[12] L. Kauffman, State models and the Jones polynomial, Topology, **26** (1987), 395-407.
[13] 小林毅, 絡み目理論の新しい不変量——作用素環に由来するJones多項式とその一般化——, 数学, **38** (1986), 1-14.
[14] A. A. Markov, Uber die freie Aquivalenz geschlossener Zöpfe, Recueil Mathmatique Moscov, **1** (1935), 73-78.
[15] H. R. Morton, H. B. Short, The 2-variable polynomial of cable knots, Math. Proc. Camb. Philos. Soc., **101** (1987), 267-278.
[16] J. Murakami, The parallel version of polynomial invariants of links, Osaka J. Math., **26** (1989), 1-55.
[17] 村杉邦男, 組み紐の幾何学, ブルーバックスB500, 講談社
[18] K. Murasugi, Jones polynomials and classical conjectures in knot theory, Topology, **26** (1987), 187-194.
[19] N. Yu. Reshetikhin, Quasitriangular Hopf algebras and invariants of links, Algebra i analiz, **1** (1989), 169-188.
[20] A. Tsuchiya, Y. Kanie, Vertex operators in conformal field theory on Pl and monodromy representation of braid group, Conformal field theory and solvable lattice models (Kyoto, 1986), Adv. Stud. Pure Math. **16**, 297-372.
[21] V. Turaev, The Yang-Baxter equation and invariants of links, Invent. Math., **92** (1988), 527-553.
[22] S. Yamada, On the 2-variable Jones polynomial of satellite links, Topology and Computer Science, 295-300, Kinokuniya, Tokyo 1987.
[23] S. Yamada, An invariant of spatial graphs, J. Graph Theory, **13** (1989), 537-551.

(むらかみ　じゅん・大阪大学理学部)

森重文氏の業績

向　井　　茂

京都における今回の国際数学者会議でフィールズ賞を受賞した森重文氏は1951年に名古屋市に生まれた．1969年に京都大学理学部に入学，6年間の学生生活を京都で過ごし，京都大学助手，Harvard大学助教授，名古屋大学教授を経て今年の4月に京都大学数理解析研究所教授に着任，現在にいたっている．

氏の専門は代数幾何学．1979年にHartshorne予想を解決して以来，高次元代数多様体の研究を強力に推進し続けてきた．1982年に発表された端射線の理論は高次元多様体の多くの問題に応用されるとともに，それまで夢でしかなかった3次元極小モデル問題に解決の道を開いた．それ以来，内外の研究者の重要な貢献の下に多くの困難を乗り越え，遂に[22]において，この難問を解決し，今回の受賞にいたった．この機会に高次元多様体論における氏の十数年間の業績を振り返ってみたい．(文中敬称は略する.)

§1　Hartshorne予想

射影空間 $\boldsymbol{P}^n$ の特徴付けがこの方面の最初の仕事となった．X をコンパクトRiemann面とする．X は向き付け可能な閉曲面で，穴(またはハンドル)の個数 g は

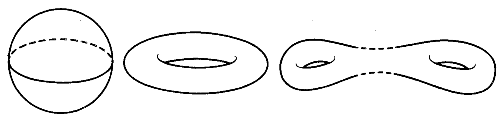


図1　Riemann面の種数

X の種数と呼ばれる(図1)．X に計量が与えられているとき，その(Gauss)曲率の平均値は種数のみによる．実際，Gauss-Bonnetの公式より

$$\frac{1}{2\pi}\int_X (\text{曲率}) = 2-2g$$

が成立する．特に，曲率が(いたるところで)正になるのは $g=0$, X がRiemann球の時に限る．

Riemann球は複素平面 $\boldsymbol{C}$ を1点コンパクト化したものだが，これの自然な一般化が(複素)射影空間 $\boldsymbol{P}^n$ である．$\boldsymbol{P}^n$ は $\boldsymbol{C}^{n+1}$ の1次元部分空間全体のなす多様体で，$\boldsymbol{C}^n$ のコンパクト化になっている．最も基本的な代数多様体であると同時に，Fubini-Study計量によりKähler多様体でもある．Riemann球 $\boldsymbol{P}^1$ の曲率による特徴付けを一般化したものとしてFrankel予想がある．

(F-n)　n 次元コンパクトKähler多様体 X で正則断面曲率(holomorphic bisectional curvature)が正なものは

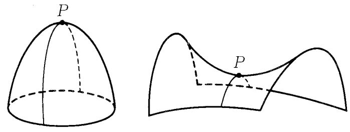


図2

$\boldsymbol{P}^n$ と(双正則)同型である[1]．

正則断面曲率が正であることより，Ricci 曲率も正．よって，小平の埋込定理より X は射影的代数多様体である．Hartshorne はベクトル束に対して豊富という性質を代数的に定義し，次の事を予想した([H, Chap. 3])．

(H-n) n 次元(非特異)射影的代数多様体 X で接ベクトル束 T_X が豊富なものは $\boldsymbol{P}^n$ と同型である．

正則断面曲率が正ならば接ベクトル束は豊富なので[2]，(F-n)は(H-n)より従う．(H-2)は代数曲面の分類より容易に確かめられるので，3次元以上の場合が問題であった．

隅広との共著 [7] は，この予想の解決を目指したもので，Bishop-Goldberg-小林の結果の代数幾何版‘T_X が豊富なら X の Picard 数は1に等しい’を§1で示している[3]．(H-3)はこれと満渕 [Ma] による(F-3)の解決[2]から従う．そして，Hartshorne 予想の一般的解決が [8] においてなされた[4]．この解決は T_X の豊富性を部分的にしか使っていない点で優れている．T_X が豊富ならば形式的な議論から，次の二つの性質がただちに従う．

（1） 直線束 $\Lambda^n T_X$ は豊富である．(この条件を満たす多様体は Fano 多様体と呼ばれる.)

（2） $\boldsymbol{P}^1$ から X への任意の非定値正則写像 $f:\boldsymbol{P}^1\to X$ に対して，接ベクトル束の引き戻し f^*T_X は豊富[5]である．

$\boldsymbol{P}^n$ を特徴付けるにはこの二つの性質で十分なのである．

定理 1([8])．上の条件(2)を満たす n 次元 Fano 多様体は射影空間 $\boldsymbol{P}^n$ と同型である．

証明では，X 内で $\boldsymbol{P}^n$ の直線に対応する有理曲線の存在が最初に示される．ここにおいて余次元1の部分多様体(因子)の替りに1次元部分多様体(曲線)を調べる新しい方法が導入された[6]．曲線を動かして有理的なものにまで分解，Frobenius 射を巧妙に使う，標数正の結果から標数零の結果をえる等々，後の [11] を支える基本技術は既にここに出現している．論文は多くの人に読まれ，読者の多くはそのアイデアの豊富さと斬新さに感嘆したが，$\boldsymbol{P}^n$ の特徴付け以上のことがなされていると感じた人も少なくなかった．果たせるかな，端射線理論という強力で美しい理論が出現した[7]．これこそ，それ以降の高次元多様体論の華々しい発展を導いたもので，多くの人の改良の手が加えられ続けるが，極小モデル問題解決への期待(例えば [R1, § 4])をこめて森理論と呼ばれるものの誕生であった．

§2　多様体を計るものさし

端射線理論の背景を説明しよう．以下，多様体と言えば射影的代数多様体，即ち，複素多様体であって射影空間内で(斉次)多項式系の共通零点集合になっているものとする．1次元，2次元の場合，単に曲線，曲面と呼ぶ．曲線，即ち，コンパクト Riemann 面の全体は種数という非負整数 g でもってきれいに秩序だてられている．種数には前節で述べた穴の個数以外に重要な見方がいくつかある[8]．種数の概念をうまく一般化して，それによって高次元多様体の世界をも整頓しようと言うのが分類論の目指すところである．

Riemann 面 C に計量が入っているとき，Gauss-Bonnet の公式(前節)より，C は種数 g が $0, 1, \geq 2$ に従って平均的に正，零，負に曲っている．この分類は重要である．曲線が有理的，即ち，その上の有理型関数全体のなす体が($\boldsymbol{C}$ 上)1個の元で生成されるのは，$g=0$ と同値であるし，さらに，表1のことが知られている．

代数幾何学では主として多様体の計量によらない性質を研究するが，曲率に対応するものとして，標準因子[9]がある．曲線 C 上いたるところ有理型な微分形式 ω(局所的には $f(z)\,dz$ と表される)で零でないものを一つとってくる．ω の零点の個数 μ と極の個数 ν(ともに重複度を数える)の差 $\mu-\nu$ は $2g-2$ に等しい．これの負，零，正が表1の分類に対応する．一般に n 次元多様体 X の場合，その上の n 次微分形式 $f(z_1, z_2, \cdots, z_n)\,dz_1\wedge$

表1　コンパクト Riemann 面の分類

種　数	$g=0$	$g=1$	$g\geq 2$
標準因子	$K<0$	$K=0$	$K>0$
双有理自己同型群	$PSL(2, \boldsymbol{C})$	1次元	有限群
モジュライ数	0	1	$3g-3$
普遍被覆	$\boldsymbol{P}^1$	複素平面 $\boldsymbol{C}$	開円板 $\{\lvert z\rvert<1\}$
基本群	$\{0\}$	$\boldsymbol{Z}^{\oplus 2}$	非可換
有理点		有限生成アーベル群 (Mordell)	有限個 (Faltings)

$dz_2\wedge\cdots\wedge dz_n$ を考えるのが自然な一般化である．これは標準形式とも呼ばれる．X 上いたるところ有理型な標準形式 ω で零でないものを一つとってきて，その零点集合の既約成分を $Z_1, \cdots, Z_r$，極の既約成分を $P_1, \cdots, P_s$ とする．そこでの零，極の位数を $\mu_1, \cdots, \mu_r$，$\nu_1, \cdots, \nu_s$ としたとき，形式的な和 $\mu_1 Z_1+\cdots+\mu_r Z_r-\nu_1 P_1-\cdots-\nu_s P_s$ を標準因子といい，K_X で表す[10]．これは数ではないが，X 内の曲線[11] C に対してそれと交点数[12] $(K_X.\,C)$ が定義される．これは ω を C に制限したときの零点と極の個数の差である．1 次元のときと同様，この数は ω のとり方によらない．また，X に Kähler 計量が入っているとき，

$$\frac{1}{2\pi}\int_C (X \text{ の Ricci 曲率}) = -(K_X.\,C)$$

が成立する．よって $(K_X.\,C)<0$ は，X が C に沿って平均すれば正に曲っていることを意味する．

標準因子 K_X によって多様体を計ってみよう．最も簡単な場合として超曲面を考える．N 変数斉次多項式 $F(X_1, \cdots, X_N)$ の零点集合

$$X=\{(x_1:\cdots:x_N)\in \boldsymbol{P}^{N-1} : F(x_1, \cdots, x_N)=0\}$$

を射影空間内で考え，これが非特異[13]であるとする．このとき，$(K_X.\,C)$ の符号は X のみにより曲線 C によらない．実際，多項式 F の次数を d とするとき，$(K_X.\,C)$ の符号は $d-N$ のそれと一致する．$d<N, d=N, d>N$ による超曲面 X の分類は Riemann 面の分類 $g=0, 1, \geq 2$ と多くの共通点をもつ(表 2)．

表 2　$X : F_d(x_1, \cdots, x_N)=0\subset \boldsymbol{P}^{N-1}$ の分類

次　数	$d<N$	$d=N$	$d>N$
標準因子	$K<0$	$K=0$	$K>0$
双有理自己同型群			有限群
有理曲線	有理的連結	有理曲線族で覆い尽くせない	
有理点			稠密でないと予想される

大まかに言って，多様体の世界は $K<0$，$K=0, K>0$ に分かれる．問題は $(K_X.\,C)$ の符号が C による多様体[14]をどう考えるかである．端射線理論はこれに答えてくれる．

§3　$K<0$ の世界の解明

標準因子 K_X は $(K_X.\,C)\geq 0$ が全ての曲線 $C\subset X$ に対して成立するとき，*nef*[15] (数値的非負)であると言う．論文 [11] は題名の通り K_X が nef でない多様体を研究対象としている．次の存在定理は重要である[16]．

定理 2.　標準因子が nef でない多様体の上には有理曲線[17]が存在する．

より強い条件($-K_X$ が豊富)のもとでなら，同じことは既に [8] で示されていた．この優れた改良を可能にし，理論の発展に決定的であったのは 1-輪体の錘体の考察であった．Riemann 面は自然に向き付けられているから X 内の曲線 C のホモロジー類には正負の区別がつくことに注意しよう．正の方を $[C]$ で表す．ホモロジーの係数は実数で考え，これらで生成された凸錘[18] $NE(X)\subset H_2(X, \boldsymbol{R})$ の閉包を $\overline{NE}(X)$ で表す．次は錘体定理(cone theorem)と呼ばれる．

定理 3.　$\overline{NE}(X)$ の $(K_X.\,C)<0$ の部分は局所多面体的(locally polyhedral)である．

この多面体部分の角にある半直線[19]を端射線(extremal ray)と言う．定理 2 の有理曲線は，実は，各端射線ごとに存在する．

定理 4.　端射線は有理曲線(のホモロジー類)で張られる．

これは定理 2 を精密化しただけではない．各端射線 R にはいつも縮小写像 $\mathrm{cont}_R : X\to Y$ (次節の定理 5, 6)が付随することにより，これは標準因子が nef でない多様体を調べる強力な武器となった[20]．R に属する連結曲線で繋げるとき X の 2 点が同値であると定義すると，上の Y は位相空間としては X をこの同値関係で割ったものである．縮小写像の構成は，3 次元の場合は [11, Chap. 3] で行われた．後に，一般次元，しかもある種の特異点(後述)を許した多様体の上で別の方法でもって確立される．

前々節の定理 1 から分かるように端射線理論が Fano 多様体に応用されるのは自然な成行きであった．この場合，$NE(X)$ 自身が閉多面体的になる([11, (1.2)])．よって，Fano 多様体の端射線の個数は Picard 数以上である．このことと縮小写像の分類を用いて Picard 数が 2 以上の 3 次元 Fano 多様体が筆者との共著 [10] において分類された．Picard 数が 1 の 3 次元 Fano 多様体を分類する方

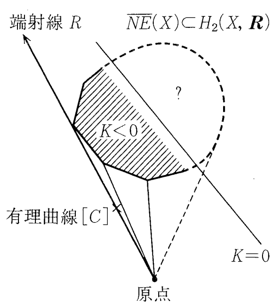


図 3　1-輪体の錘体

法として直線からの二重射影[21)]があるが，これを厳密に遂行するのにも，端射線理論が有用である[22)]．この節の内容については解説[16], [13]を参照されたい．

§4　$K \geq 0$ の世界へ

Fano 多様体 X ではその上の全ての曲線 C に対して $(K_X.C)<0$．特に，$(K_X.C)<0$ なる曲線 C で覆いつくされている．この性質をもつ多様体は有理曲線で覆われていることが宮岡との共著[20]で示されている．では，$(K_X.C)<0$ なる曲線は存在するが，それらで覆いつくされていない多様体はどう扱えばよいだろうか？これは，多様体 X 上に零でない正則(多重)標準形式[23)] ω が存在する時におこる．ω の零点集合を D とする時，C が D に含まれないなら $(K_X.C)\geq 0$ である．よって，$(K_X.C)<0$ なる曲線 C は存在したとしても全て D 内に含まれる．こういう状況の下で次の問題を考える．

問題． X から適当な真閉部分多様体($\omega \neq 0$ の存在する場合だと D)を取り除いた部分を開集合として含む多様体 $X^{\min}$ でもって標準因子が nef なものを構成せよ．

これが極小モデル問題の素朴な形である．$X^{\min}$ は X と異なるが，同じ有理型関数体をもつ，即ち，双有理同値である．2 次元の場合の解答は古典的である[24)]．

定理 5. 曲面 X に対し，次のいずれかが成立する．

(1)　X は射影平面 $\boldsymbol{P}^2$ と同型．

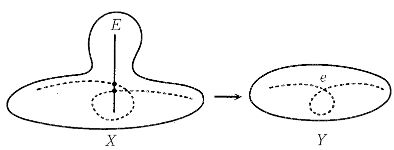
(2)　X は曲線上の $\boldsymbol{P}^1$-束．

(3)　X は第 1 種例外曲線を含む．

(4)　標準因子は nef である．

第 1 種例外曲線とは $\boldsymbol{P}^1$ と同型で標準因子との交点数が -1 になる曲線 E のことを言う．X から E を取り除いたもの $X \backslash E$ の 1 点コンパクト化 Y は再び(非特異)曲面になり，自然な写像 $X \to Y$ は正則である．これは Y を 1 点において blow　up する操作の逆(blow down)である(図 4)．

曲面 X に対して(3)の成立するときは，X の替りに Y に対して定理を適用する．このことをできる限り繰り返していくことにより[25)]，曲面 $X^{\min}$ でもって定理の(1), (2)または(4)のいずれかを満たすものがえられる．(4)の場合，X と双有理同値な曲面は全て $X^{\min}$ を blow up することによってえられるので，$X^{\min}$ は X の極小モデルと呼ばれる．



点 e で blow up することにより，そこで交っていた道は立体交叉される

図 4　曲面の blow up

定理 5 の 3 次元への拡張が[11, Chap. 3]の主結果である．必要な部分を抜き出す．

定理 6. 標準因子 K_X が nef でない 3 次元多様体 X に対し，全射正則写像 $f: X \to Y$ でもって次の 2 条件を満たすものが存在する[26)]．

(1)　$f(C)$ が点であるような曲線 $C \subset X$ に対していつも $(K_X.C)$ は負．(より強く，$-K_X$ は写像 f に関して相対的に豊富．)

(2)　次のいずれかが成立する．

《F》　$\dim Y < \dim X$: f の一般ファイバーは Fano 多様体(ファイバー型)，または，

《D》　$\dim Y = \dim X$: X 内の曲面 E が存在して f はその外で同型，E を曲線又は点に写す(良性縮小型)．

K_X が nef でなく，さりとて，$(K_X.C)<0$ なる曲線が X を覆い尽くしてはいないとする．このとき，《F》はおこらない．X から《D》の Y に移ることは X の極小モデルをえるための第 1 着手である．この成功に刺激され，多くの代数幾何学者の目が極小モデル問題に向けられた．雲の上に浮かんでいると思われていたものが登れそうに見えてきたのである．しかし，曲面の場合とは状況も難度も著しく異なっていた．曲面の場合にはなく，3 次元ではじめて現れる問題点が幾つかあった．

最初の問題は特異点であった．X が特異点をもたなくても《D》の Y は特異点をもちえる．これは，3 次元(以上)では極小モデルが特異点を許さないとえられないことを意味している．よって，まず極小モデルをとる操作で閉じている(と思われる)特異点の範囲を一つ定め，そして，次にその範囲の特異点を許した多様体の上で端射線理論を遂行することが必要であった．前者の答は $\boldsymbol{Q}$-分解的(factorial)末端(terminal)特異点．この概念は Reid [R1]による．後者は川又，Reid, Kollár らによって固定点自由化定理を使って成し遂げられた([24], [KMM]参照)．また，森[18]は 3 次元末端的特異点を分類した[27)]．これは極小モデル問題解決に欠かせないだけでなく，極小モデルを使って多様体を調べるのにも基本的である．

次の問題は，特異多様体の端射線に新種が現れること

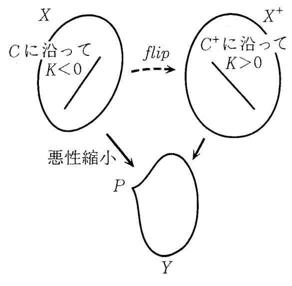


図5

であった．X に $\boldsymbol{Q}$-分解的末端特異点を許したとき定理6はそのままでは成立しない．(2)に次の場合を付け加えて正しくなる．

《S》 $\dim Y = \dim X$: f が同型でない点全体の集合 $C \subset X$ は1次元．f は C を特異点に写す(悪性縮小型)．

《F》と《D》の場合，Y も $\boldsymbol{Q}$-分解的末端特異点しかもたないが，この《S》に現れる Y の特異点 P は非常に悪くて[28]，標準因子 K_Y の nef 性が P の近傍ではもはや定義されない．Y はそこからは縮小によって極小モデルに進むことのできない袋小路である．(こういう状況の例については§6をみよ．)

Flip 予想([R1, p. 157])．《S》の状況を救い，次の3条件を満たす正則写像 $f^+ : X^+ \to Y$ が存在する(図5)．

i) X^+ も $\boldsymbol{Q}$-分解的末端特異点しかもたない．

ii) f^+ が同型でない点全体の集合 $C^+ \subset X^+$ は1次元．

iii) C^+ の各既約成分 Z に対して $(K_{X^+}. Z) > 0$．

X から C を取り除いて別の曲線 C^+ をうまく張り替え，境界での標準因子の符号を負から正に替えようという問題である．X^+ を具体的に blow up と blow down の合成で構成できれば理想的であるが[29]，存在だけなら，f の相対標準環 $\bigoplus_{n\geq 0} f_* \mathcal{O}_X(nK_X)$ の有限生成性と同値である．森[22]はこれを(3次元の場合に)証明した．詳しくは，飯高[Ii]，川又[Ka2]の解説，及び原論文の序文を読まれたい．[11]と同じく端射線に属する有理曲線の形式的近傍を解析しているが，それを特異多様体の上で遂行している．末端特異点をもつ多様体の上で法束，変形等に挑んだ労作である．[22]以降の flip 理論の進展，及び残された問題については[25]，[Ko3]をみられたい．

§5 極小モデルと双有理幾何

さて，Flip 予想の解決により次の流れ図ができ上った(図6)．このプログラムのループが有限回で止まることは Shokurov [S] によって示されていた．よって，3次元多様体 X を入力すると加工されてそれと双有理同値な $X^{\min}$ が出力される．即ち，次の定理がえられた．

定理 7([22, (0.3.1)])．3次元多様体 X は $\boldsymbol{Q}$-分解的末端特異点しかもたないとする．このとき，X と双有理同値でやはり $\boldsymbol{Q}$-分解的末端特異点しかもたない $X^{\min}$ でもって

1) $K_{X^{\min}}$ は nef であるか，または，

2) $X^{\min}$ は Fano fibering $f : X \to Y$, $\dim Y < \dim X$ をもつ

のどちらかをみたすものが存在する．

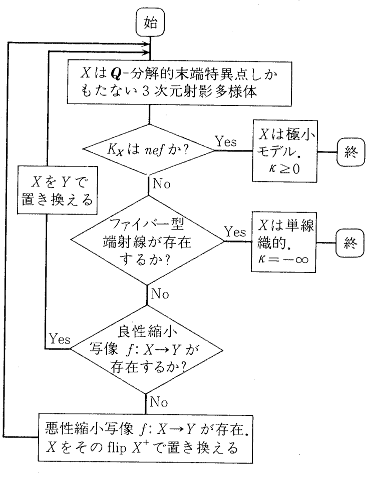


図6 極小モデルの流れ図

1)と2)のどちらがおこるかは X の小平次元 $\kappa(X)$ でもって，前もって分かる．$\kappa(X) \geq 0$，即ち，X 上で零でない正則多重標準形式が一つでも存在するときは前者が成立する．そうでない($\kappa(X) = -\infty$ の)ときは，宮岡[Mi]により後者が成立する．

2次元の場合，$X^{\min}$ は X に対して一意的に定まり，$\kappa \geq 0$ では X の双有理分類は $X^{\min}$ の双正則分類に帰着される．3次元のときも，上の2)の場合 $X^{\min}$ は X の極小モデルと呼ばれるが，X の極小モデルは複数個ありえる．しかし，それらは flop[30] というおとなしい性質の双有理変換で移り合う．そのおかげで，例えば，$X^{\min}$ の特異点の様子や(混合)Hodge 構造は $X^{\min}$ のとり方によらず，X の双有理不変量(有理型関数体の不変量)になる(Kollár [Ko2])．

1変数代数関数体とコンパクト Riemann 面とが1対1に対応するという基本原理を2次元で再現した極小モデルは，上のように修正されながらも，3次元で立派に完成された．この舞台の上でこれからもいい研究が活

表3 体の分類と極小モデル

次　元	双有理幾何と双正則幾何
1	{曲線}/(双有理同値) = {曲線}/(双正則同型)
$2(\kappa \geq 0)$	{曲面}/(双有理同値) = {極小曲面}/(双正則同型)
$3(\kappa \geq 0)$	{3次元多様体}/(双有理同値) = {極小モデル}/(flop)

発になされることを期待して拙稿を終える．高次元多様体論について興味のある方は，解説 [Ii], [Ka2], [Ko1], [24], [W], [KMM], [R2]およびその文献を，微分幾何との関係については [Tj] をみられたい．

§6　付録

極小モデル問題解決の核となった flip の例を挙げる．その親戚ともいえる flop を群作用で割るのが最も簡単である．最も穏やかな3次元特異点，$X : xy-zt=0\subset \boldsymbol{C}^4$ の原点 P を考える．これは P を中心とする blow up $f : \tilde{X}\to X$ により非特異化される．比 $x:y:z:t$ を新しく座標に付加するので，例外集合 $E=f^{-1}(P)$ は2次曲面 $xy-zt=0\subset\boldsymbol{P}^3$．よって，$\boldsymbol{P}^1\times\boldsymbol{P}^1$ と同型である．この非特異化 f の途中に二つの非特異化が存在する．比 $x:t=z:y$ を座標に付加してえられる $f_1 : X_1\to X$ と比 $x:z=t:y$ を座標に付加してえられる $f_2 : X_2\to X$ である．どちらにおいても例外集合 Z_1, Z_2 は射影直線 $\boldsymbol{P}^1$ であり，標準因子との交点数は零である．双有理変換 $\phi : X_1 -\to X_2$ は最も簡単な flop で elementary transformation とも呼ばれる(図7)．

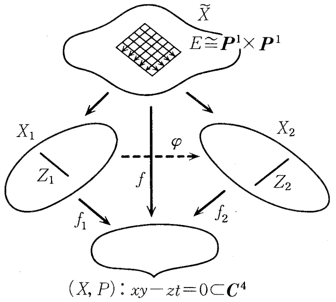


図7　Flop の例

ζ を1の原始 n 乗根とし，X の自己同型 σ を $(x, y, z, t)\mapsto(\zeta x, y, \zeta z, t)$ で与える．これは X_1, X_2 の自己同型 σ_1, σ_2 に持ち上がる．双有理射 $\psi : Y_1=X_1/\sigma_1 -\to Y_2=X_2/\sigma_2$ が flip の例である．実際，$g_i=f_i/\sigma_i : Y_i\to Y=X/\sigma$ $(i=1, 2)$ の例外集合 C_1, C_2 はともに射影直線で，$(C_1.K_{Y_1})=-\frac{n-1}{n}<0$ と $(C_2.K_{Y_2})=n-1>0$ がえられる．$n=2$ のとき，ψ は Francia [F] によって別の形で与えられた．この場合には，Ψ を blow up と blow down の合成に表すことが容易である(図8)．

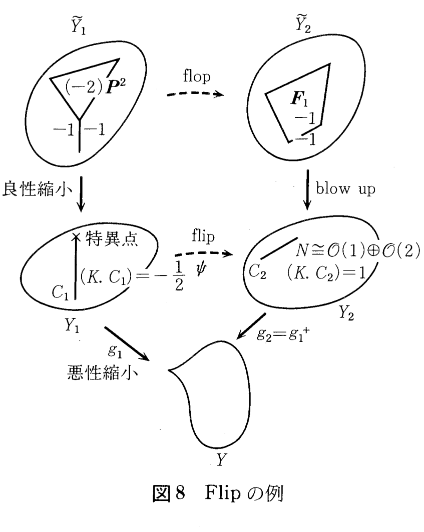


図8　Flip の例

（1）　まず，C_1 上の孤立特異点を blow up $\tilde{Y}_1\to Y_1$ する．これでもって，法束が $\mathcal{O}(-2)$ の射影平面 $\boldsymbol{P}^2$ が例外因子として出現する．

（2）　C_1 の固有変換を中心として図7の flop $\tilde{Y}_1 -\to \tilde{Y}_2$ をする．例外因子 $\boldsymbol{P}^2$ は $\boldsymbol{P}^1$ 上の $\boldsymbol{P}^1$-束 $\boldsymbol{F}_1$ に化ける．$\psi : Y_1 -\to Y_2$ の不確定点は解消され，$\tilde{Y}_2\to Y_2$ は C_2 を中心とする blow up, $\boldsymbol{F}_1$ はその例外因子となる．

$\tilde{Y}_1$ の(相対)極小モデルは Y_2 であるが，現在の極小モデル問題の解決は$(-2)\boldsymbol{P}^2$ を縮小して Y_1 を flip する．$\tilde{Y}_2$ を経て Y_2 に行くのではないことに注意しておく．

注

1)　もともとは断面曲率(sectional curvature)を用いて予想された．断面曲率は各点 P での接空間の実2次元部分空間 V に対して値が定まる．その値は指数写像で V に対応する小曲面の P における Gauss 曲率．V を複素1次元部分空間に限ったものが正則断面曲率である．

2)　解説 [O] およびその文献を参照せよ．

3)　[7] の §2 では $\boldsymbol{P}^n$ の別の有用な特徴付けが与えられている．

　定理．豊富な因子に沿って消える正則ベクトル場を持つ非特異射影多様体は $\boldsymbol{P}^n$ と同型である．

4)　一般次元の Frankel 予想の微分幾何学的証明は，球面からの調和写像を調べる方法でもって Siu-Yau [SY] によって与えられた．

5)　射影直線 $\boldsymbol{P}^1$ 上の(正則)ベクトル束 E は直線束 L_i の直和と同型である．E が豊富になるのは各 L_i の次数が正であることに外ならない．

6)　小平，Grothendieck らによる変形(deformation)の理論が鍵である．

7)　別の方向の発展として Remmert-van de Ven の問題への応用がある．

　定理([L, §4])．射影空間 $\boldsymbol{P}^n$ からの全射正則写像をもつ非特異射影多様体は射影空間と同型である．

8)　1次独立な正則微分形式の個数であるし，コホモロジー群 $H^1(\mathcal{O}_C)$ の次元でもある．

9)　直線束 $\Lambda^n T_X$ の双対と対応する．第1 Chern 類 $c_1(X)$ の符号を替えたものと思って差し支えない．

10)　正確には，標準因子の線型同値類．

11)　コンパクト Riemann 面からの正則写像の像．1次元部分多様体だが，特異点をもってもよい．

12)　ω に有理型関数を掛けたものも有理型標準形式だから ω をうまく選べば，$\omega|_C\neq0$ で$(K_X.C)$が定義できる．

13) F の N 個の偏微分に(自明なものしか)共通零点がないことと同値である.

14) そのような多様体は直積や blow up で幾らでもつくれる.

15) numerically effective の替りによく使われる.

16) $-c_1(X)$ が nef でないコンパクト Kähler 多様体で同じことが成立すると予想されるが, 反例も証明もまだない.

17) 特異点をもつかもしれない. 有理曲線 C は $-\dim X-1\leq(K_X.C)<0$ を満たすようにとれる.

18) 有限和 $\sum_C a_C[C]$, $a_C>0$ の全体.

19) 正確に言うと, $u, v\in\overline{NE}(X)$ で $u+v\in R$ なら $u, v\in R$ となる半直線 $R\subset\overline{NE}(X)$.

20) $f: X\to X'$ が同型でない双有理正則写像であるとき, X の端射線で f で縮小されるものがある. よって, 端射線は双有理写像の研究にも重要である.

21) G. Fano によって発明され, [Is] によって再び取りあげられた.

22) Fano 多様体を直線を中心として blow up したものは非常に Fano に近い性質をもつので, flop を使うことにより [14] の方法が適用できる. 現在は, 二重射影によらない新分類もえられている. 報告 [Mu] をみられたい.

23) 局所的に $f(z_1, z_2, \cdots, z_n)(dz_1\wedge dz_2\wedge\cdots\wedge dz_n)^{\otimes N}$ なる表示をもつものを N-重標準形式という.

24) [11] の第2章では高次元の場合を念頭において, 第1章の一般的結果を使って, 2次元双有理幾何の基礎が再構築されている. 伝統的な方法(例えば [B, Chaps. 2-5])と比較してみよ.

25) blow down により第2 Betti 数(または Picard 数)が減少するので有限回しか繰り返せない.

26) K_X が nef でないことより端射線 R が存在し, その縮小写像 cont_R が f という仕組みである.

27) 3次元末端特異点は, ア)非特異点または イ) cDV 特異点を巡回群の作用によって割ったものと同型であるという [R1] の結果を使う. ア)の場合は [D] と [MS] により分類されていた. D. Morrison, I. Morrison との共著 [23] では4次元で ア)の場合が扱われている. 特に, Gorenstein でない場合の反倍標準因子(antibicanonical divisor)が調べられている.

28) 標準因子は何倍しても Cartier 因子にならない.

29) X が曲面の半安定退化の全空間の場合, 理想に近い形で角田 [Tn] によって解かれた.

30) [Ka1] では log-flip と呼ばれている.

森氏の論文

[1] On a generalization of complete intersections, J. Math. Kyoto Univ., **15** (1975), 619-646.

[2] On affine cones associated with polarized varieties, Japanese J. Math. New Series, **1** (1975), 301-309.

[3] The endomorphism rings of some abelian varieties, Japanese J. Math. New Series, **2** (1976), 109-130.

[4] The endomorphism rings of some abelian varieties II, Japanese J. Math. New Series, **3** (1977), 105-109.

[5] Graded factorial domains, Japanese J. Math. New Series, **3** (1977), 223-238.

[6] A remark on Tate conjecture on endomorphisms of abelian varieties, Proc. International Symposium on Algebraic Geometry, Kinokuniya, 1977, pp. 219-230.

[7] (With H. Sumihiro) On Hartshorne's conjecture, J. Math. Kyoto Univ., **18** (1978), 523-533.

[8] Projective manifolds with ample tangent bundles, Ann. of Math., **110** (1979), 593-606.

[9] Threefolds whose canonical bundles are not numerically effective, Proc. Natl. Acad. Sci. USA., **77** (1980), 3125-3126.

[10] (With S. Mukai) Classification of Fano 3-folds with the second Betti number≧2, Manuscripta Math., **36** (1981), 147-162.

[11] Threefolds whose canonical bundles are not numerically effective, Ann. of Math., **116** (1982), 133-176.

[12] Threefolds whose canonical bundles are not numerically effective, in 'Algebraic Threefolds', Lecture Notes in Math. **947**, Springer-Verlag, 1982, pp. 155-189.

[13] Cone of curves, and Fano 3-folds, Proc. of ICM 82 at Warsaw, 1983, 747-752.

[14] (With S. Mukai) On Fano 3-folds with the second Betti number≧2, in 'Algebraic Varieties and Analytic Varieties', Adv. Stud. Pure Math. **1**, Kinokuniya and North-Holland, 1983, pp. 101-129.

[15] (With S. Mukai) The uniruledness of the moduli of curves of genus 11, The proceedings of Japan-France conference in Algebraic Geometry, 1982, Springer Lecture Notes, **1016** (1983), 334-353.

[16] Hartshorne 予想と extremal ray, 数学, **35** (1983), 193-209.

[17] On degrees and genera of curves on smooth quartic surfaces in $\boldsymbol{P}^3$, Nagoya Math. J., **96** (1984), 127-132.

[18] On 3-dimensional terminal singularities, Nagoya Math. J., **98** (1985), 43-66.

[19] (With S. Mukai) Classification of Fano 3-folds with $B_2\geqq 2$, 1, in 'Algebraic and topological theories -to the memory of Dr. Takehiko MIYATA', Kinokuniya, 1986, pp. 496-545.

[20] (With Y. Miyaoka) A numerical criterion of uniruledness, Ann. of Math., **124** (1986), 65-69.

[21] Classification of higher dimensional varieties, in 'Algebraic Geometry, Bowdoin, 1985', Proc. Symp. Pure Math. **46**, Part I, Amer. Math. Soc., 1987, pp. 269-331.

[22] Flip conjecture and the existence of minimal models for 3-folds, Journal of the Amer. Math. Soc., **1** (1988), 117-253.

[23] (With D. Morrison and I. Morrison) On four-dimensional terminal quotient singularities, Math. Comp., **51** (1988), 769-786.

[24] (With C. H. Clemens and J. Kollár) Higher dimensional complex geometry, A summer seminar at the University of Utah Salt Lake City, 1987, Astérisque **166** (1988).

[25] Birational classification of algebraic 3-folds, Proc. JAMI inaugural conf., ed. J. Igusa, The Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore, 1989, pp. 307-311.

文　献

[B] Beauville, A., Complex algebraic surfaces, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1983.

[D] Danilov, V. I., The birational geometry of toric 3-folds, Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser. Mat., **46** (1982), 972-981; English transl. in Math. USSR Izv., **21** (1983), 269-280.

[F] Francia, P., Some remarks on minimal models. I, Compositio Math., **40** (1980), 301-313.

[H] Hartshorne, R., Ample subvarieties of algebraic varieties, Lecture Notes in Math. **156**, Springer-Verlag, 1970.

[Ii] 飯高茂，代数多様体の極小モデル理論について，数学，**41** (1989), 59-64.

[Is] Iskovskih, V. A., Fano 3-folds. II, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., **42** (1978), 504-549; English transl. in Math. USSR Izv., **12** (1978), 469-506.

[Ka1] Kawamata, Y., Crepant blowing-up of 3-dimensional canonical singularities and its application to degeneration of surfaces, Ann. of Math., **127** (1988), 93-163.

[Ka2] 川又雄二郎，高次元多様体の分類理論，数学，**40** (1988), 97-114.

[KMM] Kawamata, Y., Matsuda, K. and K. Matsuki, Introduction to the minimal model program, in 'Algebraic Geometry, Sendai', Adv. Stud. Pure Math., **10** (1987), 283-360, Kinokuniya and North-Holland.

[Ko1] Kollár, J., The structure of algebraic threefolds, Bull. Amer. Math. Soc., **17** (1987), 211-273.

[Ko2] Kollár, J., Flops, Nagoya Math. J., **113** (1989), 15-36.

[Ko3] Kollár, J., Flips, flops, minimal models etc., preprint, 1990.

[L] Lazarsfeld, R., Some applications of the theory of positive vector bundles, in 'Complete intersections, Acireale', Lect. Notes in Math., **1092**, Springer-Verlag, 1984.

[Ma] Mabuchi, T., $\boldsymbol{C}^3$-actions and algebraic threefolds with ample tangent bundle, Nagoya Math. J., **69** (1978), 33-64.

[Mi] Miyaoka, Y., On the Kodaira dimension of minimal threefolds, Math. Ann., **281** (1988), 325-332.

[MS] Morrison, D. and G. Stevens, Terminal quotient singularities in dimension tree and four, Proc. Amer. Math. Soc., **90** (1984), 15-20.

[Mu] Mukai, S., Biregular classification of Fano threefolds and Fano manifolds of coindex 3, Proc. Natl. Acad. Sci. USA, **86** (1989), 3000-3002.

[O] Ochiai, T., On compact Kähler manifolds with positive bisectional curvature, Proc. Symp. Pure Math., **27** (1975), 113-123.

[R1] Reid, M., Minimal models of canonical 3-folds, Adv. Stud. Pure Math., **1** (1983), 131-180, Kinokuniya and North-Holland.

[R2] Reid, M., Young person's guide to canonical singularities, Proc. Symp. Pure Math., **46** (1987), 345-416.

[S] Shokurov, V. V., The non-vanishing theorem, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., **49** (1985), 635-661; English transl. in Math. USSR Izv., **26** (1986), 591-604.

[SY] Siu, Y. T. and S.-T. Yau, Compact Kähler manifolds of positive bisectional curvature, Inv. Math., **59** (1980), 189-204.

[Tj] 辻元：Minimal model 予想の微分幾何学的側面，数学，**42** (1990), 1-15.

[Tn] Tsunoda, S., Degeneration of surfaces, in 'Algebraic Geometry, Sendai', Adv. Stud. Pure Math., **10** (1987), 755-764, Kinokuniya and North-Holland.

[W] Wilson, P. M. H., Toward a birational classification of algebraic varieties, Bull. London Math. Soc., **19** (1987), 1-48.

（むかい　しげる・名古屋大学理学部）

森　重文氏

隅　広　秀　康

1990 年京都で開催された国際数学者会議において 4 名の Fields 賞受賞者が発表され，日本からは森重文教授(京都大学数理解析研究所)が受賞された．今回の受賞は森氏本人はもとより，日本の数学界にとっても小平邦彦，広中平祐両氏に続く日本人として 3 人目の快挙であり，誠に喜ばしいできごとである。今回の記念すべき受賞に際し，森重文氏の経歴と永年親交のある者の 1 人として同氏との研究を通しての想い出や感想を述べてみた