Subordination について (数理科学研究第 2 班報告第 6 号) の解説

Subordination の理論は Bochner に始まり，それを扱った確率論の代表的文献としては

- W. Feller, Introduction to Probability Theory and Its Applications, Vol.2, Wiley, 1966
- K. Sato, Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions, Cambridge, 1999

等がある．伊藤先生のこの論説は京大数理解析研究所の設立をその目的として組織された学術団体，数理科学研究第 2 班，における講演記録として発表されたもので日本語のため外国で知られることは少ないが，我国の多くの研究者がこの文献で始めてこの理論を知ってそれを勉強し，またそこには他の文献にない重要な内容も含まれているので今回これが公開されることは意義深いものと思われる．以下で若干のコメントを与える．

§1 の (2) で与えられる関数 $\psi(\lambda)$ は

$$(2') \qquad c_0 + c_1\lambda + \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda\tau})\, n(d\tau), \int_0^\infty \frac{\tau}{1+\tau}\, n(d\tau) < \infty, c_0 \geq 0, c_1 \geq 0$$

のように拡げることが出来，その方が好都合のことが多い．この ψ に対応する subordinator(非減少 Lévy 過程)$\theta(t)$ は平均 $1/c_0$ の指数時間後に ∞ へ飛躍して消滅する．また対応する半群は $e^{-c_0 t}$ 倍される．

このように与えられる ψ の全体 Ψ は，この文献で注意されているように，関数合成で閉じているという重要な性質をもつ．したがって Ψ の要素のなす合成半群 $\psi_t, t \in [0,\infty)$，すなわち $\psi_0(\lambda) = \lambda, \psi_{t+s}(\lambda) = \psi_t(\psi_s(\lambda))$ をみたすものが自然に考えられるが，この概念は連続状態の分枝過程 (Dynkin の意味の super process) と本質的に結びついている (例えば，K. Kawazu-S. Watanabe, Branching process with immigration and related limit theorems, Teo. Veroyat. Vol.16 (1971) 参照)．

この文献の定理 2,3 は，半群 T_θ^t の生成作用素は，そこで定義されている作用素 Λ_θ，すなわち定義域はもとの半群 T^t の生成素の定義域であって，その上で $\Lambda_\theta f = c\Lambda f +$

$\int_0^\infty (T^\tau f - f) n(d\tau)$ と与えられるもの　($\psi(\lambda)$ を上の (2′) のように与えられる場合は, $\Lambda_\theta f = c_1 \Lambda f - c_0 f + \int_0^\infty (T^\tau f - f)\, n(d\tau)$ と与えられるもの),　の拡張であることを主張している．実はこの主張はもっと強く，“T^t の生成作用素の定義域が T^t_θ の生成作用素の core となっている” ことも含めて主張することが出来る．この事実は佐藤健一氏によって注意され，同氏の上述の Lévy 過程の本にその証明が与えられている．

問題 3 と 4 にコメントしておくと，ブラウン運動の $\psi(\lambda)$ による subordination として得られる対称加法過程は対称な Lévy 測度をもち，その $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$ への制限は

$$\left(\int_{(0,\infty)} \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} e^{-\frac{x^2}{2\tau}} n(d\tau) \right) dx$$

と与えられる．それは特に変数 x^2 に関して完全単調な密度をもつ絶対連続な測度となり，従って当然対称加法過程の全体を尽くすことは出来ない．問題 5 に関しては，ブラウン運動の subordination として得られる対称加法過程のうちで self-similar なものは α 次対称安定過程に限られ，これに対してブラウン運動と同じ arcsine law が成り立つことが知られている[*1] しかし，この事実を subordination の応用として証明することは知られていないし，有効な方法であるかどうか疑問である．

渡辺 信三[*2]

[*1] R. K. Getoor and M. J. Sharp: On the arc-sine laws for stable processes, J. Appl. Prob. **31** (1994) 参照

[*2] 京都大学名誉教授