2(y)]^2}$ はu_2と独立な$(\lambda-L)u=0$の解をあたえる。

$$\frac{m^2}{M^4}\int_{(0r_2)}[S(x)-S(0)]^2 dm(x)\leq\int_{(0r_2)}v^2(x)dm(x)<\frac{M^2}{m^4}\int_{(0x)}[S(x)-S(0)]^2 dm(x)$$
$M=u_2(0)$
$m=u_2(r_2)$

であるから$\int_{(0r_2)}v^2(x)dm(x)<+\infty \Longleftrightarrow \int_{(0r_2)}(S(x)-S(0))^2 dm(x)<+\infty$

r_2 がnatural のとき

$\int_{(0r_2)} dm<+\infty$ なら $\int_{(0r_2)} dS=+\infty$で entranceのときと同様にして一つの解はL^2でない

$\int dm=+\infty$なら　増加解はL^2でない（以上）　全く同じ事が境界r_1でも成り立つ。

5°

$$G(x\ \ y\ \ \alpha)=\int_{-\infty}^{0+}\frac{e(x\ y\ d\mu)}{\alpha-\mu}$$ であった。この $e(x\ y\ d\mu)$

によって

$$p(t\ \ x\ \ y)=\int_{-\infty}^{0+}e^{t\mu}\,e(x\ \ s\ \ d\mu)$$ とおく。

Stieltjes 変換と Laplace 変換の関係から（Widder: Laplace Transform P. 334）

$G(x\ y\ \alpha)=\int_0^{+\infty}e^{-\alpha t}\,p(t\ x\ y)\,dt$ となり したがって

$p(t\ \ x\ \ y)$ が $(L,\ D(L))$ を generator とする diffusion の遷移確率密度（dm に関する）となるはずである。

実際次の定理が証明できる。（H. P. McKean）

E1 $\quad p(t\ \cdot\ \cdot)\geq 0$ 対称 $\quad t>0$

E2 $\quad p(t\ \cdot\ y)\in D(L)$ かつ

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n}p(t\ \cdot\ y)=L^n\cdot p(t\ \cdot\ y)$$

E3 $\quad \int_S p(t\ \ x\ \ y)\,dm(y)\leq 1 \quad t\geq 0 \quad x\in S$

（<1 となることがあるのは境界での killing による）

$=1 \quad \Longleftrightarrow \quad r_1 \quad r_2$ が次のどれか

i) regular reflecting（i e $\ p_i=1$）

ii) entrance

iii) natural

E4 $\quad p(t_1+t_2\ \ x\ \ y)=\int_S p(t_1\ x\ \xi)\,p(t_2\ \xi\ y)\,dm(\xi)$

E5 $\quad H_t\ \cdot\ \ u\in C(S)\to\int_S p(t_1\ x\ y)\,u(y)\,dm(y)$

は Semi-group $\ C(S)\to C(S)$

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n}H_t\,u(x)=L^n\,(H_t u)(x) \quad t>0 \quad u\in C(S)$$

E6 $\quad \int_{U(x)^c}p(t\ \ x\ \ y)\,dm(y)=o(t^n) \quad t\downarrow 0 \quad n>0$

Sem. on Probab.
Vol.3 1960年
P1-94

ここでは全部の証明をかくことは出来ないので，簡単にわかる二三のものだけについてのべる．

（E1）について　対称性は $e(x\ y\ du)$ の対称性よりあきらか
又（G4）′ より
$(-1)^n \frac{\partial^n}{\partial\alpha^n} G(x\ y\ \alpha) > 0$ となり　$G(x\ y\ \alpha)$ は α について Completely monotonic
故に $G(x\ y\ \alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} p(t\ x\ y) \times dm(y)$ より

$$p(t\ x\ y) \geq 0$$

（Widder, Laplace Transform P. 160～）

（E3）について　$\phi(t) = \int_S p(t\ x\ y)\,dm(y)$ とおくと

$$\int_0^\infty e^{-\alpha t}\phi(t)\,dt = \int_S \int_0^\infty e^{-\alpha t} p(t\ x\ y) \times dt\,dm(y)$$
$$= \int_S G(x\ y\ \alpha)\,dm(y)$$
$$= G_\alpha 1\,(x)$$

（G4）′ より　$\alpha^{n+1} \left| \frac{\partial^n}{\partial\alpha^n} G_\alpha 1(x) \right| \leq n!$

これは　$\phi(t) \leq 1$ なる条件である（Widder: Laplace Transform P 315～）

（E4）について　I §4 で Resolvent equation を証明したのを逆にして（G3）の Resolvent equation から
$Q(t\ s\ x\ y) = \int_S p(t\ x\ \xi) P(s\ \xi\ y) \times dm(\xi)$ とおくとき

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\alpha t} e^{-\beta s} Q(t\ s\ x\ y)\,dt\,ds =$$
$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\alpha t} e^{-\beta s} p(t+s\ x\ y)\,dt\,ds$$

が証明でき
このことから $Q(t\ s\ x\ y) = p(t+s\ x\ y)$ が示せる

Sem. on Probab.
Vol.3 1960年
P1-94

6° rが. regular boundaryのとき. 境界条件としてもっとも一般なFellerの境界条件をとった場合のGreen函数の構成についてのべる.

簡単のため $S=(0\ r)$

0 : regular boundry 又 rは何でもよいが、そこでの境界条件は今まで考えてきたものにする.

又 $m(x)$ $s(x)$は今までどおりとする.

$\hat{S}=[0\ r)$

$$\tilde{C}(L)=\left\{u\ ;\ u \text{ は } \hat{S}\text{で連続}, S\text{で考えて } \in C(L) \text{ かつ } \frac{d}{dm}\frac{du}{ds}(0+)\text{が存在する}\right\}$$

$$\tilde{D}(L)=\left\{u:\ u\in\tilde{C}(L),\ p_1u(0)-p_2\frac{du}{ds}(0)+p_3\frac{d}{dm}\frac{du}{ds}(0)=0 \quad \begin{matrix}p_1\geq 0\\ p_2>0\\ p_3>0\end{matrix} \text{ かつ } r\text{で考えている境界条件をみたす}\right\}$$

(注) 以後 $\frac{d}{dm}\frac{du}{ds}(0)=\frac{d}{dm}\frac{du}{ds}(0+)$

$\frac{du}{ds}(0)=\frac{du}{ds}(0+)$ と定義する.

尚 $p_2=0$に対応するprocessも存在するが(　　),
これについてはこゝではふれない。

$\tilde{D}(L)$をdomainとする$\frac{d}{dm}\frac{d}{ds}$のGreen operatorを構成しよう.

(i) まず $[0\ r)$ 上の測度 dm^* を

$$dm^*=\frac{p_3}{p_2}\delta_0+dm \qquad \text{と定義する}$$

δ_0は 0にmass 1をもつDerac－測度
dmは $m(x)$から出来る $(0\ r)$上の測度

(ii) $u_2(x\ \alpha)$は rで境界条件をみたす $(\alpha-\frac{d}{dm}\frac{d}{ds})u=0$の減少解

Sem. on Probab.
Vol.3 1960年
P1-94

(iii) $u_1(x\alpha)$ は $(p_1+\alpha p_3)u(0)=p_2\frac{du}{ds}(0)$ をみたす。

$(\alpha-\frac{d}{dm}\frac{d}{ds})u=0$ の増加解

(iv) $G(xy\alpha) = u_1(x\alpha)\,u_2(y\alpha) \qquad x\leq y$

$\qquad\qquad\quad u_2(x\alpha)\,u_1(y\alpha) \qquad y<x$

(ここで、もちろん $\frac{du_1}{ds}u_2-u_1\frac{du_2}{ds}=1$ なるように u_1, u_2 をとっておく)

(v) $G_\alpha f \qquad f\in C(0r)$

$$G_\alpha f(x)=\int_{(0r)} G(xy\alpha)\,f(y)\,dm^*(y)$$

$$=\int_{(0r)} G(xy\alpha)f(y)\,dm(y)+G(x0\alpha)f(0)\frac{p_3}{p_2}$$

Theorem 10.8

G_α は $C(0r)$ から $\hat{D}(L)$ の上への一対一連続写像で

$G_\alpha^{-1}=(\alpha-\frac{d}{dm}\frac{d}{ds}) \qquad \therefore \hat{D}(L)\rightarrow C(0r)$

さらに G_α は $(G2)$—$(G4')$ をみたす

証明 $g(x)=G_\alpha f(x)=\int_{(0r)} G(xy\alpha)f(y)\,dm(y)+G(x0\alpha)f(0)\frac{p_3}{p_2}$

$$=u_2(x\alpha)\int_{(0x)}u_1(y\alpha)f(y)\,dm(y)+u_1(x\alpha)\int_{(xr)}u_2(y\alpha)\times f(y)\,dm(y)$$

$$+u_2(x\alpha)\,u_1(0\alpha)\,f(0)\frac{p_3}{p_2}$$

に注意して $(\alpha-\frac{d}{dm}\frac{d}{ds})g(x)=f(x)$ はすぐわかる

$g(x)\in\hat{D}(L)$ の証明

$$g(0)=u_1(0\alpha)\int_{(0r)}u_2 f\,dm+u_1(0\alpha)u_2(0\alpha)f(0)\frac{p_3}{p_2}$$

$$\frac{dg}{ds}(0)=\frac{du_1}{ds}(0\alpha)\int_{(0r)}u_2 f\,dm+\frac{du_2}{ds}(0)\,u_2(0)\,f(0)\frac{p_3}{p_2}$$

$$\frac{d}{dm}\frac{dg}{ds}(0)=\alpha g(0)-f(0)=\alpha u_1(0\alpha)\int_{(0r)}u_2 f\,dm+$$
$$\alpha u_1(0\alpha)u_2(0\alpha)f(0)\frac{p_3}{p_2}-f(0)$$

故に $p_1 g(0)-p_2\frac{dg}{ds}(0)+p_3\frac{d}{dm}\frac{ds}{ds}(0)$

Sem. on Probab.
Vol.3 1960年
P1-94

$$= \left(p_1\, u_1(0) - p_2 \frac{du_1}{ds}(0) + \alpha\, p_3\, u_1(0) \right) \int_{(0r)} u_2\, f\, dm$$

$$+ \frac{p_3}{p_2} f(0) \left[u_2(0)\left(p_1 u_1(0) + \alpha\, p_3\, u_1(0)\right) - p_2 \frac{du_2}{ds}(0)\, u_1(0) \right] - p_3 f(0)$$

(ivより)

$$= \frac{p_3}{p_2} f(0) \cdot p_2 \left(\frac{du_1}{ds}(0)\, u_2(0) - u_1(0) \frac{du_2}{ds}(0) \right) - p_3 f(0)$$

$$= p_3 f(0) - p_3 f(0) = 0$$

他のことは全く前と同様であるので省略する。

かくしてgreen operatorが構成できたので 前と同様に

$G(x\ y\ \alpha) = \displaystyle\int_{-\infty}^{0+} \frac{e(x\ y\ d\mu)}{\alpha - \mu}$ とスペクトル分解し

$p(t\ x\ y) = \displaystyle\int_{-\infty}^{0+} e^{t\mu}\, e(x\ s\ d\mu)$ とすれば これが $L = \dfrac{d}{dm}\dfrac{d}{ds}$

$\hat{D}(L)$ をgeneratorとするdiffusionの(dm^* 測度に関する)遷移確率密度になる。