Sem. on Probab.
Vol.1 1959年
P1-85

SEMINAR ON PROBABILITY

vol. 1

渡 辺　　毅；可附番空間の上の markov 過程から
導びかれる martin 境界とその応用，

1 9 5 9

確 率 論 セ ミ ナ ー

Sem. on Probab.
Vol.1 1959年
P1-85

題：可附番空間の上のMarkov過程から導かれるMartin 境界とその応用

渡 辺 毅

目 次

Sem. on Probab.
Vol.1 1959年
P1-85

前書き

§1. では離散的な time parameter をもった，可附番値 Markov 過程（ふつう Markov chain という）の定義と，その構成法を述べる．更に后の節で必要ないくつかの事柄を準備する．x_n-harmonic function というのは，rough に云うと与えられた Markov 過程 x_n の1回（従って任意回）の推移（或は jump）で不変な函数である．（§2）普通の harmonic function に関する R. S. Martin [10] の研究を確率論の立場から見なおすことによって，非負の x_n-harmonic function の表現定理を得るのが以下3節の主な目的である．§3で導入される Martin 境界は，集合としては W. Feller [7] の全境界（total boundary）と一致することが多いが，その topology は異なる場合が多い（§6でそういう例を与える）。又多くの場合，Feller の境界より計算が容易である。Martin 境界 $\mathbb{M}$ の各点 b には1つの非負 x_n-harmonic function $K(x, b)$ が対応する。§4で，任意の非負な x_n-harmonic function が $K(x, b)$ を kernel とする Green 型の表現をもつことを示す。表現の一意性の問題が§5で扱われる。このノートでは述べないが，こゝ迄の結果の大部分は，time parameter が連続な場合でも成り立つ（実際の証明の多くは，そのまゝ連続な場合に適用出来る形で述べてある）。又§§3-5の結果は，§3の始めに導いた仮定よりずっとゆるい条件の下で成り立つ（仮定(A.2)だけで十分である）。しかし，そのためには，こゝで述べた方法を多少変更しなければならないので，他の機会に論じたい。

§6でいくつかの例を与える。最后の例に対する表現定理を用いて，容易に Hansdorff の moment 問題に関する主要定理を導くことが出来る（§7）。§8で証明する定理は，x_n-harmonic function の境界 M に関する才1境界値問題と深い関連がある（J. L. Doob [4],[5]）。こゝでは述べないが，Green space の上の harmonic function と，その Martin 境界に関する才1境界値問題について得られている諸結果（M. Brelot [1], Doob [6]）は，我々の場合にもすべて成り立つ。

このノートは，筆者が1959年4月 — 6月の間に，京都大学の確率論のセミナーで行った報告を国田寛氏がまとめて下さったものである。国田氏とセミナーの出席者の方々に心から感謝の意を表わしたい。

Sem. on Probab.
Vol.1 1959年
P1-85

§1. Markov 過程の定義とその基本的性質

1. Eを*discrete topology*の入った可算集合とする。Eに一点∞を*isolated point*としてつけ加えたものをE^*で表わす。

$T=\{0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ +\infty\}$は（*discrete topology*の入った）集合$\{0,1,2,\cdots\}$に一点$+\infty$を*limit point*としてつけ加え, *compact*化したものとする。TからE^*の中への*mapping*をωで表わし, $n\in T$に対する*image*をω_n又は$x_n(\omega)$と表わす。

任意の$A\subset E^*$に対して $\sigma(A;w)$を

$$\sigma(A;w)=\begin{cases}\min\{n;\ x_n(w)\in A\}; & \text{もし } x_n(w)\in A \text{ なる } n \text{ があれば,}\\ +\infty & ;\ \text{もし } x_n(w)\in A \text{ なる } n \text{ がなければ,}\end{cases}$$

と定義し, <u>Aへのpassage time</u> と言う。簡単にσ_Aと書くこともある。TからE^*の中への*mapping* wの内で

(W・1) $\quad x_{+\infty}(w)=\infty$

(W・2) $\quad x_n(w)=\infty \qquad n\geqq\sigma(\{\infty\};w)$のとき

の二つの条件を満たすものゝ集合をWであらわし, $w\in W$のことを<u>*path-function*</u>という。任意の$k\in T$, 任意の$A\subset E^*$に対して, $\{w;\ x_k(w)\in A\}$なるWの部分集合より, 生成される最小の*Borel field*を$\mathcal{B}$で表わす。$\mathcal{B}_T$をTの部分集合の全体とする。 $\{w:\ w_k\in A,\ k\in T,\ A\subset E^*\}$.

$(W,\mathcal{B})$から$(T,\mathcal{B}_T)$への*measurable*な*mapping* $\sigma(w)$を<u>*random time*</u>という。*random time* $\sigma(w)$に対して<u>*stopped path*</u> w_σ^-, <u>*shifted path*</u> w_σ^+を次のように定義する。

$$(w_\sigma^-)_k=\begin{cases}w_{\min(\sigma,k)} & \text{for } k\in T-\{+\infty\}\\ \infty & \text{for } k=+\infty\end{cases}$$

$$(w_\sigma^+)_k=w_{\sigma+k} \qquad \text{for every } k\in T$$

*stopped path, shifted path*もWに属している。なぜなら先ずw_σ^-について考えれば, 定義によって$x_{+\infty}(w_\sigma^-)=(w_\sigma^-)_{+\infty}=\infty$であるから, (W・1)が成り立つ。又$w_\sigma^-$に関する, $\{\infty\}$への*passage time*を考えると,

$$\sigma_1(w)=\sigma(\{\infty\};\ w_\sigma^-)=\begin{cases}\min(n;\ x_n(w_\sigma^-)=\infty); & x_n(w_\sigma^-)=\infty \text{ なる } n \text{ がある時}\\ +\infty & ;\ x_n(w_\sigma^-)=\infty \text{ なる } n \text{ がない時}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\min(n;\ x_{\min(n,\sigma)}(w)=\infty),\\ +\infty\end{cases}$$

Sem. on Probab.
Vol.1 1959年
P1-85

したがって $\forall n \geqq \sigma$, に対して (W·2) より $x_n(w_\sigma^-) = x_{\min(n,\sigma)}(w) = \infty$ となり (W·2) の条件を満す。故に $w_\sigma^- \in W$ が証明された。

次に w_σ^+ が W に属することを証明しよう。

$$x_{+\infty}(w_\sigma^+) = w_{\sigma+\infty} = w_{+\infty} = \infty$$

だから (W·1) は明らか。又 w_σ^+ に関する $\{\infty\}$ への *passage time* を考えると

$$\sigma_2(w) = \sigma(\{\infty\}\ ;\ w_\sigma^+) = \min\{n\ ;\ n \geqq 0 \quad x_{n+\sigma}(w) = \infty\}.$$

したがって, (W. 2) によって $\forall n \geqq \sigma_2(w)$ に対しては $x_n(w_\sigma^+) = x_{n+\sigma} = \infty$. 故に $w_\sigma^+ \in W$ が証明された。

$\phi_\sigma(w) = w_\sigma^-$ とおけば, ϕ_σ は $(W \cdot \mathcal{B})$ から $(W, \mathcal{B})$ への *measurable mapping* になっている。すなわち $\forall B \in \mathcal{B}$ に対し, $\{w;\ \phi_\sigma(w) \in B\} \in \mathcal{B}$ が示される。そのためには, 任意の $A \subset E^*$ と任意の $k \in T$ に対し $\{w\ ;(\phi_\sigma(w))_k \in A\} \in \mathcal{B}$ を証明すればよい。

$$\{w\ ;(\phi_\sigma(w))_k \in A\} = \{w\ ;\ w_{\min(\sigma,k)} \in A\}$$
$$= \left(\bigcup_{\ell=0}^{k} \{w\ ;\sigma = \ell\} \cap \{w\ ;w_\ell \in A\}\right) \cup \left(\{w\ ;\sigma > k\} \cap \{w;\ w_k \in A\}\right).$$

最后の式の各項は, すべて $\mathcal{B}$ にぞくするから, $\{w;(\phi_\sigma(w))_k \in A\} \in \mathcal{B}$ が言える。

今 $\mathcal{B}_\sigma = \phi_\sigma^{-1}(\mathcal{B}) = \{B' = \{w;\ \ w_\sigma^- \in B\}\ B \in \mathcal{B}\}$ とおけば $\mathcal{B}_\sigma \subseteqq \mathcal{B}$ である。特に $\sigma = n$, *fixed time* とすると $\{w:\ (w_n^-)_k \in A\} = \{w;\ \ w_{\min(k,n)} \in A\}$ だから $\mathcal{B}_n$ は $\{w\ ;\ w_k \in A_k,\ \ k = 1 \cdots n\}$ から生成される最小の *Borel field* である。

<u>*Definition 1·1*</u> *random time* $\sigma(w)$ が, すべての $n \in T$ に対して $\{w:\ \sigma(w) \leqq n\} \in \mathcal{B}_n$ を満す時, $\sigma(w)$ を <u>*markove time*</u> という。

<u>*Lemma 1·1*</u> 任意の $A \subset E^*$ に対し $\sigma(A;w)$ は *markov time* である。

Proof. $\{w\ ;\ \sigma(A\ ;\ w) > n\} = \{w\ ;\ w_1 \notin A, \cdots, w_n \notin A\} \in \mathcal{B}_n$.

さらに, 后で必要になる *Markov time* の性質を証明しておく。

<u>*Lemma 1.2.*</u> $\sigma(w)$ を任意の *Markov time* とすると, すべての w に対し, $\sigma(w) = \sigma(w_\sigma^-)$ が成り立つ。したがって, $\sigma(w)$ は $\mathcal{B}_\sigma$ — *measurable* である。

Proof. W の任意の元 w' をとり, $\sigma(w') = n$ とする。

$\{w\ ;\ \sigma(w) = n\} \in \mathcal{B}_n$ だから適当な $B \in \mathcal{B}$ が存在して $\{w\ ;\ \sigma(w) = n\} = \{w\ ;\ w_n^- \in B\}$ と表わす事が出来る。$w' \in \{w\ ;\ w_n^- \in B\}$ であるが, 更に $(w_\sigma'^-)_n^- = w_n'^- \in B$. 故に $w_\sigma'^- \in \{w\ ;w_n^- \in B\}$ である。即ち $\sigma(w_\sigma'^-)$

$= n = \sigma(w')$. したがってすべての w に対して $\sigma(w_\sigma^-) = \sigma(w)$ が成り立つことになり $\sigma(w)$ は $\mathcal{B}_\sigma$ - measurable である。

Lemma 1.3. α, β をそれぞれ Markov time とすれば $\sigma(w) = \alpha(w) + \beta(w_\alpha^+)$ も Markov time である。

Proof. $\{w;\ \sigma(w) \le n\} = \bigcup_{k=0}^{n} \{\alpha(w) = k\} \cap \{\beta(w_k^+) \le n - k\}$.

ところが $\{\alpha(w) = k\} \in \mathcal{B}_n$, $k = 1, \cdots, n$.

一方

$\{w : \beta(w) \le n - k\} = \{w;\ (x_0(w), \cdots, x_{n-k}(w)) \in {}^\exists A,\ A \subseteq (E^*)^{n+1-k}\}$

と書けるから

$\{w : \beta(w_k^+) \le n - k\} = \{w;\ (x_0(w_k^+), \cdots, x_{n-k}(w_k^+)) \in {}^\exists A,\ A \subseteq (E^*)^{n+1-k}\}$

$= \{w;\ (x_k(w), \cdots, x_n(w)) \in {}^\exists A,\ A \subseteq (E^*)^{n+1-k}\} \in \mathcal{B}_n$

したがって $\{w;\ \sigma(w) \le n\} \in \mathcal{B}_n$ である。

Lemma 1.4. α, β を Markov time とすれば $\{w;\ \alpha < \beta\}$, $\{w;\ \alpha \le \beta\}$, $\{w;\ \alpha = \beta\}$ は $\mathcal{B}_\alpha$ 及び $\mathcal{B}_\beta$ に属する。

Proof. 先ず $\{w;\ \alpha < \beta\} = \{w;\ \alpha(w_\beta^-) < \beta(w_\beta^-)\} \in \mathcal{B}_\beta$ を証明しよう。$^\forall w' \in \{w : \alpha < \beta\}$ とする。$\alpha(w'^-_\beta) = \alpha((w'^-_\beta)^-_\alpha) = \alpha(w'^-_\alpha) = \alpha(w') < \beta(w') = \beta(w'^-_\beta)$. したがって $w' \in \{w :\ \alpha(w_\beta^-) < \beta(w_\beta^-)\}$ である。故に $\{w : \alpha < \beta\} \subseteq \{w : \alpha(w_\beta^-) < \beta(w_\beta^-)\}$. 逆に $\{w : \alpha(w_\beta^-) < \beta(w_\beta^-) = \beta(w)\} \ni {}^\forall w'$ をとり $\beta(w') = n$ であれば $\alpha(w'^-_n) < n$ だから $w'^-_n \in \{w;\ \alpha(w) < n\} \in \mathcal{B}_n$ である。したがって ${}^\exists B \in \mathcal{B}$ で $\{w : \alpha(w) < n\} = \{w;\ w_n^- \in B\}$ と書けるから $w'^-_n \in \{w : w_n^- \in B\}$ 即ち $(w'^-_n)^-_n \in B$ 即ち $w'^-_n \in B$ である。これは $w' \in \{w;\ w_n^- \in B\}$ を意味している，故に $\alpha(w') < n = \beta(w')$, 即ち $\{w : \alpha < \beta\} \supseteq \{w : \alpha(w_\beta^-) < \beta(w_\beta^-)\}$. 全く同様に，$\{w;\ \alpha(w) \leqq \beta(w)\} = \{w;\ \alpha(w_\beta^-) \leqq \beta(w_\beta^-)\} \in \mathcal{B}_\beta$. 又 $\{w;\ \beta(w) \leqq \alpha(w)\} \in \mathcal{B}_\alpha$ より $\{w;\ \beta(w) \leqq \alpha(w)\}^c = \{w;\ \alpha(w) < \beta(w)\} \in \mathcal{B}_\alpha$. その他についても同様である。

Definition 1.2.

$\{P_x(\cdot);\ x \in E^*\}$ が次の (P.1), (P.2), (P.3) を満すとき，$(W, \mathcal{B}, P_x(\cdot);\ x \in E^*)$ を離散的な time parameter をもった E 上の Markov process という。

(P.1) fix した E^* の点 x に対して $P_x(\cdot)$ は $(W, \mathcal{B})$ 上の probability measure になっている。

(P.2) $^\forall x \in E^*$ に対し $P_x(w;\ x_0(w) = x) = 1$ が成り立つ（このことを x は fictitious でないという）。

Sem. on Probab.
Vol.1 1959年
P1-85

(P.3) (Markov property)

$\forall x \in E^*$, $\forall n \geq 0$, $\forall B \in \mathcal{B}$ に対し

$P_x\{P_x(w;\ w_n^+ \in B/\mathcal{B}_n) = P_{x_n}(B)\} = 1$ が成り立つ。

Remarks 1. 今后, Markov process を単に x_n によってあらわすことが多い。

2. (P.2) と (W.2) より

$$P_\infty(w;\ x_n(w) = \infty,\ n \in T) = 1$$

である。

$\mathcal{B}$-measurable function $f(w)$ に対し積分

$$\int_W f(w)\cdot dP_x(w),\quad \int_B f(w)\cdot dP_x(w) \qquad B \in \mathcal{B}$$

が定義出来るとき, それぞれ $E_x(f(w))$, $E_x(f(w);B)$ と表わす。

Theorem 1.1 (Strong Markov property)

$(W, \mathcal{B}, P_x(\cdot), x \in E^*)$ を Markov process とする. その時 $\forall x \in E^*$, 任意の Markov time σ, 任意の $B \in \mathcal{B}$ に対し,

(P.3)′ $P_x\{P_x(w;\ w_\sigma^+ \in B/\mathcal{B}_\sigma) = P_{x_\sigma}(B)\} = 1$

が成り立つ。

Proof. $\forall B' \in \mathcal{B}_\sigma$ に対し

$$P_x\{(w;\ w_\sigma^+ \in B) \cap B'\} = E_x(P_{x_\sigma}(B);\ B')$$

を証明すればよい。

$B_n' = B' \cap (w;\ \sigma(w) = n)$ とおけば, ある $B'' \in \mathcal{B}$ が存在して $B' = \{w;\ w_\sigma^- \in B''\}$だから

$$B_n' = \{w;\ w_\sigma^- \in B'',\ \sigma = n\}$$
$$= \{w;\ w_n^- \in B'',\ \sigma = n\} \in \mathcal{B}_n.$$

したがって

$$P_x\{(w;\ w_\sigma^+ \in B) \cap B'\} = \sum_{n=0}^{+\infty} P_x\{(w;\ w_\sigma^+ \in B) \cap B_n'\}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} P_x\{(w;\ w_n^+ \in B) \cap B_n'\}$$

(ここで (P.3) を使えば)

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} E_x(P_{x_n}(B);\ B_n') = E_x(P_{x_\sigma}(B);\ B').$$

Lemma 1.5 $f(w)$, $g(w)$ が $\mathcal{B}$-measurable function で, σ を Markov time とすれば

Sem. on Probab.
Vol.1 1959年
P1-85

$$E_x(f(w_\sigma^-)g(w_\sigma^+))=E_x(f(w_\sigma^-)E_{x_\sigma}(g(w)) \qquad (1\cdot1)$$

が成り立つ。

Proof. 先ず $f(w)$, $g(w)$ が B, $B'\in\mathcal{B}$ の indicator function であるときは Strong Markov property より明らか。

$f(w)$, $g(w)$ が positive function であれば，各々 step function $f_n(w)$, $g_n(w)$ で下から近づける事が出来る。

$f_n(w)$, $g_n(w)$ に対しては（1·1）が成り立つから，その極限として positive な $f(w)$, $g(w)$ に対して（1·1）が成り立つ（両辺が ∞ になる場合も含めて）。

$f(w)$, $g(w)$ が一般の函数の時は，positive part と negative part に別けると，各 part について（1·1）が成り立つ。したがって，（1.1）の両辺の一方が定義出来れば，他方も定義出来て一致する。

Definition 1·3 $n\in T$, $x,y\in E^*$ に対し $\pi^n(x,y)\equiv P_x(x_n(w)=y)$ を transition probabilities の system という。

Lemma 1.6. $\pi'(x,y)$ を単に $\pi(x,y)$ であらわす。又 matrix $\pi^*=(\pi(x,y);\ x,y\in E^*)$ を考える。その時

(i) $\pi(x,y)\geq 0$, $\sum_{y\in E^*}\pi(x,y)=1$, 特に $\pi(\infty,\infty)=1$.

(ii) $n\neq+\infty$ のとき，$\pi^n(x,y)$ は matrix $(\pi^*)^n$ の (x,y) element である。但し $(\pi^*)^0$ は identity matrix.

(iii) $n=+\infty$ とき，$\pi^{+\infty}(x,\infty)=1$ for every $x\in E^*$.

Proof. (i) と (iii) は明らかである。

(ii). $\{w;\ w_0=\xi_0,\cdots\cdots,w_k=\xi_k\}$, $\xi_0,\cdots,\xi_k\in E^*$ の形の集合を $B(\xi_0,\cdots,\xi_k)$ であらわす。この集合は $\mathcal{B}_k$ にぞくすることを注意しておく。

$$\begin{aligned}
\pi^n(x,y)=P_x(x_n=y)&=\sum_{\xi_0,\cdots,\xi_{n-1}\in E^*}P_x(B(\xi_0,\cdots,\xi_{n-1},y))\\
\text{((P.2) より)}\quad&=\sum_{\xi_1,\cdots,\xi_{n-1}\in E^*}P_x(B(x,\xi_1,\cdots,\xi_{n-1},y))\\
&=\sum_{\xi_1,\cdots,\xi_{n-1}\in E^*}P_x\{(x_1(w_{n-1}^+)=y)\cap B(x,\xi_1,\cdots,\xi_{n-1})\}\\
\text{((P.3) より)}\quad&=\sum_{\xi_1,\cdots,\xi_{n-1}\in E^*}E_x\{P_{x_{n-1}}(x_1=y);B(x,\xi_1,\cdots,\xi_{n-1})\}\\
&=\sum_{\xi_1,\cdots,\xi_{n-1}\in E^*}\pi(\xi_{n-1},y)P_x(B(x,\xi_1,\cdots,\xi_{n-1}))
\end{aligned}$$

Sem. on Probab.
Vol.1 1959年
P1-85

$B(x, \xi_1, \cdots, \xi_{n-1})$について同様の議論を繰返して

$$=\sum_{\xi_1, \cdots, \xi_{n-1} \in E^*} \pi(\xi_{n-1}, y)\pi(\xi_{n-2}, \xi_{n-1})\cdots\pi(\xi_1, \xi_2)\pi(x, \xi_1)$$

一般に

<u>Definition 1.4.</u> Matrix $\pi^* = (\pi(x, y),\ x, y \in E^*)$ が

$$(\pi(x, y) \geq 0,\ \sum_{y \in E^*} \pi(x, y) = 1 \quad \text{for all} \quad x \in E^*$$

であるとき，πを stochastic matrix という。

2. 我々は今迄 Markov process が与えられたとして，その transition probability の性質を調べたが，その逆の問題，すなわち，Lemma 1.6 の条件をみたすような system $\{\pi^n(x, y)\ ;\ x, y \in E^*, n \in T\}$ が与えられた時，それらを transition probabilities の system とする Markov process が構成できることを示そう。

<u>Theorem 1.2</u> $\pi^* = (\pi(x, y),\ x, y \in E^*)$は$\pi(\infty, \infty) = 1$を満す。stochastic matrix とする。その時

$$P_x\ (x_1(w) = y) = \pi(x, y) \tag{1.2}$$

を満足するE上の Markov process が丁度１つ存在する。

Proof. (i) 1意性．P_x，P'_xが共に(1.2)を満す Markov process とすると，$B = \{w\ ;\ x_n(w) \in A\}$ の形の集合に対しては$P_x(B) = P'_x(B)$ (Lemma 1.6)．ところが$\mathcal{B}$は上の形の集合で generate されているから$\mathcal{B}$の任意の元について $P_x(B) = P'_x(B)$．

(ii) 存在．

$\widetilde{W} = E^{*T}$ とおく。こゝでE^{*T} はE^* のT直積である．$\widetilde{W}$の element を$\widetilde{w}$で，その第n座標を$x_n(\widetilde{w})$であらわすことにする．$i_1 < i_2 < \cdots < i_n \leq +\infty$なる$T$の任意の有限集合$\{i_1, i_2, \cdots, i_n\}$と，$E^{*n+1}$の任意の subset Aに対して$\{\widetilde{w}\ ;\ (x_0(\widetilde{w}), \cdots, x_{i_n}(\widetilde{w})) \in A\}$の形の集合を$\widetilde{W}$の cylinder set という。$\widetilde{\mathcal{B}}$は cylinder set から generate された Borel field とする．$\pi^k(x, y)$ $(k \in T)$ を Lemma 1.6 のように定義する。今 cylinder set に対して

$$\widetilde{P}_x\{\widetilde{w}\ ;\ (x_0(\widetilde{w}), x_{i_1}(\widetilde{w}), \cdots, x_{i_n}(\widetilde{w})) \in A\}$$

$$=\sum_{(\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_n) \in A} \pi^0(x, \xi_0)\pi^{i_1}(\xi_0, \xi_1)\cdots\pi^{i_n - i_{n-1}}(\xi_{n-1}, \xi_n)$$

と定義すると，Kolmogorov の拡張定理によって，$\widetilde{P}_x$ は$(\widetilde{W}, \widetilde{\mathcal{B}})$の上に拡

Sem. on Probab.
Vol.1 1959年
P1-85

張できる（例えば，伊藤清，確率論，岩波現代数学，p306－311）。

明らかにWは$\widetilde{W}$の subset であるが，更に$W \in \widetilde{\mathcal{B}}$，$\widetilde{P}_x(W)=1$ for every $x \in E^*$ であることを示す。

$W^c=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{\widetilde{w}\,;\,x_n(\widetilde{w})=\infty,\ x_{n+1}(\widetilde{w})\neq\infty\}\cup\{\widetilde{w}\,;\,x_{+\infty}(\widetilde{w})\neq\infty\}$

であるが，右辺の各項は$\widetilde{\mathcal{B}}$にぞくするから，$W^c \in \widetilde{\mathcal{B}}$.

又

$$\widetilde{P}_x(W^c) \leqq \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{\xi_0\in E^*,\ \xi_n=\infty,\ \xi_{n+1}\in E}\pi^0(x,\xi_0)\,\pi^n(\xi_0,\xi_n)\,\pi(\xi_n,\xi_{n+1})\Big)$$

$$+\sum_{\xi_0\in E^*,\ \xi_{+\infty}\in E}\pi^0(x,\xi_0)\,\pi^{+\infty}(\xi_0,\xi_{+\infty})$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{\xi_{n+1}\in E}\pi^n(x,\infty)\,\pi(\infty,\xi_{n+1})\Big)+\sum_{\xi_{+\infty}\in E}\pi^{+\infty}(x,\xi_{+\infty}).$$

ところが$\pi^n(x,y)$の定義から右辺の各項は0．故に$\widetilde{P}_x(W^c)=0$.

次に$\mathcal{B}$が$W\cap\widetilde{B}$，$\widetilde{B}\in\widetilde{\mathcal{B}}$の形の集合全体と一致することは明らかだから，$\mathcal{B}\subset\widetilde{\mathcal{B}}$．そこで$\mathcal{B}\ni{}^\forall B$に対して，

$$P_x(B)=\widetilde{P}_x(B)$$

と定義すれば，P_xは$(W,\mathcal{B})$上の probability measure になっている。

今構成した$(W,\mathcal{B},P_x\,;\,x\in E^*)$が求める Markov process であることを示そう。

(P.1)，(P.2)は作り方より明らかだから，(P.3)を示す。それには，任意の$B_1\in\mathcal{B}_n$，と$B_2\in\mathcal{B}$に対して

$$E_x\big(P_{x_n}(B_2)\,;\,B_1\big)=P_x\{(w\,;\,w_n^+\in B_2)\cap B_1\} \qquad (1.3)$$

を言えばよいが，先ずB_1，B_2として

$$B_1=\{w\,;\,x_k(w)\in A\},\qquad k\leqq n,\quad A\subset E^*$$
$$B_2=\{w\,;\,x_l(w)\in A'\},\qquad l\in T,\quad A'\subset E^*$$

の形の集合を考えると，

$$P_x\{(w\,;\,w_n^+\in B_2)\cap B_1\}=P_x\{w\,;\,w_{n+l}\in A',\ w_k\in A\}$$

$$=\sum_{\substack{\xi_k\in A\\ \xi_{n+l}\in A'}}\pi^k(x,\xi_k)\,\pi^{n+l-k}(\xi_k,\xi_{n+l})$$

$$=\sum_{\xi_k\in A,\ \xi_n\in E^*,\ \xi_{n+l}\in A'}\pi^k(x,\xi_k)\,\pi^{n-k}(\xi_k,\xi_n)\,\pi^l(\xi_n,\xi_{n+l})$$

$$=E_x\big(P_{x_n}(B_2)\,;\,B_1\big).$$

$\mathcal{B}_n$，$\mathcal{B}$が上の形のB_1，B_2で generate されることを考慮して，(1.3)が証

Sem. on Probab.
Vol.1 1959年
P1-85

明される。

我々の Markov process が (1.2) を満すことは明らかであろう。

(iii) 別な構成法

$\widehat{W}=[0,1]$, $\widehat{P}$は $[0,1]$ 上の普通の Lebesgue measure とする。$\sum_{k=1}^{m}\pi(x,k)$ を $a(x,m)$ と書くことにする。$\widehat{W}$から$E^*=\{1,2,3,\cdots,\infty\}$への random variables の sequence $x_n^{(x)}(\widetilde{\omega})$; $n\in T$, $x\in E^*$を次のように定義する。

$$x_0^{(x)}(\widetilde{\omega})\equiv x,$$

$$x_1^{(x)}(\widetilde{\omega})=\begin{cases}1, & \widetilde{\omega}\in[0,\ a(x,1))\\ \vdots & \\ m, & \widetilde{\omega}\in[a(x,m-1),\ a(x,m))\\ \vdots & \\ \infty, & \widetilde{\omega}\in[a(x,\infty),\ 1]\end{cases}$$

$$x_2^{(x)}(\widetilde{\omega})=\begin{cases}1, & \widetilde{\omega}\in\bigcup_{n=1}^{\infty}[a(x,n),\ a(x,n)+\pi(x,n+1)\,a(n+1,1))\\ \vdots & \\ m, & \widetilde{\omega}\in\bigcup_{n=1}^{\infty}[a(x,n)+\pi(x,n)\,a(n,m-1),\ a(x,n)+\pi(x,n+1)\,a(n+1,m)],\\ \vdots & \\ \infty & \widetilde{\omega}\in\bigcup_{n=1}^{\infty}[a(x,n)+\pi(x,n)a(n,\infty),\ a(x,n+1)),\end{cases}$$

以下逐次 $x_n^{(x)}(\widetilde{\omega})$ を定義して行けば,

$$\widehat{P}\{\widetilde{\omega};\ x_0^{(x)}(\widetilde{\omega})\in A_0,\cdots,x_n^{(x)}(\widetilde{\omega})\in A_n)$$

$$=\sum_{\substack{\xi_i\in A_i\\ i=0,\cdots,n}}\pi^0(x,\xi_0)\,\pi(\xi_0,\xi_1)\cdots\pi(\xi_{n-1},\xi_n)$$

が成立する。$x^{(x)}(\widetilde{\omega})=(x_i^{(x)}(\widetilde{\omega});\ i\in T)$ は1つの path をあらわす。$\mathcal{B}\ni B$に対して

$$P_x(B)=\widehat{P}(\widetilde{\omega};\ x^{(x)}(\widetilde{\omega})\in B).$$

とおけば, 求める Markov process がえられる。証明は (ii) と同じである。なおこの構成法は, 独立事象列の存在に関する伊藤, 前掲書 p.14の方法の拡張である。

stochastic matrix π^* はEへの restriction π から一意的に定まる。なぜなら, $E\ni x, y$ に対して$\pi(x,y)$ が与えられていれば, π^*の他の element は, $\pi(\infty,\infty)=1$, $\pi(\infty,y)=0$ $y\in E$, $\pi(x,\infty)$

Sem. on Probab.
Vol.1 1959年
P1-85

$= 1 - \sum_{y \in E} \pi(x, y)$　$x \in E$, から定まる。そこで E 上の Markov process は、E 上の substochastic matrix ($\pi(x,y) \geqq 0$, $x, y \in E$, $\sum_{y \in E} \pi(x,y) \leqq 1$) と identify してよい。

3. Definition 1.5　Green operator $G_\alpha(x,y)$ を次の如く定義する。

$$G_\alpha(x,y) = E_x\left\{\sum_{n \geq 0} e^{-\alpha n} \chi_{\{y\}}(x_n(w))\right\} \qquad \alpha > 0,\ ここで$$

$\chi_{\{y\}}(\cdot)$ は set $\{y\}$ の indicator function である。

これを変形すれば　$= \sum_{n \geq 0} e^{-\alpha n} \pi^n(x,y)$

$$= \sum_{n \geq 0} s^n \pi^n(x,y) \qquad 0 \leq s = e^{-\alpha} < 1.$$

$\sum_{n \geq 0} s^n \pi^n(x,y)$ を $\pi^n(x,y)$ の generating function とも言う。

$G(x,y) = E_x\left\{\sum_{n \geq 0} \chi_{\{y\}}(x_n(w))\right\}$　とおき $G(x,y)$ を Green measure という($+\infty$ の値を取ることも許す)。α を単調に 0 に近づけると、$\sum e^{-\alpha n} \chi_{\{y\}}(x_n(w))$ は positive で単調増加だから、limit と積分の順序交換が出来て

$$\lim_{\alpha \downarrow 0} G_\alpha(x,y) = E_x\left\{\sum_{n \geq 0} \chi_{\{y\}}(x_n(w))\right\} = G(x,y)$$

である。そこで $G(x,y)$ を $G_{0+}(x,y)$ と書くこともある。

Definition 1.6　$x \in E^*$ が recurrent とは

$$P_x\{w\ ;\ \sigma(\{x\}\ ;\ w_1^+) < +\infty\} = 1$$

が成り立つことである。

Theorem 1.3

(i) $x \in E^*$ が recurrent であるための必要十分条件は $G(x,x) = \infty$.

(ii) y が recurrent でなければ、$x \in E$ に対して

$$G(x,y) = P_x(\sigma(\{y\}\ ;\ w) < +\infty)\, G(y,y) \leq G(y,y) < +\infty.$$

先ず証明に先立って Dynkin の公式を導いておく。σ を任意の Markov time, f を E^* 上の bdd function とする。

$$G_\alpha f(x) \equiv E_x\left(\sum_{n \geq 0} e^{-\alpha n} f(x_n(w))\right) = \sum_{y \in E^*} f(y)\, G_\alpha(x,y) \text{ とお}$$

Sem. on Probab.
Vol.1 1959年
P1-85

$$G_\alpha f(x)=E_x\left(\sum_{n=0}^{\sigma-1} e^{-\alpha n} f(x_n(\omega))\right)+E_x\left(\sum_{n=\sigma}^{+\infty} e^{-\alpha n} f(x_n(\omega))\right)$$

$$=E_x\left(\sum_{n=0}^{\sigma-1} e^{-\alpha n} f(x_n(\omega))\right)+E_x\left(\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\alpha(\sigma+n)} f(x_{n+\sigma})\right)$$

$$=E_x\left(\sum_{n=0}^{\sigma-1} e^{-\alpha n} f(x_n(\omega))\right)+E_x\left(e^{-\alpha\sigma}\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\alpha n} f(x_n(\omega_\sigma^+))\right).$$

ところが Lemma 1.2 により σ は $\mathcal{B}_\sigma$-measurable. したがって $e^{-\alpha\sigma}$ も $\mathcal{B}_\sigma$-measurable だから Lemma 1.5 により才二項は

$$E_x\left(e^{-\alpha\sigma} E_{x_\sigma}\left(\sum_{n\geq 0} e^{-\alpha n} f(x_n)\right)\right) \text{ となる。}$$

故に $G_\alpha f(x) = E_x\left(\sum_{n=0}^{\sigma-1} e^{-\alpha n} f(x_n)\right) + E_x\left(e^{-\alpha\sigma} G_\alpha f(x_\sigma)\right)$ (1.4)

が成立する。

Proof of Theorem 1.3.

(i) $\sigma(\omega) = 1+\sigma(\{x\};\omega_1^+)$ は Lemma 1.3 によって Markov time である。(1.4) 式において，この σ と，$f(\cdot)=\chi_{\{x\}}(\cdot)$ を代入すると

$$G_\alpha(x,x) = G_\alpha \chi_{\{x\}}(x) = E_x\left(\sum_0^{\sigma-1} e^{-\alpha n}\chi_{\{x\}}(x_n)\right)+E_x\left(e^{-\alpha\sigma} G_\alpha \chi_{\{x\}}(x_\sigma)\right)$$

σ の意味より $\chi_{\{x\}}(x_n)=0$ for $1\leq n\leq \sigma-1$ だから

$$E_x\left(\sum_0^{\sigma-1} e^{-\alpha n}\chi_{\{x\}}(x_n)\right)=1$$

又 $x_\sigma = x$ だから

$$E_x\left(e^{-\alpha\sigma} G_\alpha \chi_{\{x\}}(x_\sigma)\right)=E_x\left(e^{-\alpha\sigma} G_\alpha(x,x)\right)=G_\alpha(x,x)\,E_x(e^{-\alpha\sigma}).$$

したがって $G_\alpha(x,x) = 1+G_\alpha(x,x)\,E_x(e^{-\alpha\sigma})$,

$$G_\alpha(x,x) = \frac{1}{1-E(e^{-\alpha\sigma})}$$

したがって，$G(x,x) = \lim_{\alpha\downarrow 0} G_\alpha(x,x) = \infty$ と，$\lim_{\alpha\downarrow 0} E(e^{-\alpha\sigma})=1$ は同等である. ところが

$$\lim_{\alpha\downarrow 0} e^{-\alpha\sigma} = \begin{cases} 1 & \sigma<+\infty, \\ 0 & \alpha=+\infty, \end{cases} \qquad |e^{-\alpha\sigma}|\leq 1$$

だから Lebesgue - Fatou の Theorem により

$\lim_{\alpha\downarrow 0} E_x(e^{-\alpha\sigma}) = P_x(\sigma<+\infty)$ となる. よって (i) が証明された。

(ii) (1.4) に $f(\cdot)=\chi_{\{y\}}(\cdot)$ $\sigma=\sigma(\{y\};\omega)$ を代入すれば

$$G_\alpha(x,y)=G_\alpha\chi_{\{y\}}(x)=E_x\left(\sum_{n=0}^{\sigma-1}e^{-\alpha n}\chi_{\{y\}}(x_n)+E_x(e^{-\alpha\sigma}G_\alpha\chi_{\{y\}}(x_\sigma)\right).$$

$x\neq y$ のとき $\chi_{\{y\}}(x_n)=0$ for $0\leq n\leq\sigma-1$

$=1$ $n=\sigma$ だから

$$G_\alpha(x,y)=E_x(e^{-\alpha\sigma}G_\alpha(y,y))$$
$$=G_\alpha(y,y)\,E_x(e^{-\alpha\sigma}).$$

y が recurrent でなければ $G(y,y)<+\infty$ だから

$$G(x,y)=\lim_{\alpha\downarrow 0}G_\alpha(x,y)=G(y,y)\cdot P_x(\sigma<+\infty)$$
$$\leqq G(y,y)<+\infty$$

Definition 1.7 $x,y\in E^*$ とする。$P_x(\sigma\{y\}<+\infty)>0$ のとき、x から y に accessible であるといゝ記号 $x\longrightarrow y$ で表わす。$x\longrightarrow y$, & $y\longrightarrow x$ のとき $x\longleftrightarrow y$ で表わす。

$\longrightarrow$ が transitive なこと、すなわち $x\longrightarrow y$, $y\longrightarrow z\Rightarrow x\longrightarrow z$ は容易に示される。

Theorem 1.4 $x\in E^*$ が recurrent で、$x\longrightarrow y$ ならば y も recurrent である。

Proof. (i) 先ず $\sigma_1=\sigma(\{x\};w_1^+)+1$ とおくと $P_x(\sigma_1<+\infty)=1$ ならば $P_x(\sigma_n<\infty)=1$ であることを示そう。

こゝに $\sigma_n=\sigma_1+\sigma_{n-1}(w_{\sigma_1}^+)$ $n=2,3,4,\cdots\cdots$ である。

$$P_x(\alpha_n<+\infty)=P_x(\sigma_1+\sigma_{n-1}(w_{\sigma_1}^+)<+\infty)$$
$$=P_x(\sigma_1<+\infty,\ \sigma_{n-1}(w_{\sigma_1}^+)<+\infty)$$

Lemma 1.2 により $\sigma_1<+\infty$ は $\mathcal{B}_{\sigma_1}$ に属するから Strong Markov Property により

$$=E_x(P_{x_{\sigma_1}}(\sigma_{n-1}<+\infty);\ \sigma_1<+\infty)\quad (x_{\sigma_1}=x)$$
$$=P_x(\sigma_{n-1}<+\infty)\ P_x(\sigma_1<+\infty)$$

これをくり返せば

$$P_x(\sigma_n<+\infty)=P_x(\sigma_1<+\infty)^n=1.$$

即ち $P_x(\sigma_n<+\infty)=1$ が証明された。

(ii) 次に $P_x(\sigma_y<+\infty)=1$ であることを示そう。

$x\longrightarrow y$ だから十分大きな n を取れば $P_x(\sigma_y<n)>0$. 又 $\sigma_n\geqq n$ だから

$$P_x(\sigma_y<\sigma_n)\geqq P_x(\sigma_y<n)>0.$$

今, $P_x(\sigma_y<\sigma_n)=\gamma\neq 0$ とおくと

$$k=P_x(\sigma_y<+\infty)=P_x(\sigma_y<\sigma_n)+P_x(+\infty>\sigma_y\geqq\sigma_n)\quad(1.5)$$

$\{w;\sigma_y>\sigma_n\}$ に対しては、$\sigma_y=\sigma_n+\sigma_y(w_{\sigma_n}^+)$ だから

Sem. on Probab.
Vol.1 1959年
P1-85

$$\{w;\ \sigma_y \geqq \sigma_n,\ \sigma_y < +\infty\} = \{w;\ \sigma_n < +\infty,\ \ \sigma_y(w^+_{\sigma_n}) < +\infty,\ \sigma_y \geqq \sigma_n\}$$

だから $P_x(+\infty > \sigma_y \geqq \sigma_n) = P_x(\sigma_y(w^+_{\sigma_n}) < +\infty,\ \sigma_y \geqq \sigma_n,\ \sigma_n < +\infty)$

$$= P_x(\sigma_y(w^+_{\sigma_n}) < +\infty,\ \ \sigma_y \geqq \sigma_n).$$

Lemma 1.3 により σ_n は Markov time, Lemma 1.4 により $\sigma_y \geqq \sigma_n$ は $\mathcal{B}_{\sigma_n}$ に属するから Strong Markov property により

$$= P_x(P_{x_{\sigma_n}}(\sigma_y < +\infty);\ \sigma_y \geqq \sigma_n)$$

(i) によって，P_x－ 測度 1 で $x_{\sigma_n} = x$. したがって，

$$= P_x(\sigma_y < +\infty)\, P_x(\sigma_y \geqq \sigma_n).$$

これを (1.5) に代入すれば

$$k = P_x(\sigma_y < \sigma_n) + P_x(\sigma_y < +\infty)\, P_x(\sigma_y \geqq \sigma_n)$$
$$= \gamma + k(1-\gamma)$$

これより $k = 1$ 即ち $k = P_x(\sigma_y < +\infty) = 1$ である。

(iii) 次に $P_y(\sigma_x < +\infty) = 1$ を証明しよう。

$P_x(\sigma_y < +\infty) = 1$ だから十分大きな n を取れば $P_x(\sigma_y < \sigma_n) > 0$ である。

$*\sigma_y + \sigma_x(w^+_{\sigma_y}) = \mathrm{Min}\{l;\ x_l = x,\ l \geqq \sigma_y\}$

$$P_x(\sigma_n < +\infty) = P_x(+\infty > \sigma_n > \sigma_y) + P_x(\sigma_n \leqq \sigma_y)$$

$\{w;\ \sigma_n > \sigma_y\}$ に対しては $\sigma_y + \sigma_x(w^+_{\sigma_y}) \leqq \sigma_n^{*} < +\infty$ だから

$$\{w;\ \sigma_y < \sigma_n < +\infty\} = \{w;\ \sigma_y < \sigma_n < +\infty,\ \ \sigma_x(w^+_{\sigma_y}) < +\infty\}$$

したがって $P_x(\sigma_y < \sigma_n < +\infty) = P_x(\sigma_y < \sigma_n < +\infty,\ \sigma_x(w^+_{\sigma_y}) < +\infty)$

$$= E_x(P_{x_{\sigma_y}}(\sigma_x < +\infty);\ \sigma_y < \sigma_n < +\infty)$$
$$= P_y(\sigma_x < +\infty)\cdot P_x(\sigma_n > \sigma_y)$$

故に $1 = P_x(\sigma_n < +\infty) = P_x(\sigma_n > \sigma_y)\cdot P_y(\sigma_x < +\infty) + P_x(\sigma_n \leqq \sigma_y)$

$$= P_x(\sigma_n > \sigma_y)\cdot P_y(\sigma_x < +\infty) + 1 - P_x(\sigma_n > \sigma_y)$$

$P_x(\sigma_y < \sigma_n) \neq 0$ だから $P_y(\sigma_x < +\infty) = 1$ である。

(iv) 最後に y が recurrent であることを示そう。

$$\sigma(\{y\};\ w_1^+) + 1 = \sigma' \text{ とおく。}$$

$$P_y(\sigma' < +\infty) = P_y(\sigma' < \sigma_x) + P_y(\sigma_x \leqq \sigma' < +\infty)$$

ところが $\{w;\ \sigma_x \leqq \sigma' < +\infty\} = \{w;\ \sigma' \geqq \sigma_x,\ \sigma_y(w^+_{\sigma_x}) < +\infty,\ \sigma_x < +\infty\}$

だから

$$P_y(\sigma_x \leqq \sigma' < +\infty) = P_y(\sigma' \geqq \sigma_x,\ \sigma_y(w^+_{\sigma_x}) < +\infty,\ \sigma_x < +\infty)$$
$$= P_y(\sigma' \geqq \sigma_x,\ \sigma_y(w^+_{\sigma_x}) < +\infty)$$
$$= E_y(P_{x_{\sigma_x}}(\sigma_y < +\infty);\ \sigma' \geqq \sigma_x)$$
$$= P_x(\sigma_y < +\infty)\cdot P_y(\sigma' \geqq \sigma_x)$$
$$= P_y(\sigma' \geqq \sigma_x)$$

Sem. on Probab.
Vol.1 1959年
P1-85

したがって

$$P_y(\sigma' < +\infty) = P_y(\sigma' < \sigma_x) + P_y(\sigma' \geqq \sigma_x) = 1.$$

Definition 1.8. $C \subset E^*$ が irreducible recurrent set とは, $\forall x \in C$ は recurrent, $x, y \in C$ ならば $x \longleftrightarrow y$, かつ $P_x(\sigma(C^c; w) < +\infty) = 0$ をみたしていることである。

Theorem 1.5. E^* の recurrent point a に対し, $C(a) = \{a$ を含む irreducible recurrent set$\}$ が丁度1つ存在する。

Proof. $C(a) = \{y;\ a \longrightarrow y\}$ が求めるものであることを示す。Theorem 1.4 及びその証明より, $C(a) \ni {}^\forall y$ も recurrent で $y \longrightarrow a$.

又 $C(a)$ の2つの点 y, z は $y \longleftrightarrow a$, $a \longleftrightarrow z$ であるから $y \longleftrightarrow z$. 又 $C(a)$ の或点 b について $P_b(\sigma(C^c(a); w) < +\infty) > 0$ とすると, $C^c(a) \ni {}^\exists d$ があって, $P_b(\sigma_d < +\infty) > 0$. 即ち $b \longrightarrow d$. $a \longrightarrow b$ であるから, $a \longrightarrow d$ となって $C(a)$ の定義に反する。1意性は殆んど明らか。これから次の定理は容易に導びかれる。

Theorem 1.6 $E = \bigcup_{i=1} C_i + N$ と分解できる。こゝに

C: irreducible recurrent set

N: non-recurrent point の全体

Definition 1.9 $x \in E$ が trap とは, $P_x(x_n = x,\ \text{for every } n) = 1$ が成り立つことである。

Definition 1.10 $x \in E$ が conservative on E とは $P_x(\sigma_\infty = +\infty) = 1$ のことである。

Markov process x_n が conservative であるとは, $\forall x \in E$ が conservative なことである。

Lemma 1.7 x_n が conservative であるための条件は, $\Pi\ \Pi^*$ を E の上に restrict したものが stochastic matrix になることである。

Proof. x_n が conservative ならば, $\forall x \in E$ に対し $P_x(\sigma_\infty = +\infty) = 1$, したがって $P_x(\sigma_\infty = 1) = 0$ 即ち $P_x(x_1(w) \in E) = 1$ だから

$$\sum_{y \in E} \Pi(x, y) = 1 \quad \text{である。}$$

逆に $x \in E$ に対して $\sum_{y \in E} \Pi(x, y) = 1$ ならば $\sum_{y \in E} \Pi^n(x, y) = 1$ が成り立つ。したがって

$$P_x(w; x_1(w) \in E) = 1, \cdots, P_x(w; x_n(w) \in E) = 1,$$

故に $P_x(w; x_1(w) = \infty) = 0, \cdots, P_x(w; x_n(w) = \infty) = 0,$

$$P_x(\sigma_\infty = 1) = 0, \cdots\cdots, P_x(w; \sigma_\infty = n) = 0,$$

Sem. on Probab.
Vol.1 1959年
P1-85

$P_x(\sigma_\infty = 1, 2, \cdots, n; \cdots, < \infty) = P_x(\sigma_\infty < +\infty) = 0$

$\therefore \quad P_x(\sigma_\infty' = +\infty) = 1$.

§2. x_n − harmonic function.

4. ∞ では 0, $x \in E$ では有限な値を取るような(必ずしも有界でない)実数値函数の全体を $\mathcal{R}$ であらわす。

Definition 2·1 (a) $x \in E$ が trap でないとき, $u \in \mathcal{R}$ に対し

$$u(x) = E_x\{u(x_{\sigma_{\{x\}^c}})\}$$

が成立するとき, u は x_n-harmonic at x という。

(b) $x \in E$ が trap のとき, $u \in \mathcal{R}$ は x_n − harmonic at x という。

(c) $u \in \mathcal{R}$ がすべての $x \in E$ で x_n − harmonic であるとき, 単に x_n − harmonic であるという。

Theorem 2·1 (o) $u \in \mathcal{R}$ が x_n − harmonic at x ならば

$$u(x) = E_x(u(x_1)) \qquad (2\cdot 1)$$

が成立する。

(i) $\mathcal{R} \ni u \geqq 0$ が x_n − harmonic at x であるための必要十分条件は, (2·1) が成り立つことである。

(ii) $u \in \mathcal{R}$ が2つの non-negative x_n − harmonic functions u^+, u^- によって $u = u^+ - u^-$ と表わせるための必要十分条件は, u が x_n − harmonic でかつ

$$u_{+\infty}(x) = \lim_{n\to\infty} E_x\{|u(x_n)|\}$$

が $\mathcal{R}$ に属することである。

(iii) $x \longrightarrow y$ のとき $u_{+\infty}(x) < +\infty$ ならば $u_{+\infty}(y) < +\infty$ である。

この Theorem の証明の前に $\sigma(\{x\}^c)$ の分布を調べておこう。

Lemma 2·1 $\sigma = \sigma(\{x\}^c)$ は x が trap でなければ $E_x(\sigma) = \frac{1}{P(x)}$ なる幾何分布にしたがう。こゝで $P(x) = 1 - \pi(x, x)$ のことである。

Proof. $q(x) = \pi(x, x)$ とおく。

$$\begin{aligned} P_x(\sigma > n) &= P_x(\sigma > 1, \sigma > n) \\ &= P_x(\sigma > 1, \sigma(w_1^+) + 1 > n) \\ &= E_x(P_{x_1}(\sigma(w) > n-1); \sigma > 1). \end{aligned}$$

ところが $\{w; \sigma > 1\}$ では $x_1(w) = x$ だから

Sem. on Probab.
Vol.1 1959年
P1-85

$$P_x(\sigma > n) = P_x(\sigma > n-1)\cdot P_x(\sigma > 1)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$= P_x(\sigma > 1)^n = \pi(x, x)^n = q(x)^n.$$

ところが

$$P_x(\sigma = n) = P_x\{\sigma > n-1,\ \sigma \leq n\}$$
$$= P_x(\sigma > n-1) - P_x(\sigma > n)$$
$$= q(x)^{n-1} - q(x)^n = p(x)\cdot q(x)^{n-1}$$

xは$trap$でないから $q(x) \neq 1$, したがって $p(x) \neq 0$であり, σの分布は geometric distributionである. 故に

$$E_x(\sigma) = \frac{1}{p(x)}.$$

Theorem 2・1 の Proof.

(0)の proof. 先ず x: trap のとき

$$E_x\{u(x_1)\} = E_x\{u(x_1) : x_1(\omega) = x\}$$
$$= u(x)\cdot P_x(x_1(\omega) = x) = u(x)$$

x: trap でないとき $\sigma_{\{x\}^c} = \sigma$ と書くことにする.

$\{\omega : \sigma(\omega) \geq 1\}$に対しては $\sigma(\omega) = \sigma(\omega_1^+) + 1$ と書けるから

$$x_{\sigma(\omega)}(\omega) = x_{\sigma(\omega_1^+)+1}(\omega) = x_{\sigma(\omega_1^+)}(\omega_1^+)$$

一方 $u(x)$がx_n-harmonic at xとすれば, $\forall y \in E$ に対して

$$E_y(u(x_\sigma)) = u(y)$$

が成り立つ. なぜなら, $y = x$のときx_n-harmonic at x の定義そのものである. $y \neq x$とすれば $P_y(\sigma \equiv 0) = 1$だから

$$E_y(u(x_\sigma)) = E_y(u(x_0)) = u(y)$$

だからである. 故に

$$E_y(|u(x_\sigma)|) \geq |u(y)|$$

が成り立つ. したがって

$$+\infty > E_x\{|u(x_\sigma)|\} = E_x(|u(x_{\sigma(\omega_1^+)}(\omega_1^+))|) \underset{(Lemma\ 1.5)}{=} E_x\{E_{x_1}(|u(x_\sigma)|)\} \geq E_x(|u(x_1)|)$$

即ち $u(x_1)$は P_x-measure に関して integrable であることがわかった.

したがって

$$u(x) = E_x(u(x_\sigma)) = E_x(u(x_{\sigma(\omega_1^+)}(\omega_1^+)))$$
$$= E_x(E_{x_1}(u(x_\sigma))) = E_x(u(x_1))$$

(i) の proof. 必要条件は (0) に含まれているから, 十分条件の方を証明する. 又xは trap でないとしてよい. $u \geq 0$ だから先ず $E_x(u(x_\sigma))$ が定義出来て

Sem. on Probab.
Vol.1 1959年
P1-85

$$E_x\{u(x_\sigma)\}=\sum_{n=1}^{\infty} E_x\{u(x_n)\ ;\ \sigma=n\} \tag{2.2}$$

$\{\sigma=n\}=\{\sigma>n-1\}\cap\{x_n\in\{x\}^c\}$ だから set A の indicator function を χ_A と書けば

$$\chi_n(\sigma)=\chi_{[n,+\infty]}(\sigma)\,\chi_{\{x\}^c}(x_n)$$

となるが，$\chi_{[n,+\infty]}(\sigma)$ は $\mathcal{B}_{n-1}$ − measurable だから

$$\begin{aligned}E_x(u(x_n):\sigma=n)&=E_x(u(x_n)\chi_n(\sigma))\\&=E_x(\chi_{[n,+\infty]}(\sigma)\ u(x_1(w_{n-1}^+))\cdot\chi_{\{x\}^c}(x_1(w_{n-1}^+)))\\&=E_x(\chi_{[n,+\infty]}(\sigma)\cdot E_{x_{n-1}}(u(x_1)\chi_{\{x\}^c}(x_1)))\\&=E_x(E_{x_{n-1}}(u(x_1)\cdot\chi_{\{x\}^c}(x_1))\ ;\ \sigma>n-1)\\&=E_x(u(x_1)\cdot\chi_{\{x\}^c}(x_1))\cdot P_x(\sigma>n-1)\\&=\{E_x(u(x_1))-E_x(u(x_1);x=x_1)\}P_x(\sigma>n-1).\end{aligned}$$

仮定より $E_x(u(x_1))=u(x)$,　　$E_x(u(x_1)\ ;\ x=x_1)=u(x)\cdot P_x(x=x_1)$
$$=u(x)\cdot q(x)$$

だから

$$\begin{aligned}E_x(u(x_n);\sigma=n)&=(u(x)-u(x)\cdot q(x))\cdot P_x(\sigma>n-1)\\&=u(x)\cdot p(x)\cdot P_x(\sigma>n-1).\end{aligned}$$

これを (2·2) に代入すれば

$$E_x(u(x_\sigma))=u(x)\cdot p(x)\cdot\sum_{n=1}^{\infty}P_x(\sigma>n-1).$$

ところが $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}P_x(\sigma>n-1)=E_x(\sigma)=\frac{1}{p(x)}$ 　だから

$$E_x(u(x_\sigma))=u(x)\cdot p(x)\cdot\frac{1}{p(x)}=u(x).$$

(ii) の proof. 先ず $u(x)$ が x_n − harmonic であれば $u_{+\infty}(x)=\lim_{n\to\infty}E_x|u(x_n)|$ が定義出来ることを示そう。(0) によって，$u(y)=E_y\{u(x_1)\}$ $\forall y\in E^*$ だから $|u(y)|\leqq E_y(|u(x_1)|)$. したがって $|u(x_1)|\leqq E_{x_1}(|u(x_1)|)$,
故に　$E_x(|u(x_1)|)\leqq E_x(E_{x_1}|u(x_1)|)=E_x(E_x(|u(x_2)|/\mathcal{B}_1))$
$$\leqq E_x(|u(x_2)|),$$
同様にすれば　　$E_x(|u(x_n)|)\leqq E_x(|u(x_{n+1})|)$.
したがって $+\infty$ も含めば $\lim_{n\to\infty}E_x|u(x_n)|=u_{+\infty}(x)$ が存在する。
必要条件の proof.　$u^+\geq 0$.　$u^-\geq 0$ が x_n − harmonic で，$u=u^+-u^-$ と表わされたとすれば，u が x_n − harmonic であることは明らか。
$|u(x)|\leq u^++u^-$ だから
$$E_x\{|u(x_n)|\}\leqq E_x(u^+(x_n))+E_x(u^-(x_n))=u^+(x)+u^-(x)$$

Sem. on Probab.
Vol.1 1959年
P1-85

故に $u_{+\infty}(x)=\lim_{n\to\infty} E_x\{|u(x_n)|\}\leqq u^+(x)+u^-(x)<\infty$

$\therefore 0\leqq u_{+\infty}(\infty)\leqq u^+(\infty)+u^-(\infty)=0$

したがって $u_{+\infty}(x)\in \mathcal{R}$

十分条件の proof.

$$f^+(x)=\begin{cases} u(x) & ; \quad u(x)\geq 0 \\ 0 & ; \quad u(x)<0 \end{cases}$$

$$f^-(x)=\begin{cases} -u(x) & ; \quad u(x)<0 \\ 0 & ; \quad u(x)\geq 0 \end{cases}$$

とおけば，$u=f^+-f^-$ で $|u(x)|\geq f^+(x), f^-(x)$, $u(x)\leq f^+(x), f^-(x)\geq -u(x)$ である。この時

$$f^+(x)\leqq E_x(f^+(x_1)) \qquad (2\cdot 3)$$

が成立する。なぜなら

$u(x)<0$，即ち $f^+(x)=0$ なる x では $f^+(x)=0\leqq E_x(f^+(x_1))$

$u(x)\geq 0$，即ち $u(x)=f^+(x)$ なる x では $f^+(x)=u(x)=E_x(u(x_1))\leq E_x(f^+(x_1))$

だからすべての x について $(2\cdot 3)$ が成り立つ。

$(2\cdot 3)$ より $E_x(f^+(x_n))\leq E_x(f^+(x_{n+1}))$

ところが $f^+(x_{n+1})\leq |u(x_{n+1})|$ だから

$$E_x(f^+(x_n))\leq E_x\{|u(x_{n+1})|\}\leq u_{+\infty}(x)<\infty \qquad (\text{仮定より})$$

したがって $E_x(f^+(x_n))$ は n に関して単調増加であり，かつ有界だから

$$\lim_{n\to\infty} E_x(f^+(x_n))=u^+(x)$$

とおけば $u^+(x)$ は $\mathcal{R}$ の函数である。

このようにして作った $u^+(x)$ は非負の x_n-harmonic function である。なぜなら，$u^+(x)$ は作り方より non-negative であり，

$$E_x(u^+(x_1))=E_x\{\lim_{n\to\infty} E_{x_1}(f^+(x_n))\}=E_x(\lim_{n\to\infty} E_x(f^+(x_{n+1})/\mathcal{B}_1))$$

$$=\lim_{n\to\infty} E_x(E_x(f^+(x_{n+1})/\mathcal{B}_1))$$

$$=\lim_{n\to\infty} E_x(f^+(x_{n+1}))$$

$$=u^+(x)$$

であるから (i) より $u^+(x)$ は x_n-harmonic である。同様に $E_x(f^-(x_n))$ も n について $u^-(x)=\lim_{n\to\infty} E_x(f^-(x_n))$ も非負の x_n-harmonic function であることがわかる。一方

$$u(x)=E_x(u(x_n))=E_x(f^+(x_n))-E_x(f^-(x_n))$$

Sem. on Probab.
Vol.1 1959年
P1-85

だから

$$u(x)=\lim_{n\to\infty} E_x(u(x_n)) = u^+(x)-u^-(x)$$

(iii) の proof. $x\longrightarrow y$ で $u_{+\infty}(y)=\infty$ ならば $u_{+\infty}(x)=\infty$ を証明すればよい。σ_y を y への passage time とすれば，$x\longrightarrow y$ だから適当な m が存在して $P_x(x_m=y)\geqq P_x(\sigma_y=m)>0$

である．故に

$$\begin{aligned} u_{+\infty}(x) &= \lim_{n\to\infty} E_x(|u(x_n)|)=\lim_{n\to\infty} E_x(|u(x_{n+m})|), \\ &= \lim_{n\to\infty} E_x\{E_{x_m}(|u(x_n)|\} \\ &= E_x\{\lim_{n\to\infty} E_{x_m}(|u(x_n)|)\} \\ &= E_x(u_{+\infty}(x_m)) \\ &= E_x(u_{+\infty}(x_m);x_m=y)+E_x(u_{+\infty}(x_m);x_m\neq y) \\ &\geqq E_x(u_{+\infty}(y);x_m=y) \\ &= u_{+\infty}(y)\cdot P_x(x_m=y). \end{aligned}$$

仮定により $u_{+\infty}(y)=\infty$ だから $u_{+\infty}(x)=\infty$ である．

Definition 2·2 $u\in\mathcal{R}$ が $x\in E$ で

$$E_x(u(x_{\sigma_{\{x\}^c}}))\leqq u(x)$$

を満すとき，$u(x)$ は x_n-superharmonic at x であるという．

$$E_x(u(x_{\sigma_{\{x\}^c}}))<u(x)$$

を満すとき，$u(x)$ は strictly x_n-super harmonic at x という．

又 $$E_x(u(x_{\sigma_{\{x\}^c}}))\geqq u(x)$$

のとき，x_n-sub harmonic at x であるといい，

$$E_x(u(x_{\sigma_{\{x\}^c}}))>u(x)$$

のとき，strictly x_n-sub harmonic at x という．

すべての点 $x\in E$ において x_n-super harmonic (x_n-sub harmonic) な函数を x_n-super harmonic (x_n-sub harmonic) function という。

Theorem 2·2

(i) $$u(x)=P_x(\sigma_y<\infty) \tag{2·3}$$

は $x\neq y$ のとき x_n-harmonic at x である．

(ii) y が recurrent のとき，(2·3) は $x=y$ においても x_n-harmonic であり，y が recurrent でないときは，$x=y$ で，strictly x_n-super harmonic である．

Sem. on Probab.
Vol.1 1959年
P1-85

Proof. $\sigma_{\{x\}^c} = \sigma_1,\ \sigma_y = \sigma_2$ とおく。

(i) $x \neq y$ とする。x が trap のとき明かだから，x は trap でないとする
すべての $w \in W$ に対して $\sigma_1 \leq \sigma_2$ だから
$\sigma_2 = \sigma_1 + \sigma_2\ (w^+_{\sigma_1})$ と書ける。故に

$$P_x\ (\sigma_2 < +\infty) = P_x\ (\sigma_2\ (w^+_{\sigma_1}) < +\infty,\ \sigma_1 < +\infty)$$
$$= E_x\ (P_{x_{\sigma_1}}\ (\sigma_2 < +\infty)\ ;\ \sigma_1 < +\infty)$$

x が trap でないから　$q(x) = P_x\ (\sigma_1 > 1) < 1$
故に　$P_x (\sigma_1 > n) = q(x)^n$ だから

$$P_x\ (\sigma_1 \leq n) = 1 - q(x)^n \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$$

故に　$P_x\ (\sigma_1 < +\infty) = 1$
したがって　$P_x (\sigma_2 < +\infty) = E_x\ (P_{x_{\sigma_1}}\ (\sigma_2 < +\infty))$.

(ii) の proof. trap のときは明らかだから trap でないとする。
$x = y$ のとき $P_x\ (\sigma_2 < +\infty) = 1$ だから　$(x = y \Rightarrow \sigma_2 = 0)$

$$\left.\begin{array}{l} y:\ \text{recurrent} \Leftrightarrow E_x\ (P_{x_{\sigma_1}} (\sigma_2 < \infty)) = 1 \\ y:\ \text{non-recurrent} \Leftrightarrow E_x (P_{x_{\sigma_1}} (\sigma_2 < \infty)) < 1 \end{array}\right\} \tag{2·4}$$

を証明すればよい。ところが

$$P_x\ (\sigma_1 + \sigma_2\ (w^+_{\sigma_1}) < +\infty) = P_x\ (\sigma_1 < \infty,\ \sigma_2 (w^+_{\sigma_1}) < \infty)$$
$$= P_x\ (\sigma_2\ (w^+_{\sigma_1}) < \infty)$$
$$= E_x\ (P_{x_{\sigma_1}}\ (\sigma_2 < \infty))$$

だから，次の Lemma により (2.4) が成り立つ。

<u>Lemma 2. 2.</u>　x が trap でないとき
x が recurrent であるための必要十分条件は

$$P_x\ (\sigma_1 + \sigma_2\ (w^+_{\sigma_1}) < \infty\ ) = 1 \tag{2.5}$$

である。但し $\sigma_1 = \sigma_{\{x\}^c}$，$\sigma_2 = \sigma_x$ とする。

Proof. $\sigma_3\ (w) = \sigma_1\ (w) + \sigma_2\ (w^+_{\sigma_1})$ は Markov time で

$$G_\alpha\ (x, x) = E_x \Big(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\alpha n} \chi_{\{x\}}\ (x_n)\Big)$$
$$= E_x \Big(\sum_{0}^{\sigma_3 - 1} e^{-\alpha n} \chi_{\{x\}}\ (x_n)\Big) + E_x\ (e^{-\alpha\sigma_3} G_\alpha \chi_{\{x\}}\ (x_{\sigma_3})).$$

ところが　$\chi_{\{x\}}\ (x_n (w)) = \begin{cases} 1 & n < \sigma_1 \\ 0 & \sigma_1 \leq n \leq \sigma_3 - 1 \end{cases}$

$$x_{\sigma_3} = x$$

だから　$G_\alpha (x, x) = E_x \Big(\sum_{0}^{\sigma_1 - 1} e^{-\alpha n}\Big) + G_\alpha (x, x) E_x\ (e^{-\alpha\sigma_3})$.

Sem. on Probab.
Vol.1 1959年
P1-85

故に $\{1-E_x(e^{-\alpha\sigma_3})\}G_\alpha(x,x)=E_x\left(\sum_0^{\sigma_1-1}e^{-\alpha n}\right)$.

故に $$\frac{E_x(\sigma_1)}{1-E_x(e^{-\alpha\sigma_3})}\geqq G_\alpha(x,x)=\frac{E_x\left(\sum_0^{\sigma_1-1}e^{-\alpha n}\right)}{1-E_x(e^{-\alpha\sigma_3})}\geqq\frac{1}{1-E_x(e^{-\alpha\sigma_3})}$$

x が recurrent であれば $\lim_{\alpha\downarrow 0}G_\alpha(x,x)=\infty$

したがって

$$\lim_{\alpha\downarrow 0}\frac{E_x(\sigma_1)}{1-E_x(e^{-\alpha\sigma_3})}=\infty$$ ところが x が trap でないから $E_x(\sigma_1)<\infty$.

故に $\lim_{\alpha\downarrow 0}E_x(e^{-\alpha\sigma_3})=P_x(\sigma_3<\infty)=1$

逆に $P_x(\sigma_3<\infty)=1$ ならば

$$\lim_{\alpha\downarrow 0}G_\alpha(x,x)\geq\lim_{\alpha\downarrow 0}\frac{1}{1-E_x(e^{-\alpha\sigma_3})}=\infty.$$

よって x は recurrent point である。

Remark 1. Theorem 2.2 によって $P_x(\sigma_y<+\infty)$ (x から y への hitting probability という)は x の函数として非負の X_n − superharmonic function であることがわかった。

2. 連続な time parameter をもった Markov process について, recurrent を論ずる時, §1. のような定義は出来ない。その時は(2.5)を定義に取る。これは $\sigma_3(\omega)$ が first recurrence time をあらわすことから考えて自然である。state space が一般の時は, 更に若干の変更を要するが, Green measureとの間に略、同様の関係が成り立つ。詳しくは [13] を参照されたい。

§3. Martin 境界

5. 今后常に次の3つの条件を仮定する。

仮定

(A.1) E のすべての点 x は recurrent でない。

(A.2) E の点 C が存在して, E の任意の点 y が C から accesible である。
即ち任意の $y\in E$ に対して
$$P_c(\sigma_y<+\infty)>0.$$

(A.3) すべての $x\in E$ に対して, E の有限集合 F_x が存在して

Sem. on Probab.
Vol.1 1959年
P1-85

$$P_x(w;\ x_{\sigma_{\{x\}^c}} \in F_x \cup \infty) = 1 .$$

Definition 3·1. (A.2) の点 c を center という。

勿論，一般に center は唯一つとは限らない。

(A.1)(A.2) は $0 < G(c,y) < \infty$, $\forall y \in E$ と同値である。

なぜなら，Theorem 1.3 (iii) より

$$G(c,y) = P_c(\sigma_y < +\infty) G(y,y). \tag{3·1}$$

(A.1) より $G(y,y) < \infty$ だから $G(c,y) < \infty$.

(A.2) より $P_c(\sigma_y < +\infty) > 0$. 又 $G(y,y) > 0$ だから

$G(c,y) > 0$ であり結局

$$0 < G(c,y) < +\infty$$

である。

逆に $G(c,y) > 0$ から $P_c(\sigma_y < +\infty) > 0$. したがって (A.2) が出る。

$G(c,y) < \infty$ と (A.2) から $G(y,y) < \infty$. したがって (A.1) が出る。

今

$$K(c;x,y) \equiv \frac{G(x,y)}{G(c,y)} \underset{((3.1)\text{ 式より})}{\equiv} \frac{P_x(\sigma_y < +\infty)}{P_c(\sigma_y < +\infty)}$$

という函数を考える。これを x の函数と見れば，Theorem 2·2 より $x \neq y$ のときは x_n-harmonic，$x = y$ のときは strictly x_n-superharmonic である。次に x を固定すると $K(c;x,y)$ は y に関して一様有界であることを示す。

なぜなら，$\sigma_y \leqq \sigma_x + \sigma_y(w^+_{\sigma_x})$ であるから

$$\begin{aligned} P_c(\sigma_y < \infty) &\geqq P_c(\sigma_x + \sigma_y(w^+_{\sigma_x}) < \infty) \\ &= E_c(P_{x_{\sigma_x}}(\sigma_y < \infty);\ \sigma_x < \infty) \\ &= P_c(\sigma_x < \infty)\, P_x(\sigma_y < \infty). \end{aligned}$$

したがって

$$K(c;x,y) = \frac{P_x(\sigma_y < \infty)}{P_c(\sigma_y < \infty)} \leqq \frac{P_x(\sigma_y < \infty)}{P_c(\sigma_x < \infty) P_x(\sigma_y < \infty)} = \frac{1}{P_c(\sigma_x < \infty)}$$

だから $K(c;x,y) \leqq \dfrac{1}{P_c(\sigma_x < \infty)}$

Remark. 特に必要でない限り，$K(c;x,y)$ を単に ~~$K(x,y)$~~ と書く。

Definition 3·2. $\{y_n\}$ を E の infinite sequence とする（同じ点が 2 度以上あらわれてもよい）。$K(x, y_n)$ がある x_n-harmonic function $K(x, \{y_n\})$ に収束するとき $\{y_n\}$ を fundamental sequence という。

Lemma 3·1.

Sem. on Probab.
Vol.1 1959年
P1-85

(i) すべての fundamental sequence は E に limit point を持たない.

(ii) E に limit point を持たないどんな infinite sequence も少くとも一つの fundamental sequence を含む.

Proof. (i). もし fundamental sequence $\{y_n\}$ が limit point y_∞ を E に持つとすれば, 適当な部分列が存在して $y_{n(1)}=y_{n(2)}=\cdots=y_\infty$ である. ところが仮定によって $K(x,\{y_n\})=\lim_{n\to\infty} K(x,y_n)$ が存在するから, 実は $K(x,\{y_n\})=K(x,y_\infty)$ でなければならない. しかるに $K(x,y_\infty)$ は $x=y_\infty$ において, strictly x_n-superharmonic であるから, $K(x,\{y_n\})$ が x_n-harmonic であるとの仮定に反する.

(ii) $K(x,y_n)$ が y_n に関して有界であるから, 対角線論法によって, すべての x に対して $K(x,\{y_{n(i)}\})=\lim_{i\to\infty} K(x,y_{n(i)})$ が存在するような部分列 $y_{n(i)}$ が存在する. $y_{n(i)}$, $i=1,2,\cdots$ が fundamental sequence であることを示そう.

今 x を任意に fix すると, y_n の仮定から $y_{n(i)}$ も E に limit point をもたないから $N(x)$ が存在して $i>N(x)$ なる限り $y_{n(i)}\neq x$ である. したがって, このような i については

$$K(x,y_{n(i)})=E_x(K(x_{\sigma_{\{x\}^c}},y_{n(i)}))$$

$$=\sum_{z\in F_x} K(z,y_{n(i)})\,P_x(x_{\sigma_{\{x\}^c}}=z).$$

こゝで $i\to\infty$ とすると, 右辺の和は仮定 (A.3) より有限和であるから limit の交換が出来て, $K(x,\{y_{n(i)}\})$ が x_n-harmonic at x なることがわかる. x は任意であったから $K(x,\{y_{n(i)}\})$ は x_n-harmonic. 即ち $y_{n(i)}$ は fundamental sequence である.

Remark.

上の証明から分るように, x_n-harmonic at x なる函数列の極限函数も x_n-harmonic at x である.

$\{y_n\}$, $\{z_n\}$ を fundamental sequence とする.

$$K(c;x,\{y_n\})=K(c;x,\{z_n\}) \qquad \text{for all } x\in E$$

のとき, $\{y_n\}\sim\{z_n\}$ で表わせば, この関係が equivalence relation をみたす. したがって fundamental sequence を類別することが出来る. b によってある fundamental sequence の類を表わすことにし, b の全体を M と書く. $\bar{E}=E\cup M$ に次のようにして, 距離を入れることが出来る. 任意の $\xi,\eta\in\bar{E}$ に対し

Sem. on Probab.
Vol.1 1959年
P1-85

$$\rho_{c,m}(\xi,\eta)=\sum_{x\in E}\frac{|K(c;x,\xi)-K(c;x,\eta)|}{1+|K(c;x,\xi)-K(c,x,\eta)|}m(x)$$

但し $m(x)$ は，すべての $x\in E$ に対して $m(x)>0$ でかつ $\sum_{x\in E}m(x)=1$ とする。E は一応 c と m に関係するから $E(c;m)$ で表わすことにする。

先ず $\rho_{c,m}(\xi,\eta)$ が距離の公理を満すことを示そう。$\rho_{c,m}$ を簡単に ρ と書くことにする。

(i) $\rho(\xi,\eta)\geqq 0$ は定義より明らか。今 $\rho(\xi,\eta)=0$ とする。すると $\rho(\xi,\eta)$ の定義より，すべての $x\in E$ に対して $K(x,\xi)\equiv K(x,\eta)$。もし $\xi\in M$ ならば $K(x,\xi)$ は x の函数として x_n-harmonic だから η も M の点でなければならない。したがって類別の定義より $\xi=\eta$ である。もし $\xi\in E$ であれば $K(x,\xi)$ は x の函数として x_n-harmonic でないから η も E の点でなければならない。もし $\xi\neq\eta$ とすれば

$$K(\xi,\xi)>E_\xi(K(x_{\sigma_{\{\xi\}^c}},\xi))=E_\xi(K(x_{\sigma_{\{\xi\}^c}},\eta))$$
$$=K(\xi,\eta)$$

となって $K(x,\xi)\equiv K(x,\eta)$ に反する。

即ちいずれの場合でも $\rho(\xi,\eta)=0$ から $\xi=\eta$ が得られる。

(ii) $\rho(\xi,\eta)=\rho(\eta,\xi)$ は定義より明らか。

(iii) $\rho(\xi,\zeta)\leqq\rho(\xi,\eta)+\rho(\eta,\zeta)$.

一般に $X\geq 0$, $Y\geq 0$, $Z\geq 0$, $X\leq Y+Z$ のとき

$$\frac{X}{1+X}\leqq\frac{Y}{1+Y}+\frac{Z}{1+Z}$$

がなりたつから

$$\frac{|K(c;x,\xi)-K(c;x,\zeta)|}{1+|K(c;x,\xi)-K(c;x,\zeta)|}\leq\frac{|K(c;x,\xi)-K(c;x,\eta)|}{1+|K(c;x,\xi)-K(c;x,\eta)|}$$
$$+\frac{|K(c;x,\eta)-K(c;x,\zeta)|}{1+|K(c;x,\eta)-K(c;x,\zeta)|}$$

である。両辺に $m(x)$ をかけ $x\in E$ について加えれば

$$\rho(\xi,\zeta)\leqq\rho(\xi,\eta)+\rho(\eta,\zeta).$$

<u>Lemma 3.2</u> $\rho_{c,m}(\xi_n,\xi)\longrightarrow 0$ と $K(c;x,\xi_n)\longrightarrow K(c;x,\xi)$ for all $x\in E$ とは同値である。

Proof. $\rho(\xi_n,\xi)\longrightarrow 0$ であれば

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{x\in E}\frac{|K(c;x,\xi_n)-K(c;x,\xi)|}{1+|K(c;x,\xi_n)-K(c;x,\xi)|}m(x)=0$$

ところが n の如何にかゝわらず

Sem. on Probab.
Vol.1 1959年
P1-85

$$\frac{|K(c;x,\xi_n)-K(c;x,\xi)|}{1+|K(c;x,\xi_n)-K(c,x,\xi)|}\leqq 1 \qquad for\ all\ x\in E$$

であるから Lebesgue-Fatou の Theorem により

$$\sum_{x\in E}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{|K(c;x,\xi_n)-K(c;x,\xi)|}{1+|K(c;x,\xi_n)-K(c;x,\xi)|}\right)m(x)=0$$

$m(x)$ はすべての $x\in E$ に対して $m(x)>0$ だから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|K(c;x,\xi_n)-K(c;x,\xi)|}{1+|K(c;x,\xi_n)-K(c;x,\xi)|}=0 \qquad for\ all\ x\in E$$

即ち $\lim_{n\to\infty} K(c;x,\xi_n)=K(c;x,\xi)$ for all $x\in E$

逆に $K(c;x,\xi_n)\longrightarrow K(c;x,\xi)$ のときも今の証明の逆をたどって行けば $\rho(\xi_n,\xi)\longrightarrow 0$ となることがわかる。

Theorem 3.1

(i) $\bar{E}(c;m)$ は topological space として，c にも m にも関係しない。

(ii) $\bar{E}$ は separable compact Hausdorff space である。

(iii) E は $\bar{E}$ の open set であり，その relative topology は discrete である。

(iv) M は ρ-topology による E の boundary である。

Remark. (i) によって，今后 $\bar{E}(c;m)$ を単に $\bar{E}$ であらわす。又 c と m は fix して考えるから，$\rho_{c,m}$ も単に ρ で書くことにする。

Definition 3.3 M を x_n-process によって導入された Martin boundary という。

Proof of (i) c' を c と異なる任意の center とすれば，すべての $y\in E$ に対して $P_{c'}(\sigma_y<\infty)>0$ だから

$$K(c;x,y)=\frac{P_x(\sigma_y<\infty)}{P_c(\sigma_y<\infty)}=\frac{P_{c'}(\sigma_y<\infty)P_x(\sigma_y<\infty)}{P_c(\sigma_y<\infty)P_{c'}(\sigma_y<\infty)}$$
$$=K(c;c',y)K(c';x,y)$$

$\{y\}$ を center c に関する fundamental sequence とすれば

$$K(c;x,y_n)=K(c;c',y_n)K(c';x,y_n) \qquad となる。$$

一方

$$K(c;c',y_n)=\frac{P_{c'}(\sigma_{y_n}<\infty)}{P_c(\sigma_{y_n}<\infty)}\geqq\frac{P_{c'}(\sigma_{y_n}(w^+_{\sigma_c})<\infty,\sigma_c<\infty)}{P_c(\sigma_{y_n}<\infty)}$$
$$=\frac{P_c(\sigma_{y_n}<\infty)P_{c'}(\sigma_c<\infty)}{P_c(\sigma_{y_n}<\infty)}$$
$$=P_{c'}(\sigma_c<\infty)>0 \qquad (y_n に無関係)$$

Sem. on Probab.
Vol.1 1959年
P1-85

したがって

$$\lim_{n\to\infty} K(c';x,y_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{K(c;x,y_n)}{K(c;c',y_n)}=\frac{K(c;x,\{y_n\})}{K(c;c',\{y_n\})} \qquad (3\cdot2)$$

となり，$\{y_n\}$ は c' に関しても fundamental sequence になっている。
また，$\{y_n\}$ と $\{z_n\}$ が c に関して同じ class に属しておれば，c' に関しても同じ class に属していることも (3·2) より容易にわかる。

逆に，c' に関する fundamental sequence は c に関しても fundamental sequence になるから，$\bar{E}(c)$ と $\bar{E}(c')$ は集合として一致する。更にすべての点で正の mass をもつような任意の probability measures, m と m' に対して $\bar{E}(c,m)$ と $\bar{E}(c',m')$ が topological に一致することをいうには $\rho_{c,m}(\xi_n,\xi)\longrightarrow 0$, と $\rho_{c',m'}(\xi_n,\xi)\longrightarrow 0$ が equivalent なことを言えばよい。

$\rho_{c,m}(\xi_n,\xi)\longrightarrow 0$ とすれば，Lemma 3·2 によって

$$K(c;x,\xi_n)\longrightarrow K(c;x,\xi).$$

したがって (3·2) 式より

$$K(c';x,\xi_n)\longrightarrow K(c';x,\xi)$$

再び Lemma 3·2 より

$$\rho_{c',m'}(\xi_n,\xi)\longrightarrow 0.$$

逆も全く同様である。

Proof of (ii), (iii), (iv). 数段階に分けて証明する。

(1.) $\bar{E}$ は complete である。

$\{\xi_n\}$ が $\bar{E}$ の element で $\rho(\xi_n,\xi_m)\longrightarrow 0$ であれば $\xi\in\bar{E}$ が存在して $\rho(\xi_n,\xi)\longrightarrow 0$ を証明すればよい。

任意の ξ_n に対して $\rho(\xi_n,\xi_n')<\frac{1}{n}$ をみたすような E の点 ξ_n' を取る (Lemma 3·2 による)。

(a) $\{\xi_n'\}$ が元の discrete topology に関して E の内部に limit point ξ を持つとすれば適当な部分列 $n(i)$ が存在して $\xi=\xi'_{n(i)}$ となる　従って

$$\rho(\xi,\xi_{n(i)})\leqq\rho(\xi,\xi'_{n(i)})+\rho(\xi'_{n(i)},\xi_{n(i)})<\frac{1}{n(i)}\longrightarrow 0 \qquad (i\to\infty).$$

故に $\rho(\xi,\xi_n)\leqq\rho(\xi,\xi_{n(i)})+\rho(\xi_{n(i)},\xi_n)\longrightarrow 0$

即ち ξ が ρ- topology に関する $\{\xi_n\}$ の limit point となっている。

(b) $\{\xi_n'\}$ が E の discrete topology に関して limit point を持たないとすれば，Lemma 3·1 により $\{\xi_n'\}$ は fundamental sequence $\{\xi'_{n(i)}\}$ を含む。その fundamental sequence に対応する M の点を ξ とすれば

Sem. on Probab.
Vol.1 1959年
P1-85

$$\rho(\xi, \xi_{n(i)}) \leqq \rho(\xi, \xi'_{n(i)}) + \rho(\xi'_{n(i)}, \xi_{n(i)}) \longrightarrow 0.$$

故に $\rho(\xi, \xi_n) \leqq \rho(\xi, \xi_{n(i)}) + \rho(\xi_{n(i)}, \xi_n) \longrightarrow 0.$

(2) Ξはseparableである。

$\xi \in \mathbb{M}$に対してξに対応するfundamental sequence $\{\xi_n\}$をとれば

$$\rho(\xi, \xi_n) \longrightarrow 0$$

しかもEの点は可算個である。

(3) EはΞのopen setである$\Leftrightarrow$ $\mathbb{M}$はΞのclosed setである。ξ_nが$\mathbb{M}$の点で$\rho(\xi_n, \xi) \longrightarrow 0$とすると$K(x, \xi_n) \longrightarrow K(x, \xi)$ for all xである。

$K(x, \xi_n)$はx_n-harmonic functionであるから、Lemma 3.1のRemarkによって$K(x, \xi)$もx_n-harmonicである。したがって$\xi \in \mathbb{M}$.

(4) $\mathbb{M}$はcompactである。

$\{\xi_n\}$を$\mathbb{M}$のsequenceとする。ξ_nに対して$\rho(\xi_n, \xi'_n) < \frac{1}{n}$を満す$E$の点$\xi'_n$の作るsequence $\{\xi'_n\}$はEでlimit pointを持たないから、fundamental sequence $\{\xi'_{n(i)}\}$を含む。$\{\xi'_{n(i)}\}$に対応する$\mathbb{M}$の点をξとすれば

$$\rho(\xi, \xi_{n(i)}) \leq \rho(\xi, \xi'_{n(i)}) + \rho(\xi'_{n(i)}, \xi_{n(i)}) \longrightarrow 0 \text{ である。}$$

(5) Ξはcompactである。

$\{\xi_n\}$をΞのsequenceとする。もし$\{\xi_n\}$が無限に多くの$\mathbb{M}$の点を含めば(4)より明らか。$\mathbb{M}$の点を有限個しか含まない場合は、Eの点を無限個含んでいることになる。この場合は更に2つに分れる。(a) Eの内部にlimit pointを持つ場合。この時は$\{\xi_n\}$の適当なsubsequenceについて、$\xi_{n(i)} = \xi \in E$ $(i = 1, 2, 3, \cdots)$であるから明らか。(b)内部にlimit pointを持たない時は、$\{\xi_n\}$がfundamental sequence $\{\xi_{n(i)}\}$を含むから、$\{\xi_{n(i)}\}$とそれに対応する$\mathbb{M}$の点ξを取ればよい。

Lemma 3.2 より明らかな次の定理は后に有用である。

<u>Theorem 3.2.</u> xを任意に固定した時、$K(x, \xi)$はξの函数としてρ-continuousである。

Sem. on Probab.
Vol.1 1959年
P1-85

§ 4. x_n – harmonic function の表現定理 (I)

6. f を $\mathcal{R}$ の元とする。E の subset A に対して，もし $E_x(f(x_{\sigma_A}))$ が well defined であるとき

$$f_A^*(x) = E_x(f(x_{\sigma_A})) \tag{4.1}$$

と書く。

<u>Lemma 4.1</u> もし $f_A^*(x)$ が well defined であり，x の函数として $\mathcal{R}$ にぞくしているとき

$$f_A^*(x) = \begin{cases} f(x) & \text{for } x \in A \\ \text{harmonic} & \text{for } x \notin A \end{cases}$$

Proof. $x \in A$ とすれば $P_x(\sigma_A = 0) = 1$ だから

$$f_A^*(x) = E_x(f(x_{\sigma_A}) : \sigma_A = 0) = f(x)$$

$x \notin A$ とすれば，P_x – 測度 1 で $\sigma_A \geq \sigma_{\{x\}^c}$ だから $\sigma_A(w) = \sigma_{\{x\}^c}(w) + \sigma_A(w^+_{\sigma_{\{x\}^c}})$ と書ける。したがって

$$f_A^*(x) = E_x(f(x_{\sigma_A})) = E_x\left(f\left(x_{\sigma_A(w^+_{\sigma_{\{x\}^c}})}(w^+_{\sigma_{\{x\}^c}})\right)\right)$$
$$= E_x(E_{x_{\sigma_{\{x\}^c}}}(f(x_{\sigma_A})))$$
$$= E_x(f_A^*(x_{\sigma_{\{x\}^c}}))$$

即ち $f_A^*(x)$ は $x \notin A$ のとき x_n – harmonic である。

<u>Theorem 4.1.</u> $u \in \mathcal{R}$ が non-negative x_n – super harmonic fn であれば

(i) $u_A^*(x)$ はすべての E の subset A に対して well defined であり かつ $\mathcal{R}$ に属している。しかも $0 \leq u_A^* \leq u$

(ii) $u_A^*(x) = \begin{cases} u(x) & \text{for } x \in A \\ x_n\text{- harmonic} & \text{for } x \in A^c \end{cases}$

(iii) $u_A^*(x)$ は x_n – super harmonic である。

Proof. (I) 先ず A が compact set，即ち finite set のとき。

(a) $x_{\sigma_A} \in A$ だから $u(x_{\sigma_A}) \leqq \max_{x \in A} u(x)$ したがって

$$u_A^*(x) = E_x(u(x_{\sigma_A})) \leqq \max_{x \in A} u(x) < \infty$$

がすべての $x \in E$ に対して成り立つ。したがって well defined である。

$x = \infty$ のとき $u_A^*(\infty) = E_\infty(u(x_{\sigma_A})) = E_\infty(u(\infty)) = 0$

したがって $u_A^*(x) \in \mathcal{R}$ である。

(b) (ii) は Lemma 4.1. から明らかである。

(c) $u_A^* \leqq u$ の証明。

Sem. on Probab.
Vol.1 1959年
P1-85

$\sigma_1(w) = \sigma_{\{x_0(w)\}^c}(w)$, (first jumping time)
$\sigma_2(w) = \sigma_1(w) + \sigma_1(w^+_{\sigma_1})$, (second 〃 〃)
$\vdots$
$\sigma_n(w) = \sigma_{n-1}(w) + \sigma_1(w^+_{\sigma_{n-1}})$, ($n$-th 〃 〃)

と定義して行く。先ず $\sigma_1(w)$ は Markov time である。
なぜなら $\{w; \sigma_1(w) > n\} = \bigcup_{y \in E} \{w : x_0 = y, x_1 = y, \cdots, x_n = y\}$.
各 y について $\{w : x_0 = y, x_1 = y, \cdots, x_n = y\} \in \mathcal{B}_n$ であり右辺はその可算和だから $\{w : \sigma_1(w) > n\} \in \mathcal{B}_n$ である。
したがって σ_n $n = 2, \cdots$ も Lemma 1.3 により Markov time である。しかも $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = +\infty$ だから，$x \notin A$ ならば

$$u^*_A(x) = E_x(u(x_{\sigma_A})) = \sum_{n=1}^{\infty} E_x(u(x_{\sigma_n}); \sigma_A = \sigma_n) < \infty \qquad (4\cdot 2)$$

右辺の第一項は，u が x_n-super harmonic であるから

$$E_x(u(x_{\sigma_1}); \sigma_A = \sigma_1) = E_x(u(x_{\sigma_1})) - E_x(u(x_{\sigma_1}); \sigma_A > \sigma_1)$$
$$\leqq u(x) - E_x(u(x_{\sigma_1}); \sigma_A > \sigma_1),$$

右辺の第二項は

$$E_x(u(x_{\sigma_2}); \sigma_A = \sigma_2) = E_x(u(x_{\sigma_1(w^+_{\sigma_1})}(w^+_{\sigma_1})); \sigma_A = \sigma_2)$$
$$= E_x(u(x_{\sigma_1(w^+_{\sigma_1})}(w^+_{\sigma_1})); \sigma_A(w^+_{\sigma_1}) = \sigma_1(w^+_{\sigma_1}), \sigma_A > \sigma_1)$$
$$= E_x(E_{x_{\sigma_1}}(u(x_{\sigma_1}); \sigma_A = \sigma_1); \sigma_A > \sigma_1)$$
$$\leqq E_x\{(u(x_{\sigma_1}) - E_{x_{\sigma_1}}(u(x_{\sigma_1}); \sigma_A > \sigma_1)); \sigma_A > \sigma_1\}$$
$$= E_x(u(x_{\sigma_1}); \sigma_A > \sigma_1) - E_x(u(x_{\sigma_2}); \sigma_A > \sigma_2),$$

同様にして，第 n 項は

$$E_x(u(x_{\sigma_n}); \sigma_A = \sigma_n) \leqq E_x(u(x_{\sigma_{n-1}}); \sigma_A > \sigma_{n-1})$$
$$- E_x(u(x_{\sigma_n}); \sigma_A > \sigma_n).$$

一方（4.2）の右辺の各項は非負，したがって絶対収束であるから任意の $\varepsilon > 0$ に対して，m が存在し

$$u^*_A(x) \leqq \sum_{n=1}^{m} E_x(u(x_{\sigma_A}); \sigma_A = \sigma_n) + \varepsilon$$

こゝで上の関係を代入すれば

$$u^*_A(x) \leqq u(x) - E_x(u(x_{\sigma_m}); \sigma_A > \sigma_m) + \varepsilon$$
$$\leqq u(x) + \varepsilon$$

ε は任意だから $x \notin A$ のとき $u^*_A(x) \leqq u(x)$ である，$x \in A$ のときは

$u_A^*(x) = u(x)$ だから結局すべての $x \in E$ に対して $u_A^*(x) \leqq u(x)$ である。

(II) A が一般の集合の場合。

$A_n \uparrow A$ となる finite set の列 A_n を取る。

もし $\sigma_A = +\infty$ ならば $\sigma_{A_n} = \infty$

もし $\sigma_A < \infty$ ならば $n_0(w)$ が存在し $\sigma_{A_{n_0}} = \sigma_{A_{n_0+1}} = \cdots = \sigma_A$

したがって $\sigma_{A_n} \downarrow \sigma_A$ である。Fatou の Lemma によれば

$$u_A^*(x) = E_x(u(x_{\sigma_A})) = E_x(\lim_{n\to\infty} u(x_{\sigma_{A_n}}))$$
$$\leqq \underline{\lim}_{n\to\infty} E_x(u(x_{\sigma_{A_n}}) \leq u(x)$$

(III) $u_A^*(x)$ は x_n-super harmonic である。

$x \in A$ のとき $u(x) = u_A^*(x)$ だから，(I) の (c) によって

$$E_x(u_A^*(x_{\sigma_{\{x\}^c}})) \leqq E_x(u(x_{\sigma_{\{x\}^c}})) \leqq u(x) = u_A^*(x)$$

$x \notin A$ のとき u_A^* は x_n-harmonic 即ち

$$E_x(u_A^*(x_{\sigma_{\{x\}^c}})) = u_A^*(x),$$

したがって，すべての $x \in E$ に対して

$$E_x(u_A^*(x_{\sigma_{\{x\}^c}})) \leqq u_A^*(x).$$

<u>Theorem 4.2</u> u, u_n, v 等を non-negative x_n-super-harmonic function とする。

(i) $x \in A$ に対して $u(x) \geqq v(x) \Longrightarrow u_A^*(x) \geqq v_A^*(x)$

(ii) $(c_1 u + c_2 v)_A^*(x) = c_1 u_A^*(x) + c_2 v_A^*(x)$

(iii) $x \in A$ で $u_n(x) \longrightarrow u(x)$ かつ $\exists v$, $u_n \leqq v$ とすれば

$$\lim_{n\to\infty} (u_n)_A^*(x) = u_A^*(x) \quad \text{であり}$$

一般に $x \in A$ で $u_n(x) \longrightarrow u(x)$ であれば $\underline{\lim}_{n\to\infty} (u_n)_A^* \geqq u_A^*$

(iv) $A \subseteq B \Longrightarrow (u_A^*)_B^*(x) = (u_B^*)_A^*(x) = u_A^*(x)$

(v) $A \subseteq B \Longrightarrow u_A^*(x) \leqq u_B^*(x)$

(vi) $A_n \uparrow A \Longrightarrow u_{A_n}^*(x) \uparrow u_A^*(x)$

(vii) $u_{A\cup B}^*(x) \leqq u_A^*(x) + u_B^*(x)$

(Proof.) (ii) は definition より明らか。

(i) $u - v \geqq 0$ for $x \in A$ だから $(u-v)_A^* = u_A^* - v_A^* \geqq 0$

for all $x \in E$

故に $u_A^*(x) \geqq v_A^*(x)$ である。

(iii) $u_n(x) \leqq v(x)$ on A. したがって $u_n(x_{\sigma_A}) \leqq v(x_{\sigma_A})$ が P_x-測度 1 で成り立つ。しかも Theorem 4.1 (i) によって $v(x_{\sigma_A})$ は可積分。そこで Lebesgue-Fatou の Theorem により

$$\lim_{n\to\infty} (u_n)_A^*(x) = \lim_{n\to\infty} E_x(u_n(x_{\sigma_A})) = E_x(\lim_{n\to\infty} u_n(x_{\sigma_A}))$$

Sem. on Probab.
Vol.1 1959年
P1-85

$$= E_x(u(x_{\sigma_A})) = u_A^*(x)$$

一般に $x \in A$ に対して $u_n(x) \longrightarrow u(x)$ のとき Fatou の Lemma より

$$\varliminf_{n\to\infty} u_n^*(x) = \varliminf_{n\to\infty} E_x(u_n(x_{\sigma_A})) \geqq E_x(\varliminf_{n\to\infty} u_n(x_{\sigma_A}))$$
$$= E_x(u(x_{\sigma_A})) = u_A^*(x)$$

(iv) $x \in B$ に対して

$u_B^*(x) = u(x)$ だから $x \in A \leq B$ に対しても $u_B^*(x) = u(x)$

したがって $(u_B^*)_A^*(x) = u_A^*(x)$ for all $x \in E$ ((i) による).

一方

$$(u_A^*)_B^* \geqq ((u_A^*)_B^*)_A^* = (u_A^*)_A^* = u_A^* \geqq (u_A^*)_B^* \quad \text{だから}$$
$$u_A^*(x) = (u_A^*)_B^*(x) \qquad \text{for all } x \in E,$$

したがって $(u_A^*)_B^*(x) = u_A^*(x) = (u_B^*)_A^*(x)$.

(v) $u_B^* \geqq (u_B^*)_A^* = u_A^*$

(vi) (v) より $u_{A_n}^*$ は単調増加函数である。

$x \in A_n$ に対しては $u_{A_n}^*(x) = u(x)$, したがって $x \in A = \bigcup_n^\infty A_n$ に対しては $\exists n(x)$, $x \in A_n$ だから, $x \in A$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} u_{A_n}^*(x) = u(x).$$

更に $u_{A_n}^*(x) \leqq u(x)$ for all $x \in E$ だから (iii) により

$$\lim_{n\to\infty} (u_{A_n}^*)_A^*(x) = u_A^*(x).$$

一方 $(u_{A_n}^*)_A^*(x) = u_{A_n}^*(x)$ ((iv) より) だから

$$\lim_{n\to\infty} u_{A_n}^*(x) = u_A^*(x) \qquad \text{for all } x \in E.$$

(vii) $u_{A\cup B}^*(x) = E_x(u(x_{\sigma_{A\cup B}})) = E_x(u(x_{\sigma_A}); \sigma_A = \sigma_{A\cup B} < \infty)$
$$+ E_x(u(x_{\sigma_B}); \sigma_B = \sigma_{A\cup B} < \infty)$$
$$\leqq u_A^*(x) + u_B^*(x)$$

<u>Definition 4.1.</u> M の任意の closed subset D に対し, $\mho(D) = \{A;\ A \supset D$ かつ open in $\bar{E}\}$ を考える. $\mho(D) \ni A$ に対して $[A] = \bar{A} \cap E$ とおく。E が $\bar{E}$ で dense なことから $[A] \neq \phi$ である。

u を non-negative な x_n-harmonic function とするとき, $u_D(x)$ を

$$u_D(x) = \inf_{A \in \mho(D)} u_{[A]}^*(x) \tag{4.3}$$

と定義する。

<u>Lemma 4.2.</u> $A_i \in \mho(D)$ で $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$, $\bigcap_n \bar{A}_n = D$ とすれば $u_{[A_n]}^* \downarrow u_D$.

Proof. Theorem 4.2. (v) より

Sem. on Probab.
Vol.1 1959年
P1-85

$$u \geq u^*_{[A_1]} \geq \cdots \geq u^*_{[A_n]} \geq \cdots \geq 0.$$

したがって

$$\lim_{n\to\infty} u^*_{[A_n]}(x) = v(x)$$

が存在する。$u_D(x)$の定義より$u_D(x) \leq v(x)$である。逆に，xを固定すれば，任意の$\varepsilon > 0$に対して$u_D(x)$の定義より$A \in \mathfrak{U}(D)$が存在して

$$u_D(x) \geqq u^*_{[A]}(x) - \varepsilon$$

一方，$\bigcap_n \bar{A}_n = D$だから，ある$n(x)$が存在して$\bar{A}_n \leq A$

したがって$[A_n] \subset [A]$だから Theorem 4.2 (v)より

$$u^*_{[A_n]} \leqq u^*_{[A]}\ ; \qquad \text{故に}$$

$$u_D(x) \geqq u^*_{[A]}(x) - \varepsilon \geqq u^*_{[A_n]}(x) - \varepsilon \geqq v(x) - \varepsilon,$$

εは任意だから　$u_D(x) \geqq v(x)$.

故に　$u_D(x) = v(x)$.

<u>Theorem 4.3</u>　u, vを non-negative x_n-harmonic function とする。

(i) $u_D(x) \geqq 0$ でかつx_n-harmonic

(ii) $u(x) \geq u_D(x)$

(iii) $u(x) \geqq v(x) \Longrightarrow u_D(x) \geqq v_D(x)$

(iv) $(c_1 u + c_2 v)_D(x) = c_1 u_D(x) + c_2 v_D(x)$

(v) $u_M(x) = u(x)$

(vi) $D_1 > D_2 \Longrightarrow (u_{D_1})_{D_2}(x) = (u_{D_2})_{D_1}(x) = u_{D_2}(x)$

(vii) $D_1 \supset D_2 \Longrightarrow u_{D_1}(x) \geqq u_{D_2}(x)$

(viii) $D_n \downarrow D \Longrightarrow u_{D_n}(x) \downarrow u_D(x)$

(ix) $u_{D_1} \cup_{D_2}(x) \Rightarrow u_{D_1 \cup D_2}(x)$

<u>Remark</u>　(ix)は実は$D_1 \cap D_2 = \phi$ならば

$$u_{D_1 \cup D_2}(x) = u_{D_1}(x) + u_{D_2}(x)$$

となる。(Theorem 5.3 Corollary 1)

Proof. (i) A_nを$A_n \supset A_{n+1}$, $A_n \supset D$, $\bigcap_n \bar{A}_n = D$なるopen setとすると$u^*_{[A_n]}(x)$は$E-[A_n]$でx_n-harmonic (Theorem 4.1)で，$E-[A_n] \longrightarrow E$　したがって$\lim_{n\to\infty} u^*_{[A_n]}(x) = u_D(x)$は$E$でharmonicである。

(ii) $u(x) \geqq u^*_{[A]}(x)$　だから

$$u(x) \geqq \inf_{A \in \mathfrak{U}(D)} u^*_{[A]}(x) = u_D(x) \qquad \text{である。}$$

(iv) Lemma 4.2 のA_nを取る。

Sem. on Probab.
Vol.1 1959年
P1-85

$$(c_1 u + c_2 v)_D(x) = \lim_{n\to\infty} (c_1 u + c_2 v)^*_{[A_n]}(x)$$
$$= \lim_{n\to\infty} (c_1 u^*_{[A_n]}(x) + c_2 v^*_{[A_n]}(x))$$
$$= c_1 \lim_{n\to\infty} u^*_{[A_n]}(x) + c_2 \lim_{n\to\infty} v^*_{[A_n]}(x)$$
$$= c_1 u_D(x) + c_2 v_D(x)$$

(iii) $u \geq v$ ならば $u - v \geqq 0$ したがって (i) より $(u-v)_D(x) \geqq 0$. そこで (iv) より $u_D(x) \geq v_D(x)$.

(vii) と (vi). $\{A_n\}$ $\{B_n\}$ を $A_n \in \mathfrak{U}(D_1)$, $A_n \supset A_{n+1}$), $\bigcap_n \bar{A}_n = D_1$
$B_n \in \mathfrak{U}(D_2)$, $B_n \supset B_{n+1}$), $\bigcap_n \bar{B}_n = D_2$

かつ $A_n \supset B_n$ を満すように選ぶことが出来る．すると

$$u^*_{[B_n]} \leqq u^*_{[A_n]}$$

$n \to \infty$ として $u_{D_2} \leqq u_{D_1}$ がえられる。

又任意に fix した m に対し $n \geq m$ なる限り

$$\left(u^*_{[B_n]}\right)^*_{[A_m]}(x) = u^*_{[B_n]}(x) \tag{4.4}$$

$u^*_{[B_n]}$ は monotone decreasing であるから $n \to \infty$ とき，Theorem 4.2 (iii) によって，(4.4) の左辺は $(u_{D_2})^*_{[A_m]}$ に，右辺は u_{D_2} に近づく。次に $m \to \infty$ として

$$(u_{D_2})_{D_1} = u_{D_2}$$

が得られる．

最后に $u \geqq u_{D_1}$ より $u_{D_2} \geqq (u_{D_1})_{D_2}$．又今証明したことから，$u_{D_1} \geqq u_{D_2}$，故に $(u_{D_1})_{D_2} \geqq (u_{D_2})_{D_2} = u_{D_2}$．

よって $u_{D_2} = (u_{D_1})_{D_2}$ である．

(viii) $D'_n \in \mathfrak{U}(D_n)$ でしかも $D'_n \supset D'_{n+1}$，$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{D}'_n = D$ をみたすように D'_n を取ると (vii) より $u_D(x) \leqq u_{D_n}(x) \leqq u^*_{[D'_n]}(x)$ したがって

$$u_D(x) \leqq \varliminf_{n\to\infty} u_{D_n}(x) \leqq \varlimsup_{n\to\infty} u_{D_n}(x) \leqq \lim_{n\to\infty} u^*_{[D'_n]}(x) = u_D(x)$$

即ち $u_D(x) = \lim_{n\to\infty} u_{D_n}(x)$

(ix) $\{A_n\}$ を $A_n \in \mathfrak{U}(D_1)$．$A_n \supset A_{n+1} \supset \cdots$，$\bigcap_n^{\infty} \bar{A}_n = D_1$ とし
$\{B_n\}$ を $B_n \in \mathfrak{U}(D_2)$．$B_n \supset B_{n+1} \supset \cdots$ $\bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{B}_n = D_2$ とする．

Theorem 4.2 (vii) より

$$u^*_{[A_n \cup B_n]} = u^*_{[A_n] \cup [B_n]}(x) \leqq u^*_{[A_n]}(x) + u^*_{[B_n]}(x).$$

したがって $\lim_{n\to\infty} u^*_{[A_n \cup B_n]} \leqq \lim_{n\to\infty} u^*_{[A_n]}(x) + \lim_{n\to\infty} u^*_{[B_n]}(x)$

即ち $u_{D_1 \cup D_2}(x) \leqq u_{D_1}(x) + u_{D_2}(x)$

最后に (v) の証明であるがそのために次の二つの Lemma を準備しておこ

Sem. on Probab.
Vol.1 1959年
P1-85

う。

<u>Lemma 4.3.</u> AをEのfinite setとする。すべての$x\in A$に対して$P_x(x_{\sigma_{\{x\}^c}}\in A)=1$がなりたつならば，Aは少くとも一つrecurrent pointを含む。

Proof. $^\forall x\in A$に対して $\pi(x,A)=1$ を先ず示そう。

$$\pi(x,A)=P_x(x_1\in A)=P_x(x_1\in A;\ \sigma_{\{x\}^c}\geqq 1)$$
$$=P_x(x_1\in A;\ \sigma_{\{x\}^c}>1)+P_x(x_1\in A;\ \sigma_{\{x\}^c}=1)$$
$$=P_x(x_0\in A;\ \sigma_{\{x\}^c}>1)+P_x(x_{\sigma_{\{x\}^c}}\in A;\ \sigma_{\{x\}^c}=1)$$
$$=P_x(\sigma_{\{x\}^c}>1)+P_x(\sigma_{\{x\}^c}=1)=1$$

次に $\pi^2(x,A)=\sum_{y\in E}\pi(x,y)\pi(y,A)=\sum_{y\in A}\pi(x,y)\pi(y,A)$

$$=\sum_{y\in A}\pi(x,y)=\pi(x,A)=1$$

同様にすれば

$$\pi^n(x,A)=1$$

したがって

$$G(x,A)=\sum_{n=1}^{\infty}\pi^n(x,A)=\infty$$

もしAのすべての点yがrecurrentでないとすれば，$G(x,y)<\infty$ でAはfinite setだから

$$G(x,A)=\sum_{y\in A}G(x,y)<\infty$$

となり矛盾する。したがって少くとも1つrecurrentな点を含む。

<u>Lemma 4.4</u> Eのすべての点がrecurrentでないとし，Eのfinite set Aに対し

$$u(x)=0 \qquad x\notin A$$
$$\geqq 0 \qquad x_n\text{- sub-harmonic} \quad \text{for } x\in A$$

ならば $u(x)\equiv 0$ である。(Maximum principle)

Proof. $M=\operatorname*{Max}_{x\in A}u(x)=u(a)$ とする。もし$M>0$ とすれば

$$A_1=\{y;\ P_a(x_{\sigma_{\{a\}^c}}=y)>0\} \qquad \text{とおくと}$$

$$M=u(a)\leqq E_a(u(x_{\sigma_{\{a\}^c}}))=\sum_{y\in A_1}u(y)P_a(x_{\sigma_{\{a\}^c}}=y)\leqq M.$$

ところが $u(y)\leqq u(a)$ だから，すべてのA_1の点yに対して

$u(y)=u(a)=M>0$ で，しかも

Sem. on Probab.
Vol.1 1959年
P1-85

$$\sum_{y\in A_1} P_a(x_{\sigma_{\{a\}^c}} = y) = 1$$

でなければならない。もし，$A_1 \not\subset A$ とすれば，A^c の点 y が存在し
$M=u(y)>0$ となるから矛盾である。
もし $A_1\subset A$ ならば，A_1 の点 a_1 が存在して

$$A_2=\{y;\ P_{a}(x_{\sigma_{\{a_1\}^c}}=y)>0\}$$

に対して $A_2 \not\subset A_1$ となる（Lemma 4.3）。しかも $A_1\cup A_2 \ni \forall y$ に対し前と同様にすれば $u(y)=M>0$ がわかる。
同様にすれば $A_1\cup A_2$ の点 a_2 が存在し

$$A_3=\{y;\ P_{a_2}(x_{\sigma_{\{a_2\}^c}}=y)\}$$

とすれば $A_3\not\subset A_1\cup A_2$ であり $A_1\cup A_2\cup A_3\ni\forall y$ に対し $u(y)=M>0$
これをくり返せば，A は有限集合だから，ある n が存在して

$$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n \not\subset A$$

即ち A^c の点 y が存在し $u(y)=M>0$ となる。
これは矛盾である。したがって $M=0$ でなければならない。

Theorem 4.3 (v) の Proof. $A_n \downarrow \mathbb{M}$ とすればすべての n に対して
$E-[A_n]$ は finite set. したがって

$$u(x) \geqq u^*_{[A_n]}(x) \begin{cases} = u(x) & \text{on } [A_n] \\ = x_n \text{ harmonic} & \text{on } E-[A_n] \end{cases}$$

したがって $v(x)=u(x)-u^*_{[A_n]}(x)$ とおけば

$$v(x) \begin{cases} =0 & \text{on } [A_n] \\ \geqq 0 \ \ x_n\text{-harmonic} & \text{on } E-[A_n] \end{cases}$$

Lemma 4.4 より $v(x)\equiv 0$ 即ち $u^*_{[A_n]}(x)\equiv u(x)$
故に $u_{\mathbb{M}}(x)=\lim_{n\to\infty} u^*_{[A_n]}(x)=u(x)$

7.

Definition 4.2 $\mathfrak{G}u(x)=E_x(u(x_1))-u(x)$ とおき $\mathfrak{G}$ を generator という。

Lemma 4.5 $\sigma=\sigma_{\{x\}^c}$, $r(x)=E_x(\sigma)$ とおけば

$$\mathfrak{G}u(x)=\frac{E_x(u(x_\sigma))-u(x)}{r(x)}$$

が成立する。(Dynkin)

Proof. $P_x(\sigma>1)=q(x)$, $p(x)=1-q(x)$ とおくと Lemma 2.1 より $r(x)=\frac{1}{p(x)}$ である。

Sem. on Probab.
Vol.1 1959年
P1-85

$$E_x(u(x_\sigma)) = E_x(u(x_\sigma);\ \sigma>1) + E_x(u(x_\sigma);\ \sigma=1)$$

$$= E_x\left\{u\left(x_{\sigma(\omega_1^+)}(\omega_1^+)\right);\ \sigma>1\right\} + E_x(u(x_1);\ \sigma=1)$$

$$= E_x\left\{E_{x_1}(u(x_\sigma));\ \sigma>1\right\} + E_x(u(x_1);\ \sigma\geqq 1) - E_x(u(x_1);\ \sigma>1)$$

$$= E_x(u(x_\sigma))\cdot P_x(\sigma>1) + E_x(u(x_1)) - u(x)\cdot P_x(\sigma>1)$$

これを整頓すれば

$$E_x(u(x_\sigma))\cdot P(x) = E_x(u(x_1)) - u(x)\cdot(1-P(x))$$

故に $\{E_x(u(x_\sigma)) - u(x)\}\,P(x) = E_x(u(x_1)) - u(x)$

即ち
$$\underline{\underline{G}}\,u(x) = \frac{E_x(u(x_\sigma)) - u(x)}{\gamma(x)}$$

Lemma 4.6 (Fundamental Lemma).

FをEのfinite set, $f\in\mathbb{R}$ とすれば

$$f_F^*(x) = E_x(f(x_{\sigma_F})) \qquad (4.5)$$

に対してF上のsigned measure μが存在して

$$f_F^*(x) = \int_F K(x,y)\,d\mu(y) \qquad (4.6)$$

と表現できる。こゝでμは

$$d\mu(y) = (-\underline{\underline{G}}\,f_F^*(y))\cdot G(c,dy)$$

とえらぶことができる。

Remark: 今，積分の形に書いたが，我々の場合は

$$f_F^*(x) = \sum_{y\in F} K(x,y)\,\mu(y)$$ を意味する。

Corollary. uを$\mathbb{R}$に属するnon-negative x_n-superharmonic function とすればμはpositive measureであり，

$$\mu(F) \leqq u(c)$$

を満す。但し cはEのcenterである。

Proof of Lemma. (4.6)式を変形すれば

$$f_F^*(x) = \int_F K(x,y)(-\underline{\underline{G}}\,f_F^*(y))\,G(c\cdot dy)$$

$$= \int_F \frac{G(x,dy)}{G(c,dy)}(-\underline{\underline{G}}\,f_F^*(y))\,G(c,dy)$$

$$= \int_F G(x,dy)(-\underline{\underline{G}}\,f_F^*(y))$$

Sem. on Probab.
Vol.1 1959年
P1-85

となるから $f_F^*(x) = \int_F (-\underline{\underline{G}} f_F^*(y))\, G(x, dy)$ (4.7)

を証明すればよい。

$\sigma(w) = \sigma_{\{x_0\}^c}(w)$ とおきFへの p-th passage time σ_p を次のように定義する。

$$\sigma_1(w) = \sigma_F(w), \quad \sigma_1'(w) = \sigma_1(w) + \sigma(w_{\sigma_1}^+),$$
$$\sigma_2(w) = \sigma_1'(w) + \sigma_1(w_{\sigma_1'}^+), \quad \sigma_2'(w) = \sigma_2(w) + \sigma(w_{\sigma_2}^+),$$
$$\vdots \qquad\qquad , \qquad\qquad \vdots$$
$$\sigma_p(w) = \sigma_{p-1}'(w) + \sigma_1(w_{\sigma_{p-1}'}^+), \quad \sigma_p'(w) = \sigma_p(w) + \sigma(w_{\sigma_p}^+).$$

その時（4.7）式の右辺は

$$\int_F (-\underline{\underline{G}} f_F^*(y))\, G(x, dy) = E_x\left\{\sum_{n\geq 0} \chi_F(x_n)(-\underline{\underline{G}} f_F^*(x_n))\right\}$$
$$= \sum_{p=1}^{\infty} E_x\left\{\sum_{n=\sigma_p}^{\sigma_p'-1} (-\underline{\underline{G}} f_F^*(x_n))\right\}.$$

ところが

$$E_x\left\{\sum_{n=\sigma_p}^{\sigma_p'-1} (-\underline{\underline{G}} f_F^*(x_n))\right\} = E_x\left\{\sum_{n=\sigma_p}^{\sigma_p'-1} \frac{f_F^*(x_n) - E_{x_n}(f_F^*(x_\sigma))}{\gamma(x_n)}\right\}$$
$$= E_x\left\{\sum_{n=\sigma_p}^{\sigma_p'-1} \frac{f_F^*(x_n)}{\gamma(x_n)}\right\} - E_x\left\{\sum_{n=\sigma_p}^{\sigma_p'-1} \frac{E_{x_n}(f_F^*(x_\sigma))}{\gamma(x_n)}\right\}.$$

第1項は

$$E_x\left\{\sum_{\sigma_p}^{\sigma_p'-1} \frac{f_F^*(x_n)}{\gamma(x_n)}\right\} = E_x\left\{\frac{f_F^*(x_{\sigma_p})}{\gamma(x_{\sigma_p})}\sigma(w_{\sigma_p}^+)\right\} = E_x\left\{\frac{f_F^*(x_{\sigma_p})}{\gamma(x_{\sigma_p})} E_{x_{\sigma_p}}(\sigma)\right\}$$
$$= E_x(f_F^*(x_{\sigma_p})) = E_x(f(x_{\sigma_p}))$$

第2項は

$$E_x\left\{\sum_{\sigma_p}^{\sigma_p'-1} \frac{E_{x_n}(f_F^*(x_\sigma))}{\gamma(x_n)}\right\} = E_x(E_{x_{\sigma_p}}(f_F^*(x_{\sigma_p}))).$$

$$= E_x(E_{x_{\sigma_p}}(E_{x_\sigma}(f(x_{\sigma_1})))) = E_x(E_{x_{\sigma(w_{\sigma_p}^+)}(w_{\sigma_p}^+)}(f(x_{\sigma_1})))$$

$$= E_x(E_{x_{\sigma(w_{\sigma_p}^+)+\sigma_p}}(f(x_{\sigma_1}))) = E_x(E_{x_{\sigma_p'}}(f(x_{\sigma_1})))$$

$$= E_x(f(x_{\sigma_1(w_{\sigma_p'}^+)+\sigma_p'})) = E_x(f(x_{\sigma_{p+1}})).$$

同様な計算で

Sem. on Probab.
Vol.1 1959年
P1-85

$$+\infty > \int_F \frac{|f(y)|}{r(y)} G(x, dy) = \sum_{p=1}^{\infty} E_x(|f(x_{\sigma_p})|)$$

であるから. $E_x(|f(x_p)|) \longrightarrow 0$. $(p \longrightarrow \infty)$.
したがって

$$\int_F (-\underset{=}{G} f_F^*(y))\, G(x, dy) = \sum_{p=1}^{\infty} \left[E_x(f(x_{\sigma_p})) - E_x(f(x_{\sigma_{p+1}})) \right]$$
$$= E_x(f(x_{\sigma_1})) = f_F^*(x)$$

Proof of Corollary. uが$\geqq 0$, x_n-*superharmonic* であれば *Theorem 4.1* により u_F^* も同じ性質をもつ。すなわち

$$u_F^*(y) \geqq E_y(u_F^*(x_\sigma))$$

しかも $G(c, dy) \geqq 0$ だから

$$d\mu(y) = (-\underset{=}{G}\, u_F^*(y))\, G(c, dy) = \frac{u_F^*(x) - E_y(u_F^*(x_\sigma))}{r(x)} G(c, dy) \geqq 0$$

故に μ は *positive measure* である。

一方 $\mu(F) = \int_F -\underset{=}{G}\, u_F^*(y)\, G(c, dy) = u_F^*(c) \leqq u(c)$.

Remark. 今后単に *measure* という時は *totally bounded positive measure* を意味する。

Theorem 4.4 DをMの *closed subset* とする。u が *non-negative* x_n-*harmonic* とすれば, D上の *measure* μが存在して

$$u_D(x) = \int_D K(x, y)\, d\mu(y) \qquad \text{for every } x \in E \quad (4.8)$$

$$\mu(D) = u_D(c) \qquad (4.9)$$

が成立する。

Proof. (i) uを *non-negative* x_n-*super harmonic* f_n とする. Eの任意の *subset* A をとり$\bar{A}$をその *closure* とする. F_n をAの *finite sub set* とし, $F_n \subset F_{n+1}, \cdots, F_n \uparrow A$ をみたすものとする.
Lemma 4.6 の *Cor.* により

$$u_{F_n}^*(x) = \int_{F_n} K(x, y)\, d\mu_n(dy) \qquad \mu_n \geqq 0$$

と表現できる. μ_n を $\bar{A}$ の上まで $\mu_n(\bar{A} - F_n) = 0$ とおくことにより拡張する。すると

$$u_{F_n}^*(x) = \int_{\bar{A}} K(n \to x)\, d\mu_n(y).$$

Sem. on Probab.
Vol.1 1959年
P1-85

$\bar{A}$はcompactだから、μ_nの部分列$\mu_{n(i)}$が弱収束する。極限のmeasureをμであらわす。一方$K(x,y)$はxを固定すれば、yについてρ-continuousであるから、結局すべてのxに対して

$$\lim_{i\to\infty}\int_{\bar{A}} K(x,y)\,d\mu_{n(i)}(y)=\int_{\bar{A}} K(x,y)\,d\mu(y)$$

さらに $\lim_{n\to\infty} u^*_{F_n}(x)=u^*_A(x)$ (Theorem 4.2 (vi)) だから

$$u^*_A(x)=\int_{\bar{A}} K(x,y)\,d\mu(y) \qquad \mu\geq 0.$$

(ii) DをMのclosed subsetとする。A_nを$A_n\in U(D)$
$A_n>A_{n+1}>\cdots\cdots,\ \bigcap_n \bar{A}_n=D$ をみたすものとする。
$[\bar{A}_n]=\overline{\bar{A}_n\cap E}=\bar{A}_n\cap\bar{E}=\bar{A}_n$ だから (i) より

$$u^*_{[A_n]}(x)=\int_{\bar{A}_n} K(x,y)\,d\mu_n(y) \qquad \text{である。}$$

$$u_D(x)=\lim_{n\to\infty} u^*_{[A_n]}(x)$$

だから (i) と同様にして、D上のmeasure μが存在して

$$u_D(x)=\int_D K(x,y)\,d\mu(y)$$

となる。さらに

$$u_D(c)=\int_D K(c,y)\,d\mu(y)=\int_D d\mu(y)=\mu(D)$$

Theorem 4.5 $u(x)$が non-negative x_n-harmonic であればM上のmeasure μが存在して

$$u(x)=\int_M K(x,y)\,d\mu(y) \tag{4.10}$$

$$\mu(M)=u(c)$$

がなりたつ。逆にM上の任意のmeasure μに対し、(4.10)の右辺はx_n-harmonic functionである。

Proof. 前半は前の定理で特に$D=M$とおき、$u_M=u$に注意すれば明らか。后半、(4.10)の右辺のkernelは≥ 0、x_n-harmonicであり、μはpositive measureだからFubiniの定理より容易に証明される。

Theorem. 4.6 Rに属する$u(x)$がMの上の有界signed measureにより(4.10)式に表現出来るための必要十分条件は、$u(x)$がx_n-harmonicでかつ$E_c(|u(x_n)|)$がxに関して有界なることである。

Proof. 必要条件. JordanのdecompositionTheoremによりμは2

Sem. on Probab.
Vol.1 1959年
P1-85

つの measures μ_+, μ_- の差として, $\mu=\mu_+-\mu_-$ と表わすことが出来る。したがって

$$u(x)\int_M K(x,y)\,d\mu(y)=\int_M K(x,y)\,d\mu_+(y)-\int_M K(x,y)\,d\mu_-(y)$$

ところが $u_+(x)=\int_M K(x,y)\,d\mu_+(y)$, $u_-(x)=\int_M K(x,y)\,d\mu_-(y)$

は Theorem 4.5 により non-negative x_n-harmonic function である。したがって, Theorem 2.1 (ii) より

$$\lim_{n\to\infty} E_c(|u(x_n)|)<\infty .$$

十分条件. Theorem 2.1 (iii)により, すべての $x\in E$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} E_x(|u(x_n)|)<\infty$$

であるから, 同定理 (ii) によって u は2つの $\geqq 0$, x_n-harmonic function の差として書ける。各々を (4.10) の形に表現し, 夫々に対応する measure の差の有界 signed measure を考えれば, それが u に対応するものである。

Theorem 4.7

u が non-negative, x_n-super harmonic であれば, $\bar{E}$ 上の measure によって

$$u(x)=\int_{\bar{E}} K(x,y)\,d\mu(y), \qquad \mu(\bar{E})=u(c)$$

と表現出来る。

Proof. Theorem 4.4 の証明 (i) において, $A=E$ とおき, $u_E^*=u$ に注意すれば明らかである。

Remarks. 1) 我々は Theorem 4.4, 4.5, 4.6, 4.7 において measure μ の定義されている Borel field をはっきり指定しなかったけれども, 実は ρ topology による Borel field である。即ち closed set から generate される最小の Borel field である。例えば theorem 4.5 では μ は M の closed sub set から generate される最小の Borel field の上に定義された measure である。したがって measure theory の一般論より, M の Borel sub set B に対して

$$\mu(B)=\sup_{\substack{B\supset D\\ D\ \mathrm{closed}}}\mu(D)$$

がなり立っている。すなわち μ は Radon-measure である。

2) Theorem 4.5 の前半は $u_M(x)=u(x)$ を用いて証明されたが, Theorem

Sem. on Probab.
Vol.1 1959年
P1-85

4.7からも得られる，なぜなら，Theorem 4.7 より

$$u(x)=\int_E K(x,y)\,d\mu(y)=\int_M K(x,y)\,d\mu(y)+\int_E K(x,y)\,d\mu(y),$$

だから$\mu(E)=0$ を証明すればよい．$x=y\in E$に対して $K(x,y)$ は strictly x_n-superharmonic であるからもし$\mu(E)>0$ならば $u(x)$も ある $\mu(\{x\})>0$ となる xにおいて strictly x_n-superharmonicになる．これは矛盾である．故に$\mu(E)=0$でなければならない．

3) Theorem 4.6 は time-continuous Markov process のときは必ずしもなりたたない．

4) 表現の一意性は必ずしも言えない（Theorem 5.3. Cor.2 参照）．

Corollary. $u(x)$ が non-negative x_n-harmonic で恒等的に0に等しくなければ $u(c)>0$ である．

Proof. もし $u(c)=0$ ならば $\mu(M)=0$ したがって $u(x)\equiv 0$ である．

Definition 4.3. $K(x,b)$を generalized poisson kernel という．

§5. Minimal x_n-harmonic function. x_n-harmonic function の表現定理(II)

8. 前節において，x_n-harmonic function $u(x)$ は

$$u(x)=\int_M K(x,b)\,d\mu(b) \tag{5.1}$$

と表現出来ることがわかったが，最后に注意したようにμは必ずしも unique ではない．μにある種の制限を加えて，表現の一意性を示すのが，本節の目的である．

Definition 5.1 $u(x)$が non-negative x_n-harmonic function とする．$0\leqq v(x)\leqq u(x)$ をみたす任意のx_n-harmonic function $v(x)$が，$u(x)$ の定数倍であるとき，$u(x)$ は minimal であるという。

Definition 5.2 E の Martin boundary M の subset M_1, M_0 を次のように定義する．

$$M_1=\{b;\ K(\cdot,b)\text{ が minimal } x_n\text{-harmonic}\}$$

$M_0 = \{ b ;\ K(\cdot, b)$が minimal x_n-harmonic ではない$\}$

<u>Lemma 5·1</u> uを minimal x_n-harmonic function, μをM上の measureとする. Bを$0 < \mu(B) < \infty$ を満すMのρ-Borel subset とするとき

$$u(x) \geqq \int_B K(x, b)\, d\mu(b) \qquad (5\cdot2)$$

が成立するならば $u(x) = u(c)\, K(x, b_0)$ をみたす点b_0が唯一つ存在し, それは$B \cap M_1$ にぞくする.

Proof. $\mu(B) = \sup_{\substack{B \supset D \\ \text{closed}}} \mu(D) > 0$ だから, $B \supset D$, $\mu(D) > 0$ なるMの closed subset Dが存在する. するとDの適当な点 b_0 があって, b_0 を内点とする任意の compact set Fに対して$\mu(F \cap D) > 0$ となるように出来る. なぜなら, もしそのような点 b_0 が存在しなければ, 任意の$b \in D$に対して$\mu(U(b) \cap D) = 0$となる open set $U(b)$ が存在する. $\bigcup_{b \in D} U(b) \supset D$で$D$は compact set だから $b_1, \cdots, b_n \in D$が存在して $\bigcup_{i=1}^{n} U(b_i) \supset D$ である. したがって

$$\mu(D) = \mu\left(\bigcup_{i}^{n} U(b_i) \cap D\right) \leqq \sum_{i=1}^{n} \mu(U(b_i) \cap D) = 0 \quad \text{となり}$$

$\mu(D) > 0$に矛盾する. さてF_n をb_0 を内点とする compact set の列でかつ $F_n \downarrow b_0$とする. $G_n = D \cap F_n$ とおけば $G_n \downarrow b_0$, $\mu(G_n) > 0$ である.

$$v_n(x) = \int_{G_n} K(x, b)\, d\mu(b)$$

とおけば, Theorem 4·4 の後半により $v_n(x)$ はx_n-harmonic であり $v_n(c) = \mu(G_n) > 0$. (5·2)式より

$$u(x) \geqq \int_B K(x, b)\, d\mu(b) \geqq \int_{G_n} K(x, b)\, d\mu(b) = v_n(x) \geqq 0$$

で $u(x)$ が minimal だから $v_n(x) = C_n\, u(x)$, $C_n = \dfrac{v_n(c)}{u(c)}$, $0 < C_n < \infty$ と書ける. したがって

$$u(x) = C_n^{-1}\, v_n(x) = \int_{G_n} K(x, b)\, d\mu_n(b)$$

但し $d\mu_n(b) = C_n^{-1}\, d\mu(b)$.

一方, $\mu_n(G_n) = u(c)$ で, $K(x, b)$ はb に関して continuous だから

Sem. on Probab.
Vol.1 1959年
P1-85

$$u(x)=\lim_{n\to\infty}\int_{G_n}K(x,b)\,d\mu_n(b)=u(c)\cdot K(x,b_0).$$

この式より $u(x)$ が minimal であれば $K(x,b_0)$ も minimal であることもわかる。即ち $b_0\in D\cap M_1\subseteq B\cap M_1$ が証明された。

もし $^\exists b_1\in M$ に対して $u(x)=u(c)\cdot K(x,b_1)$ が成り立つと仮定すれば $K(x,b_0)\equiv K(x,b_1)$ がすべての $x\in E$ に対して成り立つ。したがって boundary M の定義より $b_0=b_1$ でなければならない。これは b_0 の一意性を示す。

<u>Theorem 5.1</u> (i) u が minimal x_n-harmonic function であれば $u(x)=k\cdot K(x,b_0)$ となるような M_1 の点 b_0 が唯一つ存在する。

(ii) $b_0\in M_1$, D; M の closed subset とすると、

$$K_D(x,b_0)\equiv K(x,b_0)\quad \text{if}\quad b_0\in D$$
$$\equiv 0\quad \text{if}\quad b_0\notin D.$$

(iii) 次の２つの条件は $b_0\in M_1$ (すなわち $K(x,b_0)$ が minimal x_n-harmonic なこと) と同値である。

(a) b_0を内点として含む任意の closed set D (in M) に対し、
$$K_D(c,b_0)=1$$

(b) $$K_{\{b_0\}}(c,b_0)=1.$$

Remark. (ii) と (iii) を合わせると、$b_0\in M_1$ に同値な条件を色々に与えることができる。例えば「b_0を含まない任意の closed set D (in M) に対し $K_D(x,b_0)\equiv 0$」はその１つである。こゝで特に (a) と (b) をあげたのは、(b) は后の諸定理の証明に有効であり、(a) は実際の例で M_1 を求めるのに (b) より使い易いからである（§6 の例を参照）。

Proof. (i) $u(x)\equiv 0$ の時は trivial. $u(x)\not\equiv 0$ とすれば

$$u(x)=\int_{M}K(x,b)\,d\mu(b),\qquad 0<\mu(M)=u(c)$$

であるから、Lemma 5.1 を使えばよい。

(ii) <u>$b_0\notin D$ のとき</u>

前節の結果によって

$$K(x,b_0)\geqq K_D(x,b_0)=\int_D K(x,b)\,d\mu(b)$$

である。今 $K_D(x,b_0)\not\equiv 0$ とすると $\mu(D)>0$ であるから、Lemma 5.1 によって、$D\cap M_1\ni{}^\exists b_1$ があって

$$K(x,b_0)\equiv K(c,b_0)\,K(x,b_1)\equiv K(x,b_1)$$

Sem. on Probab.
Vol.1 1959年
P1-85

である．したがって $b_0=b_1$．これは $b_0 \notin D$ に矛盾する．

<u>b_0 がDの内点にぞくするとき</u>

$D'=\overline{M-D}$ とおくと $b_0 \notin D'$，$D \cup D'=M$ である。Theorem 4.3 (v) (ix) より $K(x,b_0)=K_M(x,b_0)\leqq K_{D'}(x,b_0)+K_D(x,b_0)$

上に証明したことより $K_{D'}(x,b_0)=0$．これと $K(x,b_0)\geqq K_D(x,b_0)$ (Theorem 4.3 (iii))を合せて

$$K(x,b_0)\equiv K_D(x,b_0) \text{ が得られる。}$$

<u>$b_0 \in D$ のとき</u>

M の closed set の列 D_n を，b_0 を内点として含み，$D_n \downarrow D$ となるように取る．各 D_n については上のことから $K_{D_n}(x,b_0)=K(x,b_0)$．したがって Theorem (4.3) (viii) より

$$K(x,b_0)=\lim_{n\to\infty} K_{D_n}(x,b_0)=K_D(x,b_0).$$

(iii) $b_0 \in M_1 \longrightarrow$ (a)．(ii) によって $K(x,b_0)\equiv K_D(x,b_0)$．ここで $x=c$ とおけばよい．(a) $\longrightarrow$ (b)．(ii) の最后の結論と同様に，b_0 を内点として含み，$D_n \downarrow \{b_0\}$ なる closed set (in M) の列 D_n をとればよい．

(b) $\longrightarrow b_0 \in M_1$ 今 u を non-negative X_n-harmonic function とすると

$$u_{\{b_0\}}(x)=\int_{\{b_0\}} K(x,b)\,d\mu(b)=\mu(b_0)K(x,b_0)=u_{\{b_0\}}(c)K(x,b_0)$$

特に $u(x)=K(x,b_0)$ とおけば (5·3)

$$K_{\{b_0\}}(x,b_0)=K_{\{b_0\}}(c,b_0)K(x,b_0)$$

仮定により $K_{\{b_0\}}(c,b_0)=1$ だから $K_{\{b_0\}}(x,b_0)=K(x,b_0)$ となる．

$v(x)$ を $K(x,b_0)\geqq v(x)\geqq 0$ なる X_n-harmonic function とすれば

$$w(x)=K(x,b_0)-v(x)$$

も non-negative X_n-harmonic function であり，

$$v(x)\geqq v_{\{b_0\}}(x),\quad w(x)\geqq w_{\{b_0\}}(x). \quad \text{したがって}$$

$$K(x,b_0)=v(x)+w(x)\geqq v_{\{b_0\}}(x)+w_{\{b_0\}}(x)=K_{\{b_0\}}(x,b_0)=K(x,b_0)$$

故に $v(x)=v_{\{b_0\}}(x)$，$w(x)=w_{\{b_0\}}(x)$ でなければならない．

ところが (5·3) により $v_{\{b_0\}}(x)=v_{\{b_0\}}(c)\,K(x,b_0)$

したがって $v(x)=v_{\{b_0\}}(c)\cdot K(x,b_0)$

これは $K(x,b_0)$ が minimal であることを示している．

<u>Corollary</u> $b_0 \in M_1$ ならば $K_{\{b_0\}}(c,b_0)=1$

$b_0 \in M_0$ ならば $K_{\{b_0\}}(c,b_0)=0$

Proof. $K_{\{b_0\}}(x,b_0)=K_{\{b_0\}}(c,b_0)\cdot K(x,b_0)$ だから

Sem. on Probab.
Vol.1 1959年
P1-85

$$\left(K_{\{b_0\}}\right)_{\{b_0\}}(x,b_0) = K_{\{b_0\}}(c,b_0)\cdot K_{\{b_0\}}(x,b_0)$$

Theorem 4.3 (vi) より $\left(K_{\{b_0\}}\right)_{\{b_0\}}(x,b_0)=K_{\{b_0\}}(x,b_0)$ だから $x=c$ とおけば

$$K_{\{b_0\}}(c,b_0) = K_{\{b_0\}}(c,b_0)^2$$

故に $K_{\{b_0\}}(c,b_0)=1$ or 0. ところが $K_{\{b_0\}}(c,b_0)=1$ と $b_0 \in M$ が同値だから $K_{\{b_0\}}(c,b_0)=0$ と $b_0 \in M^c = M_0$ が同値である.

Theorem 5・2 M_0 は F_σ set である。

Proof. 次の各段階に別けて証明する.

(i) A が Ξ の open set であれば $K^*_{[A]}(x,b)$ は b の函数として lower semicontinuous である。なぜなら $K(x,b)$ は b に関して連続だから $b_n \longrightarrow b$ とすれば $K(x,b_n) \longrightarrow K(x,b)$. したがって Theorem 4.2 (iii) により

$$\varliminf_{n\to\infty} K^*_{[A]}(x,b_n) \geqq K^*_{[A]}(x,b)$$

(ii) $\Gamma_n = \{ b;\ b$ を含む $d(A) \equiv \sup\limits_{\xi,\eta\in A} \rho(\xi,\eta) \leqq \frac{1}{n}$ なる任意の open set A に対し常に $K^*_{[A]}(c,b) \leqq \frac{1}{2}$ をみたす$\}$

とおけば Γ_n は closed である. なぜなら, $b_m \in \Gamma_n$, $b_m \to b$ とすれば $d(A) \leqq \frac{1}{n}$ をみたし, b を含む任意の open set A に対して, ある番号 $M(A)$ が存在して $m \geq M$ なるすべての m に対して $b_m \in A$, したがって $K^*_{[A]}(c,b_m) \leqq \frac{1}{2}$ である。

(i) より $\varliminf\limits_{m\to\infty} K^*_{[A]}(c,b_m) \geqq K^*_{[A]}(c,b)$

だから $K^*_{[A]}(c,b) \leqq \frac{1}{2}$ 即ち $b \in \Gamma_n$ である.

(ii) $\bigcup\limits_n \Gamma_n = M_0$ である.

先ず $\bigcup\limits_n \Gamma_n \subseteq M_0$ を示そう。b を Γ_n の任意の点とし, A を $d(A) \leqq \frac{1}{n}$ かつ b を含む任意の open set とすると $K^*_{[A]}(c,b) \leqq \frac{1}{2}$. $K_{\{b\}}$ の定義により

$$K_{\{b\}}(c,b) \leqq K^*_{[A]}(c,b) \leqq \frac{1}{2}$$

ところが $K_{\{b\}}(c,b)=0$ or 1 だから $K_{\{b\}}(c,b)=0$ でなければならない. 即ち $b \in M_0$. したがって $\Gamma_n < M_0$ だから $\bigcup\limits_n \Gamma_n \leq M_0$.

逆に $\bigcup\limits_n \Gamma_n \supseteq M_0$ を示そう. $\forall b \in M_0$ に対して

$A_n = \{ \xi;\ \rho(b,\xi) < \frac{1}{n} \}$ とおけば, $\bar{A}_n \downarrow b$ だから

$$\lim_{n\to\infty} K^*_{[A_n]}(c,b) = K_{\{b\}}(c,b) = 0.$$

したがってある N が存在して $n \geq N$ では $K^*_{[A_n]}(c,b) \leqq \frac{1}{2}$

今, A を, b を含む $d(A) \leqq \frac{1}{n}$ なる任意の open set とすれば $\forall \xi \in A$ に対

Sem. on Probab.
Vol.1 1959年
P1-85

し，$\rho(b, \xi) < d(A) \leqq \frac{1}{n}$ だから $A \subset A_n$．したがって Theorem 4.2 (v) より

$$K^{*}_{[A]}(c, b) \leqq K^{*}_{[A_n]}(c, b) \leqq \frac{1}{2}$$

即ち $b \in \Gamma_n$ 故に $\bigcup_n \Gamma_n \supseteqq M_0$ である．

<u>Corollary</u> M_1 は M の Borel subset である．

<u>Definition 5·3</u>. μ が M 上の measure で $\mu(M_0) = 0$ であるとき，μ を <u>canonical measure</u> という．$u \in \mathcal{B}$ が canonical measure μ によって

$$u(x) = \int_M K(x, b)\, d\mu(b) \qquad (5.4)$$

と書けるとき，右辺を $u(x)$ の <u>canonical representation</u> という．

<u>Theorem 5.3</u> すべての non-negative χ_n-harmonic function は unique な canonical representation をもつ．さらに u に対応する canonical measure を μ とすれば M の任意の closed sub set D に対して

$$u_D(c) = \mu(D) \qquad (5.5)$$

となる．

このTheorem を証明するために 2，3の Lemma を準備しよう．

<u>Lemma 5.2</u>

$$u(x) = \int_M K(x, b)\, d\mu(b)$$

ならば M の任意の closed subset D に対して

$$u_D(x) = \int_M K_D(x, b)\, d\mu(b) \qquad (5.6)$$

が成立する。

Proof. $u(x) = \int_M K(x, b)\, d\mu(b)$

と表現できるから $u^{*}_{[A]}(x)$ の定義より

$$u^{*}_{[A]}(x) = E_x\left\{\int_M K(x_{\sigma_A}, b)\, d\mu(b)\right\}$$

ところが $K(x, b) \geqq 0$，$\mu \geq 0$ だから Fubini の定理により

$$u^{*}_{[A]}(x) = \int_M E_x(K(x_{\sigma_A}, b))\, d\mu(b)$$

したがって

$$u^{*}_{[A]}(x) = \int_M K^{*}_{[A]}(x, b)\, d\mu(b)$$

A_n を D を含む open set で $\bar{A}_n \downarrow D$ とすれば

Sem. on Probab.
Vol.1 1959年
P1-85

$$u_D(x) = \lim_{n\to\infty} u^*_{[A_n]}(x) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{M}} K^*_{[A_n]}(x,b)\,d\mu(b)$$

$K^*_{[A_n]}(x,b) \leqq K(x,b)$ だから Lebesgue - Fatou の Theorem により

$$u_D(x) = \int_{\mathbb{M}} K_D(x,b)\,d\mu(b)$$

<u>Lemma 5.3</u> Γ_m を Theorem 5.2 で作ったものとする.
そのとき, すべての non-negative χ_n- harmonic function u に対して $\quad u_{\Gamma_m}(x) \equiv 0$

Proof. Γ_n は $\mathbb{M}$ の closed subset だから compact. したがって Γ_n は $d(D_i^{(n)}) \leqq \frac{1}{3n}$ なる適当な compact set $D_i^{(n)}$ の有限和として表わすことが出来る.

即ち $\quad \Gamma_n = D_1^{(n)} \cup \cdots\cdots \cup D_{m(n)}^{(n)}$.

$$u_{\Gamma_n}(x) \leqq \sum_{i=1}^{m(n)} u_{D_i^{(n)}}(x) \qquad (\text{Theorem } 4.3\ (ix))$$ だから, すべての $1 \leqq i \leqq m(n)$ で $u_{D_i^{(n)}} \equiv 0$ を証明すれば十分である.

$\forall b \in D_i^{(n)}$ に対し, $A = \{\xi\,;\,\rho(\xi,b) < \frac{1}{2n}\}$ を考えると, それは $d(A) \leqq \frac{1}{n}$ なる open set で, しかも $D_i^{(n)}$ を含む. したがって

$$K_{D_i^{(n)}}(c,b) \leqq K^*_{[A]}(c,b) \leqq \frac{1}{2}$$

だから $\qquad K_{D_i^{(n)}}(c,b) \leqq \frac{1}{2}$ である.

一方 $\qquad u_{D_i^{(n)}}(x) = \int_{D_i^{(n)}} K(x,b)\,d\mu(b), \quad u_{D_i^{(n)}}(c) = \mu(D_i)$ だから

$$\left(u_{D_i^{(n)}}\right)_{D_i^{(n)}}(c) = \int_{D_i^{(n)}} K_{D_i^{(n)}}(c,b)\,d\mu(b) \leqq \frac{1}{2}\mu(D_i^{(n)}) = \frac{1}{2} u_{D_i^{(n)}}(c)$$

ところが $\quad (u_{D_i^{(n)}})_{D_i^{(n)}} = u_{D_i^{(n)}}(c)$ だから $\quad u_{D_i^{(n)}}(c) \leqq \frac{1}{2} u_{D_i^{(n)}}(c)$.
したがって $u_{D_i^{(n)}}(c) = 0$ でなければならない. 前節の Cor により

$$u_{D_i^{(n)}}(x) \equiv 0$$

<u>Lemma 5.4</u> $u(x)$ を non-negative χ_n- harmonic function とすれば, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\mathbb{M}_1$ の closed subset D が存在して

$$u(c) \leqq u_D(c) + \varepsilon$$

である. たゞし, 一般に D は $u(x)$ に depend する.

Proof. 任意に $\varepsilon > 0$ を取る. B_n は Γ_m を含む open set で $u_{\bar{B}_n}(c) \leqq 2^{-n}\varepsilon$ を満すものとする. 実際この様な B_n が存在することは Γ_n を含む open set $B_m^{(n)}$ を $\bar{B}_m^{(n)} \overset{(m\to\infty)}{\downarrow} \Gamma_n$ となるようにとれば $\lim_{m\to\infty} u_{\bar{B}_m^{(n)}}(x) = u_{\Gamma_n}(x) \equiv 0$

Sem. on Probab.
Vol.1 1959年
P1-85

だから，ある $m(n)$ が存在して $u_{\bar{B}^{(n)}_{m(n)}}(c) \leqq 2^{-n}\varepsilon$ である．$B^{(n)}_{m(n)} = B_n$ とおけばよい．

さて $C_n = \bigcup_{i=1}^{n} \bar{B}_i$ とおき $D_n = \overline{M - C_n}$ とおけば D_n は単調減少である．

$\bigcap_{n=1}^{\infty} = D_n$ とおけば $\lim_{n\to\infty} u_{D_n}(x) = u_D(x)$ となる（*Theorem* 4·3 (viii)）．

$B_n \cap D = \phi$ だから $D \leqq M_1$ である．又 $C_n \cup D_n = M$ だから

$$u(c) = u_M(c) \leqq u_{C_n}(c) + u_{D_n}(c) \leqq \sum_{i=1}^{n} u_{B_i}(c) + u_{D_n}(c)$$

$$\leqq \sum_{i=1}^{n} 2^{-i}\varepsilon + u_{D_n}(c)$$

$$= \varepsilon + u_{D_n}(c)$$

したがって $n \longrightarrow \infty$ とすれば $u(c) \leqq \varepsilon + u_D(c)$

Proof of Theorem 5·3. (i) 先ず canonical representation の存在を証明しよう．

Lemma 5.4. により $\forall \varepsilon_1 > 0$ に対して M_1 の closed subset D が存在して $u(c) \leq u_D(c) + \varepsilon_c$

であるが，$v(x) = u'(x) - u_D(x)$ とおけば，$v(x)$ は non-negative χ_n-harmonic function であり，$u(x) = v(x) + u_D(x)$ と書ける．しかも $v(c) < \varepsilon_1$ である．一方 $u_D(x) = \int_D K(x,b)\,d\mu(b)$ と書けるから，$u(x)$ は canonical representation を持つ部分 $u_D(x)\,(= u_1(x)$ とおく) と $v(x)\,(= u_1'(x)$ とおく）とに別けることが出来た．しかも $v(c) < \varepsilon_1$．

今 $\varepsilon_n > 0$ を $\varepsilon_u \downarrow 0$ となる数列とする．$u_1'(x)$ に上と同じことをくり返せば $u'(x) = u_2(x) + u_2'(x)$．

たゞし $u_2(x)$ は canonical representation をもつ部分であり，又 $u_2'(c)\,\varepsilon_2$．同様のことを $u_n'(x)$ について行えば

$$u_n'(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+1}'(x)$$

たゞし $u_{n+1}(x)$ は canonical representation をもつ部分であり，又 $u_{n+1}'(c) < \varepsilon_{n+1}$．$u_n'(c) < \varepsilon_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ だから $u_n'(x) \to 0$．故に

$$u(x) = \sum_{i=1}^{\infty} u_i(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_M K(x,b)\,d\mu_i(b)$$

となる．u_i に対応する canonical measure を μ_i とすると $\mu = \sum \mu_i$ も canonical measure となる．即ち

$$u(x) = \int_M K(x,b)\,d\mu(b) \qquad d\mu(b) = \sum_{i=1}^{\infty} d\mu_i(b)$$

Sem. on Probab.
Vol.1 1959年
P1-85

において$\mu(M_0)=0$である．

(ii) canonical representationの一意性を証明するためには，canonical measure μに対して(5·5式 $u_D(c)=\mu(D)$ がすべてのMのclosed subset に対して成立することを証明すればよい．

$u(x)$の canonical representation を

$$u(x)=\int_{M} K(x,b)d\mu(b)=\int_{M_1} K(x,b)d\mu(b)$$

とすれば Lemma 5.2により

$$u_D(x)=\int_{M} K_D(x,b)d\mu(b)=\int_{M_1} K_D(x,b)d\mu(b)$$

Theorem 5.1により $b\in M_1\cap D$のとき $K_D(x,b)\equiv K(x,b)$ であり，$b\in M_1\cap D^c$ のとき $K_D(x,b)\equiv 0$ だから

$$u_D(x)=\int_{M_1\cap D} K_D(x,b)\,d\mu(b)+\int_{M_1\cap D^c} K_D(x,b)d\mu(b)$$

$$=\int_{M_1\cap D} K(x,b)d\mu(b)=\int_D K(x,b)\,d\mu(b)$$

したがって $u_D(c)=\mu(D)$ である。

Corollary 1. $u_D(x)$ はM上のmeasure に近一意的に拡張される。

Proof. uに対応する canonical measure をμとすれば closed set Dに対しては

$$u_D(x)=\int_D K(x,b)\mu(db).$$

一般のBorel set Bに対しては$u_B(x)$ を右辺のB上の積分で定義すればよい．一意性は前節最后のRemark 1より明らか。

Corollary 2. Theorem 4·5 の表現が一意的であるための必要十分条件は $M_0=\phi$なることである．

Proof. 十分．$M_0=\phi\Rightarrow M=M_1$であるから Theorem 4.5 の表現は実は canonical である。

必要．$M_0\neq\phi$とする．$M_0\ni b_0$に対して $K(x,b_0)$ は少くとも canonical representationと，自分自身の2通りの表現をもつ。

Corollary 3. $M_1\neq\phi$.

Proof. fundamental sequence は必ず存在するから，trivial でないx_n-harmonic functionが存在する．これは$M_1\neq\phi$を示す。

Theorem 5.4 (i) representation の一意性。

Sem. on Probab.
Vol.1 1959年
P1-85

$u\in\mathcal{R}$ が M_1 上の bdd signed measure μ で

$$u(x)=\int_{M_1}K(x,b)\,d\mu(b) \tag{5.7}$$

と表現出来るとすれば，μ は u によって一意的に定まる。

(ii) $u\in\mathcal{R}$ が M_1 上の bdd signed measure μ を用いて (5.7) 式に表現出来るための条件は，u が x_n-harmonic であり，かつ

$$E_c(|u(x_n)|)\leq L<+\infty \qquad \text{for every } n\in T.$$

となることである。

Proof. (i) $u(x)=\int_{M_1}K(x,b)\,d\mu(b)=\int_{M_1}K(x,b)\,d\nu(b)$

と二通りに表現出来たとすれば

$$0=\int_{M_1}K(x,b)\,d(\mu-\nu)(b)$$

となる。したがって $\int_{M_1}K(x,b)\,d\mu(b)=0$ ならば $\mu\equiv 0$ を証明すればよい。Jordan の decomposition theorem によれば，μ は $\mu_1\geq 0$，$\mu_2\geq 0$ かつ $\mu_1\wedge\mu_2=0$ となる μ_1,μ_2 が存在して $\mu=\mu_1-\mu_2$ と分解出来る。

$$v(x)=\int_{M_1}K(x,b)\,d\mu_1(b)$$

とおけば $\int_{M_1}K(x,b)\,d(\mu_1-\mu_2)(b)=0$ だから

$$v(x)=\int_{M_1}K(x,b)\,d\mu_1(b)=\int_{M_1}K(x,b)\,d\mu_2(b)$$

となる。Theorem 5.3 より $v(x)$ の canonical 表現は一意的だから $\mu_1\equiv\mu_2$
したがって $\mu_1\wedge\mu_2\equiv\mu_1\equiv\mu_2\equiv 0$ でなければならない。
故に $\mu\equiv\mu_1-\mu_2\equiv 0$ が証明された。

(ii) 必要条件は Theorem 4.6 より明らかである。

十分条件．Theorem 4.6 により

$$u(x)=\int_M K(x,b)\,d\mu(b)=\int_M K(x,b)\,d\mu_1(b)-\int_M K(x,b)\,d\mu_2(b),$$
$$\mu_1\geq 0,\quad \mu_2\geq 0$$

ところが $\int_M K(x,b)\,d\mu_i(b)$ $(i=1,2)$ は nonnegative x_n-harmonic function だから，Theorem 5.3により canonical representation をもつ。したがって

$$\int_M K(x,b)\,d\mu_i(b)=\int_{M_1}K(x,b)\,d\nu_i(b).$$

Sem. on Probab.
Vol.1 1959年
P1-85

$$\nu_1 - \nu_2 \equiv \nu \text{ とおいて } u(x) = \int_{M_1} K(x, b)\, d\nu(x).$$

9. これまで χ_n-harmonic function の canonical 表現の一意性を論じて来たが，こゝでは χ_n-superharmonic function の一意的な表現定理をいくつか与える．最后の定理はふつうの superharmonic function の Riesz decomposition Theorem (Radó [11], p44~45) にあたるものである．

前節最后の定理によって，任意の nonnegative χ_n-superharmonic function uは

$$u(x) = \int_{\bar{E}} K(x, \xi)\, d\mu(\xi) = \int_E K(x, y)\, d\mu(y) + \int_{M} K(x, b)\, d\mu(b)$$

とあらわすことができる。才2項は非負の χ_n-harmonic function であるから canonical representation をもつ。したがって結局 u は

$$u(x) = \int_E K(x, y)\, d\mu(y) + \int_{M_1} K(x, b)\, d\nu(b) \qquad (5.8)$$

という形の表現をもつ。この表現が一意的であることを示そう。そのために非負の χ_n-superharmonic function uに対しても§4と同じようにして $u_D(x)$ (D : closed subset of M) を定義すると，Theorem 4.2 は (v) を除いてすべて成り立つ。

<u>Lemma 5.5</u> 任意の $y \in E$ と M の closed subset Dに対して，

$$K_D(x, y) \equiv 0$$

である，

Proof. (i) $K^*_{\{y\}}(c, y) = 1$.

なぜなら

$$K^*_{\{y\}}(c, y) = E_c\{K(x_{\sigma_y}, y)\}$$

$$= \frac{1}{P_c(\sigma_y < \infty)} E_c\{P_{x_{\sigma_y}}(\sigma_y < \infty)\} = \frac{P_c(\sigma_y < \infty)}{P_c(\sigma_y < \infty)} = 1.$$

(ii) 前節の Lemma によって，任意の nonnegative χ_n-superharmonic function に対して，

$$u^*_{\{y\}}(x) = \int_{\{y\}} K(x, z)\, d\mu(z) = u^*_{\{y\}}(c) \cdot K(x, y) \qquad (5.9)$$

が成り立つ。$u(x) = K(x, y)$ とおき，(i) を考慮して

$$K^*_{\{y\}}(x, y) = K(x, y)$$

Sem. on Probab.
Vol.1 1959年
P1-85

である。一方 $K(x,y) \geqq K_D(x,y) \geqq 0$ で $K_D(x,y)$ は x_n-harmonic であるから、 $v(x) = K(x,y) - K_D(x,y)$ は、 x_n-superharmonic function である。

$$K(x,y) = K^*_{\{y\}}(x,y) = \{K_D\}^*_{\{y\}}(x,y) + v^*_{\{y\}}(x)$$
$$\leqq K_D(x,y) + v(x) = K(x,y).$$

したがって、 $K_D(x,y) = \{K_D\}^*_{\{y\}}(x,y) = (K_D)^*_{\{y\}}(c,y) \cdot K(x,y)$ ((5.9)より).

$$= K_D(c,y) \cdot K(x,y).$$

ところが、$K_D(x,y)$ は、x_n-harmonic, $K(x,y)$ は $x=y$ で strictly x_n-superharmonic であるから、$K_D(c,y)=0$. すなわち $K_D(x,y) \equiv 0$ でなければならない。

このLemmaから(5.8)の表現の一意性は明らかである。実際、任意の closed D in $\mathbb{M}$ に対して

$$u_D(x) = \int_E K_D(x,y)\,d\mu(y) + \int_{\mathbb{M}_1} K_D(x,b)\,d\nu(b)$$
$$= \quad 0 \quad + \int_D K(x,b)\,d\nu(b) \quad \text{(Theorem 5.1 (ii))}.$$

$x=c$ とおいて $u_D(c) = \nu(D)$.

次に μ の一意性。

$E \ni y_0$ を任意に固定する。

$$E_{y_0}(u(x_{\sigma_{\{y_0\}^c}})) = \int_E E_{y_0}(K(x_{\sigma_{\{y_0\}^c}}, y))\,d\mu(y) + \int_{\mathbb{M}_1} E_{y_0}(K(x_{\sigma_{\{y_0\}^c}}, b))\,d\nu(b)$$
$$= \int_{E-\{y_0\}} K(y_0,y)\,d\mu(y) + E_{y_0}(K(x_{\sigma_{\{y_0\}^c}}, y_0))\,\mu(\{y_0\}) + \int_{\mathbb{M}_1} K(y_0,b)\,d\nu(b).$$

こゝで $K(x,y)$ が $x \neq y$ で、$K(x,b)$ が全体で、x_n-harmonic なことを用いた。(5.8)において $x=y_0$ とおき、上式の両辺を引くと、

$$u(y_0) - E_{y_0}(u(x_{\sigma_{\{y_0\}^c}})) = [K(y_0,y_0) - E_{y_0}\{K(x_{\sigma_{\{y_0\}^c}}, y_0)\}]\,\mu(\{y_0\}) \quad (5.10)$$

右辺の [ ] の中は strictly positive であるから $\mu(\{y_0\})$ が unique に定まる。

又上の証明から分るように、u が(5.8)の第1項だけで書けるための必要十分条件は $u_{\mathbb{M}}(x) \equiv 0$ (或は $u_{\mathbb{M}}(c)=0$) なることである。このよ

Sem. on Probab.
Vol.1 1959年
P1-85

うな函数を Hunt [9] では Green measure $G(x, dy)$ の potential と呼んでいる。Hunt の定義との関連をはっきりさせるためには，次のことを注意すればよい：(5.10) で $\mu(\{y_0\})$ を与えたが，両辺を $\gamma(y_0)$ (§4) で割ると

$$\underline{\underline{G}}\ u(y_0) = \underline{\underline{G}}\ K(y_0, y_0)\mu(\{y_0\})$$

となる。$K(x, y) = \dfrac{G(x, y)}{G(c, y)}$ に注意すると $\underline{\underline{G}}\ K(y_0, y_0) = \dfrac{1}{G(c, y_0)}$ が容易に示されるから，結局 (5.8) の μ は前節の fundamental Lemma の時と同じく

$$d\mu(y) = \underline{\underline{G}}\ u(y) \cdot G(c, dy)$$

で与えられるわけである。これを用いて (5.8) の才1項を書きなおすと

$$\int_E K(x, y)\mu(dy) = \int_E \underline{\underline{G}}\ u(y) \cdot G(x, dy)$$

となる。

最後に μ, ν が一般の bounded signed measure のときの表現の一意性は，Theorem 5.4 (i) と同様に証明される。

以上を定理の形にまとめておく。

<u>Theorem 5.5</u> (i) 任意の nonnegative x_n-superharmonic function は，(5.8) の形に表現できる。こゝで μ, ν は次のようにして u から一意的に定まる。

$$\nu(D) = u_D(c), \quad \mu(A) = \int_A \underline{\underline{G}}\ u(y) \cdot G(c, dy).$$

ただし D は M_1 の closed subset, A は E の任意の subset である。

(ii) u が potential であるための必要十分条件は，$u_M(c) = 0$.

(iii) $u \in \mathbb{R}$ が，bounded signed measure μ (over E), ν (over M_1) によって (5.8) の形に表現出来るとすれば，そのような表現は一意的である。

<u>Theorem 5.6</u> (Riesz decomposition Theorem)

$u \in \mathbb{R}$ が

$$u = (\text{potential}) + (x_n\text{- harmonic function}) \qquad (5.11)$$

の形に書けるための必要十分条件は，u が x_n-superharmonic function で，かつ u をこえない x_n-harmonic function v が存在することである。この場合 (5.11) の分解は1意的で，右辺の才2項は，u をこえない x_n-harmonic function の中で最も大きいものである。

Sem. on Probab.
Vol.1 1959年
P1-85

Proof. <u>前半</u>. 必要は(5.11)の才1項が$\geqq 0$だから明らか。
十分. $u \geqq v$, v; x_n-harmonic function とすると, $w = u - v$は non-negative x_n-superharmonic であるから, 前の定理により, (potential) + (nonnegative x_n-harmonic function)と書ける. vを右辺に移項して(5.11)の分解がえられる.

<u>后半</u>. 最初にuをこえない最大のx_n-harmonic function が存在することを示す。

簡単のために$E_x(u(x_{\sigma_{\{x\}^c}}))$を$\hat{\pi}u(x)$と書く。$\hat{\pi}^n$は$\hat{\pi}$の$n$回のoperation をあらわす。

$u \geqq \hat{\pi}u$であるから$\hat{\pi}^n u$はnに関して monotone decreasing. しかも$u \geqq v$なる任意のx_n-harmonic function (そのようなvは少くとも1つ存在する)に対して$\hat{\pi}^n u \geqq \hat{\pi}^n v = v$. したがって $v_1 = \lim_{n\to\infty} \hat{\pi}^n u$ はRにでくする。Lebesgue - Fatou の Theorem からv_1はx_n-harmonicなことが示される. v_1がuをこえない最大のx_n-harmonic function であることは明らか.

あとは $u = w_1 + w_2$ (w_1はpotential, w_2はx_n-harmonic)ならば, $w_2 = v_1$であることを証明すれば十分である。$w_2 \leqq v_1$は明らかだから$v_1 \leqq w_2$を示す.

$$w_1 = u - w_2 = (u - v_1) + (v_1 - w_2).$$

最右の式の各項は nonnegative x_n-superharmonic, w_1はpotential であるから

$$0 = (w_1)_M(c) = (u - v_1)_M(c) + (v_1 - w_2)_M(c) \geqq (v_1 - w_2)_M(c) \geqq 0.$$

特に$v_1 - w_2$は nonnegative x_n-harmonic だから, 上式によって

$$0 = (v_1 - w_2)_M(c) = (v_1 - w_2)(c).$$

故に $\quad v_1(x) = w_2(x) \quad$ である.

§6. 例

10. 本来§1で証明すべきであったrecurrenceに関するlemmaを1つ与える. これは§8でも使う.

<u>Lemma 6.1</u> x_nをtime discrete Markov process over Eとする(§3の条件は仮定しない)。Fがfinite setで Fの各点がnon-

Sem. on Probab.
Vol.1 1959年
P1-85

recurrent であれば，Eの任意の点 x に対して

$$P_x\{F \ni x_n(\omega) \quad \text{for } {}^\forall n \geqq {}^\exists n_0\} = 1 \tag{6.1}$$

Proof. (i) y を nonrecurrent point とする．$A_y = \{x_n(\omega) = y$ for infinitely many $n\}$ とおく．

y への n-th passage time σ_n を考える，すなわち

$$\sigma_1(\omega) \equiv \sigma_y(\omega), \qquad \sigma_1'(\omega) = \sigma_y(\omega) + \sigma_{\{y\}^c}(\omega^+_{\sigma_y}),$$
$$\vdots$$
$$\sigma_n(\omega) = \sigma_{n-1}'(\omega) + \sigma_y(\omega^+_{\sigma_{n-1}'}),\ \sigma_n'(\omega) = \sigma_n(\omega) + \sigma_{\{y\}^c}(\omega^+_{\sigma_n}),$$

とする，$P_y\{\sigma_{\{y\}^c}(\omega) < \infty\} = 1$ であるから，strong Markov property によって，任意の $x \in E$ に対し

$$P_x\{\sigma_n(\omega) < \infty,\ \sigma_n'(\omega) < \infty\} = P_x(\sigma_n(\omega) < \infty).$$

したがって

$$A_y = \{\sigma_n < \infty \ \text{ for every } n\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\{\sigma_n < \infty\}.$$

ところが

$$P_x(\sigma_n < \infty) = P_x(\sigma_1 < \infty)\left[P_y(\sigma_2 < \infty)\right]^{n-1} \longrightarrow 0.$$

$$(P_y(\sigma_2 < \infty) < 1 \text{ より}).$$

故に

$$P_x(A_y) = 0.$$

(ii) $A = \{x_n(\omega) \in F$ for infinitely many $n\}$ とおくと，

$$A \subseteq \bigcup_{y \in F} A_y$$

したがって $P_x(A) \leqq \sum_{y \in F} P_x(A_y) = 0.$

一方 $A = \{F \ni x_n(\omega) \quad \text{for } {}^\forall n \geqq {}^\exists n_0\}^c$

であるから (6.1) が証明された。

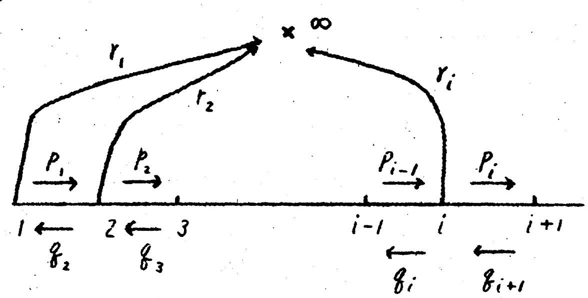
11.

Ex I positive integer の上の random walk.

$E = \{1, 2, 3, \cdots\cdots\}$ の上の次の substochastic matrix に対応する Markov process を random walk と呼ぶ。

$\pi(1, 2) = p_1 > 0, \quad \pi(1, \infty) = r_1 \geqq 0, \quad p_1 + r_1 = 1$

Sem. on Probab.
Vol.1 1959年
P1-85



$i \geqq 2$に対しては
$\pi(i, i-1) = q_i > 0$,
$\pi(i, i+1) = p_i > 0$,
$\pi(i, \infty) = r_i \geqq 0$,
$q_i + p_i + r_i = 1$.

Eの任意の2点が互にaccessibleであるから，§1のLemmaによって
(a) Eはirreducible recurrent setであるか，
(b) Eのすべての点がnonrecurrentであるか
である．

(a)の場合は，明らかに$r_n = 0$, $n = 1, 2, 3, \cdots\cdots$である。更に§9で述べるようにnonnegative x_n-superharmonic functionはnonnegative constantに限る。

(b)の場合，§3の3つの仮定を満す。簡単のためにcenter Cを1にとる．

$x < y < z$の時

$$P_x(\sigma_z < \infty) = P_x(\sigma_y < \infty)\, P_y(\sigma_z < \infty)$$

が成り立つから，$\forall x$に対して$x < y$をとれば

$$K(x, y) = \frac{P_x(\sigma_y < \infty)}{P_1(\sigma_y < \infty)} = \frac{1}{P_1(\sigma_x < \infty)}.$$

したがって，Martin boundary $\mathbb{M}$は1点である．これを$+\infty$であらわす。対応するx_n-harmonic functionは

$$K(x, +\infty) = \frac{1}{P_1(\sigma_x < \infty)}$$

で与えられる。又前節の結果をapplyして，$K(x, +\infty)$はminimal x_n-harmonicで，任意のnonnegative x_n-harmonic functionは$K(x, +\infty)$の定数倍で与えられる。

特に我々のprocessがconservative，すなわち$r_n = 0$ for every n，の時にはLemma 6.1によって

$$P_1(\sigma_x < \infty) = 1. \quad \text{for every } x \in E$$

であるから，x_n-harmonic functionは定数に限る．しかしx_n-superharmonic functionは色々ある．これがcase (a)との違いである．

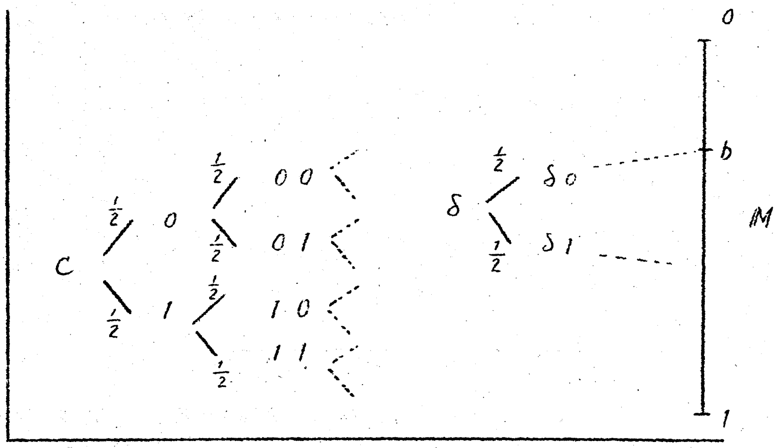
Sem. on Probab.
Vol.1 1959年
P1-85

x_n が $E=\{\cdots\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\cdots\}$ の上の random walk の場合は，上と同じ考えで，境界は2点 $-\infty$，と $+\infty$ で boundary x_n-harmonic function は（0 を center に取って）

$$K(x,+\infty)=\frac{1}{P_0(\sigma_x<\infty)} \qquad x\geq 0$$
$$\qquad\qquad = P_x(\sigma_0<\infty) \qquad x<0,$$
$$K(x,-\infty)=P_x(\sigma_0<\infty) \qquad x\geq 0$$
$$\qquad\qquad =\frac{1}{P_0(\sigma_x<\infty)} \qquad x<0$$

となる。各々は minimal x_n-harmonic で，任意の x_n-harmonic function はこれらの linear combination で与えられる。

Ex II. dyadic branching scheme (Feller [7], 17, Ex IV)



Eは或る1点cと，$a_1a_2\cdots a_k$（$a_i=0$ 又は 1，$k=1,2,3,\cdots$）の形の点全体から成る可附番集合とする。$a_1a_2\cdots\cdots a_k$ の形の点を長さ k の点と呼ぶ。δが長さ k の点ならば δ0，δ1は長さ $(k+1)$ の点をあらわすわけである。$\delta b_1\cdots b_l$ の形の点をδの先にある点という。E上の次の stochastic matrix に対応する Markov process を考える。

$$\pi(c,0)=\pi(c,1)=\frac{1}{2},$$
$$\pi(\delta,\delta 0)=\pi(\delta,\delta 1)=\frac{1}{2}.$$

明らかに c が唯1つの center で，§3の3つの仮定を満す。この process の Martin 境界を構成しよう。

Sem. on Probab.
Vol.1 1959年
P1-85

$$K(x, y) = \frac{P_x(\sigma_y < \infty)}{P_c(\sigma_y < \infty)} .$$

(i) $[0, 1] \ni {}^{\forall} b$ を fix し，その２進法展開を $0. a_1 a_2 a_3 \cdots$ とする．（有理数の時も無限数列としてあらわすことにする．たとえば $0 = 0.00 \cdots 00 \cdots$；$1 = 0.111 \cdots 11 \cdots$，等）．今 $\{y_n\}$ が或る番号以后は，上の無限列の始めの有限个（勿論 n 毎に異なる）によってあらわされているとする．すなわち $y_n = a_1 a_2 \cdots a_{i(n)}$ である．y_n が E に limit point をもたないとすると $n \to \infty$ として $i(n) \to \infty$ である．このような y_n が fundamental sequence であることを証明する．明らかに

$$K(x, y_n) = \frac{P_x(\sigma_{y_n} < \infty)}{P_c(\sigma_{y_n} < \infty)} = \frac{1}{P_c(\sigma_x < \infty)} \quad ; y_n \text{が} x \text{の先にある時}$$
$$= 0 \quad ; y_n \text{が} x \text{の先にない時}.$$

である．y_{n_0} が x の先にあれば，$n \geqq n_0$ に対しても y_n は x の先にある．又或る番号の y_n が x の先にあるためには x も $a_1 \cdots a_k$ の形でなければならないから，結局

$$\lim_{n\to\infty} K(x, y_n) = \frac{1}{P_c(\sigma_x < \infty)} = 2^k ; x \text{が } a_1 \cdots a_k \text{ の形の時}$$
$$= 0 \quad ; \text{それ以外の時}$$

となる。したがって $\{y_n\}$ は確かに fundamental sequence である。この極限函数を $K(x, b)$ であらわす．$b \neq b'$ なら明らかに $K(x, b) \neq K(x, b')$ である。

(ii) 任意の fundamental sequence $\{y_n\}$ が (i) の性質をもつことを示す．実際そうでないとすると，適当に長さ k の異なる２点，$\delta = a_1 \cdots a_k$ と $\delta' = b_1 \cdots b_k$ が存在して δ の先にも，δ' の先にも $\{y_n\}$ の無限个の点が存在する。そこで $\{y_n\}$ から部分列 $\{y_{n(i)}\}$ と $\{y_{m(i)}\}$ をえらんで各々が，$b = 0. a_1 \cdots a_k a_{k+1} a_{k+2} \cdots$，$b' = 0. b_1 \cdots b_k b_{k+1} b_{k+2} \cdots$，の最初の有限個によってあらわされる点だけから成るように出来る．そこで (i) の絆論を繰返して

$$\lim_{i\to\infty} K(x, y_{n(i)}) = K(x, b) \neq K(x, b') \lim_{i\to\infty} K(x, y_{m(i)}) \quad (\because b \neq b')$$

これは $\{y_n\}$ が fundamental sequence であることに反する。

(iii) (i)(ii) によって Martin 境界 M は，我々の場合 $[0, 1]$ と集合として一致することがわかった。次にその ρ-topology が普通の topology と同値であることを示そう。ふつうの距離を $|b - b'|$ と書くことにする．

今，$x \in E$を任意に固定する．xの長さをkとする．$|b_n - b| \to 0$ とすると，十分大きい$n \geqq n_0$に対してはb_nとbの2進法展開は少くもk番目迄は一致する。したがって(i)によって

$$K(x, b_n) = K(x, b) \qquad for\ \forall n \geqq n_0.$$

である．これは

$$\lim_{n\to\infty} K(x, b_n) = K(x, b) \qquad for\ every\ x \in E$$

を意味する．Lemma 3.2 から $\rho(b_n, b) \to 0$である。

逆はtopologyの一般論から明らかである（compact setからcompact setへの1対1連続写像はhomeomorphic である）。

(iv) $M = M_1$の証明

$b = 0$. $a_1\ a_2 \cdots a_k \cdots$ の近傍の列として$A_n = \{a_1 \cdots a_k ; k \geqq n\}$をとる。

$$1 \geqq K_{\{b\}}(c, b) = \lim_{n\to\infty} K^*_{A_n}(C, b) = \lim_{n\to\infty} E_c(K(x_n, b)) = 1.$$

(v) Feller [7] で述べられているようにFeller境界も集合としては[0, 1]と一致する．しかしそのtopologyはtotally disconnected なものを与えてしまう．はっきりした理由を云うことは出来ないが，Fellerによれば「これは不自然で，この場合 [0, 1] 上のふつうのtopologyを与える境界が自然である」という。Martin境界は，その意味で自然な境界を与えているわけである。

(vi) 最后にFeller の結果を我々の立場からcharacterizeしておく。§8.で証明する定理によって，Feller の sojourn solution $S(x, A) = P_x(A \ni x_n\ \ for\ \forall n \geqq \exists n_0)$は，$\partial A = \bar{A} - A$ ($\bar{A}$は$\bar{E}$におけるAのclosure）へのharmonic measure $h(x, \partial A) = P_x(\lim_{n\to\infty} x_n \in \partial A) = (\chi_E)_{\partial A}(x)$と一致する。したがって

$$S(x, A) = \int_{\partial A} K(x, b)\mu(db). \qquad (6.2)$$

とあらわすことができる。

ところが $S(x, A) = 1$ ；xの先の点が無限に多くAに含まれる場合
$= 0$ ；それ以外の時

である．一方(6.2)の右辺で$\mu(db) = db$ ([0,1] 上のLebesgue measure)とおくと，同じ函数がえられるから，表現の一意性によって，$\mu(db) = db$でなければならない．すなわち，Lebesgue measure 正のset ∂A とsojourn solutionは1対1に対応する。

Sem. on Probab.
Vol.1 1959年
P1-85

Ex III. $\mathcal{M}_0 \neq \phi$

$E=\{0, 1, 2, \cdots\}$ とし, Markov process $(W, \mathcal{B}, P_x(\cdot), x \in E^*)$ が次の条件をみたすとする。

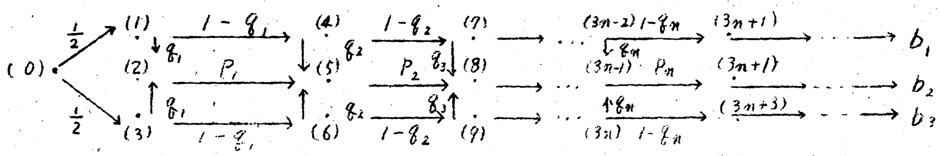
$$P_0(x_1=1) = P_0(x_1=3) = \frac{1}{2}$$

$$P_{3n-2}(x_1=3n-1) = q_n, \quad P_{3n-2}(x_1=3n+1) = 1-q_n$$

$$P_{3n-1}(x_1=3n+2) = p_n, \quad P_{3n-1}(x_1=\infty) = 1-p_n$$

$$P_{3n}(x_1=3n-1) = q_n, \quad P_{3n}(x_1=3n+1) = 1-q_n$$

但し $\displaystyle \frac{n\,p_{n-1}}{q_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ とする。



$P_x(\sigma_y<\infty)=P(x,y)$ とおけば

$$P(0,3n-2) = P_0(x_n=3n-2) = \frac{1}{2}\prod_{l=1}^{n-1}(1-q_l)$$

$$P(0,3n) = P_0(x_n=3n) = \frac{1}{2}\prod_{l=1}^{n-1}(1-q_l)$$

$$P(0,3n-1) = P_0(x_n=3n-1) = \sum_{l=1}^{n}\left(\prod_{t=1}^{l-1}(1-q_t)\right)\cdot q_l\cdot p_l\cdots p_{n-1}$$

となることがわかる。さらに

$$P(x,3m-2) = \begin{cases} \displaystyle\prod_{l=n}^{m-1}(1-q_l) & x=3n-2, \quad m>n \\ 0 & \text{他のとき} \end{cases}$$

$$P(x,3m-1) = \begin{cases} \displaystyle\prod_{l=n}^{m-1} p_l & x=3n-1, \quad n<m \\ \displaystyle\sum_{l=n}^{m-1}\prod_{t=n}^{l-1}(1-q_t)\,q_l\cdot p_l\cdots p_{m-1}\,; & x=3n-2, \text{ or } 3n \\ & \text{但し } x<m \\ 0 & \text{他のとき} \end{cases}$$

$$P(x,3m) = \begin{cases} \displaystyle\prod_{l=n}^{m-1}(1-q_l) & x=3n, \quad m>n \\ 0 & \text{他のとき} \end{cases}$$

であるから $\displaystyle K(x,3m-2) = \frac{P(x,3m-2)}{P(0,3m-2)}$

Sem. on Probab.
Vol.1 1959年
P1-85

$$
= \begin{cases} \dfrac{2}{\prod_{l=1}^{n-1}(1-q_l)} & x = 3n-2, \quad n < m \\ 0 & 他のとき \end{cases}
$$

である. $y_m^{(1)} = 3m-2$とおけば $\{y_m^{(1)}\}$ はfundamental sequence である.
実際

$$
\lim_{m\to\infty} K(x, 3m-2) = \begin{cases} \dfrac{2}{\prod_{l=1}^{n-1}(1-q_l)} & x = 3n-2 \\ 0 & x = 3n,\ 3n-1 \end{cases}
$$

$\{y_m^{(1)}\}$に対応する boundary pt をb_1とあらわす。
同様にして $y_m^{(3)} = 3m$ とおけば, $\{y_m^{(3)}\}$ はfoundamental sequence である.
$\{y_m^{(3)}\}$ に対応するMの点をb_3とすれば

$$
K(x, b_3) = \begin{cases} \dfrac{2}{\prod_{l=1}^{n-1}(1-q_l)} & x = 3n \\ 0 & x = 3n-1,\ 3n-2 \end{cases}
$$

次に fundamental sequence $\{y_m^{(2)} = 3m-1\}$に対応するMの点をb_2 とすれば

$x = 3n-1$, $n < m$ のとき

$$
K(x, 3m-1) = \frac{\prod_{l=n}^{m-1} p_l}{\sum_{l=1}^{m} \prod_{t=1}^{l-1} (1-q_t)\cdot q_l \cdot p_l \cdots p_{m-1}} < \frac{p_{m-1}}{\prod_{l=1}^{m-1}(1-q_l)\, q_m}
$$

$$
< \frac{p_{m-1}}{q_m\, q} \xrightarrow[(m\to\infty)]{} 0
$$

$x = 3n-2$, $n < m$ のとき

$$
K(x, 3m-1) = \frac{\sum_{l=n}^{m} \prod_{t=n}^{l-1} (1-q_t)\cdot q_l\, p_l \cdots p_{m-1}}{\sum_{l=1}^{m} \sum_{t=1}^{l-1} (1-q_t)\cdot q_l \cdot p_l \cdots p_{m-1}}
$$

$$
= \frac{\prod_{l=n}^{m-1}(1-q_l)\, q_m + o(q_m)}{\prod_{l=1}^{m-1}(1-q_l)\cdot q_m + o(q_m)} \xrightarrow[(m\to\infty)]{} \frac{1}{\prod_{l=1}^{n-1}(1-q_l)}
$$

Sem. on Probab.
Vol.1 1959年
P1-85

$x=3n,\ n<m$ のときも，$x=3n-2$ のときと同様にして

$$K(x,\ 3m-1)\xrightarrow[(m\to\infty)]{}\frac{1}{\prod_{l=1}^{n-1}(1-q_l)}$$

したがって

$$K(x,b_2)=\begin{cases}\dfrac{1}{\prod_{l=1}^{n-1}(1-q_l)} & x=3n-2 \quad \text{or} \quad 3n \\ 0 & x=3n-1\end{cases}$$

故に

$$K(x,b_2)=\frac{1}{2}\left(K(x,b_1)+K(x,b_3)\right)$$

これは $b_2\in M_0$ を示している。

Remark. 上にあげた例は Martin [10]，§，Ex 2（P167）の discrete analogue と考えることが出来る。

12.

<u>Ex IV.</u> Space-time Markov process attached to the Bernoulli sequence $B(\frac{1}{2})$.

$E=\{(n,i);\ n\geq i,\ n.\ i=0.\ 1.\ 2,\cdots\}$ とし，$x_n(\omega)$ は次の transition probability で定められているとする。

$$\pi'((n,i),(n+1,i))=\pi'((n,i),(n+1,i+1))=\frac{1}{2}.$$

<u>Definition 6.1</u> 上の process x_n を <u>space-time $B(\frac{1}{2})$-process</u> という。§1 において上の transition probability に対応する Markov process が存在することは保証されているが（Theorem 1.2），又，次のようにして構成することも出来る。

$(\Omega,\ \mathbb{F},\ P)$ を abstract probability field とする。Ω の element を $\tilde{\omega}$ で表わすことにする。$\{y_n(\tilde{\omega});\ n\geq 1\}$ が independent な random variables の sequence で $P(y_n(\tilde{\omega})=1)=P$，$P(y_n(\tilde{\omega})=0)=1-P$ をみたすとき，$\{y_n(\tilde{\omega});\ n\geq 1\}$ を parameter P の Bernoulli sequence といゝ $B(P)$ と書く。今後，特に $p=\frac{1}{2}$ 即ち $B(\frac{1}{2})$ を考える。

$y_0(\tilde{\omega})\equiv 0$ なる random variable を考え $S_k(\tilde{\omega})=\sum_{l=0}^{k}y_l(\tilde{\omega})$ とおき，さらに $x\in E^*=E\cup\infty$，$k\in T=\{0,\ 1,\ 2,\cdots,+\infty\}$ に対し

$$\Delta_k^x(\tilde{\omega})=\begin{cases}x+(k,\ S_k(\tilde{\omega})) & \text{for } k\neq+\infty \quad x\in E \\ \infty & \text{for } k=+\infty\end{cases}$$

Sem. on Probab.
Vol.1 1959年
P1-85

$$\infty \qquad\qquad\qquad \text{for} \quad x = \infty$$

$$\mathscr{A}^x(\tilde{\omega}) = \{\mathscr{A}^x_k(\tilde{\omega})\ ;\ k = 0, 1, 2, \cdots, +\infty\}$$

とおけば $P\{\tilde{\omega}\ ;\ \mathscr{A}^x(\tilde{\omega}) \in W\} = 1$ である。なぜなら

$$\{\tilde{\omega}\ ;\ \mathscr{A}^x(\tilde{\omega}) \in W^c\} = \{\tilde{\omega}\ ;\ \mathscr{A}^x(\tilde{\omega}) \notin E^{*T}\} \cup \{\tilde{\omega}\ ;\ \mathscr{A}^x(\tilde{\omega}) \in E^{*T} - W\}$$

$$= \{\tilde{\omega}\ ;\ \mathscr{A}^x(\tilde{\omega}) \notin E^{*T}\} \cup \{\tilde{\omega}\ ;\ \mathscr{A}^x(\tilde{\omega}) \in E^{*T},\ {}^{\exists}n.\ \mathscr{A}^x_n(\tilde{\omega}) = \infty,$$

$$\mathscr{A}^x_{n+1}(\tilde{\omega}) \neq \infty\} \cup \{\mathscr{A}^x_{+\infty}(\tilde{\omega}) \neq \infty\}.$$

したがって $\mathscr{A}^x(\tilde{\omega})$ の定義より $\{\tilde{\omega}\ ;\ x(\tilde{\omega}) \in E^{*T},\ {}^{\exists}n.\ \mathscr{A}^x_n(\tilde{\omega}) = \infty.$

$$\mathscr{A}^x_{n+1}(\tilde{\omega}) \neq \infty\} = \phi \qquad \{\mathscr{A}^x_{+\infty}(\tilde{\omega}) \neq \infty\} = \phi$$

さらに $P\{\tilde{\omega}\ ;\ \mathscr{A}(\tilde{\omega}) \notin E^{*T}\} = 0$ だから結局 $P(\tilde{\omega}\ ;\ \mathscr{A}^x(\tilde{\omega}) \in W^c) = 0$ 即ち $P(\tilde{\omega}\ ;\ \mathscr{A}^x(\tilde{\omega}) \in W) = 1$. 次に $\{\tilde{\omega}\ ;\ \mathscr{A}^x(\tilde{\omega}) \in B\ ;\ B \in \mathbb{B}\} \in \mathbb{F}$ である。なぜなら B として $\{w\ ;\ w_k \in A\}$ をとれば

$$\{\tilde{\omega}\ ;\ \mathscr{A}^x(\tilde{\omega}) \in B\} = \{\tilde{\omega}\ ;\ \mathscr{A}^x(\tilde{\omega}) \in W,\ \mathscr{A}^x_k(\tilde{\omega}) \in A\} = \{\mathscr{A}^x(\tilde{\omega}) \in W\}$$

$$\cap \{x + (k,\ s_k(\tilde{\omega})) \in A\} \in \mathbb{F}.$$

したがって, ${}^{\forall}B \in \mathbb{B}$ に対して $P\{\tilde{\omega}\ ;\ \mathscr{A}^x(\tilde{\omega}) \in B\}$ が *well defined* である。

<u>*Lemma 6.2*</u> $P_x(B) \equiv P\{\tilde{\omega}\ ;\ \mathscr{A}^x(\tilde{\omega}) \in B\}$ により $P_x(B)$ を定義すれば $(W,\ \mathbb{B},\ P_x(\cdot),\ x \in E^*)$ は *space-time* $B(\frac{1}{2})$ *Markov process* である。

Proof. 先ず *Markov process* であることを証明しよう。

(P.1) $P_x(W) = P(\tilde{\omega}\ ;\ \mathscr{A}^x(\tilde{\omega}) \in W) = 1$ だから $P_x(\cdot)$ は x を *fix* すれば *probability measure* である。

(P.2) $P_x(w\ ;\ w_0 = x) = P(\tilde{\omega}\ ;\ \mathscr{A}^x_0(\tilde{\omega}) = x) = P(\tilde{\omega}\ ;\ (0,\ s_0(\tilde{\omega})) = (0, 0))$

$$= P(\tilde{\omega}\ ;\ y_0(\tilde{\omega}) = 0) = 1.$$

(P.3) (*Markov property*) $\pi^n(a, b) = P_a(x_n = b)$ とする。

$$P_x(x_{i_1}(w) \in A_1, \cdots, x_{i_n}(w) \in A_n) = P(\tilde{\omega}\ ;\ \mathscr{A}^x_{i_1}(\tilde{\omega}) \in A_1, \cdots \mathscr{A}^x_{i_n}(\tilde{\omega}) \in A_n)$$

$$= \sum_{x_{i_1} \in A_1, \cdots, x_{i_n} \in A_n} P(\tilde{\omega}\ ;\ \mathscr{A}^x_{i_1} = x_{i_1}, \cdots, \mathscr{A}^x_{i_n} = x_{i_n})$$

$$= \sum_{x_{i_1} \in A_1, \cdots, x_{i_n} \in A_n} P(\tilde{\omega}\ ;\ (i_1,\ s_{i_1}(\tilde{\omega})) = x_{i_1} - x, \cdots, (i_n,\ s_{i_n}(\tilde{\omega})) = x_{i_n} - x)$$

$$= \sum_{x_{i_1} \in A_1, \cdots, x_{i_n} \in A_n} P(\tilde{\omega}\ ;\ (i_1,\ s_{i_1}(\tilde{\omega})) = x_{i_1} - x,\ (i_2 - i_1,\ s_{i_2} - s_{i_1}) = x_{i_2} - x_{i_1},$$

$$\cdots (i_n - i_{n-1},\ s_{i_n} - s_{i_{n-1}}) = x_{i_n} - x_{i_{n-1}})$$

$$= \sum_{x_{i_0} \in A, \cdots, x_{i_n} \in A_n} P(\tilde{\omega}\ ;\ (i_1,\ s_{i_2}) = x_{i_2} - x) \cdot P(\tilde{\omega}\ ;\ (i_2 - i_1,\ s_{i_2} - s_{i_1}) = x_{i_2} - x_{i_1})$$

Sem. on Probab.
Vol.1 1959年
P1-85

$$\cdots\cdot P(\tilde{\omega};\ (i_n - i_{n-1},\ s_{i_n} - s_{i_{n-1}}) = x_{i_n} - x_{i_{n-1}}) \qquad (*)$$

ところが各 $y_\nu(\tilde{\omega})$ は同じ分布にしたがうから. $s_{i_2} - s_{i_1} = \sum_{\nu=i_1}^{i_2} y_\nu$ と $s_{i_2-i_1} = \sum_{\nu=0}^{i_2-i_1} y_\nu$ も同じ分布にしたがう。したがって

$$P(\tilde{\omega};\ (i_2 - i_1,\ s_{i_2} - s_{i_1}) = x_{i_2} - x_{i_1}) = P(\tilde{\omega};\ (i_2 - i_1,\ s_{i_2 - i_1})$$

$$= x_{i_2} - x_{i_1}) = P(\tilde{\omega};\ {}^{x_{i_1}}s_{i_2-i_1} = x_{i_2}) = P_{x_{i_1}}(x_{i_2-i_1}(w) = x_{i_2}) = \pi^{i_2-i_1}(x_{i_1}, x_{i_2})$$

同様に $P(\tilde{\omega};\ (i_k - i_{k-1},\ s_{i_k} - s_{i_{k-1}}) = x_{i_k} - x_{i_{k-1}}) = \pi^{i_k - i_{k-1}}(x_{i_{k-1}}, x_{i_k}),\ k = 2, \cdots n.$

したがって

$$(*) = \sum_{x_{i_1}\in A_1, \cdots x_{i_n}\in A_n} \pi^{i_1}(x, x_{i_1})\, \pi^{i_2-i_1}(x_{i_1}, x_{i_2}) \cdots \pi^{i_n-i_{n-1}}(x_{i_n}, x_{i_{n-1}})$$

したがって Markov property をもつ (Theorem 1.2 の証明の後半と同様)。

次に $(W,\ \mathbb{B},\ P_x(\cdot),\ x\in E^*)$ の transition probability が与えられた transition probability と一致することを示そう.

$$\pi'((n, i), (n+1, i)) = P_{(n,i)}(x_1 = (n+1, i)) = P(\tilde{\omega};\ s_1(\tilde{\omega}) = (n+1, i) - (n, i))$$

$$= P(\tilde{\omega};\ (1, y_0(\tilde{\omega}) + y_1(\tilde{\omega})) = (1, 0)) = P(\tilde{\omega};\ y_0(\tilde{\omega}) = 0.\ \ y_1(\tilde{\omega}) = 0) = \frac{1}{2}$$

$$\pi'((n, i), (n+1, i+1)) = P(\tilde{\omega};\ (1, y_0(\tilde{\omega}) + y_1(\tilde{\omega})) = (1, 1))$$

$$= P(\tilde{\omega};\ y_0(\tilde{\omega}) \equiv 0,\ y_1(\tilde{\omega}) = 1). \quad = \frac{1}{2}$$

したがって $(W,\ \mathbb{B},\ P_x(\cdot),\ x\in E^*)$ は求める space-time $B(\frac{1}{2})$. (Markov) process である。

さらに一般の transition probability は

$$P_{(n,i)}\{x_k = (m, j)\} = \left(\frac{1}{2}\right)^k \binom{k}{j-i} \qquad m-n=k \text{ のとき，但し } j-i<0 \text{ or } k<j-i \text{ のとき } \tbinom{k}{j-i}=0 \text{ と定義する.}$$

$$= 0 \qquad m-n \neq k \text{ のとき}$$

なぜならば $P_{(x,i)}\{x_k = (m, j)\} = P\{\tilde{\omega};\ (n, i) + (k, s_k(\tilde{\omega})) = (m, j)\}$

$$= P\{\tilde{\omega};\ (k,\ s_k(\tilde{\omega})) = (m-n,\ j-i)\}$$

したがって $k = m-n$ のとき $= P\{\tilde{\omega};\ \sum_{\nu=0}^{k} y_\nu(\tilde{\omega}) = j-i\}$ だから

$$P_{(n,i)}\{x_k = (m, j)\} = \left(\frac{1}{2}\right)^k \binom{k}{j-i} \qquad j-i>0,\ k>j-i \text{ のとき}$$

$$= 0 \qquad j-i<0 \text{ or } k<j-i \text{ のとき}$$

Sem. on Probab.
Vol.1 1959年
P1-85

$k \neq m-n$ のとき $P_{(n,i)}\{x_k = (m,j)\} = 0$.

<u>Lemma 6.3</u> space-time $B(\frac{1}{2})$ process は §3 の assumption (A.1), (A.2), (A.3) をみたす。

Proof. (A.1) 任意の $(n,i) \in E$ に対して

$$P_{(n,i)}\{\sigma((n,i), \omega_1^+) < \infty\} = 0$$ だから non-recurrent.

(A.2) $$P_{(n,i)}(\sigma_{(m,j)} < \infty) = P_{(n,i)}(x_{m-n} = (m,j)) = \left(\frac{1}{2}\right)^{m-n}\binom{m-n}{j-i}$$

だから $(m,j) \in E$ に対して $P_{(n,i)}(\sigma_{(m,j)} < \infty) > 0$ であるための条件は $\binom{m-n}{j-i} > 0$ 即ち $m \geq n$, $j \geq i$ である。したがって $(0,0)$ が unique center である。

(A.3) $F_{(n,i)} = \{(n+1, i), (n+1, i+1)\}$ とおけば

$$P_{(n,i)}\{x_{\sigma_{\{(n,i)\}^c}} \in F_{(n,i)}\} = P_{(n,i)}(x_1 \in F_{(n,i)}) = 1$$

このようにして space-time $B(\frac{1}{2})$ process は (A.1), (A.2), (A.3) をみたすことがわかったから、前節までの結果を使って Martin boundary を構成し, x_n-harmonic function の表現が得られる。

<u>Theorem 6.1</u> $(W, \mathbb{B}, P_x(\cdot), x \in E^*)$ を space-time $B(\frac{1}{2})$ process とすれば

(1) $\mathbb{M}$ は $[0,1]$ interval と同相である。

(2) $K((n,i), b) = 2^n b^{n-i}(1-b)^i$ for every $b \in [0,1]$

(3) $\mathbb{M} = \mathbb{M}_1$

(4) $u \geq 0$ を x_n-harmonic fn とすれば

$$u(n,i) = 2^n \int_0^1 b^{n-i}(1-b)^i \, d\mu(b) \tag{6.3}$$

となるような $([0,1], \mathbb{B}_{[0,1]})$ の上の measure μ が唯1つ存在する。逆に (6.3) 式の右辺は x_n-harmonic function である。

(5) $u \in \mathbb{R}$ が $([0,1], \mathbb{B}_{[0,1]})$ の上の bounded signed measure によって (6.3) の形に表現されたとすれば, 表現は unique である。

(6) $u \in R$ が表現 (6.3) をもつための必要十分条件は, u が x_n-harmonic で

$$2^{-n}\sum_{i=0}^{n} |u(n,i)| \cdot \binom{n}{i} < L < \infty$$

をみたすことである。

Proof. (1), (2) の証明。

$P((n,i),(m,j)) = P_{(n,i)}\left(\sigma_{\{(m,j)\}} < \infty\right)$ とおけば

$$K((n,i),(m,j)) = \frac{P((n,i),(m,j))}{P((0,0),(m,j))} = \frac{1}{2^{m-n}}\binom{m-n}{j-i} \Big/ \frac{1}{2^m}\binom{m}{j}$$

$$= 2^n \frac{(m-n)!\; j!\; (m-j)!}{m!\,(m-n-j+i)!\,(j-i)!} \qquad (6.4)$$

(i) 今 infinite sequence $\{(m_k, j_k) \in E,\ k = 1, \cdots\}$ が $\lim_{k\to\infty}\frac{j_k}{m_k}$ をもつとする。$j_k \le m_k$ だから $\lim_{k\to\infty}\frac{j_k}{m_k} = 1-b$ とおけば $b \in [0,1]$ である。

簡単のために sufix k を略して $\{(m,j)\}$ を infinite sequence とし、$\lim_{m\to\infty}\frac{j}{m} = 1-b$ であるとする。

(a) $j \to \infty$, $m-j \to \infty$ のとき (6.4) 式に Stirling の公式

$n! = \sqrt{2\pi n}\cdot n^n \cdot e^{-n}\left(1+\frac{\theta(n)}{n}\right)$. $|\theta(n)| < 1$ を代入すると

$$K((n,i),(m,j)) = 2^n \frac{(m-n)^{m-n+\frac{1}{2}}\, j^{j+\frac{1}{2}}\,(m-j)^{m-j+\frac{1}{2}} \exp(-m+n-j-m+j) \times (1+o(1))}{m^{m+\frac{1}{2}}\,(m-n-j+i)^{m-n-j+i+\frac{1}{2}}\,(j-i)^{j-i+\frac{1}{2}} \exp(-m+n+j-i+i-j)}$$

$$= 2^n \frac{\left(1-\frac{n}{m}\right)^{m-n+\frac{1}{2}}\left(\frac{j}{m}\right)^{j+\frac{1}{2}}\left(1-\frac{j}{m}\right)^{m-j+\frac{1}{2}}}{\left(\frac{j}{m}-\frac{i}{m}\right)^{j-i+\frac{1}{2}}\left(1-\frac{j}{m}-\frac{n-i}{m}\right)^{m-n-j+i+\frac{1}{2}}} \times (1+o(1))$$

$$= 2^n \frac{e^{-n}\left(\frac{j}{m}-\frac{i}{m}\right)\left(1-\frac{j}{m}-\frac{n-i}{m}\right)}{\left(1-\frac{i}{j}\right)^{j+\frac{1}{2}}\left(1-\frac{n-i}{m-j}\right)^{m-j+\frac{1}{2}}} \times (1+o(1))$$

$$\xrightarrow[m\to\infty]{} 2^n \cdot \frac{e^{-n}\cdot(1-b)^i\, b^{n-i}}{e^{-i}\quad e^{-(n-i)}} = 2^n (1-b)^i\, b^{n-i}$$

(b) j bounded のとき $\lim_{m\to\infty}\frac{j}{m} = 0$ 即ち $b = 1$

$$K((n,i),(m,j)) \longrightarrow \begin{cases} 2^n & i = 0 \\ 0 & i \neq 0 \end{cases}$$

(c) $m-j$ bounded のとき $b = 0$

Sem. on Probab.
Vol.1 1959年
P1-85

$$K((n,i),(m,j)) \longrightarrow \begin{cases} 2^n & i=n \\ 0 & i \neq n \end{cases}$$

したがって,いずれにしても $\lim_{k\to\infty} \frac{j_k}{m_k}$ が存在する場合は,$\{(m_k, j_k)\}$ が fundamental sequence であることがわかる.

(ii) 逆に $\{(m_k, j_k)\}$ を任意の fundamental sequence とする.もし $\lim_{k\to\infty} \frac{j_k}{m_k}$ が存在しなければ $\{(m_k, j_k)\}$ の適当な sub sequence $(m_{k'}, j_{k'})$, $(m_{k''}, j_{k''})$ が存在して

$$\lim_{k'\to\infty} \frac{j_{k'}}{m_{k'}} = 1-b', \qquad \lim_{k''\to\infty} \frac{j_{k''}}{m_{k''}} = 1-b'', \qquad b' \neq b''$$

となる.すると $K((n,i),(m_k, j_k))$ は収束しないことになり矛盾である.したがって $\lim_{k\to\infty} \frac{j_k}{m_k}$ が存在する.

(iii) 任意の $b \in [0,1]$ に対しては,$\lim_{k\to\infty} \frac{j_k}{m_k} = 1-b$ となるような infinite sequence $\{(j_k, m_k)\}$ が存在する。

(iv) $\lim_{k\to\infty} \frac{j_k}{m_k} = b$ をみたすすべての fundamental sequence $\{(m_k, j_k)\}$ に対しては,$K((n,i),b)$ は一致するから,類別することにより M と $[0,1]$ は set として一致する.

(v) M と $[0,1]$ は topology も一致する.

$K((n,i),b) = 2^n b^{n-i}(1-b)^i$ は b に関して continuous

即ち $b_n \longrightarrow b_0$ とすれば $K((n,i),b_n) \longrightarrow K((n,i),b_0)$

したがって

$$\rho(b_n, b_0) = \sum_{x\in E} \frac{|K(x,b_n)-K(x,b_0)|}{1+|K(x,b_n)-K(x,b_0)|}\, m(x) \xrightarrow[b_n\to b_0]{} 0$$

逆に $K((1,0),b) = 2b$ だから

$$\rho(b,b_0) > \frac{2|b-b_0|}{1+2|b-b_0|}\, m\{(1,0)\} > \frac{2}{3} m\{(1,0)\}|b-b_0|$$

したがって $|b-b_0| < \frac{3}{2}\rho(b,b_0)\frac{1}{m\{(1,0)\}}$.

(3) の証明. $\forall b \in M$, $\forall \varepsilon > 0$, $D = [b-\varepsilon, b+\varepsilon] \cap [0,1]$ に対し $K_D((0,0),b) = 1$ を証明すればよい(Theorem 5.1)。

$$A_n = \left\{b'; b' \in \left(b-\varepsilon-\frac{1}{n}, b+\varepsilon+\frac{1}{n}\right)\right\} \cup \left\{(m,j); m \geqq n, \frac{j}{m} \in \left(1-b-\varepsilon-\frac{1}{n}, 1-b+\varepsilon+\frac{1}{n}\right)\right\}$$

とおけば $A_n \supset D$, $A_n \downarrow \bigcap_{n=1} \bar{A}_n = D$ である.

$$K^*_{[A_n]}((0,0),b) = E_{(0,0)}(K(x_{\sigma_{[A_n]}}, b))$$
$$\geq E_{(0,0)}(K(x_{\sigma_{[A_n]}}, b);\ \sigma_{[A_n]} = n)$$
$$= E_{(0,0)}(K(x_{\sigma_{[A_n]}}, b);\ x_n = (n,i),\ \frac{i}{n} \in (1-b-\varepsilon-\frac{1}{n}, 1-b+\varepsilon+\frac{1}{n}))$$
$$= \sum_{1-b-\varepsilon<\frac{i}{n}<1-b+\varepsilon} 2^n b^{n-i}(1-b)^i \times P_{(0,0)}(x_n = (n,i))$$
$$= \sum_{1-b-\varepsilon<\frac{i}{n}<1-b+\varepsilon} \binom{n}{i} b^{n-i}(1-b)^i$$

今，$\{y_\nu,\ \nu=1,2,\cdots\}$ を $(\Omega\ \mathbb{F},\ P)$ 上の parameter $1-b$ の Bernoulli sequence とする．$E(y_\nu)=1-b$ だから

$$\sum_{1-b-\varepsilon<\frac{i}{n}<1-b+\varepsilon} \binom{n}{i} b^{n-i}(1-b)^i = \sum_{1-b-\varepsilon<\frac{i}{n}<1-b+\varepsilon} P(\sum y_\nu = i) = P\left(\left|\frac{\sum y_\nu}{n} - (1-b)\right| < \varepsilon\right)$$

大数の法則によれば

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\sum y_\nu}{n} - (1-b)\right| < \varepsilon\right) = 1 \text{ だから}$$

$$K_0((0,0),b) = \lim_{n\to\infty} K^*_{[A_n]}((0,0),b) \geq \lim_{n\to\infty}\sum_{1-b-\varepsilon<\frac{i}{n}<1-b+\varepsilon} \binom{n}{i} b^{n-i}(1-b)^i = 1$$

一方，$1 = K((0,0),b) \geq K_D((0,0),b)$ だから結局 $K_D((0,0),b)=1$ である．
(4), (5) は Theorem 5.3, Theorem 5.4 より明らか．
(6) の証明．

$$E_{(0,0)}(|u(x_n)|) = 2^{-n}\sum_{i=0}^{n}|u(n,i)|\binom{n}{i}$$ だから Theorem 5.4 より明らか．

Remark．$\mathbb{F}_n$ を $\Delta_1(\tilde{\omega}),\ \Delta_2(\tilde{\omega}),\ \cdots,\ \Delta_n(\tilde{\omega})$ によって generate される $\mathbb{F}$ の Borel subfield，u を $\mathbb{R}$ の函数とする．その時 Lemma 6.2 によって，「$u(n,i)$ が nonnegative x_n-harmonic である」という条件は「$\{u(n,\Delta_n),\ \mathbb{F}_n,\ n\geq 0\}$ が nonnegative Martingale である」という条件と同等であることが分る．したがって，Theorem 6.1 (4) は後者の必要十分条件をも与えているわけである．

Sem. on Probab.
Vol.1 1959年
P1-85

§7. 応用（I）：Hausdorff の moment 問題

13. 前節の最后で space-time $B(\frac{1}{2})$ process に関して harmonic な function の表現を得たが，本節ではそれを応用して Hausdorff Moment problem の主要な定理を確率論的に証明しよう（D. V. Widder [14] 参照）.

Definition 7.1　$\{f(n)\,;\, n \geqq 0\}$ が moment sequence であるとは，ある $([0,1], \mathcal{B}_{[0,1]})$ の上の bounded signed measure μ を用いて

$$f(n) = \int_0^1 b^n d\mu(b) \qquad \text{for } n \geq 0 \tag{7.1}$$

と書けることである。

Definition 7.2　$\{f(n)\,;\, n \geqq 0\}$ が completely monotonic であるとは任意の $n \geq 0$, $k \geq 0$ に対して

$$(-1)^k \Delta^k f(n) \geqq 0 \tag{7.2}$$

となることである。但し $\Delta f(n) = f(n+1) - f(n)$

$$\Delta^k f(n) = \overbrace{\Delta \cdots\cdots \Delta}^{k} f(n) = \sum_{m=0}^{k} (-1)^m \binom{k}{m} f(n+k-m)$$

Theorem 7.1　$f(n)$ を moment sequence とすれば (7.1) 式の μ は unique である。

Theorem 7.2　$f(n)$ が (positive) measure μ の moment sequence であるための必要十分条件は $f(n)$ が completely monotonic であることである。

Theorem 7.3　$f(n)$ が moment sequence であるための必要十分条件は

$$\sum_{i=1}^{n} |\Delta^i f(n-i)| \binom{n}{i} < L < \infty \tag{7.3}$$

をみたすことである。

以上3つの Theorem を一括して証明しよう。

Proof.　(i)　x_n を space-time $B(\frac{1}{2})$ process とする。$u(n,i)$ を $E = \{(n,i)\,;\, n \geq i,\ n, i = 1, 2, \cdots\}$ 上の x_n-harmonic function とする。

$$f(n) = 2^{-n} u(n, 0) \qquad n \geq 0 \tag{7.4}$$

により $f(n)$ を定義すれば

$$(-1)^i \Delta^i f(n-i) = 2^{-n} u(n, i) \tag{7.5}$$

が成り立つ。なぜなら $i = 1$ のとき

$$\Delta f(n-1) = f(n) - f(n-1) = 2^{-n} u(n,0) - 2^{-(n-1)} u(n-1, 0)$$

Sem. on Probab.
Vol.1 1959年
P1-85

$$= 2^{-n}(u(n,0) - 2u(n-1,0))$$

ところが，uはx_n-harmonicだから

$$u(n-1,i) = E_{(n-1,i)}\left(u(x_{\{(n-1,i)\}^c})\right) = \frac{1}{2}\left(u(n,i) + u(n,i+1)\right)$$

したがって　$u(n,i) - 2u(n-1,i) = -u(n,i+1)$　　(7.6)

だから$i=0$とおけば　$u(n,0) - 2u(n-1,0) = -u(n,1)$

故に　$\Delta f(n-1) = (-1)\cdot 2^{-n} u(n,1)$

一般に $i=k$ のとき（7.5）が成り立つと仮定すれば

$$(-1)^{k+1}\Delta^{k+1} f(n-k-1) = (-1)\Delta\{(-1)^k\Delta^k f(n-1-k)\}$$

$$= (-1)\{(-1)^k\Delta^k f(n-k) - (-1)^k\Delta^k f(n-1-k)\}$$

$$= (-1)\{2^{-n}u(n,k) - 2^{-(n-1)}u(n-1,k)\}$$

$$= (-1)\,2^{-n}\{u(n,k) - 2u(n-1,k)\}$$

こゝで（7.6）を代入すれば

$$(-1)^{k+1}\Delta^{k+1} f(n-k-1) = 2^{-n} u(n,k+1)$$

となる．

逆に任意のfに対して（7.5）で定義された$u(n,i)$はx_n-harmonic である．なぜなら　$u(n,i) = 2^n(-1)^i\Delta^i f(n-i)$　を用いて

$$E_{(n,i)}\left(u(x_{\{(n,i)\}^c})\right) = \frac{1}{2}\left(u(n+1,i) + u(n+1,i+1)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(2^{n+1}(-1)^i\Delta^i f(n+1-i) + 2^{n+1}(-1)^{i+1}\Delta^{i+1} f(n+1-i-1)\right)$$

$$= 2^n(-1)^i\left(\Delta^i f(n+1-i) - \Delta\left(\Delta^i f(n-i)\right)\right)$$

$$= 2^n(-1)^i\left(\Delta^i f(n+1-i) - \Delta^i f(n+1-i) + \Delta^i f(n-i)\right)$$

$$= 2^n(-1)^i\Delta^i f(n-i)$$

$$= u(n,i)$$

となるからである．このようにn軸の上の値が与えられれば，x_n-harmonic function は一意的に定まるのである．

(ii)　Theorem 7.1 の証明．$f(n)$をmoment sequence とすると

$$f(n) = \int_0^1 b^n\, d\mu(b) \qquad (7.7)$$

（7.5）式により $u(n,i)$ を定義すれば (i) により $u(n,i)$ は χ_n-harmonic であり，かつ

$$u(n,i)=2^n(-1)^i\Delta^i f(n-i)=2^n(-1)^i\left\{\sum_{m=0}^{i}(-1)^m\binom{i}{m}\int_0^1 b^{n-m}d\mu(b)\right\}$$

$$=2^n(-1)^i\int_0^1\left(\sum_{m=0}^{i}(-1)^m\binom{i}{m}b^{i-m}\right)\cdot b^{n-i}d\mu(b)$$

$$=2^n(-1)^i\int_0^1 b^{n-i}(b-1)^i d\mu(b)$$

$$=2^n\int_0^1 b^{n-i}(1-b)^i d\mu(b)$$

故に Theorem 6.1（5）により μ は unique である．

(iii) Theorem 7.3 の必要条件の証明．$f(n)$ が moment sequence であれば (ii) により（7.5）で定義された $u(n,i)$ は表現（6.3）をもつ。したがって Theorem 6.1（6）により

$$\sum_{i=1}^{n}\left|\Delta^i f(n-i)\right|\binom{n}{i}=\sum_{i=1}^{n}2^{-n}\left|u(n,i)\right|\binom{n}{i}<L<\infty$$

(iv) Theorem 7.3 の十分条件の証明．与えられた $f(n)$ に対して（7.5）により $u(n,i)$ を定義すれば，(i) より $u(n,i)$ は χ_n-harmonic であり

$$\sum_{i=1}^{n}2^{-n}\left|u(n,i)\right|\binom{n}{i}=\sum_{i=1}^{n}\left|\Delta^i f(n-i)\right|\binom{n}{i}<L<\infty$$

だから $u(n,i)$ は表現（6.3）をもつ．（Theorem 6.1（6））．
したがって（6.3）において $i=0$ とおけば

$$f(n)=2^{-n}u(n,0)=\int_0^1 b^n d\mu(b)$$

となり，$f(x)$ は moment sequence である。

(v) Theorem 7.2の必要条件．$f(n)$ を positive measure μ の moment sequence とする．（7.5）式により $u(n,i)$ を定義すれば

$$u(n,i)=2^n\int_0^1 b^{n-i}(1-b)^i d\mu(b)\qquad \mu\geqq 0.$$

したがって $u(n,i)\geqq 0$ 即ち $(-1)^i\Delta^i f(n-i)\geqq 0$ である．
故に $f(n)$ は completely monotonic である。

(vi) Theorem 7.2 の十分条件，$f(n)$ を completely monotonic であるとすると，（7.5）で定義された $u(n,i)$ は non-negative χ_n-harmonic

Sem. on Probab.
Vol.1 1959年
P1-85

function であるから，Theorem 6.1 (4) により

$$u(n,i)=2^n\int_0^1 b^{n-i}(1-b)^i\,d\mu(b)$$

と (positive) measure μ で表現される。特に $i=0$ とおけば

$$f(n)=\int_0^1 b^n\,d\mu(b)\ ,\qquad \mu\ge 0$$

である。

Remark. (ii) の計算は次のようにしてさけることもできる。(7.7) における μ を用いて

$$v(n,i)=2^n\int b^{n-i}(1-b)^i\,d\mu(b)$$

なる函数を考えると $v(n,i)$ は x_n-harmonic で，n 軸上 ($i=0$) で $u(n,i)$ と一致する。したがって (i) によって $u(n,i)\equiv v(n,i)$.

§8. 応用 [II]：path の boundary limit theorems.

14. §4 における表現定理は，Martin 境界が狭すぎないことを示している。一方 §5 の canonical representation の一意性（或は $u_D(x)$ が $\mathbb{M}$ 上の measure に拡張できること）はそれが広すぎるないことを意味する。この「広すぎない」という性質が境界の附近における path の行動にどう反映するかを調べよう。

Lemma 8.1　$u(x)$ を非負の x_n-superharmonic function とすると，$\lim_{n\to\infty} u(x_n)$ が任意の $x\in E$ に対して P_x-測度 1 で存在する。

Proof. Markov property と x_n-superharmonic function の定義によって $n\ge m$ のとき P_x-測度 1 で

$$E(u(x_n)/\mathcal{B}_m)=E_{x_m}(u(x_{n-m}))\le u(x_m)$$

が成り立つ。これは $(u(x_n),\mathcal{B}_n,n\in T)$ が非負の lower semimartingale であることを示す。したがって Doob [3], p324, Theorem 4.1 s によって $\lim_{n\to\infty} u(x_n)$ が存在する。

今 E の indicator function χ_E は明らかに非負の x_n-superharmonic function であるから，$(\chi_E)_D$（D は $\mathbb{M}$ の closed subset）は $\mathbb{M}$ 上の

Sem. on Probab.
Vol.1 1959年
P1-85

measure に拡張される。M の Borel subset B に対して

$$(\chi_E)_B(x) = h(x, B)$$

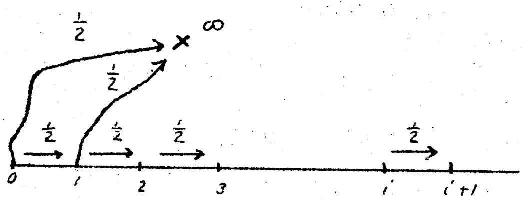
とおく。

Definition 8.1 $h(x, \cdot)$ を境界 M への harmonic measure と呼ぶ。

§5の結果から $(\chi_E)_{M_0}(x) = 0$ for every x, であるから，M_0 は harmonic measure 0 の集合に他ならない。又 process が conservative の時は χ_E が x_n-harmonic であるから，$(\chi_E)_{M_1}(x) = (\chi_E)_M(x) = \chi_E(x) \neq 0$ であるが，non-conservative の時には，$(\chi_E)_M(x) \equiv 0$ for every x，ということもおこる。これは trivial でない有界な x_n-harmonic function が存在しないことゝ同等である。簡単な例をあげておく。

Ex.

$E = \{0, 1, 2, 3, \cdots\cdots\}$ の上の次の substochastic matrix に対応する Markov process を考える。



$$\pi(i, i+1) = \pi(i, \infty) = \frac{1}{2}, \qquad i \geqq 0$$

明らかに 0 が unique center で，Ex. 6.1 と同様に境界は 1 点（$+\infty$ であらわす），それに対応する boundary function は

$$K(x, +\infty) = \lim_{m\to\infty} \frac{P_x(\sigma_m < \infty)}{P_0(\sigma_m < \infty)} = 2^x$$

である。すべての x_n-harmonic function は $K(x, +\infty)$ の定数倍であるから，trivial でない bounded x_n-harmonic function は存在しない。

Theorem 8.1 D を M の任意の closed subset とする。

(i) $L = \{w ;\ n \to \infty$ のとき $x_n(w)$ が D 上に limit point をもつ$\}$ とおけば

$$P_x\left(\lim_{n\to\infty} h(x_n, D) = 1 / L\right) = 1 \qquad (8.1)$$

(ii) $L' = \{w ;\ n \to \infty$ のとき，$x_n(w)$ が D^c 上に limit point をもつ$\}$ とおけば

$$P_x\left\{\lim_{n\to\infty} h(x_n, D) = 0 / L'\right\} = 1 \qquad (8.2)$$

(iii) $P_x(L \cap L') = 0 \qquad (8.3)$

Proof. (i)

Sem. on Probab.
Vol.1 1959年
P1-85

$$h(x,D)=P_x(L)=P_x\{L\cap(\lim_{n\to\infty}h(x_n,D)=1\}\qquad(8.4)$$

を証明すれば十分.

$A_n\supset A_{n+1}$, $\bar{A}_n\downarrow D$ なる open set の列 (in $\bar{E}$) を取り

$L_n=\{w;\ \sigma_{[A_n]}<+\infty\}$ とおくと

$L_n\supset L_{n+1}\downarrow L=\{w;\ \forall n$ に対して $\sigma_{[A_n]}<+\infty\}$.

$P_x(L_n)=P_x(\sigma_{[A_n]}<+\infty)=E_x(\chi_R(x_{\sigma_{[A_n]}}))=(\chi_R)^*_{[A_n]}$.

又, $m>n$ に対して

$$P_x(L_m)=P_x(L_n\cap L_m)=P_x(\sigma_{[A_n]}<+\infty,\ \sigma_{[A_m]}<+\infty)=(*)$$

$[A_m]\subset[A_n]$ より $\sigma_{[A_m]}(w)=\sigma_{[A_n]}(w)+\sigma_{[A_m]}(w^+_{\sigma_{[A_n]}})$ であるから,

$$(*)=E_x(P_{x_{\sigma_{[A_n]}}}(\sigma_{[A_m]}<+\infty);\ \sigma_{[A_n]}<\infty)$$
$$=E_x((\chi_R)^*_{[A_m]}(x_{\sigma_{[A_n]}});\ \sigma_{[A_n]}<+\infty).$$

$m\to\infty$ として $h(x,D)=P_x(L)=E_x(h(x_{\sigma_{[A_n]}},D);\ \sigma_{[A_n]}<+\infty)$.

次に $n\to\infty$ として $\quad=E_x(\lim_{n\to\infty}h(x_{\sigma_{[A_n]}},D);\ L)$

$h(x,D)\leqq 1$ であるから $\leqq E_x(1;L)=P_x(L)=h(x,D)$.

$\leqq$ は実は $=$ であるから条件 L の下で殆んどすべての path について

$$\lim_{n\to\infty}h(x_{\sigma_{[A_n]}},D)=1.$$

したがって, Lemma 8.1によって (8.4) 式が成り立つ.

(ii) $\quad P_x(L')=P_x\{L'\cap(\lim_{n\to\infty}h(x_n,D)=0)\}$

をいえば十分.

今, D^c を内部から近似する M 上の closed set の列 D_m を考え,

$L'_m=\{w;\ n\to\infty$ で $x_n(w)$ が D_m 上に limit point をもつ$\}$ とおく.

明らかに

$$L'_m\subset L'_{m+1}\uparrow L'.$$

したがって

$$P_x(L'_m)=P_x\{L'_m\cap(\lim_{n\to\infty}h(x_n,D)=0\}\qquad(8.5)$$

を示せばよい. ところが §5 の結果から

Sem. on Probab.
Vol.1 1959年
P1-85

$$0 \leqq h(x, D) \leqq h(x, D_m^c) = h(x, M) - h(x, D_m) \leqq 1 - h(x, D_m).$$

故に

$$\{w;\ \lim_{n\to\infty} h(x_n, D) = 0\} \supset \{w;\ \lim_{n\to\infty} h(x_n, D_m^c) = 0\}$$
$$\supset \{w;\ \lim_{n\to\infty} h(x_n, D_m) = 1\}.$$

そこで (i) の結果を D_m に適用して

$$P_x(L_m') \geqq P_x(L_m' \cap \{\lim_{n\to\infty} h(x_n, D) = 0\}) \geqq P_x(L_m' \cap \{\lim_{n\to\infty} h(x_n, D_m) = 1)$$
$$= P_x(L_m').$$

よって（8.5）が証明された。

(iii)　(ii) の D_m, L_m' を考える。$D_m \cup D$ に (i) の結果を使って

$$P_x(L \cup L_m') = h(x, D_m \cup D)$$

$D_m \cap D = 0$ であるから

$$= h(x, D_m) + h(x, D)$$
$$= P_x(L) + P_x(L_m').$$

したがって　$P_x(L \cap L_m') = 0$,　$m \to \infty$ として（8.3）がえられる。

Theorem 8.2　$I = \{w;\ x_n(w) \in E \quad \text{for } \forall n \in T - \{+\infty\}\}$
とおけば

$$P_x(\lim_{n\to\infty} x_n(w) \text{ が } M \text{ 上に定まる} / I) = 1 \qquad (8.6)$$

Remark.　（8.6）は次のようにいゝかえることもできる。$\sigma_n(w)$ を n-th jumping time（§4. Theorem 4.1 の証明で用いた）とし，$I' = \{w;\ \sigma_n(w) < +\infty \text{ for every } n \in T - \{+\infty\}\}$ とおく。

$$P_x(I) = P_x(I')$$

及び，条件 I' の下で $\sigma_\infty = \infty$ なることに注意すれば（8.6）は

$$P_x(\lim_{n\to\sigma_\infty} x_n(w) \text{ が } M \text{ の上に定まる} / I') = 1 \qquad (8.7)$$

と同値である。しかし連続な time parameter の時は（8.7）は（8.6）より実際に強い結果を示すので，（8.7）の形で言う方が望ましい（証明の方針はこゝで述べるのと同様である）。

Proof.

(1). M が compact metric space であるから，可附番個の open basis $G_1, G_2, G_3, \cdots$ が存在する。M 上の任意の2点は $\{G_i\}$ によって分離される。

Sem. on Probab.
Vol.1 1959年
P1-85

(2) 上の G_i について

$L_i=\{\omega;\ n\to\infty$ のとき $x_n(\omega)$ が G_i^c に limit point をもつ$\}$

$L_i'=\{\omega;\ n\to\infty$ のとき $x_n(\omega)$ が G_i に limit point をもつ$\}$

と定義すれば，G_i のえらび方から

$N=\{\omega;n\to\infty$ のとき $x_n(\omega)$ が M 上に２つ以上の limit point をもつ$\}$

$\quad = \bigcup_i (L_i \cap L_i').$

したがって前の定理の (iii) から

$$P(N) \leqq \sum_i P(L_i \cap L_i') = 0$$

(3) $L=\{\omega;\ \lim_{n\to\infty} x_n(\omega)$ が M 上に定まる$\}$ とおく。

(8.6) を言うには

$$P_x(I) = P_x(I \cap L) \tag{8.8}$$

を示せばよい。

$$P_x(I) = P_x(I\cap L) + P_x(I\cap N) + P_n\{I\cap(L\cup N)^c\},$$

$$P_x(I\cap N) \leqq P_x(N) = 0,$$

又，$I\cap(L\cup N)^c=\{\omega;\ n\to\infty$ で $x_n(\omega)$ が E の内部に limit point をもつ$\}$であるから，Lemma 6.1によって

$$P\{I\cap(L\cup N)^c\} = 0.$$

故に (8.8) が証明された。

<u>Corollary 1.</u>

$$P_x\{\lim_{n\to\infty} x_n(\omega) \text{ が存在する}\} = 1 \tag{8.9}$$

Proof. $I^c \ni \omega$ に対しては，$\sigma_\infty < +\infty$ であるから或番号以后 $x_n(\omega)=\infty$ である。これと上の定理を合せて，(8.9) が得られる。

<u>Corollary 2.</u> Markov process x_n が conservative であれば，任意の $x\in E$ に対して，P_x-測度 1 で $\lim_{n\to\infty} x_n(\omega)$ が M 上に定まる。

ここで Feller [7] の sojourn solution について考えよう。E の任意の subset A に対して

$$s(x,A) = P_x\{x_n(\omega)\in A \quad \text{for some } n_0 \leqq \text{every } n \in T-\{+\infty\}\}$$

とおく。

<u>Definition 8.2.</u> (Feller) $s(x,A)\neq 0$ のとき，A を sojourn set, $s(\cdot, A)$ を sojourn solution という。

Sem. on Probab.
Vol.1 1959年
P1-85

Criterion. $\bar{A}$を$\bar{E}$でのAのclosure，$\partial A=\bar{A}-A$とおく．その時

$$s(x,\ A)=h(x,\ \partial A) \tag{8.10}$$

Proof. Lemma 6.1によって，集合$\{\omega;\ x_n\in A\ \ \text{for}\ \exists n_0\leqq\forall n\neq+\infty\}$と集合$\{\omega;\ n\to\infty$で$x_n(\omega)$が$\partial A$上にlimit pointをもつ$\}$は$P_x$-測度0を除いて一致する。これと(8.4)を合せて(8.10)が得られる．

(8.10)によって，$s(\cdot,\ A)$はx_n-harmonicで，そのcanonical representationは

$$s(x,A)=\int_{\partial A}K(x,\ b)\ h(c,db) \tag{8.11}$$

であることがわかる。Feller [7]，§5 〜 §10及び§12のすべての結果は，(8.11)を用いて証明することができる。例えばminimal sojourn solution (Definition 12.1)のcriterionは次のようにして与えることができる．

$M_F=\{b;\ b$を含むMの任意のopen set Gに対して$h(c,G)>0\}$は，明らかにMのclosed subsetを作る．これをMのfinite partと呼ぶ。$s(\cdot,A)$がminimal sojourn solutionであるためには，$(\partial A)\cap M_F$が1点で，それがM_Fの孤立点であることが必要十分である。これからminimal sojourn solutionは高々可附番個しかない(Lemma 12.1)ことは明らかである．又minimal sojourn solutionから導かれるFeller境界がM_Fの孤立点の全体とisomorphicなこともいえる．

15. x_n-harmonic functionの境界Mに関する才一境界値問題(F.B.V.P.)について若干の注意をしておく．

fをM上のbounded measurable functionとすれば

$$u(x)\equiv\int_M f(b)\ h(x,db)=\int_M K(x,b)f(b)h(c,db) \tag{8.12}$$

は，bounded x_n-harmonic functionである。これが境界函数fに対するBWB solution (Doob [4])であることが示される．したがって，MはDoobの意味でstrongly BWB resolutiveな境界である。逆にuを有界なx_n-harmonic functionとする。Theorem 2.1によって，このようなuは非負のx_n-harmonic functionの差に分かれるから，uは非負として一般性を失わない。uが有界であるから，或る定数$k>0$が存在して，$ku(x)\leqq\chi_R(x)$となっている。したがってMの任意のBorel set Bに対して$ku_B(x)\leqq(\chi_R)_B(x)=h(x,B)$である。したがって，$u_B(c)$は$h(c,B)$

Sem. on Probab.
Vol.1 1959年
P1-85

に関して絶対連続で，その密度函数 $f(b)$ は $h(c,\cdot)$ ―測度 0 を除いて $\frac{1}{c}$ をこえない．$u_B(c)$ が u に対応する canonical measure であることに注意すれば，u は有界な f によって (8.12) の表現をもつことがわかる．(8.12) の2番目の式が harmonic measure による表現を，最后の式が Poisson kernel による表現を与えているわけである．

(8.12) において，u の値に関係して来るのは，勿論 M_F 上の f の値だけである．したがって，F.B.V.P. を考える上で M_F^c は必要でない．しかし，Doob の h-regular function (この h は我々の h ではない) に関する F.B.V.P に対応するものを考えるときには，M_F^c の部分が必要になってくる．それについて簡単に説明する．

u_0 を正の x_n-superharmonic function とする．前のように

$$\gamma(x) = E_x(\sigma_{\{x\}^c}),$$

$$\hat{\pi}(x,y) = P_x\{x_{\sigma_{\{x\}^c}} = y\} \quad \text{とおく．}$$

今

$$\hat{\pi}^{u_0}(x,y) = \frac{u_0(y)}{u_0(x)}\,\hat{\pi}(x,y)$$

と定義すれば，$\hat{\pi}^{u_0}(x,y)$ も $\hat{\pi}^{u_0}(x,x) = 0$ を満す E 上の substochastic matrix である．今 r と $\hat{\pi}^{u_0}$ に対応する E 上の Markov process を $x_n^{u_0}$ とあらわす (§9参照)．これは

$$\pi^{u_0}(x,y) = \frac{u_0(y)}{u_0(x)}\,\pi(x,y)$$

を transition probability にもつ Markov process といってもよい (但し π は x_t に対応する transition probability とする)．$x_n^{u_0}$ に対応する x_n-superharmonic を $\mathcal{U}^{u_0}$ であらわす．$x_n^{u_0}$ の Martin 境界が x_n の Martin 境界と一致することが示される．

しかしその harmonic measure $h^{u_0}(x,\cdot)$ に関する finite part $M_F^{u_0}$ は必ずしも M_F と一致せず，$M_F^{u_0} \cap M_F^c \neq \phi$ ということがおこり得る．したがって，$x_n^{u_0}$-harmonic function に関する F.B.V.P に対しては M_F^c の部分が生きて来る．このような考察は，前節で述べた Hausdorff の moment 問題の种々の special case，例えば「moment sequence $f(n)$ に対応する measure $\mu(db)$ が $f(b)db$ (db は $[0,1]$ 上の Lebesgue 測度) とかけ，$f(b)$ が有界であるための条件は何か」というような問題を解く場合に必要になって来る．

最后に境界点の regular，irregular の判定条件を確率論的に与えるとい

Sem. on Probab.
Vol.1 1959年
P1-85

う問題は，一般には未解決なことを注意しておく。

§9. 補　足

16.　§1でE上の任意の substochastic matrix πに対して，それを transition probabilityにもつ Markov processが存在することを示したが，$r(x) > 1$，$\hat{\pi}(x, x) = 0$，を満す任意の函数 r と substochastic matrix $\hat{\pi}$に対して，

$$\begin{cases} r(x) = E_x\ (\sigma_{\{x\}^c}), \\ \hat{\pi}(x, y) = P_x\ (x_{\sigma_{\{x\}^c}} = y) \end{cases} \qquad (9.1)$$

を満す time discrete Markov processが一意的に存在することが言える。

一意性の方は Dynkin Formulaから容易に示されるので，構成法を述べる。

第1の方法は先ず

$$\pi(x, y) - \delta(x, y) = \frac{\hat{\pi}(x, y) - \delta(x, y)}{r(x)}$$

但し　$\delta(x, y) = \begin{cases} 0 & x \neq y \\ 1 & x = y \end{cases}$

によってπを定義する。rと$\hat{\pi}$に関する条件からπがE上の substochastic matrix であることが分る。πを transition probability にもつ Markov processが求めるものであることは，§4の generator $\underline{\underline{G}}$の定義で与えた関係から明らかである。

第2の方法は，Doob [3]，P.248と同じである。

$(\Omega, \mathbb{F}, P)$を abstract probability field とし，その上に次の条件を満す random variables の family が与えられているとする。

(a)　$\tau_k^{(x)}(\tilde{\omega})$, $S_k^{(x)}(\tilde{\omega})$，$x \in E^*$，$k = 1, 2, \cdots$ は互に独立な random variable である。

(b)　各$\tau_k^{(x)}$；$k = 1, 2, \cdots$ は平均値 $r(x)$ の幾何分布にしたがう。
$(r(\infty) = +\infty)$.

Sem. on Probab.
Vol.1 1959年
P1-85

(c) 各 $S_k^{(x)}$; $k=1, 2, \cdots$ は $\hat{\pi}(x, \cdot)$ なる分布をもつ E^* 上の random variable である。 $(\hat{\pi}(x, \infty) = 1 - \hat{\pi}(x, E), \ \hat{\pi}(\infty, \infty) = 1)$

これから次のような random variables の family を定義する.

$$\sigma_1^{(x)} = \tau_1^{(x)}, \qquad t_1^{(x)} = S_1^{(x)},$$
$$\sigma_2^{(x)} = \tau_2^{(S_1^{(x)})}, \qquad t_2^{(x)} = S_2^{(\sigma_2^{(x)})},$$
$$\vdots$$
$$\sigma_{k+1}^{(x)} = \tau_{k+1}^{(t_k^{(x)})}, \qquad t_{k+1}^{(x)} = S_{k+1}^{(\sigma_{k+1}^{(x)})}.$$

更に $x_n^{(x)}(\tilde{\omega})$, $x^{(x)}(\tilde{\omega})$ を次のように定める.

$$x_n^{(x)}(\tilde{\omega}) = \begin{cases} x & \text{if } 0 \leqq n < \sigma_1^{(x)} \\ t_1^{(x)} & \sigma_1^{(x)} \leqq n < \sigma_2^{(x)} \\ \vdots & \vdots \\ t_k^{(x)} & \sigma_k^{(x)} \leqq n < \sigma_k^{(x)} \\ \vdots & \vdots \\ \infty & n = +\infty, \end{cases}$$

$$x^{(x)}(\tilde{\omega}) = (x_n^{(x)}(\tilde{\omega});\ n = 0, 1, \cdots, +\infty)$$

今 $\forall B \in \mathcal{B}$ に対して

$$P_x(B) = P(\tilde{\omega};\ x^{(x)}(\tilde{\omega}) \in B)$$

とおけば $(W, \mathcal{B}, P_x(B), x \in E^*)$ が求める Markov process である。証明は § 1, § 4, Ex IV 等と同様にしてできる。

<u>Remark.</u> 上と同じ方法で, $r(x) > 0$ なる任意の函数と, $\hat{\pi}$ に対して (9.1) をみたす time continuous Markov process が構成できる。この場合は (b) のかわりに $\tau_k^{(x)}$ が平均値 $r(x)$ の指数分布にしたがうことを仮定すればよい。

17. x_n が recurrent Markov process であるとき, 非負の x_n-superharmonic function は定数に限ることはよく知られている。ここではもう少し一般な形で, 新しい証明を与えておく.

<u>Theorem 9.1</u> 任意の nonnegative x_n-superharmonic function は各 irreducible recurrent set の上で定数である.

Proof. 最初に § 4 の Theorem 4.1 は § 3 の仮定なしに成り立っていることを注意しておく、

今, C を 1 つの irreducible recurrent set, a, a' を C の任意の

Sem. on Probab.
Vol.1 1959年
P1-85

2乗とする。Theorem 4.1によって

$$u(a) \geqq u^*_{\{a'\}}(a) = E_a(u(x_{\sigma_{a'}})).$$

ところが§1の結果から $P_a(\sigma_{a'} < \infty) = 1$ であるから，上式の右辺は $u(a')$ に等しい．a と a' を入れかえて，逆の不等式が出る．

18. §2 ― §5の結果を formal に述べると次の様である．Π を non-recurrent substochastic matrix とし，$G = \sum_{n \geqq 0} \Pi^n$ とおく。

$$K(c; x, y) = \frac{G(x, y)}{G(c, y)}$$

とおき，Eの内部に limit point をもたないような sequence $\{y_n\}$ の limit function の全体を$\mathbb{M}$であらわす．$\mathbb{M}$に適当な距離を入れて compact space にすることができる．その時

$$\Pi u(x) = u(x) \qquad (9.2)$$

を満す任意の非負の函数は$\mathbb{M}$上の Radon measure によって

$$u(x) = \int_{\mathbb{M}} K(c; x, b)\, d\mu(b)$$

とあらわすことができる．

今上に述べたことの dual な結果を formal に追ってみる．先ず (9.2) の adjoint equation は

$$(\nu \Pi)(y) = \nu(y) \qquad (9.3)$$

でその非負な解はいわゆる invariant measure に他ならない．§3の仮定 (A.2) に対応するものは，adjoint center c^* が存在すること，すなわち

$$G(x, c^*) > 0 \qquad \text{for every} \quad x \in E$$

である。

$$K^*(c^*; x, y) = \frac{G(x, y)}{G(x, c^*)} \qquad (9.4)$$

とおき，Eの内部に limit point をもたないような $\{x_n\}$ の limit function を $K^*(c^*; b^*, y)$，その全体を $\mathbb{M}^*$ であらわす．$\mathbb{M}^*$ の topology の入れ方は$\mathbb{M}$のときと同様である．その時 (9.3) の任意の非負な解は $\mathbb{M}^*$ 上の Radon measure によって

$$\nu(y) = \int_{\mathbb{M}^*} K^*(c^*; b^*, y)\, d\mu(b^*)$$

Sem. on Probab.
Vol.1 1959年
P1-85

と書けることが証明される。こうして nonrecurrent Markov process の invariant measure が決定される。$G(x,y)=P_x(\sigma_y<\infty)G(y,y)$ に注意すれば(9.4)は

$$K^*(c^*;x,y)=\frac{P_x(\sigma_y<\infty)}{P_x(\sigma_{c^*}<\infty)}\ \frac{G(y,y)}{G(c^*,c^*)}$$

と書ける。この式を用いて、いろいろな具体例について $\mathbb{M}^*$ を構成することが出来る。例えば Derman [2] の examples はすべて容易に計算できる。しかし、上の $\mathbb{M}^*$ が adjoint Martin boundary と呼ぶにふさわしい性質をもつかどうか(例えば§8の結果の dual が或る意味で成り立つかetc)はまだ十分検討していない。

19. 我々の結果が連続な time parameter をもつ場合、或は§3の仮定をゆるめた場合にも成り立つことは前書きで注意した通りである。state space E が一般になると、色々な困難があって全面的に我々の結果を拡張することには、まだ成功していない。しかし、$K(c;x,y)$ に適当な regularity condition を仮定すると、x_n-(或は x_t-) harmonic function の表現定理は、証明することができる。そこで今、§6, Ex IV と同じ方法で Poisson process から導かれる space-time Markov process を考え、それに対応する表現定理を与えておくと、§7と類似の議論で Leplace-Stieltjes transform に関する表現定理が容易に導かれる(詳しくは[12]参照)。もっと一般に、いわゆる consolution transform [8] に関する表現定理は、或る additive process の族から導かれる space-time processes の表現定理から同じ方法で証明されると思われる。

文　献

[1] M. Brelot, Le problème de Dirichlet. Axiomatique et frontière de Martin, J. Math. Pures et App., 35 (1956), 297～335.

[2] C. Derman, Some contributions to the theory of denumerable

Markov chains (I), Trans. Amer. Math. Soc., 79 (1955), 541–555.
[3] J.L. Doob, Stochastic processes, New York, 1953.
[4] J.L. Doob, Probability methods applied to the first boundary value problem, Proc. Third Berkeley. Symp. Math. Stat and Prob., II (1956), 49–80.
[5] J.L. Doob, Probability theory and the first boundary value problem, Ill. J. Math., 2 (1958), 19–36.
[6] J.L. Doob, Conditional Brounian motion and the boundary limits of harmonic functions, Bull. Soc. Math. France, 85 (1957), 431–458.
[7] W. Feller, Boundaries induced by nonnegative matrices, Trans. Amer. Math. Soc., 83 (1956), 19–54.
[8] I. I. Hirschman and D.V. Widder, The convolution transform, Princeton, 1955.
[9] G. A. Hunt, Markov processes and potentials I, Ill. J. Math., 1 (1957), 44–93.
[10] R. S. Martin, Minimal positive harmonic functions, Trans. Amer. Math. Soc., (1941), 137–172.
[11] T. Radó, Subharmonic functions, Chelsea, 1949.
[12] T. Watanabe, A probabilistic method in Hausdorff moment problem and Laplace-Stieltjes transform, to appear.
[13] T. Watanabe, Some general properties of Markov processes, J. Inst. Poly. Osaka City Univ., 10 (1959), 9–29.
[14] D. V. Widder, The Laplace transform, Princeton, 1946.

Sem. on Probab.
Vol.1 1959年
P1-85

“Seminar on Probability” 発行について

国内各地での研究内容の交流をはかるための印刷物を出すことについての要望は色々の形で出されています。現在結成準備中の“確率論セミナー”（仮称）に対しても参加希望者の間からそのような要望が出されました。準備会事務局では可能な限り，各地の参加希望者と連絡しましたところ，結成を待たず準備会としてでも印刷物を作ることになりました。したがって将来“確率論セミナー”発足の折にはこの種の印刷物の発行はその会に引継がれることを期待していますが，現在のところは準備会の責任で行っています。

内容としては当セミナーの行事における報告，又会員が常時各地で行っている研究の報告や特に依頼した綜合報告等及び研究連絡，速報みたいなものを考えています。又形式については厳密な規則を考えて居りませんが，出来るだけ詳しく書き，特別その課題の専攻者でなくても読めるようなものになることを目標としています。発行回数は今の所，不定期でありますが，年数回という案が考えられています。

この報告集が継続的に発行され，内容が充実したものになるために関係者や其の他の方が積極的援助をして下さることを期待します。

確率論セミナー（仮称）
準備会事務局