4. 統計的評價論による誤差理論

名古屋帝國大學助教授

理學博士

伊　藤　　清

統計的評價論による誤差理論

Gauss, Laplace 以來，誤差理論は Bayes の定理を用いて展開せられるのが慣例であるが，Bayes の定理を用いるには，事前確率といふ極めて不明確な概念を導入しなければならないので最近では統計的評價論の立場から誤差論を研究する事が行はれるに至つた．この思想は Markoff 迄遡る事が出來るが (Markoff: Wahrscheinlichkeitsrechnung, Teubner, 1912 參照)，それは直接觀測に關係することのみであつた．F. N. David と J. Neyman がその考へ方を擴張して間接觀測の場合にも成功した．私は最初これを知らずにほゞ同じ考へで同じ結果に到達した．こゝでは私の方法を紹介したい．

§1. 偶發誤差の分布　同じ量を何回も觀測する時，一般に幾分異なつた測定値が得られる．これは測定には誤差が伴ふからである．誤差は**定誤差**と**偶發誤差**に分けられる．定誤差は

1. 光線が大氣中で屈折する事（天體觀測の場合等）
2. 地球の廻轉
3. 溫度濕度による計器の膨脹
4. 目盛を過大又は過小に讀みとる癖

等の爲に起るもので原因が明らかであるから，注意によつて修正し除去することが出來る．それであるから誤差論で問題にするのは偶發誤差のみである．偶發誤差は全く豫測し得ない無數の微小なる原因の集積として生ずるもので平均値が 0 の正規分布をする**確率變數** (random variable) と考へられる．何故正規分布となるかについて種々の說明がある

が，その中最も妥當と思はれるのは Krofton の**根源誤差**による說明である．即ち　　誤差 $e = e_1 + e_2 + \cdots\cdots + e_n \quad n \gg 1$

$e_1, \cdots\cdots, e_n$ は根源誤差で $P_r(e_i = \varepsilon) = P_r(e_i = -\varepsilon) = \frac{1}{2}$, $\varepsilon \ll 1$;

$e_1, \cdots\cdots, e_n$ 獨立

これから $P_r(e = -n\varepsilon + k\varepsilon) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ 故に Gauss-Laplace の定理（中心極限定理の特殊の場合）により

$$P_r(s < e < t) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_s^t e^{-\frac{\lambda^2}{2\sigma^2}} d\lambda, \quad \sigma^2 = n\varepsilon^2 = \varepsilon(e^2)$$

玆に P_r は確率 (Probability)，ε は期望値 (expectation) を表はす．以上を綜合すると

$$測定値\ x = 眞正値\ \xi + 偶發誤差\ e$$

$$P_r(\lambda < e < \lambda + d\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\lambda^2}{2\sigma^2}} d\lambda \ (誤差分布)$$

$$\sigma^2 = \varepsilon(e^2) = \varepsilon(x - \xi)^2 = \sigma^2(e) = \sigma^2(x)$$

誤差分布に於て σ が小である程，誤差は 0 の附近に集中するのであるから，$h = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma}$ が大きい程，觀測は精密であるといへる．それで從來この h を觀測の精度と呼んでゐる．しかし私は h よりも $\frac{1}{\sigma^2}(=2h^2)$ の方が取扱ひが便利であるから，これを α で表はし，**精密度**と呼ぶことにする．

§2．評價量　今 $\zeta_1, \zeta_2, \cdots\cdots, \zeta_n$ を獨立に觀測して，$z_1, z_2, \cdots\cdots, z_n$ を得たとする．今これから量 ξ を推定する爲に

(1)　　　　$x = f(z_1, z_2, \cdots\cdots, z_n)$

を考へる時，x を ξ の**評價量**といふ．f としては任意の函數を考へてよいのであるが，こゝでは一次式のみに限定する．即ち

$$(1') \qquad x = c_0 + c_1 z_1 + \cdots\cdots + c_n z_n$$

然らば x は正規分布に從ふ確率變數で

$$(2.1) \qquad \varepsilon(x) = c_0 + c_1\varepsilon(z_1) + c_2\varepsilon(z_2) + \cdots\cdots + c_n\varepsilon(z_n)$$

$$= c_0 + c_1\zeta_1 + c_2\zeta_2 + \cdots\cdots + c_n\zeta_n$$

$$(2.2) \qquad \sigma^2(x) = c_1^2\sigma^2(z_1) + c_2^2\sigma^2(z_2) + \cdots\cdots + c_n^2\sigma^2(z_n)$$

さて $z_1, z_2, \cdots\cdots, z_n$ が夫々眞正値 $\zeta_1, \zeta_2, \cdots\cdots, \zeta_n$ に等しかつた時，即ち觀測が完全に正確であつた時には，(1′) によつて計算した x も亦眞正値 ξ を與へるべきであるから

$$(3) \qquad \xi = c_0 + c_1\zeta_1 + \cdots\cdots + c_n\zeta_n$$

これは (2.1) 式によれば評價量の期望値が眞正値に等しい事を示すもので**評價量の不偏倚性といふ**.

次に評價量についても測定値と同樣に $\dfrac{1}{\sigma^2(x)}$ を精密度と呼ぶ事にし，$\alpha(x)$ であらはす.

$$\alpha(x) = \frac{1}{\sigma^2(x)} = \frac{1}{c_1^2\sigma_1^2(z_1) + c_2^2\sigma_2^2(z_2) + \cdots\cdots + c_n^2\sigma_n^2(z_n)}$$

$$= \frac{1}{\dfrac{c_1^2}{\alpha(z_1)} + \dfrac{c_2^2}{\alpha(z_2)} + \cdots\cdots + \dfrac{c_n^2}{\alpha(z_n)}}$$

測定値から最大精密度を有する評價量（**最良評價量**）を求める事が誤差論の問題である.

§3. 直接觀測の處理

今眞正値 ξ なる量を直接 n 回獨立に測定して，$x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ を得たとし，その精密度を夫々 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots, \alpha_n$ とする．この測定から ξ の最良評價量を求めて見る．その評價量として

$$\bar{x} = c_0 + c_1 x_1 + \cdots\cdots + c_n x_n$$

を考へると不偏倚性により

$$\xi = c_0 + c_1\xi + \cdots\cdots + c_n\xi = c_0 + (c_1 + \cdots\cdots + c_n)\xi$$

これが ξ の如何に拘はらず成立する爲には

$$(1) \qquad c_0 = 0, \quad c_1 + c_2 + \cdots\cdots + c_n = 1$$

又前節から

$$(2) \qquad \alpha(\bar{x}) = \frac{1}{\dfrac{c_1^2}{\alpha_1} + \dfrac{c_2^2}{\alpha_2} + \cdots\cdots + \dfrac{c_n^2}{\alpha_n}}$$

故に $\bar{x}$ が ξ の最良評價量なる爲には (1) の條件の下に, (2) を最大ならしめればよい, Schwarz の不等式により

$$\left(\frac{c_1^2}{\alpha_1} + \frac{c_2^2}{\alpha_2} + \cdots\cdots + \frac{c_n^2}{\alpha_n}\right)(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots\cdots + \alpha_n)$$
$$\geqq \left(\frac{|c_1|}{\sqrt{\alpha_1}}\sqrt{\alpha_1} + \frac{|c_2|}{\sqrt{\alpha_2}}\sqrt{\alpha_2} + \cdots\cdots + \frac{|c_n|}{\sqrt{\alpha_n}}\sqrt{\alpha_n}\right)^2$$
$$= (|c_1| + |c_2| + \cdots\cdots + |c_n|)^2 \geqq 1$$

故に $\qquad \alpha(\bar{x}) \leqq \alpha_1 + \cdots\cdots + \alpha_n$

等號は $\qquad c_1 : c_2 : \cdots\cdots : c_n = \alpha_1 : \alpha_2 : \cdots\cdots : \alpha_n$ 即ち

$$\bar{x} = \frac{\alpha_1 x_1 + \cdots\cdots + \alpha_n x_n}{\alpha_1 + \cdots\cdots + \alpha_n}$$

の時に成立する. 故に

"一つの量を直接に n 回獨立に觀測した時, その量の最良評價量は測定値をその精密度の重みで加重平均したもので, その精密度は觀測の精密度の和である。特に各觀測度が等しい時には, 算術平均が求めるものとなる."

§4. 間接觀測の處理

眞正値 $\xi_1\cdots\cdots\xi_m$ を測定する代りにこれ等の函數

(1) $$\zeta_i=\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\xi_j+a_i,\quad i=1,2,\cdots\cdots,n,$$

を測定して $z_1,z_2,\cdots\cdots,z_n$ を得たとし，その精密度を $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots\alpha_n$ とする．ξ_j の評價量を

(2) $$x_j=\sum_{j=1}^{n}p_{ji}z_i+p_j\quad(j=1,2,\cdots\cdots,m)$$

とすると，不偏倚性により

$$\xi_j=\sum_{j=1}^{n}p_{ji}\zeta_i+p_j$$

この式の ζ_i に (1) を代入して

$$\xi_j=\sum_j p_{ji}(\sum_k a_{ik}\xi_k+a_i)+p_j=\sum_k(\sum_i p_{ji}a_{ik})\xi_k+(p_j+\sum_i p_{ji}a_i)$$

故に

(3) $$p_j=-\sum_i p_{ji}a_i$$

(4) $$\sum_i p_{ji}a_{ik}=\delta_{jk}$$

今 (p_{ji}) なる行列を P, (a_{ik}) を A とし，單位 (m 次) 行列を E とすれば，(4) は

(4′) $$PA=E$$

とかゝれる．又 §2 により

(5) $$\frac{1}{\alpha(x_j)}=\sum_i\frac{p_{ji}^2}{\alpha_i}$$

故に問題は (3),(4) の條件の下に於て，(5) を最小にすればよい．((3) の方は後で p_j を求める時にのみ必要であるにすぎない)．Lagrange

の未定乘數法により

$$\sum_i \frac{p_{ji}}{\alpha_i}\delta p_{ji} - \sum_{i,k} a_{ik}\lambda_{jk}\delta p_{ji} = 0$$

$$p_{ji} = \sum \alpha_i a_{ik}\lambda_{ik} = \sum \lambda_{jk} a_{ki}{}^* \alpha_i \quad (a_{ki}{}^* = a_{ik})$$

即ち

$$(6) \qquad P = \Lambda A^* \alpha$$

玆に α は $\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$ で A^* は A の轉置行列，これを (4′) に入れて

$$\Lambda A^* \alpha A = E$$

故に $\qquad \Lambda = (A^* \alpha A)^{-1}$

(6) により $\qquad P = (A^* \alpha A)^{-1} A^* \alpha$

さて (3) から $\qquad p_j = -\sum p_{ji} a_i$

故に $\qquad x_j = \sum_i p_{ji}(z_i - a_i)$

x_j, z_i, a_i を成分とするヴェクトルを x, z, a であらはすと

$$x = P(z - a) = (A^* \alpha A)^{-1} A^* \alpha (z - a)$$

故に $\qquad (A^* \alpha A)x = A^* \alpha (z - a)$

これを成分で書くと所謂，正規方程式 (normal equation) が得られる：

$$\sum_j (\sum_i \alpha_i a_{ij} a_{ik}) x_j = \sum \alpha_i a_{ik}(z_i - a_i), \quad k = 1, 2, \cdots\cdots, m$$

これは，x_j を

$$\sum_i \alpha_i (z_i - \sum_j a_{ij} x_j - a_i)^2 = \text{最小}$$

によつて求めることに外ならない．(最小自乘法)

かくして評價論の立場からも最小自乗法の原理が得られた.

§5. 關係ある量の間接測定の處理

$\xi_1, \xi_2, \cdots\cdots, \xi_m$ の間に l 個の獨立な關係

$$(1)\qquad b_k + \sum_{k=1}^{m} b_{kj}\xi_j = 0, \quad k = 1, 2, \cdots\cdots, l$$

がある場合に $\xi_1, \cdots\cdots \xi_m$ の代りに

$$(2)\qquad \zeta_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\xi_j + a_i, \quad i = 1, 2, \cdots\cdots, n$$

を測定して $z_1, z_2, \cdots\cdots, z_n$ を得たとする, この時 ξ_j の最良評價量 x_j

$$(3)\qquad b_k + \sum_{k=1}^{m} b_{kj}x_j = 0, \quad k=1, 2, \cdots\cdots, l$$

の下に於て

$$(4)\qquad \sum_i \alpha_i\Big(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j + a_i - z_i\Big)^2 = \text{最小}$$

となる x_j として求められる事を證明しよう.

(1) により $\xi_1, \xi_2, \cdots\cdots \xi_n$ の中 $(n-l)$ 個は獨立で, 他はこれの一次式で與へられる. 今 $\xi_1 \cdots\cdots \xi_{n-l}$ が獨立であつて

$$(1')\qquad \xi_j = \sum_{k=1}^{n-l} c_{jk}\xi_k + c_j, \quad j = m-l+1, m-l+2, \cdots\cdots, m$$

であると假定して一般性を失はない (1′) を (2) に代入して

$$(2')\qquad \zeta_i = \sum_{k=1}^{n-l} d_{ik}\xi_k + d_i, \quad i = 1, 2, \cdots\cdots, n$$

となつたとする. $\xi_1, \xi_2, \cdots\cdots, \xi_{n-l}$ は獨立なる故, 前節の結果によれば $\xi_j (j = 1, 2, \cdots\cdots, n-l)$ の最良評價量を得るには

$$(5)\qquad \sum_i \alpha_i\Big(\sum_{k=1}^{n-l} c_{ik}x_k + d_i - z_i\Big)^2 = \text{最小}$$

ならしめる x_j, $j=1,2,\cdots\cdots,n-l$ をとればよい．さて $(1')$ の下では (2) の右邊は $(2')$ の右邊に等しいから (3) の下では (5) の左邊は (4) の左邊に等しく，從つて (3) の條件の下で (4) を成立せしめる $x_1x_2\cdots\cdots x_n$ から，$x_1,x_2,\cdots\cdots,x_{n-l}$ をとれば，これは求むる ξ_j, $j=1,2,\cdots\cdots,n-l$ の最良評價量である．さて $j>n-l$ ならば $\xi_1\cdots\cdots\xi_n$ から $n-l$ 個獨立なものを選ぶ時に ξ_μ を含むやうに出來るから，それから出發して上と同樣の論法を進めるとやはり (3) の下で (4) を成立せしめる x_j をとればよいことが分る．

§6. 例．$\triangle ABC$ の內角 A,B,C，外角 A を計つて，x,y,z,w を得たとする．觀測の精密度は全部等しい $(=1)$ とし，$\angle A,\angle B,\angle C$ の最良評價を求む．

(1) 先づ最初に前節の結果を利用して見る．$\angle A,\angle B,\angle C$ の眞正値を α,β,γ とすると

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi$$

であつて，測定したのは $\alpha,\beta,\gamma,\pi-\alpha$ である．故に α,β,γ の最良評價量は

$$\bar{x}+\bar{y}+\bar{z}=\pi$$

なる條件の下に

$$(x-\bar{x})^2+(y-\bar{y})^2+(z-\bar{z})^2+(w-(\pi-\bar{x}))^2=\text{最小}$$

とする $\bar{x},\bar{y},\bar{z}$ を求めればよい．簡單な計算の結果

$$\bar{x}=\frac{3\pi+2x-y-z-2w}{5}$$

$$\alpha(\bar{x})=\frac{1}{\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(-\frac{1}{5}\right)^2+\left(-\frac{1}{5}\right)^2+\left(-\frac{2}{5}\right)^2}=\frac{5}{2}$$

$$\bar{y}=\frac{\pi-x+3y-2z+w}{5}$$

$$\alpha(\bar{y})=\frac{1}{\left(-\frac{1}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(-\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{1}{5}\right)^2}=\frac{5}{3}$$

$$\bar{z}=\frac{\pi-x-2y+3z+w}{5} \qquad \alpha(\bar{z})=\frac{5}{3}$$

(2) 次に直接に求めて見る．今 $\bar{x}=px+qy+rz+sw+d$ が α の評價量とすれば

$$\alpha=p\alpha+q\beta+r\gamma+s(\pi-\alpha)+t$$

が成立すべきであるが，$\alpha+\beta+\gamma=\pi$ であるから

$$\pi-\beta-\gamma=p(\pi-\beta-\gamma)+q\beta+r\gamma+s(\beta+\gamma)+t$$

即ち

$$(-p+q+s-1)\beta+(-p+r+s)\gamma+p\pi+t=0$$

故に $\qquad -p+q+s-1=0,\ -p+r+s=0,\ p\pi+t=0$

この條件の下で $\alpha(\bar{x})=\dfrac{1}{p^2+q^2+r^2+s^2}$ を最大にすると (1) と同じ結果になる．$\bar{y},\bar{z}$ も同様．

(3) 最後に少し變つた方法を說明する．α の測定値としては，この觀測から

$$x,\ \pi-w,\ \pi-y-z$$

が考へられ，これは獨立で，その精密度は $1,1,\frac{1}{2}$ である．(§2 參照) 故に §3 により，最良評價量は

$$\bar{x}=\frac{x+(\pi-w)+(\pi-y-z)}{1+1+\frac{1}{2}}=\frac{3\pi+2x-y-z-2w}{5}$$

で $\alpha(\bar{x})=1+1+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$. 次に β の測定値としては $y, \pi-x-z$, $w-z$ があるが, $\pi-x-z, w-z$ は獨立ではないから前のやうには出來ない. それで先づ外角 $A(=\pi-\alpha)$ の測定値として w と $\pi-x$ とあり, その精度は共に 1 であるから, 外角 A の最良評價量は

$$\frac{w+(\pi-x)}{1+1}=\frac{\pi-x+w}{2} \quad (\text{精度は } 2)$$

この精度は 2 であつてこれで x, w は**完全に利用された**. 故に β の測定値としては $\frac{\pi-x+w}{2}-z$ と y とが得られ. これは獨立でその精密度は夫々

$$\frac{1}{\frac{1}{2}+1}=\frac{2}{3}, \quad 1$$

故に β の最良評價量 $\bar{y}=\dfrac{\frac{2}{3}\left(\frac{\pi-x+w}{2}-z\right)+y}{\frac{2}{3}+1}=\dfrac{\pi-x+3y-2z+w}{5}$,

$\alpha(\bar{y})=\frac{2}{3}+1=\frac{5}{3}$

z も同樣である。

最後の方法は巧妙な方法であるが**完全に利用された**といふ言葉の數學的意味を說明しない限り數學的には不十分である. その事は別の機會に論じたいが大體の感じは上の說明で捉へ得ると思ふ.

§7. **綜括** Bayes の定理を用ゐる Gauss, Laplace の方法は"測定値は分つてゐるから常數と考へ, 眞正値は分らないから確率變數と考へる"といふ極めて主觀的な立場に立つてゐるが, 上述の方法では, 眞正値は分らなくても常數と考へ, 個々の測定値は常數であるが, 我々

は寧ろ測定値一般を考へ，これを確率變數として把握し求めたい量を測定値の函數として評價し，その中で最大の精密度を有する函數を求めたのである．我々の立場では實際目前に得た觀測について論ずるのではなく，一般的に出來るだけ多くの場合に眞正値に近いものを得られる如き方法を求めるのである．かゝる考へ方は數理統計學の最近の根本思潮である．